Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ С АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫМИ ОСТАТКАМИ (В ПАКЕТЕ STATISTICA)

Под редакцией А.Г. Реннера

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»
в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки 231300 «Прикладная математика», 080500 «Бизнес-информатика», 080100 «Экономика» (общий профиль), специальности 080016 «Математические методы в экономике» и другим специальностям и направлениям подготовки

Оренбург
2011

УДК 330.4(076)
ББК 65В631Я7
В 20

Рецензент - доцент, кандидат экономических наук Е.С.Щукина

Васянина В.И.
В 20 Исследование обобщенной линейной модели множественной регрессии с автокоррелированными остатками в пакете Statistica: методические указания / В.И. Васянина, Ю.А. Жемчужникова, О.И. Стебунова, под ред. А.Г.Реннера; Оренбургский гос. ун-т.– Оренбург: ОГУ, 2011. – 30 с.

Методические указания к семинарским занятиям, лабораторному практикуму, самостоятельной работе студентов, в том числе для выполнения расчетно-графических заданий, курсовых и дипломных работ, связанных с регрессионным анализом. Предназначены для специальности 080116 – Математические методы в экономике, направлений 231300 – Прикладная математика, 080500 – Бизнес-информатика и других экономических специальностей и направлений, изучающих дисциплины, использующие инструментарий регрессионного анализа.

УДК 330.4(076)
ББК 65В631Я7

Содержание

Введение

При моделировании многих реальных социально- экономических процессов, мы можем столкнуться с ситуациями, когда предположение классической линейной модели множественной регрессии, касающееся некоррелированности регрессионных остатков может нарушаться в случаях неверной спецификации модели и, как правило, нарушается при анализе данных, имеющих характер временных рядов.

Игнорирование автокорреляции регрессионных остатков сказывается на свойствах оценок и может вести к недостоверным статистическим выводам. В связи с этим актуальными являются вопросы, связанные с выявлением автокорреляции, ее тестированием и способами устранения.

Цель работы заключается в формировании у слушателей навыков исследования регрессионных моделей с коррелированными остатками.

1 Теоретическая часть

1.1 Обобщенная линейная модель множественной регрессии с автокоррелированными остатками

Изучается регрессионная зависимость результативной переменной y от объясняющих переменных $x=(x_1, x_2, ..., x_k)^T$

$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k, \tag{1.1}$$

где $\tilde{y}$ – условное среднее значение результативной переменной y.

Результаты наблюдений результативной и объясняющих переменных для «*n*» объектов представлены вектором $Y=(y_1,...,y_n)^T$ и матрицей X типа «объект-свойство» наблюденных значений признаков $x_1, ...x_k$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & ... & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & ... & x_{2k} \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nk} \end{pmatrix}.$$

Линейная модель множественной регрессии в данном случае имеет вид:

$$Y = X\beta + Z \tag{1.2}$$

где $\beta = (\beta_0 \beta_1 ... \beta_k)^T$ - вектор коэффициентов линейной модели множественной регрессии (ЛММР);

$Z = (z_1,...,z_n)^T$ -вектор возможных («наблюденных») значений случайного вектора ε - характеризующие отклонения наблюденных значений y_i от модельных значений $\tilde{y}_i$ для *i*–го объекта.

На Y (апостериорная выборка) смотрим как на возможные значения случайного вектора $\eta_{1,n}$ (априорная выборка).

Тогда выборочная модель имеет вид:

$$\eta_{1,n} = X\beta + \varepsilon, \tag{1.3}$$

где $\eta_{1,n} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)^T$ - случайный вектор.

В рамках классической линейной модели множественной регрессии предполагается выполнение всех условий Гаусса-Маркова

1) $x_1, ..., x_к$ – детерминированные переменные;

2) ранг матрицы X равен "$к+1$" – среди признаков нет линейно зависимых;

3) $M\varepsilon_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ - нет систематических ошибок в измерении y;

4) $D\varepsilon_i = M\varepsilon_i^2 = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$

5) $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$

4`) $\Sigma_\varepsilon = M(\overline{\varepsilon\varepsilon}^T) = \sigma^2 E_n$.

Предположим, что нарушено 5-е условие Гаусса – Маркова, т.е. существуют номера $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $i \neq j$ для которых $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \neq 0$, тогда ЛММР (1.3) будем называть **обобщенной линейной моделью множественной регрессии с автокоррелированными остатками.** Условие 4`) можно записать в виде: $\Sigma_\varepsilon = M\overline{\varepsilon\varepsilon}^T = \sigma^2\Sigma_0$, где Σ_0 - некоторая симметричная положительно-определенная матрица.

Будем рассматривать автокорреляционную зависимость первого порядка между регрессионными остатками, которая описывается соотношением:

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + \delta_i, \tag{1.4}$$

где ρ - коэффициент автокорреляции первого порядка ($/\rho/ \leq 1$),

δ_i - случайные величины, удовлетворяющие условиям $M[\delta_i]=0, M[\delta_i,\delta_j]=\begin{cases}\sigma_0^2, \text{при } i=j;\\ 0, \text{при } i\neq j\end{cases}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНО: Рассмотреть свойства МНК оценок с автокоррелированными остатками [1 с. 676, 688].

1.2 Поведение регрессионных остатков в случае автокорреляции

Предположим $0<\rho<1$. Будем говорить в этом случае о положительной автокорреляции. Проиллюстрируем поведение регрессионных остатков. Допустим, что $\varepsilon_1>0$, тогда выражение $\rho\varepsilon_1+\delta_i$ сохранит знак, вообще говоря, в силу малости δ_i. И т.д. до тех пор, пока не произойдет смена знака, т.е. пока величина δ_i не окажется противоположной по знаку $\rho\varepsilon_i^0$ и $|\delta_i|>\rho\varepsilon_i^0$ (для какого-то *i*). Далее на некотором промежутке наблюденных значений $0<\rho<1$ умножается на отрицательное число ε_i и выражение $\rho\varepsilon_1+\delta_i$ будет отрицательно в силу малости δ_i. Таково поведение регрессионных остатков в случае $0<\rho<1$.

Допустим, что исследуется соотношение между ежегодным потреблением бананов (в фунтах) и годовым доходом (в 10000 долл.) по наблюдениям для 10 семей (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Исходные данные потребления бананов (в фунтах) (У) и годовым доходом (в 10000 долл.) (Х).

Семья (i)	y_i	x_i	$\hat{y}_i$	$\hat{z}_i=y_i-\hat{y}_i$
1	1,93	1	5,82	-3,89
2	7,13	2	6,56	0,57
3	8,78	3	7,29	1,49
4	9,69	4	8,03	1,67
5	10,09	5	8,76	1,33
6	10,42	6	9,49	0,93
7	10,62	7	10,23	0,39
8	10,71	8	10,96	-0,25
9	10,79	9	11,70	-0,91
10	11,13	10	12,43	-1,30

Построим линейную регрессионную модель вида: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + z_i$. На рисунке 1.1 представлено корреляционное поле и линия регрессии. Будем предполагать, что ЛММР удовлетворяет всем условиям Гаусса-Маркова, следовательно, является классической. Оценим модель регрессии методом наименьших квадратов:

$$\hat{y} = \underset{(1,227)}{5{,}089} + \underset{(0,198)}{0{,}734}\,x\,;\ \hat{R}^2 = 0{,}64$$

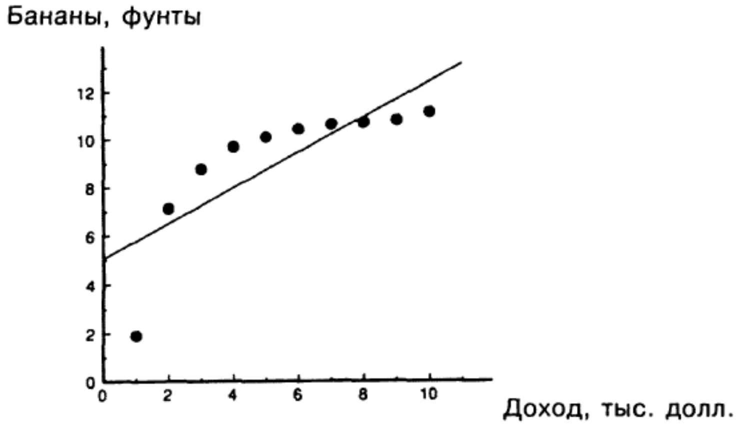


Рисунок 1.1 - Регрессионная зависимость расходов на бананы от годового дохода

Из рисунка 1.1 и из таблицы 1.1 видно, что при оценивании линейной регрессии получаем отрицательный остаток в первом наблюдении, положительные остатки в следующих шести и отрицательные остатки в последующих трех, т.е. можно заподозрить наличие положительной автокорреляции.

Пусть $-1 < \rho < 0$. Будем говорить в этом случае об отрицательной автокорреляции. Проиллюстрируем поведение регрессионных остатков. Допустим, что $\varepsilon_1 > 0$, тогда выражение $\rho\varepsilon_1 + \delta_i < 0$, вообще говоря, в силу малости δ_i, т.е. знак у ε_2 будет отрицательным. При $i = 3$ выражение $\rho\varepsilon_1 + \delta_i$ будет положительным и т. д., пока для какого-то номера δ_i не окажется противоположным по знаку $\rho\varepsilon_{i-1}$, т.е. смена знака не произойдет. Таково поведение регрессионных остатков в случае отрицательной автокорреляции. Отрицательная автокорреляция встречается чаще при использовании данных временного характера. Например, если зависимости между спросом на мороженное и доходами рассматривать по сезонным данным (зима-лето). График отрицательной автокорреляции представлен на рисунке 1. 2.

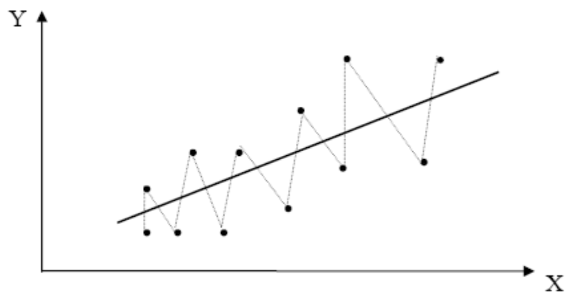


Рисунок 1.2 – Пример отрицательной автокорреляции

Если $\rho = 0$, то автокорреляции нет.

1.3 Проверка гипотезы о наличии/отсутствии автокорреляции

Заподозрить под влиянием какой объясняющей переменной появляется автокорреляция регрессионных остатков можно визуально.

Для этого строим МНК-оценки параметров модели регрессии, находим оценки регрессионных остатков $\hat{\varepsilon}_i$ и рассматриваем характер изменения регрессионных остатков в зависимости от изменения анализируемой объясняющей переменной. Если по мере возрастания упорядоченной объясняющей переменной регрессионные остатки $\hat{\varepsilon}_i$ сохраняют знак на достаточно длительном промежутке, то предполагают наличие положительной автокорреляции, при чередовании знаков – отрицательной автокорреляции.

Для проверки подозрений, высказанных в результате визуального анализа, применяют (в случае пространственных данных) специальный **критерий Дарбина – Уотсона.**

Предварительно рассмотрим величину:

$$DW_{теоретич} = \frac{M(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{M\varepsilon_i^2}. \qquad (1.5).$$

Очевидно, что

$$DW_{теоретич} = \frac{M\varepsilon_i^2 - 2M\varepsilon_i\varepsilon_{i-1} + M\varepsilon_{i-1}^2}{M\varepsilon_i^2} = \frac{2M\varepsilon_i^2 - 2M\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}}{M\varepsilon_i^2}, \quad \text{т.е.}$$

$$DW_{теоретич} = \frac{2(M\varepsilon_i^2 - M\varepsilon_i\varepsilon_{i-1})}{M\varepsilon_i^2} = 2(1-\rho)\text{; где } \rho = \frac{cov(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1})}{M\varepsilon_i^2}.$$

Если $\rho = 1$, то $DW_{терет}$=0; если $\rho = -1$, то $DW_{терет}$=4; если $\rho = 0$, то $DW_{терет}$=2; во всех других случаях при $1 < \rho < -1$, то $0 < DW_{теорет} < 4$.

Учитывая свойства $DW_{теоретич}$ построим статистику Дарбина –Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}, \tag{1.6}$$

которая является случайной величиной, распределение которой затабулировано.

Оценка коэффициента автокорреляции первого порядка имеет вид: $r(\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_{i-1}) = \frac{\sum_{i=2}^{n}\hat{\varepsilon}_i \cdot \hat{\varepsilon}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n-1}\hat{\varepsilon}_i^2}$. В случае, когда каждое отклонение $\hat{\varepsilon}_i$ примерно совпадает с предыдущим отклонением $\hat{\varepsilon}_{i-1}$, каждое слагаемое в числителе величины DW близко к нулю. Сумма квадратов разностей отклонений в числителе будет намного меньше суммы квадратов отклонений в знаменателе и поэтому статистика Дарбина – Уотсона окажется близкой к нулю, а $r = 1$. Это случай положительной автокорреляции первого порядка. Когда точки наблюдений поочередно отклоняются в разные стороны от линии регрессии, и каждое следующее отклонение $\hat{\varepsilon}_i$ имеет как правило, противоположный знак, чем предыдущее отклонение $\hat{\varepsilon}_{i-1}$, то в этом случае

$(\hat\varepsilon_i\ \hat\varepsilon_{i-1})$=2$\hat\varepsilon_i$, и $DW = \dfrac{\sum_i (2\hat\varepsilon_i)^2}{\sum_i \hat\varepsilon_i^2} = 4\dfrac{\sum_i \hat\varepsilon_i^2}{\sum_i \hat\varepsilon_i^2} = 4$. Это – случай отрицательной автокорреляции первого порядка и $r = -1$. Если характер поведения отклонений случаен, можно предположить, что в половине случаев знак последовательных отклонений совпадает, а в половине – различен. Поскольку абсолютная величина их в среднем предполагается одинаковой, можно считать, что здесь в половине случаев $\hat\varepsilon_i$ равно $\hat\varepsilon_{i-1}$, а в оставшейся половине $\hat\varepsilon_i$ равно -$\hat\varepsilon_{i-1}$. При этом $DW = \dfrac{0{,}5\sum_i (2\hat\varepsilon_i)^2}{\sum \hat\varepsilon_i^2} = 0{,}5 \cdot 4\dfrac{\sum_i \hat\varepsilon_i^2}{\sum_i \hat\varepsilon_i^2} = 2$, а $r = 0$.

Проверим гипотезу об отсутствии автокорреляции первого порядка с помощью статистики Дарбина-Уотсона (1.6). Выдвигаем гипотезу:

H_0: $\rho = 0$ (нет автокорреляции)

H_1: $\rho \neq 0$ (есть автокорреляция)

Для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции остатков первого порядка по таблице находятся (при заданном уровне значимости (α), числе наблюдений (n) и независимых переменных (k)) интервалы, в пределах которых нулевая гипотеза принимается, отвергается или не может быть принята или отвергнута. Для статистики Дарбина-Уотсона существуют два критических значения, меньших двух: нижнее $d_í$ как граница для признания положительной автокорреляции остатков и верхнее $d_â$ как граница признания ее отсутствия. Для проверки гипотезы об отрицательной автокорреляции остатков эти критические значения отражаются симметрично относительно числа 2. Если фактически наблюдаемое значение DW (рисунок 1.3):

1) $d_â < DW <$4-$d_â$, то гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается;

2) $d_í < DW <$ $d_â$ или 4-$d_â < DW <$4-$d_í$, область неопределенности критерия (вопрос об отвержении или принятии гипотезы остается открытым);

3) 0< $DW < d_l$, то принимается альтернативная гипотеза о положительной автокорреляции;

4) 4- $d_l < DW$ <4, то принимается альтернативная гипотеза об отрицательной автокорреляции.

Рисунок 1.3 – Критическая область и область принятия нулевой гипотезы об отсутствии автокорреляции первого порядка.

Например, пусть оценена парная линейная регрессия по 15 наблюдениям, и DW =1,1. Зададим уровень значимости 5 % и найдем по таблице d_l =0,95; $d_в$ =1,23. Нулевая гипотеза была бы принята при $d_в$ =1,96< DW < 2,77=4- $d_в$ и отвергнута при DW < 0,95= d_l или DW >3,05=4- d_l . Поскольку в данном случае DW лежит между d_l и $d_в$, нулевая гипотеза не может быть ни принята, ни отвергнута. Если альтернативной гипотезой является гипотеза о положительной автокорреляции остатков, то критические значения d_l =0,95 и $d_в$ =1,23 соответствуют 2,5% -ному уровню значимости.

В случае использования данных временного характера следует использовать модифицированный критерий Дарбина-Утсона[1].

1.3 ОМНК – оценки ОЛММР и процедура Кохрейна –Отркатта

САМОСТОЯТЕЛЬНО: Построить ковариационную матрицу остатков для модели (1.3): $\Sigma_\varepsilon = M\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}^T = \sigma^2\Sigma_0 = \frac{\sigma_0^2}{1-\rho^2}\Sigma_0$, [1 с. 691; 4, с.100].

[1] Джонсон Дж. Эконометрические методы/ Пер. с англ. и предисл. А.А. Рывкина. М.: Статистика. 1980. -444 с.

Как известно, оценки ОЛММР можно оценить с помощью ОМНК: $\beta_{ОМНК} = \left(X^T \Sigma_0^{-1} X\right)^{-1} X^T \Sigma_0^{-1} Y$, который требует знания матрицы Σ_0. В данном случае структура матрицы Σ_0 имеет вид

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

Матрица Σ_0 определяется единственным значением параметра ρ. Проблема реализации ОМНК для оценки коэффициентов обобщенной линейной модели множественной регрессии с автокоррелированными остатками первого порядка сводится к нахождению неизвестного параметра ρ.

Практически все процедуры, предложенные для реализации ОМНК в модели регрессии с автокоррелированными остатками при неизвестном значении ρ, имеют итерационных характер. Рассмотрим описание одной из наиболее распространенных процедур подобного типа, известной в литературе под названием **процедуры Кохрейна-Оркатта.**

1) МНК оцениваются коэффициенты $\hat{\beta}^{(1)}$ регрессионной модели $Y = X\beta + Z$;

2) рассчитываются регрессионные остатки первой итерации: $\hat{z}_i^{(1)} = y_i - \hat{y}_i^{(1)}$, где $\hat{y}_i^{(1)} = \hat{\beta}_0^{(1)} + \hat{\beta}_1^{(1)} x_{i1} + \dots + \hat{\beta}_k^{(1)} x_{ik}$;

3) первое приближение $r^{(1)}$ оценки неизвестного параметра ρ определяется с помощью МНК-оценки коэффициента регрессии ρ в модели

$$\hat{z}_i^{(1)} = \rho \hat{z}_{i-1}^{(1)} + \delta_i^{(1)}, \tag{1.8}$$

$$r^{(1)}_{МНК} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \hat{z}_i \hat{z}_{i-1}}{\sum_{i=2}^{n} (\hat{z}_i)^2}; \quad (1.9)$$

4) вычисляются ОМНК-оценки $\hat{\bar{\beta}}_{ОМНК}(r^{(1)}) = \bar{\beta}^{(2)}$ с матрицей $\hat{\Sigma}_0(r^{(1)})$, определенной соотношением (1.7), в котором вместо ρ подставлены $r^{(1)}$;

5) рассчитываются регрессионные остатки второй итерации: $\hat{z}_i^{(2)} = y_i - \hat{y}_i^{(2)}$, где $\hat{y}_i^{(2)} = \hat{\beta}_0^{(2)} + \hat{\beta}_1^{(2)} x_{i1} + ... + \hat{\beta}_k^{(2)} x_{ik}$ и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность (пока r не стабилизируются), а именно пока оценки параметра $\rho^{(i)}$ на последнем и предпоследнем этапах будут примерно одинаковыми.

Замечание. Как уже отмечалось, при работе с пространственной статистической информацией, наличие автокоррелированных регрессионных остатков, как правило, обусловлено неправильной спецификацией модели. Поэтому в некоторых практических задачах методом устранения автокорреляции является изменение спецификации (вида функции) регрессионной модели. В рассмотренном ранее примере, исследования соотношения между ежегодным потреблением бананов (в фунтах) и годовым доходом (в 10000 долл.) по наблюдениям для 10 семей, оценили модель регрессии методом наименьших квадратов:

$$\hat{y} = \underset{(1,227)}{5,089} + \underset{(0,198)}{0,734}\, x; \quad \hat{R}^2 = 0,64$$

Из рисунка 1.1 видно, что можно заподозрить наличие положительной автокорреляции. Рассчитав статистику Дарбина –Уотсона по формуле (1.6) получили, что DW=0,87. Критические значения, найденные по таблице равны: $d_н(0,05;1;10) = 0,88$, $d_в(0,05;1;10) = 0,32$. Следовательно, делаем вывод о наличии положительной автокорреляции.

Из корреляционного поля (рисунок 1.1) видно, что наблюдается нелинейный характер зависимости потребления бананов от доходов, поэтому изменим вид зависимости с линейной на гиперболическую (1.10):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x_{i1}} + z_i \qquad (1.10)$$

Оценка модели регрессии в форме гиперболы имеет вид:

$$\hat{y} = \underset{(0,047)}{12{,}08} - \underset{(0,120)}{10{,}077} \frac{1}{x}, \qquad R^2 = 0.9989$$

Статистика DW=1,38. Делаем вывод об отсутствии автокорреляции, более того в случае гиперболической зависимости ниже стандартные ошибки коэффициентов и значительно выше коэффициент детерминации.

1.5 Вопросы для практическо-семинарских занятий по теме «ОЛММР с автокоррелированными остатками»

Группа А – базовые вопросы по лекционному материалу

1. Укажите свойства МНК-оценок ОЛММР с автокоррелированными остатками.
2. Как получить ОМНК – оценку вектора параметров β для ОЛММР с автокоррелированными остатками?
3. Приведите характеристики качества модели ОЛММР с автокоррелированными остатками.
4. Приведите ковариационную матрицу регрессионных остатков в ОЛММР с автокоррелированными остатками первого порядка.
5. Как проверить гипотезу о незначимости ОЛММР с автокоррелированными остатками?
6. Как проверить гипотезу о незначимости отдельных коэффициентов ОЛММР с автокоррелированными остатками?
7. Назовите возможные причины, порождающие автокорреляцию.

8. Перечислите последствия автокорреляции.

Группа В – вопросы, требующие самостоятельной подготовки

1. Для чего используется метод первых разностей? В чем состоит суть этого метода? [3, с. 224]
2. В чем заключается Q – тест Льюинга –Бокса на выявление автокорреляции? [6, с. 175]
3. Как проверить гипотезу об отсутствии автокорреляции с помощью теста Бреуша – Годфри? [6, с. 174]
4. Как осуществить точечный прогноз значения результативного показателя в условиях ОЛММР с автокоррелированными остатками [1, с. 703]?
5. Опишите процедуру построения интервального прогноза значения результативного показателя в условиях ОЛММР с автокоррелированными остатками[1, с. 704].

2 Практическая часть

2.1 Содержание лабораторной работы

Выполнение лабораторной работы по теме «ОЛММР с автокоррелированными остатками» состоит из следующих этапов:

– ознакомление с формулировкой задания к лабораторной работе и порядком её выполнения в пакетах прикладных программ;
– выполнение расчетов на компьютере по данным своего варианта;
– анализ полученных результатов;
– подготовка письменного отчета по лабораторной работе;
– защита лабораторной работы.

2.2 Задание к лабораторной работе

По данным Приложения А:

1) построить МНК-оценки коэффициентов линейной модели множественной регрессии;

2) исследовать регрессионные остатки на наличие автокорреляции;

3) при необходимости, используя процедуру Кохрейна-Оркатта, построить ОМНК-оценки параметров ОЛММР с автокоррелированными остатками.

2.3 Порядок выполнения лабораторной работы в пакете Statistica

Рассмотрим процедуру исследования линейной модели множественной регрессии на наличие или отсутствие автокорреляции на основе информации о деятельности 30 крупных компаний США:

y – чистый доход, млрд. долл.;

x_1 – оборот капитала, млрд. долл.;

x_2 – использованный капитал, млрд. долл.;

x_3 – численность служащих, тыс. чел.;

x_4 – расходы на конечное потребление, млрд. долл.;

x_5 – расходы домашних хозяйств, млрд. долл.;

Окно с частью данных для анализа представлено на рисунке 2.1.

STATISTICA - [Data: danna1* (10v by 40c)]

	1 Y	2 x1	3 x2	4 x3	5 x4	6 x5	7 Var7
1	3,5578	3,389	5	11,6	3,1	11,5	
2	2,6417	1,637	8,7	9,2	6,1	10,1	
3	3,1282	2,572	2,7	7	2,6	4,9	
4	2,8173	3,935	4	7,4	5,8	5,5	
5	2,6315	0,818	6,5	8,7	6	12,4	
6	3,5034	2,129	4,1	10,1	8,2	2,3	
7	3,1641	1,731	13,4	8,8	27,7	12,3	
8	2,719	2,97	3,7	10,8	11,2	8,5	
9	3,4752	4,186	3,7	6,4	4,1	7,2	
10	4,7417	20,527	10,4	10,8	7,3	14,3	
11	3,0796	1,95	15,7	7,8	6	15,2	
12	3,4253	2,281	21,3	6	7,3	19,5	
13	3,3056	2,315	7,6	9	11	6,1	
14	2,5838	1,397	5,8	6,1	6,4	11,4	
15	3,4139	5,268	7,4	7,7	7,6	12,1	
16	3,3681	2,731	11,9	7,2	5,9	10,4	
17	3,9084	4,855	4,7	8,6	4,4	9,5	
18	6,8452	79,881	4,9	11,3	6,1	9,2	
19	3,78	13,884	7,1	8,1	14,9	12,1	
20	2,3586	0,871	5,4	9	0,7	4,1	
21	2,3466	1,45	3,6	10,1	6,1	12,8	

Рисунок 2.1- Исходные данные для анализа

Для оценки параметров регрессионной модели воспользуемся методом пошаговой регрессии (методом исключения переменных). Процедура построения уравнения множественной регрессии более подробно рассмотрена в лабораторной работе №1.

Результаты оценивания представлены на рисунке 2.2.

Regression Summary for Dependent Variable: Y (danna1)
R= ,88229307 R_= ,77844106 Adjusted R_= ,77052824
F(1,28)=98,377 p<,00000 Std.Error of estimate: ,42341

N=30	Beta	Std.Err. of Beta	B	Std.Err. of B	t(28)	p-level
Intercept			2,944958	0,086370	34,09713	0,000000
x1	0,882293	0,088954	0,053217	0,005365	9,91853	0,000000

Рисунок 2.2 - Результаты оценивания параметр регрессионной модели

Для проведения теста на нормальный характер распределения регрессионных остатков в меню системы Statistica выберем пункт **Distribution Fitting**. Результаты исследования регрессионных остатков представлены на рисунке 2.3.

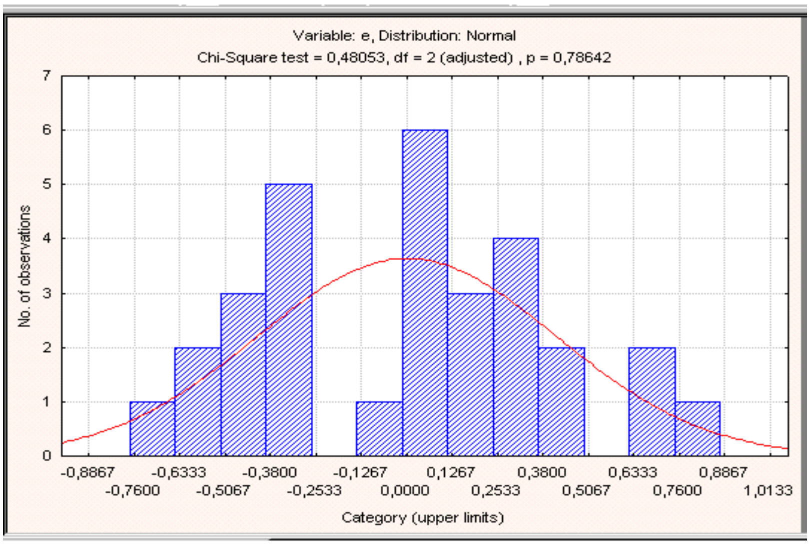


Рисунок 2.3 – Гистограмма распределения регрессионных остатков

Результаты формальной проверки гипотезы о нормальном характере распределения регрессионных остатков позволяют ее не отвергнуть, и есть смыл проводить дальнейший анализ построенного уравнения множественной регрессии.

Оценка уравнения регрессии выглядит следующим образом:

$$\hat{y} = \underset{(0.09)}{2.945} + \underset{(0,005)}{0.053}\, x_1 \qquad (2.1)$$

Как видно из отчета (рисунок 2.2), регрессионная модель адекватна экспериментальным данным, значимыми оказались все коэффициенты модели.

Исследуем регрессионные остатки на наличие/отсутствие автокорреляции.

Для визуального анализа регрессионных остатков построим график с использованием MS Excel (рисунок 2.4).

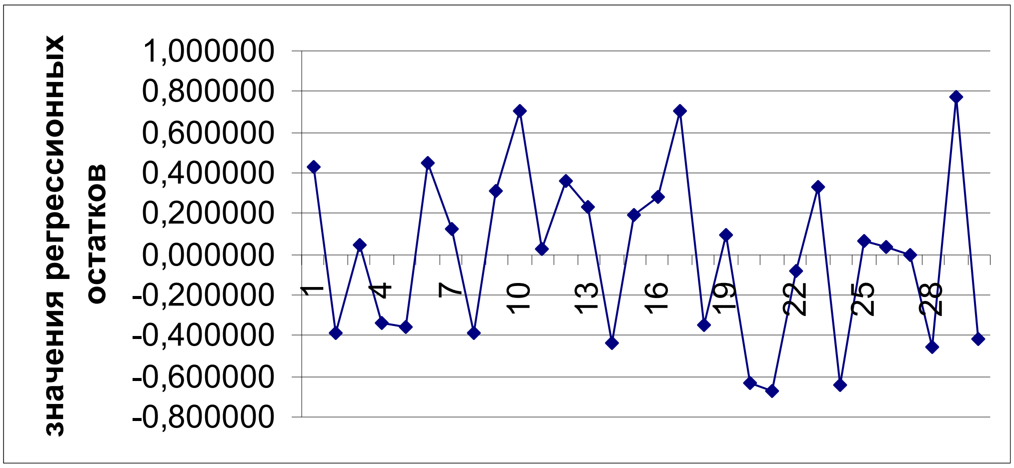
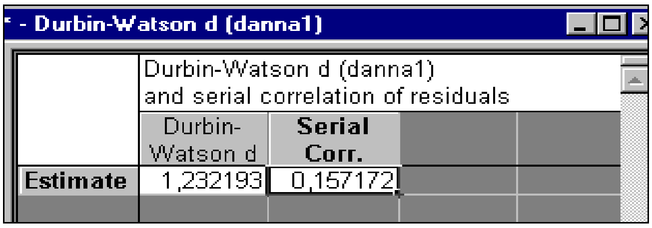


Рисунок 2.4 – График регрессионных остатков

По графику регрессионных остатков можно предположить наличие в регрессионных остатках положительной автокорреляции.

Кроме визуального анализа, существует критерий Дарбина-Уотсона, с помощью которого выявляется автокорреляции первого порядка.

Для вычисления значения данного критерия используется соответствующая процедура ППП Statistica. В окне **Residuals analysis – Анализ остатков** нажмем кнопку **Durbin-Watson statistic – Критерий Дарбина-Уотсона** [1]**.** На экране появится окно, содержащее значение данного критерия.



- Durbin-Watson d (danna1)

Durbin-Watson d (danna1)
and serial correlation of residuals

	Durbin-Watson d	Serial Corr.
Estimate	1,232193	0,157172

Рисунок 2.5 – Значение критерия Дарбина-Уотсона и оценка коэффициента корреляции регрессионных остатков

Так как $DW < 2$, то наше предположение о возможном наличии положительной автокорреляции допустимо. Для расчета критического значения воспользуемся таблицей значений статистики Дарбина-Уотсона. В нашем случае для n=30, k=1 получаем $d_н$=1,35 $d_в$=1,49. Так как $DW \le d_Н$, то нулевую гипотезу об отсутствии автокорреляции первого порядка $(H_0 : \rho = 0)$ отвергаем, т.е. делаем вывод о наличии положительной автокорреляция.

Как известно, ОМНК-оценки параметров уравнения регрессии: $\hat{\beta}=\left(X^T\hat{\Sigma}_0^{-1}X\right)^{-1}X^T\hat{\Sigma}_0^{-1}\overline{Y}$. При наличии автокорреляции первого порядка матрица Σ_0^{-1} будет иметь вид: $\Sigma_0{}^{-1}=\dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & ... & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$. Таким образом, задача сводится к оцениванию параметра ρ. Для решения этой задачи воспользуемся процедурой Кохрейна –Оркатта.

На первом этапе МНК находим оценки коэффициентов уравнения регрессии, вычисляем регрессионные остатки $\hat{z}_i^{(1)}$. На рисунке 2.2 представлены оценки коэффициентов уравнения регрессии. Информация о значениях остатков может быть получена нажатием на кнопку **Summary: Residuals & predicted**. Вектор регрессионных остатков представлен на рисунке 2.6.

8 e
0,432488
-0,390375
0,046367
-0,337069
-0,356990
0,445142
0,127023
-0,384014
0,307473
0,704347
0,030868
0,358953
0,237443
-0,435503
0,188592
0,277805
0,705071
-0,350825
0,096170
-0,632711
-0,675523

Рисунок 2.6 – Значения регрессионных остатков

Оценивая параметр ρ модели регрессии $\hat{z}_i^{(1)} = \rho\hat{z}_{i-1}^{(1)} + \delta_i^{(1)}$, получили $\hat{\rho}^{(1)}$=0,157. В качестве оценки матрицы Σ_0^{-1} берем матрицу $\hat{\Sigma}_0^{-1} = \frac{1}{1-\hat{\rho}^{(1)2}}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{\rho}^{(1)} & \dots & 0 \\ -\hat{\rho}^{(1)} & 1+\hat{\rho}^{(1)2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Имея эту матрицу, построим ОМНК-оценки параметров уравнения регрессии.

Для определения вектора-оценок коэффициентов уравнения регрессии воспользуемся функциональными возможностями Mathcad. Сначала матрицы X, Y, $\hat{\Sigma}^{-1}{}_0$ формируем в Excel, сохраняем в текстовом формате, затем открываем Mathcad, в меню **Insert** выбираем пункт **Components** (рисунок 2.7).

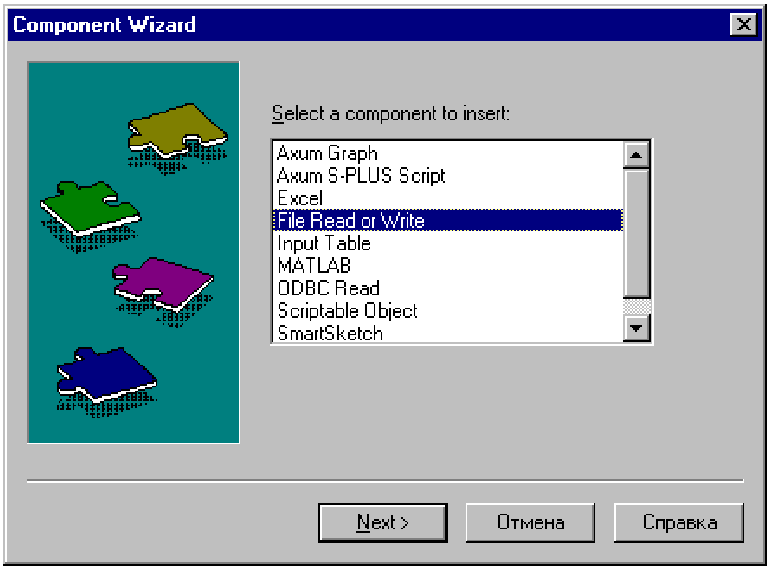


Рисунок 2.7 – Выбор пунктов меню для импортирования данных из MS Excel

В появившемся окне находим пункт **File Read or Word**. В окне **File Read or Word** нажимаем на кнопку **Browse - Обзор** и открываем текстовый файл, в котором сохранили матрицы X, Y, $\hat{\Sigma}^{-1}{}_0$. Выбрав нужный файл, нажимаем на кнопку Готово. В появившемся окне полученной матрице присваиваем имя, например X, и соответственно, получаем матрицы X, Y и $\hat{\Sigma}_0^{-1}$ (рисунок 2.8).

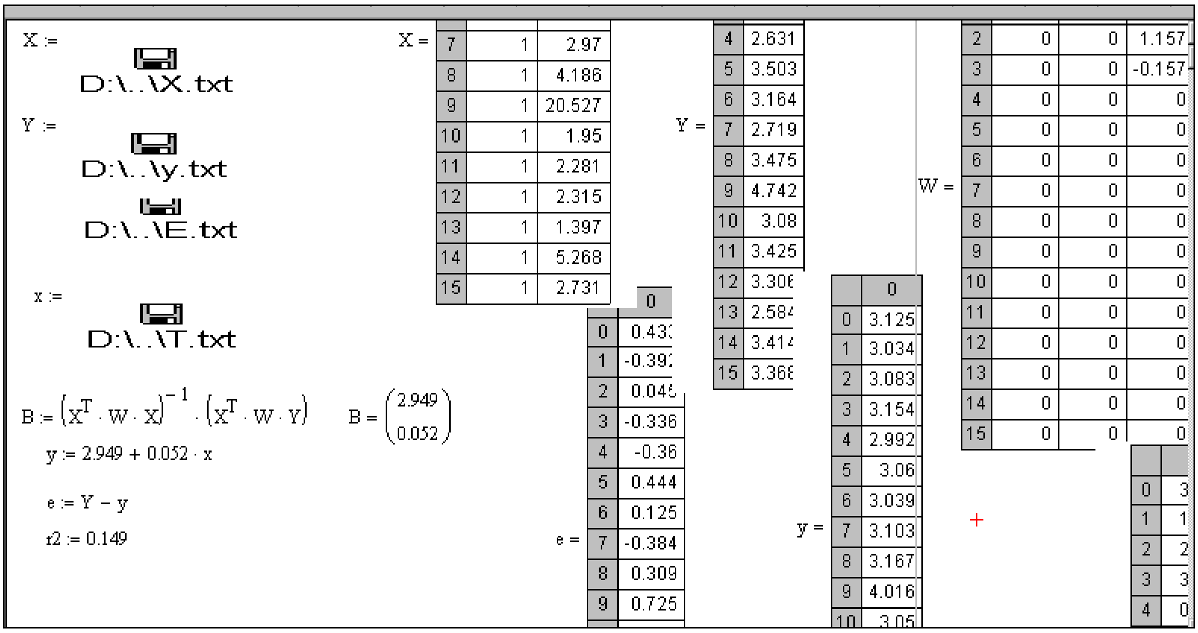


Рисунок 2.8 – Результаты расчетов в Mathcad

Повторим процедуру до тех пор пока соседние $r^{(k)}$ и $r^{(k-1)}$ не окажутся между собой приблизительно равны.

На 5 шаге итерации $r^{(4)} \approx r^{(5)} = 0.120$. На рисунке 2.9 представлены результаты вычислений на последней итерации.

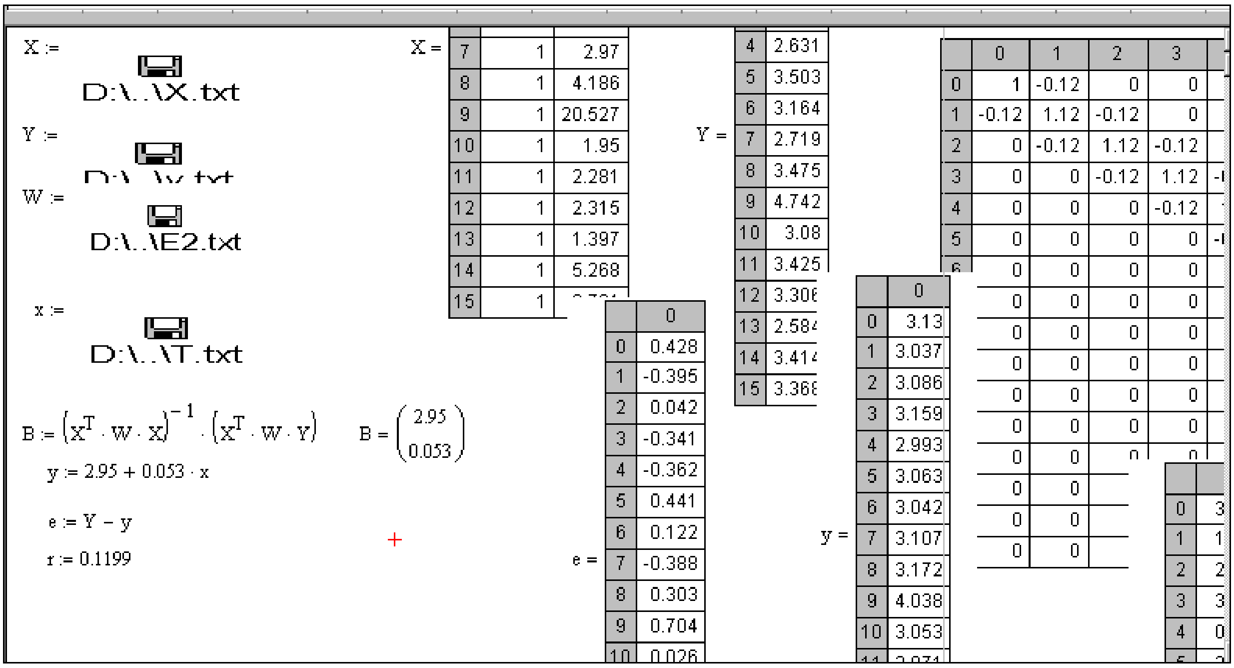


Рисунок 2.9 – Результаты расчетов на последнем шаге

На рисунках 2.8 и 2.9 под матрицей W подразумевается $\hat{\Sigma}_0^{-1}$.

Оценка уравнения регрессии выглядит следующим образом:

$$\hat{y} = 2.95 + 0.053 x_1 \tag{2.2}$$

На рисунке 2.10 представлены результаты вычислений оценки ковариационной матрицы вектора оценок коэффициентов ($\hat{\Sigma}(B)$), оценки остаточной дисперсии.

$$\frac{\left(e^T \cdot e\right)}{30 - 1 - 1} = (0.179) \qquad (Y - 3.33)^T (Y - 3.33) = (22.657)$$

$$\Sigma(B) := 0.179 \cdot \left(X^T \cdot \Sigma \cdot X\right)^{-1}$$

$$\boxed{\Sigma(B) = \begin{pmatrix} 8.12 \times 10^{-3} & -1.868 \times 10^{-4} \\ -1.868 \times 10^{-4} & 2.602 \times 10^{-5} \end{pmatrix}}$$

Рисунок 2.10 – Результаты оценивания остаточной дисперсии, матрицы $\hat{\Sigma}(\hat{a})$.

Используя полученные результаты, определим оценку коэффициента детерминации $\hat{R}^2 = 1 - \frac{5.024}{22{,}657} = 0.78$, $F_H = \frac{\hat{R}^2 / k}{1 - \hat{R}^2 / n - k - 1} = 99.27$.

Результаты проверки гипотезы о нормальном характере распределения регрессионных остатков позволяют ее не отвергнуть.

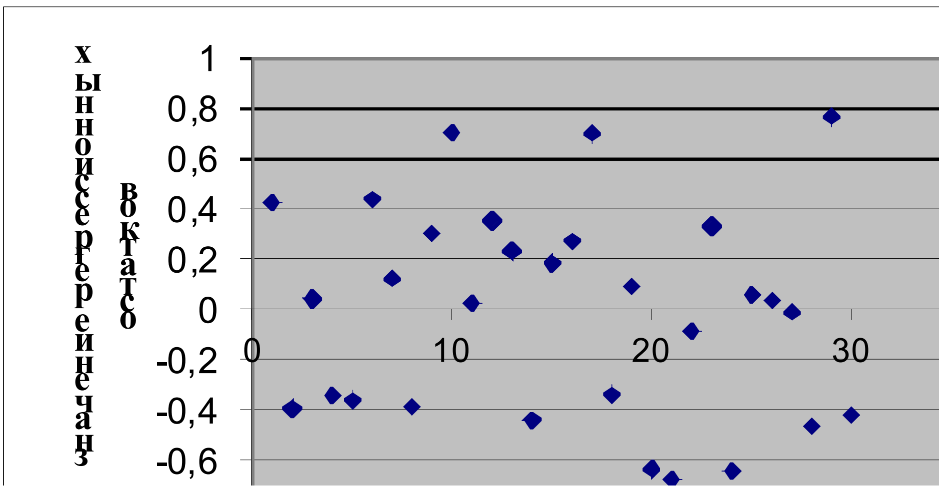


Рисунок 2.11 – График регрессионных остатков

Итак, получили следующую оценку уравнения регрессии: $\hat{y}$=2,95+0,053x_1. Так как $F_H > F_{кр}$, нулевую гипотезу о незначимости модели отвергаем. Значение критерия Дарбина-Уотсана составило 1,76, что свидетельствует об отсутствии автокорреляции, график регрессионных остатков приведен на рисунке 11. Согласно полученной модели, при изменении оборота капитала на 1 млрд. долл. чистый доход возрастет в среднем на 0,053 млрд. долл. Оценка коэффициента детерминации $\hat{R}^2 = 0.78$ показывает, что вариация результирующей переменной лишь на 78% объясняется вариацией факторного признака X_1.

2.4 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом, оформленным соответствующим образом и содержать следующее:

1) постановку задачи с исходными данными для анализа;
2) краткое изложение теории;
3) результаты компьютерной обработки данных;
4) анализ полученных результатов;
5) содержательная интерпретация полученных результатов.

2.5 Вопросы к защите лабораторной работы

1. Сформулируйте постановку задачи лабораторной работы.
2. Дайте определение ОЛММР с автокоррелированными остатками.
3. Укажите причины автокорреляции.
4. Виды автокорреляции.
5. Как с помощью графического анализа предположить наличие или отсутствие автокорреляции?

6. Какие тесты для выявления автокорреляции Вы использовали? Опишите их алгоритм.

7. Найти структуру матрицы Σ_0 при реализации ОМНК в условиях автокорреляции?

8. Запишите автокорреляционную зависимость первого порядка.

Список использованных источников

1 Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов/ С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.

2 Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс: учебник/ Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2004. – 57 с.

3 Доугерти, К. Введение в эконометрику: учебник для вузов/ К. Доугерти. – М.:ИНФРА-М, 1999. – 402 с.

4 Мхитарян, В.С. Эконометрика: учебник / под ред. В.С. Мхитаряна. – М: Проспект, 2009.-384 с.

5 Тихомиров, Н.П. Эконометрика: учебник/ Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 512 с.

6 Кремер, Н. Ш. Эконометрика: учебник для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремер. - М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003. - 311 с.

Приложение А

(обязательное)

Исходные данные для анализа

Таблица А.1 - Значения социально-экономических показателей, характеризующих города и районы Оренбургской области

Номер объекта	Административно-территориальные образования	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Абдулинский	716,59	0	50	71,8	0,00	21,90	53,09	16,64
2	Адамовский	4791,44	10296,08	16,7	46,2	0,00	8,42	61,90	22,39
3	Акбулакский	5677,90	1478,16	52,9	47,3	0,18	11,80	62,56	21,02
4	Александровский	1571,20	377,53	45,5	0	0,00	14,55	60,55	20,02
5	Асекеевский	3704,46	642,03	40,9	57,5	0,54	13,58	58,68	18,11
6	Беляевский	3304,59	341,69	72,7	22,9	0,22	17,10	61,23	19,72
7	Бугурусланский	4367,39	261,84	58,3	28,7	0,00	14,97	59,99	17,51
8	Бузулукский	2127,96	1111,62	52,6	72,8	0,36	10,76	58,65	17,74
9	Гайский	13657,15	0,00	16,7	15,1	0,00	15,65	59,70	20,32
10	Грачевский	2252,99	1385,21	55,6	73	0,13	10,93	60,46	18,07
11	Домбаровский	2242,38	508,48	81,8	25,6	0,00	6,73	62,41	22,86
12	Илекский	2803,27	505,37	42,9	4,9	3,53	11,41	59,78	19,15
13	Кваркенский	1984,05	3094,73	41,2	35,6	1,49	10,29	60,23	21,36
14	Красногвардейский	3618,35	1314,39	25	8	0,44	11,35	60,34	20,93
15	Кувандыкский	2438,19	0,00	52,9	33,3	0,00	14,47	59,02	20,38
16	Курманаевский	2074,29	0,00	81,2	57,9	1,58	21,11	60,02	17,32
17	Матвеевский	2172,78	102,99	11,1	8,3	0,00	14,66	58,83	18,09
18	Новоорский	10893,40	82540,63	61,9	8,4	0,00	12,86	61,61	19,81
19	Новосергиевский	5723,31	4935,74	40,5	20,6	0,16	11,94	59,04	19,02
20	Октябрьский	4967,20	444,28	31,2	46,7	0,13	12,81	60,50	18,03
21	Оренбургский	20071,10	25359,07	31,1	5,8	0,01	4,83	63,93	18,41
22	Первомайский	1795,32	3312,16	17,6	18,4	1,09	18,87	62,33	22,06
23	Переволоцкий	3561,15	86,88	30,8	0,8	0,32	14,63	60,62	18,92
24	Пономаревский	2217,02	184,32	81,8	52,2	0,00	16,39	57,82	16,93
25	Сакмарский	4551,40	374,80	14,3	1,4	0,03	9,11	63,10	18,20
26	Саракташский	3384,80	3525,57	40	13,6	0,00	2,30	59,67	18,21
27	Светлинский	3775,83	12159,95	64,3	12,6	0,43	10,12	61,36	21,16
28	Северный	2264,20	0,00	21,4	58,8	0,00	7,12	58,67	17,78
29	Соль-Илецкий	1047,46	358,37	81	43,1	0,88	8,19	59,74	22,86
30	Сорочинский	2833,94	13,55	33,3	40,9	0,00	26,12	56,48	20,25
31	Ташлинский	6881,07	5509,45	55,6	12,7	1,08	8,45	61,57	20,67
32	Тоцкий	1755,21	159,03	54,2	13	0,04	16,18	72,49	13,84
33	Тюльганский	3196,66	1403,25	50	14,2	2,48	15,21	62,25	18,85
34	Шарлыкский	3649,02	299,66	26,3	43,6	0,05	12,45	57,57	16,84
35	Ясненский	7148,83	0,00	100	84,4	0,63	34,94	60,79	24,15
36	Абдулино	2784,39	3277,23	25	27,4	0,02	7,49	64,93	19,16
37	Бугуруслан	4229,97	191924,71	38,9	20,6	0,05	15,35	62,18	18,16
38	Бузулук	61679,53	240951,01	27,7	0,3	0,09	6,19	64,27	15,81
39	Гай	27338,48	106449,61	10	7,8	0,04	1,82	65,93	15,24

Продолжение таблицы А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40	Кувандык	2012,36	20786,78	27,3	0,7	0,00	7,73	63,44	17,12
41	Медногорск	11170,01	27319,93	31,2	1,5	0,00	18,05	63,00	16,65
42	Новотроицк	29743,64	217430,62	39,5	14,8	0,00	13,14	60,46	15,03
43	Оренбург	21460,65	8736,67	22,3	6,7	0,01	25,37	64,76	15,29
44	Орск	4301,33	139154,85	28,8	14,1	0,00	2,96	66,55	15,09
45	Соль-Илецк	4401,00	12593,97	42,9	6,4	0,00	0,00	63,42	16,20
46	Сорочинск	3446,14	315863,20	12,5	3,3	0,02	14,08	63,03	20,16
47	Ясный	3539,32	29399,98	50	46,3	0,00	7,82	63,26	18,17

Таблица А.2 - Значения социально-экономических показателей, характеризующих города и районы Оренбургской области

Номер объекта	Административно-территориальные образования	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Абдулинский	751	0	31,35	2226,11	0,00	5158,03	329,71	99,63
2	Адамовский	2910	355	2,25	135701,34	-0,02	5908,71	2008,04	144,78
3	Акбулакский	1357	263	0,11	-8567,61	0,61	4379,21	1458,21	142,39
4	Александровский	969	26	0,17	-36522,68	0,00	6962,00	1821,81	140,83
5	Асекеевский	1643	141	0,37	17280,55	3,50	4529,49	2005,23	124,18
6	Беляевский	1502	173	0,17	-23702,21	0,00	5330,26	1583,71	131,50
7	Бугурусланский	2158	43	0,07	2327,56	-3,36	6830,25	1283,09	150,45
8	Бузулукский	1829	574	0,77	-20227,66	2,15	3813,11	1556,33	189,27
9	Гайский	1622	67	0,15	90494,93	0,00	5260,96	1543,57	132,57
10	Грачевский	1306	90	0,22	-21387,79	-4,28	5562,88	2376,39	179,24
11	Домбаровский	716	21	0,60	-66252,50	-13,30	4790,24	1855,85	158,35
12	Илекский	2098	151	2,94	-38968,18	-7,22	4117,78	1780,37	113,90
13	Кваркенский	1904	319	1,83	95392,98	9,08	4916,49	1746,81	137,01
14	Красногвардейский	814	215	0,92	-6880,28	-20,36	5483,97	1738,92	169,90
15	Кувандыкский	1529	50	0,73	-12601,50	0,00	2805,11	660,66	102,55
16	Курманаевский	1223	40	0,08	-19203,87	0,00	5175,18	1614,86	183,10
17	Матвеевский	1223	51	0,12	27154,79	0,00	8012,55	1479,75	114,97
18	Новоорский	531	1468	1,11	-88359,71	-20,64	6883,78	2791,04	219,82
19	Новосергиевский	2747	998	1,52	53771,06	57,54	12916,69	2447,89	164,51
20	Октябрьский	2019	221	0,07	6046,84	0,00	7530,85	2109,25	166,12
21	Оренбургский	2965	1984	6,90	222587,21	40,10	10051,88	9987,58	414,60
22	Первомайский	1023	161	0,11	11834,97	2,66	4820,43	1600,04	191,82
23	Переволоцкий	1548	110	2,12	5089,93	0,00	7200,79	2466,00	149,14
24	Пономаревский	609	27	17,11	-4358,73	0,00	9429,51	1663,79	153,87
25	Сакмарский	1415	714	2,07	47042,61	-18,18	5460,64	2252,94	171,96
26	Саракташский	2855	554	0,39	18636,05	-17,28	7163,74	2442,46	148,52
27	Светлинский	1261	739	0,28	-31576,96	1,10	5828,43	3104,97	173,23
28	Северный	842	55	0,29	12573,25	0,00	10527,40	2041,39	164,51
29	Соль-Илецкий	2160	238	1,42	-27755,42	2,87	9624,39	749,79	87,13
30	Сорочинский	2366	611	0,23	-41927,34	0,00	3258,68	992,49	125,95
31	Ташлинский	3706	448	0,43	19211,06	5,86	8003,63	1932,97	113,73
32	Тоцкий	913	163	0,17	2703,44	-13,48	5710,41	1623,23	155,14
33	Тюльганский	1395	260	0,14	-1805,00	-5,70	6922,20	2492,35	135,65
34	Шарлыкский	1386	122	2,09	29131,25	0,00	8597,17	1848,44	140,58
35	Ясненский	565	0	3,86	-70126,16	0,00	5709,72	2688,39	108,26

Продолжение таблицы А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	Абдулино	0	1062	10,65	28860,67	3,23	20528,50	5245,52	253,70
37	Бугуруслан	0	3504	0,76	93608,09	3,43	12009,56	6175,02	254,24
38	Бузулук	0	12002	6,22	8735783,87	41,62	16533,55	8125,77	362,54
39	Гай	0	8180	0,38	1526864,98	4,32	10133,53	7199,35	316,32
40	Кувандык	0	2192	0,35	27775,53	1,38	11328,86	7323,76	192,27
41	Медногорск	0	4033	2,18	321986,13	6,97	10895,88	5295,27	248,44
42	Новотроицк	199	24413	13,08	1476312,51	18,23	13505,43	6902,37	306,62
43	Оренбург	840	52066	26,49	144294,97	8,97	57813,57	10336,03	284,29
44	Орск	0	24492	0,47	710226,74	2,28	15867,96	6455,67	339,72
45	Соль-Илецк	0	1035	0,15	29769,64	6,72	14853,78	7020,26	221,38
46	Сорочинск	0	879	0,85	40383,38	23,39	14838,68	7599,74	241,49
47	Ясный	0	4084	0,87	282356,73	34,75	9427,45	7508,34	263,32

Таблица А.3 – Наименование показателей

Обозначения	Наименование показателя
X1	Объем инвестиций в основной капитал на душу населения, рублей
X2	Объем промышленной продукции на душу населения, рублей
X3	Удельный вес убыточных предприятий и организаций, в процентах от общего числа предприятий
X4	Просроченная кредиторская задолженность предприятий, в процентах от общей задолженности
X5	Задолженность организаций по заработной плате, в процентах от общего фонда заработной платы
X6	Уровень безработицы, в процентах от населения в трудоспособном возрасте
X7	Доля населения в трудоспособном возрасте в общей численности населения, в процентах
X8	Доля лиц моложе трудоспособного возраста, в общей численности населения, в процентах
X9	Среднегодовая численность работников, занятых в сельскохозяйственном производстве, человек
X10	Среднегодовая численность работников, занятых в промышленности, человек
X11	Число зарегистрированных иностранных рабочих, в промилле от численности населения в трудоспособном возрасте
X12	Сальдированный финансовый результат (прибыль минус убыток) на одно предприятие, рублей
X13	Уровень рентабельности реализованной продукции сельского хозяйства в сельскохозяйственных организациях, в процентах
X14	Оборот розничной торговли на душу населения, рублей
X15	Объем платных услуг на душу населения, рублей
X16	Соотношение среднемесячной номинальной начисленной заработной платы работников с величиной прожиточного минимум, в процентах

Таблица А.4 – Варианты заданий

Номер варианта	Результативный признак, (обозначить Y)	Номера факторных признаков, X
1	X1	4,6,10,11,14
2	X1	5,10,11,14,15
3	X1	2,10,11,13,14
4	X1	6,7,10,12,15
5	X1	4,5,6,10,15
6	X1	3,10,11,12,15
7	X1	2,12,13,14,15
8	X1	2,9,11,14,15
9	X1	3,510,12,13
10	X1	4,5,14,15,16
11	X2	3,12,13,14,15
12	X2	4,7,11,12,13
13	X2	4,10,12,14,16
14	X2	1,9,13,15,16
15	X2	9,10,12,14,16
16	X2	9,10,13,15,16
17	X2	1,4,6,7,15
18	X3	1,4,6,8,13
19	X4	3,6,7,15,16
20	X4	2,3,6,15,16