Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и математической кибернетики

Е.Н. Рассоха

Неопределенный интеграл

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования инженерно-технических направлений подготовки

Оренбург
2012

УДК 517.31 (076)
ББК 22.161.1я7
Р 24

Рецензент - кандидат физико-математических наук Зубова И.К.

Рассоха, Е.Н.
Р 24 Неопределенный интеграл: методические указания \ Е.Н. Рассоха; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 42 с.

В методических указаниях изложены основные теоретические вопросы и продемонстрировано решение типовых задач и примеров по теме «Неопределенный интеграл».

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения, обучающихся по программам высшего профессионального образования инженерно-технических направлений подготовки, в том числе по направлениям подготовки 190700.62 Технология транспортных процессов, 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов.

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.1я7

Содержание

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины «Математика» студентами по направлениям подготовки 190700.62 Технология транспортных процессов, 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов. Дисциплина «Математика» по всем указанным направлениям подготовки относится Государственным образовательным стандартом к базовой части учебного цикла – Б2 Математический и естественнонаучный цикл.

Раздел «Неопределенный интеграл» не только сам имеет многочисленные практические приложения, но и является необходимым при изучении ряда разделов высшей математики («Интегральное исчисление для функций многих переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы», «Векторный анализ» и т. д.).

Следует отметить, что в данных методических указаниях приведены подробные решения большого количества типовых задач. Такое изложение материала позволяет использовать указания для самостоятельной работы студентов над домашними заданиями и РГЗ как очного, так и заочного отделений, указанных направлений подготовки.

Настоящая работа не претендует на полноту и законченность изложения всех вопросов, имеющих отношение к теме «Неопределенный интеграл». О замеченных недостатках в методических указаниях просьба сообщить на кафедру алгебры и математической кибернетики ОГУ. Автор с благодарностью примет и рассмотрит любые предложения, касающиеся повышения научного, учебно-методического и содержательного уровня данных методических указаний.

Раздел 1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его основные свойства

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x). \qquad (1.1)$$

Пример 1.1. Функция $F(x) = x^3$ - первообразная функции $f(x) = 3x^2$ в интервале $(-\infty,+\infty)$, поскольку $(x^3)' = 3x^2$ для всех x из этого интервала; функция $F(x) = \ln x$ - первообразная функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в интервале $(0,+\infty)$, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; функция $F(x) = \arcsin x$ - первообразная функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в интервале $(-1,+1)$, так как $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции в заданном промежутке может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число. То есть, если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная, также является ее первообразной, поскольку $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$. Можно также доказать и обратное утверждение, что если $\Phi(x), F(x)$ - две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются произвольным слагаемым.

Определение 1.2. Неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ называют множество всех ее первообразных и записывают:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1.2)$$

где $(F(x)+C)' = f(x)$. Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла; функция $f(x)$ - подынтегральной функцией; выражение $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

Операция нахождения первообразной данной функции называется *интегрированием.*

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x)+C;$

4. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ где $f_1(x), f_2(x)$ – некоторые функции от x, имеющие первообразные.

5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций. Такую таблицу простейших неопределенных интегралов нетрудно получить, воспользовавшись тем, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Будем исходить из формулы:

$dF(x) = f(x)dx$, тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$. Например, поскольку $d(\sin x) = \cos x dx$, то $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Применяя аналогичное рассуждение к каждой из формул таблицы дифференциалов, получим таблицу простейших неопределенных интегралов.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$.

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

3. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

13. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$.

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Отметим, что все указанные формулы справедливы в тех промежутках, в которых определены соответствующие функции. Например, формула 3 справедлива для любого промежутка, не содержащего точку $x = 0$; формула 10 – для интервала $(-1,+1)$ и т.д. Также отметим, что формулы 14, 15 не относятся к простейшим неопределенным интегралам, но так как при интегрировании различных функций их достаточно часто можно свести к данным формулам, эти формулы также включают в таблицу основных неопределенных интегралов.

Раздел 2. Методы интегрирования

Рассмотрим три основных метода интегрирования: метод непосредственного интегрирования; метод замены переменной, метод интегрирования по частям.

1) Метод непосредственного интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием, а также на свойствах 4, 5 неопределенного интеграла. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Пример 2.1. Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $\left(\ln(-x)\right)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Пример 2.2. Требуется найти интеграл $\int (x^2 - 2x + \sqrt[5]{x^3} + \frac{5}{x^4} - 1)dx$.

Решение.

$$\int (x^2 - 2x + \sqrt[5]{x^3} + \frac{5}{x^4} - 1)dx =$$

$$= \int x^2 dx - 2\int xdx + \int x^{\frac{3}{5}} dx + 5\int x^{-4} dx - \int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} - \frac{5}{3x^3} - x + C.$$

При отыскании данного интеграла были использованы 1 и 2 формулы табличных интегралов.

Пример 2.3. Требуется найти интеграл $\int (\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2 dx$.

Решение.

$$\int (\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})^2 dx = \int (\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2})dx =$$
$$= \int (1 + \sin x)dx = \int dx + \int \sin xdx = x - \cos x + C.$$

Пример 2.4. Требуется найти интеграл $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Необходимо числитель разделить на знаменатель по правилу деления многочленов (это правило подробным образом рассматривается далее в разделе «Интегрирование рациональных дробей»).

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1})dx = \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец, определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знание таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

2) Метод замены переменных или метод подстановки. Данный метод основан на следующей теореме.

Теорема 2.1. Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, а $x=\varphi(t)$ - дифференцируемая функция, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ также имеет первообразную, причем $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]+C$.

Доказательство.

По правилу дифференцирования сложной функции

$\{F[\varphi(t)]\}'_t = F'_\varphi \cdot \varphi'_t = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, т.е. функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F[\varphi(t)]$. Следовательно, $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]+C$, что и требовалось доказать.

Поскольку $F[\varphi(t)]+C = F(x)+C = \int f(x)dx$, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (2.1)$$

По формуле (1.2.1) осуществляется замена переменной в неопределенном интеграле.

Пример 2.5. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Решение.

Сделаем замену $t = \sin x, dt = \cos x dx$. Тогда данный интеграл сводится к интегралу $\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + C$.

Пример 2.6. Найти неопределенный интеграл $\int x(x^2+1)^{3/2} dx$.

Решение.

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2x dx; \quad dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

3) Метод интегрирования по частям.

Метод основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{2.2}$$

Поскольку $d(uv) = u dv + v du$ или $u dv = d(uv) - v du$. Проинтегрировав обе части последнего равенства и применив свойства неопределенного интеграла, получим требуемую формулу $\int u dv = uv - \int v du$.

Формула интегрирования по частям позволяет находить интегралы многих элементарных функций. Она применяется к интегрированию выражений, которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей u и dv, чтобы отыскание функции v по ее дифференциалу dv и вычисление интеграла $\int v du$ составляли в совокупности задачу более простую, чем непосредственное вычисление интеграла $\int u dv$. Умение разбивать разумным образом данное подынтегральное выражение на множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач. Мы покажем на ряде примеров как применяется данный метод.

Пример 2.7. Найти неопределенный интеграл $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

.

Замечание 2.1. При определении функции v по дифференциалу dv мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит (что легко проверить, подставив в равенство (2.2) вместо v выражение $v + C$). Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Метод интегрирования по частям применяется, как правило, при нахождении интегралов следующего вида:

$\int x^k \cos ax dx$, $\int x^k \sin ax dx$,

$\int x^k e^{ax} dx$, $\int x^k \ln ax dx$.

Также этот метод применяется к интегралам, содержащим некоторые обратные тригонометрические функции, такие как $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$.

Пример 2.8. Вычислим следующие неопределенные интегралы:

1) $$\int x^2 \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{Bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C .$$

2)

$$\int x\ln x dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C .$$

$$3)\ \int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + C =$$

$$= \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right) + C.$$

$$4)\ \int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

$$5)\ \int \arccos x dx = \left\{\begin{matrix} u = \arccos x; & dv = dx; \\ du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; & v = x \end{matrix}\right\} = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \left\{ t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{2} \right\} =$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

6) Рассмотрим так называемые «круговые интегралы», которые находятся с помощью двукратного применения формулы интегрированием по частям.

$$\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$$

$$=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin x dx; & v=-\cos x; \end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=$$

$$=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int \cos x e^{2x}dx\,.$$

Видно, что в результате повторного применения метода интегрирования по частям функцию не удалось свести к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства. В результате имеем:

$$5\int e^{2x}\cos x dx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)\,.$$

$$\int e^{2x}\cos x dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C\,.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным интегралам. Среди них рассмотрим применение частного случая метода подстановки – «внесение функции под знак дифференциала».

Пример 2.9. Найдем следующие неопределенные интегралы:

1)

$$\int (2x+1)^{20}dx=\left\{d(2x+1)=2dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}d(2x+1)\right\}=\frac{1}{2}\int (2x+1)^{20}d(2x+1)=$$

$$=\{2x+1=t\}=\frac{1}{2}\int t^{20}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{21}}{21}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+1)^{21}}{42}+C\,.$$

2)

$$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C\,.$$

3) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\cos x dx = d(\sin x) \Rightarrow \sin x = t;\} =$

$= \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C = -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$

4) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx =$

$= \{d(\cos^2 x) = -2\cos x \sin x dx = -\sin 2x dx \Rightarrow t = \cos^2 x \Rightarrow \sin 2x dx = -dt;\} =$

$= -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos^2 x} + C.$

5) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \{\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt\} =$

$= \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$

Метод внесения функции под знак дифференциала был применен в первом, третьем и четвертом случаях примера 9.

Раздел 3. Интегрирование элементарных дробей

Определение 3.1. Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I $\frac{1}{ax+b}$; III $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$, (3.1)

где $m, n \in N,\ m \geq 2,\ n \geq 2,\ b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным интегралам подстановкой $t = ax + b$.

Интегрирование дробей I-го типа:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Интегрирование дробей II-го типа:

$$\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^{-m+1}}{(-m+1)}+C=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=$$

$$=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C\,.$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей III типа. Для начала рассмотрим дробь более простого вида, которая в числителе содержит единицу, а в знаменателе квадратный трехчлен, т.е. это дробь вида: $I_1=\frac{1}{ax^2+bx+c}$. Этот же метод применим и к дроби вида: $I_2=\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Для вычисления неопределенных интегралов от этих дробей необходимо сначала в знаменателе выделить полный квадрат, затем привести к табличным интегралам подстановкой $t=x\pm k$, где $dt=d(x\pm k)=dx$.

Выделение полного квадрата осуществляется следующим образом:

$$ax^2\pm bx+c=a\left[\left(x^2\pm 2\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=a\left(x\pm\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Пример 3.1. Найдем следующие неопределенные интегралы, содержащие квадратный трехчлен:

1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\{dx=d(x+1)\}=$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\{x+1=t\}=$$

$$\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

2)

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\{x-3=t\}=\int\frac{dt}{t^2+16}=\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Интеграл дроби типа III может быть представлен в виде:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left[d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(B-\frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left| x^2+px+q \right| + \left(B-\frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2} \right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4} \right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left| x^2+px+q \right| + \left(B-\frac{Ap}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C \quad .$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла от дроби типа III к двум табличным интегралам. Аналогично находятся интегралы от дробей, которые, в общем-то, не являются элементарными, это дроби вида $I = \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример 3.2. Найдем следующий неопределенный интеграл.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \left\{ d(3x^2-5x+4) = (6x-5)dx \right\} = \int \frac{\frac{7}{6}(6x-5)+\frac{23}{6}}{3x^2-5x+4}dx =$$

$$= \frac{7}{6}\int \frac{(6x-5)dx}{3x^2-5x+4} + \frac{23}{6}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-2\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}-\frac{25}{36}+\frac{4}{3}} =$$

$$=\frac{7}{6}\ln\left|3x^2-5x+4\right|+\frac{23}{18}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36}}=\frac{7}{6}\ln\left|3x^2-5x+4\right|+$$

$$+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена ax^2+bx+c выражение $b^2-4ac>0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее, ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример 3.3. Найдем неопределенный интеграл.

1) $$\int\frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx=\int\frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx=\left\{\begin{matrix}u=x+3; & du=dx;\\ x=u-3; & \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{5u-15-3}{u^2-49}du=5\int\frac{udu}{u^2-49}-18\int\frac{du}{u^2-49}=\frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right|-\frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right|+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right|-\frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right|+C.$$

2) $$\int\frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx=\int\frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-3; & du=dx;\\ x=u+3; & \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du=3\int\frac{udu}{\sqrt{16-u^2}}+13\int\frac{du}{\sqrt{16-u^2}}=-3\sqrt{16-u^2}+13\arcsin\frac{u}{4}+C=$$

$$=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай когда $M=0, N=1$.

Тогда интеграл вида $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int\frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{array}{l} dv_1=\dfrac{udu}{(u^2+s)^n};\quad u_1=u;\quad du_1=du; \\ v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array}\right\}.$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

;

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее $(n-1)$ раз, то получится табличный интеграл $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби типа IV в общем случае.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} u=2ax+b; & du=2adx; \\ x=\dfrac{u-b}{2a}; & s=4ac-b^2; \end{array}\right\}=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right].$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t=u^2+s$ приводится к табличному $\displaystyle\int\frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью *n*, а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример 3.4. Найдем неопределенный интеграл.

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x-2; & du = dx; \\ x = u+2; & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du = 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{matrix} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3} \right] = -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Раздел 4. Интегрирование рациональных функций

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т.е.

$$\frac{V(x)}{P(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + ... + B_{m-1}x + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + ... + A_{n-1}x + A_n}.$$

Допустим, что эти многочлены не имеют общих корней. В этом случае возможно:

1) $m \geq n$, тогда данная рациональная дробь неправильная;

2) $m < n$, тогда данная рациональная дробь правильная.

Если дробь неправильная, то необходимо разделить числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен. В этом случае получим сумму какого-то многочлена и правильной рациональной дроби, т.е.:

$$\frac{V(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{Q(x)}{P(x)}. \qquad (4.1)$$

Пример 4.1. Представить неправильную рациональную дробь в виде (4.1).

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$\begin{array}{l|l}
_x^4 - 3 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2}
x^4 + 2x^3 + x^2 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{1-1}
_-2x^3 - x^2 - 3 & \\
-2x^3 - 4x^2 - 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad _3x^2 + 2x - 3 & \\
\qquad 3x^2 + 6x + 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -4x - 6 &
\end{array}$$

Таким образом, замечаем, что при интегрировании рациональных дробей, основную трудность представляют правильные рациональные дроби.

Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема 4.1. Пусть $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь. Знаменатель $P(x)$ данной дроби всегда может быть представлен в виде: $P(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot (x^2 + px + q)^{\lambda} \cdot \ldots \cdot (x^2 + rx + s)^{\mu}$, где $a,\ldots,b$ - это различные действительные корни многочлена $P(x)$ соответствующей кратности $\alpha,\ldots,\beta$, а $(x^2 + px + q)^{\lambda},\ldots,(x^2 + rx + s)^{\mu}$ - множители, которые соответствуют каждой паре комплексных корней этого многочлена кратности $\lambda,\ldots,\mu$.

Тогда существуют действительные числа $A_i(i=1,...,\alpha),\ B_i(i=1,...,\beta),\ M_i,\ N_i(i=1,...,\lambda),\ R_i,\ S_i(i=1,...,\mu)$, такие что, эта дробь может быть разложена на элементарные дроби по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+...+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+...+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+$$

$$+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+...+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. В разложении этой дроби число слагаемых равно $\alpha+...+\beta+\lambda+...+\mu$.

Итак, при интегрировании правильных рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин $A_i(i=1,...,\alpha),\ B_i(i=1,...,\beta),\ M_i,$ $N_i(i=1,...,\lambda),\ R_i,\ S_i(i=1,...,\mu)$ применяют **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример 4.2. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx.$$

Заметим, что $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$. Поэтому, подынтегральная правильная рациональная дробь, в силу теоремы 4.1, разложится на следующие слагаемые:

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю правую часть равенства и, приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

В левой части последнего равенства раскроем скобки, приведем подобные слагаемые, а затем вынесем за скобки соответствующие степени x. В результате получим:

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+$$

$$+(-16A-8B+8D)=9x^3-30x^2+28x-88.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases}; \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases}; \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}.$$

Итого:

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \right) dx =$$

$$= \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + arctg\frac{x}{2} + C.$$

Пример 4.3. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx.$$

Так как дробь неправильная, то предварительно следует выделить целую часть, а именно, представить эту дробь по формуле (4.1).

$$\begin{array}{r|l}
_\,6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \cline{2-2}
6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + 3 \\ \cline{1-1}
_\,9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\
9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 & \\ \cline{1-1}
20x^2 - 25x - 25 &
\end{array}$$

Итак,

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \int \left(2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx \overset{1}{=}$$

Знаменатель подынтегральной дроби имеет корень $x = 3$. Поэтому разделим его на двучлен $(x-3)$ и представим данный знаменатель в виде линейных множителей (операция деления кубического многочлена на двучлен приведена ниже):

$$3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x-3)\,(3x^2 + 5x - 2) = (x-3)\,(x+2)\,(3x-1).$$

Следовательно,

$$\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}.$$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5.$$

$$\begin{array}{l|l}
-\,3x^3-4x^2-17x+6 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-9x^2} & 3x^2+5x-2 \\
\qquad -\,5x^2-17x+6 & \\
\qquad \underline{5x^2-15x} & \\
\qquad\qquad -\,-2x+6 & \\
\qquad\qquad \underline{-2x+6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Для того чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, -2, 1/3. Получаем:

$$\begin{cases} 40A=16 \\ 35B=21; \\ C=1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A=2/5 \\ B=3/5 \\ C=1 \end{cases}$$

Возвращаясь к равенству $\overset{1}{=}$, будем иметь:

$$\overset{1}{=}\frac{2}{3}x^3+3x+3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3x+3\ln|x+2|+2\ln|x-3|+\frac{5}{3}\ln|3x-1|+C.$$

Пример 4.4. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx = \int \frac{A}{x+3}dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+2}dx \overset{2}{=}$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4+14x^2+7x+15.$$

$$Ax^4+4Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C+Dx^4+2Dx^2+3Dx^3+6Dx+$$

$$+Ex^3+2Ex+3Ex^2+6E = (D+A)x^4+(3D+E)x^3+(A+B+2D+3E+4A)x^2+$$

$$+(3B+C+6D+2E)x+(2A+3C+6E+4A) = 3x^4+14x^2+7x+15.$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 3C+6E+4A=15 \end{cases}; \qquad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+6-2A-27+9A+4A=14 \\ 3B+C+18-6A-18+6A=7 \\ 3C-54+18A+4A=15 \end{cases};$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+11A=35 \\ 3B+C=7 \\ 3C+22A=69 \end{cases}; \qquad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ 11A=35-B \\ C=7-3B \\ 21-9B+70-2B=69 \end{cases}; \qquad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=0 \end{cases}.$$

Итак, заданный интеграл будет равен:

$$\overset{2}{=} 3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx = 3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} =$$

$$= 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Раздел 5. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя найти аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

1) *Интеграл вида* $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

В подынтегральном выражении буква R означает некоторую рациональную функцию от переменных $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида находятся с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную функцию. Для этого необходимо применить следующие тригонометрические тождества:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тогда $x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Таким образом:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример 5.1. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int\frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$2\int\frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int\frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int\frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную функцию и найти соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

Пример 5.2. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=2\int \frac{dt}{t^2+2t+17}=$$

$$2\int \frac{dt}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

2) *Интеграл вида* $\int R(\sin x,\cos x)dx$, *если функция* R *является нечетной относительно* $\cos x$.

Несмотря на возможность нахождения такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t=\sin x$.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos xdx$$

Функция $\dfrac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ может содержать $\cos x$ только в четных степенях, и, следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно $\sin x$: $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\sin x)\cos xdx=\int r(t)dt.$

Пример 5.3. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{matrix}\sin x=t\\ dt=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-\sin^2 x\end{matrix}\right\}=\int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно $\cos x$, а степень $\sin x$, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

3) *Интеграл вида* $\int R(\sin x,\cos x)dx$, *если функция* R *является нечетной относительно* $\sin x$.

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t=\cos x$. Тогда получаем интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\cos x)\sin x dx=-\int r(t)dt.$

Пример 5.4. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\left\{\begin{matrix}\cos x=t\\ dt=-\sin x dx\end{matrix}\right\}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt=$$

$$=\int\left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt=\int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt=$$

$$=\int tdt+\int 2dt-4\int\frac{tdt}{t+2}-5\int\frac{dt}{t+2}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int\frac{t}{t+2}dt=$$

$$=\left\{\frac{t}{t+2}=1-\frac{2}{t+2}\right\}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\int\frac{dt}{t+2}-4\int dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\ln|t+2|-4t+C=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

4) *Интеграл вида* $\int R(\sin x,\cos x)dx$, *если функция* R *четная относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$.

Для преобразования функции R в рациональную функцию используется подстановка $t=tgx$.

В этом случае $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$.

Пример 5.5. Найти неопределенный интеграл.

$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x}$ = [разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos^2 x \neq 0$] =

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16} dx = \left\{ \begin{array}{l} tgx = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(tgx) = dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{tgx + 3 - 5}{tgx + 3 + 5} \right| + C = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{tgx - 2}{tgx + 8} \right| + C.$$

5) *Интеграл от произведения синусов и косинусов различных аргументов.*

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

а) $\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx =$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right].$$

б) $\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx =$

$$= \frac{1}{2} \left[- \frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right].$$

в) $\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx =$

$$= \frac{1}{2} \left[- \frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n} \right].$$

Пример 5.6. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

Пример 5.7. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx =$$

$$= -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x - \frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

Иногда при интегрировании тригонометрических функций удобно использовать общеизвестные тригонометрические формулы для понижения порядка функций.

Пример 5.8. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = -2ctg 2x + C.$$

Пример 5.9. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Иногда применяются некоторые нестандартные приемы.

Пример 5.9. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \cos(\ln x) dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & du = \frac{1}{x}dx; \\ x = e^u; & dx = e^u du; \end{matrix}\right\} = \int e^u \cos u du =$$

$$= \left\{\begin{matrix} p = \cos u; & dq = e^u du; \\ dp = -\sin u du; & q = e^u; \end{matrix}\right\} = e^u \cos u + \int e^u \sin u du =$$

$$=\begin{cases} p=\sin u; & dq=e^u du; \\ dp=\cos u du; & q=e^u; \end{cases} = e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du;$$

Итак, получаем, что интеграл $\int e^u \cos u du = e^u(\cos u + \sin u) - \int e^u \cos u du$. Тогда $\int e^u \cos u du = \frac{e^u}{2}(\cos u + \sin u) + C$, делая обратную замену, будем иметь:

$$\int x \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C;$$

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln x\right) + C.$$

Раздел 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать ее в рациональную функцию, интеграл от которой может быть найден, как известно, всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

1) *Интеграл вида* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$*, где n - натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

Пример 6.1. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \quad dx = -2t^3 dt \right\} =$$

$$= \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} = -2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= -2\int t dt - 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t-1} = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример 6.2. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1 + \sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x - 1 = t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt; \end{array} \right\} = \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} =$$

$$12\int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1}dt = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) =$$

$$12\left(\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int t dt - 12\int \frac{t dt}{t^2+1} + 12\int dt - 12\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12 arctg t + C =$$

$$= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) - 12 arctg \sqrt[12]{x-1} + C.$$

2) *Интегрирование биноминальных дифференциалов.*

Определение 6.1. Биноминальным дифференциалом называется выражение вида: $x^m(a + bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа.

Как было доказано академиком П.Л. Чебышевым (1821-1894), интеграл от биноминального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки:

$t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ - общий знаменатель m и n.

2) Если $\frac{m+1}{n}$ - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой:

$t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s – знаменатель числа p.

3) Если $\frac{m+1}{n} + p$ - целое число, то используется подстановка:

$t = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p.

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

На рассмотрении этих интегралов остановимся более подробно.

3) *Интегралы вида* $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$.

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$\pm u^2 \pm m^2$.

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

$\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$;

$\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du$;

$$\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du;$$

1 способ. Тригонометрическая подстановка

Теорема 6.1. Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$ подстановкой $u = m\sin t$ или $u = m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Пример 6.3. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} x = a\sin t; \\ dx = a\cos tdt \end{array}\right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos tdt = \int a^2\cos^2 tdt =$$

$$\frac{a^2}{2}\int(1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Теорема 6.2. Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du$ подстановкой $u = mtgt$ или $u = mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Пример 6.4. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)^{5/2}} = \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; dx = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{x^2 - 4} = 2tgt; \end{array}\right\} = \int \frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 tg^5 t} = \frac{1}{32}\int ctg^4 tdt =$$

$$= \frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = -\frac{1}{32}\int ctg^2 td(ctgt) - \frac{1}{32}\int ctg^2 tdt =$$

$$= -\frac{1}{96}ctg^3 t - \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = -\frac{1}{96}ctg^3 t + \frac{1}{32}ctgt + \frac{t}{32} + C =$$

$$= \left\{ctgt = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}\right\} = -\frac{1}{12(x^2 - 4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} + \frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x} + C.$$

2 способ. Подстановки Эйлера (1707-1783)

1) Если $a > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.

2) Если $a < 0$ и $c > 0$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Если $a < 0$, а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители - $a(x - x_1)(x - x_2)$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подынтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; \quad II.\int P(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}dx; \quad III.\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

где $P(x)$ – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

в этом выражении $Q(x)$ - некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена $Q(x)$, степень которого ниже степени многочлена $P(x)$, дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена $Q(x)$.

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена $P(x)$ больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример 6.5. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left\{ \begin{aligned} & x = atgt; dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt; \\ & \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}; \end{aligned} \right\} = \int \frac{a\cos t dt}{\cos^2 t a^4 tg^4 t a} =$$

$$= \int \frac{\cos^3 t dt}{a^4 \sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4 \sin t} + C =$$

$$= \left\{ \sin t = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right\} = -\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4 x} + C.$$

Теорема 6.3. Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2-m^2})du$ подстановкой $u = \frac{m}{\sin t}$ или $u = \frac{m}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ или $\cos t$.

Пример 6.6. Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Продифференцируем обе части выражения. Затем умножим их на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda=$$
$$=3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases}A=1\\5A-2B=7\\10A-3B+C=0\\5B-C+\lambda=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-13\\\lambda=-7\end{cases}$$

Итого $\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$

$$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$$

Пример 6.7. Найти неопределенный интеграл.

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\int\frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx=$$

$$=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}}=$$

$$=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=$$

$$=3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

Пример 6.8. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{1}{v};\\&dx=-\frac{dv}{v^2}\end{aligned}\right\}=-\int\frac{v^3dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}}=-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=$$

$$=(Av+B)\sqrt{1-v^2}+\lambda\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}=A\sqrt{1-v^2}-\frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-v^2=A-Av^2-Av^2-Bv+\lambda$$

$$-v^2=-2Av^2-Bv+A+\lambda$$

$$A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$

$$-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{v\sqrt{1-v^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin v=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C$$

Второй способ решения того же самого примера.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}&x=\frac{1}{\cos t};dx=\frac{tgt}{\cos t}dt;\\&\sqrt{x^2-1}=tgt;\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=$$

$$=\int\frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt=\int\cos^2 tdt=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=$$

$$=\left\{\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.$$

С учетом того, что функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций можно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример 6.9. Найти неопределенный интеграл.

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}=\left\{\begin{array}{l}x=\sin t;\\ dx=\cos tdt;\\ \cos t=\sqrt{1-x^2}\end{array}\right\}=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=tgt+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Рассмотрим несколько примеров, в которых интегралы не выражаются через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, где $P(x)$ - многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими.**

Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим.**

Если интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим.**

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840));

2) $\int \sin x^2 dx$; $\int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.);

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм;

4) $\int \frac{e^x}{x}dx$ - приводится к интегральному логарифму;

5) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ - интегральный синус; 6) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральный косинус.

Список использованных источников

1. Гусак, А.А. Высшая математика. В 2-х т. Т 1.: учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. – 3-е изд., стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.

2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник для втузов. В 2-х т. Т. 1. / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 416с.

3. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа: учеб. для вузов / Г. М. Фихтенгольц. - СПб. : Лань, 2001. - Кн. 1. - 2001. - 448 с.

4. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов / В.С. Шипачев. - 5-е изд., стереотип. - М.: Высшая школа, 2005. – 304 с.