МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

А. Н. ПАВЛЕНКО

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 517.43
ББК 22.161
П 12

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент С. А. Герасименко.

Павленко А. Н.
П 12 **Элементы векторного анализа: методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий / А. Н. Павленко. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 25 с.**

Методические указания предназначены для выполнения индивидуальных (20 вариантов) домашних заданий по дисциплине «Математический анализ» (раздел: «Векторный анализ») для студентов, обучающихся по направлению 010300 - Математика. Компьютерные науки (бакалавриат).

ББК 22.161

Содержание

Введение

Предлагаемые методические указания предназначены студентам очной формы обучения направления 010300 - Математика. Компьютерные науки (бакалавриат) в качестве задачника для выполнения индивидуальных (20 вариантов) домашних заданий по векторному анализу.

Данный раздел математики изучается студентами направления 010300 в дисциплине «Математический анализ» в третьем семестре.

Кроме того, рассматриваемые методические указания можно использовать при работе над расчетно-графическим заданием студентами следующих специальностей: 010801 - Радиофизика и электроника, 010707 - Медицинская физика, 010708 - Биохимическая физика и направления 010700 – Физика (бакалавриат) по дисциплине «Векторный и тензорный анализ».

Целесообразность написания данных методических указаний обусловлена тем, что решение задач по векторному анализу традиционно вызывает большие трудности у студентов, а небольшое число аудиторных занятий, предусмотренных учебным планом, не позволяет подробно рассмотреть все основные типы заданий на практических занятиях.

В настоящей работе приводятся решения задач примерного варианта индивидуального домашнего задания по векторному анализу.

Следует отметить, что данные методические указания могут быть использованы студентами естественных и инженерных специальностей всех форм обучения.

1 Варианты индивидуальных домашних заданий

Задача 1. Для скалярного поля $\varphi(x,y)$ построить семейство линий уровня.

№ п/п	$\varphi(x,y)$	№ п/п	$\varphi(x,y)$
1	x^2+2y^2	2	$\sqrt{9-x^2-y^2}$
3	$\sqrt{16-x^2-y^2}$	4	$4x^2+3y^2$
5	$2x+3y$	6	$2x^2-y^2$
7	$3x^2+y^2$	8	x^2-4y
9	$x+y^2$	10	$4x+y^2$
11	$\sqrt{9-x^2-3y^2}$	12	$-x+3y$
13	x^2-y^2	14	$\sqrt{4-2x^2-y^2}$
15	x^2+3y	16	$4x^2+3y^2$
17	$3x-4y$	18	$\sqrt{x}+4y$
19	$x-\sqrt{y}$	20	x^2-2y^2

Задача 2. Для скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ построить семейство поверхностей уровня.

№ п/п	$\varphi(x,y,z)$	№ п/п	$\varphi(x,y,z)$
1	$\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$	2	$x^2+2y^2+3z^2$
3	$4x^2+3y^2+z^2$	4	$\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}$
5	$2x^2-y^2+3z^2$	6	$2x+3y-4z$
7	x^2-4y+z^2	8	$3x^2+y^2+2z$
9	$4x+y^2+z^2$	10	$x+y^2-z^2$
11	$-x+3y-2z$	12	$\sqrt{9-x^2-3y^2-z^2}$
13	$\sqrt{4-2x^2-y^2-3z^2}$	14	$x^2-y^2+z^2$
15	$4x^2+3y^2+5z^2$	16	x^2+3y-z^2
17	$\sqrt{x}+4y+z^2$	18	$3x-4y+5z$
19	$x^2-2y^2+z^2$	20	$x-\sqrt{y}+z$

Задача 3. Для скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ найти:

1) градиент в точке M_0;

2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\overline{N}$.

№ п/п	$\varphi(x,y,z)$	M_0	$\overline{N}$
1	x^2+3y-z^2	$(1;2;3)$	$(2;-3;5)$
2	$3x-4y^3+5z$	$(-1;3;2)$	$(-1;3;2)$
3	$x-\sqrt{y}+z$	$(1;4;-3)$	$(1;-5;2)$
4	$\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$	$(1;1;\sqrt{3})$	$(2;3;-1)$
5	$4x^2+3y^2+z^2$	$(-4;2;0)$	$(4;-3;2)$
6	$2x^2-y^2+3z^2$	$(2;-3;5)$	$(1;1;-2)$
7	x^2-4y+z^2	$(-1;3;2)$	$(1;-2;2)$
8	$4x+y^2+z^2$	$(1;-5;2)$	$(-2;3;1)$
9	$-x^3+3y-2z$	$(2;3;-1)$	$(0;4;-1)$
10	$\sqrt{64-2x^2-y^2-3z^2}$	$(4;-3;2)$	$(4;4;-3)$
11	$4x^2+3y^2+5z^2$	$(1;1;-2)$	$(-5;-3;-2)$
12	$\sqrt{x}+4y+z^2$	$(1;-2;2)$	$(-5;0;-4)$
13	$x^2-2y^2+z^2$	$(-2;3;1)$	$(-1;-1;5)$
14	$x^2+2y^2+3z^2$	$(0;4;-1)$	$(-4;1;3)$
15	$\sqrt{81-x^2-y^2-z^2}$	$(4;4;-3)$	$(3;-3;2)$
16	$2x+3y^2-4z^3$	$(-5;-3;-2)$	$(1;2;3)$
17	$3x^2+y^2+2z$	$(-5;0;-4)$	$(-1;3;2)$
18	$x+y^2-z^2$	$(-1;-1;5)$	$(1;4;-3)$
19	$\sqrt{9-x^2-3y^2-z^2}$	$(-1;1;1)$	$(1;1;3)$
20	$x^2-y^2+z^2$	$(3;-3;2)$	$(-4;2;0)$

Задача 4. Построить семейство векторных линий поля $\overline{A}(x,y)$.

№ п/п	$\overline{A}(x,y)$	№ п/п	$\overline{A}(x,y)$
1	$5x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}$	2	$5x\cdot\overline{i}-2y\cdot\overline{j}$
3	$4y\cdot\overline{i}+x\cdot\overline{j}$	4	$4y\cdot\overline{i}-x\cdot\overline{j}$
5	$3x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}$	6	$-3x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}$
7	$y\cdot\overline{i}+4x\cdot\overline{j}$	8	$-y\cdot\overline{i}+4x\cdot\overline{j}$
9	$2x\cdot\overline{i}+4y\cdot\overline{j}$	10	$2x\cdot\overline{i}-4y\cdot\overline{j}$
11	$y\cdot\overline{i}+3x\cdot\overline{j}$	12	$y\cdot\overline{i}-3x\cdot\overline{j}$
13	$x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}$	14	$-x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}$
15	$y\cdot\overline{i}+x\cdot\overline{j}$	16	$-y\cdot\overline{i}+x\cdot\overline{j}$
17	$4x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}$	18	$4x\cdot\overline{i}-2y\cdot\overline{j}$
19	$3y\cdot\overline{i}+2x\cdot\overline{j}$	20	$3y\cdot\overline{i}-2x\cdot\overline{j}$

Задача 5. Найти дивергенцию векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. С помощью полученного результата оценить поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ через поверхность сферы с малым радиусом ε и с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	M_0
1	$(4x-2y+7z)\overline{i}+(-3xy+5z)\overline{j}+x^2yz^3\overline{k}$	$(1;1;\sqrt{3})$
2	$(2x-6yz)\overline{i}+7xyz^2\overline{j}+(4x+4y-9z)\overline{k}$	$(-4;2;0)$
3	$4xy^3z\overline{i}+(-5x+4y+3z)\overline{j}+(-5xy+2z)\overline{k}$	$(2;-3;5)$
4	$(-2xy-4z)\overline{i}+(-5x+2y+2z)\overline{j}-3x^3yz\overline{k}$	$(-1;3;2)$
5	$-6xy^3z\overline{i}+(-2x+5yz)\overline{j}+(-5x+4y+7z)\overline{k}$	$(1;-5;2)$
6	$(-3x-4y-5z)\overline{i}+3xyz^2\overline{j}+(-4xy+2z)\overline{k}$	$(2;3;-1)$
7	$(-2x-6y-4z)\overline{i}+(-5xy+5z)\overline{j}+xyz^2\overline{k}$	$(4;-3;2)$
8	$(-3x-3yz)\overline{i}+2x^3yz\overline{j}+(-2x+7y+9z)\overline{k}$	$(1;1;-2)$
9	$-4xy^2z\overline{i}+(-4x+2y+5z)\overline{j}+(-6x+7yz)\overline{k}$	$(1;-2;2)$
10	$(-3xy-7z)\overline{i}+(-2x+9y+8z)\overline{j}-5xy^2z\overline{k}$	$(-2;3;1)$
11	$2x^3yz\overline{i}+(-3xy+5z)\overline{j}+(-4x+3y+7z)\overline{k}$	$(0;4;-1)$
12	$(-2x-6y-9z)\overline{i}-5xyz^3\overline{j}+(-4x+3yz)\overline{k}$	$(4;4;-3)$
13	$(4x-3y+2z)\overline{i}+(-5xy+3z)\overline{j}+7xyz^2\overline{k}$	$(-5;-3;-2)$

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	M_0
14	$(2xy+4z)\overline{i}+3xy^2z\overline{j}+(4x+4y-3z)\overline{k}$	$(-5;0;-4)$
15	$-3xyz^2\overline{i}+(-5x+2y+4z)\overline{j}+(4xy-7z)\overline{k}$	$(-1;-1;5)$
16	$(3x-4yz)\overline{i}+(-9x+2y+6z)\overline{j}+7x^3yz\overline{k}$	$(-1;1;1)$
17	$4xyz^3\overline{i}+(-5x+7yz)\overline{j}+(3x+2y-5z)\overline{k}$	$(3;-3;2)$
18	$(3x-5y+2z)\overline{i}+4x^2yz\overline{j}+(2x+7yz)\overline{k}$	$(1;2;3)$
19	$(4x-5y+6z)\overline{i}+(-4xy+5z)\overline{j}+6xy^2z\overline{k}$	$(-1;3;2)$
20	$(3x-8yz)\overline{i}+7xyz^2\overline{j}+(3x+4y-6z)\overline{k}$	$(1;4;-3)$

Задача 6. Найти ротор векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении вектора $\overline{N}$. С помощью полученного результата оценить циркуляцию векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ по окружности с малым радиусом ε и с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей в плоскости с нормальным вектором $\overline{N}$; направление обхода окружности согласовано с направлением вектора $\overline{N}$ по правилу правого винта.

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	M_0	$\overline{N}$
1	$(4x-2y+7z)\overline{i}+(-3xy+5z)\overline{j}+x^2yz^3\overline{k}$	$(1;2;3)$	$(2;-3;5)$
2	$(2x-6yz)\overline{i}+7xyz^2\overline{j}+(4x+4y-9z)\overline{k}$	$(-1;3;2)$	$(-1;3;2)$
3	$4xy^3z\overline{i}+(-5x+4y+3z)\overline{j}+(-5xy+2z)\overline{k}$	$(1;4;-3)$	$(1;-5;2)$
4	$(-2xy-4z)\overline{i}+(-5x+2y+2z)\overline{j}-3x^3yz\overline{k}$	$(1;1;\sqrt{3})$	$(2;3;-1)$
5	$-6xy^3z\overline{i}+(-2x+5yz)\overline{j}+(-5x+4y+7z)\overline{k}$	$(-4;2;0)$	$(4;-3;2)$
6	$(-3x-4y-5z)\overline{i}+3xyz^2\overline{j}+(-4xy+2z)\overline{k}$	$(2;-3;5)$	$(1;1;-2)$
7	$(-2x-6y-4z)\overline{i}+(-5xy+5z)\overline{j}+xyz^2\overline{k}$	$(-1;3;2)$	$(1;-2;2)$
8	$(-3x-3yz)\overline{i}+2x^3yz\overline{j}+(-2x+7y+9z)\overline{k}$	$(1;-5;2)$	$(-2;3;1)$
9	$-4xy^2z\overline{i}+(-4x+2y+5z)\overline{j}+(-6x+7yz)\overline{k}$	$(2;3;-1)$	$(0;4;-1)$
10	$(-3xy-7z)\overline{i}+(-2x+9y+8z)\overline{j}-5xy^2z\overline{k}$	$(4;-3;2)$	$(4;4;-3)$
11	$2x^3yz\overline{i}+(-3xy+5z)\overline{j}+(-4x+3y+7z)\overline{k}$	$(1;1;-2)$	$(-5;-3;-2)$
12	$(-2x-6y-9z)\overline{i}-5xyz^3\overline{j}+(-4x+3yz)\overline{k}$	$(1;-2;2)$	$(-5;0;-4)$
13	$(4x-3y+2z)\overline{i}+(-5xy+3z)\overline{j}+7xyz^2\overline{k}$	$(-2;3;1)$	$(-1;-1;5)$
14	$(2xy+4z)\overline{i}+3xy^2z\overline{j}+(4x+4y-3z)\overline{k}$	$(0;4;-1)$	$(-4;1;3)$
15	$-3xyz^2\overline{i}+(-5x+2y+4z)\overline{j}+(4xy-7z)\overline{k}$	$(4;4;-3)$	$(3;-3;2)$

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	M_0	$\overline{N}$
16	$(3x-4yz)\overline{i}+(-9x+2y+6z)\overline{j}+7x^3yz\overline{k}$	$(-5;-3;-2)$	$(1;2;3)$
17	$4xyz^3\overline{i}+(-5x+7yz)\overline{j}+(3x+2y-5z)\overline{k}$	$(-5;0;-4)$	$(-1;3;2)$
18	$(3x-5y+2z)\overline{i}+4x^2yz\overline{j}+(2x+7yz)\overline{k}$	$(-1;-1;5)$	$(1;4;-3)$
19	$(4x-5y+6z)\overline{i}+(-4xy+5z)\overline{j}+6xy^2z\overline{k}$	$(-1;1;1)$	$(1;1;3)$
20	$(3x-8yz)\overline{i}+7xyz^2\overline{j}+(3x+4y-6z)\overline{k}$	$(3;-3;2)$	$(-4;2;0)$

Задача 7. Найти поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ через (нормаль внешняя) замкнутую поверхность (S), образованную графиком функции $z(x,y)$ и плоскостью $z=0$ двумя способами:

1) непосредственным нахождением поверхностного интеграла второго рода;

2) применением формулы Остроградского-Гаусса.

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	$z(x,y)$
1	$4x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$	$9-x^2-9y^2$
2	$2x\cdot\overline{i}-2y\cdot\overline{j}+3z\cdot\overline{k}$	$4-x^2-y^2$
3	$-3x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+3z\cdot\overline{k}$	$9-9x^2-y^2$
4	$2x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}-3z\cdot\overline{k}$	$144-16x^2-9y^2$
5	$3x\cdot\overline{i}-5y\cdot\overline{j}-2z\cdot\overline{k}$	$4-x^2-4y^2$
6	$2x\cdot\overline{i}+3y\cdot\overline{j}+4z\cdot\overline{k}$	$4-4x^2-y^2$
7	$4x\cdot\overline{i}-y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$	$9-x^2-y^2$
8	$-3x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+4z\cdot\overline{k}$	$16-4x^2-y^2$
9	$x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}-4z\cdot\overline{k}$	$1-x^2-y^2$
10	$3x\cdot\overline{i}-5y\cdot\overline{j}-4z\cdot\overline{k}$	$36-4x^2-9y^2$
11	$2x\cdot\overline{i}+3y\cdot\overline{j}+2z\cdot\overline{k}$	$16-16x^2-y^2$
12	$3x\cdot\overline{i}-3y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$	$36-9x^2-4y^2$
13	$-x\cdot\overline{i}+5y\cdot\overline{j}+3z\cdot\overline{k}$	$9-9x^2-y^2$
14	$2x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}-3z\cdot\overline{k}$	$144-16x^2-9y^2$
15	$4x\cdot\overline{i}-4y\cdot\overline{j}-2z\cdot\overline{k}$	$4-x^2-4y^2$
16	$3x\cdot\overline{i}+5y\cdot\overline{j}+2z\cdot\overline{k}$	$4-4x^2-y^2$

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	$z(x,y)$
17	$5x\cdot\bar{i}-4y\cdot\bar{j}+4z\cdot\bar{k}$	$16-4x^2-y^2$
18	$-x\cdot\bar{i}+5y\cdot\bar{j}+3z\cdot\bar{k}$	$1-x^2-y^2$
19	$5x\cdot\bar{i}+y\cdot\bar{j}-2z\cdot\bar{k}$	$36-4x^2-9y^2$
20	$4x\cdot\bar{i}-2y\cdot\bar{j}-5z\cdot\bar{k}$	$16-16x^2-y^2$

Задача 8. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ по окружности $(L):\begin{cases}x^2+z^2=R^2\\ y=a\end{cases}$, проходимой против часовой стрелки, если смотреть из начала координат, двумя способами:

1) непосредственным нахождением криволинейного интеграла второго рода;

2) применением формулы Стокса.

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	(L)	
		R	a
1	$(4x-3y+2z)\bar{i}+(-5x+4y+3z)\bar{j}+(5x+2y-2z)\bar{k}$	1	5
2	$(2x-2y+4z)\bar{i}+(-5x+2y+2z)\bar{j}+(4x+4y-3z)\bar{k}$	2	4
3	$(2x-3y+4z)\bar{i}+(-2x+2y+4z)\bar{j}+(5x+4y-7z)\bar{k}$	3	3
4	$(3x-4y+5z)\bar{i}+(-9x+2y+6z)\bar{j}+(5x+3y-2z)\bar{k}$	4	2
5	$(2x-6y+4z)\bar{i}+(-5x+7y+5z)\bar{j}+(3x+2y-5z)\bar{k}$	1	1
6	$(3x-3y+2z)\bar{i}+(-6x+2y+6z)\bar{j}+(2x+7y-9z)\bar{k}$	2	5
7	$(4x-5y+6z)\bar{i}+(-4x+2y+5z)\bar{j}+(6x+7y-3z)\bar{k}$	3	4
8	$(3x-8y+7z)\bar{i}+(-2x+9y+8z)\bar{j}+(3x+4y-6z)\bar{k}$	4	3
9	$(4x-2y+7z)\bar{i}+(-3x+2y+5z)\bar{j}+(4x+3y-7z)\bar{k}$	1	2
10	$(2x-6y+9z)\bar{i}+(-2x+5y+7z)\bar{j}+(4x+4y-9z)\bar{k}$	2	1
11	$(-4x-3y-2z)\bar{i}+(-5x+4y+3z)\bar{j}+(-5x+2y+2z)\bar{k}$	3	5
12	$(-2x-2y-4z)\bar{i}+(-5x+2y+2z)\bar{j}+(-4x+4y+3z)\bar{k}$	4	4
13	$(-2x-3y-4z)\bar{i}+(-2x+2y+4z)\bar{j}+(-5x+4y+7z)\bar{k}$	1	3
14	$(-3x-4y-5z)\bar{i}+(-9x+2y+6z)\bar{j}+(-5x+3y+2z)\bar{k}$	2	2
15	$(-2x-6y-4z)\bar{i}+(-5x+7y+5z)\bar{j}+(-3x+2y+5z)\bar{k}$	3	1
16	$(-3x-3y-2z)\bar{i}+(-6x+2y+6z)\bar{j}+(-2x+7y+9z)\bar{k}$	4	5
17	$(-4x-5y-6z)\bar{i}+(-4x+2y+5z)\bar{j}+(-6x+7y+3z)\bar{k}$	1	4

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$	(L)	
		R	a
18	$(-3x-8y-7z)\overline{i}+(-2x+9y+8z)\overline{j}+(-3x+4y+6z)\overline{k}$	2	3
19	$(-4x-2y-7z)\overline{i}+(-3x+2y+5z)\overline{j}+(-4x+3y+7z)\overline{k}$	3	2
20	$(-2x-6y-9z)\overline{i}+(-2x+5y+7z)\overline{j}+(-4x+4y+9z)\overline{k}$	4	1

Задача 9. Доказать, что векторное поле $A(x,y,z)$ является потенциальным. Найти его потенциал.

С помощью потенциала найти циркуляцию данного векторного поля вдоль любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей точку $O(0,0,0)$ (начало кривой) с точкой $M(1;-1;2)$ (конец кривой).

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$
1	$10xy^5\overline{i}+(25x^2y^4-10y^4)\overline{j}+12z\overline{k}$
2	$2xy^5\overline{i}+(5x^2y^4-6)\overline{j}+12z^5\overline{k}$
3	$4xy^5\overline{i}+(10x^2y^4-10y)\overline{j}+15z^4\overline{k}$
4	$15x^2y^4\overline{i}+(20x^3y^3-10y^4)\overline{j}+12z\overline{k}$
5	$y^6\overline{i}+(6xy^5-6)\overline{j}+12z^5\overline{k}$
6	$3y^6\overline{i}+(18xy^5-12y^2)\overline{j}+16z^3\overline{k}$
7	$6xy^5\overline{i}+(15x^2y^4-12y^2)\overline{j}+16z^3\overline{k}$
8	$4x^3y^3\overline{i}+(3x^4y^2-6)\overline{j}+12z^5\overline{k}$
9	$12x^3y^3\overline{i}+(9x^4y^2-12y^2)\overline{j}+16z^3\overline{k}$
10	$16x^3y^3\overline{i}+(12x^4y^2-12y^3)\overline{j}+15z^2\overline{k}$
11	$8x^3y^3\overline{i}+(6x^4y^2-10y)\overline{j}+15z^4\overline{k}$
12	$3x^2y^4\overline{i}+(4x^3y^3-6)\overline{j}+12z^5\overline{k}$
13	$20x^3y^3\overline{i}+(15x^4y^2-10y^4)\overline{j}+12z\overline{k}$
14	$9x^2y^4\overline{i}+(12x^3y^3-12y^2)\overline{j}+16z^3\overline{k}$
15	$5y^6\overline{i}+(30xy^5-10y^4)\overline{j}+12z\overline{k}$
16	$8xy^5\overline{i}+(20x^2y^4-12y^3)\overline{j}+15z^2\overline{k}$
17	$2y^6\overline{i}+(12xy^5-10y)\overline{j}+12z^4\overline{k}$
18	$2x^2y^4\overline{i}+(8x^3y^3-10y)\overline{j}+15z^4\overline{k}$
19	$12x^2y^4\overline{i}+(16x^3y^3-12y^3)\overline{j}+15z^2\overline{k}$
20	$4y^6\overline{i}+(24xy^5-12y^3)\overline{j}+15z^2\overline{k}$

Задача 10. Доказать, что векторное поле $A(x,y,z)$ является соленоидальным. Найти его векторный потенциал.

№ п/п	$\overline{A}(x,y,z)$
1	$\left(4y^3-4xy^4\right)\,\bar{i}+\left(20z^4-8x+16z\right)\,\bar{j}+\left(4y^4z-3x^2\right)\,\bar{k}$
2	$(1-5xy)\,\bar{i}+\left(42z^5-2x+5z\right)\,\bar{j}+(5yz-2x)\,\bar{k}$
3	$\left(3y^2-2xy^3\right)\,\bar{i}+\left(15z^2-6x+6z\right)\,\bar{j}+\left(2y^3z-5x^4\right)\,\bar{k}$
4	$(1-4xy)\,\bar{i}+\left(35z^4-2x+4z\right)\,\bar{j}+\left(4yz-3x^2\right)\,\bar{k}$
5	$\left(2y-5xy^2\right)\,\bar{i}+\left(36z^5-4x+10z\right)\,\bar{j}+\left(5y^2z-2x\right)\,\bar{k}$
6	$\left(3y^2-xy^3\right)\,\bar{i}+(13z-6x)\,\bar{j}+\left(y^3z-6x^5\right)\,\bar{k}$
7	$\left(4y^3-2xy^4\right)\,\bar{i}+\left(12z^2-8x+8z\right)\,\bar{j}+\left(2y^4z-5x^4\right)\,\bar{k}$
8	$(1-3xy)\,\bar{i}+\left(28z^3-2x+3z\right)\,\bar{j}+\left(3yz-4x^3\right)\,\bar{k}$
9	$\left(2y-2xy^2\right)\,\bar{i}+\left(18z^2-4x+4z\right)\,\bar{j}+\left(2y^2z-5x^4\right)\,\bar{k}$
10	$\left(3y^2-5xy^3\right)\,\bar{i}+\left(30z^5-6x+15z\right)\,\bar{j}+\left(5y^3z-2x\right)\,\bar{k}$
11	$(1-xy)\,\bar{i}+(15z-2x)\,\bar{j}+\left(yz-6x^5\right)\,\bar{k}$
12	$\left(4y^3-3xy^4\right)\,\bar{i}+\left(16z^3-8x+12z\right)\,\bar{j}+\left(3y^4z-4x^3\right)\,\bar{k}$
13	$\left(3y^2-4xy^3\right)\,\bar{i}+\left(25z^4-6x+12z\right)\,\bar{j}+\left(4y^3z-3x^2\right)\,\bar{k}$
14	$\left(3y^2-3xy^3\right)\,\bar{i}+\left(20z^3-6x+9z\right)\,\bar{j}+\left(3y^3z-4x^3\right)\,\bar{k}$
15	$\left(2y-xy^2\right)\,\bar{i}+(14z-4x)\,\bar{j}+\left(y^2z-6x^5\right)\,\bar{k}$
16	$(1-2xy)\,\bar{i}+\left(21z^2-2x+2z\right)\,\bar{j}+\left(2yz-5x^4\right)\,\bar{k}$
17	$\left(2y-4xy^2\right)\,\bar{i}+\left(30z^4-4x+8z\right)\,\bar{j}+\left(4y^2z-3x^2\right)\,\bar{k}$
18	$\left(4y^3-xy^4\right)\,\bar{i}+(12z-8x)\,\bar{j}+\left(y^4z-6x^5\right)\,\bar{k}$
19	$\left(2y-3xy^2\right)\,\bar{i}+\left(24z^3-4x+6z\right)\,\bar{j}+\left(3y^2z-4x^3\right)\,\bar{k}$
20	$\left(4y^3-5xy^4\right)\,\bar{i}+\left(24z^5-8x+20z\right)\,\bar{j}+\left(5y^4z-2x\right)\,\bar{k}$

2 Решения примерного варианта индивидуального домашнего задания

Задача 1. Для скалярного поля $\varphi(x,y)=x^3+y$ построить семейство линий уровня.

Решение.

Линией уровня скалярного поля $\varphi(x,y)$ называется [1, стр. 23-25; 2, стр. 240-241; 3, стр. 59] множество точек на плоскости, удовлетворяющее уравнению $\varphi(x,y)=C$.

Так как скалярное поле $\varphi(x,y)=x^3+y$ определено на всей плоскости, то через каждую точку плоскости будет проходить линия уровня. Другими словами, линии уровня будут заполнять всю плоскость.

Получим уравнение линии уровня:

$\varphi(x,y)=C$, $x^3+y=C$, $y=C-x^3$.

Полученное уравнение определяет кубическую параболу, а изменение величины C приводит к параллельному переносу кубической параболы вдоль оси y. Очевидно, что в данном случае C может принимать любые действительные значения.

Взяв C, например, с шагом 1, построим семейство линий уровня на координатной плоскости (рисунок 1).

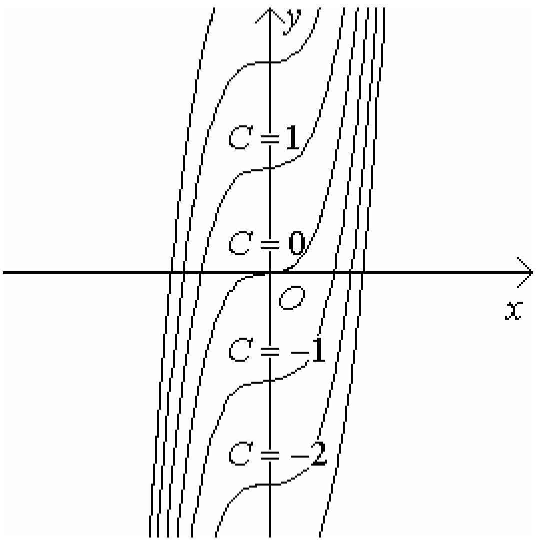

Рисунок 1

Задача 2. Для скалярного поля $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2$ построить семейство поверхностей уровня.

Решение.

Поверхностью уровня скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ называется [1, стр. 23-25; 2, стр. 240-241; 3, стр. 59] множество точек в пространстве, удовлетворяющее уравнению $\varphi(x,y,z)=C$.

Так как скалярное поле $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+4z^2$ определено на всем пространстве, то через каждую точку будет проходить поверхность уровня. Другими словами, поверхности уровня будут заполнять все пространство.

Получим уравнение поверхности уровня:

$\varphi(x,y,z)=C$, $x^2+y^2+4z^2=C$.

Отсюда следует, что $C\geq 0$. При $C=0$ записанное уравнение определяет точку $O(0;0;0)$.

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{C}+\frac{z^2}{C/4}=1,\ \frac{x^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\sqrt{C}/2\right)^2}=1.$$

Полученное уравнение при $C>0$ определяет эллипсоид с центром в начале координат и полуосями $a=\sqrt{C}$, $b=\sqrt{C}$ и $c=\dfrac{\sqrt{C}}{2}$.

Взяв $C=0,\ 1,\ 2,\ 3$, построим семейство поверхностей уровня (рисунок 2).

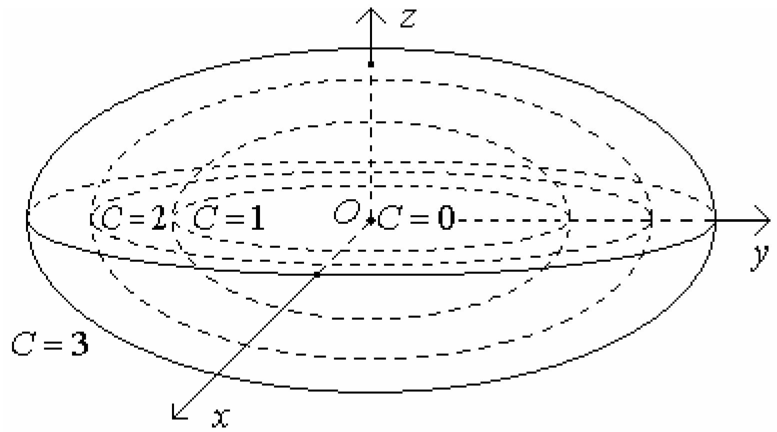

Рисунок 2

Задача 3. Для скалярного поля $\varphi(x,y,z)=4x^3y^2z$ найти:

1) градиент в точке $M_0(1;2;3)$;

2) производную в точке $M_0(1;2;3)$ по направлению вектора $\overline{N}=(-1;2;4)$.

Решение.

1. Градиент скалярного поля $\varphi(x,y,z)$ найдем по формуле [1, стр. 29-31; 2, стр. 250-251; 3, стр. 63]

$$grad\varphi(M)=\frac{\partial\varphi(M)}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial\varphi(M)}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial\varphi(M)}{\partial z}\cdot\bar{k}.$$

В данном случае получим:

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}=\left(4x^3y^2z\right)'_x=12x^2y^2z,\ \frac{\partial\varphi(1;2;3)}{\partial x}=12\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3=144;$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}=\left(4x^3y^2z\right)'_y=8x^3yz,\ \frac{\partial\varphi(1;2;3)}{\partial y}=8\cdot1^3\cdot2\cdot3=48;$$
$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}=\left(4x^3y^2z\right)'_z=4x^3y^2,\ \frac{\partial\varphi(1;2;3)}{\partial z}=4\cdot1^3\cdot2^2=16.$$

Тогда $grad\varphi(M_0)=144\cdot\bar{i}+48\cdot\bar{j}+16\cdot\bar{k}$.

2. Найдем производную по направлению по формуле [1, стр. 26-29; 2, стр. 249-250; 3, стр. 63]

$\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial\bar{n}}=\left(grad\varphi(M),\bar{n}\right)=\dfrac{\left(grad\varphi(M),\bar{N}\right)}{\left|\bar{N}\right|}$, где $\bar{n}$ - единичный вектор, сонаправленный вектору $\bar{N}$.

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial\bar{n}}=\frac{\left(grad\varphi(M_0),\bar{N}\right)}{\left|\bar{N}\right|}=\frac{144\cdot(-1)+48\cdot2+16\cdot4}{\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}}=\frac{16}{\sqrt{21}}\approx3{,}491.$$

Задача 4. Построить семейство векторных линий поля $\bar{A}(x,y)=-\bar{i}+2xy\cdot\bar{j}$.

Решение.

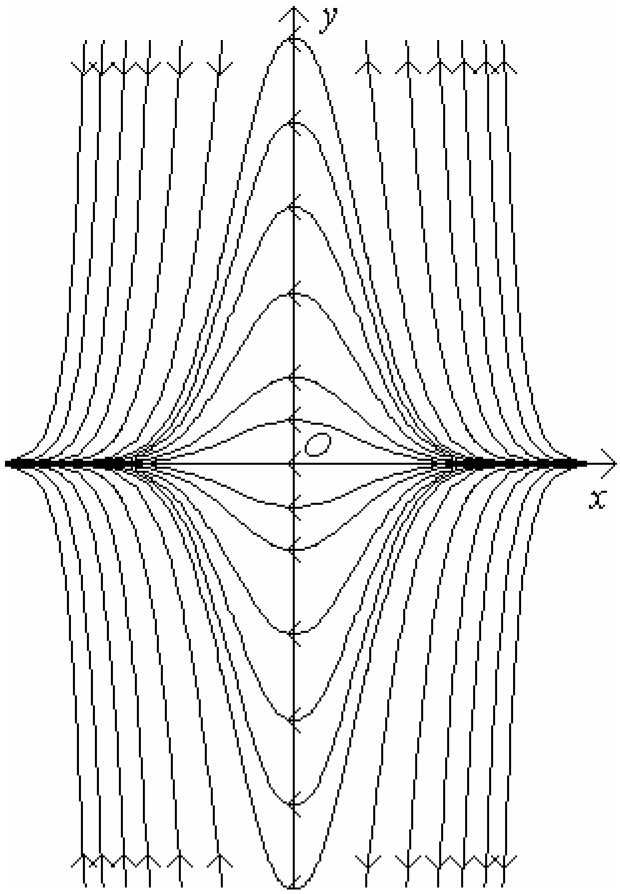

Рисунок 3

Пусть дано векторное поле $\bar{A}(x,y)=A_x(x,y)\cdot\bar{i}+A_y(x,y)\cdot\bar{j}$. Тогда дифференциальное уравнение его векторных линий имеет вид $\dfrac{dx}{A_x(x,y)}=\dfrac{dy}{A_y(x,y)}$ [1, стр. 36-40; 2, стр. 412].

Тогда получим:

$\dfrac{dx}{-1}=\dfrac{dy}{2xy}$, $-2xdx=\dfrac{dy}{y}$, $-\int 2xdx=\int\dfrac{dy}{y}$, $-x^2=\ln|y|-\ln|C|$ $(C\neq 0)$,

$-x^2=\ln\left|\dfrac{y}{C}\right|$, $\left|\dfrac{y}{C}\right|=e^{-x^2}$, $y=Ce^{-x^2}$ $(C\neq 0)$ - уравнение векторной линии поля $\overline{A}(x,y)=-\bar{i}+2xy\cdot\bar{j}$.

Данное поле имеет еще очевидную векторную линию $y=0$. Она была потеряна при решении, так как при $y=0$ в уравнении $\dfrac{dx}{-1}=\dfrac{dy}{2xy}$ имеем деление на 0.

Семейство векторных линий данного поля приведено на рисунке 3.

Задача 5. Найти дивергенцию векторного поля

$$\overline{A}(x,y,z)=\sqrt{x}yz\cdot\bar{i}+(2x+3yz)\cdot\bar{j}+\frac{54x^2}{yz^3}\cdot\bar{k}$$

в точке $M_0(1;2;3)$. С помощью полученного результата оценить поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ через поверхность сферы с малым радиусом ε и с центром в точке $M_0(1;2;3)$.

Решение.

1. Дивергенцию векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ найдем по формуле [1, стр. 64-66; 2, стр. 412, 415; 3, стр. 93]

$$div\overline{A}(M)=\frac{\partial A_x(M)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(M)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(M)}{\partial z}.$$

В данном случае получим:

$\dfrac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}=\left(\sqrt{x}yz\right)'_x=\dfrac{yz}{2\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial A_x(1;2;3)}{\partial x}=\dfrac{2\cdot 3}{2\sqrt{1}}=3$;

$\dfrac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y}=(2x+3yz)'_y=3z$, $\dfrac{\partial A_y(1;2;3)}{\partial y}=3\cdot 3=9$;

$\dfrac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}=\left(\dfrac{54x^2}{yz^3}\right)'_z=-\dfrac{162x^2}{yz^4}$, $\dfrac{\partial A_z(1;2;3)}{\partial z}=-\dfrac{162\cdot 1^2}{2\cdot 3^4}=-1$.

Тогда $div\overline{A}(M_0)=3+9+(-1)=11$.

2. Оценим поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ через сферу с малым радиусом ε и с центром в точке M_0.

Из определения дивергенции [1, стр. 63] следует приближенное равенство для малых замкнутых поверхностей (S), содержащих внутри себя точку M_0.

$$div\overline{A}(M_0)\approx\frac{P}{V},$$

Здесь: P - поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ через поверхность (S), V - объем, ею ограниченный.

Тогда

$$P \approx div\overline{A}(M_0)\cdot V = 11\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = \frac{44}{3}\pi\varepsilon^3.$$

Задача 6. Найти ротор векторного поля

$$\overline{A}(x,y,z) = (x+y+z)\cdot\bar{i} + xyz\cdot\bar{j} + x^2y^2z^2\cdot\bar{k}$$

в точке $M_0(3;2;1)$ в направлении вектора $\overline{N} = (-1;-2;-3)$. С помощью полученного результата оценить циркуляцию векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ по окружности с малым радиусом ε и с центром в точке $M_0(3;2;1)$, лежащей в плоскости с нормальным вектором $\overline{N}$; направление обхода окружности согласовано с направлением вектора $\overline{N}$ по правилу правого винта.

Решение.

1. Ротор векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ найдем по формуле [1, стр. 77-78; 2, стр. 412, 418; 3, стр. 90]

$$rot\overline{A}(M) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x(x,y,z) & A_y(x,y,z) & A_z(x,y,z) \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xyz & x^2y^2z^2 \\ \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \end{vmatrix} = (xyz)'_x\cdot\bar{k} + \left(x^2y^2z^2\right)'_y\cdot\bar{i} + (x+y+z)'_z\cdot\bar{j} -$$

$$-(xyz)'_z\cdot\bar{i} - \left(x^2y^2z^2\right)'_x\cdot\bar{j} - (x+y+z)'_y\cdot\bar{k} = yz\cdot\bar{k} + 2x^2yz^2\cdot\bar{i} + \bar{j} -$$

$$-xy\cdot\bar{i} - 2xy^2z^2\cdot\bar{j} - \bar{k} = \left(2x^2yz^2 - xy\right)\cdot\bar{i} + \left(1-2xy^2z^2\right)\cdot\bar{j} + (yz-1)\cdot\bar{k}.$$

В точке $M_0(3;2;1)$ значение ротора будет равно

$$rot\overline{A}(M_0) = \left(2\cdot3^2\cdot2\cdot1^2 - 3\cdot2\right)\cdot\bar{i} + \left(1-2\cdot3\cdot2^2\cdot1^2\right)\cdot\bar{j} + (2\cdot1-1)\cdot\bar{k} =$$

$$= 30\cdot\bar{i} - 23\cdot\bar{j} + \bar{k}.$$

2. Оценим циркуляцию векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ по окружности с малым радиусом ε и с центром в точке M_0, лежащей в плоскости с нормальным вектором $\overline{N}$.

Из определения ротора [1, стр. 81] следует приближенное равенство для малых замкнутых кривых (L), содержащих внутри себя точку M_0.

$$rot_{\bar{n}}\overline{A}(M_0) \approx \frac{C}{S},$$

Здесь: C - циркуляция векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ по замкнутому контуру (L), S - площадь, им ограниченная.

Тогда

$$C \approx rot_{\overline{n}}\overline{A}(M_0)\cdot S = \left(rot\overline{A}(M_0),\overline{n}\right)\cdot S = \frac{\left(rot\overline{A}(M_0),\overline{N}\right)}{\left|\overline{N}\right|}\cdot S =$$

$$= \frac{30\cdot(-1)+(-23)\cdot(-2)+1\cdot(-3)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}}\cdot\pi\varepsilon^2 = \frac{13}{\sqrt{14}}\cdot\pi\varepsilon^2 = \frac{13\sqrt{14}\pi\varepsilon^2}{14}.$$

Задача 7. Найти поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)=3x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}+8z\cdot\overline{k}$ через (нормаль внешняя) замкнутую поверхность (S), образованную графиком функции $z(x,y)=4-4x^2-y^2$ и плоскостью $z=0$ двумя способами:

1) непосредственным нахождением поверхностного интеграла второго рода;

2) применением формулы Остроградского-Гаусса.

Решение.

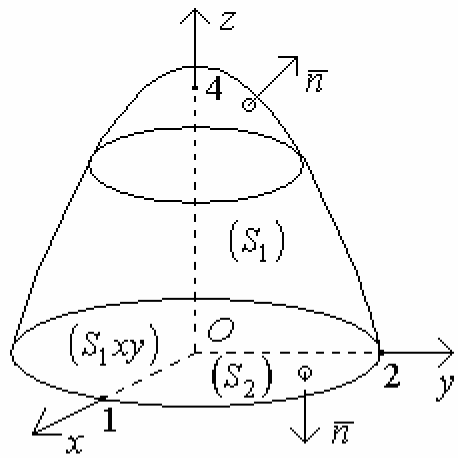

Рисунок 4

1. Поток векторного поля $\overline{A}(x,y,z)$ через нижнюю часть поверхности (S_2) равняется нулю, так как на ней $\overline{A}(x,y,z)=3x\cdot\overline{i}+2y\cdot\overline{j}$, и тогда на (S_2) будем иметь $(\overline{A},\overline{n})=0$.

$$P = \iint\limits_{(S_1)}\overline{A}(x,y,z)\cdot\overline{dS} =$$

►Найдем поверхностный интеграл второго рода по формуле [1, стр. 41-59; 2, стр. 408, 415-417; 3, стр. 92]

$$\iint\limits_{(S)}\overline{A}(x,y,z)\cdot\overline{dS} = \pm\iint\limits_{(Sxy)}\Big(-z'_x(x,y)\cdot A_x(x,y,z(x,y)) -$$

$$-z'_y(x,y)\cdot A_y(x,y,z(x,y)) + A_z(x,y,z(x,y))\Big)dxdy.$$

Данная формула применима, когда поверхность (S) является графиком функции $z=z(x,y)$. Если вектор $\overline{n}$ образует с осью z острый угол, то перед двойным интегралом берется знак «+», а в противном случае – знак «-». (Sxy) - проекция поверхности (S) на плоскость хОу.

В данном случае (см. рисунок 4) вектор внешней нормали $\overline{n}$ образует с осью z острый угол, поэтому перед двойным интегралом возьмем знак «+».◄

$$= \iint\limits_{(S_1xy)} \left[-\left(4-4x^2-y^2\right)'_x \cdot 3x - \left(4-4x^2-y^2\right)'_y + 8\left(4-4x^2-y^2\right)\right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S_1xy)} \left(24x^2+4y^2+32-32x^2-8y^2\right)dxdy = \iint\limits_{(Sxy)} \left(32-8x^2-4y^2\right)dxdy =$$

►Перейдем к обобщенным полярным координатам, используя формулы: $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, $dxdy=ab\rho$.◄

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(32-8\rho^2\cos^2\varphi-16\rho^2\sin^2\varphi\right)\, 2\rho d\rho =$$

►Заменим во внутреннем интеграле переменную: $t=\rho^2$, $dt=2\rho d\rho$, $t_в=\rho_в^2=1^2=1$, $t_н=\rho_н^2=0^2=0$.◄

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(32-8t\cos^2\varphi-16t\sin^2\varphi\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(32t-4t^2\cos^2\varphi-8t^2\sin^2\varphi\right)\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(32-4\cos^2\varphi-8\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(32-2(1+\cos 2\varphi)-4(1-\cos 2\varphi)\right)d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(26+2\cos 2\varphi\right)d\varphi = \left(26\varphi+\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 52\pi .$$

2. Найдем поток с помощью формулы Остроградского-Гаусса [1, стр. 60-64; 2, стр. 412, 414-415; 3, стр. 93].

$$P = \iiint\limits_{(V)} div\overline{A}(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} (3+2+8)dxdydz = 13\iiint\limits_{(V)} dxdydz =$$

$$=13V=$$

►Используем, что объем под графиком непрерывной неотрицательной функции $z=f(x,y)$ можно найти по формуле $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.◄

$$=13\iint\limits_{(S_1xy)}\left(4-4x^2-y^2\right)dxdy=$$

►Перейдем к обобщенным полярным координатам, используя формулы: $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, $dxdy=ab\rho$.◄

$$=13\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(4-4\rho^2\cos^2\varphi-4\rho^2\sin^2\varphi\right)\,2\rho d\rho=13\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(4-4\rho^2\right)\,2\rho d\rho=$$

►Заменим во внутреннем интеграле переменную: $t=\rho^2$, $dt=2\rho d\rho$, $t_в=\rho_в^2=1^2=1$, $t_н=\rho_н^2=0^2=0$.◄

$$=13\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(4-4t)dt=13\int\limits_0^{2\pi}\left(4t-2t^2\right)\Big|_0^1d\varphi=13\int\limits_0^{2\pi}2d\varphi=26\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=26\cdot 2\pi=$$
$$=52\pi.$$

Задача 8. Найти циркуляцию векторного поля

$$\overline{A}(x,y,z)=2z\cdot\overline{i}+4x\cdot\overline{j}+3y\cdot\overline{k}$$

по окружности $(L):\begin{cases}x^2+z^2=4\\ y=3\end{cases}$, проходимой против часовой стрелки, если смотреть из начала координат, двумя способами:

1) непосредственным нахождением криволинейного интеграла второго рода;

2) применением формулы Стокса.

Решение.

1. Найдем циркуляцию с помощью криволинейного интеграла второго рода.

$$C=\oint\limits_{(L)}\overline{A}(x,y,z)\overline{dl}=\oint\limits_{(L)}A_x(x,y,z)dx+A_y(x,y,z)dy+A_z(x,y,z)dz=$$
$$=\oint\limits_{(L)}2zdx+4xdy+3ydz.$$

Найдем криволинейный интеграл второго рода по формуле [1, стр. 70-76; 2, стр. 397, 399; 3, стр. 90]

$$\int\limits_{(L)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+\right.$$
$$\left.+Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]dt,$$ где кривая (L) задана параметрически $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$.

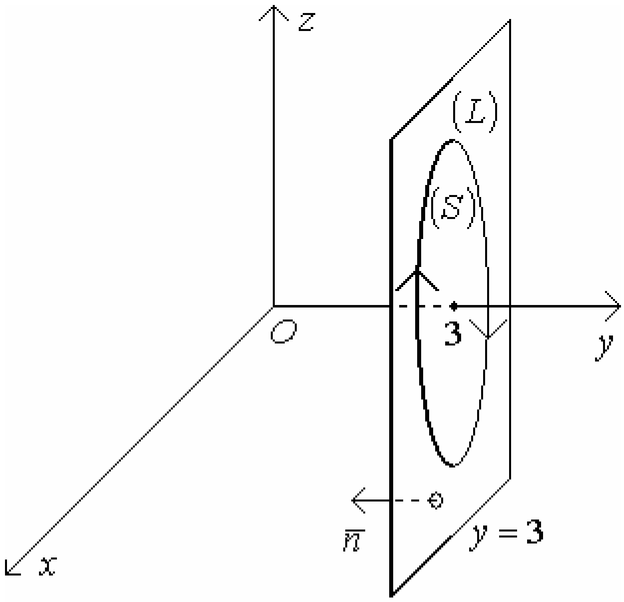

Рисунок 5

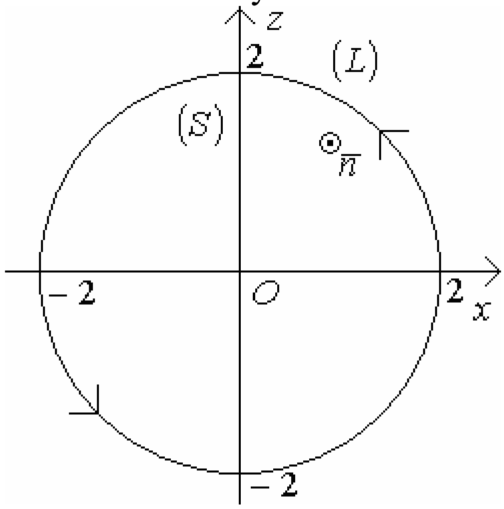

Рисунок 6

В данном случае (см. рисунки 5, 6) будем иметь:

$$C = \int_0^{2\pi} \left[2 \cdot 2\sin t \cdot (2\cos t)' + 4 \cdot 2\cos t \cdot 3' + 3 \cdot 3 \cdot (2\sin t)' \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-8\sin^2 t + 18\cos t \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(-4(1 - \cos 2t) + 18\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\cos 2t + 18\cos t - 4 \right) dt = \left(2\sin 2t + 18\sin t - 4t \right)\Big|_0^{2\pi} = -8\pi .$$

2. Найдем циркуляцию с помощью формулы Стокса [1, стр. 79-80; 2, стр. 411, 414; 3, стр. 93].

$$C = \iint_{(S)} \left(rot\overline{A}(x, y, z), \overline{n} \right) dS =$$

►В данном случае:

$$rot\overline{A}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x(x,y,z) & A_y(x,y,z) & A_z(x,y,z) \\ \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 4x & 3y \\ \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix}=$$

$=3\cdot\overline{i}+2\cdot\overline{j}+4\cdot\overline{k}$ и $\overline{n}=(0;-1;0)$. ◄

$$=\iint\limits_{(S)}(-2)dS=-2\iint\limits_{(S)}dS=-2S_{круга}=-2\cdot\pi\cdot 2^2=-8\pi .$$

Задача 9. Доказать, что векторное поле

$$\overline{A}(x,y,z)=\left(2xy-4yz^3\right)\cdot\overline{i}+\left(x^2-4xz^3-1\right)\cdot\overline{j}+\left(-12xyz^2+1\right)\cdot\overline{k}$$

является потенциальным. Найти его потенциал.

С помощью потенциала найти циркуляцию данного векторного поля вдоль любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей точку $O(0,0,0)$ (начало кривой) с точкой $M(1;-1;2)$ (конец кривой).

Решение.

1. Найдем

$$rot\overline{A}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x(x,y,z) & A_y(x,y,z) & A_z(x,y,z) \\ \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy-4yz^3 & x^2-4xz^3-1 & -12xyz^2+1 \\ \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix}=\left(x^2-4xz^3-1\right)'_x\cdot\overline{k}+$$

$$+\left(-12xyz^2+1\right)'_y\cdot\overline{i}+\left(2xy-4yz^3\right)'_z\cdot\overline{j}-\left(x^2-4xz^3-1\right)'_z\cdot\overline{i}-$$

$$-\left(-12xyz^2+1\right)'_x\cdot\overline{j}-\left(2xy-4yz^3\right)'_y\cdot\overline{k}=\left(2x-4z^3\right)\cdot\overline{k}-12xz^2\cdot\overline{i}-$$

$$-12yz^2\cdot\overline{j}+12xz^2\cdot\overline{i}+12yz^2\cdot\overline{j}-\left(2x-4z^3\right)\cdot\overline{k}=\overline{0}.$$

Так как $rot\overline{A}(x,y,z)=\overline{0}$, то данное векторное поле является потенциальным [1, стр. 88; 2, стр. 413, 419; 3, стр. 90].

2. Найдем его потенциал, используя, что для потенциальных полей верно равенство [1, стр. 87, 90-93; 2, стр. 413; 3, стр. 90]

$$\overline{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\cdot\overline{i}+A_y(x,y,z)\cdot\overline{j}+A_z(x,y,z)\cdot\overline{k}=$$

$$=grad\varphi(x,y,z)=\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\cdot\overline{i}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\cdot\overline{j}+\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\cdot\overline{k}.$$

Тогда будем иметь:

1) $\varphi(x,y,z)=\int A_x(x,y,z)dx + C_1(y,z)=\int\left(2xy-4yz^3\right)dx + C_1(y,z)=$
$=x^2y-4xyz^3+C_1(y,z);$
2) $\varphi(x,y,z)=\int A_y(x,y,z)dy + C_2(x,z)=\int\left(x^2-4xz^3-1\right)dy + C_2(x,z)=$
$=x^2y-4xyz^3-y+C_2(x,z);$
3) $\varphi(x,y,z)=\int A_z(x,y,z)dz + C_3(x,y)=\int\left(-12xyz^2+1\right)dx + C_3(x,y)=$
$=-4xyz^3+z+C_3(x,y).$

Отсюда получим потенциал данного векторного поля.

$\varphi(x,y,z)=x^2y-4xyz^3-y+z+C$.

3. С помощью потенциала найдем циркуляцию данного векторного поля вдоль любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей точку $O(0{,}0{,}0)$ (начало кривой) с точкой $M(1;-1;2)$ (конец кривой) по формуле [1, стр. 89; 2, стр. 413; 3, стр. 90]

$$C=\int_{M_1}^{M_2}\overline{A}(x,y,z)\overline{dl}=\varphi(M_2)-\varphi(M_1)=\varphi(M)\Big|_{M_1}^{M_2}.$$

Получим $C=\left(x^2y-4xyz^3-y+z\right)\Big|_{O(0;0;0)}^{M(1;-1;2)}=34$.

Задача 10. Доказать, что векторное поле

$$\overline{A}(x,y,z)=-3x^2yz\cdot\overline{i}-4(x+z)\cdot\overline{j}+3xyz^2\cdot\overline{k}$$

является соленоидальным. Найти его векторный потенциал.

1. Найдем

$$div\overline{A}(x,y,z)=\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}=\left(-3x^2yz\right)'_x+$$
$$+\left(-4(x+z)\right)'_y+\left(3xyz^2\right)'_z=-6xyz+6xyz=0.$$

Так как $div\overline{A}(x,y,z)=0$, то данное векторное поле является соленоидальным [1, стр. 68; 2, стр. 413;].

2. Найдем его векторный потенциал $\overline{B}$ [1, стр. 107-109].

Положим $B_x(x,y,z)=0$, а в качестве $B_y(x,y,z)$ возьмем любую первообразную функции $A_z(x,y,z)$ по переменной x:

$$B_y(x,y,z)=\int A_z(x,y,z)dx=\int 3xyz^2dx=\frac{3}{2}x^2yz^2.$$

$B_z(x,y,z)$ будем искать в виде $B_z(x,y,z)=-\int A_y(x,y,z)dx+\varphi(y,z)=$
$=\int 4(x+z)dx+\varphi(y,z)=2x^2+4xz+\varphi(y,z).$

Подберем функцию $\varphi(y,z)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{\partial B_z(x,y,z)}{\partial y}-\dfrac{\partial B_y(x,y,z)}{\partial z}=A_x(x,y,z).$

В данном случае получим:

$$\frac{\partial B_z(x,y,z)}{\partial y}-\frac{\partial B_y(x,y,z)}{\partial z}=\left(2x^2+4xz+\varphi(y,z)\right)'_y-\left(\frac{3}{2}x^2yz^2\right)'_z=$$

$=\varphi'_y(y,z)-3x^2yz=A_x(x,y,z)=-3x^2yz$. Отсюда $\varphi'_y(y,z)=0$, и в качестве функции $\varphi(y,z)$ можно взять 0.

Таким образом, мы получили один из векторных потенциалов данного поля:

$$\overline{B}(x,y,z)=\frac{3}{2}x^2yz^2\cdot\bar{j}+\left(2x^2+4xz\right)\cdot\bar{k}.$$

Как известно, векторный потенциал единственен с точностью до потенциального поля [1, стр. 107], тогда векторным потенциалом данного поля может быть любое векторное поле вида:

$$\overline{B}(x,y,z)=\frac{3}{2}x^2yz^2\cdot\bar{j}+\left(2x^2+4xz\right)\cdot\bar{k}+grad\varphi(x,y,z).$$

Список использованных источников

1 Краснов М. Л. Векторный анализ: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – 2-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 144 с.

2 Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – 7-е изд., испр. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 816 с.: ил.

3 Универсальный справочник: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов / А. Д. Полянин [и др.] – М.: АСТ: Астрель: Профиздат, 2005. – 480 с.: ил.