Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математической кибернетики

Е.Н. Смирнова, Л.В. Дюгаева, Н.В. Максименко

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания

Рекомендовано к изданию Редакционно – издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург
2011

УДК 517.31(076)
ББК 22.161я7
С 50

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук И.К. Зубова

Смирнова, Е.Н.
С 50 Неопределенный интеграл: методические указания / Е.Н. Смирнова, Л.В. Дюгаева, Н.В. Максименко; - Оренбург: ОГУ, 2011 – 98 с

Методические указания посвящены основным понятиям по теме «Неопределенный интеграл». В них подробно разобраны основные методы и приёмы интегрирования, представлена таблица основных неопределённых интегралов, содержатся практические задания для самостоятельного решения, тесты для самоконтроля, а также решение задач, список использованных источников и краткие исторические сведения.

Методические указания предполагают самостоятельное изучение темы «Неопределенный интеграл» бакалаврами очной и заочной форм обучения. Направление подготовки 140400.62 Электроэнергетика и электротехника. Данный материал может быть рекомендован для использования в учебном процессе.

УДК 517.31(076)
ББК 22.161я7

Содержание

Введение 4

1 Первообразная функции и неопределенный интеграл 7

2 Методы интегрирования 9

2.1 Интегрирование заменой переменной (подстановкой) 9

2.2 Интегрирование по частям. 12

3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен. 14

4 Интегрирование рациональных функций 17

5 Интегрирование некоторых иррациональных функций 23

6 Интегрирование тригонометрических выражений 27

7 Тригонометрические подстановки 30

7.1 Интеграл вида $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 30

7.2 Интеграл вида $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ 30

7.3 Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ 31

7.4 Интеграл вида $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$ 31

8 Рекуррентная формула. 32

9 Обзор методов интегрирования. 33

10 Обзор других случаев. 36

11 Эллиптические интегралы. 37

12 Эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода. 40

13 Задания для самостоятельного решения. 43

14 Тесты. 69

15 Ответы к тестам. 93

16 Исторические сведения. 94

Список использованных источников. 96

Вопросы для самопроверки. 97

Введение

Многие математические задачи тем или иным способом можно свести к серии интегралов или интегральных уравнений. Неопределенные интегралы играют в математическом анализе существенную роль. Это необходимый минимум для того, чтобы понять, как устроен аппарат работы с функциями. Хорошо овладев методами взятия неопределенных интегралов, можно с легкостью понять и решать задачи на нахождение определенных интегралов, кратных интегралов и т.д. В основе задач на интегрирование лежит фундаментальная теория интегрального исчисления, развитая много лет назад.

Спросим себя, почему необходимо хорошо освоить данный раздел математики? Ответ достаточно простой - в отличие от дифференцирования, где используя таблицу основных производных и 7-10 свойств производных, можно найти любую производную от элементарных функций, в интегрировании такой подход не проходит, здесь необходимо 'чутье', 'интуиция' и очень много теоретических знаний, конкретных методов решения (сведения) интегралов к уже известным. Основное, что можно сказать - это то, что не от всякой функции можно взять интеграл. Некоторые достаточно простые на вид функции относятся к функциям, интегралы от которых не берутся в элементарных функциях. Изучение интегралов позволяет взглянуть на большой класс математических задач с новой стороны, требующей знания и быстрого ориентирования во многих разделах математики, особенно в дифференциальном исчислении.

Существует достаточно много функций, связанных каким-то общим свойством, интегралы от которых берутся. Например, интеграл от функции x^n находится в явном виде, далее, используя свойства интегралов (линейность), можно вычислить интеграл от любого многочлена. Также дело обстоит и со многими другими функциями.

В разделе математики, который относится к интегральному исчислению, достаточно мало основной теории, которая необходима для практического взятия интегралов, но достаточно много методов и способов взятия интегралов, пригодных на практике. Самостоятельное осваивание всего аппарата займет много времени и сил, но глядя на примеры, специально подобранные под каждый способ, можно легко освоить многие тонкости интегрирования.

В интегрировании достаточно легко проводить проверку правильности получения ответа. Для этого нужно продифференцировать ответ и сравнить с искомой (подынтегральной) функцией.

Основные формулы интегрирования получаются путем обращения формул для производных, поэтому перед изучением настоящей темы студенту рекомендуется повторить основные формулы дифференцирования функций.

Сравнивая операции дифференцирования и интегрирования функций, сделаем два замечания. Во-первых, отметим различное отношение этих операций к непрерывности функции. Если для дифференцируемости функции в точке непрерывность функции в этой точке является условием необходимым, но не достаточным, то для интегрируемости функций на отрезке, наоборот, непрерывность функции на этом отрезке является только условием достаточным, но не необходимым.

Во-вторых, отметим, что в то время как операция дифференцирования однозначна, так как каждая дифференцируемая функция имеет единственную производную, операция интегрирования многозначна, ибо если функция имеет одну первообразную на отрезке, то она имеет и бесконечное множество первообразных на этом отрезке.

Однако задача отыскания совокупности всех первообразных сводится к задаче отыскания только одной первообразной, так как все первообразные данной функции отличаются друг от друга на постоянные слагаемые.

Заметим, что сам факт существования неопределенного интеграла (первообразной функции) для непрерывной функции устанавливается в теории определенных интегралов и является непосредственным следствием из теоремы Ньютона - Лейбница.

Студенту надо иметь в виду, что разные способы интегрирования одной и той же функции иногда приводят к разным по своему виду, но одинаково верным результатам. В таких случаях с помощью тождественных преобразований следует показать, что полученные результаты совпадают либо точно, либо с точностью до определенной постоянной слагаемой. Например, мы пишем $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$ и одновременно $\int \frac{dx}{1+x^2} = -arcctgx + C$, хотя $arctgx = -arcctgx + \frac{\pi}{2}$.

Кажущееся различие результатов интегрирования вызвано тем, что под одной и той же буквой C мы понимаем произвольные постоянные, которые с одинаковым правом могут принимать всевозможные значения.

Применение всей совокупности приемов интегрирования: метода разложения, метода подстановки и метода интегрирования по частям - дает возможность путем последовательных преобразований привести интегралы от всех рациональных функций и некоторых классов иррациональных и трансцендентных функций к табличным интегралам и, следовательно, выразить их через элементарные функции. Студент должен уметь избирать простейший способ интегрирования.

Студент должен знать о том, что имеются элементарные функции, интегралы от которых, хотя, конечно, и существуют, но не выражаются через элементарные функции. Приведем несколько интегралов, «не берущихся в конечном виде»: $\int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{\cos x}{x} dx; \int \frac{dx}{\ln x}$ и т.д.

Эти и им подобные интегралы определяют новые виды функций, отличных от элементарных. Многие из этих функций имеют специальные названия: функция, определяемая первым из указанных интегралов, называется интегральным синусом, вторым - интегральным косинусом, третьим - интегральным логарифмом.

Заметим, что функции, определяемые с помощью интегралов, имеют обширные и важные применения в технике и естествознании. Для таких функций составлены таблицы их приближенных значений (со способами приближенного вычисления подобных интегралов студент познакомится в разделе курса математического анализа, посвященного рядам).

1 Первообразная функции и неопределенный интеграл

Пусть на интервале $(a;b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x)=f(x)$, где $x\in(a;\, b)$, то функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функцией функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Совокупностью первообразных $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, функции $f(x)$, $x\in(a;b)$, называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Приведем основные правила интегрирования:

1. $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x)+C$.

$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) - f(x)dx$.

2. $\int (f(x)\pm\varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, (a = const)$.

4. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$. При условии, что a, b - постоянные числа, $a\neq 0$.

5. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u)+C$.

6. Правильность результатов интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т.е. $(F'(x)+C) = f(x)$.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить таблицу основных неопределенных интегралов:

$$1.\int du = u + C.$$

$$2.\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1).$$

$$3.\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$$

$$4.\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$$

$$5.\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$6.\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$$

$$7.\int e^u du = e^u + C.$$

$$8.\int \sin u du = -\cos u + c.$$

$$9.\int \cos u du = \sin u + C.$$

$$10.\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C, (a \neq 0).$$

$$11.\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = -\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C.$$

$$12.\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, (a \neq 0).$$

$$13.\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C, (a > 0).$$

$$14.\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$$

$$15.\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$$

$$16.\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin u} - ctgu\right| + C.$$

$$17.\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| = \ln\left|\frac{1}{\cos u} + tgu\right| + C.$$

$$18.\int shudu = chu + C.$$

$$19.\int chudu = shu + C.$$

$$20.\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C.$$

$$21.\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C.$$

Интегралы 1-18 называются ***табличными***.

Отметим, что в приведенной таблице буква *u* может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u=\varphi(x)$ аргумента *x*.

Пример 1.1. Найти неопределенный интеграл $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx.$

$$\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx = 4\int x^3 dx - 2\int x^{2/3}dx + 2\int x^{-3}dx +$$
$$+\int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^{5/3}}{5/3} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + x + C = x^4 - \frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C$$

Пример 1.2. Найти $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

2 Методы интегрирования

2.1 Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

Одним из основных средств вычисления неопределенных интегралов является замена переменного (подстановка). Она производится по формуле

$$\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx, \qquad (2.1)$$

где $u = \varphi(x)$.

Эта формула верна на некотором отрезке $\alpha \le x \le \beta$, если функция $\varphi(x)$ обладает на нем непрерывной производной $\varphi'(x)$ (тогда она сама также непрерывна на этом отрезке), а функция $f(u)$ непрерывна на отрезке $m \le u \le M$ оси *Ou*, заполненном значениями функции $u = \varphi(x)$ при $\alpha \le x \le \beta$.

Заметим, что выполнение этих условий обеспечивает непрерывность подынтегральных выражений, а следовательно, и существование обоих интегралов в формуле (2.1). В частности, в силу теоремы о непрерывности сложной функции, из последнего условия и из непрерывности функции $\varphi(x)$ при $\alpha \le x \le \beta$ следует, что сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна при $\alpha \le x \le \beta$. Тогда на этом отрезке непрерывно и произведение $f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Само равенство (2.1) в этих условиях легко следует из теоремы о производной от сложной функции: если $F(u)$ - первообразная функция для функции $f(u)$, т. е. $F'(u) = f(u)$, то по этой теореме $[F(\varphi(x))]'_x = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Иначе говоря, функция $F(\varphi(x))$ является первообразной для функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Итак, $\int f(u)du = F(u) + C; \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$.

Равенство (2.1) сводится к равенству $F(u) = F(\varphi(x))$ при $u = \varphi(x)$, которое очевидно.

Формуле (2.1) часто придают вид $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d[\varphi(x)]$, и не обозначают в ней функцию $\varphi(x)$ через новое переменное u.

Применяя эту формулу, обычно говорят об интегрировании не путем подстановки $u = \varphi(x)$, а путем подведения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала. Функцию $\varphi(x)$ в этом случае иногда называют сложным аргументом.

Задача замены переменной состоит в том, чтобы из всех замен переменной выбрать такую, которая упрощает подынтегральное выражение. Задача эта сложна вследствие большого многообразия возможных замен. Нам придется рассмотреть ряд типов интегралов, которые вычисляются с помощью той или иной замены переменной. Правильное пользование заменой переменной достигается в результате решения большого числа примеров.

Рассмотрим несколько примеров, в которых применяется замена переменной к вычислению интегралов.

Пример 2.1. Найти $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$.

Положим $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$, найдем:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Это равенство полезно запомнить. *Если числитель подынтегрального выражения равен дифференциалу знаменателя, то интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя.*

Пользуясь этим правилом, находим:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

$$\int ctgx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}dx}{\ln x} = \ln\left|\ln|x|\right| + C;$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + a} = \ln|e^x + a| + C.$$

Если еще воспользоваться и возможностью вынесения за знак интеграла постоянного множителя, то получим: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

Пример 2.2. Найти $\int f(ax+b)dx.$

Предположим, что *F(x)* – первообразная от *f(x)*. Полагая $u = ax+b$, $du = adx$, $dx = \frac{1}{a}du$, находим: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(u)du = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Пользуясь этим, получим: $\int (ax+b)^{\alpha}dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C, \alpha \neq -1.$

Пример 2.3. Найти $\int x\sqrt{5x^2+3}dx$.

Решение. За сложный аргумент примем $5x^2+3$ и преобразуем в уме xdx так: $xdx = \frac{1}{2 \cdot 5}d(5x^2+3).$

Тогда $\int x\sqrt{5x^2+3}dx = \frac{1}{10}\int \sqrt{5x^2+3}d(5x^2+3) = \frac{1}{15}(5x^2+3)^{\frac{3}{2}} + C.$

Пример 2.4. Найти $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cos x dx.$

Применим подстановку $1+\sin x = t.$ Тогда $\cos x dx = dt$ и

$$\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cos x dx = \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sin x)^4} + C.$$

Пример 2.5. Найти $\int e^{-x^3} x^2 dx$.

Воспользуемся подстановкой $-x^3 = t$. Тогда имеем $-3x^2 dx = dt,\ x^2 dx = -\frac{1}{3}dt$ и $\int e^{-x^3} x^2 dx = \int e^t (-\frac{1}{3}) dt = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C.$

Пример 2.6. Найти $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$.

$$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx = \left| \begin{matrix} x-\sin x = t \\ (1-\cos x)dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -t^{-1} + C = -\frac{1}{x-\sin x} + C.$$

2.2 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле: $\int u dv = uv - \int v du$, где $u(x)$, $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях данную формулу необходимо применить несколько раз.

Метод интегрирования по частям рекомендуется использовать для нахождения интегралов от функций $x^k \sin\alpha x,$ $x^k \cos\alpha x,$ $x^k e^{\alpha x},$ $x^n \ln^k \alpha x,$ $x^k ch\alpha x,$ $a^{\beta x}\sin\alpha x,$ $a^{\beta x}\cos\alpha x,$ $\arcsin x$, $\arccos x$ и т.д., где n, k – целые положительные постоянные, $\alpha, \beta \in R$, а также для отыскания некоторых интегралов от функций, содержащих обратные тригонометрические и логарифмические функции.

Пример 2.6. Найти $\int xe^{-2x}dx$.

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u = x, dv = e^{-2x}dx.$ Тогда $du = dx,$ $v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ (всегда можно считать, что C=0). Следовательно по формуле интегрирования по частям имеем $\int xe^{-2x}dx = x(-\frac{1}{2}e^{-2x}) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$

Пример 2.7. Найти $\int xarctgxdx.$

$$\int xarctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Пример 2.8. Найти $\int \ln(4x^2+1)dx.$

$$\int \ln(4x^2+1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(4x^2+1) & dv = dx \\ du = \dfrac{8x}{4x^2+1} & v = x \end{matrix} \right| = x\ln(4x^2+1) - 8\int \frac{x^2}{4x^2+1}dx =$$

$$= x\ln(4x^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{4x^2+1}\right)dx = x\ln(4x^2+1) - 2\left(x - \frac{1}{2}arctg\,2x\right) + C =$$

$$= x\ln(4x^2+1) + arctg\,2x - 2x + C.$$

Пример 2.9. Найти $\int (x^2-1)e^{2x}dx.$

$$\int (x^2-1)e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x^2-1, du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx, v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}2xdx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \int xe^{2x}dx.$$

Для интеграла $\int xe^{2x}dx$ еще раз воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int xe^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^{2x}dx, v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Получаем: $\int (x^2-1)e^{2x}dx.$

$$\int (x^2-1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x-1) + C.$$

Пример 2.10. Найти $\int e^x \sin xdx.$

$$\int e^x \sin xdx = \begin{vmatrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin xdx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos xdx, v = \sin x \end{vmatrix} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$$

Применив дважды операцию интегрирования по частям, мы в правой части снова получили исходный интеграл. Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом $\int e^x \sin xdx.$ Из этого уравнения находим: $\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx$ или $2\int e^x \sin xdx = -e^x \cos x + e^x \sin x$, отсюда $\int e^x \sin xdx = \dfrac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C.$

3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл вида: $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$.

Если $A \neq 0$, то из числителя можно выделить слагаемое $2x+b$, равное производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе. Тогда в результате простых преобразований получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+b)+(2B/A-b)}{x^2+bx+c}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+b)}{x^2+bx+c}dx +$$

$$+ (B-Ab/2)\frac{A}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + (B-Ab/2)\frac{A}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c}.$$

Для отыскания последнего интеграла выделим в квадратном трехчлене полный квадрат, т.е. представим трехчлен в виде $\tilde{o}^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + c - b^2/4$ и в зависимости от знака выражения $c - b^2/4$ получим один из табличных интегралов вида $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Пример 3.1. Найти $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx.$

Выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной знаменателя, получим

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4-4/3}{x^2+4x+13}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - 8\int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right| - 8\cdot\frac{1}{3}arctg\,\frac{x+2}{3} + C.$$

Пример 3.2. Найти $\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx.$

$$\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-8+8-14/5}{x^2-8x+7}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+7}dx +$$

$$+13\int \frac{dx}{x^2-2\cdot 4x+16-9} = \frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right| + 13\int \frac{dx}{(x-4)^2-9} = \frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right| +$$

$$+13\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-4-3}{x-4+3}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right| + \frac{13}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C.$$

Решим этот же интеграл вторым методом, выделив в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат:

$x^2 - 8x + 7 = x^2 - 2\cdot 4x + 16 + 7 - 16 = (x-4)^2 - 9.$

$$\int \frac{5x-7}{x^2-8x+7}dx = \int \frac{5x-7}{(x-4)^2-9}dx = \begin{vmatrix} x-4=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{5(t+4)-7}{t^2-9}dt = \int \frac{5t+13}{t^2-9}dt =.$$

$$= 5\int \frac{t}{t^2-9}dt + 13\int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{5}{2}\ln\left|t^2-9\right| + \frac{13}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2-8x+7\right| +$$

$$+ \frac{13}{6}\ln\left|\frac{x-7}{x-1}\right| + C.$$

Если в интеграле квадратный трехчлен имеет вид $ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$, то для отыскания этого интеграла коэффициент a в знаменатели выносят за скобку $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$.

Рассмотрим интеграл вида: $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx,$ где $k-$ целое, $k>0;\ \ p^2-4q<0$.

При $A\neq 0$ (k=1) по аналогии с предыдущим случаем выделим интеграл $\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1}+C$, $(k\neq 1)$.

Тогда задача нахождения интегралов вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$ сводится к нахождению интеграла $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4})^k}=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}$, где $u=x+p/2;\ a=\sqrt{(4q-p^2)/4};\ 4q-p^2>0.$

Интегралы вида $\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}$ находят с помощью рекуррентной формулы понижения степени знаменателя:

$$\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}=\frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{k-1}}.$$

Методы нахождения интеграла вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ аналогичны рассмотренным выше, однако в результате получаются другие табличные интегралы. При $A\neq 0$ имеем

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b-b+2Ba/A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+$$

$$+(B-\frac{bA}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{bA}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{a(x+\frac{b}{2a})^2+(c-\frac{b^2}{4a})}}.$$

Тогда при $c \neq \dfrac{b^2}{4a}$ и $a > 0$ последний интеграл можно привести к виду $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm q^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm q^2}\right| + C.$ А при $c > \dfrac{b^2}{4a}$ и $a < 0$ - к виду $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{q^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{q} + C.$

Пример 3.3. Найти $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx.$

Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов, предварительно выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной подкоренного выражения из знаменателя и выделим полный квадрат подкоренного выражения в знаменателе второй дроби.

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-4)+(4-2/3)}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx -$$
$$-5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}}dx = 3\sqrt{x^2-4x+8} - 5\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right| + C.$$

4 Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией *R(x)* называется функция, равная отношению двух многочленов: $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$, где *m, n* – целые положительные числа; $b_i, a_j \in R; i = \overline{0,m}, j = \overline{0,n}.$ Если $m < n$, то *R(x)* называется ***правильной*** дробью, если $m \geq n$, - ***неправильной дробью***.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби: $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{n-m}(x) + \dfrac{Q_l(x)}{P_n(x)},$ где $M_{n-m}(x)$, $Q_l(x)$ - многочлены, $\dfrac{Q_l(x)}{P_n(x)}$ - правильная дробь; $l < n.$

Например, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ - неправильная дробь. Разделив ее числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), получим

$$\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}.$$

Так как многочлен легко интегрируется, то интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функции *R(x)* при условии $m<n$.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырех типов:

1. $\frac{A}{x-a}$;
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$;
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

где *A, a, M, N, p, q* – постоянные числа; k – целое, $k\geq 2; p^2-4q<0.$

Очевидно, что интегралы от простейших дробей первого и второго типов находятся легко: $\int\frac{\grave{A}}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=\frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)}+C.$

Методика нахождения интегралов третьего и четвертого типов были рассмотрены выше. Таким образом, всякая простейшая рациональная дробь может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Известно, что всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть представлен в виде $P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_\beta$ - действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратностей $k_1,\ldots,k_\beta$, а $p_\gamma^2-4q_\gamma<0$ $(\gamma=\overline{1,s})$; $k_1+\ldots+k_\beta+2t_1+\ldots+2t_s=n;$ числа $k_1,\ldots,k_\beta,t_1,\ldots,t_s$ - целые неотрицательные. Тогда верна следующая теорема.

Теорема (о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей).

Всякую правильную рациональную дробь $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}$ со знаменателем, представленным в виде $P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}$, можно разложить в сумму простейших рациональных дробей типа 1-4. В данном разложении каждому корню α_r кратности k_r $(r=\overline{1,\beta})$ многочлена $P_n(x)$ (множителю $(x-\alpha_r)^k$ соответствует сумма k_r дробей вида $\dfrac{A_1}{x-\alpha_r}+\dfrac{A_2}{(x-\alpha_r)^2}+\ldots+\dfrac{A_{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}$.

Каждой паре комплексно-сопряженных корней кратности t_γ многочлена $P_n(x)$ (множителю $(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}$) соответствует сумма t_γ элементарных дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^2}+\ldots+\frac{M_{t_\gamma}x+N_{t_\gamma}}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}}.$$

Для вычисления значений *A*, *M*, *N* в разложении функции $R(x)$ на сумму простейших рациональных дробей часто используют метод неопределенных коэффициентов, суть которого заключается в следующем.

С учетом формул $\dfrac{A_1}{x-\alpha_r}+\dfrac{A_2}{(x-\alpha_r)^2}+\ldots+\dfrac{A_{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}}$ и $\dfrac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma}+\dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^2}+\ldots+\dfrac{M_{t_\gamma}x+N_{t_\gamma}}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}}$ данную дробь $R(x)$ представим в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами *A*, *M*, *N*. Полученное равенство является тождеством. Поэтому если привести к общему знаменателю $P_n(x)$, в числителе получим многочлен $Q^*_{n-1}(x)$ степени $n-1$, тождественно равный многочлену $Q_m(x)$, стоящему в числителе выражения $R(x)$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *x* в этих многочленах, получим систему уравнений для определения n неизвестных коэффициентов *A, M, N* (с индексами).

В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться следующим соображением. Так как многочлены $Q_m(x)$ и $Q^*_{n-1}(x)$ тождественно равны, то их значения равны при любых числовых значениях *x*. Придавая *x* конкретные числовые значения, получим систему уравнений для определения коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных коэффициентов называется методом частных значений. Если значения *x* совпадают с действительными корнями знаменателя, получаем уравнение с одним неизвестным коэффициентом.

Пример 4.1. Найти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx.$

В соответствии с формулой разложения на элементарные дроби имеем:

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int (\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2})dx.$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадет со знаменателем исходной подынтегральной функции, а числители подынтегральной функции в левой и правой частях будут тождественно равными, т.е. $2x-3 \equiv A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + C(x-1)x.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в обеих частях тождества, получим систему уравнений

x^2 : 0=A+B+C,

x^1 : 2=-3A-2B-C,

x^0 : -3=2A,

решение которой: A=-3/2, B=1, C=1/2.

Теперь найдем коэффициенты разложения методом частных значений. Подставим в тождество $2x-3 \equiv A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + C(x-1)x$ вместо *x* частные значения, равные корням знаменателя $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 2$. Получим равенства -3=2A, -1=-B, 1=2C, откуда следует, что A=-3/2, B=1, C=1/2. Подставляем найденные значения коэффициентов, получаем:

$$\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx = \int (\frac{-3/2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2})dx = -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + C.$$

Пример 4.2. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

На основании теоремы о разложении правильной дроби на сумму простейших дробей, имеем $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int (\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-1)})dx.$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем $x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1)$.

При x=1 и x=-1 находим, что 4A=1, -1=-2B, т.е. A=1/4, B=1/2.

Для вычисления значения C приравниваем в тождестве $x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1)$ коэффициенты при x^2. Получим 0=A+C, откуда C=-1/4.

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \int (\frac{1/4}{x-1} + \frac{1/2}{(x+1)^2} + \frac{-1/4}{(x-1)})dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

Пример 4.3. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$.

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей, выполнив приведение к общему знаменателю, получим

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int (\frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1})dx = \int \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}dx.$$

Следовательно, $x \equiv A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)$.

При x-1 получаем 1=2A, т.е. A=1/2. Далее,

x^2 : 0=A+M,

x^0 : 0=A-N,

откуда M=-1/2, N=1/2.

Окончательно имеем

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = \int (\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1})dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Пример 4.4. Найти $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx.$

В данном случае подынтегральная функция является неправильной дробью. Путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть рациональной дроби и правильную рациональную дробь: $\frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} = x - 2 + \frac{2x^2 + 10x - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x}.$

Тогда

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \int (x-2)dx + \int \frac{2x^2 + 10x - 5}{x(x^2 + 2x + 5)} dx = \frac{(x-2)^2}{2} + \int (\frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 5})dx.$$

Приведя к общему знаменателю дроби в последнем интеграле и приравняв числители подынтегральных дробей в левой и правой частях записанного равенства, получим $2x^2 + 10x - 5 \equiv A(x^2 + 2x + 5) + Mx^2 + Nx.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

x^2 : 2=A+M,

x^1 : 10=2A+N,

x^0 : -5=5A,

откуда A=-1, M=3, N=12.

Окончательно получаем

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx = \frac{(x-2)^2}{2} + \int (-\frac{1}{x} + \frac{3x + 12}{x^2 + 2x + 5})dx = \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| +$$

$$+ \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2 + 6}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx + 9 \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{(x-2)^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{9}{2} arctg \frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 4.5. Найти $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$

Разделим дробь

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - 12 & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} & \quad 1 \\ 6x^2 - 26x + 12 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx = \int\left(1+\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\right)dx.$$

Разложим дробь $\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}$ на простейшие

$$\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-3)(x-2)+B(x-4)(x-2)+C(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-3)(x-2)}.$$

$$A(x+2)^3 + B(x+1)(x+2)^2 + C(x+1)(x+2) + D(x+1) = x^3+6x^2+13x+9.$$

При $x=4$, $2A=4 \Rightarrow A=2$;

при $x=3$, $-B=-12 \Rightarrow B=12$;

при $x=2$, $2C=-16 \Rightarrow C=-8$;

Отсюда $\int\left(1+\frac{6x^2-26x+12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\right)dx = \int\left(1+\frac{2}{x-4}+\frac{12}{x-3}-\frac{8}{x-2}\right)dx =$

$$= x+2\ln|x-4|+12\ln|x-3|-8\ln|x-2|+C.$$

5 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Не для всякой иррациональной функции можно найти первообразную в виде элементарной функции. Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

Интеграл вида $\int R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{r_1/s_1},..,(\frac{ax+b}{cx+d})^{r_v/s_v})dx$, где R – рациональная функция, a, b, c, d – постоянные, r_i, s_i – целые положительные числа, $i=\overline{1,v}$, приводятся к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=u^m$ (здесь число m – наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей дробей $\frac{r_1}{s_1},..,\frac{r_v}{s_v}$, т.е. m=НОК ($s_i$,..$s_v$)). В частности, интеграл вида $\int R(x, x^{r_1/s_1},..,x^{r_v/s_v})dx$ приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной u с помощью подстановки $x=u^m$.

Пример 5.1. Найти $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4}$.

Так как НОК(2, 4) = 4, то

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+4} = \int \frac{x^{1/2}dx}{x^{3/4}+4} = \left| \begin{matrix} x=u^4 \\ dx=4u^3du \end{matrix} \right| = 4\int \frac{u^2}{u^3+4}u^3du = 4\int \frac{u^5du}{u^3+4} =$$

$$= 4\int \frac{u^5du}{u^3+4} = 4\int (u^3 - \frac{4u^2}{u^3+4})du = \frac{4}{3}u^3 - \frac{16}{3}\ln\left|u^3+4\right| + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right| + C.$$

Пример 5.2. Найти $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Так как НОК (2, 3, 6) = 6, то

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1=u^6, \\ dx=6u^5du \end{matrix} \right| = \int \frac{u}{u^3+u^2}6u^5du = 6\int \frac{u^4}{u+1}du =$$

$$= 6\int (u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1})du = \frac{3}{2}u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 6u + 6\ln\left|u+1\right| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right| + C.$$

Рассмотрим интеграл вида $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Оказывается, что данный интеграл всегда можно представить в виде

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (5.1)$$

где $\lambda \in R$; $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, которые находят следующим образом. Дифференцируем равенство (5.1), в результате получаем тождество, из которого определяем коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

Пример 5.3. Найти $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx.$

Согласно формуле (5.1) имеем $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$

Продифференцируем последнее равенство. Получим

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Умножим обе части равенства на $\sqrt{x^2+4}.$ Тогда

$$x^4+4x^2 = (3Ax^2+2Bx+c)(x^2+4)+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x+\lambda.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x^4\big|1=3A+A, \\ x^3\big|0=2B+B, \\ x^2\big|4=12A+C+B, \\ x^1\big|0=4B+D, \\ x^0\big|0=4C+\lambda, \end{array}\right\}$$

решение которой: A=1/4, B=0, C=1/2, D=0, λ=-2.

Следовательно, $\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$

Рассмотрим интеграл вида: $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. С помощью подстановки $x-\alpha=\frac{1}{t}$ этот интеграл приводится к интегралу вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Пример 5.4. Найти $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}.$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = \left|\begin{array}{c} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right| = -\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} =$$

$$= -\ln\left|t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 5}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1 - x + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{x}\right| + C.$$

Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx,$ где $a,$ b – постоянные, отличные от нуля, $m,$ $n,$ p – рациональные числа, можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью подстановок Чебышева в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) Если $(m+1)/n$ – целое число, то применяется подстановка $a+bx^n=t^s$;

3) Если $(m+1)/n+p$ – целое число, то используется подстановка $ax^{-n}+b= t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 5.5. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}.$

Так как $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, p=-10 – целое число. Имеем первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} + 1)^{10}} = \left|\begin{matrix} x = t^4, \\ dx = 4t^3 dt \end{matrix}\right| = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 (t + 1)^{10}} = 4\int \frac{tdt}{(t + 1)^{10}} = 4\int \frac{t + 1 - 1dt}{(t + 1)^{10}} = 4\int \frac{dt}{(t + 1)^9} -$$

$$-4\int \frac{dt}{(t + 1)^{10}} = -\frac{1}{8(t + 1)^8} + \frac{1}{9(t + 1)^9} + C = -\frac{1}{8(\sqrt[4]{x} + 1)^8} + \frac{1}{9(\sqrt[4]{x} + 1)^9} + C.$$

Пример 5.6. Найти $\int \frac{x^3 dx}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}.$

Так как m=3, n=2, $p=-\frac{3}{2}$, так как $(m+1)/n$ =(3+1)/2=2– целое число, то имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int\frac{x^3dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=\int x^3(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\begin{vmatrix}4-x^2=t^2\\ -xdx=tdt\end{vmatrix}=-\int(4-t^2)t^{-3}tdt=$$

$$=-\int\frac{4-t^2}{t^2}dt=\int dt-4\int\frac{dt}{t^2}=t+\frac{4}{t}+C=\frac{t^2+4}{t}+C=\frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C.$$

Пример 5.7. Найти $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Так как m=-4, n=2, p=-$\frac{1}{2}$, так как $(m+1)/n+p$=(-4+1)/2-1/2=-2– целое число, то имеем третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Тогда

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-4}[x^2(x^{-2}+1)]^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}x^{-2}+1=t^2\\ -x^{-3}dx=tdt\end{vmatrix}=-\int(t^2-1)t^{-1}tdt=-\int(t^2-1)dt=t-\frac{t^3}{3}+C=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

Пример 5.8. Найти $\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$.

$$\int\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx=\int x^{-\frac{11}{6}}\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}dx=\begin{vmatrix}1+x^{-\frac{1}{2}}=t^2\\ dx=-4t(t^2-1)^{-3}dt\end{vmatrix}=$$

$$=-4\int(t^2-1)^{\frac{11}{3}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^2}t(t^2-1)^{-3}dt=-4\int t(t^2-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^2}dt=$$

$$=-4\int t^{\frac{7}{3}}dt=-4\cdot\frac{3}{10}t^{\frac{3}{10}}+C=-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5}+C.$$

6 Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы вида $\int R(\cos x,\sin x)dx,$ где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной u с помощью универсальной подстановки $tgx/2=u$. В этом случае $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}, dx=\dfrac{2du}{1+u^3}$.

Пример 6.1. Найти $\int\dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Полагаем $tg\ x/2=u$. Тогда, согласно равенствам

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{2du/(1+u^2)}{1+\dfrac{2u}{1+u^2}+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{du}{1+u}=\ln|1+u|+C=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

В случае, когда имеет место тождество $R(-\cos x,-\sin x)\equiv R(\cos x,\sin x)$.

Для приведения подынтегральной функции к рациональному виду можно применять упрощенную подстановку $tg\ x=u$. При этом

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\quad dx=\frac{du}{1+u^2}. \tag{6.1}$$

Пример 6.2. Найти $\int\dfrac{dx}{3+\sin^2 x}$.

Положив $tg\ x=u$, согласно формуле (6.1), получим

$$\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{du/(1+u^2)}{3+u^2/(1+u^2)}=\int\frac{du}{3+4u^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2u}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 6.3. Найти $\int tg^5 2xdx$.

Применим подстановку $tg\ 2x=u$. Тогда:

$$x=\frac{1}{2}arctgu, dx=\frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}du,$$

$$\int tg^5 2xdx=\frac{1}{2}\int u^5\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{2}\int(u^3-u+\frac{u}{1+u^2})du=$$

$$=\frac{1}{8}u^4-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}\ln(1+u^2)+C=\frac{1}{8}tg^4 2x-\frac{1}{4}tg^2 2x+\frac{1}{4}\ln(1+tg^2 2x)+C.$$

При нахождении интеграла вида $\int f(\cos x)\sin xdx$ и $\int f(\sin x)\cos xdx$ целесообразно применять подстановки $\cos x=t$ и $\sin x=t$ соответственно.

Пример 6.4. Найти $\int\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Положим, $\cos x=t$, тогда

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin xdx=\int\frac{1-t^3}{t^4}(dt)=-\int\frac{1}{t^4}dt+\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{t}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

Пример 6.5. Найти $\int\frac{\cos 2xdx}{\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)^2}}$.

Положим, $(2+3\sin 2x)=t^3$. Тогда $\cos 2xdx=1/2t^2dt$ и

$$\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{\sqrt[3]{t^2}}-\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2+3\sin 2x)}+C.$$

Некоторые тригонометрические выражения, после тех или иных элементарных преобразований, интегрируются также при помощи простейших приемов.

Очевидно, например, $\cos^2 mx=\frac{1+\cos 2mx}{2}$, $\sin^2 mx=\frac{1-\cos 2mx}{2}$, откуда

$$\int\cos^2 mxdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C,\ \int\sin^2 mxdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4m}\sin 2mx+C,\ (m\neq 0).$$

Аналогичным образом, имеем

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x];$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x];$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x].$$

Считая $m\pm n\neq 0$, получим следующие интегралы:

$$\int\sin mx\cos nxdx=-\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x-\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x+C;$$

$$\int\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x+\frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x+C;$$

$$\int\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x-\frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x+C.$$

7 Тригонометрические подстановки

7.1 Интеграл вида $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Разность квадратов под корнем (из которых первый постоянен) подсказывает нам тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$. Имеем $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\ dx=a\cos t dt$. И $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2 t dt.$

Но мы уже знаем интеграл $a^2\int\cos^2 t dt=a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]+C$.

Для перехода к x подставляем $t=\arcsin\frac{x}{a}$; преобразование второго слагаемого облегчается тем, что $\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$.

Окончательно $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

Дадим теперь несколько примеров интегрирования выражений, содержащих двучлены вида a^2-x^2, x^2+a^2 и x^2-a^2. В этих случаях обычно бывает выгодно заменить x тригонометрической или гиперболической функцией от новой переменной t, используя соотношения $\sin^2 t+\cos^2 t=1, 1+tg^2 t=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $ch^2 t-sh^2 t=1$, $1-th^2 t=\frac{1}{ch^2 t}$.

7.2 Интеграл вида $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Подстановка: $x=a\ tg\ t$, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$, $x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$, так что

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C$. Перейдем теперь к переменной *x*, полагая $t = arctg\frac{x}{a}$ и выражая sin *t* и cos *t* через $tgt = \frac{x}{a}$. Окончательно $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} arctg\frac{x}{a} + C$.

7.3 Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Здесь удобнее применить гиперболическую подстановку. Останавливаясь для примера на нижнем знаке, положим: *x= acht* (при *x* и *t>0*), *dx=ashtdt*, $\sqrt{x^2-a^2} = asht$. Интеграл приведется просто к $\int dt = t + C$. Для перехода к *x* вспомним выражение обратной для гиперболического косинуса функции $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 - 1}) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$.

7.4 Интеграл вида $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

Подстановка: *x=a sin t*, *dx=a cos t dt* приводит этот интеграл к такому $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C$. Но $tg\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Так что окончательно $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$.

8 Рекуррентная формула

Вычислим интеграл $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Применим к нему формулу интегрирования по частям, полагая $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$, так что $du = -\frac{2nx \cdot dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $v=x$.

Мы получим $J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$.

Последний интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, придем к соотношению $J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}$, откуда

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n. \qquad (8.1)$$

Полученная формула сводит вычисление интеграла J_{n+1} к вычислению интеграла J_n с меньшим на единицу знаком. Зная интеграл $J_1 = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$ по этой формуле при n=1 найдем $J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a}$.

Полагая в формуле (8.1) n=2, мы получим далее $J_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} arctg \frac{x}{a}$.

И т.д., таким образом, можно вычислить интеграл J_n для любого натурального показателя n.

9 Обзор методов интегрирования

№	Вид интеграла	Метод интегрирования
1	$\int F(f(x))f'(x)dx$	Подстановка *f(x)=t.*
2	$\int uv'dx = \int udv$	Интегрирование по частям по формуле $\int udv = uv - \int vdu$. Метод интегрирования по частям применяется, например, к интегралам вида $\int P(x)f(x)dx$, где $P(x)$ - многочлен (в частности, степенная функция x^n), а *f(x)* – одна из следующих функций: e^{ax}, $\cos ax$, $\sin ax$, $\ln x$, $arctgx$, $\arcsin x$, а также к интегралам от произведений показательной функции на косинус или синус.
3	$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx$ $b^2-4q<0$	Выделение полного квадрата $x^2+bx+c=(x+b/2)^2+c-b^2/4$, затем подстановка $x+\frac{b}{2}=t$.
4	$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$	Рекуррентная формула $I_k = \frac{u}{2a^2(k-1)(u^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}.$
5	$\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}dx$ $b^2-4q<0$	Тот же, что в интегралах вида 3, после чего получается интеграл вида 4.
6	$\int R(x)dx$	Выделение целой части, разложение знаменателя на множители вида $(x-a)^k$ и $(x^2+px+q)^n$, затем разложение *R(x)* на простейшие дроби.

7	$\int R(\sin x, \cos x)dx$	Универсальная подстановка $tg\frac{x}{2}=t$ или, если R(-sin x, cos x)=-R(sin x, cos x), подстановка cos x=t; если R(sin x,-cos x)=-R(sin x, cos x) подстановка sin x=t; если R (-sin x,-cos x)= =R(sin$x$, cos x) подстановка tg x=t.
8	Интеграл произведения синусов и косинусов $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$.	Разложение подынтегральной функции по формулам: $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$, $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$.
9	$\int \sin^m x \cos^m x dx$	Если m – нечетное положительное число, то подстановка cos x=t; если n – нечетное положительное число, то подстановка sin$x$=t.
10	$\int \sin^m x \cos^n x dx$ n+m – четное отрицательное	Подстановка tg x=t.
11	$\int \sin^m x \cos^n x dx$ n и m – четные неотрицательные	Применение формул $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.
12	$\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$	Подстановка $x=t^n$, n – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми x входит в подынтегральную функцию.

13	$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$	Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, n – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми $\frac{ax+b}{cx+d}$ входит в подынтегральную функцию.
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Выделение полного квадрата под радикалом, затем линейная подстановка.
15	$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Обратная подстановка $x = \frac{1}{t}$, приводящая к интегралам вида 14.
16	$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$.	Сведение к интегралам вида 7 подстановкой $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$), $x = atgt$ (или $x = actgt$), $x = \frac{a}{\cos t}$ (или $x = \frac{a}{\sin t}$).
17	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$	Выделение полного квадрата под радикалом, затем линейная подстановка, приводящая к интегралам вида 16.
18	$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$	При p целом положительном – формула бинома Ньютона и непосредственное интегрирование; при p – целом отрицательном, $m = \frac{q}{s}$, $n = \frac{r}{s}$, - подстановка $x = t^s$; при $\frac{m+1}{n}$ целом – подстановка $a+bx^n = t^s$; при $\frac{m+1}{n}+p$ целом – подстановка $ax^{-n}+b = t^s$.

Для овладения важнейшими элементами техники интегрирования нужно: 1) помнить таблицу основных интегралов, 2) знать приведенную таблицу интегралов и методов интегрирования, 3) уметь безошибочно относить заданный интеграл к определенному виду, 4) уметь, пользуясь рецептурой таблицы, правильно доводить вычисления до нахождения неопределенного интеграла.

10 Обзор других случаев

Мы уже видели как интегрируются выражения вида $P(x)e^{ax}dx, P(x)\sin bxdx$, $P(x)\cos bxdx$, где *P(x)* – целый многочлен. Любопытно отметить, что дробные выражения $\frac{e^x}{x^n}dx$, $\frac{\sin x}{x^n}dx$, $\frac{\cos x}{x^n}dx$ (*n*= 1, 2, 3, …) уже не интегрируются в конечном виде.

С помощью интегрирования по частям легко установить для интегралов от этих выражений рекуррентные формулы и свести их, соответственно, к трем основным:

1. $\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{dy}{\ln y} = liy*$ («интегральный логарифм»);
2. $\int \frac{\sin x}{x}dx = six$ («интегральный синус»);
3. $\int \frac{\cos x}{x}dx = cix$ («интегральный косинус»).

Мы знаем уже интегралы $\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$, $\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$.

Отправляясь от них, можно в конечном виде найти интегралы $\int x^n e^{ax}\sin bxdx$, $\int x^n e^{ax}\cos bxdx$, где n =1, 2, 3, … Именно, интегрируя по частям, получим

$$\int x^n e^{ax}\sin bxdx = x^n\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}a^{ax} - \frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bxdx +$$

$$+\frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bxdx,$$

$$\int x^n e^{ax}\cos bxdx = x^n\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}a^{ax} - \frac{nb}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\sin bxdx -$$

$$-\frac{na}{a^2+b^2}\int x^{n-1}e^{ax}\cos bxdx.$$

Эти рекуррентные формулы позволяют свести интересующие нас интегралы к случаю n=0.

Если под $P(\ldots)$ по-прежнему разуметь целый многочлен, то, как окончательный результат, можно утверждать, что в конечном виде берутся интегралы $\int P(x, e^{a'x}, e^{a''x}, \ldots, \sin b'x, \sin b''x, \ldots, \cos b'x, \cos b''x, \ldots)dx$, где $a', a'', b', b'', \ldots$ - постоянные.

Дело сводится, очевидно, к интегрированию выражения $x^n e^{ax}\sin^{k'} b'x\sin^{k''} b''x\ldots\cos^{m'} b'x\ldots$

Если использовать элементарные тригонометрические формулы $\sin^2 bx = \frac{1-\cos 2bx}{2}$, $\sin b'x\sin b''x = \frac{1}{2}\left[\cos(b'-b'')x - \cos(b'+b'')x\right]$

и им подобные, то легко разбить рассматриваемое выражение на слагаемые типа $Ax^n e^{ax}\sin bx$ и $Bx^n e^{ax}\cos bx$, с которыми мы уже умеем справляться.

11 Эллиптические интегралы

Рассмотрим интеграл вида:

$$\int R(x,y)dx, \tag{11.1}$$

где y есть алгебраическая функция от x, т.е. удовлетворяет алгебраическому уравнению:

$$P(x,y) = 0, \tag{11.2}$$

где P – целый относительно x и y многочлен. Подобного рода интегралы получили название ***абелевых*** интегралов. К их числу относятся интегралы, вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Действительно, функции $y=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ удовлетворяют соответственно алгебраическим уравнениям $(\gamma x+\delta)y^m-(\alpha x+\beta)=0,\ y^2-(ax^2+bx+c)=0$.

Становясь на геометрическую точку зрения, абелев интеграл (11.1) считают связанным с той алгебраической кривой, которая определяется уравнением (11.2). Например, интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{11.3}$$

связан с кривой второго порядка $y^2=ax^2+bx+c$.

Если кривая (11.2) может быть представлена параметрически $x=r_1(t)$, $y=r_2(t)$ так, что функции $r_1(t)$ и $r_2(t)$ оказываются рациональными (в этом случае кривая называется уникурсальной), то в интеграле (11.1) становится возможной рационализация подынтегрального выражения: подстановкой $x=r_1(t)$ оно приводится к виду $R(r_1(t), r_2(t))r_1'(t)dt$.

К этому классу относятся оба упомянутые выше случая. В частности, возможность рационализации подынтегрального выражения в интеграле типа (11.3) связана именно с тем фактом, что кривая второго порядка уникурсальна.

Очевидно, что переменные x и t связанны алгебраическим уравнением, так что t является алгебраической функцией от x. Если расширить класс элементарных функций, включив в него и все алгебраические функции, то можно сказать что в случае уникурсальности кривой (11.2), интеграл (11.1) всегда выражается через элементарные функции в конечном виде.

Однако подобное обстоятельство является в некотором смысле исключением. В общем случае кривая (11.2) не уникурсальна, а тогда как можно доказать, интеграл (11.1) заведомо не всегда, т.е. не при всякой функции R может быть выражен в конечном виде (хотя не исключена возможность этого при отдельных конкретных R).

С этим мы сталкиваемся уже при рассмотрении важного класса интегралов

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + \partial})dx, \tag{11.4}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + \partial x + e})dx, \tag{11.5}$$

содержащих квадратный корень из многочленов 3-й и 4-й степени и, естественно, примыкающих к интегралам (11.3). Интегралы вида (11.4), как правило, уже не выражаются в конечном виде через элементарные функции даже при расширенном понимании этого термина. Поэтому знакомство с ними мы отнесли к заключительному параграфу, чтобы не прерывать основной линии изложения настоящей главы, посвященной, главным образом, изучению классов интегралов, берущихся в конечном виде.

Многочлены под корнем в (11.4) предполагаются имеющими вещественные коэффициенты. Кроме того, мы всегда будем считать, что у них нет кратных корней, ибо иначе можно было бы вынести линейный множитель из-под знака корня; вопрос свелся бы к интегрированию выражений уже ранее изученных типов, и интеграл выразился бы в конечном виде. Последнее обстоятельство может иметь место иной раз и при отсутствии кратных корней; например, легко проверить, что $\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C$, $\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}dx = x\sqrt{2x^3+1} + C$.

Интегралы от выражений типа (11.4) вообще называют эллиптическими (в связи с тем обстоятельством, что впервые с ними столкнулись при решении задачи о спрямлении эллипса). Впрочем, это название, в точном смысле, относят обычно лишь к тем из них, которые не берутся в конечном виде; другие же, вроде только что приведенных, называют псевдоэллиптическими.

Изучение и табулирование (т.е. составление таблиц значений) интегралов от выражений (11.4) при произвольных коэффициентах a, b, c, … , разумеется, затруднительно. Поэтому естественно желание свести все эти интегралы к немногим таким, в состав которых входило бы по возможности меньше произвольных коэффициентов (параметров).

12 Эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода

Выделим из рациональной функции *R(x)*, фигурирующей в подынтегральном выражении (8), целую часть *P(x)*, а правильно-дробную её часть разложим на простые дроби. Если не объединять сопряженные комплексные корни знаменателя, а рассматривать их порознь, подобно вещественным корням, то *R(x)* представится в виде суммы степеней x^n (n=0, 1, 2, …) и дробей вида $\frac{1}{(x-a)^m}$ (m=1, 2, 3, …), где a может быть и мнимым числом, умноженным на числовые коэффициенты. Отсюда ясно, что интеграл (8), в общем случае, является линейным агрегатом следующих интегралов:

$$I_n = \int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \ (n=0,1,2,\ldots) \text{ и } H_m = \int \frac{dz}{(z^2-a)^m\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \ (m=1,2,\ldots).$$

Остановимся на интегралах I_n. Если проинтегрировать (легко проверяемое тождество)

$$\left[z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right]' = (2n-3)z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} +$$

$$+ z^{2n-3}\frac{2k^2z^3-(k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{(2n-1)k^2z^{2n}-(2n-2)(k^2+1)z^{2n-2}+(2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

то получится рекуррентное соотношение

$$(2n-1)k^2I_n - (2n-2)(k^2+1)I_{n-1} + (2n-3)I_{n-2} = z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \qquad (12.1)$$

связывающее три последовательных интеграла I. Полагая здесь n=2, выразим I_2 через I_0 и I_1; если взять n=3 и вместо I_2 подставить его выражение через I_0 и I_1, то I_3 выразится через эти интегралы. Продолжая так дальше, легко убедиться, что из интегралов $I_n (n \geq 2)$ выражается через I_0 и I_1, и даже, учитывая (12.1), можно установить и вид связывающей их формулы $I_n = \alpha_n I_0 + \beta_n I_1 + q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$, где α_n и β_n - постоянные, а $q_{2n-3}(z)$ есть нечетный многочлен степени $2n$-3. Отсюда ясно, что если $P_n(x)$ есть многочлен n-й степени от x, то

$$\int \frac{P_n(z^2)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \alpha I_0 + \beta I_1 + zQ_{n-2}(z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \tag{12.2}$$

где α и β - постоянные, а $Q_{n-2}(x)$ есть некоторый многочлен (n-2)-й степени от x.

Определение этих постоянных и коэффициентов многочлена Q может быть произведено (если многочлен P конкретно задан по методу неопределенных коэффициентов).

Заметим, что из (12.1) можно было бы выразить через I_0 и I_1 интегралы I_n и при отрицательных значениях (n=-1, -2, …), так что в интегралах H_m достаточно ограничится случаем a≠0.

Переходя к интегралам H_m (скажем при вещественных a), подобным же образом установим для них рекуррентное соотношение

$$(2m-2)\left[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3\right]H_m-(2m-3)\left[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2\right]H_{m-1}+$$
$$+(2m-4)\left[(k^2+1)-3k^2a\right]H_{m-2}-(2m-5)k^2H_{m-3}=\frac{z}{(z^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

справедливое и при отрицательных, и при нулевом значениях m. Отсюда все H_m выразятся через три из них:

$$\acute{I}_1 = \int \frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$H_0 = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_0,$$

$$H_{-1} = \int \frac{(z^2-a)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1 - aI_0,$$

т.е. окончательно через I_0 , I_1 и H_1.

Подчеркнем, что все это сохраняет силу при мнимых значениях параметра a; однако мы не станем входить здесь в разъяснения по этому поводу.

Итак, в результате всех наших рассуждений мы приходим к такому общему заключению: все эллиптические интегралы с помощью элементарных подстановок – и с точностью до слагаемых, выражающихся в конечном виде, – приводятся к следующим трем стандартным интегралам:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad \int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\\&\int\frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\end{aligned}\right\}\qquad (0<k<1)$$

(последний получается из H_1 введением, взамен $a\neq0$, нового параметра $h=-\dfrac{1}{a}$). Эти интегралы, как показал Лиувилль, в конечном виде уже не берутся. Их Лежандр назвал эллиптическими интегралами, соответственно, 1-го, 2-го и 3-го рода. Первые два содержат лишь один параметр k, а последний, кроме него, еще (комплексный) параметр h.

Лежандр внес в эти интегралы еще дальнейшие упрощения, выполнив в них подстановку $z=\sin\varphi$ (φ изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$). При этом первый из них непосредственно переходит в интеграл

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{12.3}$$

Второй преобразуется так: $\displaystyle\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k\sin^2\varphi}d\varphi$, т.е. приводится к предыдущему интегралу и к новому интегралу

$$\int\sqrt{1-k\sin^2\varphi}d\varphi. \tag{12.4}$$

Наконец третий интеграл при указанной подстановке переходит в

$$\int\frac{d\varphi}{\left(1+h\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k\sin^2\varphi}}. \tag{12.5}$$

Интегралы (12.3), (12.4) и (12.5) также называются ***эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го рода в форме Лежандра***.

Из них особую важность и частое применение имеют первые два. Если считать, что эти интегралы при $\varphi=0$ обращаются в нуль, и тем фиксировать содержащиеся в них произвольные постоянные, то получаются две вполне определенные функции от φ, которые Лежандр обозначил соответственно через

$F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$. Здесь кроме независимой переменной φ, указан также параметр k, называемый ***модулем***, который входит в выражения этих функций.

Лежандром были составлены обширные таблицы значений этих функций при различных φ и различных k. В них не только аргумент φ, трактуемый как угол, выражается в градусах, но и модуль k (правильная дробь!) рассматривается как синус некоторого угла θ, который и указывается в таблице вместо модуля, и притом также в градусах.

Кроме того, как Лежандром, так и другими учеными были изучены глубочайшие свойства этих функций, установлен ряд относящихся к ним формул и т.д. Благодаря этому функции F и E Лежандра вошли в семь функций, встречающихся в анализе и его приложениях, на равных правах с элементарными функциями.

Низшая часть интегрального исчисления, которой в основном мы вынуждены пока ограничиться, занимается «интегрированием в конечном виде». Однако было бы ошибочно думать, что этим ограничиваются задачи интегрального исчисления вообще: эллиптические интегралы F и E являются примерами таких функций, которые плодотворно изучаются по их интегральным выражениям и с успехом применяются, хотя и не могут быть представлены через элементарные функции в конечном виде.

13 Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$;

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}dx}{x-1}$;

3. $\int \frac{dx}{(1-2x)\sqrt{\ln^3(1-2x)}}$;

4. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}$;

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{3x+1}$;

6. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}dx}{(2x-1)}$;

7. $\int \frac{\ln^3(1-x)dx}{x-1}$;

8. $\int \frac{dx}{(1+x)\ln^2(x+1)}$;

9. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\ln(2+x)}}$;

10. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(5+x)}dx}{5+x}$;

11. $\int \frac{\sqrt{\ln^5(3x-2)}dx}{3x-2}$;

12. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(3+x)}dx}{3+x}$;

13. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(2x+1)}dx}{2x+1}$;

14. $\int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt[5]{\ln(3x-1)}}$;

15. $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+2)}dx}{x+2}$;

16. $\int \frac{dx}{(2-3x)\sqrt{\ln(2-3x)}}$;

17. $\int \frac{\ln^3(3x+1)dx}{3x+1}$;

18. $\int \frac{dx}{(3-x)\ln^4(3-x)}$;

19. $\int \frac{dx}{(5+x)\ln^3(x+5)}$;

20. $\int \frac{\ln^8(1-2x)dx}{1-2x}$;

21. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(4+x)}dx}{4+x}$;

22. $\int \frac{\ln^5(7-x)dx}{7-x}$;

23. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}dx}{x+3}$;

24. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(6-x)}dx}{6-x}$;

25. $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$;

26. $\int \frac{\ln^5(1-3x)dx}{1-3x}$;

27. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(5x+6)}dx}{5x+6}$;

28. $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$;

29. $\int \frac{\ln^6(x+9)dx}{x+9}$;

30. $\int \frac{\ln(3x+5)dx}{3x+5}$.

2. *Вычислить интегралы:*

1. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$;
2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$;
3. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$;
4. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$;
5. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^5 5x} dx$;
6. $\int \cos^7 3x \sin 3x dx$;
7. $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$;
8. $\int \frac{\cos 3x}{3 - \sin 3x} dx$;
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x + 3}} dx$;
10. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 2}} dx$;
11. $\int \frac{\cos 6x}{\sqrt{(\sin 6x - 4)^2}} dx$;
12. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^2 5x} dx$;
13. $\int \frac{\sin 7x}{\sqrt{\cos 7x}} dx$;
14. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$;
15. $\int \sin^3 4x \cos 4x dx$;
16. $\int \sqrt[3]{\cos 2x} \sin 2x dx$;
17. $\int \sqrt{\cos^3 3x} \sin 3x dx$;
18. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$;
19. $\int \sin^7 5x \cos 5x dx$;
20. $\int \frac{\cos 9x}{\sqrt{\sin^3 9x}} dx$;
21. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x + 1} dx$;
22. $\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx$;
23. $\int \sin^6 3x \cos 3x dx$;
24. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$;
25. $\int \sqrt{\cos^3 2x} \sin 2x dx$;
26. $\int \sin^4 8x \cos 8x dx$;
27. $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$;
28. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[5]{\cos^2 3x}} dx$;
29. $\int \frac{\sin 8x}{\sqrt[4]{\cos^3 8x}} dx$;
30. $\int \frac{\cos 9x}{\sin^6 9x} dx$.

3. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{tg^3 x}}{\cos^2 x} dx;$

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{tg^3 x}};$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x ctg^4 x};$

4. $\int \frac{ctg^5 2x}{\sin^2 2x} dx;$

5. $\int \frac{tg^3 4x}{\cos^2 4x} dx;$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{tg 5x}}{\cos^2 5x} dx;$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 x}}{\sin^2 x} dx;$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x ctg^3 2x};$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x tg^4 4x};$

10. $\int \frac{\sqrt{ctg 7x}}{\sin^2 7x} dx;$

11. $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2 (x-1)}}{\sin^2 (x-1)} dx;$

12. $\int \frac{tg^4 7x}{\cos^2 7x} dx;$

13. $\int \frac{ctg^5 (x+6)}{\sin^2 (x+6)} dx;$

14. $\int \frac{\sqrt[3]{tg^5 4x}}{\cos^2 4x} dx;$

15. $\int \frac{ctg^4 (2x-3)}{\sin^2 (2x-3)} dx;$

16. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x \sqrt{tg 4x}};$

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x ctg^3 3x};$

18. $\int \frac{tg(2x-5)}{\cos^2 (2x-5)} dx;$

19. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x ctg^8 4x};$

20. $\int \frac{\sqrt{ctg 4x}}{\sin^2 4x} dx;$

21. $\int \frac{ctg^5 (4x+1)}{\sin^2 (4x+1)} dx;$

22. $\int \frac{\sqrt[5]{tg(x-1)}}{\cos^2 (x-1)} dx;$

23. $\int \frac{\sqrt[8]{tg(5x-1)}}{\cos^2 (5x-1)} dx;$

24. $\int \frac{\sqrt{ctg 3x}}{\sin^2 3x} dx;$

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \sqrt[5]{ctg^3 4x}};$

26. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x \sqrt[3]{ctg^4 3x}};$

27. $\int \frac{tg^2 2x}{\cos^2 2x} dx;$

28. $\int \frac{\sqrt{ctg^5 3x}}{\sin^2 3x} dx;$

29. $\int \frac{\sqrt[3]{ctg^7 (6x+1)}}{\sin^2 (6x+1)} dx;$

30. $\int \frac{tg^7 5x}{\cos^2 5x} dx.$

4. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx;$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin 6x}}{\sqrt{1-36x^2}}dx;$

3. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

4. $\int \frac{arctg^3 2x}{1+4x^2}dx;$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

6. $\int \frac{dx}{(1+4x^2)arctg^3 2x};$

7. $\int \frac{\arccos^3 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx;$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^2 x}}{1+x^2}dx;$

9. $\int \frac{\arccos^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x};$

11. $\int \frac{\arccos^{10} 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

12. $\int \frac{arctg^7 3x}{1+9x^2}dx;$

13. $\int \frac{\arccos^9 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx;$

14. $\int \frac{\arcsin^5 8x}{\sqrt{1-64x^2}}dx;$

15. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

16. $\int \frac{dx}{(1+3x^2)arctg^7 \sqrt{3}x};$

17. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^8 2x}}{1+4x^2}dx;$

18. $\int \frac{\arccos^4 9x}{\sqrt{1-81x^2}}dx;$

19. $\int \frac{\sqrt{arctg^3 2x}}{1+4x^2}dx;$

20. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{arctg^7 x}};$

21. $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^9 x};$

22. $\int \frac{\arccos^7 6x}{\sqrt{1-36x^2}}dx;$

23. $\int \frac{\sqrt[3]{\arccos 7x}}{\sqrt{1-49x^2}}dx;$

24. $\int \frac{arctg^4 10x}{1+100x^2}dx;$

25. $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx;$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x};$

27. $\int \frac{arctg^{10} 2x}{1+4x^2}dx;$

28. $\int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx;$

29. $\int \frac{\sqrt[5]{arctg^3 x}}{1+x^2}dx;$

30. $\int \frac{arctg^4 8x}{1+64x^2}dx.$

5. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$;

2. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}$;

3. $\int \frac{x^2dx}{e^{x^3+1}}$;

4. $\int e^{\cos x} \sin xdx$;

5. $\int e^{2x^3-1} x^2dx$;

6. $\int \frac{\sin xdx}{e^{\cos x}}$;

7. $\int e^{7x^2+2} xdx$;

8. $\int e^{3-x^2} xdx$;

9. $\int e^{4x^2+5} xdx$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}}$;

11. $\int e^{5x^4+1} x^3dx$;

12. $\int e^{x^8-9} x^7dx$;

13. $\int e^{1-x^4} x^3dx$;

14. $\int e^{\sin x+1} \cos xdx$;

15. $\int e^{4-x^2} xdx$;

16. $\int e^{tgx} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

17. $\int e^{4\sin x-1} \cos xdx$;

18. $\int e^{3\cos x+2} \sin xdx$;

19. $\int e^{6x^6-5} x^5dx$;

20. $\int e^{5-2x^2} xdx$;

21. $\int e^{4-x^6} x^5dx$;

22. $\int e^{3\cos 2x} \sin 2xdx$;

23. $\int e^{1-6x^2} xdx$;

24. $\int e^{x^3+1} x^2dx$;

25. $\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2} dx$;

26. $\int e^{3x^3} x^2dx$;

27. $\int \frac{x^4dx}{e^{3-x^5}}$;

28. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-8}}$;

29. $\int \frac{x^5dx}{e^{x^6+1}}$;

30. $\int e^{4-5x^2} xdx$.

6. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x-1}{7x^2+4}dx;$
2. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx;$
3. $\int \frac{2x+1}{5x^2-3}dx;$
4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx;$
5. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}dx;$
6. $\int \frac{5-x}{3x^2+1}dx;$
7. $\int \frac{3+x}{3x^2+1}dx;$
8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}dx;$
9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx;$
10. $\int \frac{3x-2}{3x^2+8}dx;$
11. $\int \frac{x-1}{5-2x^2}dx;$
12. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx;$
13. $\int \frac{2x-3}{5x^2+2}dx;$
14. $\int \frac{3-x}{4x^2+5}dx;$
15. $\int \frac{x-3}{1-4x^2}dx;$
16. $\int \frac{3x-1}{4-x^2}dx;$
17. $\int \frac{5x-2}{x^2+9}dx;$
18. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx;$
19. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}}dx;$
20. $\int \frac{2x-4}{x^2+16}dx;$
21. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}dx;$
22. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}dx;$
23. $\int \frac{3x+4}{5-2x^2}dx;$
24. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$
25. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx;$
26. $\int \frac{3-2x}{x^2-8}dx;$
27. $\int \frac{x-5}{8-4x^2}dx;$
28. $\int \frac{x+4}{7x^2+3}dx;$
29. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx;$
30. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx.$

7. Вычислить интегралы:

1. $\int (x+1)e^{2x}dx$;
2. $\int (x-2)e^{x}dx$;
3. $\int (x-7)\cos 2xdx$;
4. $\int (x-1)\cos 5xdx$;
5. $\int (x+2)\cos 3xdx$;
6. $\int (x-2)\cos 4xdx$;
7. $\int (x-4)\sin 2xdx$;
8. $\int (x-3)\cos xdx$;
9. $\int (x+4)\sin 2xdx$;
10. $\int x\sin 3xdx$;
11. $\int (x+5)\sin xdx$;
12. $\int (x-5)\cos xdx$;
13. $\int (x+9)\sin xdx$;
14. $\int (x+7)\sin 2xdx$;
15. $\int (x+4)\sin 3xdx$;
16. $\int (x+3)\sin 5xdx$;
17. $\int (x-4)\cos 2xdx$;
18. $\int (x-8)\sin xdx$;
19. $\int (x+4)\cos 3xdx$;
20. $\int (x+8)\sin 3xdx$;
21. $\int (x+6)\cos 4xdx$;
22. $\int (x-6)\sin\frac{x}{2}dx$;
23. $\int (x+1)\cos 7xdx$;
24. $\int (x+2)\sin\frac{x}{5}dx$;
25. $\int x\sin\frac{x}{6}dx$;
26. $\int (x+4)\cos\frac{x}{2}dx$;
27. $\int (x+1)\sin\frac{x}{3}dx$;
28. $\int (x+2)\cos\frac{x}{4}dx$;
29. $\int (x+3)\sin\frac{x}{4}dx$;
30. $\int (x-9)\sin\frac{x}{2}dx$.

8. Вычислить интегралы:

1. $\int (x^2 + 4x - 5)\sin 9x dx$;
2. $\int x^2 \sin 3x dx$;
3. $\int (x^2 + 5x - 3)e^{7x} dx$;
4. $\int (x^2 - 5)\cos\frac{x}{2} dx$;
5. $\int (x^2 + 9)\sin 4x dx$;
6. $\int (x^2 + 4x - 5)\cos\frac{x}{2} dx$
7. $\int (x^2 - 2x + 3)e^{\frac{x}{5}} dx$;
8. $\int (x^2 + 4)\sin 3x dx$;
9. $\int (x^2 - 3x)\sin 5x dx$;
10. $\int (x^2 - x + 1)\cos 6x dx$;
11. $\int (x^2 - 3)e^{-x} dx$;
12. $\int (x^2 + 3x - 8)\sin\frac{x}{6} dx$
13. $\int (x^2 + 4x)\cos 3x dx$;
14. $\int (x^2 + 8x - 2)e^{-9x} dx$;
15. $\int (x^2 + 6)\cos x dx$;
16. $\int (x^2 - 6)\sin\frac{x}{3} dx$;
17. $\int (x^2 + 1)\cos 7x dx$;
18. $\int (x^2 + 2x - 5)\sin\frac{x}{6} dx$;
19. $\int x^2 \sin\frac{x}{4} dx$;
20. $\int (x^2 + x - 3)e^{-6x} dx$;
21. $\int (x^2 + 2)\cos\frac{x}{10} dx$;
22. $\int (x^2 + 3)e^{-4x} dx$;
23. $\int (x^2 + 2x - 2)e^{8x} dx$;
24. $\int (x^2 - 3x)\cos 5x dx$;
25. $\int (x^2 - 1)\cos 3x dx$;
26. $\int (x^2 + 2x - 7)\cos x dx$;
27. $\int (x^2 + 2)\cos 4x dx$;
28. $\int (x^2 - 4x + 1)\sin 2x dx$;
29. $\int (x^2 + 3)\cos 8x dx$;
30. $\int x^2 e^{-7x} dx$.

9. Вычислить интегралы:

1. $\int \ln(x-5)dx$;
2. $\int arctg\,2xdx$;
3. $\int x^2e^{-x}dx$;
4. $\int (x+1)e^{-4x}dx$;
5. $\int x^2e^{-2x}dx$;
6. $\int arctg\,3xdx$;
7. $\int x\cos 8xdx$;
8. $\int arctg\,4xdx$;
9. $\int ar\sin 5xdx$;
10. $\int (x+1)e^{-x}dx$;
11. $\int xarctgxdx$;
12. $\int x^2e^{3x}dx$;
13. $\int x\cos(x+4)dx$;
14. $\int x\cos(x-2)dx$;
15. $\int x\cos(x+3)dx$;
16. $\int xe^{x+2}dx$;
17. $\int xe^{-7x}dx$;
18. $\int ar\sin 2xdx$;
19. $\int x\sin(x+7)dx$;
20. $\int x\cos(x-4)dx$;
21. $\int x\sin(x+4)dx$;
22. $\int x\cos(x+9)dx$;
23. $\int (x+3)e^{-x}dx$;
24. $\int ar\cos 2xdx$;
25. $\int (x^2-3)e^{x}dx$;
26. $\int xe^{-4x}dx$;
27. $\int x\cos(x+7)dx$;
28. $\int xe^{-5x}dx$;
29. $\int xe^{x+3}dx$;
30. $\int x\cos(2-x)dx$.

10. Вычислить интегралы:

1. $\int arctg(2+x)dx$;
2. $\int x\cos 6xdx$;
3. $\int \arcsin 3xdx$;
4. $\int \arccos 2xdx$;
5. $\int arctg 8xdx$;
6. $\int x\cos(x-9)dx$;
7. $\int \arcsin 8xdx$;
8. $\int x\sin(x+3)dx$;
9. $\int x\cos(x+4)dx$;
10. $\int \arccos 7xdx$;
11. $\int x\cos(x-7)dx$;
12. $\int x\sin(x-5)dx$;
13. $\int (x-4)e^x dx$;
14. $\int xe^{-6x}dx$;
15. $\int arctg 7xdx$;
16. $\int \arcsin 5xdx$;
17. $\int \ln(x-7)dx$;
18. $\int x\cos(x+6)dx$;
19. $\int arctg\frac{x}{2}dx$;
20. $\int \ln(x+8)dx$;
21. $\int arctg\frac{x}{5}dx$;
22. $\int \ln(x+12)dx$;
23. $\int \arcsin\frac{x}{5}dx$;
24. $\int \ln(2x-1)dx$;
25. $\int \ln(2x+3)dx$;
26. $\int \arccos\frac{x}{5}dx$;
27. $\int arctg\frac{x}{4}dx$;
28. $\int \arcsin\frac{x}{7}dx$;
29. $\int arctg 6xdx$;
30. $\int \arccos\frac{x}{3}dx$.

11. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx;$

2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx;$

3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx;$

4. $\int \frac{x}{2x^2+x+5}dx;$

5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx;$

6. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx;$

7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx;$

8. $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx;$

9. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx;$

10. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx;$

11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx;$

12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx;$

13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx;$

14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx;$

15. $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5};$

16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx;$

17. $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx;$

18. $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx;$

19. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx;$

20. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx;$

21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx;$

22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx;$

23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx;$

24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx;$

25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx;$

26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx;$

27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx;$

28. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx;$

29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx;$

30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx.$

12. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx;$

2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx;$

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx;$

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx;$

5. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx;$

6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx;$

7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx;$

8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx;$

9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx;$

10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx;$

11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx;$

12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx;$

13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx;$

14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx;$

15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx;$

16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx;$

17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx;$

18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx;$

19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx;$

20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx;$

21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx;$

22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx;$

23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx;$

24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx;$

25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx;$

26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx;$

27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx;$

28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx;$

29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx;$

30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx.$

13. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x+1}{(x+4)(x+3)(x+5)}dx;$
2. $\int \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx;$
3. $\int \frac{x+2}{(x+4)(x-3)(x+1)}dx;$
4. $\int \frac{3x-2}{(x-6)(x+1)(x-5)}dx;$
5. $\int \frac{4x-1}{(x-8)(x+1)(x-3)}dx;$
6. $\int \frac{2x-7}{(x-1)(x+3)(x+8)}dx;$
7. $\int \frac{x-8}{(x-4)(x+8)(x-1)}dx;$
8. $\int \frac{x-2}{(x+1)(x-3)(x-4)}dx;$
9. $\int \frac{2x-3}{(x+5)(x-1)(x+8)}dx;$
10. $\int \frac{4x+5}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx;$
11. $\int \frac{3x-5}{(x+1)(x+3)(x-4)}dx;$
12. $\int \frac{5x+1}{(x+1)(x-2)(x-6)}dx;$
13. $\int \frac{8x+7}{(x-2)(x-3)(x-4)}dx;$
14. $\int \frac{7x}{(x+4)(x+5)(x+6)}dx;$
15. $\int \frac{x+5}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx;$
16. $\int \frac{2x-7}{(x+4)(x-2)(x-4)}dx;$
17. $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-5)(x-8)}dx;$
18. $\int \frac{5x+6}{(x+8)(x-7)(x-6)}dx;$
19. $\int \frac{5x+9}{(x+1)(x-3)(x+2)}dx;$
20. $\int \frac{4x-1}{(x-5)(x-4)(x-3)}dx;$
21. $\int \frac{3x+1}{(x-7)(x+3)(x-1)}dx;$
22. $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x-5)(x+6)}dx;$
23. $\int \frac{6x-1}{(x+7)(x-8)(x+9)}dx;$
24. $\int \frac{5x+1}{(x-1)(x-3)(x-5)}dx;$
25. $\int \frac{x+8}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx;$
26. $\int \frac{6x-1}{(x+4)(x+3)(x-8)}dx;$
27. $\int \frac{x}{(x+1)(x-2)(x+7)}dx;$
28. $\int \frac{4x+7}{(x+2)(x+3)(x-8)}dx;$
29. $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)(x+1)}dx;$
30. $\int \frac{4x-1}{(x-5)(x-1)(x+2)}dx.$

14. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx;$

2. $\int \frac{12dx}{(x^2-2x-3)(x-2)};$

3. $\int \frac{43x-67}{(x^2-x-12)(x-1)}dx;$

4. $\int \frac{x^2+x}{(x^2+x-2)(x+3)}dx;$

5. $\int \frac{8xdx}{(x^2+6x+5)(x+3)};$

6. $\int \frac{x^2-x+1}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx;$

7. $\int \frac{x-1}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx;$

8. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx;$

9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x^2+x-2)(x+1)}dx;$

10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx;$

11. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx;$

12. $\int \frac{x^2+2x+1}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx;$

13. $\int \frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx;$

14. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x+1)}dx;$

15. $\int \frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2};$

16. $\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx;$

17. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx;$

18. $\int \frac{2x^2+1}{(x^2+2x-3)(x+2)}dx;$

19. $\int \frac{6x^2}{(x^2+3x+2)(x-1)}dx;$

20. $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x+2)};$

21. $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx;$

22. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)}dx;$

23. $\int \frac{x+5}{(x^2-3x+2)(x+4)}dx;$

24. $\int \frac{3x-1}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx;$

25. $\int \frac{x^2+5}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx;$

26. $\int \frac{x^2-x+3}{(x^2+x-2)(x+1)}dx;$

27. $\int \frac{x^2+8}{(x^2-5x+4)(x+3)}dx;$

28. $\int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx;$

29. $\int \frac{x^2-3}{(x^2-1)(x+2)}dx;$

30. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx.$

15. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2}dx;$

2. $\int \frac{x^3-2\tilde{o}^2-2\tilde{o}+1}{x^3-x^2}dx;$

3. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}dx;$

4. $\int \frac{\tilde{o}+2}{x^3-x^2}dx;$

5. $\int \frac{4x^4+8\tilde{o}^3-3\tilde{o}-3}{x^3+2x^2+x}dx;$

6. $\int \frac{x^4+2}{x^3+x^2}dx;$

7. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx;$

8. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx;$

9. $\int \frac{2x^2-5\tilde{o}+1}{x^3-2x^2+x}dx;$

10. $\int \frac{4x^4+8\tilde{o}^3-\tilde{o}-2}{x(x+1)^2}dx;$

11. $\int \frac{3x-\tilde{o}^2-2}{x(x+1)^2}dx;$

12. $\int \frac{2x^4-4\tilde{o}^3+2\tilde{o}^2-4\tilde{o}+1}{x(x-1)^2}dx;$

13. $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx;$

14. $\int \frac{x^3-3}{(x^2-1)(x-1)}dx;$

15. $\int \frac{x^2-3\tilde{o}+2}{x^3+2x^2+x}dx;$

16. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx;$

17. $\int \frac{4\tilde{o}^4+8\tilde{o}^3-1}{(x+1)(x^2+\tilde{o})}dx;$

18. $\int \frac{4\tilde{o}}{(x+1)(x^2-1)}dx;$

19. $\int \frac{dx}{x^3+x^2};$

20. $\int \frac{\tilde{o}^3-4\tilde{o}^2+2\tilde{o}-1}{x^3-x^2}dx;$

21. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx;$

22. $\int \frac{2\tilde{o}^3+2\tilde{o}^2+4\tilde{o}+3}{x^3+x^2}dx;$

23. $\int \frac{\tilde{o}^3+4x+5}{(x-1)(x^2-1)}dx;$

24. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx;$

25. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx;$

26. $\int \frac{3\tilde{o}^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx;$

27. $\int \frac{\tilde{o}^2+\tilde{o}+2}{x^3+x^2}dx;$

28. $\int \frac{2dx}{x^3-x^2};$

29. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx;$

30. $\int \frac{2\tilde{o}^3+5\tilde{o}^2-1}{x^3+x^2}dx.$

16. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx;$

3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

4. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

5. $\int \frac{x^3+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

6. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx;$

7. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

8. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

9. $\int \frac{7x-10}{x^3+64}dx;$

10. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

11. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx;$

12. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

13. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+27}dx;$

14. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

15. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx;$

16. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx;$

17. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

18. $\int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

19. $\int \frac{2x^4+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

20. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

21. $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx;$

22. $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

23. $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx;$

24. $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

25. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3-8}dx;$

26. $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

27. $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx;$

28. $\int \frac{6xdx}{x^3-1}dx;$

29. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx;$

30. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$

17. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx;$

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx;$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx;$

4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx;$

5. $\int \sqrt{4-x^2}dx;$

6. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx;$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx;$

8. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^4}};$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx;$

11. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}dx;$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}};$

15. $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx;$

16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}};$

17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}};$

18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx;$

19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}};$

20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx;$

21. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}};$

22. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx;$

23. $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx;$

24. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}dx}{x^4};$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+x^2)^3}};$

26. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx;$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}};$

28. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}};$

29. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx;$

30. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx.$

18. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$;

2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$;

3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$;

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$;

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$;

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}$;

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$;

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$;

13. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$;

14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}$;

15. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$;

17. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

18. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$;

19. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$;

20. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x-1}}$;

21. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$;

22. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

23. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$;

24. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$;

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$;

26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$;

27. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$;

28. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$;

29. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$;

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$.

19. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx;$

2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx;$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx;$

4. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx;$

5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx;$

6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+4}}dx;$

7. $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}};$

8. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx;$

9. $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}};$

10. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}};$

11. $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[3]{x+3}};$

12. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx;$

13. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}};$

14. $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}dx;$

15. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx;$

16. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{x+1}}dx;$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}};$

18. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx;$

19. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}};$

20. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx;$

21. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}};$

22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx;$

23. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}};$

24. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}};$

25. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}};$

26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx;$

27. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}};$

28. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx;$

29. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}};$

30. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}dx.$

20. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$;

2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$;

3. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$;

4. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$;

5. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$;

6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$;

7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

9. $\int \frac{dx}{5+\cos x}$;

10. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$;

11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

12. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$;

13. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;

14. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$;

15. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$;

16. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$;

17. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$;

18. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$;

19. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;

20. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$;

21. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$;

22. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$;

23. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$;

24. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;

25. $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$;

26. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;

27. $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$;

28. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$;

29. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$;

30. $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$.

21. Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 16\sin x \cos x}$;

2. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x}$;

3. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$;

4. $\int \frac{2tgx + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$;

5. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$;

6. $\int \frac{tgx}{1 - ctg^2 x} dx$;

7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$;

8. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$;

9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$;

11. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$;

12. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}$;

13. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x + \cos^4 x} dx$;

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$;

15. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$;

16. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$;

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3\cos^2 x}$;

18. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$;

19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$;

20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} dx$;

21. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$;

22. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3}$;

23. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$;

24. $\int \frac{3tgx - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$;

25. $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$;

26. $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx$;

27. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$;

28. $\int \frac{dx}{6 - 3\cos^2 x}$;

29. $\int \frac{tgx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$;

30. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x} dx$.

22. Вычислить интегралы:

1. $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx;$

2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cos^3 x dx;$

3. $\int \cos^3 \sin^8 x dx;$

4. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx;$

5. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}};$

6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2x dx;$

7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx;$

8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx;$

9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$

10. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx;$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx;$

12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 2x dx;$

13. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx;$

14. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx;$

15. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}};$

16. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx;$

17. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx;$

18. $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx;$

19. $\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx;$

20. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx;$

21. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx;$

22. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx;$

23. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx;$

24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx;$

25. $\int \sin^3 x \cos^6 x dx;$

26. $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$

27. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x} dx;$

28. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx;$

29. $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx;$

30. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx.$

23. Вычислить интегралы:

1. $\int \sin^2(1-x)dx;$
2. $\int \sin^3(1-x)dx;$
3. $\int (1-2\sin\frac{x}{5})^2 dx;$
4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx;$
5. $\int \cos^3(1-x)dx;$
6. $\int (3-\sin 2x)^2 dx;$
7. $\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx;$
8. $\int (\cos x+3)^2 dx;$
9. $\int \cos^3(x+3)dx;$
10. $\int \sin^3 \frac{4x}{5} dx;$
11. $\int (1-\cos x)^2 dx;$
12. $\int \sin^2(2x-1)dx;$
13. $\int \sin^3 6x dx;$
14. $\int \sin^2 0{,}5x dx;$
15. $\int \sin^2(\frac{x}{2}+1)dx;$
16. $\int \cos^2 2x dx;$
17. $\int (1+2\cos\frac{x}{2})^2 dx;$
18. $\int \cos^2 3x dx;$
19. $\int \sin^4 2x dx;$
20. $\int \sin^2 3x dx;$
21. $\int (1-\cos 3x)^2 dx;$
22. $\int \cos^2 \frac{2x}{5} dx;$
23. $\int \sin^3 5x dx;$
24. $\int \sin^4 x dx;$
25. $\int \cos^4 x dx;$
26. $\int \cos^3 4x dx;$
27. $\int \cos^2 7x dx;$
28. $\int (\sin x-5)^2 dx;$
29. $\int \sin^3 4x dx;$
30. $\int \sin^2 \frac{3x}{4} dx.$

24. Вычислить интегралы:

1. $\int tg^2 x dx$;
2. $\int ctg^3 (x-6) dx$;
3. $\int tg^4 3x dx$;
4. $\int tg^2 7x dx$;
5. $\int tg^5 x dx$;
6. $\int tg^2 x dx$;
7. $\int ctg^3 x dx$;
8. $\int tg^2 \frac{x}{2} dx$;
9. $\int tg^3 \frac{x}{2} dx$;
10. $\int tg^2 4x dx$;
11. $\int ctg^3 x dx$;
12. $\int ctg^2 5x dx$;
13. $\int tg^3 \frac{x}{3} dx$;
14. $\int (1 - tg 2x)^2 dx$;
15. $\int tg^5 2x dx$;
16. $\int (2x + tg^2 7x) dx$;
17. $\int tg^4 \frac{2x}{3} dx$;
18. $\int (tg 2x + ctg 2x)^2 dx$;
19. $\int (1 - ctg x)^2 dx$;
20. $\int ctg^3 3x dx$;
21. $\int ctg^4 x dx$;
22. $\int tg^2 \frac{x}{2} dx$;
23. $\int tg^4 (x-6) dx$;
24. $\int tg^3 4x dx$;
25. $\int tg^4 \frac{x}{4} dx$;
26. $\int tg^4 (x+5) dx$;
27. $\int tg^3 (x-3) dx$;
28. $\int tg^2 (5x+1) dx$;
29. $\int tg^2 \frac{7x}{4} dx$;
30. $\int tg^5 4x dx$.

25. Вычислить интегралы:

1. $\int \sin 3x \cos x dx$;
2. $\int \sin^5 2x \cos 2x dx$;
3. $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$;
4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$;
5. $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx$;
6. $\int \cos x \sin 9x dx$;
7. $\int \sin^4 2x \cos 2x dx$;
8. $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$;
9. $\int \cos^5 x \sin x dx$;
10. $\int \cos 2x \cos 3x dx$;
11. $\int \sin 5x \sin 7x dx$;
12. $\int \sin 4x \cos 2x dx$;
13. $\int \cos^3 4x \sin 4x dx$;
14. $\int \cos^{-3} 2x \sin 2x dx$;
15. $\int \cos x \sin 9x dx$;
16. $\int \sin 4x \cos 2x dx$;
17. $\int \sin 3x \cos 2x dx$;
18. $\int \sin^3 7x \cos 7x dx$;
19. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;
20. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 2x}$;
21. $\int \cos 2x \cos 5x dx$;
22. $\int \sin^2 2x \cos x dx$;
23. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$;
24. $\int \sin 2x \sin 3x dx$;
25. $\int \sin x \cos^3 x dx$;
26. $\int \sin 5x \cos x dx$;
27. $\int \sin x \cos 4x dx$;
28. $\int \cos 3x \cos x dx$;
29. $\int \cos^4 2x \sin 2x dx$;
30. $\int \cos 7x \cos 5x dx$.

14 Тесты

ВАРИАНТ 1.

1. Какая из представленных ниже функций *F(x)* является первообразной для функции *f(x)*= $\cos 5x$?

1)$F(x) = \sin 5x$;

2)$F(x) = -5\sin 5x$;

3)$F(x) = \frac{1}{5}\sin 5x$;

4)$F(x) = \frac{1}{5}\sin x$;

5)$F(x) = 5\cos 5x$.

2. Множество первообразных функции $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$ имеет вид:

1) $3tg2x + C$;

2) $\frac{1}{\sin^3 2x} + C$;

3) $2ctg2x + C$;

4) $ctg2x + C$;

5) $-\frac{1}{2}ctg2x + C$.

3. Одной из первообразных функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ является функция:

1) $\ln\ln x + 2$;

2) $\frac{1}{\ln x}$;

3) $\ln x + 6$;

4) $\frac{\ln^2 x}{2}$;

5) $\frac{1}{x} + 3$.

4. Одна из первообразных функции $f(x) = xe^{x^2}$ имеет вид:

1) $x^2 e^x + 1$;

2) $\frac{1}{2}e^{x^2}$;

3) $e^{x^2} - 5$;

4) $x + e^{x^2} + 4$;

5) e^{x^2}.

5. При каких целых значениях *a*, *b*, *c* функция $F(x) = 2\sin(3x-1)$ является первообразной для функции $f(x) = a\cos(bx+c)$?

1) *a*=6; *b*=3; c=-1;
2) *a*=-1; *b*=1; c=-1;
3) *a*=2; *b*=1; c=0;
4) *a*=-6; *b*=3; c=0;
5) *a*=6; *b*=3; c=1.

6. При каких целых значениях *a*, *b*, *c* функции $F_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ и $F_2(x) = \frac{1}{a}(1+bx)^c$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$?

1) *a*=2; *b*=1; c=1;
2) *a*=-3; *b*=2; c=4;
3) *a*=8; *b*=2; c=2;
4) *a*=8; *b*=1; c=0;
5) *a*=$\frac{1}{2}$; *b*=3; c=1.

7. При каких целых значениях *a*, *b*, *c* функция $F(x) = 3e^{6x-1}$ является первообразной для функции $f(x) = ae^{bx+c}$?

1) *a*=18 *b*=6; c=-1;
2) *a*=3; *b*=-1; c=6;

3) $a=\frac{1}{2}$; b=6; c=0;

4) a=6; b=6; c=-1;

5) a=12; b=-1; c=6.

8. Если график функции *y=F(x)* проходит через начало координат и *dy=(m-1)dx*, то:

1) $y=\frac{m^2}{2}x-mx+1;$

2) $y=\frac{(m-1)^2}{2};$

3) $y=m-1;$

4) $y=(m-1)x;$

5) $y=m.$

9. Неопределенный интеграл $\int(\cos 5x-1)'dx$ равен:

1) $5\sin 5x-x;$

2) $\cos 5x-1;$

3) $-5\sin 5x-1;$

4) $x\cos 5x;$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-x.$

10. Значение интеграла $\int e^{3x+1}dx$ равно:

1) $\frac{1}{3}e^{3x+1};$

2) $e^{3x+1};$

3) $3e^{3x+1};$

4) $e^{3x};$

5) $e^{2(3x+1)}.$

11. Неопределенный интеграл $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$ равен:

1) $\frac{tgx}{2\cos^3 x}+C;$

2) $\frac{tg^2 x}{\cos x}+C;$

3) $\frac{1}{2}tg^2 x+C;$

4) $\frac{1}{\cos^2 x}+C;$

5) $tg^2 x+C.$

12. Неопределенный интеграл $\int \ln xdx$ равен:

1) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C;$

2) $\frac{1}{x}+C;$

3) $\ln x+x+C;$

4) $x\ln x+C;$

5) $x\ln x-x+C.$

13. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$ равен:

1) $-\frac{1}{(x+1)^2}+C;$

2) $-\frac{1}{x+1}+C;$

3) $-\frac{2}{x+1}+C;$

4) $\frac{1}{(x^2+2x+1)^2}+C;$

5) $\ln\left|x^2+2x+1\right|+C.$

14. Неопределенный интеграл $\int xe^{2x^2+1}dx$ равен $ae^{bx^2+d}+C$ при:

1) a=1; b=2; d=5;

2) a=-1; b=1; d=2;

3) $a=\frac{1}{2}$; $b=2$; $d=0$;

4) $a=\frac{1}{4}$; $b=1$; $d=5$;

5) $a=\frac{1}{4}$; $b=2$; $d=1$.

15. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)=arctgx$ имеет вид:

1) $xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

2) $xarctgx+C$;

3) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

4) $\frac{1}{2}arctg^2x+C$;

5) $\ln(arctgx)+C$.

16. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)=x\sin 3x$ имеет вид:

1) $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$;

2) $x\cos 3x$;

3) $-x\cos 3x-\sin 3x+C$;

4) $\frac{1}{9}\sin 3x+C$;

5) $-\frac{x}{3}\cos 3x+C$.

17. Равенство $\int x^2\ln xdx=\frac{1}{a}x^b\ln x-\frac{x^3}{d}+C$ выполняется при:

1) $a=3$; $b=3$; $d=9$;

2) $a=1$; $b=1$; $d=\frac{1}{2}$;

3) $a=\frac{1}{2}$; $b=1$; $d=\frac{1}{2}$;

4) $a=3$; $b=3$; $d=3$;

5) a=9; b=3; d=3.

18. Неопределенный интеграл $\int (3x+2)\sin 3x dx$ равен:

1) $\frac{1}{3}(3x+2)\cos 3x + \sin 3x + C$;

2) $(3x+2)\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

3) $-\frac{1}{3}(3x+2)\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

4) $3(3x+2)\cos 3x - 3\sin 3x + C$;

5) $\frac{1}{3}(3x+2)\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$.

19. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ равен:

1) $\ln\left|x^2+6x+25\right| + C$;

2) $\frac{1}{4} arctg\,\frac{x+3}{4} + C$;

3) $arctg\,(x+3) + C$;

4) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+7}\right| + C$;

5) $\frac{1}{(x^2+6x+25)^2} + C$.

20. Неопределенный интеграл $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x} dx$ равен:

1) $\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C$;

2) $(2\ln x+3)^4 + C$;

3) $\frac{1}{8}\ln x + 3 + C$;

4) $\frac{(2\ln x+3)^4}{4x} + C$;

5) $\frac{3(2\ln x+3)^2}{x} + C$.

ВАРИАНТ 2.

1. Какая из представленных ниже функций *F(x)* является первообразной для функции *f(x)*= $\cos 7x$?

1) $F(x) = -\sin 7x;$

2) $F(x) = \sin 7x;$

3) $F(x) = -\frac{1}{7}\sin 7x;$

4) $F(x) = \frac{1}{7}\sin 7x;$

5) $F(x) = 7\cos 7x.$

2. Множество первообразных функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 5x}$ имеет вид:

1) $ctg 5x + C;$

2) $\frac{1}{\cos^3 5x} + C;$

3) $5tg 5x + C;$

4) $\frac{1}{5} tg 5x + C;$

5) $-\frac{1}{5} ctg 5x + C.$

3. Одной из первообразных функции $f(x) = x\sqrt{x}$ является функция:

1) $x\sqrt{x} - 4;$

2) $\frac{1}{x\sqrt{x}};$

3) $\ln\sqrt{x} + 6;$

4) $x^2\sqrt{x};$

5) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 5.$

4. Одна из первообразных функции $f(x) = e^{3\cos x}\sin x$ имеет вид:

1) $\frac{1}{3}e^{\cos x} + 3;$

$2)e^{3\sin x}-5;$

$3)-\frac{1}{3}e^{3\cos x};$

$4)\frac{1}{3}e^{3\sin x}\cos x+4;$

$5)3e^{3\sin x}+1.$

5. При каких целых значениях a, b, c функция $F(x)=3\cos(5x+7)$ является первообразной для функции $f(x)=a\sin(bx+c)$?

1) a=3; b=7; c=5;
2) a=1; b=5; c=7;
3) a=-15; b=5; c=7;
4) a=-15; b=7; c=0;
5) a=3; b=7; c=5.

6. При каких целых значениях a, b, c функции $F_1(x)=2+2x+x^2$ и $F_2(x)=\frac{1}{a}(1+bx)^c$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$?

1) a=-2; b=-1; c=1;
2) a=1 b=1; c=2
3) a=$\frac{1}{2}$; b=2; c=-2;
4) a=4; b=2; c=3;
5) a=$\frac{1}{2}$; b=1; c=1.

7. При каких целых значениях a, b, c функция $F(x)=e^{5x+4}$ является первообразной для функции $f(x)=ae^{bx+c}$?

1) a=1; b=5; c=4;
2) a=1; b=4; c=5;
3) a=$\frac{1}{5}$; b=5; c=4;

4) a=5; b=5; c=4;

5) $a=\frac{1}{5}$; b=1; c=0.

8. Если график функции $y=F(x)$ проходит через начало координат и $dy=(m+2)dx$, то:

1) $y = m^2 x + 2mx$;

2) $y = m$;

3) $y = (m+2)x$;

4) $y = m+2$;

5) $y = \frac{(m+2)^2}{2}$.

9. Неопределенный интеграл $\int (e^{4x} + 5)' dx$ равен:

1) $e^{4x} + 5$;

2) $\frac{1}{4} e^{4x} + 5x$;

3) $e^{x} + 5x$;

4) $xe^{4x} + 5x$;

5) $\frac{1}{4} e^{4x} + 5$.

10. Значение интеграла $\int \sin 2x dx$ равно:

1) $\frac{1}{2}\cos 2x$;

2) $-2\cos 2x$;

3) $2\cos 2x$;

4) $\frac{1}{2}\sin 2x$;

5) $-\frac{1}{2}\cos 2x$.

11. Неопределенный интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx$ равен:

1) $2e^{\sqrt{2x-1}} + C$;

2) $e^{\sqrt{2x-1}} + C$;

3) $\frac{1}{2}e^{\sqrt{2x-1}}+C$;

4) $\frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}+C$;

5) $\frac{2e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}+C$.

12. Неопределенный интеграл $\int x\ln x dx$ равен:

1) $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$;

2) $x^2(\ln x+1)+C$;

3) $\ln x+x+C$;

4) $x^2\ln x-1+C$;

5) $x\ln x-x+C$.

13. Неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{(x-1)^4}$ равен:

1) $-\frac{1}{3(x-1)^3}+C$;

2) $-\frac{1}{(x-1)^3}+C$;

3) $-\frac{4}{x-1}+C$;

4) $\frac{1}{x-1}+C$;

5) $(x-1)^5+C$.

14. Неопределенный интеграл $\int x^2e^{x^3-1}dx$ равен $ae^{bx^3+d}+C$ при:

1) a=1; b=1; d=-1;

2) a=-1; b=1; d=1;

3) $a=\frac{1}{2}$; b=1; d=-1;

4) $a=\frac{1}{3}$; b=1; d=1;

5) $a=\frac{1}{3}$; b=1; d=-1.

15. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)=\sqrt{\sin x}\cos x$ имеет вид:

1) $-\sin x\sqrt{\sin x}+C$;

2) $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\cos x}+C$;

3) $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C$;

4) $\frac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x}+C$;

5) $\sin x\sqrt{\cos x}+C$.

16. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)=x\cos 5x$ имеет вид:

1) $\frac{x}{4}\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+C$;

2) $x\sin 5x$;

3) $-x\cos 6x+\sin 5x+C$;

4) $\frac{1}{5}\sin 5x+C$;

5) $-\frac{x}{5}\sin 5x+C$.

17. Равенство $\int(x+1)e^{x}dx=\frac{1}{a}xe^{bx}-d+C$ выполняется при:

1) a=3; b=1; d=1;

2) a=1; b=1; d=0;

3) $a=\frac{1}{2}$; b=1; d=0;

4) a=3; b=1; d=0;

5) a=1; b=3; d=3.

18. Неопределенный интеграл $\int\arcsin x dx$ равен:

1) $\arcsin x+C$;

2) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$;

3) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$;

4) $x\arcsin x + C$;

5) $\sqrt{1-x^2} + C$.

19. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}$ равен:

1) $\frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2} + C$;

2) $arctg\,\frac{x-3}{3} + C$;

3) $\frac{1}{3} arctg\,\frac{x-3}{3} + C$;

4) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-12}{x-4}\right| + C$;

5) $\ln\left|x^2 - 6x + 18\right| + C$.

20. Неопределенный интеграл $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx$ равен:

1) $\frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + C$;

2) $(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + C$;

3) $\frac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + C$;

4) $-\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + C$;

5) $(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + C$.

ВАРИАНТ 3.

1. Какая из представленных ниже функций *F(x)* является первообразной для функции $f(x)=e^{4x}$?

1) $F(x)=\frac{1}{4}e^{4x}$;

2) $F(x)=\frac{1}{4}e^{x}$;

3) $F(x)=4e^{4x}$;

4) $F(x)=e^{4x}$;

5) $F(x)=xe^{4x}$.

2. Множество первообразных функции $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$ имеет вид:

1) $arctgx+C$;

2) $\ln(4+x^2)+C$;

3) $\frac{x}{4+x^2}+C$;

4) $\frac{1}{4}arctgx+C$;

5) $\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C$.

3. Одной из первообразных функции $f(x)=\frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ является функция:

1) $5\sqrt[5]{x^2}-2$;

2) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}$;

3) $\ln\sqrt[5]{x}+7$;

4) $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}+4$;

5) $\sqrt[5]{x^4}-3$.

4. Одна из первообразных функции $f(x)=\cos(\sin x)\cos x$ имеет вид:

1) $\cos(\cos x)$;

2) $\frac{1}{2}\cos(\sin x)\cos x$;

3) $\sin(\sin x)+1$;

4) $\cos(\sin x)-4$;

5) $\sin x(\cos x)+5$.

5. При каких целых значениях $a,\ b,\ c$ функция $F(x)=7\cos(3x+4)$ является первообразной для функции $f(x)=a\sin(bx+c)$?

1) a=7; b=3; с=1;

2) a=21; b=-3; с=-4;

3) a=-21; b=3; с=4;

4) a=3; b=3; с=7;

5) a=-3; b=3; с=4.

6. При каких целых значениях $a,\ b,\ c$ функции $F_1(x)=1+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}x^2$ и $F_2(x)=\frac{1}{a}(1+bx)^c$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$?

1) a=5; b=2; с=2;

2) a=-20; b=2; с=4;

3) a=20; b=2; с=2;

4) a=1; b=1; с=3;

5) a=$\frac{1}{20}$; b=2; с=2.

7. При каких целых значениях $a,\ b,\ c$ функция $F(x)=2e^{\frac{1}{2}x+5}$ является первообразной для функции $f(x)=ae^{bx+c}$?

1) a=1; b=$\frac{1}{2}$; с=5;

2) a=2; b=1; с=5;

3) a=$\frac{1}{2}$; b=$\frac{1}{2}$; с=0;

4) a=1; b=2; с=5;

5) a=4; b=$\frac{1}{2}$; c=5.

8. Если график функции *y=F(x)* проходит через начало координат и *dy=(m+8)dx*, то:

1) $y=\frac{(m+8)^2}{4}$;

2) $y=(m+8)x$;

3) $y=m+8$;

4) $y=\frac{m^2}{2}x-4mx+8$;

5) $y=8m$.

9. Неопределенный интеграл $\int(ctg5x)'dx$ равен:

1) $-\frac{1}{5\sin^2 5x}$;

2) $ctg5x$;

3) $-5ctg^2 5x$;

4) $-\frac{5}{\sin^2 5x}$;

5) $\frac{1}{10}ctg^2 5x$.

10. Значение интеграла $\int\frac{dx}{5x^2+6}$ равно:

1) $\frac{1}{3}arctg\frac{5x}{6}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{30}}arctgx\sqrt{\frac{5}{6}}$;

3) $\sqrt{30}arctgx\sqrt{\frac{5}{6}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{30}}\ln(x\sqrt{\frac{5}{6}})$;

5) $arctgx\sqrt{\frac{5}{6}}$.

11. Неопределенный интеграл $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$ равен:

1) $(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C;$

2) $\frac{\arcsin^2 x}{1-x^2} + C;$

3) $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}} + C;$

4) $\frac{3}{2}(\arcsin x)^{\frac{2}{3}} + C;$

5) $\arcsin x + C.$

12. Неопределенный интеграл $\int \sqrt{x} \ln x dx$ равен:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\ln|x| - \frac{2}{3}) + C;$

2) $\sqrt{x}(\ln|x| - \frac{2}{3}) + C;$

3) $\ln x + \sqrt{x} + C;$

4) $\sqrt{x^3}(\ln|x| - 1) + C;$

5) $\sqrt{x} \ln x - \sqrt{x} + C.$

13. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$ равен:

1) $\frac{2}{(x-2)^2} + C;$

2) $-\frac{1}{x-2} + C;$

3) $-\frac{1}{(x-2)^2} + C;$

4) $\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)^2} + C;$

5) $\ln|x^2 - 4x + 4| + C.$

14. Неопределенный интеграл $\int x e^{3x^2-5} dx$ равен $ae^{bx^2+d} + C$ при:

1) a=6; b=3; d=-5;

2) a=1; b=3; d=2;

3) $a=\frac{1}{2}$; $b=2$; $d=0$;

4) $a=\frac{1}{6}$; $b=3$; $d=-5$;

5) $a=\frac{1}{3}$; $b=2$; $d=1$.

15. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)=tg^2 x$ имеет вид:

1) $arctgx + C$;

2) $\frac{1}{3}tg^3 x + C$;

3) $2tgx + x + C$;

4) $tgx - x + C$;

5) $\ln(tgx) + C$.

16. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)=(x-2)\sin 6x$ имеет вид:

1) $-\frac{(x-2)}{6}\cos 6x + \frac{1}{36}\sin 6x + C$;

2) $x\cos 6x + C$;

3) $-(x-2)\cos 6x - \sin 6x + C$;

4) $\frac{1}{36}\sin 6x + C$;

5) $-\frac{(x-2)}{6}\cos 6x + C$.

17. Равенство $\int \ln x dx = \frac{1}{a}x^b \ln x - \frac{x}{d} + C$ выполняется при:

1) $a=1$; $b=3$; $d=1$;

2) $a=5$; $b=2$; $d=\frac{1}{2}$;

3) $a=\frac{1}{2}$; $b=1$; $d=1$;

4) $a=1$; $b=3$; $d=3$;

5) $a=1$; $b=1$; $d=1$.

18. Неопределенный интеграл $\int (2x-1)e^{3x}dx$ равен:

1) $(2x-1)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$;

2) $\frac{1}{3}(2x-1)e^{3x} + C$;

3) $\frac{1}{3}(2x-1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C$;

4) $\frac{1}{9}e^{3x} + C$;

5) $3(2x-1)e^{3x} - 9e^{3x} + C$.

19. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ равен:

1) $\ln\left|x^2-3x+2\right| + C$;

2) $\frac{1}{5} arctg \frac{x-3}{5} + C$;

3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$;

4) $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$;

5) $\frac{1}{(x^2-3x+2)^2} + C$.

20. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ равен:

1) $\sqrt{4-\ln^2 x} + C$;

2) $\arcsin\frac{\ln x}{2} + C$;

3) $\frac{1}{2}\ln x + 2x + C$;

4) $\frac{(4+\ln^2 x)^2}{x} + C$;

5) $\frac{(4-\ln x)^2}{x} + C$.

ВАРИАНТ 4.

1. Какая из представленных ниже функций *F(x)* является первообразной для функции *f(x)*= $\sin\frac{1}{2}x$?

1) $F(x) = -\sin\frac{1}{2}x;$

2) $F(x) = \sin 2x;$

3) $F(x) = -2\cos\frac{1}{2}x;$

4) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x;$

5) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x.$

2. Множество первообразных функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ имеет вид:

1) $2\sqrt{x} + C;$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + C;$

3) $x\sqrt{x} + C;$

4) $\ln\sqrt{x} + C;$

5) $\sqrt[3]{x} + C.$

3. Одной из первообразных функции $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ является функция:

1) $(3x-5)^2 - 4;$

2) $\frac{1}{(3x-5)^2};$

3) $\frac{1}{3}\ln|3x-5| + 6;$

4) $\sqrt{3x-5};$

5) $3\ln|3x-5| + 5.$

4. Одна из первообразных функции $f(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x$ имеет вид:

1) $3\sin^{\frac{5}{3}} x+5;$

2) $\sin^{\frac{3}{5}} x-1;$

3) $\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x;$

4) $\frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x-4;$

5) $\frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}} x+4.$

5. При каких целых значениях a, b, c функция $F(x)=8\sin(2x-1)$ является первообразной для функции $f(x)=a\sin(bx+c)$?

1) a=16; b=2; c=-1;
2) a=8; b=2; c=-1;
3) a=2; b=2; c=0;
4) a=4; b=-1; c=2;
5) a=-4; b=2; c=-1.

6. При каких целых значениях a, b, c функции $F_1(x)=5+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2$ и $F_2(x)=\frac{1}{a}(1+bx)^c$ являются первообразными для одной и той же функции $f(x)$?

1) a=16; b=2; c=2;
2) a=-16; b=1; c=1;
3) $a=\frac{1}{4}$; b=2; c=2;
4) a=4; b=2; c=3;
5) $a=\frac{1}{2}$; b=2; c=2.

7. При каких целых значениях a, b, c функция $F(x)=e^{-\frac{1}{3}x+6}$ является первообразной для функции $f(x)=ae^{bx+c}$?

1) a=-3; b=3; c=6;

2) $a=\frac{1}{3}$; $b=\frac{1}{3}$; c=6;

3) $a=-\frac{1}{3}$; $b=-\frac{1}{3}$; c=6;

4) $a=\frac{1}{3}$; $b=-\frac{1}{3}$; c=-6;

5) a=1; $b=\frac{1}{3}$; c=6.

8. Если график функции $y=F(x)$ проходит через начало координат и $dy=(m-9)dx$, то:

1) $y = 2m^2x - 9mx$;

2) $y = -9x$;

3) $y = (m-9)x$;

4) $y = \frac{(m-9)^2}{2}$;

5) $y = m - 9$.

9. Неопределенный интеграл $\int (\frac{1}{1+x^2})' dx$ равен:

1) $\frac{1}{1+x^2}$;

2) $\frac{1}{(1+x^2)^2}$;

3) $\frac{1}{1+x^2} + x$;

4) $arctgx$;

5) $\frac{arctgx}{1+x^2} + 5$.

10. Значение интеграла $\int (5x+1)^3 dx$ равно:

1) $\frac{1}{4}(5x+1)^4$;

2) $\frac{1}{5}(5x+1)^4$;

3) $\ln(5x+1)$;

4) $\frac{1}{10}(5x+1)^2$;

5) $\frac{1}{20}(5x+1)^4$.

11. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ равен:

1) $\frac{2}{\sqrt[3]{2x+5}}+C$;

2) $2\sqrt{2x+5}+C$;

3) $\frac{1}{2}\sqrt{2x+5}+C$;

4) $\sqrt{2x+5}+C$;

5) $\frac{2x}{\sqrt{2x+5}}+C$.

12. Неопределенный интеграл $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ равен:

1) $\sin(\ln x)+C$;

2) $\cos(\ln x)+C$;

3) $\frac{\ln x}{x}+x+C$;

4) $\frac{\sin(\ln x)}{x}-1+C$;

5) $\ln\cos x+C$.

13. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$ равен:

1) $arctg(1+x^2)+C$;

2) $\ln|arctgx|+C$;

3) $\frac{4}{1+x^2}+C$;

4) $\frac{arctgx}{1+x^2}+C$;

5) $\frac{1}{2}arctg^2x+C$.

14. Неопределенный интеграл $\int x^3 e^{x^4+2} dx$ равен $ae^{bx^4+d} + C$ при:

1) a=4; b=1; d=2;

2) a=-4; b=1; d=1;

3) a=-$\frac{1}{4}$; b=1; d=2;

4) a=$\frac{1}{4}$; b=1; d=1;

5) a=$\frac{1}{4}$; b=1; d=2.

15. Совокупность всех первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ имеет вид:

1) $\sin\frac{1}{x} + C$;

2) $\sin\frac{1}{x^2} + C$;

3) $\sin x^2 + C$;

4) $\cos\frac{1}{x} + C$;

5) $\cos\frac{1}{x^2} + C$.

16. Совокупность всех первообразных для функции $f(x) = (1+x)e^{2x}$ имеет вид:

1) $(1+x)e^{2x} - e^{2x} + C$;

2) $\frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$;

3) $2(1+x)e^{2x} + 4e^{2x} + C$;

4) $\frac{1}{2}(1+x)e^{2x} + C$;

5) $\frac{1}{4}e^{2x} + C$.

17. Равенство $\int (x+2)\sin 3x dx = \frac{1}{a}(x+b)\cos 3x - d\sin 3x + C$ выполняется при:

1) a=3; b=2; d=-9;

2) a=$\frac{1}{3}$; b=1; d=0;

3) a=$\frac{1}{2}$; b=1; d=-1;

4) a=-3; b=2; d=-$\frac{1}{9}$;

5) a=1; b=3; d=-3.

18. Неопределенный интеграл $\int \arccos x dx$ равен:

1) $\arccos x + C$;

2) $\arccos x + \sqrt{1-x^2} + C$;

3) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;

4) $x\arccos x + C$;

5) $\sqrt{1-x^2} + C$.

19. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$ равен:

1) $\ln\left|x^2+6x+34\right| + C$;

2) $arctg\,\frac{x-3}{5} + C$;

3) $\frac{1}{5} arctg\,\frac{x+3}{5} + C$;

4) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-3}{x+5}\right| + C$;

5) $\frac{1}{(x^2+6x+34)^2} + C$.

20. Неопределенный интеграл $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ равен:

1) $\frac{1}{2}\ln\left|1+2\sin x\right| + C$;

2) $\ln|1+2\sin x|+C$;

3) $\frac{1}{2}(1+2\sin x)^2+C$;

4) $\frac{1}{1+2\sin x}+C$;

5) $\frac{1}{(1+2\sin x)^2}+C$.

15 Ответы к тестам

Задача	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1	3	4	1	3
2	5	4	5	1
3	4	5	4	3
4	2	3	3	4
5	1	3	3	1
6	3	2	3	1
7	1	4	1	3
8	4	3	2	3
9	2	1	2	1
10	1	5	2	5
11	3	2	3	4
12	5	1	1	1
13	2	1	2	2
14	5	5	4	5
15	1	3	4	4
16	1	1	1	2
17	1	2	5	4
18	3	3	3	3
19	2	3	4	3
20	1	1	2	1

16 Исторические сведения

Интеграл (от лат. Integer - целый) - одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным (например, находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а с другой - измерять площади, объемы, длины дуг, работу сил за определенный промежуток времени и т. п.

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объемов. Ряд задач такого рода был решен математиками древней Греции. Античная математика предвосхитила идеи интегрального исчисления в значительно большей степени, чем дифференциального исчисления. Большую роль при решении таких задач играл исчерпывающий метод, созданный Евдоксом Книдским (ок. 408 - ок. 355 до н. э.) и широко применявшийся Архимедом (ок. 287 - 212 до н. э.).

Однако Архимед не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятий об интеграле, а тем более не создал алгоритма интегрального исчисления. Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX - XV веках изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов в интегральном исчислении они не получили.

Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 г. (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов развития интегрального исчисления. Архимед предвосхитил многие идеи интегрального исчисления. Но потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем эти идеи нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления.

В XVII веке были сделаны многие открытия, относящиеся к интегральному исчислению. Так, П. Ферма (1601-1665 гг.) уже в 1629 году решил задачу квадратуры любой кривой $y=x^N$, где N - целое (т. е. вывел формулу $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$), и на этой основе решил ряд задач на нахождение центров тяжести. И. Кеплер (1571-1630 гг.) при выводе своих знаменитых законов движения планет фактически опирался на идею приближенного интегрирования. И. Барроу (1603-1677 гг.), учитель Ньютона (1643-1727 гг.), близко подошел к пониманию связи интегрирования и дифференцирования. Большое значение имели работы по представлению функции в виде степенных рядов.

Символ $\int$ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы *S* (первой буквы слова сумма). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского integero, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. (Действительно, операция интегрирования “восстанавливает” функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно происхождение слова интеграл иное: слово integer означает целый.

В ходе переписки И. Бернулли и Г. Лейбниц согласились с предложением Я. Бернулли. Тогда же, в 1696г., появилось и название новой ветви математики - интегральное исчисление (calculus integralis), которое ввел И. Бернулли.

Другие известные вам термины, относящиеся к интегральному исчислению, появились значительно позднее. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее “примитивная функция”, которое ввел Лагранж (1797 г.). Латинское слово primitivus переводится как “начальный”: $F(x)=\int f(x)dx$ - начальная (или первоначальная, или первообразная) для функции *f(x)*, которая получается из *F(x)* дифференцированием.

В современной литературе множество всех первообразных для функции *f(x)* называется также неопределенным интегралом. Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются на произвольную постоянную.

Методы математического анализа активно развивались в следующем столетии (в первую очередь следует назвать имена Л. Эйлера (1707-1783 гг.), завершившего систематическое исследование интегрирования элементарных функций, и И. Бернулли). В развитии интегрального исчисления приняли участие русские математики М. В. Остроградский (1801-1862 гг.), В. Я. Буняковский (1804–1889 гг.), П. Л. Чебышев (1821-1894 гг.). Принципиальное значение имели, в частности, результаты Чебышева, доказавшего, что существуют интегралы, не выразимые через элементарные функции.

Список использованных источников

1. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.И. Никольский – М.: Наука, 1988.
2. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002 – 992 с.
3. Гусак, А.А. Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак – Минск: ТетраСистемс, 1998 – 416 с.
4. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях: учебное пособие / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; под редакцией Е.И. Гурского – Минск: Вышэйш. шк., 1990 – 400с.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов/П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Д. Кожевникова – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»; Мир и Образование, 2003.
6. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И.Запорожец – М.: Высшая школа, 1965.
7. Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

8. Математический анализ в вопросах и задачах: учеб. пособие / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин; под ред. В.Ф. Бутузова – М.: Физико-математическая литература, 2001.

9. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1978.

10. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов/ В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998 – 479с.

11. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова – М.: Высш. шк., 1998 – 479с.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянное слагаемое.

2. Дайте определение неопределенного интеграла и укажите его геометрический смысл. В семействе $y = \int x^2 dx$ найдите кривую, проходящую через точку $A(\sqrt[3]{4};3)$.

3. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.

4. Запишите таблицу неопределенных интегралов.

5. Методы интегрирования в неопределенном интеграле.

6. Найдите $\int (2x-1)^2 dx$ двумя способами:

а) непосредственно как интеграл от степенной функции со сложным аргументом;

б) раскройте скобки и проинтегрируйте получающуюся сумму.

Покажите, что полученные результаты не противоречат друг другу.

7. Укажите целесообразные подстановки в следующих примерах:

$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx$; $\int \cos x \sin(\sin x) dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{1-\ln x}}{x}dx$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1-2x^4}}$.

8. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.

9. Найдите $\int \arcsin x dx + \int \arccos x dx$ и объясните получающийся результат.

10. Примените метод интегрирования по частям к $\int \frac{dx}{x\ln x}$, где $x>1$, полагая $\frac{1}{\ln x}=u, \frac{dx}{x}=dv$, и затем сравните полученный результат с ответом, полученным после подстановки $u=\ln x$.

11. Найдите $\int e^{ax}\sin bx dx$.

12. При каком условии, связывающем коэффициенты a, b, c интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ является рациональной функцией?

13. При каких целых значениях n интеграл $\int \sqrt{1+x^4}dx$ выражается элементарными функциями?

14. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.

15. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

16. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

17. Интегрирование иррациональных выражений.