Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Г.В. Куча, И.И. Мосалева

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания
к лабораторной работе
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
2011

УДК 531.12 (076)
ББК 22.213я7
К 95

Рецензент – профессор, кандидат технических наук Р.В.Ромашов

Куча, Г. В.
К 95 Динамика материальной точки: методические указания / Г.В. Куча, И.И. Мосалева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2011. - 45 с.

В методических указаниях рассмотрены общие формулы и определения по данной теме, приведены контрольные вопросы, варианты заданий и примеры выполнения заданий, даны рекомендации к решению задач.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы «Динамика материальной точки» по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки 280700.62 Техносферная безопасность, 201000.62 Биотехнические системы в технологии, 151900.62 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 190700.62 Технологии транспортных процессов, 190600.62 эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов.

УДК 531.12 (076)
ББК 22.213я7

Содержание

Введение

Настоящие методические указания включают основные формулы и определения по динамике точки, общие рекомендации к решению типовых задач по этому разделу, а также вопросы для самоконтроля, на которые необходимо ответить прежде, чем приступать к выполнению задания.

В методических указаниях содержатся условия лабораторной работы Д1 «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки», варианты заданий. Кроме того подробно рассмотрены различные примеры решения задач.

Методические указания разработаны для студентов очной и заочной форм обучения.

1 Вторая основная задача динамики точки

Эта задача заключается в том, что по заданным силам, приложенным к движущейся материальной точке, массе этой точки и начальным условиям ее движения (начальному положению и начальной скорости), требуется определить движение этой точки.

1.1 Характеристика сил

Сила **F** в общем случае зависит от времени *t*, положения точки **r** и скорости **V**:

$$\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{V})$$

Однако в ряде практических случаев сила оказывается функцией лишь одного из этих аргументов или является постоянной величиной.

1 *Постоянная по величине и направлению сила*.

Таковы: сила тяжести, сила сухого трения, действующая на тело, движущееся по наклонной плоскости.

2 *Силы, зависящие только от времени* **F=F(t)**.

Такой силой является, например, сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата, или сила, с которой двигатель возвратно-поступательным движением своих частей действует на фундамент, или сила, втягивающая (выталкивающая) намагниченный сердечник в катушку, по обмотке которой течет переменный электрический ток.

Во многих случаях эти силы имеют периодический характер, поэтому представляются тригонометрическими функциями.

3 *Силы, зависящие только от положения точки* **F=F(r)**.

Простейшим примером такого рода силы может служить натяжение F упругой нити, связывающей (рисунок 1) движущуюся точку M с некоторым центром O, который можно выбрать так, чтобы при совпадении точек M и O удлинение нити равнялось нулю.

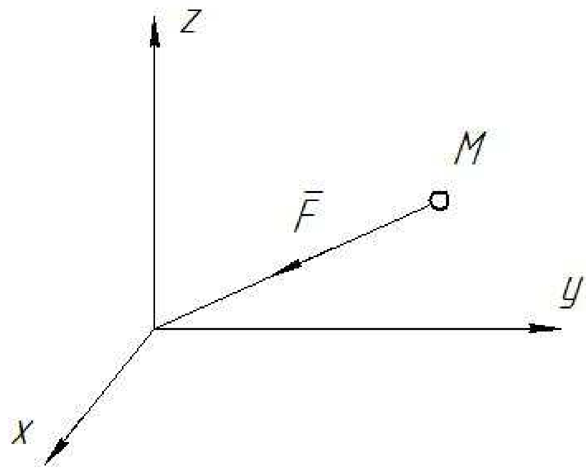

Рисунок 1

Тогда согласно закону Гука о пропорциональности величины упругой силы относительному удлинению нити будем иметь:

$$\overline{F} = -c \cdot \overline{OM} = -c \cdot \overline{r} \ ,$$

где учтено, что сила упругости **F** направлена вдоль OM от точки M к точке O. Коэффициент пропорциональности c характеризует упругие свойства нити и численно равен силе, растягивающей нить на единицу длины.

Проекции упругой силы на оси координат будут:

$$F_x = -\, cx; \ F_y = -\, cy; F_z = -\, cz.$$

4 *Силы, зависящие только от скорости точки* **F=F(V)**.

С такими силами мы чаще всего встречаемся тогда, когда рассматриваем движение тел в какой-либо среде, например, в воде или в воздухе. Сила сопротивления зависит в основном от скорости движения и направлена противоположно скорости.

Решение второй задачи динамики сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения точки в координатной форме:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x; \\ m\ddot{y} = F_y; \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \tag{1}$$

или в естественной форме:

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{dV}{dt} = F_\tau; \\ m \cdot \dfrac{V^2}{\rho} = F_n; \\ 0 = F_b \end{cases} \tag{2}$$

В этих уравнениях под F понимают равнодействующую всех сил, действующих на точку, в том числе и реакций связей, если точка не свободна. При интегрировании системы уравнений (1) в общем случае появляются шесть произвольных постоянных, которые определяют по начальным условиям. Начальные условия берутся из текста задачи.

Под *начальными условиями движения* точки понимают значения координат и проекций скорости точки в начальный момент движения, т. е.

при t=0

$$\begin{aligned} x &= x_0; \quad V_{x0} = \dot{x}_0; \\ y &= y_0; \quad V_{y0} = \dot{y}_0; \\ z &= z_0; \quad V_{z0} = \dot{z}_0; \end{aligned} \tag{3}$$

Если движение точки происходит в плоскости, то число уравнений (1) сокращается до двух, а число начальных условий до четырех:

при t=0

$$\begin{aligned} x &= x_0; \quad V_{x0} = \dot{x}_0; \\ y &= y_0; \quad V_{y0} = \dot{y}_0; \end{aligned} \tag{4}$$

При движении точки по прямой будем иметь одно дифференциальное уравнение и два начальных условия.

при t=0

$$x = x_0; \quad V_{x0} = \dot{x}_0; \tag{5}$$

1.2 Интегрирование дифференциальных уравнений движения

Интегрирование производят соответствующими методами, зависящими от вида полученных уравнений, т. е. от вида правой части в равенстве (1). В самом общем случае правые части дифференциальных уравнений зависят от времени (t), положения точки (x, y, z) и скорости точки ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$). Такие дифференциальные уравнения интегрируются до конца только в частных случаях, когда, например, правая часть является постоянной величиной, либо простейшей функцией только времени, либо только расстояния, проходимого точкой, либо только скорости точки и др.

В тех случаях, когда на точку, кроме постоянных сил, действует одна переменная сила, зависящая *только* от времени *t* или *только* от расстояния *x* или же *только* от скорости *V*, уравнение движения можно проинтегрировать методом разделения переменных (см. задачи 5, 6, 7).

Когда по условию задачи нужно найти скорость точки как функцию ее текущих координат и сила зависит только от этих координат или скорости точки, то из дифференциальных уравнений переменную t исключаем с помощью подстановки:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}$$

1.3 Определение постоянных интегрирования

Для определения постоянных интегрирования надо по данным задачи установить начальные условия в виде (3) или (4), или (5). При этом постоянные интегрирования можно определять непосредственно после каждого интегрирования.

Если дифференциальное уравнение движения является уравнением с разделяющимися переменными, то вместо введения постоянных интегрирования можно брать сразу от обеих частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах (см. задачу 6).

2 Контрольные вопросы

1. Что изучается в динамике?
2. Сформулировать законы механики Галилея-Ньютона.
3. Каковы две основные задачи динамики материальной точки?
4. Записать дифференциальные уравнения движения материальной точки в векторной, координатной и естественной формах.
5. Записать основной закон динамики материальной точки.
6. Записать начальные условия задачи.
7. Как определяются постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения точки?

3 Лабораторная работа Д1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

3.1 Содержание работы

В лабораторной работе Д1 студент решает одну задачу, номер которой определяется из таблицы 1. В таблице 1 по горизонтали указана первая цифра варианта, по вертикали – вторая цифра варианта. Номер задачи получается на пересечении соответствующих горизонтали и вертикали. Например, студент, имеющий вариант 32, решает задачу № 89.

Цель работы: научиться составлять и интегрировать дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Таблица 1 – Исходные данные

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	23	41	24	18	77	37	67	49	40
1	76	2	54	17	82	58	75	30	98	66
2	53	80	3	89	4	81	19	96	56	20
3	21	42	68	16	88	25	69	36	97	74
4	50	22	100	52	5	86	60	83	39	35
5	79	57	32	43	94	51	95	26	55	64
6	31	65	99	14	6	44	10	85	78	87
7	48	71	13	38	91	28	92	9	62	45
8	73	12	46	15	93	70	34	84	8	63
9	11	47	33	29	72	59	90	27	61	7

Задачи 1; 61

Тело массы 10 кг начинает движение из состояния покоя под действием переменной силы F=10t Н по горизонтальной шероховатой плоскости. Найти коэффициент трения f, если известно, что за время t=5с тело приобрело скорость V=10 м/с. Ускорение силы тяжести g принять равным 10 м/с^2.

Задачи 2; 62

Материальная точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы, возрастающей пропорционально времени; в начальный момент сила равнялась 2 Н. Найти закон движения точки, если ее движение начинается без начальной скорости, а в момент t=1 с скорость равна 2 м/с.

Задачи 3; 63

Материальная точка массы 10кг движется горизонтально под действием силы F_x=5+2t Н. Найти скорость точки через три секунды после начала движения, если ее начальная скорость $v_o = 3 \quad м/с$.

Задачи 4; 64

На материальную точку, совершающую прямолинейное движение, действует сила, равномерно убывающая с течением времени, и при t=4 с обращающаяся в ноль. Какой скорости достигнет точка по истечении четырех секунд и какой путь пройдет она за это время, если начальная скорость точки равна нулю, а начальное ускорение направлено в сторону действия силы и равно 3 м/с^2.

Задачи 5; 65

Точка массы 2 кг начинает движение со скоростью 2 м/с по горизонтальной прямой. На точку действует сила тяги, пропорциональная времени и постоянная сила сопротивления R=4 Н. Определить путь, пройденный точкой за 3 с, если известно, что ее скорость за это время увеличилась в 5 раз.

Задачи 6; 66

Точка массы 5 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы, убывающей на 20 Н в секунду. В начальный момент времени сила равна 100 Н и точка имеет скорость v_o=10 м/с. Найти закон движения точки и ее скорость через пять секунд после начала движения.

Задачи 7; 67

На материальную точку массы 2 кг, имеющую скорость v_o=10 м/с, начинает действовать сила, пропорциональная времени. Зная, что начальная величина силы равна 4 Н, а скорость точки через две секунды стала равной 30 м/с, найти путь, пройденный точкой за три секунды.

Задачи 8; 68

Точка массы 2 кг, начинает движение из состояния покоя под действием силы, возрастающей на 3 Н в секунду. Найти закон движения точки и ее скорость через восемь секунд после начала движения.

Задачи 9; 69

Материальная точка массы 10 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы, возрастающей пропорционально времени. Известно, что по истечении пяти секунд сила равнялась 20 Н. Определить закон движения точки, если ее начальная скорость v_o=2 м/с.

Задачи 10; 70

Точка массы 1 кг движется без начальной скорости горизонтально под действием силы, пропорциональной квадрату времени. Известно, что по истечении трех секунд скорость точки равнялась 81 м/с. Найти закон движения точки.

Задачи 11; 71

Материальная точка массы 1 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы F_x=5+t Н. Начальная скорость точки v_o=2 м/с. Найти закон движения точки и ее скорость через четыре секунды после начала движения.

Задачи 12; 72

Точка массы 1 кг движется горизонтально под действием силы F_x=5t+7 Н с начальной скоростью v_o=2 м/с. Найти путь пройденный точкой и ее скорость по истечении трех секунд от начала движения.

Задачи 13; 73

Точка массы 1 кг начинает движение из начала координат с начальной скоростью v_o=5 м/с под действием силы $F=t^2+4$ Н. Движение происходит по горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения f=0,2. Определить скорость точки в конце третьей секунды и путь, пройденный ею за это время, полагая ускорение силы тяжести g=10 м/c^2.

Задачи 14; 74

На точку массы 2 кг, находящуюся на гладкой горизонтальной плоскости и имеющую скорость 10 м/с, начала действовать сила F_x=3+4t Н, направленная по этой скорости. Определить путь, пройденный точкой в течение шести секунд и скорость ее в конце четвертой секунды.

Задачи 15; 75

Точка массы 2 кг начинает движение по прямой с начальной скоростью 5 м/с и продолжает его под действием силы F_x=8-4t Н. Найти максимальное значение скорости точки. Через сколько секунд скорость будет равна нулю?

Задачи 16; 76

Точка массы 5 кг движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы F_x=80-20t Н. Начальная скорость точки равна 14 м/с и совпадает по направлению с направлением вектора силы. Какой путь пройдет точка к тому времени, когда ее скорость станет максимальной?

Задачи 17; 77

Сила тяги трамвайного мотора при пуске его в ход возрастает на 100 Н в секунду. Зная, что масса вагона 3000 кг и что коэффициент трения между вагоном и рельсами равен 0,01, определить закон движения вагона в пусковой период, полагая g=10 м/с^2.

Задачи 18; 78

Материальная точка массы 2 кг движется по горизонтальной оси X под действием силы, проекция которой на эту ось F_x=6(1-t) Н. Определить положение точки в момент остановки, если в начальный момент x_o=0; v_o=0.

Задачи 19; 79

Материальная точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы пропорциональной времени, которая при t=1 с равна 12 Н. Определить закон движения точки, если ее начальная скорость v_o=1 м/с, была направлена в сторону действия силы.

Задачи 20; 80

Точка массы 3 кг движется из состояния покоя по гладкой горизонтальной прямой под действием силы F_x=36-9t^2 Н. Определить путь пройденный точкой к тому моменту времени, когда ее скорость станет максимальной.

Задачи 21; 81

Определить скорость v_o, которую нужно сообщить точке массы m для того, чтобы она двигаясь вертикально вверх поднялась на высоту Н. Сила сопротивления воздуха $R=mgk^2v$, где k – постоянный коэффициент.

Задачи 22; 82

Пуля пробив доску толщиной h, изменяет свою скорость от значения v_1 до значения v_2. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент пропорциональности силы и время движения пули в доске.

Задачи 23; 83

Точка массы 1 кг, имея начальную скорость 9 м/с движется вдоль горизонтальной прямой, преодолевая силу сопротивления $R=2v^{1/2}$ Н. Найти закон движения точки.

Задачи 24; 84

Материальная точка, двигаясь по горизонтальной прямой, имела в некоторый момент скорость v_o. Определить ее скорость по истечении следующих t секунд, а также пройденный ею за это время путь, если сила сопротивления движению равна $R=kmV^2$, где m – масса точки, k=const.

Задачи 25; 85

Автомобиль массы m движется по горизонтальной прямой. Принимая силы тяги мотора постоянной и равной Q, а суммарное сопротивление движению $R=k^2v^2$, определить скорость автомобиля, когда он пройдет путь S, если начальная скорость его равна v_o.

Задачи 26; 86

Лодке массы m сообщена скорость v_o. Через τ секунд после начала движения, ее скорость уменьшилась вдвое. Каков закон движения лодки, если сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки?

Задачи 27; 87

Точка массы 1 кг движется горизонтально в сопротивляющейся среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости. Найти коэффициент пропорциональности k, если точка при начальной скорости 1 м/с прошла до остановки 10 м.

Задачи 28; 68

Материальная точка массы m движется горизонтально, начиная движение со скоростью v_o в среде, сила сопротивления которой $R = kv^{1/2}$, где v – скорость точки, k=const. Найти время движения и путь, пройденный точкой до остановки.

Задачи 29; 89

Точка массы 3 кг движется вдоль горизонтальной прямой с начальной скоростью v_o=16 м/с и испытывает сопротивление среды $R = 8v^{1/2}$ Н. Найти время движения и путь, пройденный точкой до остановки.

Задачи 30; 90

Точке массы m сообщили горизонтальную скорость v_o, после чего она продолжает движение по шероховатой горизонтальной поверхности с коэффициентом трения равным f, испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости, с коэффициентом пропорциональности равным km. Определить путь, пройденный точкой до остановки.

Задачи 31; 91

Сила, действующая на автомобиль массы m в первое время после начала движения выражается формулой F=a-bv, где a, b постоянные коэффициенты, v – скорость автомобиля. Выразить силу F в функции времени.

Задачи 31; 92

Тело массы m брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_o. Предполагая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости тела, причем коэффициент пропорциональности равен μ, найти с какой скоростью тело упадет обратно на Землю.

Задачи 33; 93

Точка массы m падает без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости v. Определить наибольшую скорость точки, если при v=1м/с сила сопротивления равна одной трети силы тяжести. Какова зависимость скорости от времени?

Задачи 34; 94

Лодка массы 60 кг приобретает после толчка скорость v_o=0,5 м/с. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости v лодки и выражается формулой R=4v Н, определить, через сколько секунд скорость лодки станет втрое меньше начальной и какой за это время она пройдет путь?

Задачи 35; 95

Точка массы 5 кг движется горизонтально, имея начальную скорость v_o=64 м/с. Сила сопротивления, действующая на точку, пропорциональна ее скорости v и выражается формулой R=10v Н. Определить, через сколько секунд скорость точки уменьшится вдвое и какой за это время она пройдет путь.

Задачи 36; 96

Груз массы m бросают вертикально вверх, сообщая ему такую начальную скорость, при которой он, двигаясь в безвоздушном пространстве, поднялся бы на высоту 10 м. Определить, на какую высоту поднимется груз, если он движется в воздухе, где сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости v точки и выражается формулой $R=0{,}05mv^2$ Н.

Задачи 37; 97

Груз массы m начинает падать в воздухе вертикально вниз без начальной скорости. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости v груза и определяется формулой $R=0{,}05mv^2$. Определить, пройдя какой путь, груз приобретает скорость, равную половине предельной.

Задачи 38; 98

Тело массы m начинает падать без начальной скорости в среде, сопротивление которой определяется формулой $R=0{,}1mv$. Через сколько секунд скорость v тела достигнет половины предельной?

Задачи 39; 99

Груз массы m бросили вертикально вверх в среде, сопротивление которой определяется формулой $R=0{,}05mv$. Определить, через сколько секунд груз достигнет наивысшей точки, если начальная скорость его такова, что, двигаясь без сопротивления, он достиг бы наивысшей точки через две секунды после начала движения.

Задачи 40; 100

Лодка замедляет свое движение, преодолевая сопротивление воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 2 м/с. Через четыре секунды ее скорость равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки уменьшится до 0,5 м/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

Задача 41

Материальная точка массы 2 кг отталкивается от неподвижного центра O силой, величина которой пропорциональна расстоянию x от цента O и на расстоянии 0,1 м от него равна 1,8 Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент точка находилась в центре O и имела начальную скорость $v_o=0{,}6$ м/с.

Задача 42

Материальная точка массы m отталкивается от неподвижного центра О силой, величина которой равна $\mu^2 mx$; x – расстояние точки до центра О, а μ – постоянный коэффициент. Найти закон движения точки, если в начальный момент времени $x_o=b$; $v_o=0$.

Задача 43

Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними, коэффициент пропорциональности равен K. Через сколько времени точка попадет в центр притяжения, если начальное расстояние до центра равно x_o, а начальная скорость равна нулю.

Задача 44

Материальная точка массы m движется под действием силы притяжения к центру О. Величина силы равна $m\pi^2 x$, где x – расстояние точки до центра притяжения. Определить, какой путь пройдет точка за первую секунду движения, если при t=0; $x_o=100$ м; $v_o=0$.

Задача 45

Материальная точка М притягивается к центру О силой $F=\dfrac{3k^2m}{14x^4}$, где x=OM; m – масса точки; k =const. В начальный момент времени расстояние $OM_o=x_o$ и $v_o=0$. Определить скорость точки, когда $OM=\dfrac{x_o}{2}$.

Задача 46

Точка массы 1,5 кг движется по горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения f=0,1 под действием силы F=4,5+3x Н. Найти закон движения точки,если в начальный момент времени $x_o=1$м и $v_o=2\sqrt{2}$ м/с. Принять g=10 м/с^2.

Задача 47

Точка массы m, имеющая нулевую начальную скорость притягивается к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию точки до этого центра. Определить скорость точки, когда она приблизится к центру на половину первоначального расстояния L, если известно, что на расстоянии от центра O равным $L/4$, скорость точки равна $\sqrt{15}$.

Задача 48

Материальная точка массы m движется под действием силы притяжения к неподвижному центру O; сила обратно пропорциональна кубу расстояния движущейся точки до центра O и пропорциональна массе точки. Определить закон движения точки, если при t=0, x_o=2м, v_o=0,5 м/с.

Задача 49

Материальная точка массы m движется без начальной скорости прямолинейно под действием силы отталкивания от неподвижного центра O, пропорциональной расстоянию от точки до этого центра. В начальный момент времени сила равна Q, а расстояние точки до центра O равно b. Найти скорость точки, когда она пройдет путь, равный b.

Задача 50

Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы F_x=2(x+1) Н. Найти закон движения точки, если при t=0;v_o=2 м/с, а x_o=1 м. Какой путь пройдет точка, прежде чем ее скорость станет равной 20 м/с?

Задача 51

Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы F_x=2(x+1) Н. Какова скорость точки, когда она пройдет путь, равный 50 метрам, если при t=0, v_o=2 м/с, а x_o=1 м. Сколько времени потратит точка на этот путь?

Задача 52

Точка массы 2 кг движется вдоль горизонтальной оси OX под действием силы F_x=100x Н. Определить, какой путь пройдет точка, когда ее начальная скорость v_o утроится, если при t=0; v_o=10 м/с, а x_o=0.

Задача 53

Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с минимальной начальной скоростью, достаточной для удаления тела в бесконечность. Определить скорость тела при удалении его от поверхности Земли на расстояние земного радиуса. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 54

Точка массы m находится на прямой, проходящей через два центра А и В, расстояние между которыми АВ=2l. Каждый центр притягивает точку силой, пропорциональной расстоянию точки до него; коэффициент пропорциональности у обеих сил одинаков и равен mk^2. В начальный момент точка находится на расстоянии x_o от середины О отрезка АВ, не имея начальной скорости. Найти закон движения точки.

Задача 55

На материальную точку массы 1 кг движущуюся вдоль горизонтальной оси OX, действует сила, проекция которой на ось OX F_x=-4x Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент x_o=0, v_o= 2м/с.

Задача 56

Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы F_x=2(x+1) Н. Какой путь пройдет точка, когда ее скорость станет равной 10 м/с, если при t=0; v_o=2 м/с, а x_o=1 м?

Задача 57

Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x=2(x+1)$ Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент $v_o=2$ м/с, $x_o=1$ м.

Задача 58

Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x=2(x+1)$ Н. За какое время точка пройдет путь, равный 10 м, если при $t=0$; $v_o=2$ м/с, а $x_o=1$ м.

Задача 59

Материальная точка массы 2 кг движется вдоль горизонтальной оси под действием силы $F_x=0,5(3-x)$ Н. Определить закон движения точки, если в начальный момент $x_o=0$, $v_o=0$.

Задача 60

Материальная точка, удаленная от поверхности Земли на расстоянии Земного радиуса R, начинает падать без начальной скорости под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра Земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость точки в момент падения на Землю.

4 Рекомендации к решению задач

Вторую задачу динамики материальной точки рекомендуется решать в следующем порядке:

1) выбрать систему координат, имеющую начало в начальном положении точки;

2) записать начальные условия движения точки;

3) изобразить на рисунке точку, смещенную относительно начала координат в сторону положительных направлений осей координат;

4) изобразить на рисунке приложенные к точке активные силы и силы реакции связей;

5) составить дифференциальные уравнения движения материальной точки;

6) проинтегрировать систему дифференциальных уравнений; при этом надо учитывать, что силы, приложенные к материальной точке могут быть:

а) постоянными силами;

б) силами, зависящими от времени;

в) силами, зависящими от положения точки;

г) силами, зависящими от скорости точки;

7) выразить постоянные интегрирования через начальные условия и определить искомые величины.

5 Примеры решения задач

5.1 Постоянная по величине и направлению сила F = const

Задача 1

В результате полученного толчка кирпич начал скользить вниз с начальной скоростью v_o=2 м/с по неподвижной ленте конвейера, расположенной под углом α=30^o к горизонту (рисунок 2). Определить путь S, пройденный кирпичом за промежуток времени τ=2 с, если коэффициент трения скольжения кирпича о ленту конвейера равен f=0,4. Кирпич считать точечной массой.

Дано: v_o = 2 м/с; α = 30^o; τ = 2 с; f = 0,4.

Определить: S-?

Решение

Направим ось x вдоль наклонной ленты конвейера вниз (рисунок 2). Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении кирпича (точка O). Кирпич рассматриваем как материальную точку. Начальная скорость $\bar{v}_o$ направлена вдоль оси x вниз. Следовательно, начальные условия движения имеют вид: при t_o = 0; x_o=0; $\dot{x}_o = v_o$.

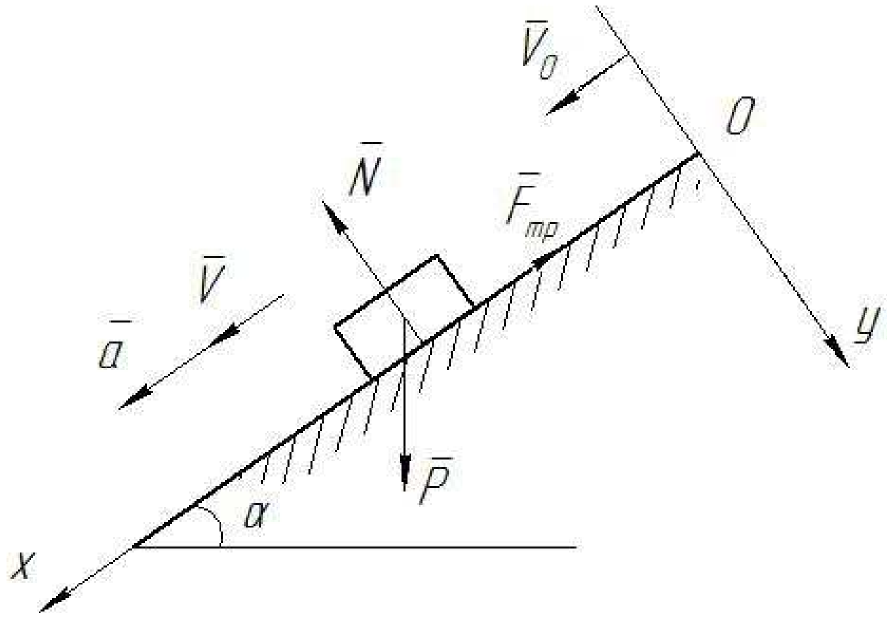

Рисунок 2

На кирпич действует одна активная сила – сила тяжести $m\bar{g}$. Применив принцип освобождаемости от связей, отбросим ленту конвейера, заменив ее действие на кирпич силой реакции связи. Эта сила имеет две составляющие – нормальную реакцию поверхности $\overline{N}$, перпендикулярную к плоскости ленты, и силу трения скольжения $\overline{F}_{тр}$ кирпича о ленту конвейера, направленную противоположно движению.

Запишем основной закон динамики точки

$$m\bar{a} = \sum \overline{F}_k$$

или

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \overline{N} + \overline{F}_{тр}$$

и составим дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр} \qquad (6)$$

и на ось y:

$$m\ddot{y} = mg \cdot cos\alpha - N \qquad (7)$$

Так как точка движется по прямой x, то проекция ее ускорения на ось y будет равна нулю, т.е. $\ddot{y} = 0$.

Из уравнения (7) получим, что

$$N = mg\cos\alpha .$$

Сила трения $F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$.

Уравнение (6) принимает вид

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha .$$

После сокращения на m находим

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \tag{8}$$

Проинтегрируем дважды полученное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1 \tag{9}$$

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{10}$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 подставим в уравнение (9) начальные условия движения (при $t_o = 0$, $\dot{x} = v_o$), найдем, что $C_1 = v_o$. Для определения постоянной интегрирования C_2 подставим в уравнение (10) начальные условия движения (при t_o=0, $x_o = 0$), откуда следует, что $C_2 = 0$.

Подставив $C_1 = v_o$, $C_2 = 0$ в (9) и (10), получаем уравнение движения кирпича

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_o t \tag{11}$$

и уравнение его скорости

$$v = \dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + v_o \tag{12}$$

Для определения искомого пути S, пройденного за τ секунд, положим в уравнении (11) t = τ, а x = S, получим

$$S = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2} + v_o t = 9{,}8(\sin 30^o - 0{,}4\cos 30^o)\frac{4}{2} + 2{,}2 = 7{,}02\textit{м}.$$

Ответ: S=7,02 м.

Задача 2

Вагон (рисунок 3) скатывается под уклон в 5°, считая сопротивление трения постоянным и коэффициент трения равным 0,02, определить скорость вагона через 10 с после начала движения и пройденный им к этому времени путь.

Дано: $V_o = 0$; $\alpha = 5^o$; $\tau = 10$ с; f = 0,02.

Определить: V, S-?

Решение

Рассматриваем вагон как материальную точку. Направим ось x по наклонной поверхности вниз (рисунок 3). Возьмем начало отсчета на оси x в начальном положении вагона (точка O). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при} \qquad t_o=0;\ x_o=0;\ \dot{x}_o = V_o = 0 \tag{13}$$

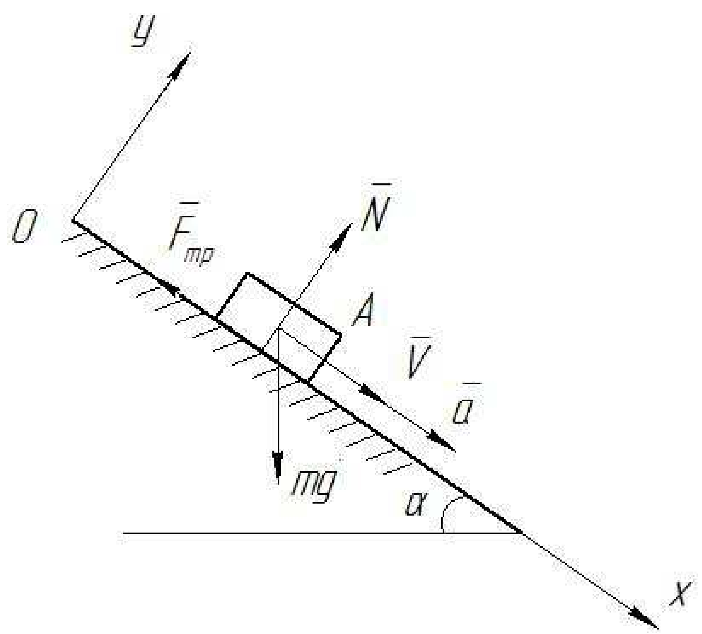

Рисунок 3

На материальную точку действует одна активная сила – сила тяжести $m\bar{g}$. Применив принцип освобождаемости от связей, отбросим наклонную поверхность, заменив ее действие на материальную точку силой реакции связи. Эта сила имеет две составляющие – нормальную реакцию $\bar{N}$, перпендикулярную поверхности, и силу трения скольжения $\bar{F}_{тр}$, направленную противоположно движению.

Запишем основной закон динамики точки

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

или

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{тр}$$

и составим дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр} \tag{14}$$

и на ось y:

$$m\ddot{y} = mg \cdot cos\alpha - N \tag{15}$$

Ввиду: малость угла α = 5 ≈ 0,087рад, имеем: sinα ≈α, cosα ≈ 1 и, следовательно,

$$m\ddot{x} = mg \cdot \alpha - F_{тр} \tag{16}$$

$$m\ddot{y} = mg - N \tag{17}$$

Так как точка движется по прямой x, то проекция ее ускорения на ось y будет равна нулю, т.е. $\ddot{y} = 0$.

Из уравнения (17) получим, что

$$N = mg\ .$$

Сила трения $F_{тр} = fN = f \cdot mg$.

Уравнение (16) принимает вид

$$m\ddot{x} = mg \cdot \alpha - f \cdot mg\ .$$

После сокращения на m находим

$$\ddot{x} = g(\alpha - f)$$

$$\ddot{x} = 9{,}81(0{,}087 - 0{,}02)$$

$$\ddot{x} = 0{,}657$$

Проинтегрируем дважды полученное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = 0{,}657t + C_1 \tag{18}$$

$$x = 0{,}657 \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{19}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, подставим в уравнения (18) и (19) начальные условия движения (13), найдем, что $C_1 = V_o = 0$, $C_2=0$.

Подставив $C_1=0$, $C_2=0$ в (19) и (18), получаем уравнение движения вагона

$$x = 0{,}3285 \cdot t^2 \tag{20}$$

и уравнение его скорости

$$\dot{x} = 0{,}657t \tag{21}$$

При t = τ = 10 с находим

$$V = 0{,}657 \cdot 10 = 6{,}57 \;\; м/с$$

$$S = 0{,}3285 \cdot 10^2 \approx 33 \;\; м$$

Ответ: V = 6,57 м/с; S = 33 м.

5.2 Сила, зависящая от времени F = F(t)

Задача 3

К материальной точке массы m, находящейся в покое, прикладывается в момент времени t = 0 сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$F = F_0 \cdot \cos \omega t$$

Определить движение точки под действием этой силы.

Дано: m; $V_o = 0$; $t_0 = 0$; $F = F_0 \cdot \cos \omega t$

Определить: x = x(t)-?

Решение

Принимаем линию действия силы *F* за ось Ox, а положение покоя точки за начало координат (рисунок 4). Начальные условия движения имеют вид:

при $t_o=0$; $x_o=0$; $\dot{x}_o = V_o = 0$

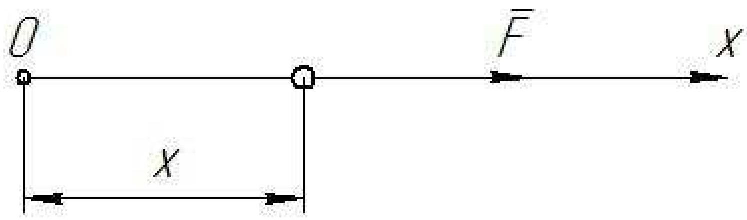

Рисунок 4

Запишем основной закон динамики точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

и составим дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = F$$

или

$$m\ddot{x} = F_0 \cdot \cos \omega t$$

После интегрирования получим

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} \cdot \sin \omega t + C_1 \tag{22}$$

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \cos \omega t + C_1 t + C_2 \tag{23}$$

Подставляя начальные условия в уравнения (22) и (23), получим

$$0 = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0$$

$$0 = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cdot 1 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

Таким образом, из уравнения (23) получаем искомый закон движения точки:

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \cos \omega t + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

или

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t)$$

Точка совершает гармоническое колебание.

Задача 4

Корабль водоизмещением m, движущийся прямым курсом, в момент включения двигателя имел скорость V_0.Считая, что величина силы упора винтов Q пропорциональна времени (Q = kt), а сила сопротивления воды F_c=const, определить путь S, пройденный кораблем за время t_1 если за это время его скорость увеличилась в два раза.

Дано: m; V_o; $t_0 = 0$; Q = kt; F_c=const, t_1, $V = 2V_o$

Определить: S - ?

Решение

Примем корабль за материальную точку, а направление движения – за ось Ох, взяв начало координат в начальном положении корабля (рисунок 5). Начальные условия движения имеют вид:

при $t_o = 0$; $x_o=0$; $\dot{x}_o = V_o$

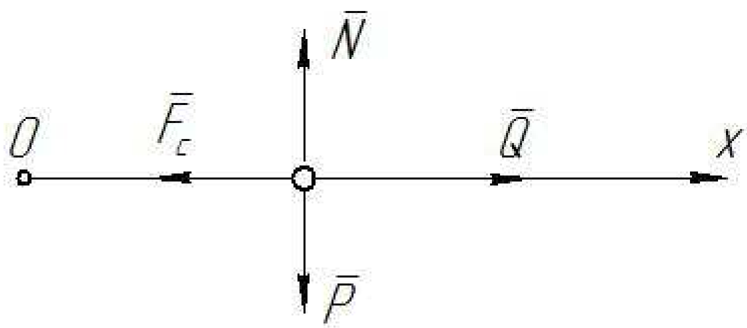

Рисунок 5

На корабль действуют силы: вес **P**, выталкивающая сила (архимедова сила) **N**, сила упора винтов **Q**, сила сопротивления **F_c**.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ох:

$$m\ddot{x} = Q - F_c$$

или

$$m\ddot{x} = kt - F_c$$

После интегрирования получим

$$\dot{x} = \frac{k}{m} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{F_c}{m} \cdot t + C_1 \tag{24}$$

$$x = \frac{k}{2m} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{F_c}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \tag{25}$$

Используя начальные условия, из уравнений (24) и (25) найдем

$$C_1 = V_o, \quad C_2 = 0$$

Получим уравнения, определяющие в любой момент времени скорость точки

$$\dot{x} = \frac{k}{2m} \cdot t^2 - \frac{F_c}{m} \cdot t + V_0 \tag{26}$$

и пройденный путь

$$x = \frac{k}{6m} \cdot t^3 - \frac{F_c}{2m} \cdot t^2 + V_0 t \tag{27}$$

Так как

при $t = t_1$; $x = S$; $\dot{x} = V = 2V_o$,

то из уравнения (26)

$$2V_0 = \frac{k}{2m} \cdot t_1^2 - \frac{F_c}{m} \cdot t_1 + V_0$$

откуда

$$k = \frac{2m}{t_1^2}\left(V_0 + \frac{F_c}{m} \cdot t_1\right).$$

Из уравнения (27) найдем пройденный путь

$$S = \frac{2m}{t_1^2}\left(V_0 + \frac{F_c}{m} \cdot t_1\right) \cdot \frac{t^3}{6m} - \frac{F_c}{2m} \cdot t^2 + V_0 t$$

или

$$S = \frac{4}{3} V_0 t_1 - \frac{F_c}{6m} \cdot t_1^2$$

5.3 Сила, зависящая от положения F = F(r)

Задача 5

Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли равен R), сообщена начальная вертикальная скорость $V_0 = \sqrt{2gR}$ (вторая космическая скорость). Определить уравнение движения точки, пренебрегая силой сопротивления воздуха.

Дано: R, $V_o = \sqrt{2gR}$;

Определить: x = x(t)-?

Решение

Направим ось Ох вдоль линии движения точки (рисунок 6). Начало координат поместим в центре Земли (в данной задаче это удобнее). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при} \qquad t_o = 0; \quad x_o = R; \quad \dot{x}_0 = V_0 = \sqrt{2gR}.$$

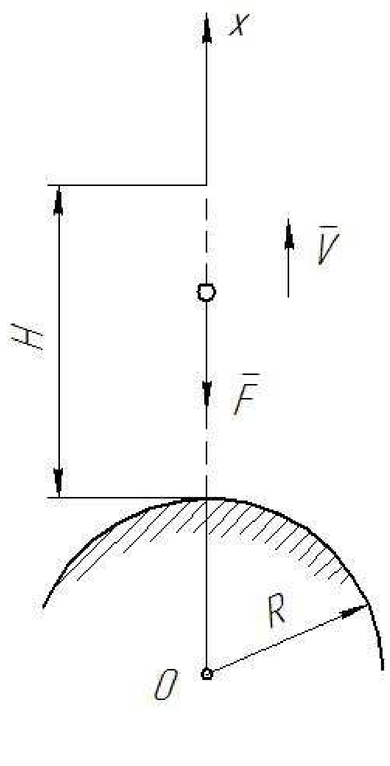

Рисунок 6

На точку действует лишь сила **F** притяжения к Земле, по величине обратно пропорциональная квадрату расстояния от точки до центра Земли:

$$F = \frac{k}{x^2}.$$

Отсюда

$$k = Fx^2$$

При x = R сила F = mg. Следовательно,

$$k = mgR^2$$

и

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}$$

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = -F$$

или

$$m\ddot{x} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2} \tag{28}$$

Для интегрирования этого уравнения применим подстановку

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}.$$

Уравнение (28) примет вид

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}.$$

Разделяем переменные

$$\dot{x}d\dot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}dx$$

и интегрируем

$$\int \dot{x}d\dot{x} = -\int \frac{gR^2}{x^2}dx.$$

После интегрирования получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{gR^2}{x} + C_1 \tag{29}$$

Подставляя начальные условия в уравнение (29), получим

$$\frac{\left(\sqrt{2gR}\right)^2}{2} = \frac{gR^2}{R} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Таким образом,

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{gR^2}{x}$$

или

$$\dot{x}^2 = \frac{2gR^2}{x}$$

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2g}R}{\sqrt{x}}$$ (при извлечении корня взят знак «плюс», так как рассматривается только движение вверх),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2g}R}{\sqrt{x}}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{2g}R\int dt,$$

получим

$$\frac{2x^{3/2}}{3} = \sqrt{2g}R \cdot t + C_2 \qquad (30)$$

Используя начальные условия, из уравнения (30) найдем

$$C_2 = \frac{2R^{3/2}}{3}.$$

Окончательно, из уравнения (30) получим искомое уравнение движения точки:

$$\frac{2x^{3/2}}{3} = \sqrt{2g}R \cdot t + \frac{2R^{3/2}}{3}$$

или

$$x = \left[R^{3/2} + \frac{3R}{2}\sqrt{2g} \cdot t\right]^{2/3}.$$

Задача 6

Материальная точка М массы m движется прямолинейно по оси Ox (рисунок 7). Точка отталкивается от неподвижного центра О силой **F**, пропорциональной массе m и расстоянию, причем коэффициент пропорциональности равен k = 4. Найти закон движения точки, если начальное расстояние ее от центра О равно $x_0 = 5$ м, а начальная скорость $V_0 = 2$ м/с.

Дано: m, $x_0 = 5$ м; $V_o = 2$ м/с; F = kmx

Найти: x = x(t)-?

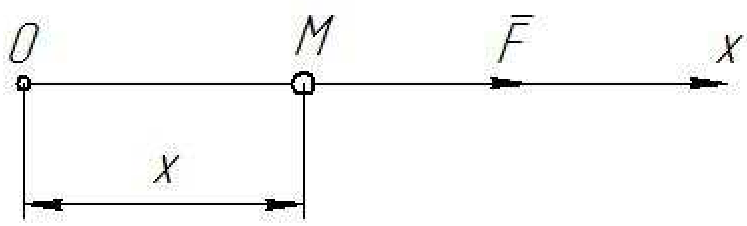

Рисунок 7

Решение

Направим ось Ox вдоль линии движения точки (рисунок 7). Начальные условия движения имеют вид:

при $t_o = 0$; $x_o = 5$ м; $V_o = 2$ м/с (31)

На точку действует лишь сила F = kmx.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = F$$

или

$$m\ddot{x} = kmx$$

$$\ddot{x} = kx \qquad (32)$$

Решим полученное дифференциальное уравнение (32).

Первый способ.

Для интегрирования этого уравнения применим подстановку

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}.$$

Уравнение (32) примет вид

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = kx.$$

Разделяем переменные

$$\dot{x}d\dot{x} = kxdx$$

и интегрируем

$$\int_{V_0}^{V} \dot{x}d\dot{x} = 4\int_{x_0}^{x} xdx.$$

После интегрирования получим

$$\left.\frac{\dot{x}^2}{2}\right|_{V_0}^{V} = 4 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^{x}$$

или

$$\frac{1}{2}\left(V^2 - V_0^2\right) = 2\left(x^2 - x_0^2\right)$$

$$V^2 = 4\left(x^2 - x_0^2\right) + V_0^2$$

$$V^2 = 4\left(x^2 - 5^2\right) + 2^2$$

$$V^2 = 4x^2 - 96$$

$$V = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x^2 - 24}.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2dt$$

и интегрируем

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2t.$$

После интегрирования получим

$$\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 24}\right|_{x_0}^{x} = 2t,$$

или

$$2t = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 24}\right| - \ln\left|5 + \sqrt{5^2 - 24}\right|,$$

$$2t = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - 24}}{6}\right|.$$

Следовательно,

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 24}}{6} = e^{2t},$$

$$x + \sqrt{x^2 - 24} = 6e^{2t}.$$

Из этого соотношения находим

$$x^2 - 24 = \left(6e^{2t} - x\right)^2,$$

откуда

$$x = \frac{3e^{4t} + 2}{e^{2t}}$$

и, окончательно, искомый закон движения точки

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$$

Второй способ.

Так как в данном случае сила $F = kmx$ является линейной функцией от x, то дифференциальное уравнение (32) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем дифференциальное уравнение (30) в виде

$$\ddot{x} - kx = 0 \tag{33}$$

Для решения этого уравнения воспользуемся теорией интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - k = 0$$

Найдем его корни:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2 .$$

Корни действительные, следовательно, общее решение дифференциального уравнения (33) ищем в виде:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \tag{34}$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 составим ещё одно уравнение. Для этого найдем скорость точки, продифференцировав по времени t уравнение (34):

$$\dot{x} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} \tag{35}$$

Постоянные C_1, и C_2 находим по начальным условиям движения (31) из уравнений (34) и (35):

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2 \\ 2 = 2C_1 - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 - C_2 \\ 2 = 2(5 - C_2) - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 - C_2 \\ 4C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Таким образом, подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (34), получим искомый закон движения точки:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}$$

5.4 Сила, зависящая от скорости F = F(V)

Задача 7.

Тело А весом **P**, получившее начальную скорость $\mathbf{V_0}$, скользит вверх по шероховатой наклонной плоскости, испытывая сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости тела, причем коэффициент пропорциональности равен mk (m – масса тела). Определить расстояние, проходимое телом, как функцию его скорости, если коэффициент трения скольжения равен f, угол наклона плоскости к горизонту равен α (рисунок 8).

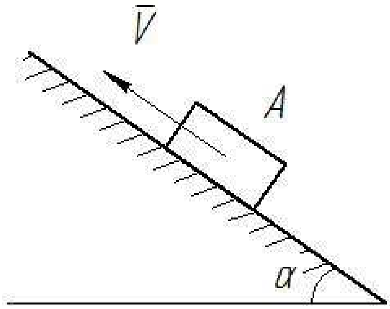

Рисунок 8

Дано: P, V_o, f, α, $R = mkV^2$

Определить: $x = x(V)$ – ?

Решение

Изображаем тело А в текущий момент времени (рисунок 9). Тело А принимаем за материальную точку, так как оно движется поступательно.

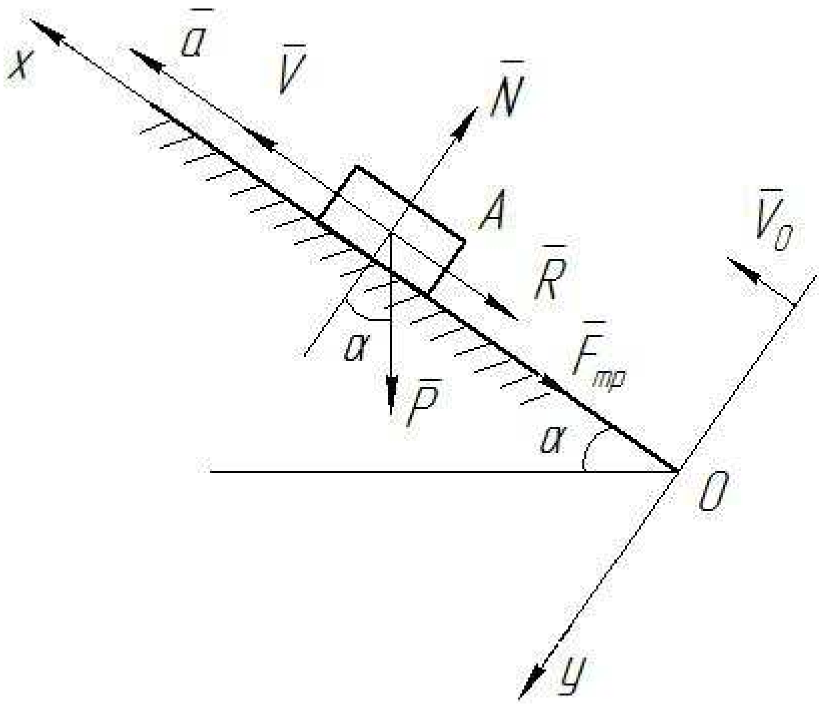

Рисунок 9

Выбираем оси координат, как указано на рисунке 9, направим ось x вдоль наклонной поверхности вверх, начало отсчета совмещаем с начальным положением точки (точка O). Начальная скорость $\bar{v}_o$ направлена вдоль оси x вверх. Следовательно, начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при} \qquad t_o=0; \quad x_o=0; \quad \dot{x}_o = v_o \tag{36}$$

Прикладываем к точке активную силу **P** – вес тела и **R** – силу сопротивления среды. Освобождаем тело A от связи, заменяя действие связи реакцией. Связью является наклонная плоскость. Реакцию плоскости раскладываем на нормальную составляющую **N** и на касательную составляющую $\mathbf{F_{тр}}$ ($\mathbf{F_{тр}}$ – сила трения скольжения).

Запишем основной закон динамики точки

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

и составим дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -P \cdot \sin\alpha - F_{тр} - R \tag{37}$$

и на ось y:

$$m\ddot{y} = mg \cdot cos\alpha - N \tag{38}$$

Так как точка движется по прямой x, то проекция ее ускорения на ось y будет равна нулю, т.е. $\ddot{y} = 0$.

Из уравнения (35) получим, что

$$N = mg\cos\alpha .$$

Сила трения $F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$.

Уравнение (35) принимает вид

$$m\ddot{x} = P\sin\alpha - fmg\cos\alpha - mkV^2 .$$

Учитывая, что

$$P = mg ,$$

после сокращения на m находим

$$\ddot{x} = -\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right] \tag{39}$$

Для интегрирования этого уравнения применим подстановку

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = \frac{VdV}{dx}.$$

Тогда уравнение (397) запишется в виде

$$\frac{VdV}{dx} = -\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right].$$

Разделяем переменные

$$\frac{VdV}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2} = -dx$$

и интегрируем

$$\int \frac{VdV}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2} = -\int dx$$

После интегрирования получим

$$\frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right] = -x + C \qquad (40)$$

Постоянную интегрирования C находим по начальным условиям движения (36) из уравнения (40):

$$\frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV_0^2\right] = C$$

Тогда уравнение (40) принимает вид

$$\frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right] = -x + \frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV_0^2\right]$$

Откуда находим искомое расстояние, проходимое телом, как функцию его скорости:

$$x = \frac{1}{2k}\ln\frac{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV_0^2}$$

Задача 8.

Шар M массой m падает свободно без начальной скорости под действием силы тяжести из точки O. При этом падении шар испытывает сопротивление воздуха **R**, пропорциональное скорости, т. е. **R** = – μ**V**, где μ – постоянный коэффициент пропорциональности. Найти закон движения шара.

Дано: m; $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{V}$; $V_o, = 0$;

Определить: x = x(t) – ?

Решение

Рассмотрим движение шара, примем его за материальную точку. Направим ось Ox по движению точки (рисунок 10), начало отсчета совмещаем с начальным положением точки (точка O). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при} \quad t_o = 0; \quad x_o = 0; \quad V_o = 0 \qquad (41)$$

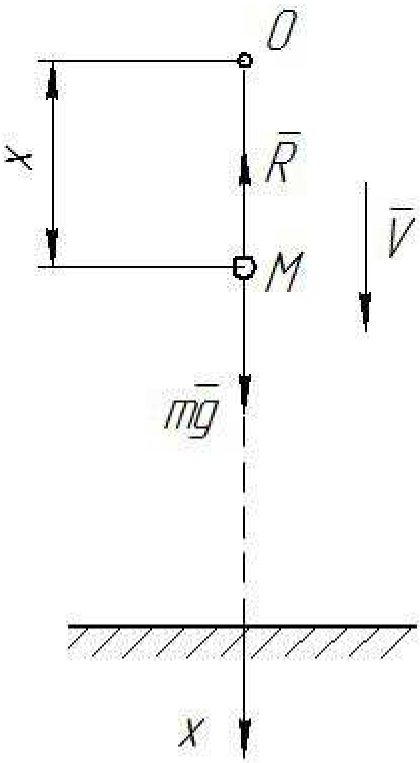

Рисунок 10

Изобразим точку в произвольный момент времени и покажем действующие на неё силы: сила тяжести **mg**; сила сопротивления воздуха **R** направлена противоположно скорости.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = mg - R$$

или

$$m\ddot{x} = mg - \mu V$$

$$\ddot{x} = g - \frac{\mu}{m}V$$

$$\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = g - \frac{\mu}{m}V \; .$$

Разделяем переменные

$$\frac{dV}{g - \frac{\mu}{m}V} = dt$$

и интегрируем

$$\int \frac{dV}{g - \frac{\mu}{m}V} = \int dt \; .$$

После интегрирования получим

$$-\frac{m}{\mu}\ln\left(g - \frac{\mu}{m}V \right) = t + C_1 \qquad (42)$$

Постоянную интегрирования C_1 находим по начальным условиям движения (41) из уравнения (42):

$$-\frac{m}{\mu}\ln g = C_1 \, .$$

Тогда уравнение (42) принимает вид

$$-\frac{m}{\mu}\ln\left(g - \frac{\mu}{m}V \right) = t - \frac{m}{\mu}\ln g$$

или

$$\frac{m}{\mu}\ln\frac{g - \frac{\mu}{m}V}{g} = -t$$

$$\ln\frac{g - \frac{\mu}{m}V}{g} = -\frac{\mu}{m}t \, ,$$

откуда получаем

$$\frac{g-\frac{\mu}{m}V}{g}=e^{-\frac{\mu}{m}t}.$$

Выразим отсюда скорость

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{m}{\mu}g-\frac{m}{\mu}ge^{-\frac{\mu}{m}t}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\int dx=\int\left(\frac{m}{\mu}g-\frac{m}{\mu}ge^{-\frac{\mu}{m}t}\right)dt,$$

Получим

$$x=\frac{m}{\mu}gt+\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 ge^{-\frac{\mu}{m}t}+C_2 \qquad (43)$$

Постоянную интегрирования C_2 находим по начальным условиям движения (41) из уравнения (43):

$$0=\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 g+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2=-\frac{m^2}{\mu^2}g$$

Тогда уравнение (43) принимает вид

$$x=\frac{m}{\mu}gt+\frac{m^2}{\mu^2}ge^{-\frac{\mu}{m}t}-\frac{m^2}{\mu^2}g$$

или

$$x=\frac{m}{\mu}gt-\frac{m^2}{\mu^2}g\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$$ – искомый закон движения шара.

6 Литература, рекомендованная для изучения дисциплины

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студ. втузов /А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 11-е изд., стер.-М.;Иитеграл-Пресс, 2010.-382 с.

2 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов/С.М.Тарг.-15-е изд., стер.-М.:Высш. шк.,2010.- 416 с.

3 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебное пособие для для студ. вузов по техн. спец. В 2 т./ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 5-ое изд.,– испр. СПб.:Лань, 1998. - Т.2 - 729 с.

4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 т. /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб.-М.:Наука, 1990. - Т.2 - 670 с.

Помимо указанных в списке, могут быть использованы любые учебники и пособия по теоретической механике.

Список использованных источников

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студ. втузов /А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 11-е изд., стер.-М.:Иитеграл-Пресс, 2010.-382 с.

2 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 т. /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб.- М.:Наука, 1990. - Т.1 - 670 с.

3 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для втузов / О.Э. Кепе [и др]; под ред. О.Э.Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

4 Попов, М.В. Теоретическая механика: Краткий курс: учебник для втузов / М.В. Попов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.