Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Н.Н.Щипкова, С.В. Харитонова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 010100.62 Математика

Оренбург
2011

УДК 514.122.2 (075.8)
ББК 22.151.5я7
Щ 58

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук Г. М. Гузаиров

Щ 58 **Щипкова, Н.Н.**
Аналитическая геометрия. Линии второго порядка: учебное пособие / Н. Н. Щипкова, С.В. Харитонова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 171 с.
ISBN

В пособии изложены частные и общие вопросы теории линий второго порядка, приводится примерный план проведения практических занятий, а также варианты контрольной, самостоятельной работы и индивидуальные расчетные задания. Пособие предназначено для студентов направления подготовки 010100.62 Математика, а также может быть использовано для студентов других направлений подготовки математического факультета.

УДК 514.122.2 (075.8)
ББК 22.151.5я7

ISBN

Содержание

Введение

Данное пособие предназначено для студентов первых курсов математического факультета направления подготовки 010100.62 Математика, а также может быть использовано для студентов других направлений подготовки математического факультета. Оно составлено в соответствии с программой курса «Аналитическая геометрия».

Основная цель данного пособия – помочь студенту в изучении вопросов теории линий второго порядка. В пособии подробно излагаются вопросы общей теории, часть из которых может быть вынесена на самостоятельное изучение.

В начале пособия приводится краткая историческая справка по истории изучения кривых второго порядка.

В первом разделе рассматриваются свойства частных видов линий второго порядка – эллипса, гиперболы, параболы. Во втором разделе проводится их полная классификация, и излагаются вопросы общей теории кривых второго порядка.

В третьем разделе предлагаются контрольные вопросы, задания для аудиторной и домашней работы, а также некоторые дополнительные задачи более сложного уровня.

В последней части пособия предлагается по десять вариантов контрольных и самостоятельных работ для студентов направления подготовки 010100.62 Математика, а также различные типы индивидуальных расчетных заданий, которые могут быть использованы для контроля усвоения темы «Линии второго порядка» студентами других направлений подготовки математического факультета.

При подготовке пособия учтена необходимость значительного повышения роли самостоятельной работы студентов, а также индивидуальной работы преподавателя со студентами в соответствии с требованиями, предъявляемыми федеральными государственными образовательными стандартами третьего поколения.

Историческая справка

История изучения свойства эллипса, гиперболы и параболы уходит в глубокую древность. Эти кривые, первоначально называвшиеся **геометрическими местами**, впервые исследовал в связи с задачей об удвоении куба **Менехм (ок. 380 – ок. 320 гг. до н. э**.). Греки называли эти три кривые **триадой Менехма.**

Теория конических сечений, или кривых второго порядка, начало которой положил Менехм, получила развитие в трудах Аполлония Пергского (ок. 260 – ок. 170 гг. до н.э.). Именно Аполлоний установил, что все эти кривые можно получить как сечения произвольного конуса плоскостями, расположенными под разным углом к образующей, именно Аполлоний дал этим кривым названия **эллипс, гипербола и парабола** (рисунок 1).

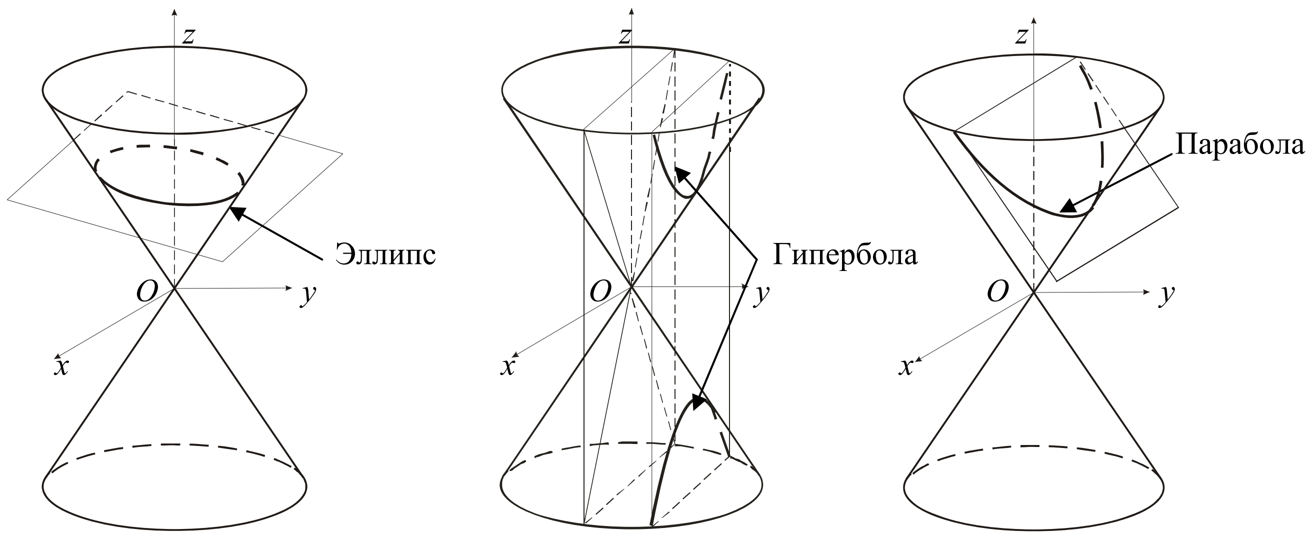


Рисунок 1 – Конические сечения

Город Перга, в котором родился Аполлоний, располагался на южном побережье Малой Азии (современная территория Турции). Там находились древнейшие святилища бога Аполлона, особенно почитавшегося в этой местности. Поэтому имя Аполлоний, т.е., «посвящённый Аполлону», было там очень популярным. Образование Аполлоний получал сначала в г.Эфесе, затем в Александрии. Наиболее значительные александрийские учёные этого времени называли себя первыми буквами греческого алфавита. Евклида, который был, по-видимому, основателем Мусейона, называли α. Эратосфена, бывшего с 235 г. до н.э. хранителем библиотеки при Мусейоне − β. Архимеда, получившего образование в Александрии и всю жизнь поддерживавшего дружеские отношения с александрийскими учеными − γ. Рано умершего талантливого геометра Конона − δ, а Аполлония − ε.

Главный труд Аполлония называется **«Конические сечения».** Он состоит из восьми книг. Первые четыре сохранились в оригинале, три следующих − в арабском переводе, восьмая книга утеряна. Содержание первой половины этого труда составляет обобщение и переработку известных ранее математических предложений, последние четыре книги, по-видимому, излагают открытия самого Аполлония.

Наряду с Архимедом Аполлоний является автором таких математических теорий и методов, которые стали вершиной развития греческой геометрии и значительно опередили своё время. Новые пути для развития геометрии открыла в XVII веке аналитическая геометрия Декарта, возникшая как приложение алгебраического анализа к геометрии и механике. Конец XVII и XVIII столетия были временем бурного развития математики. Учёные этого времени пристально изучали труды древнегреческих математиков и могли оценить их по достоинству. Именно поэтому Г.В.Лейбниц (1646-1716) сказал: «Кто овладел творениями Архимеда и Аполлония, тот меньше будет удивляться открытиям самых великих людей нашего времени».

1 Линии второго порядка

1.1 Эллипс

1.1.1 Определение и каноническое уравнение

*Определение***.** Эллипсом называется множество точек плоскости для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, принадлежащих той же плоскости, является величиной постоянной, большей расстояния между F_1 и F_2 (рисунок 2).

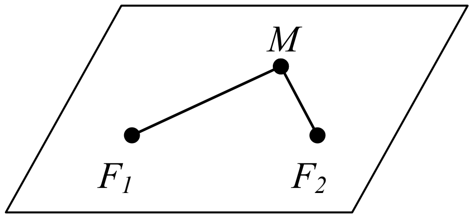


Рисунок 2

Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса. Расстояние между фокусами принято обозначать $2c$, а сумму расстояний от точек эллипса до фокусов – $2a$. Тогда согласно определению

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \tag{1.1.1}$$

$$a > c. \tag{1.1.2}$$

Выведем каноническое уравнение эллипса. Введем прямоугольную декартову систему координат следующим образом. Начало системы координат – середина отрезка F_1F_2, ось абсцисс проходит через фокусы. Тогда координаты фокусов имеют вид: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ (рисунок 3).

Если точка M имеет координаты x и y, то используя формулы расстояния между точками в прямоугольной декартовой системе координат, запишем

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \ |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

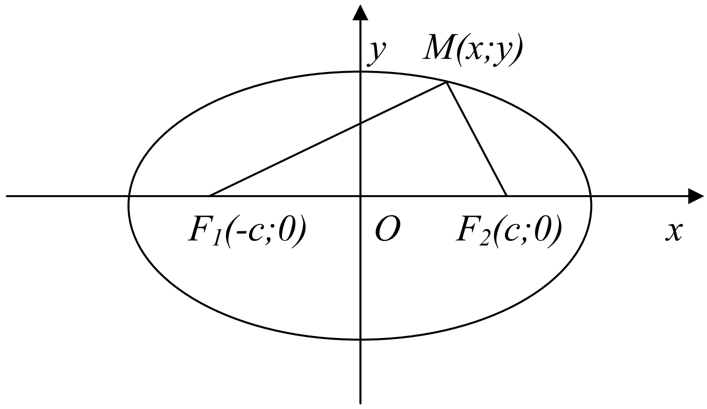


Рисунок 3

Тогда тождество (1.1.1) запишется в виде уравнения:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\,. \tag{1.1.3}$$

Преобразуем данное уравнение, перенесем один из радикалов в правую часть равенства:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\,.$$

Отсюда

$$x^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4\left(a^2-cx\right).$$

Сократим на 4 и еще раз возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Выше отмечалось, что $a > c$, следовательно $a^2 - c^2 > 0$, поэтому можно обозначить

$$a^2 - c^2 = b^2. \qquad (1.1.4)$$

Тогда полученное уравнение приобретет вид:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Разделив обе части равенства на $a^2 b^2$, окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.1.5)$$

Итак, мы показали, что если точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1.1.5). Из этого, строго говоря, еще не следует, что уравнение (1.1.5) есть уравнение эллипса, поскольку в процессе преобразований дважды использовалось возведение в квадрат. Следовательно, уравнения (1.1.3) и (1.1.5) не являются равносильными. Покажем теперь, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (1.1.5), то они удовлетворяют и уравнению (1.1.3). Тем самым будет доказано что уравнение (1.1.5) действительно является уравнением эллипса.

Возьмем произвольную точку $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.1.5). Обозначим

$$r_1 = |MF_1|, \;\; r_2 = |MF_2|:$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \;\; r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Числа r_1 и r_2 называются фокальными радиусами точки M. Из уравнения (1.1.5) следует, что

$$y^2 = b^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

Поэтому

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 \frac{a^2 - x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + b^2a^2 - b^2x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\left(a^2 - b^2\right)x^2 + 2a^2cx + a^2\left(c^2 + b^2\right)}.$$

Из формулы (1.1.4) имеем

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ и } c^2 + b^2 = a^2.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4} = \frac{1}{a}\sqrt{(cx+a)^2}.$$

Таким образом,

$$r_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|. \tag{1.1.6}$$

Аналогично можно показать, что

$$r_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right|. \tag{1.1.7}$$

Докажем, что $r_1 + r_2 = 2a$.

Так как координаты точки M удовлетворяют уравнению (1.1.5), то $x^2 \le a^2$, то есть

$$|x| \le a. \tag{1.1.8}$$

Рассмотрим различные по знаку значения x.

1) Пусть $x \ge 0$. Тогда $a + \frac{c}{a}x > 0$, отсюда для соотношения (1.1.6):

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x.$$

Теперь раскроем модуль в соотношении (1.1.7). Из неравенства (1.1.8) следует $x \le a$. Так как $c > 0$, то $cx \le ac$. Но a и c удовлетворяют неравенству (1.1.2). Поэтому $ac < a^2$, следовательно, $cx < a^2$ или $a - \frac{c}{a}x > 0$. Отсюда $r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Таким образом,

$$r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a.$$

2) Пусть $x < 0$. Тогда $a - \frac{c}{a}x > 0$, т.е. $r_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Из неравенства (1.1.8) следует, что $-cx < ca$. Поэтому, используя неравенство (1.1.2), получаем: $-cx < a^2$, или $a + \frac{c}{a}x > 0$.

Окончательно, $r_1 = a + \frac{c}{a}x$ и $r_1 + r_2 = 2a$.

Итак, показано, что точка в том и только в том случае принадлежит эллипсу, когда ее координаты удовлетворяют уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение называют каноническим уравнением эллипса. Заметим, что данное уравнение является уравнением второго порядка, то есть эллипс представляет собой кривую второго порядка.

Исследуем свойства эллипса, вытекающие из его канонического уравнения.

1.1.2 О наличии симметрии эллипса

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть линия задана общим уравнением $F(x; y) = 0$, тогда

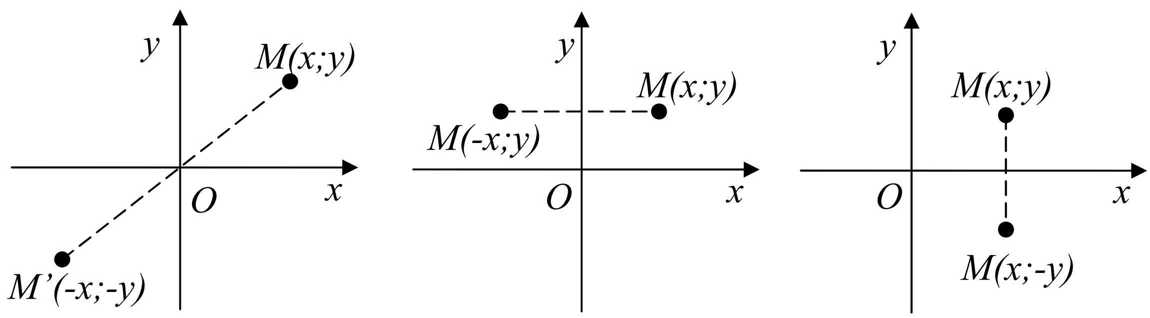
1) если F четна по x, то ось OY является осью симметрии линии;
2) если F нечетна по y, то ось OX является осью симметрии линии;

3) если F четна по паре $(x;y)$ то начало координат является центром лини.

Доказательство.

1) Пусть $F(-x;y)=F(x;y)$. Тогда если $M(x;y)\in\gamma$, то есть удовлетворяет уравнению $F(x;y)=0$, то и точка с координатами $M'(-x;y)$ также принадлежит кривой. Очевидно, что точки M и M' симметричны относительно оси OY (рисунок 4 а). Следовательно, кривая γ симметрична относительно оси OY.

Пункты 2) и 3) доказываются аналогично (рисунок 4 б, в).



а б в

Рисунок 4

Рассмотрим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Очевидно, эллипс имеет две оси симметрии, которые в канонической системе координат совпадают с осями OX и OY, а также центр симметрии, совпадающий с началом канонической системы координат. Доказательство следует из леммы. Функция

$$F(x;y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

очевидно, четна по x, y и по паре $(x;y)$.

1.1.3 Расположение эллипса

Определение. Основным прямоугольником эллипса называется прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям канонической системы координат с центром, находящимся в начале координат.

Из канонического уравнения имеем

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow |x| \le a.$$

Аналогично $|y| \le b$.

Таким образом, доказано свойство: эллипс находится внутри своего основного прямоугольника (рисунок 5).

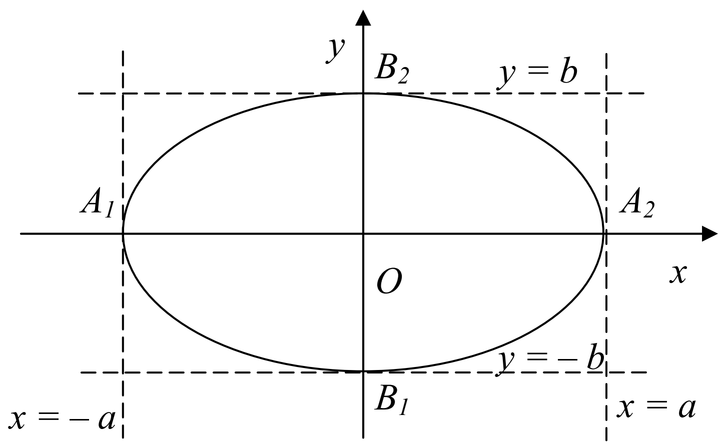


Рисунок 5

1.1.4 Оси и вершины эллипса

Определение. Вершины эллипса – это точки пересечения эллипса с его осями симметрии.

Определение. Ось эллипса – это отрезок, соединяющий две вершины, лежащие на оси симметрии.

Эллипс имеет четыре вершины и две оси (большую и малую).

Найдем координаты вершин эллипса. Поскольку оси симметрии эллипса совпадают с координатными осями канонической системы, найдем точки пересечения с осями координат.

Пересечения с осью OX :

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm a, \\ y = 0 \end{cases}.$$

Значит, вершинами являются точки с координатами $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$. Отрезок A_1A_2 называется большой осью эллипса, его длина $|A_1A_2| = 2a$.

Отрезки с длинами $|OA_1| = |OA_2| = a$, называются малыми полуосями эллипса.

Аналогично, при пересечении с осью OY, получаем вершины $B_1(-b;0)$ и $B_2(b;0)$. Отрезок B_1B_2 – малая ось эллипса, его длина равна $2b$. Отрезки с длинами $|OB_1| = |OB_2| = b$ называются малыми полуосями эллипса.

1.1.5 Форма эллипса

Предложение. Часть эллипса, находящаяся в первой координатной четверти, представляет собой график монотонно убывающей дифференцируемой функции.

Доказательство. В первой четверти $x \ge 0,\ y \ge 0$. Из канонического уравнения имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Очевидно, при возрастании x от 0 до a, y изменяется от b до 0. Аналогично можно рассмотреть поведение кривой в каждой из координатных четвертей.

1.1.6 Эксцентриситет эллипса

Эксцентриситет эллипса есть число, равное отношению расстояния между его фокусами к длине его большой оси.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Напомним, что фокальные радиусы $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$ могут быть записаны в виде $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$, тогда с учетом определения эллипса, можно записать $r_1 = a + \varepsilon x$ и $r_2 = a - \varepsilon x$.

Заметим, что эксцентриситет эллипса выражается через отношение полуосей и обратно, отношение полуосей выражается через эксцентриситет. Поскольку для эллипса $b^2 = a^2 - c^2$, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

то есть эксцентриситет эллипса – функция от $\frac{b}{a}$.

В случае, когда $\varepsilon = 0$, большая и малая оси эллипса одинаковы по длине и эллипс вырождается в окружность.

Очевидно, чем меньше эксцентриситет эллипса, тем больше по форме эллипс приближается к окружности, чем больше эксцентриситет, тем эллипс сильнее сжат к оси абсцисс (рисунок 6).

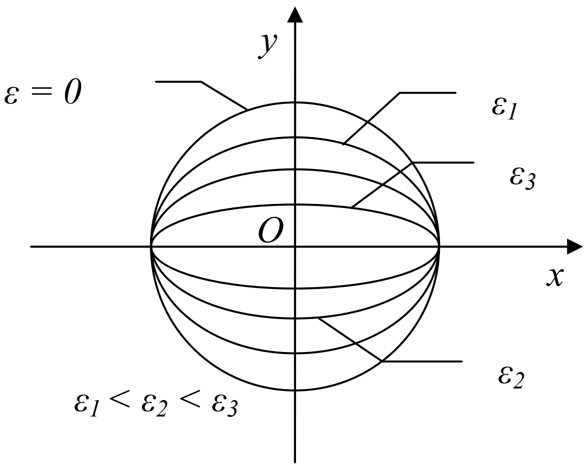


Рисунок 6

1.1.7 Частные случаи

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

при $a<b$ определяет эллипс, фокусы которого расположены на оси OY (рисунок 7). Это уравнение сводится к каноническому при помощи переименования координатных осей.

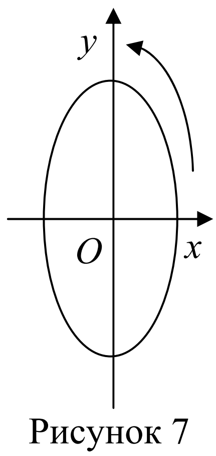


Рисунок 7

1.1.8 Параметрическое уравнение

Параметрически эллипс можно задать следующим образом:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \text{ при } 0 \le t < 2\pi .$$

Действительно, подставляя эти выражения в каноническое уравнение, приходим к основному тригонометрическому тождеству

$$cos^2 t + sin^2 t = 1.$$

1.1.9 Способы построения

Из определения эллипса и тождества (1.1.1) следует способ построения эллипса, который часто используется на практике. Возьмем нить, длиной $2a$, закрепим ее концы в фокусах и натянем с помощью острия карандаша. Передвигая карандаш по бумаге, и натягивая при этом нить, получаем рисунок эллипса (рисунок 8).

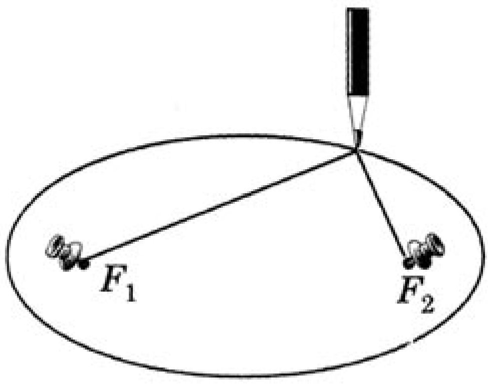


Рисунок 8

Еще один способ состоит в следующем. Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 – вершины эллипса, точка O – его центр, a и b – полуоси. Проведем оси канонической системы координат. Построим две окружности ω_1 и ω_2 с центром в точке O и радиусами a и b. Вершины A_1, A_2 лежат на окружности ω_1, а вершины B_1, B_2 – на окружности ω_2. Проведем произвольный луч l с началом в точке O. Обозначим через t ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом l (рисунок 9).

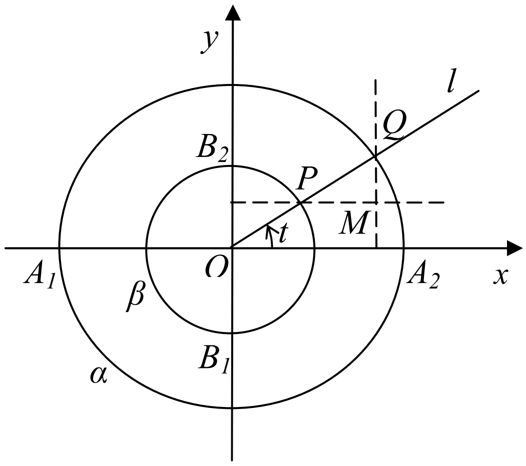


Рисунок 9

Легко видеть, что координаты точек Q и P пересечения с окружностями ω_1 и ω_2 равны: $Q(a\cos t; a\sin t)$, $P(b\cos t; b\sin t)$. Построим точку M пересечения двух прямых, одна из которых проходит через Q параллельно оси ординат, а другая через точку P параллельно оси абсцисс. Тогда координаты точки M равны $(a\cos t; b\sin t)$, то есть удовлетворяют параметрическому уравнению эллипса.

1.1.10 Примеры

1) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Решение. Запишем каноническое уравнение эллипса, для чего разделим обе части уравнения на 16.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16/9} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(4/3\right)^2} = 1.$$

А значит полуоси эллипса, $a = 2$, $b = \dfrac{4}{3}$. Найдем координаты фокусов.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{20}}{3}\approx 1{,}49.$$

Таким образом, координаты фокусов $F_1\left(-\frac{\sqrt{20}}{3};\,0\right)$ и $F_2\left(\frac{\sqrt{20}}{3};\,0\right)$.

Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{20}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{5}}{3}\approx 0{,}75.$$

Сделаем чертеж (рисунок 10).

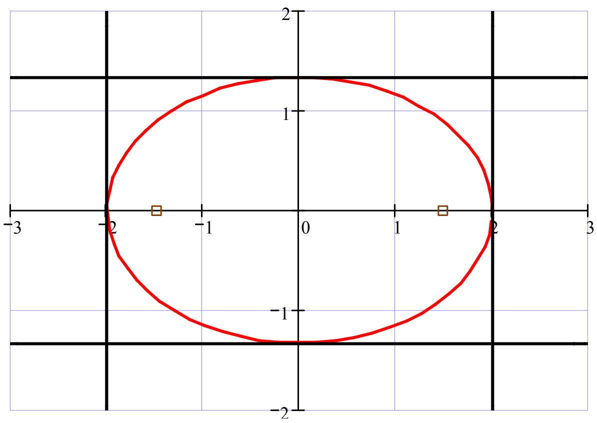


Рисунок 10

2) Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;\,\sqrt{3})$, $M_2(0;\,2)$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Запишем условия принадлежности точек M_1 и M_2 эллипсу:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1,$$

$$\frac{0}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1.$$

Из второго уравнения b^2 = 4. Подставляя это значение в первое уравнение, получим

$$\frac{4}{a^2}+\frac{3}{4}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow a^2=16.$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Полуоси этого эллипса $a=4,\ b=2$.

Сделаем чертеж (рисунок 11).

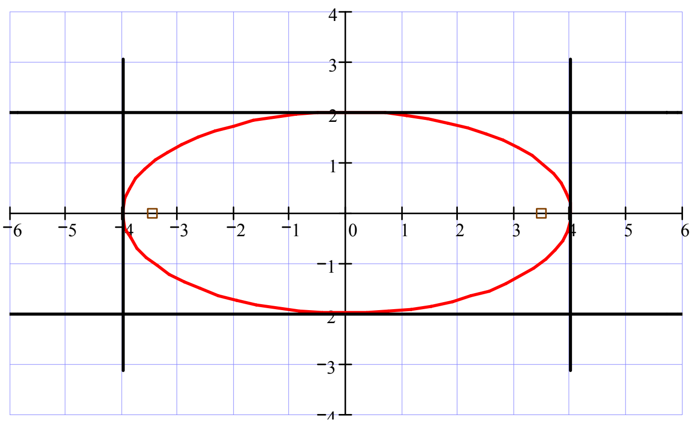


Рисунок 11

3) Найти длину стороны квадрата, вписанного в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

если его стороны параллельны осям координат.

Решение. Обозначим через m половину стороны квадрата. Тогда одна из его вершин имеет координаты $M(m;m)$. Точка M лежит на эллипсе, поэтому ее координаты удовлетворяют каноническому уравнению эллипса. То есть

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=1 \ .$$

Отсюда легко получаем, что

$$m^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow m=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \, .$$

Длина искомой стороны равна

$$2m=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \, .$$

1.2 Гипербола

1.2.1 Определение и каноническое уравнение

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, принадлежащих той же плоскости, является величиной постоянной, меньшей расстояния между F_1 и F_2 (рисунок 12).

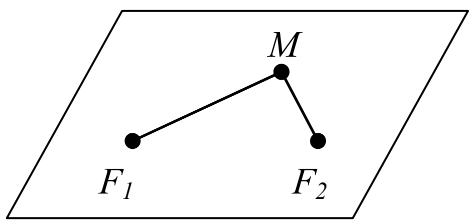


Рисунок 12

Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы. Полагаем, что $F_1 \neq F_2$ и $|F_1F_2|=2c$, а

$$|F_1M - F_2M| = 2a \, . \tag{1.2.1}$$

Из определения, очевидно, следует, что

$$a < c \tag{1.2.2}$$

Выведем уравнение гиперболы. Прямоугольную декартову систему координат введем аналогично случаю эллипса. Точка $M(x; y)$ лежит на гиперболе тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a. \tag{1.2.3}$$

Упростим уравнение. Для этого раскроем модуль:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2,$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2,$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Сократим на 4 и еще раз возведем в квадрат:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

В силу неравенства (1.2.2) имеем: $c^2 - a^2 > 0$, поэтому существует такое число b, такое что

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{1.2.4}$$

Тождество принимает вид:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части равенства на a^2b^2, окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.2.5}$$

Таким образом, координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (1.2.5). Покажем обратное.

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.2.4). Обозначим $r_1 = |MF_1|,\ \ r_2 = |MF_2|$:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ \ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Числа r_1 и r_2 называются фокальными радиусами точки M. Покажем, что

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Из уравнения (1.2.5) следует, что

$$|x| \geq a, \tag{1.2.6}$$

$$|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{1.2.7}$$

Так как

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

то, заменив в этом выражении y по формулам (1.2.7), получим:

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + b^2x^2 - b^2a^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)x^2 - 2a^2cx + a^2\left(c^2 - b^2\right)}.$$

Из формулы (1.2.4) следует, что

$$a^2+b^2=c^2 \text{ и } c^2-b^2=a^2.$$

Поэтому

$$r_2=\frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2-2a^2cx+a^4}=\frac{1}{a}\sqrt{(cx-a)^2}.$$

Таким образом,

$$r_2=\left|\frac{c}{a}x-a\right|. \tag{1.2.8}$$

Аналогично можно показать, что

$$r_2=\left|\frac{c}{a}x-a\right|. \tag{1.2.9}$$

Раскроем модули в полученных формулах. Рассмотрим различные случаи.

1. Пусть $x\geq 0$. Тогда $\frac{c}{a}x+a>0$. Поэтому $r_1=\frac{c}{a}x+a$. Из неравенства (1.2.6) следует, что $x\geq a$. Так как $c>a$, то перемножая эти неравенства, получим: $cx\geq a^2$. Отсюда следует, что $\frac{c}{a}x-a\geq 0$. Таким образом,

$$r_2=\frac{c}{a}x-a \text{ и } |r_2-r_1|=2a.$$

2. Пусть $x<0$. Тогда $\frac{c}{a}x-a<0$ и $r_2=\frac{c}{a}x-a$. Из неравенства (1.2.6) следует, что $-x\geq a$, перемножая его с неравенством $c>a$, имеем: $-cx>a^2$, или $\frac{c}{a}x+a<0$. Таким образом,

$$r_1=-\frac{c}{a}x-a \text{ и } |r_1-r_2|=2a.$$

Рассмотрели все случаи. Утверждение доказано. Подведем итог, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

называется каноническим уравнением гиперболы.

Исследуем свойства гиперболы, вытекающие из ее канонического уравнения.

1.2.2 Симметрия гиперболы

Аналогично случаю эллипса, в силу леммы из 1.1.2, получим: гипербола имеет две оси симметрии, которые в канонической системе координат совпадают с осями OX и OY, а также центр симметрии, совпадающий с началом канонической системы координат.

1.2.3 Расположение гиперболы

Определение. Основным прямоугольником гиперболы называется прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям канонической системы координат с центром, совпадающим с началом координат.

Внутри основного прямоугольника точек гиперболы нет, т.к. из канонического уравнения с очевидностью следует, что $|x| \geq a$, а для основного прямоугольника $|x| \leq a$.

Определение. Вершины гиперболы – это точки пресечения гиперболы с ее собственными осями координат.

Пересечение гиперболы с осью OX:

$$\begin{cases} y=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm a, \\ y=0. \end{cases}$$

Следовательно, вершинами являются точки с координатами $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$. Отрезок A_1A_2 называется действительной осью гиперболы его длина $|A_1A_2| = 2a$. Соответственно $|OA_1| = |OA_2| = a$, называются действительными полуосями гиперболы.

Пересечение гиперболы с осью OY:

$$\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Действительных корней нет, вершины $B_1(-b;0)$ и $B_2(b;0)$ гиперболе не принадлежат. Отрезок B_1B_2 называется мнимой осью гиперболы, его длина равна $2b$, соответственно, отрезки с длинами $|OB_1| = |OB_2| = b$ – мнимые полуоси гиперболы (рисунок 13).

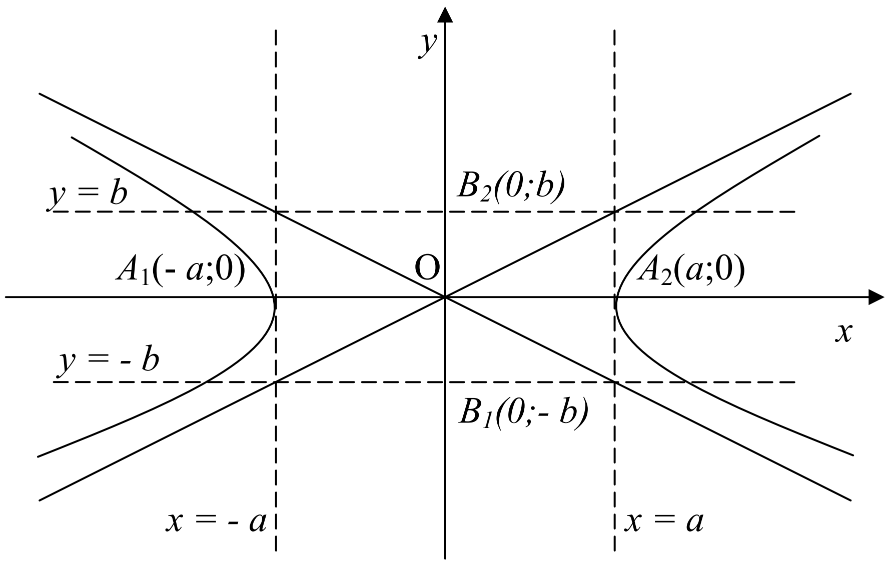


Рисунок 13

1.2.4 Пересечение гиперболы с прямыми, проходящими через начало координат

Уравнение прямой, проходящей через начало координат $y = kx$. Выясним взаимное расположение этой прямой и гиперболы.

$$\begin{cases} y = kx; \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = kx; \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{k^2 x^2}{b^2} = 1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = kx; \\ x^2\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{k^2}{b^2}\right) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = kx; \\ x^2\left(b^2 - a^2 k^2\right) = a^2 b^2. \end{cases}$$

Заметим, что корни второго из уравнений системы являются абсциссами точек пересечения. Очевидно, что система имеет решение, если выполняется условие:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{k^2}{b^2} \Rightarrow k^2 < \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow |k| < \frac{b}{a}.$$

1) Если $|k| < \dfrac{b}{a}$, то есть для случая $b^2 - a^2 k^2 > 0$, уравнение имеет два корня, значит, прямая пересекается с гиперболой в двух точках:

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}; \frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right) \text{ и } M_2\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}; -\frac{abk}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}\right).$$

2) Если $b^2 - a^2k^2 < 0$, то уравнение корней не имеет, прямая и гипербола не пересекаются.

3) Если $b^2 - a^2k^2 = 0$, уравнение корней не имеет, точек пересечения нет. Заметим, что в этом случае

$$k^2 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow |k| = \frac{b}{a}.$$

Прямых, удовлетворяющих данному условию две. Их угловые коэффициенты $k_1 = \frac{b}{a}$ и $k_2 = -\frac{b}{a}$. Рассмотрим эти прямые подробнее.

1.2.5 Асимптоты гиперболы

Определение. Асимптоты гиперболы – прямые, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы по мере удаления от начала координат.

Теорема. Диагонали основного прямоугольника гиперболы являются ее асимптотами.

Доказательство. Рассмотрим часть гиперболы, расположенную в первой координатной четверти: $x \geq 0, y \geq 0$ (рисунок 14).

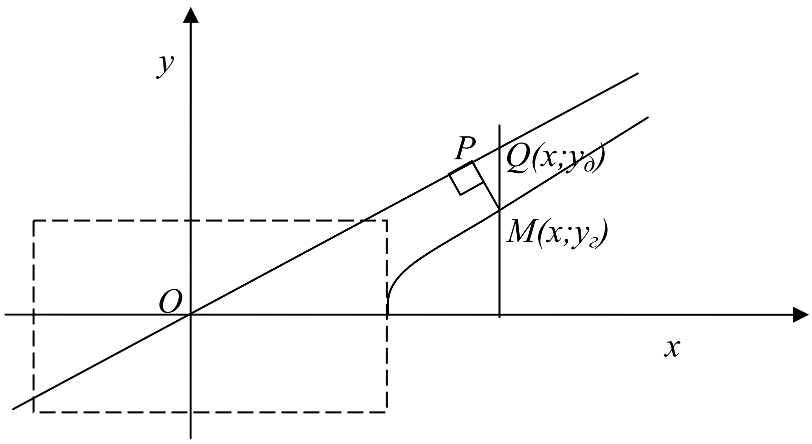


Рисунок 14

Из конического уравнения гиперболы следует

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Область определения: $x \in [a; +\infty)$. Уравнение диагонали основного прямоугольника:

$$y_д = \frac{b}{a}x,$$

уравнение гиперболы:

$$y_г = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

При любом $x \in [a;+\infty)$ ордината точки диагонали будет больше чем ордината точки гиперболы, т.е. гипербола находится под диагональю. Оценим расстояние от точки M, лежащей на гиперболе до диагонали, то есть докажем, что $|MP| \to 0$, если $M \to +\infty$.

Достаточно показать, что $|MQ| \to 0$ при $M \to +\infty$.

$$|MQ| = \lim_{x\to+\infty}(y_д - y_г) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = 0.$$

Для остальных четвертей расположения гиперболы, доказательство аналогично.

1.2.6 Эксцентриситет гиперболы

Определение. Под эксцентриситетом гиперболы, понимается число ε, равное

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (1.2.10)$$

Из неравенства (1.2.2) следует, что для гиперболы $\varepsilon > 1$. Выясним как меняется форма гиперболы, если ее эксцентриситет пробегает значения от 1 до $+\infty$. Пусть $\varepsilon \to 1$, тога из формулы (1.2.10) получим

$$a = \frac{c}{\varepsilon}.$$

Поэтому $a \to c$. В этом случае гипербола «сжимается», ее ветви приближаются к двум лучам оси абсцисс, начала которых лежат в ее фокусах. При $\varepsilon \to +\infty$, $a \to 0$. В этом случае ветви гиперболы «распрямляются» к серединному перпендикуляру отрезка F_1F_2, т. е. к оси ординат (Рисунок 15).

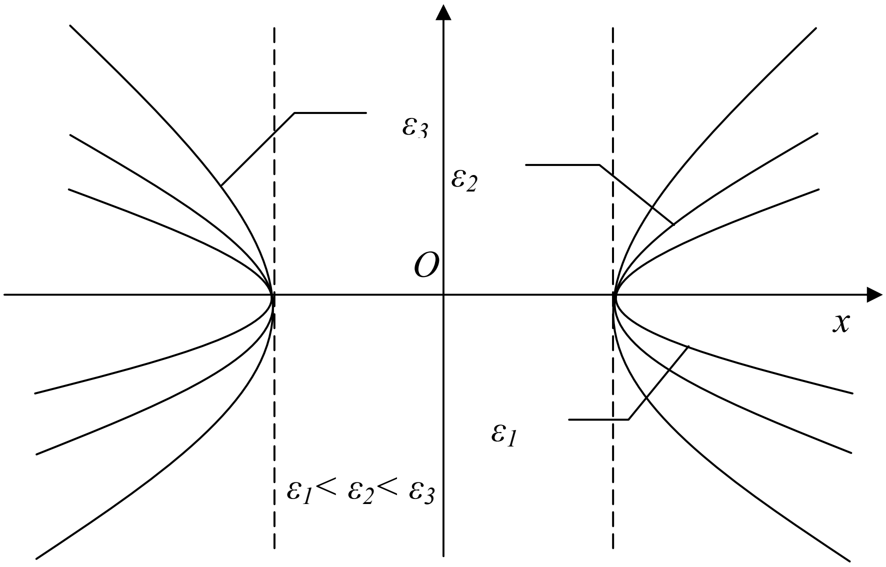


Рисунок 15

1.2.7 Частные случаи

Определение. Гиперболой, сопряженной с гиперболой, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, является гипербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (рисунок 16).

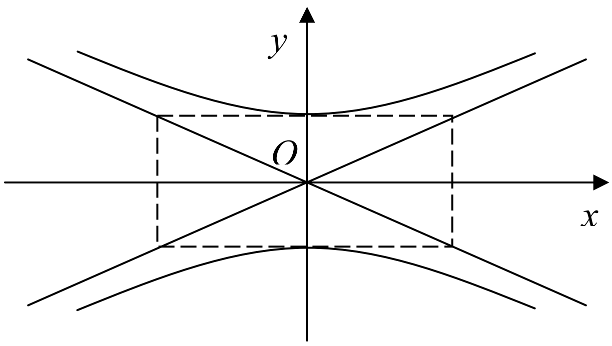


Рисунок 16

Определение. Гипербола, полуоси которой равны, т.е. $a = b$, называется равносторонней, или равнобочной (рисунок 17).

Для такой гиперболы $\varepsilon = \sqrt{2}$. Причем гипербола, координатными осями которой являются ее асимптоты, является графиком обратной пропорциональности.

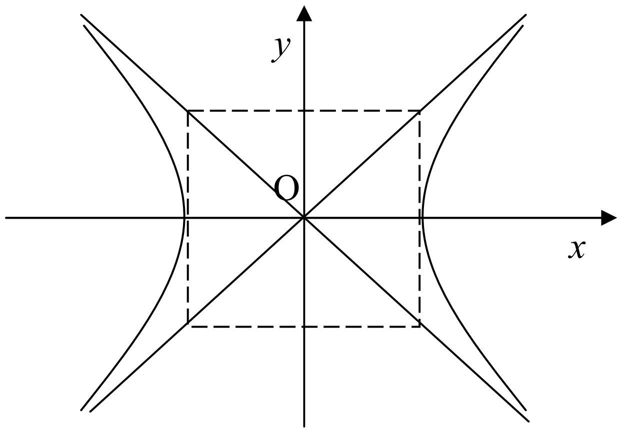


Рисунок 17

1.2.8 Построение гиперболы циркулем и линейкой

Пусть F_1 и F_2 – фокусы гиперболы, A_1 и A_2 – точки пересечения гиперболы с осью абсцисс. Построим окружность ω_1 с центром в точке F_2 произвольного радиуса r. Затем увеличим раствор циркуля на длину отрезка $A_1 A_2$ и построим окружность ω_2 с центром в точке F_1 с радиусом $r+|A_1A_2|$. Очевидно, что точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 лежат на гиперболе (рисунок 18). Меняя радиус r, можно построить любое число точек гиперболы.

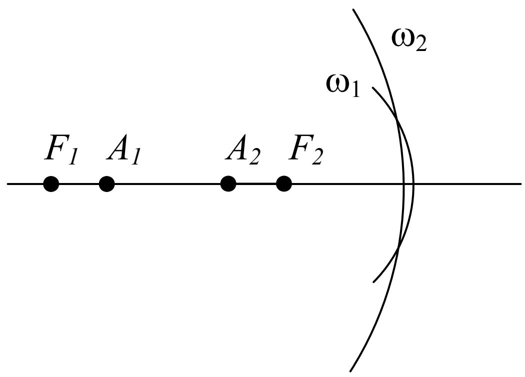


Рисунок 18

1.2.9 Примеры

1) Для гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 9y^2 = 144$, найти длины полуосей, фокусы уравнения асимптот.

Решение. Запишем каноническое уравнение гиперболы, для чего разделим обе части уравнения на 144. Получим

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Следовательно, $a = 3$, $b = 4$ – полуоси гиперболы.

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

Тогда координаты фокусов имеют вид $F_1(-5,\ 0)$, $F_2(5,\ 0)$, уравнения асимптот имеют вид

$$y=\pm\frac{4}{3}x.$$

Сделаем чертеж (рисунок 19).

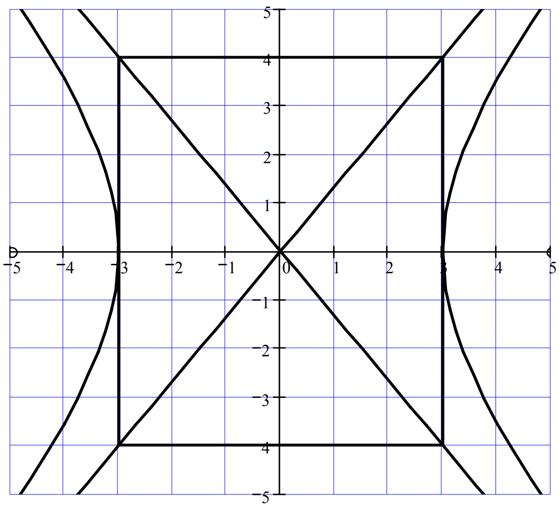


Рисунок 19

2) Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точку $M(\sqrt{3},\sqrt{2})$ и ее эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Точка $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ лежит на гиперболе, поэтому ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т. е.

$$\frac{3}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1. \tag{1.2.11}$$

Эксцентриситет гиперболы равен

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{2}.$$

Отсюда

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=2\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{a^2}=2\Rightarrow 1+\frac{b^2}{a^2}=2\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=1\Rightarrow b^2=a^2.$$

Подставляя в уравнение (1.2.11), получим

$$\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^2}=1\Rightarrow \frac{1}{a^2}=1\Rightarrow a^2=1.$$

Тогда $b^2=1$. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=1.$$

Сделаем чертеж (рисунок 20).

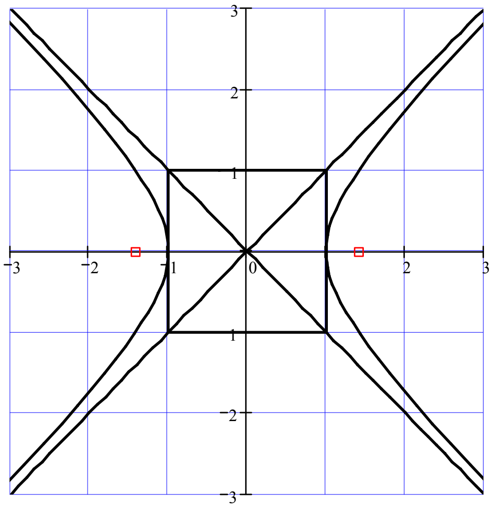


Рисунок 20

3) Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 16, а угол между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $tg\varphi = \frac{3}{4}$.

Решение. По условию $2a = 16$. Угловой коэффициент асимптоты, это и есть угол между осью абсцисс и асимптотой, поэтому

$$k = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

Отсюда, $a = 8$, $b = 6$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Сделаем чертеж (рисунок 21).

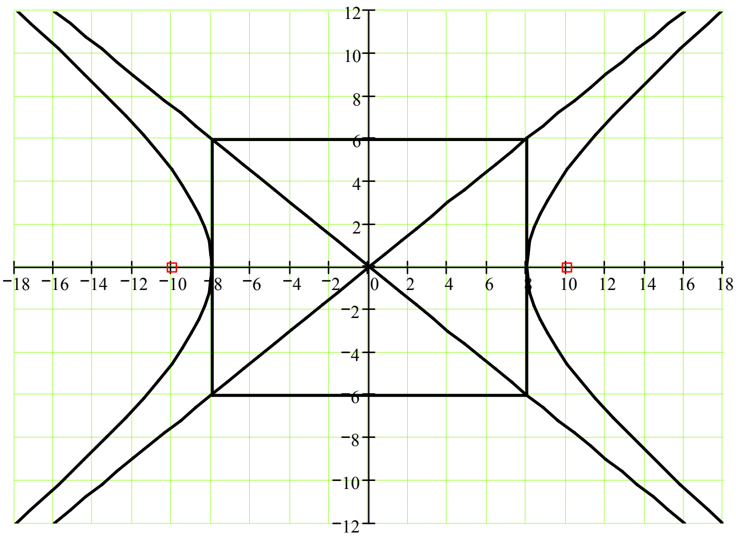


Рисунок 21

1.3 Парабола

1.3.1 Определение и каноническое уравнение

Определение. Параболой называется множество точек плоскости равноудаленных от фиксированной точки F и фиксированной прямой d, не проходящей через эту точку.

Точка F называется фокусом, прямая d – директрисой параболы. Пусть точка D – точка пересечения перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису (рисунок 22). Длину данного отрезка обозначим как $|FD| = p$. Очевидно $p > 0$, назовем p фокальным параметром параболы.

Выведем каноническое уравнение параболы. Для этого введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка FD, и ось абсцисс была направлена по лучу OF. В данной системе координат $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$.

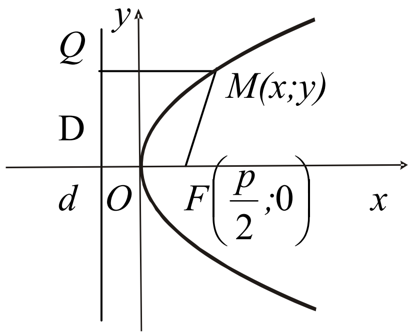


Рисунок 22

Пусть точка M принадлежит параболе, тогда по определению

$$|MF| = |MN|, \tag{1.3.1}$$

причем, $N\left(-\frac{p}{2}; y\right)$. В координатной форме

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат, имеем:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

$$y^2 = 2px. \tag{1.3.2}$$

Докажем в обратную сторону, проверим, что любая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (1.3.2) принадлежит параболе, т.е удовлетворяет условию (1.3.1).

Пусть $M(x;y)$ удовлетворяет уравнению $y=2px$, покажем, что $|MF|=|MN|$.

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-xp+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=$$
$$=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=|MF|.$$

Следовательно, доказано, что уравнение $y^2=2px$ является каноническим уравнением параболы.

Рассмотрим свойства параболы, вытекающие из ее канонического уравнения.

1.3.2 Симметрия параболы

Уравнение параболы симметрично по переменной y, следовательно, согласно лемме, парабола симметрична относительно оси абсцисс.

1.3.3 Расположение параболы

Из канонического уравнения параболы очевидно $x\geq 0$. Таким образом, парабола полностью расположена в левой полуплоскости относительно оси ординат.

Рассмотрим пересечение параболы с прямой, проходящей через начало координат.

$$\begin{cases} y=kx, \\ y^2=2px, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=kx, \\ k^2x^2-2px=0. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно второе уравнение системы:

$$k^2x^2-2px=0 \Rightarrow x\left(k^2x-2p\right)=0.$$

Очевидно, уравнение имеет два корня: $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{2p}{k^2}$.

Таким образом, прямая, проходящая через начало координат, пересекает параболу кроме вершины еще в одной точке. Парабола не имеет асимптот.

1.3.4 Различные случаи расположения параболы

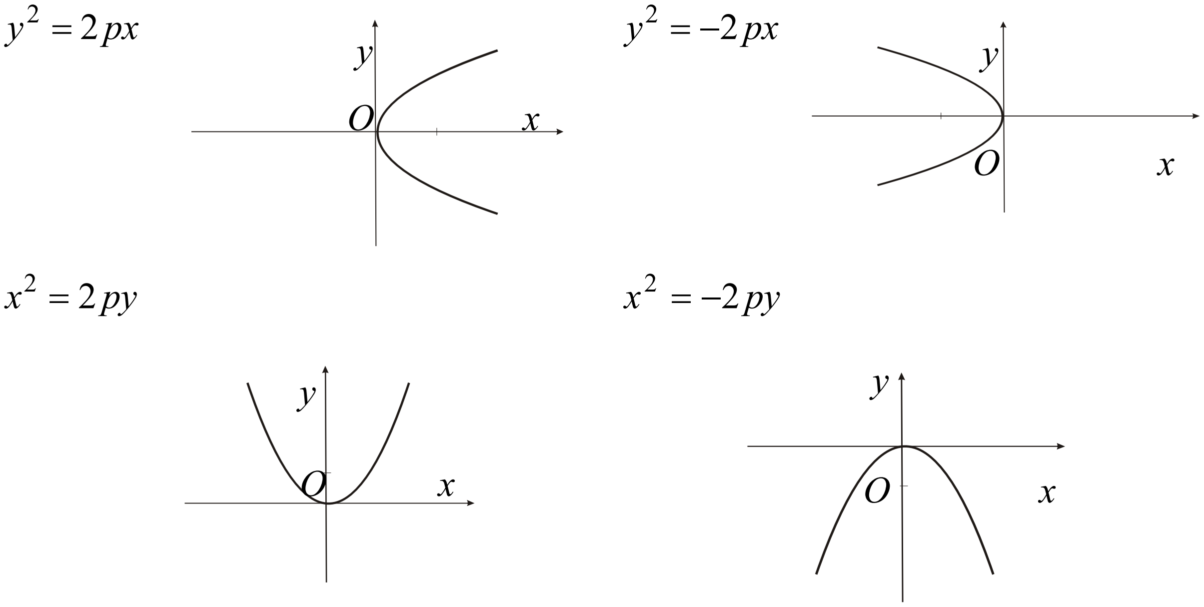


Рисунок 23

1.3.5 Примеры

1) Найти каноническое уравнение параболы, если ее фокус $F(4;\,0)$ и вершина совпадает с началом координат.

Решение. Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$. Ее фокус $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$.

Следовательно, $\dfrac{p}{2} = 4$, значит, $p = 8$. $y^2 = 16x$ – каноническое уравнение параболы (рисунок 24).

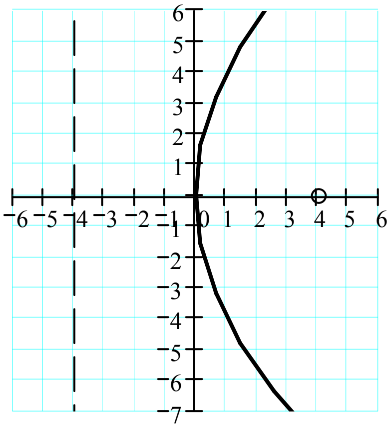


Рисунок 24

2) Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 12x$.

Решение. Для параболы с каноническим уравнением $y^2 = 2px$ уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. По условию $2p = 12 \Rightarrow \frac{p}{2} = 3$. Поэтому уравнение директрисы $x = -3$, координаты фокуса $F(3;0)$.

Сделаем чертеж (рисунок 25).

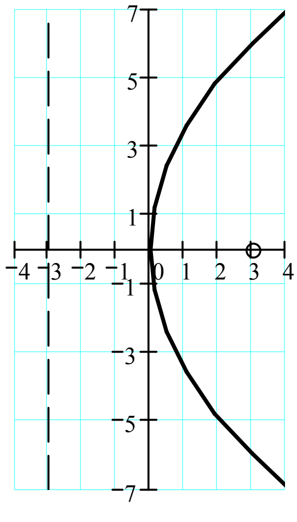


Рисунок 25

3) В параболу вписан равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его вершина, общая для боковых сторон, совпадает с вершиной параболы. Доказать, что основание треугольника перпендикулярно оси параболы. Найти стороны

указанного треугольника, вписанного в параболу, каноническое уравнение которой имеет вид $y^2 = 2px$.

Решение. Обозначим ΔOAB, где O – вершина параболы. Пусть вершины имеют координаты $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. По условию каноническое уравнение имеет вид $y^2 = 2px$. Тогда $x_1 > 0; y_1 > 0$ (рисунок 26).

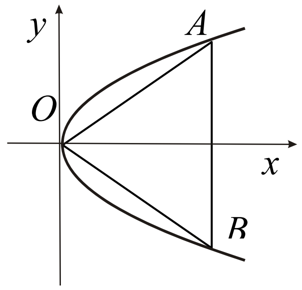


Рисунок 26

Так как треугольник равнобедренный, то $|OA| = |OB|$. В координатной форме, соответственно, имеем

$$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ |OB| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Так как точки A и B лежат на параболе, то

$$x_1^2 + 2px_1 = x_2^2 + 2px_2.$$

Отсюда

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2p) = 0.$$

В силу неравенств $x_1 > 0; y_1 > 0$, имеем $x_1 + x_2 + 2p > 0$. Поэтому $x_1 = x_2$. Точки A и B лежат на прямой, параллельной оси ординат.

Поскольку, по условию ΔOAB прямоугольный и равнобедренный, то координаты точек A и B имеют вид: $A\left(\frac{y^2}{2p}; y\right)$ и $B\left(\frac{y^2}{2p}; -y\right)$. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равно нулю, поэтому $\frac{y^4}{4p^2} - y^2 = 0$. Отсюда

$y^2 = \frac{y^4}{4p^2}$. Координаты точек равны $A(2p;2p)$ и $B(2p;-2p)$. Отсюда $|OA| = |OB| = 2\sqrt{2}p, \quad |AB| = 4p$.

Мы рассмотрели три кривые второго порядка. Несмотря на их различную форму и различные виды канонических уравнений, данные кривые имеют много общих свойств. Рассмотрим некоторые из них.

1.4 Общее директориальное свойство эллипса, гиперболы и параболы

Пусть на плоскости даны прямая d и не принадлежащая ей точка F. Решим следующую задачу: найти на плоскости геометрическое место точек M таких, что

$$\frac{\rho(M;F)}{\rho(M;d)} = \varepsilon > 0. \tag{1.4.1}$$

Рассмотрим отдельно три случая: $\varepsilon = 1, \varepsilon < 1, \varepsilon > 1$.

1) $\varepsilon = 1$. Обозначим расстояние $\rho(M;d) = p$. Введем такую прямоугольную систему координат, чтобы ось OX была перпендикулярной прямой d и проходила через точку F, а ось OY делила пополам перпендикуляр, опущенный из точки F на прямую d.

В этой системе координат точка F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а прямая d описывается уравнением $x = -\frac{p}{2}$. Пусть точка M имеет координаты $M(x;y)$, тогда

$$1 = \frac{\rho(M;F)}{\rho(M;d)} = \frac{\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}}{\left|x + \frac{p}{2}\right|}.$$

Поскольку $F \notin d$, то ни числитель, ни знаменатель в нуль не обращаются. Поэтому данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2.$$

Приведем подобные слагаемые, получаем

$$y^2=2px.$$

Очевидно, что получили уравнение параболы.

Итак, парабола является геометрическим местом точек M, равноудаленных от точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ и прямой *d*, заданной уравнением $x=-\frac{p}{2}$ (рисунок 27). Напомним, что точка F называется фокусом параболы, а прямая *d* ее директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой называется фокальным параметром, или просто параметром параболы.

2) $\varepsilon<1$. Существует такое число $a>0$, что

$$\rho(M;d)=\frac{a}{\varepsilon}-a\varepsilon.$$

Поэтому можно ввести прямоугольную систему координат, в которой F имеет координаты $(a\varepsilon;0)$, а прямая *d* задается уравнением $x=\frac{a}{\varepsilon}$.

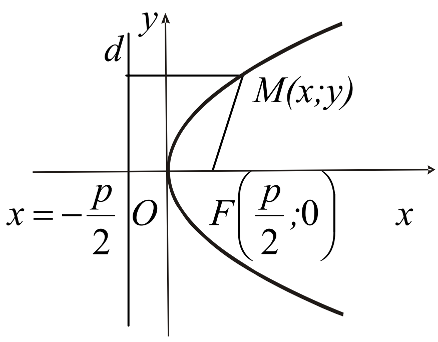


Рисунок 27

Пусть произвольная точка $M(x;y)$, тогда тождество (1.4.1) принимает вид:

$$\varepsilon = \frac{\rho(M;F)}{\rho(M;d)} = \frac{\sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2}}{\left|x - \dfrac{a}{\varepsilon}\right|}.$$

Возведем обе части данного уравнения в квадрат, получаем

$$(x-a\varepsilon)^2 + y^2 = (\varepsilon x - a)^2, \text{ или } (1-\varepsilon)^2 x^2 + y^2 = a^2(1-\varepsilon)^2. \qquad (1.4.2)$$

Разделим равенство на $a^2(1-\varepsilon)^2 = b^2$, получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, множество точек плоскости, для которых $\dfrac{\rho(M;F)}{\rho(M;d)} = \varepsilon,$ причем $0 < \varepsilon < 1$, является эллипсом (рисунок 28).

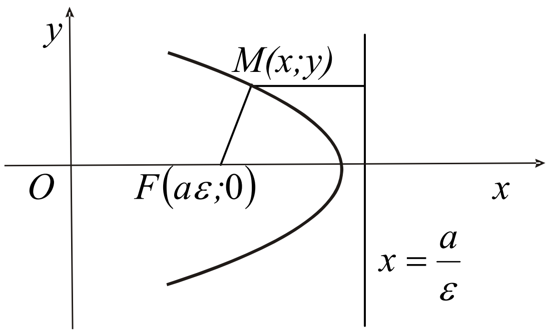


Рисунок 28

Точка $F(a\varepsilon;0)$ – это фокус эллипса, прямая $d: x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ – его директриса.

Ранее мы отмечали, что окружность получается из эллипса, предельным переходом при $b \to a$. При этом, фокус переходит в центр окружности, а директриса уходит в бесконечность.

3) $\varepsilon > 1$. Система координат вводится аналогично случаю эллипса. Проводя выкладки предыдущего случая, получаем то же уравнение

$$(1-\varepsilon)^2 x^2 + y^2 = a^2 (1-\varepsilon)^2 .$$

Но теперь $1-\varepsilon^2 < 0$. Положив

$$b^2 = (\varepsilon^2 - 1) a^2$$

и разделив последнее равенство на правую часть, получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Точка $F(a\varepsilon;0)$ – это фокус гиперболы, прямая $d : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ – ее директриса (рисунок 29).

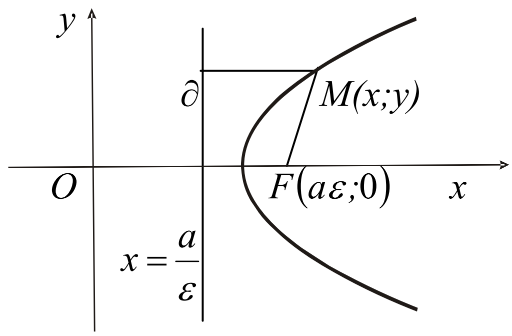


Рисунок 29

Обобщая полученные результаты, сформулируем следующие положения.

Определение. Директрисами эллипса (гиперболы) называются две прямые параллельные малой (мнимой) оси и отстоящие от нее на расстояние $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Выше, мы фактически доказали теорему.

Теорема. Эллипс (гипербола) есть множество точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния от точки кривой до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Эта теорема выясняет геометрический смысл эксцентриситета эллипса, или гиперболы.

Определение. Эксцентриситет эллипса (гиперболы) есть постоянное число, которому равно отношение расстояний от каждой точки линии до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы.

Заметим, что из определения параболы следует, что ее точки обладают аналогичным свойством, здесь $\varepsilon = 1$.

Примеры

1) Найти каноническое уравнение эллипса, если расстояние между его фокусами равно 12, а уравнения директрис имеют вид: $x = \pm\frac{50}{3}$.

Решение. Так как расстояние между фокусами равно $2c$, то из условия следует, что $c = 6$. Уравнения директрис имеют вид: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, но $\varepsilon = \frac{c}{a}$, поэтому $\frac{a^2}{c} = \frac{50}{3}$. Отсюда $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$. Поскольку для эллипса $b^2 = a^2 - c^2$, то $b^2 = 100 - 36 = 64$. Искомое уравнение

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

2) Доказать, что директрисы гиперболы проходят через основания перпендикуляров, опущенных из соответствующих фокусов на асимптоты.

Решение. Пусть гипербола задана своим каноническим уравнением. Доказательство проведем для фокуса $F_2(c;0)$ и асимптоты $l: y = \frac{b}{a}x$. Обозначим через n перпендикуляр, опущенный из F_2 на l, а через N – точку пересечения l и n (рисунок 30).

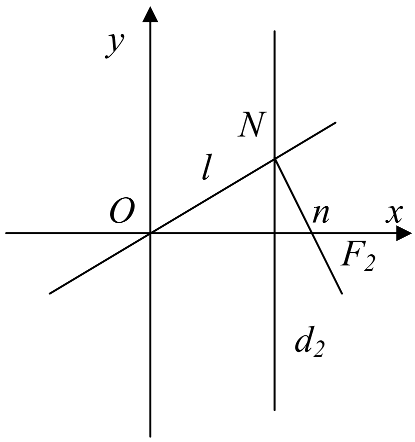


Рисунок 30

Покажем, что N лежим на директрисе $d_2 : x = \dfrac{a}{\varepsilon}$. Уравнение асимптоты l можно представить в следующем виде: $bx - ay = 0$. Ее направляющий вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\vec{p}(a;b)$. Вектор $\vec{p}$ – нормальный вектор для перпендикуляра прямой n. Этот перпендикуляр проходит через $F_2(c;0)$. Составим его уравнение, имеем:

$$a(x-c)+by=0 \text{ или } ax+by-ac=0.$$

Найдем абсциссу точки пересечения прямых l и n. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} bx - ay = 0, \\ ax + de - ac = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на b, а второе на a и складывая, получаем

$$\left(a^2+b^2\right)x - a^2c = 0.$$

Поскольку для гиперболы $a^2+b^2=c^2$ и $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, то

$$x = \frac{a^2c}{a^2+b^2} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Точка N лежит на директрисе d_2. Аналогично доказывается утверждение для фокуса F_2 и асимптоты $y = -\frac{b}{a}x$, а также фокуса F_1 и асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$.

1.5 Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат

Парабола. Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, заданной в прямоугольной декартовой системе координат каноническим уравнением $y^2 = 2px$, полярную ось направим в положительную сторону (рисунок 31).

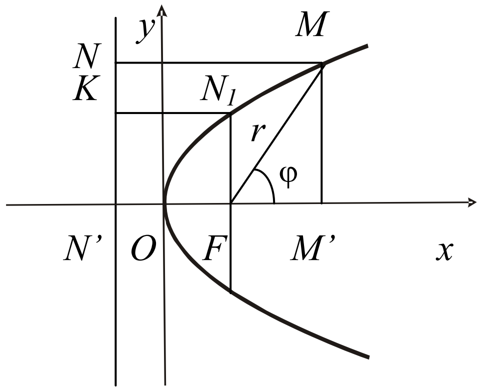


Рисунок 31

В этой системе координат имеем:

$$r = |FM| = |MN| = |N'F| + |FM_1| = p + r\cos\varphi,$$

следовательно, в выбранной нами полярной системе координат, парабола задается уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Эллипс. Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, заданного каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

полярную ось направим в положительном направлении оси OX (рисунок 32).

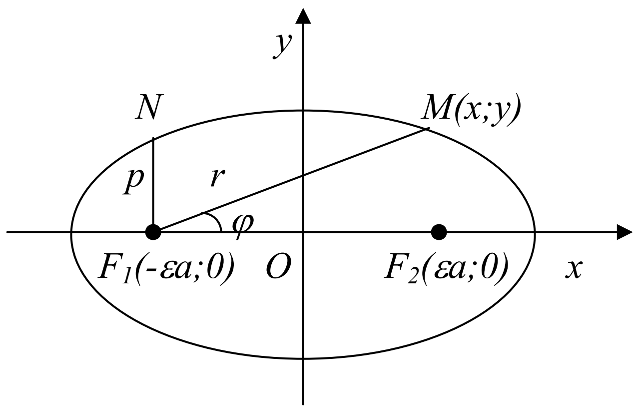


Рисунок 32

В этой системе координат имеем

$$x+\varepsilon a=r\cos\varphi,\text{ или } x=r\cos\varphi-\varepsilon a.$$

В подразделе 1 данного раздела было показано, что $r_1=a+\varepsilon x$. Поэтому

$$r=a+\varepsilon(r\cos\varphi-\varepsilon a)=a\left(1-\varepsilon^2\right)+e\varepsilon\cos\varphi,$$

откуда получаем

$$r=\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Гипербола. Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, заданной каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

полярную ось – в положительном направлении оси OX (рисунок 33).

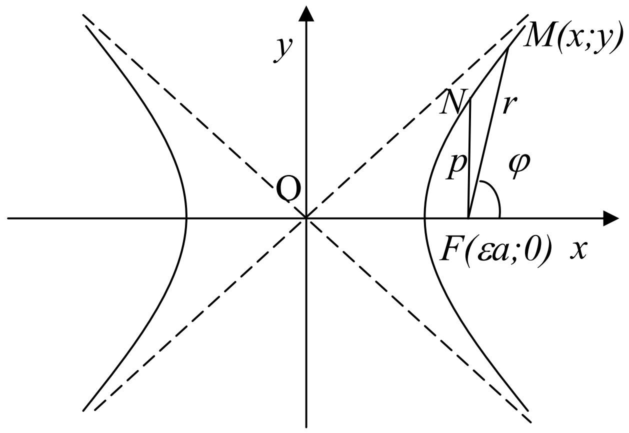


Рисунок 33

В этой системе координат имеем $x - \varepsilon a = r\,cos\,\varphi$, или $x = r\cos\varphi + \varepsilon a$, можно показать, что для правой ветви гиперболы $r = -a + \varepsilon x$. Поэтому

$$r = -a + \varepsilon(r\cos\varphi + \varepsilon a) = a(\varepsilon^2 - 1)\cos\varphi,$$

откуда

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Пусть кривая γ – эллипс, гипербола или парабола. В своих канонических системах фокусы этих кривых лежат на оси OX, которая называется фокальной осью соответствующей кривой. Проведем через какой-нибудь фокус F прямую, перпендикулярную к ее фокальной оси. Эта прямая пересечет кривую γ в двух точках, расстояние между которыми обозначим через $2p$. Число p называется фокальным параметром кривой γ.

Можно показать, что для параболы, ее фокальный параметр совпадает с ее параметром. Для эллипса, или гиперболы фокальный параметр равен ординате точки N. Из уравнения (1.4.2) имеем

$$y^2 = (1-\varepsilon^2)(a^2 - \varepsilon^2).$$

Подставив в это уравнение $x = \pm \varepsilon a$ и $y = p$, находим

$$p^2 = \left(1 - \varepsilon^2\right)^2 a^2, \text{ или } p = \left|1 - \varepsilon^2\right| a.$$

Теперь, учитывая, что для эллипса и гиперболы выполнено соотношение

$$b = a\sqrt{\left|1 - \varepsilon^2\right|},$$

получаем

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Таким образом, учитывая, что для параболы $\varepsilon = 1$, уравнение эллипса, гиперболы (ее правой ветви) и параболы, в соответствующим образом выбранной полярной системе координат, можно записать

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Левую ветвь гиперболы также можно описать этим уравнением, поместив полюс в левый фокус гиперболы и направив полярную ось в отрицательную сторону оси OX.

Примеры

1) Дано уравнение линии в полярной системе координат.

$$r = \frac{3}{1 - \cos\varphi}.$$

Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат и назвать линию.

Решение. Запишем уравнение линии в декартовой системе координат. Воспользуемся формулами перехода от полярной к прямоугольной декартовой системе координат:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - x};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 3;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 + x.$$

Возведем в квадрат

$$x^2 + y^2 = x^2 + 6x + 9;$$

$$y^2 = 6x + 9;$$

$$y^2 = 6(x + 1{,}5).$$

Последнее есть уравнение параболы с вершиной в точке (–1,5; 0) и параметром $p = 3$.

Построим линию (рисунок 34).

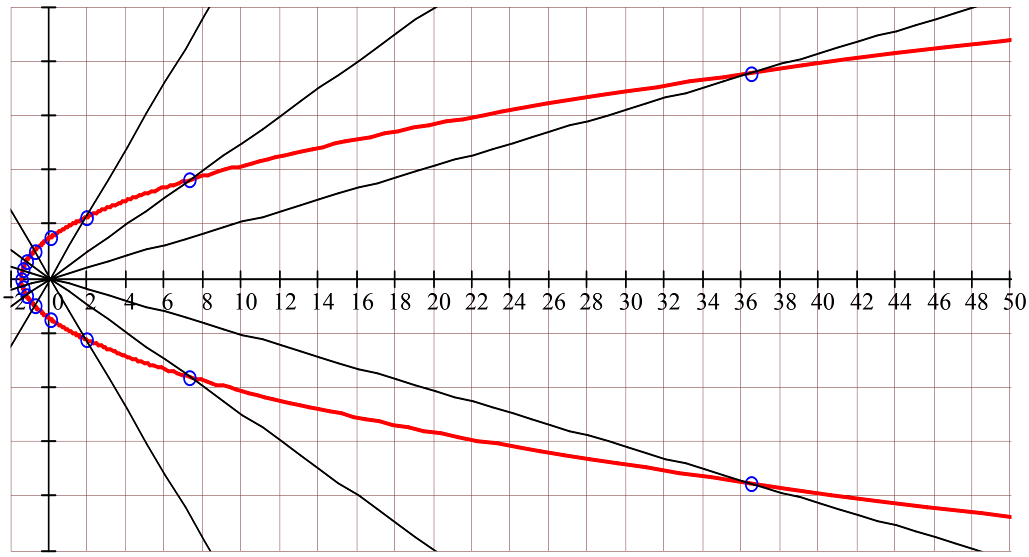


Рисунок 34

2) Найти полярные уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Решение. Найдем эксцентриситет ε и фокальный параметр p эллипса. Так как для эллипса $c=\sqrt{a^2-b^2}$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то для данного эллипса $c=\sqrt{25-9}=4$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$. Координаты фокусов имеют вид: $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$. Фокальный параметр совпадает по модулю с ординатой точки эллипса, абсцисса которой равна c:

$$\frac{16}{25}+\frac{p^2}{9}=1.$$

Отсюда $p=\frac{9}{5}$. Таким образом, полярное уравнение эллипса имеет вид:

$$\rho=\frac{9/5}{1-4/5\cos\varphi},\text{ или }\rho=\frac{9}{5-4\cos\varphi}.$$

3) Найти каноническое уравнение кривой второго порядка, если дано ее полярное уравнение:

$$\rho = \frac{3/4}{1 - \sqrt{13}/4 \cos\varphi}.$$

Решение. Исходя из данного уравнения, фокальный параметр $p = \frac{3}{4}$, эксцентриситет имеет вид: $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Так как $\frac{\sqrt{13}}{4} < 1$, то кривая является эллипсом. Если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение искомого эллипса, то координаты фокусов имеют вид: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Если первая координата точки эллипса, равна c, то вторая совпадает с p. Поэтому

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1, \text{ или } p = \frac{b^2}{a}.$$

Для данного эллипса $\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $p = \frac{3}{4}$, так как $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, запишем систему:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}, \\ \frac{b^2}{a} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{13}{16}, \text{ или } \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{16}.$$

Тогда из второго уравнения этой системы следует, что $a = 4$. Поэтому $b^2 = 3$. Окончательно, эллипс имеет уравнение

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

1.6 Оптические свойства кривых второго порядка

Отметим без доказательства оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.

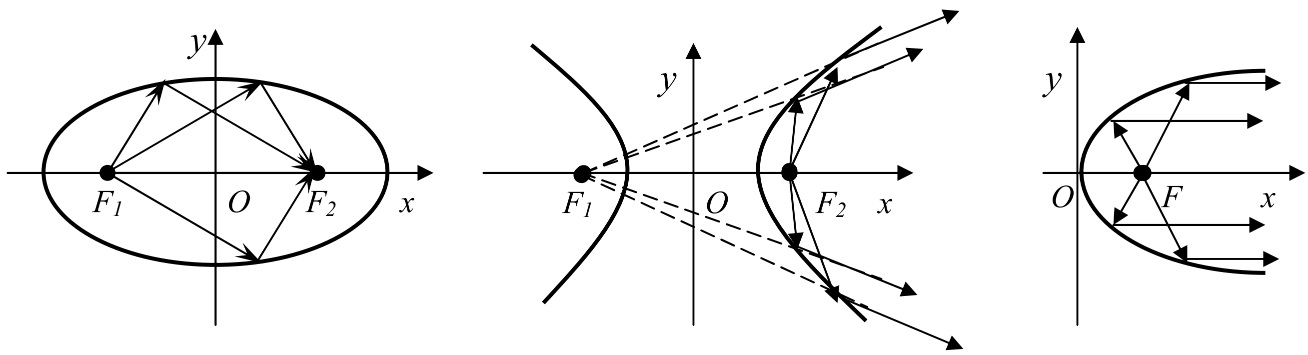


Рисунок 35

- Если источник света находится в одном из фокусов эллипса, то луч света, отразившись от эллипса, пройдет через другой фокус эллипса.
- Если источник света находится в одном из фокусов гиперболы, то луч света, преломившись от гиперболы, пройдет через другой фокус эллипса.
- Если источник света находится в фокусе параболы, то луч света, отразившись от параболы, пойдет параллельно фокальной оси параболы и наоборот, луч, идущий параллельно фокальной оси, после отражения, попадет в фокус параболы.

2 Общая теория линий второго порядка

2.1Определение линии второго порядка

Определение. Линией второго порядка на плоскости называется множество точек плоскости, координаты которых в некотором ортонормированном репере $R(O,\vec{i},\vec{j})$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \ . \qquad (2.1.1)$$

Коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ – действительные числа, причем коэффициенты старших членов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю одновременно.

Принятая система обозначений очень удобна: индекс «1» указывает на наличие в данном члене переменной «x», индекс «2» – переменной «y», причем, если соответствующий индекс встречается два раза, то переменная находится во второй степени, если в индексе присутствует ноль, то переменная только одна и в первой степени.

Условимся считать, что $a_{12} = a_{21}$.

Представителями линий второго порядка являются эллипс, гипербола, парабола, окружность.

Можно доказать, что если в некотором аффинном репере линия задана уравнением второй степени (2.1.1), то и в любом другом аффинном репере линия также задана уравнением второй степени. Очевидно, что этот факт справедлив также и для ортонормированных реперов.

2.2 Упрощение линии второго порядка путем поворота системы координат

Пусть линия второго порядка γ задана в ортонормированном репере $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ уравнением (2.1.1), причем $a_{12} \neq 0$. Поставим перед собой задачу: путем поворота репера $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ перейти к такому новому реперу $R'\left(O,\vec{i}',\vec{j}'\right)$, в котором коэффициент при произведении переменных в уравнении линии равнялся бы нулю, т.е. $a_{12} = 0$. Напишем уравнение линии γ в репере R', полученном из репера R путем вращения на угол α без изменения ориентации репера. В этом случае формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{cases} x = x' cos\,\alpha - y' sin\,\alpha, \\ y = x' sin\,\alpha + y' cos\,\alpha. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Подставим значения x, y из (2.2.1) в (2.1.1), получим:

$$a_{11}(x' cos\,\alpha - y' sin\,\alpha)^2 + 2a_{12}(x' cos\,\alpha - y' sin\,\alpha)(x' sin\,\alpha + y' cos\,\alpha) +$$
$$+ a_{22}(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 + 2a_{10}(x' \sin\alpha - y' \cos\alpha) +$$
$$+ 2a_{20}(x' sin\,\alpha + y' sin\,\alpha) + a_{00} = 0.$$
$$x'^2(a_{11} cos^2\alpha + 2a_{12} sin\,\alpha\, cos\,\alpha + a_{22} sin^2\alpha) +$$
$$+ 2x'y'(-a_{11} sin\,\alpha\, cos\,\alpha + a_{12} cos^2\alpha - a_{12} sin^2\alpha + a_{22} sin\,\alpha\, cos\,\alpha) +$$
$$+ y'^2(a_{11} sin^2\alpha - 2a_{12} sin\,\alpha\, cos\,\alpha + a_{22} cos^2\alpha) +$$
$$+2x'(a_{10} cos\,\alpha + a_{20} sin\,\alpha) + 2y'(-a_{10} sin\,\alpha + a_{20} cos\,\alpha) + a_{00} = 0.$$

Введем обозначения:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$
$$a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha,$$
$$a'_{10} = a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha,$$
$$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha,$$
$$a'_{00} = a_{00}. \tag{2.2.2}$$

Тогда уравнение линии γ в репере R' запишется так:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0. \qquad (2.2.3)$$

Подберем угол α так, чтобы $a'_{12} = 0$.

$$a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Сгруппируем первое и третье слагаемое, второе и четвертое и учтем, что $a_{12} = a_{21}$.

$$-\sin\alpha(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha) + \cos\alpha(a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha) = 0$$

или

$$\sin\alpha(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha) = \cos\alpha(a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha),$$

следовательно,

$$\frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \lambda.$$

Каждое из отношений обозначим буквой λ и получим

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0, \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0. \end{cases} \qquad (2.2.4')$$

Получили однородную систему линейных уравнений $(2.2.4')$ относительно $\sin\alpha, \cos\alpha$. Такая система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}{}^2 = 0.$$

то есть

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=0. \tag{2.2.5}$$

1) Используя равенства (2.2.3), найдем $a'_{11}+a'_{22}$ и $a'_{11}a'_{22}-a'_{12}{}^2$.

$$a'_{11}+a'_{22}=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\sin^2\alpha+a_{11}\sin^2\alpha-$$
$$-2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha=a_{11}+a_{22}.$$

Аналогично убеждаемся, что

$$a'_{11}a'_{22}-a'_{12}{}^2=a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2.$$

Итак, при переходе от репера R к реперу R' коэффициенты a_{11},a_{22},a_{12} меняются, но численное значение выражений $a_{11}+a_{22}$ и $a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2$ остается неизменным.

Введем обозначения:

$a_{11}+a_{22}=J_1$ – первый инвариант линии второго порядка;

$a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=J_2$ – второй инвариант линии второго порядка.

Отсюда коэффициенты уравнения (2.2.5) не зависят от выбора репера. Они характеризуют линию второго порядка. Уравнение (2.2.5) называется характеристическим уравнением линии второго порядка. Его можно записать так:

$$\lambda^2-J_1\lambda+J_2=0. \tag{2.2.5$'$}$$

2) Найдем дискриминант уравнения (2.2.5).

$$D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12})^2=a_{11}{}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}{}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}{}^2=$$
$$=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}{}^2>0,$$

так как по условию $a_{12} \neq 0$. Следовательно, уравнение (2.2.5) имеет действительные различные корни λ_1 и λ_2.

$D = 0 \Leftrightarrow a_{11} = a_{22}$ и $a_{12} = 0$. В этом случае линия есть окружность. Итак, для всех линий второго порядка, кроме окружности, характеристическое уравнение имеет действительные различные корни λ_1 и λ_2.

3) При найденных значениях λ_1 и λ_2 система $(2.2.4')$ совместна.

Берем первое уравнение этой системы

$$(a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0,$$

подставляем по очереди значения $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, находим

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \left| \begin{aligned} tg\alpha_1 &= \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \\ tg\alpha_2 &= \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}. \end{aligned} \right.$$

Найдем $tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2$. Имеем:

$$tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = \frac{(\lambda_1 - a_{11})(\lambda_2 - a_{11})}{a_{12}^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2}{a_{12}^2},$$

λ_1 и λ_2 – корни уравнения (2.2.5). По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} \text{ и } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Таким образом,

$$tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + a_{12}^2}{a_{12}^2} = -1.$$

Пусть $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$, тогда $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow$ два направления, соответствующие различным корням характеристического уравнения, они взаимно-перпендикулярны и определяют направления осей нового репера R' (рисунок 36), в котором линия имеет уравнение, не содержащее члена с произведением координат.

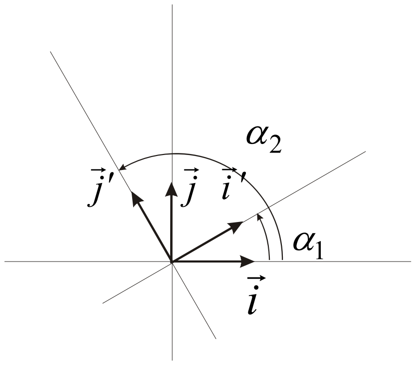


Рисунок 36

4) Выразим a'_{11} и a'_{22} через корни характеристического уравнения.

$$a'_{11} = a_{11}\,cos^2\alpha + 2a_{12}\,sin\alpha\,cos\alpha + a_{22}\,sin^2\alpha =$$
$$= (a_{11}\,cos\alpha + a_{12}\,sin\alpha)cos\alpha + (a_{21}\,cos\alpha + a_{22}\,sin\alpha)sin\alpha .$$

Из уравнения (2.2.4) имеем:

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda_1\cos\alpha \text{ и } a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda_2\sin\alpha ,$$
$$a'_{11} = \lambda_1\cos^2\alpha + \lambda_1\sin^2\alpha = \lambda_1 .$$

Далее, $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22}$, но так как $a'_{11} = \lambda_1$, то и $a'_{22} = \lambda_2$.

Итак, в репере R' уравнение линии второго порядка будет иметь вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0 , \tag{2.2.6}$$

где

$$a'_{10} = a_{10}\cos\alpha_1 + a_{20}\sin\alpha_1 ,$$
$$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha_1 + a_{20}\cos\alpha_1 ,$$
$$a'_{00} = a_{00} .$$

Пример. С помощью поворота ортонормированного репера преобразовать уравнение линии γ второго порядка так, чтобы в нем $a'_{12}=0$. Написать формулы преобразования.

$$\gamma:\ 40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0.$$

Решение. Выпишем коэффициенты:

$$a_{11}=40, a_{12}=18, a_{22}=25, a_{10}=-4, a_{20}=-7, a_{00}=1.$$

Составим характеристическое уравнение линии:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2=0,$$

$$\lambda^2-65\lambda+676=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{65\pm\sqrt{4225-2704}}{2}=\frac{65\pm 39}{2},\ \lambda_1=52,\ \lambda_2=13.$$

Вычислим тангенс угла, на который надо повернуть репер.

$$tg\alpha_1=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}=\frac{52-40}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}.$$

Тангенс $tg\alpha_2$ можно не вычислять.

Для нахождения коэффициентов a'_{10}, a'_{20} вычислим $sin\alpha_1$ и $cos\alpha_1$. Известно, что

$$\sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\ \text{ и }\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}};$$

$$\sin\alpha_1=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

$$a'_{10}=a_{10}\cos\alpha_1+a_{20}\sin\alpha_1=-4\frac{3}{\sqrt{13}}-7\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{-26}{\sqrt{13}}=-2\sqrt{13},$$

$$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha_1 + a_{20}\cos\alpha_1 = 4\frac{2}{\sqrt{13}} - 7\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{-13}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}\,,$$

$$a'_{00} = a_{00} = 1\,.$$

В репере R' уравнение линии будет иметь вид:

$$52x'^2 + 13y'^2 - 4\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y' + 1 = 0\,.$$

Формулы преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 - y'\sin\alpha_1, \\ y = x'\sin\alpha_1 + y'\cos\alpha_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{13}}y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{13}}x' + \dfrac{3}{\sqrt{13}}y'. \end{cases}$$

2.3 Упрощение уравнения линии второго порядка путем переноса начала координат

После поворота репера на угол α уравнение (2.1.1) линии второго порядка приведено к виду (2.2.6). Дальнейшее упрощение этого уравнения можно выполнить путем переноса начала координат.

Отметим, что λ_1 и λ_2 не могут одновременно равняться нулю, ибо порядок линии не зависит от выбора системы координат. Рассмотрим различные случаи.

1) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Если $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, то из уравнения (2.2.5) следует, что $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ $(J_2 \neq 0)$.

Преобразуем уравнение (2.2.6). Для этого сгруппируем члены с одинаковой переменной и выделим полные квадраты с переменной x' и с переменной y'.

$$\left(\lambda_1 x'^2 + 2a'_{10}x'\right) + \left(\lambda_2 y'^2 + 2a'_{20}y'\right) + a'_{00} = 0\,,$$

$$\lambda_1\left(x'^2+2\frac{a'_{10}}{\lambda_1}x'+\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1^2}\right)-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}+\lambda_2\left(y'^2+2\frac{a'_{20}}{\lambda_2}y'+\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2}\right)-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}+a'_{00}=0,$$

$$\lambda_1\left(x'+\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y'+\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2+\left(-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}+a'_{00}\right)=0.$$

Обозначим

$$-\frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}+a'_{00}=a''_{00}.$$

Совершим параллельный перенос репера R' в точку $O'\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1},-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$, то есть перейдем к реперу $R''\left(O',\vec{i}',\vec{j}'\right)$.

Формулы преобразования координат запишутся так:

$$x'=X+\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right),\quad y'=Y+\left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right).$$

Уравнение линии в новом репере R'' будет иметь вид:

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+a''_{00}=0. \tag{2.3.1}$$

Заметим, что уравнение (2.3.1) не содержит переменных в первой степени.

2) $\lambda_1=0,\ a'_{10}\neq 0$ (или $\lambda_2=0,\ a'_{20}\neq 0$).

Уравнение (2.2.6) в этих условиях будет иметь вид:

$$\lambda_2y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a'_{00}=0.$$

Выполним ряд преобразований.

$$\left(\lambda_2y'^2+2a'_{20}y'\right)+2a'_{10}x'+a'_{00}=0,$$

$$\lambda_2\left(y'^2+2\frac{a'_{20}}{\lambda_2}y'+\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2}\right)-\frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}+2a'_{10}x'+a'_{00}=0,$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{10}\left(x' + \frac{a'_{00} - \frac{{a'_{20}}^2}{\lambda_2}}{2a'_{10}}\right) = 0 .$$

Совершим параллельный перенос репера R' в точку $O'\left(\frac{\frac{{a'_{20}}^2}{\lambda_2} - a'_{00}}{2a'_{10}}; -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$ и перейдем к реперу $R''\left(O', \vec{i}', \vec{j}'\right)$. Формулы преобразования координат будут иметь вид:

$$x' = X + \frac{\frac{{a'_{20}}^2}{\lambda_2} - a'_{00}}{2a'_{10}}, \quad y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right).$$

Уравнение линии в репере R'' запишется так:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10}X = 0 . \tag{2.3.2}$$

Если $\lambda_2 = 0,\ a'_{20} \neq 0$, то уравнение (2.2.7) приведется к виду

$$\lambda_1 X^2 + 2a'_{20}Y = 0 . \tag{2.3.2$'$}$$

3) $\lambda_1 = 0,\ a'_{10} = 0$ (или $\lambda_2 = 0,\ a'_{20} = 0$).

В этом случае получим

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0 ,$$

$$\lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a'_{20}}{\lambda_2}y' + \frac{{a'_{20}}^2}{\lambda_2^2}\right) - \frac{{a'_{20}}^2}{\lambda_2} + a'_{00} = 0 ,$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{00} - \frac{{a'_{20}}^2}{\lambda_2} = 0 .$$

Обозначим

$$a'_{00} - \frac{a'^{\,2}_{20}}{\lambda_2} = a''_{00}.$$

Совершим параллельный перенос репера R' в точку $O'\left(0; -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$, тогда формулы преобразования будут иметь вид:

$$x' = X, \;\; y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right),$$

а уравнение линии запишется так:

$$\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0. \qquad (2.3.3)$$

Наконец, если $\lambda_2 = 0,\, a'_{20} = 0$, то, аналогично рассуждая, получим

$$\lambda_1 X^2 + a''_{00} = 0. \qquad (2.3.3’)$$

Итак, после поворота репера R и параллельного переноса репера R', получили репер R'', в котором уравнение линии второго порядка будет иметь один из следующих видов:

1) $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0$ или, сменив обозначения коэффициентов, запишем это уравнение в виде:

$$AX^2 + BY^2 + C = 0, \qquad (2.3.4)$$

где $A \cdot B \neq 0$.

2) $\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10} X = 0$ (или $\lambda_1 X^2 + 2a'_{20} Y = 0$) или в других обозначениях

$$AY^2 + 2BX = 0 \qquad (2.3.5)$$

или

$$AX^2 + 2BY = 0, \qquad (2.3.5’)$$

где $A \cdot B \neq 0$.

3) $\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0$, (или $\lambda_1 X^2 + a''_{00} = 0$) или в других обозначениях

$$AY^2 + C = 0 \qquad (2.3.6)$$

или

$$AX^2 + C = 0, \qquad (2.3.6')$$

где $A \neq 0$.

Пример. С помощью переноса начала прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения линий второго порядка. Написать формулы преобразования координат и изобразить данные линии на чертеже.

а) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$;

б) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 20 = 0$;

в) $2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0$.

Решение. Во всех данных уравнениях отсутствует член с произведением переменных. Следовательно, для приведения этих уравнений к каноническому виду достаточно совершить лишь параллельный перенос системы координат.

а) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$.

Выделим полные квадраты с переменной x и с переменной y, сгруппировав члены уравнения следующим образом (метод выделения полных квадратов):

$$\left(3x^2 + 6x\right) + \left(-2y^2 + 4y\right) + 1 = 0,$$

$$3\left(x^2 + 2x + 1\right) - 3 - 2\left(y^2 - 2y + 1\right) + 2 + 1 = 0,$$

$$3(x+1)^2 - 2(y-1)^2 = 0.$$

Обозначим:

$$\begin{cases} x + 1 = X, \\ y - 1 = Y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 1, \\ y = Y + 1 \end{cases} -$$

формулы преобразования координат при параллельном переносе репера $R(O,\vec{i},\vec{j}\,)$ в точку $O'(-1{,}1)_R$. В новом репере $R'(O',\vec{i},\vec{j}\,)$ уравнение линии имеет вид: $3X^2-2Y^2=0$, следовательно,

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{3}X-\sqrt{2}Y=0,\\ \sqrt{3}X+\sqrt{2}Y=0\end{array}\right.$$ – пара пересекающихся действительных прямых.

Изобразим данную линию на чертеже (рисунок 37).

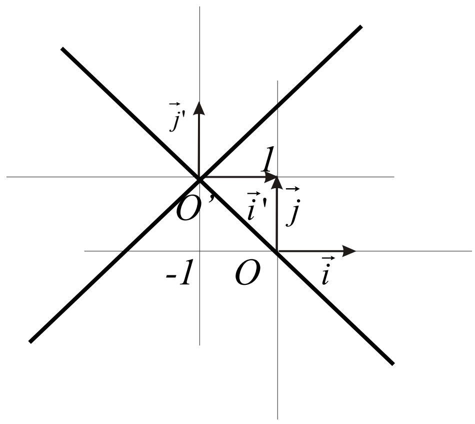


Рисунок 37

б) $4x^2+9y^2-16x-20=0$.

Выделим полный квадрат с переменной x:

$$4\left(x^2-4x+4\right)-16+9y^2-20=0;$$

$$4(x-2)^2+9y^2=36.$$

Обозначим:

$$\begin{cases}x-2=X,\\ y=Y,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=X+2,\\ y=Y.\end{cases}-$$

формулы преобразования координат при параллельном переносе репера $R(O,\vec{i},\vec{j}\,)$ в точку $O'(2{,}0)_R$. Уравнение линии в репере $R'(O',\vec{i},\vec{j}\,)$ имеет вид: $4X^2+9Y^2=36$.

Следовательно, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, эллипс с большой полуосью $a=3$ и малой полуосью $b=2$ (рисунок 38).

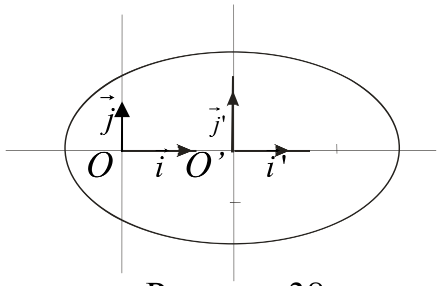


Рисунок 38

в) $2x^2+6x+3y+6=0$.

Поскольку в этом уравнении отсутствует квадрат переменной y, выделим квадрат с переменной x, имеем:

$$2\left(x^2+3x\right)+3y+6=0,$$

$$2\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}+3y+6=0,$$

$$2\left(x^2+\frac{3}{2}\right)^2+3(y+\frac{1}{2})=0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} x+\frac{3}{2}=X, \\ y+\frac{1}{2}=Y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=X-\frac{3}{2}, \\ y=Y-\frac{1}{2} \end{cases} -$$

формулы преобразования координат при переносе репера $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ в точку $O'(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})_R$.

В репере $R'\left(O',\vec{i},\vec{j}\right)$ линия имеет уравнение $2X^2+3Y=0$, то есть $X^2=-\frac{3}{2}Y$ – парабола у которой $p=\frac{3}{4}$.

Изобразим параболу (рисунок 39).

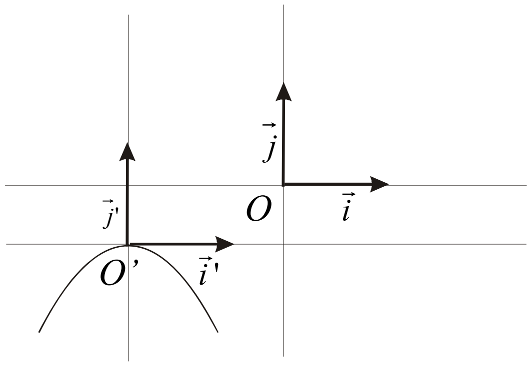


Рисунок 39

2.4 Классификация кривых второго порядка

Рассмотрим, какие линии второго порядка определяют уравнения (2.3.4),(2.3.5),(2.3.6).

А. Классификация линий, заданных уравнением

$$AX^2 + BY^2 + C = 0.$$

1) $C \neq 0,\ AX^2 + BY^2 = -C$. Разделим обе части на минус C, имеем:

$$\frac{A}{-C}X^2 + \frac{B}{-C}Y^2 = 1 \text{ или } \frac{X^2}{-\frac{C}{A}} + \frac{Y^2}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Возможны следующие случаи:

а) $-\frac{C}{A} > 0, -\frac{C}{B} > 0$. Обозначим

$$-\frac{C}{A} = a^2, -\frac{C}{B} = b^2,$$

тогда получим

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ – } \textbf{эллипс.}$$

б) $-\dfrac{C}{A}<0, \quad -\dfrac{C}{B}<0$. Обозначим

$$-\frac{C}{A}=-a^2, \quad -\frac{C}{B}=-b^2$$

и получим

$$\frac{X^2}{-a^2}+\frac{Y^2}{-b^2}=1, \text{ или } \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$$ **– мнимый эллипс.**

в) $-\dfrac{C}{A}>0, \quad -\dfrac{C}{B}<0$. Обозначим

$$-\frac{C}{A}=a^2, \quad -\frac{C}{B}=-b^2.$$

Получим

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$ **– гипербола.**

г) $-\dfrac{C}{A}<0, \quad -\dfrac{C}{B}>0$. Тогда, обозначив

$$-\frac{C}{A}=a^2, \quad -\frac{C}{B}=b^2,$$

снова получаем гиперболу

$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=1.$$

2. $C=0$. Уравнение (2.3.4) принимает вид

$$AX^2+BY^2=0. \tag{2.4.1}$$

Возможны следующие случаи:

а) $A>0$, $B>0$. Обозначим $A=a^2$, $B=b^2$ и получим

$$a^2X^2+b^2Y^2=0, \text{ или } (aX+ibY)(aX-ibY)=0,$$

следовательно,

$$\begin{vmatrix} aX + ibY = 0, \\ aX - ibY = 0 \end{vmatrix}$$ **– пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке $O'(0,0)_{R''}$.**

б) $A < 0,\ B < 0$. Этот случай сводится к предыдущему, путем умножения на минус 1.

в) $A > 0,\ B < 0$. Обозначим $A = a^2$, $B = -b^2$, получим

$$a^2 X^2 - b^2 Y^2 = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} aX + bY = 0, \\ aX - bY = 0 \end{vmatrix}$$ **– пара действительных прямых, пересекающихся в точке $O'(0,0)_{R''}$.**

г) $A < 0,\ B > 0$. Этот случай сводится к предыдущему умножением (2.4.1) на минус 1.

Итак, линия, заданная уравнением $AX^2 + BY^2 + C = 0$, может представлять собой эллипс, мнимый эллипс, гиперболу, пару действительных пересекающихся прямых или пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке.

Б. Классификация линий, заданных уравнением

$$AY^2 + 2BX = 0.$$

Так как $A \neq 0,\ B \neq 0$ по условию, то (2.3.5) можно записать так:

$$Y^2 = 2\left(-\frac{B}{A}\right)X.$$

Если

$$-\frac{B}{A} > 0,$$

то, обозначив

$$-\frac{B}{A}=p \text{ (где } p>0),$$

получим уравнение вида

$$Y^2=2pX \text{ – **парабола.**}$$

Если же

$$-\frac{B}{A}<0,$$

то, обозначив

$$-\frac{B}{A}=-p \text{ (где } p>0),$$

снова получим параболу, теперь уже вида $X^2=2pY$.

Итак, линия заданная уравнением $AY^2+2BX=0$ (или $AX^2+2BY=0$) представляет собой параболу.

В. Классификация линий, заданных уравнением

$$AY^2+C=0, \text{ где } A\neq 0.$$

1) $C\neq 0, \quad Y^2+\frac{C}{A}=0$

а) $\frac{C}{A}<0$. Обозначим $\frac{C}{A}=-a^2$ и получим $Y^2-a^2=0$, следовательно,

$$\left|\begin{array}{l} Y+a=0, \\ Y-a=0 \end{array}\right. \quad \text{– **пара параллельных прямых.**}$$

б) $\frac{C}{A}>0$. Обозначим $\frac{C}{A}=a^2$ и получим $Y^2+a^2=0$, следовательно,

$$\left|\begin{array}{l} Y+ia=0, \\ Y-ia=0 \end{array}\right. \quad \text{– **пара мнимых параллельных прямых.**}$$

2) $C = 0, \quad AY^2 = 0$, значит

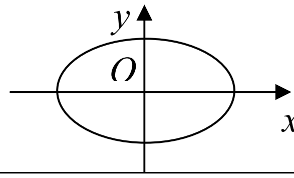
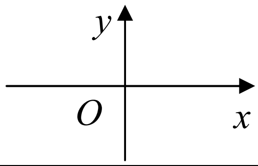
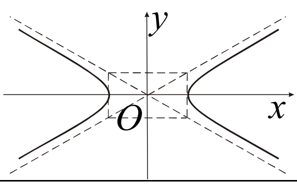
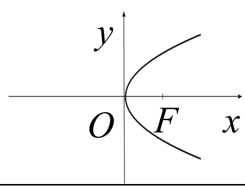
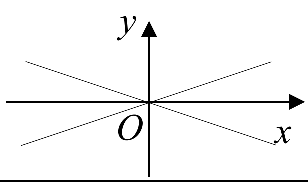
$$\begin{vmatrix} Y = 0, \\ Y = 0 \end{vmatrix}$$ **– пара совпадающих действительных прямых.**

Исследование уравнения (2.3.6’) приводит к аналогичным результатам.

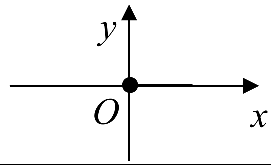
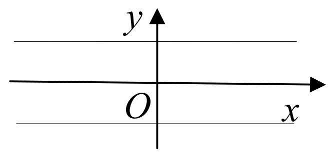
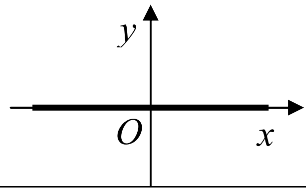
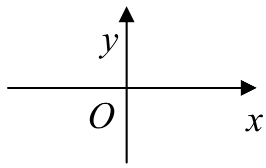
Итак, линия, заданная уравнением $AY^2 + C = 0$ (или $AX^2 + C = 0$) представляет собой параллельных прямых, пару мнимых параллельных прямых или пару совпадающих прямых.

Подводя итог вышесказанному, можно утверждать, что существует только девять типов кривых второго порядка (таблица 1).

Таблица 1 – Классификация кривых второго порядка

Название кривой второго порядка	Уравнение	Изображение линии
1 Эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	
2 Мнимый эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$	
3 Гипербола	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	
4 Парабола	$y^2 = 2px$	
5 Пара пересекающихся прямых	$a^2x^2 - b^2y^2 = 0$	

Продолжение таблицы 1 – Классификация кривых второго порядка

Название кривой второго порядка	Уравнение	Изображение линии
6 Пара мнимых пересекающихся прямых	$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$	
7 Пара различных параллельных прямых	$y^2 - a^2 = 0$	
8 Пара совпадающих параллельных прямых	$y^2 = 0$	
9 Пара мнимых параллельных прямых	$y^2 + a^2 = 0$	

2.5 Примеры приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду

С помощью поворота прямоугольной декартовой системы координат и переноса начала системы координат привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Написать формулы преобразования и изобразить данную линию на чертеже.

а) $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$;

б) $25x^2 + 40y^2 + 36xy - 34x - 116y + 89 = 0$;

в) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 88x + 66y + 121 = 0$.

Решение.

а) $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$.

Повернем репер на угол α так, чтобы коэффициент при произведении координат обратился в нуль. Для определения угла поворота составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

В данном случае

$$a_{11} = 9,\ a_{22} = 6,\ a_{12} = 2,\ a_{10} = 1,\ a_{20} = -2,\ a_{00} = -4.$$

Характеристическое уравнение принимает вид:

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0.$$

Решаем его как квадратное уравнение, имеем:

$$\lambda_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 5.$$

Возьмем $\lambda_1 = 10$ и определим тангенс угла поворота по формуле

$$tg\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

В нашем случае

$$tg\alpha_1 = \frac{10 - 9}{2} = \frac{1}{2}.$$

(причем, $tg\alpha_2$ можно не вычислять).

$$\sin\alpha_1 = \frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha_1}}$$

или, в нашем случае,

$$\sin\alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}}$$

или, в нашем случае,

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

При повороте системы координат формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} x = x'\,cos\,\alpha_1 - y'\,sin\,\alpha_1, \\ y = x'\,sin\,\alpha_1 + y'\,cos\,\alpha_1. \end{cases}$$

Соответственно в данном случае

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Уравнение линии в новом репере $R'\left(O,\vec{i'},\vec{j'}\right)$ будет иметь вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0,$$

где

$$a'_{10} = a_{10}\,cos\,\alpha_1 + a_{20}\,sin\,\alpha_1;$$

$$a'_{20} = -a_{10}\,sin\,\alpha_1 + a_{20}\,cos\,\alpha_1;$$

$$a'_{00} = a_{00}.$$

В нашем случае, соответственно,

$$a'_{10} = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - 2\frac{1}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$a'_{20} = -\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5},$$

$$a'_{00} = a_{00} = -4.$$

Подставив значения коэффициентов в последнее уравнение, получим:

$$10x'^2 + 5y'^2 - 2\sqrt{5}y' - 4 = 0.$$

Такой вид имеет уравнение в репере $R'\left(O, \vec{i}', \vec{j}'\right)$.

Далее совершим параллельный перенос системы координат $R'\left(O, \vec{i}', \vec{j}'\right)$ в такую точку O', чтобы в системе $R''\left(O', \vec{i}', \vec{j}'\right)$ в уравнении линии коэффициент при y' обратился бы в нуль. Для этого в последнем уравнении выделим полный квадрат, содержащий переменную y'.

$$10x'^2 + 5\left(y'^2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}y'\right) - 4 = 0,$$

$$10x'^2 + 5\left(y'^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}y' + \frac{1}{5}\right) - 4 - 1 = 0,$$

$$10x'^2 + 5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 5 = 0,$$

$$2x'^2 + 5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = 0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} x' = X, \\ y' - \dfrac{\sqrt{5}}{5} = Y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = X, \\ y' = Y + \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} -$$

формулы параллельного переноса системы координат в точку $O'\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right)_{R'}$, тогда уравнение линии в репере $R''\left(O',\vec{i}',\vec{j}'\right)$ примет вид

$$2X^2+Y^2=1\Rightarrow\frac{X^2}{1/2}+Y^2=1.$$

Это эллипс с полуосями $a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=1.$

Запишем формулы преобразования координат при переходе от R к R''. Для этого в формулы преобразования координат при повороте системы координат вместо x',y' подставим их значения через X,Y.

$$\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'=\frac{2}{\sqrt{5}}X-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(Y+\frac{\sqrt{5}}{5}\right),\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'=\frac{1}{\sqrt{5}}X+\frac{2}{\sqrt{5}}\left(Y+\frac{\sqrt{5}}{5}\right).\end{cases}$$

Окончательно

$$\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{5}}X-\frac{1}{\sqrt{5}}Y-\frac{1}{5},\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}X+\frac{2}{\sqrt{5}}Y+\frac{2}{5}.\end{cases}$$

Точка O' в исходном репере $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ имеет координаты $\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Построим эллипс (рисунок 40).

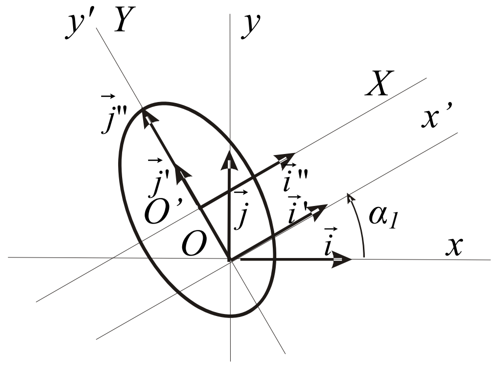


Рисунок 40

б) $25x^2+40y^2+36xy-34x-116y+89=0$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=0.$$

В данном случае

$$\lambda^2-65\lambda+676=0.$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{65\pm\sqrt{4225-2704}}{2}=\frac{65\pm39}{2}\Rightarrow\lambda_1=52,\ \lambda_2=13.$$

Определяем тангенс угла поворота репера R по формуле

$$tg\alpha_1=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}.$$

По условиям данного примера

$$tg\alpha_1=\frac{52-25}{18}=\frac{3}{2}.$$

Далее определяем синусы и косинус угла поворота α_1.

$$\sin\alpha_1=\frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}}=\frac{3}{2\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\cos_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Запишем формулы преобразования координат при повороте системы координат на угол α_1.

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha_1 - y' \sin\alpha_1, \\ y = x' \sin\alpha_1 + y' \cos\alpha_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{13}} x' - \dfrac{3}{\sqrt{13}} y', \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{13}} x' + \dfrac{2}{\sqrt{13}} y'. \end{cases}$$

Уравнение линии в репере $R'(O, \vec{i}', \vec{j}')$ будет иметь вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0,$$

где

$$a'_{10} = a_{10} \cos\alpha_1 + a_{20} \sin\alpha_1 = -17 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - 58\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{208}{\sqrt{13}},$$

$$a'_{20} = -a_{10} \sin\alpha_1 + a_{20} \cos\alpha_1 = 17\frac{3}{\sqrt{13}} - 58\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{65}{\sqrt{13}},$$

$$a'_{00} = a_{00} = 89.$$

Уравнение кривой имеет вид:

$$52x'^2 + 13y'^2 - \frac{416}{\sqrt{13}}x' - \frac{130}{\sqrt{13}}y' + 89 = 0.$$

Совершим параллельный перенос начала координат. Для этого выделим полные квадраты с x' и y'.

$$52\left(x'^2-\frac{2\cdot 4}{\sqrt{13}}x'+\frac{16}{13}\right)-64+13\left(y'^2-\frac{2\cdot 5}{\sqrt{13}}y'+\frac{25}{13}\right)-25+89=0,$$

$$52\left(x'-\frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2+13\left(y'-\frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2=0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} x'-\dfrac{4}{\sqrt{13}}=X, \\ y'-\dfrac{5}{\sqrt{13}}=Y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=X+\dfrac{4}{\sqrt{13}}, \\ y'=Y+\dfrac{5}{\sqrt{13}} \end{cases} -$$

формулы параллельного переноса репера R' в точку $O'\left(\frac{4}{\sqrt{13}};\frac{5}{\sqrt{13}}\right)_{R'}$. Получим репер $R''\left(O',\vec{i}',\vec{j}'\right)$, в котором линия имеет уравнение

$$52X^2+13Y^2=0,$$

задающее пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке O'.

Запишем формулы преобразования координат при переходе от R к R'.

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}x'-\dfrac{3}{\sqrt{13}}y'=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\left(X+\dfrac{4}{\sqrt{13}}\right)-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\left(Y+\dfrac{5}{\sqrt{13}}\right), \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{13}}x'+\dfrac{2}{\sqrt{13}}y'=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\left(X+\dfrac{4}{\sqrt{13}}\right)+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\left(Y+\dfrac{5}{\sqrt{13}}\right). \end{cases}$$

Окончательно

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}X-\dfrac{3}{\sqrt{13}}Y-\dfrac{7}{13}, \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{13}}X+\dfrac{2}{\sqrt{13}}Y+\dfrac{22}{13} \end{cases}$$

и точка O' в исходном репере $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ имеет координаты $\left(-\frac{7}{13};\frac{22}{13}\right)_R$ (рисунок 41).

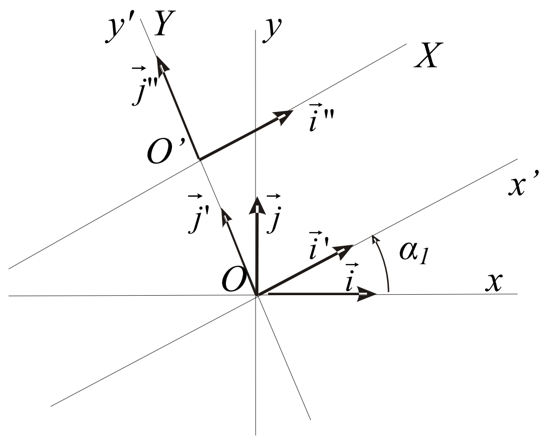


Рисунок 41

в) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 88x + 66y + 121 = 0$.

Выпишем коэффициенты

$$a_{11} = 16,\ a_{22} = 9,\ a_{12} = -12,\ a_{10} = 44,\ a_{20} = 33,\ a_{00} = 121.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

В данном случае

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0.$$

Имеем два корня $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25$.

Определим тангенс угла поворота репера R по формуле

$$tg\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

В данном случае

$$tg\alpha_1 = \frac{0 - 16}{-12} = \frac{4}{3}.$$

Далее определяем синусы и косинус угла поворота α_1.

$$\sin\alpha_1 = \frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}} = \frac{4}{3\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{4}{5},$$

$$\cos_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{3}{5}.$$

Записываем формулы преобразования координат при повороте репера R на угол α_1.

$$\begin{cases} x = x'\,cos\,\alpha_1 - y'\,sin\,\alpha_1, \\ y = x'\,sin\,\alpha_1 + y'\,cos\,\alpha_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y', \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'. \end{cases}$$

Уравнение линии в репере $R'\left(O,\vec{i}',\vec{j}'\right)$ будет иметь вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0,$$

где

$$a'_{10} = a_{10}\,cos\,\alpha_1 + a_{20}\,sin\,\alpha_1 = -44\cdot\frac{3}{5} + 33\frac{4}{5} = 0,$$

$$a'_{20} = -a_{10}\,sin\,\alpha_1 + a_{20}\,cos\,\alpha_1 = 44\frac{4}{5} + 33\frac{4}{5} = 55,$$

$$a'_{00} = a_{00} = 121.$$

Уравнение кривой имеет вид:

$$25y'^2 + 110y' + 121 = 0.$$

Выделим полный квадрат, имеем:

$$25\left(y'^2+2\cdot\frac{11}{5}y'+\frac{121}{25}\right)-121+121=0,$$

$$\left(y'+\frac{11}{5}\right)^2=0$$

или

$$\left| \begin{aligned} &y'+\frac{11}{5}=0,\\ &y'+\frac{11}{5}=0. \end{aligned} \right. \text{ – пара совпадающих прямых (рисунок 42).}$$

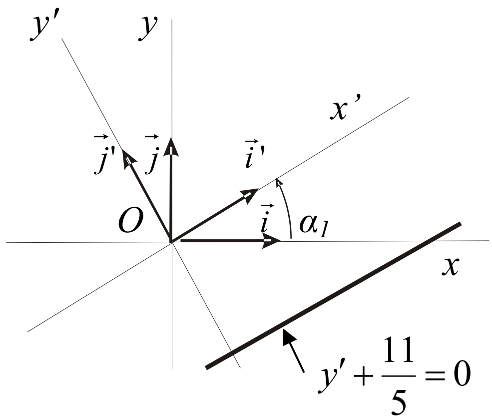


Рисунок 42

2.6 Пересечение линии второго порядка с прямой

Рассмотрим в репере $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ линию второго порядка γ, заданную уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0, \qquad (2.6.1)$$

и прямую линию l, заданную параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=x_o+\alpha t,\\ y=y_0+\beta t. \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

где (x_0, y_0) начальная точка, а $\vec{p}(\alpha, \beta)$ направляющий вектор прямой.

Найдем точку пересечения кривой с прямой линией. Для этого решим систему из уравнений (2.6.1) и (2.6.2), подставив значения x и y из уравнения (2.6.2) в уравнение (2.6.1):

$$a_{11}(x_0 + \alpha t)^2 + 2a_{12}(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + a_{22}(y_0 + \beta t)^2 +$$
$$+ 2a_{10}(x_0 + \alpha t) + 2a_{20}(y_0 + \beta t) + a_{00} = 0.$$

Произведем указанные действия и сгруппируем члены с t^2, t и свободные члены. Получим:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \qquad (2.6.3)$$

где

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2,$$
$$Q = \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + \beta(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}),$$
$$R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}.$$

Замечание. Обратим внимание на коэффициенты P, Q, R.

Коэффициент P зависит только от координат направляющего вектора и не зависит то начальной точки. Тогда для всех прямых, параллельных одному и тому же вектору $\vec{p}(\alpha, \beta)$, значение коэффициента P будет одинаковым.

Коэффициент Q зависит и от координат направляющего вектора и от координат начальной точки.

Коэффициент R зависит лишь от координат начальной точки и представляет собой значение левой части уравнения второго порядка (2.6.1), полученное путем замены переменных x, y соответственно на x_0, y_0.

Из уравнения (2.6.3) найдем значение параметра t. Подставим t в уравнение (2.6.2), найдем координаты точки пересечения прямой с кривой линией. Для определения количества и характера точек пересечения исследуем уравнение (2.6.3).

1) $P \neq 0$ Из уравнения (2.6.3) следует, что

$$t_{1,2} = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - PR}}{P}.$$

Возможны следующие случаи:

а) $Q^2 - PR > 0$.

Уравнение (2.6.3) имеет два действительных различных корня. Отсюда l пересекает γ в двух действительных различных точках.

б) $Q^2 - PR = 0$.

Уравнение (2.6.3) имеет два совпавших действительных корня. Тогда прямая пересекает линию в двух слившихся точках, или прямая l касается линии γ.

в) $Q^2 - PR < 0$.

Уравнение (2.6.3) имеет два комплексно-сопряженных корня. Прямая l пересекает линию γ в двух комплексно-сопряженных точках. Действительных точек пересечения нет.

Итак, если $P \neq 0$, то прямая l имеет с линией γ две точки пересечения (действительные различные, действительные совпавшие, или комплексно-сопряженные).

2) $P = 0$. Тогда уравнение (2.6.3) примет вид

$$2Qt + R = 0.$$

Рассмотрим различные случаи:

а) $Q \neq 0$.

Уравнение имеет единственный корень $t = -\dfrac{R}{2Q}$, следовательно, прямая l пресекает кривую γ в одной точке.

б) $Q = 0$, $R \neq 0$. Имеем $0 \cdot t + R = 0$, т.е. уравнение решений не имеет. Прямая l кривую γ не пересекает.

в) $Q=0,\ R=0$. В этом случае $0\cdot t+0=0$. Любое значение t удовлетворяет уравнению. Следовательно, прямая l всеми своими точками принадлежит линии γ.

Итак, если $P=0$, то прямая l либо пересекает линию не более чем в одной точке, либо всеми точками принадлежит кривой второго порядка.

Пример. Найти точки пересечения линии

$$\gamma:\ x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$$

с прямыми

$$\text{а) } l_1:\begin{cases} x=2+t, \\ y=5+5t; \end{cases} \quad \text{б) } l_2:\begin{cases} x=5-4t, \\ y=-1+t; \end{cases} \quad \text{в) } l_3: 4x-3y-12=0.$$

Решение. а) Подставим значения x и y из уравнения прямой l_1 в уравнение кривой:

$$(2+t)^2-2(2+t)(5+5t)-3(5+5t)^2-4(2+t)-6(5+5t)+3=0.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$2t^2+5t+3=0,$$

$$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{4} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t_1=-\dfrac{3}{2}, \\ t_2=-1. \end{array} \right.$$

Найденные значения t подставим по очереди в уравнение прямой l_1 и найдем точки пересечения прямой и кривой:

$$t_1=-\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\dfrac{3}{2}, \\ y=5-5\cdot\dfrac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=-\dfrac{5}{2}, \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right).$$

$$t_2=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=2-1, \\ y=5-5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow B(1;0).$$

Прямая l_1 пересекает кривую в двух действительных различных точках $A\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$ и $B(1;0)$.

б) Подставим значения x и y из уравнения прямой l_2 в уравнение кривой:

$$(5-4t)^2-2(5-4t)(-1+t)-3(-1+t)^2-4(5-4t)-6(-1+t)+3=0.$$

После преобразований получим: $t^2-2t+1=0$. Следовательно, $t_{1,2}=1\pm\sqrt{1-1}$, тогда $t_1=t_2=1$.

Прямая l_2 пересекает кривую в двух совпавших точках. Подставим значение t в уравнение прямой и определим координаты этой точки:

$$t=1\Rightarrow\ \begin{cases}x=5-4\cdot 1,\\ y=-1+t,\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=1,\\ y=0,\end{cases}\ \Rightarrow\ A(1;0).$$

Прямая l_2 касается кривой в точке $A(1;0)$.

в) Чтобы найти точки пересечения линии γ с прямой $l_3: 4x-3y-12=0$, удобно от общего уравнения прямой перейти к параметрическим уравнениям.

Найдем на прямой l_3 какую-нибудь точку. Пусть $x=0$, тогда $4\cdot 0-3y-12=0\ \Rightarrow\ y=-4$. Точка $(0;-4)\in l_3$. Направляющий вектор $l_3: \vec{p}(-B;A)=(3;4)$. Запишем параметрические уравнения:

$$\begin{cases}x=3t,\\ y=-4+4t.\end{cases}$$

Подставим значения x и y из уравнения прямой l_3 в уравнение кривой

$$\gamma: 9t^2-6t(-4+4t)-3(-4+4t)^2-12t-6(-4+4t)+3=0;$$

$$3t^2-4t+1=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t_1=1, \\ t_2=\frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

$$t_1=1 \Rightarrow x=3, y=0 \Rightarrow A(3;0);$$

$$t_2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=1, y=-\frac{8}{3} \Rightarrow B\left(1;-\frac{8}{3}\right).$$

Прямая l_3 пересекает кривую γ в двух точках A и B.

2.7 Асимптотические направления

Направление, определяемое ненулевым вектором $\vec{p}(\alpha;\beta)$, называется асимптотическим направлением линии второго порядка, если любая прямая l, параллельная вектору $\vec{p}$, пересекает линию γ не более чем в одной точке или же принадлежит линии γ.

Вектор $\vec{p}(\alpha;\beta)$ в этом случае называется вектором асимптотического направления, или асимптотическим вектором, а прямая l называется прямой асимптотического направления, или асимптотической прямой.

Из 2.6 следует, что для того, чтобы вектор $\vec{p}(\alpha;\beta)$ был асимптотическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $P=0$ или

$$a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0. \qquad (2.7.1)$$

Исследуем уравнение (2.7.1). Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю одновременно (по определению линии второго порядка, см 2.1).

1) $a_{22}\neq0$. В этом случае $\alpha\neq0$, так как если $\alpha=0$, то из уравнения (2.7.1) получилось бы, что и $\beta=0$. А нас интересует ненулевой вектор $\vec{p}(\alpha;\beta)$. Итак $\alpha\neq0$.

Разделим уравнение (2.7.1) на α^2. Угловой коэффициент k вектора $\vec{p}(\alpha;\beta)$ равен $\dfrac{\beta}{\alpha}$, имеем:

$$a_{11}\frac{\alpha^2}{\alpha^2}+2a_{12}\frac{\alpha\beta}{\alpha^2}+a_{22}\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0 \Rightarrow a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0\ . \qquad (2.7.2)$$

Из полученного уравнения следует

$$k_{1,2}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}}}{a_{22}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-J_2}}{a_{22}},$$

где

$$J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2.$$

а) Если $J_2>0$, то линия γ не имеет ни одного действительного асимптотического направления.

б) Если $J_2<0$, то линия γ имеет два различных асимптотических направления.

в) Если $J_2=0$, то линия γ имеет одно асимптотическое направление.

2) $a_{22}=0$. Тогда уравнение (2.7.1) примет вид

$$a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta=0, \qquad (2.7.3)$$

где

$$J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-a_{12}^2\le 0.$$

а) $a_{12}\ne 0 \Rightarrow J_2<0$. Из уравнения (2.7.3) следует

$$\alpha(a_{11}\alpha+2a_{12}\beta)=0,$$

далее имеем:

$$\left|\begin{array}{l}\alpha=0,\\ a_{11}\alpha+2a_{12}\beta=0,\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha=0,\ \beta-\text{любое действит. число (л.д.число)},\\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{a_{11}}{2a_{12}}.\end{array}\right.$$

В этом случае линия γ имеет два асимптотических направления:

$$\vec{p}_1(0;\textit{л. д. число}),$$
$$\overrightarrow{p_2}(2a_{12};-a_{11}).$$

б) $a_{12}=0 \Rightarrow J_2=0$.

Из уравнения (2.7.3) следует, что $a_{11}\alpha^2=0$ и β – любое действительное число.

Линия γ имеет одно асимптотическое направление $\vec{p}(0;\textit{л. д. число})$.

Сравнивая результаты пунктов 1) и 2), приходим к следующему ***выводу:***

если $J_2>0$, то линия γ не имеет асимптотических направления;

если $J_2=0$, то линия γ имеет одно асимптотическое направление;

если $J_2<0$, то линия γ имеет два различных асимптотических направления.

Значение J_2 не зависит от выбора системы координат линий.

Учитывая это, вычислим значения J_2 для всех девяти типов кривых второго порядка, заданных своими каноническими уравнениями.

1) Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Для него $a_{11}=\dfrac{1}{a^2}, a_{12}=0, a_{22}=\dfrac{1}{b^2}$. Тогда $J_2=\dfrac{1}{a^2b^2}>0$ – асимптотических направлений нет.

2) Мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$. $J_2=\dfrac{1}{a^2b^2}>0$ – асимптотических направлений нет.

3) Пара мнимых пересекающихся прямых: $a^2x^2+b^2y^2=0$. $J_2=a^2b^2>0$ – асимптотических направлений нет.

Итак: эллипс, мнимый эллипс и пара мнимых пересекающихся прямых асимптотических направлений не имеют $(J_2>0)$ и называются ***линиями эллиптического типа.***

4) Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Для нее $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{12}=0$, $a_{22}=-\frac{1}{b^2}$. Тогда $J_2=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=-\frac{1}{a^2b^2}<0$ – гипербола имеет два асимптотических направления (рисунок 43).

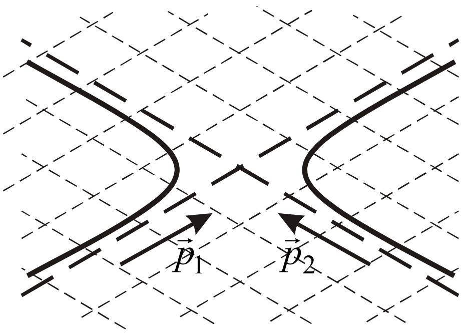


Рисунок 43 – Асимптотические направления гиперболы

5) Пара действительных пересекающихся прямых: $a^2x^2-b^2y^2=0$. $a_{11}=a^2, a_{12}=0, a_{22}=-b^2$. $J_2=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2=-a^2b^2<0$ – два асимптотических направления (рисунок 44).

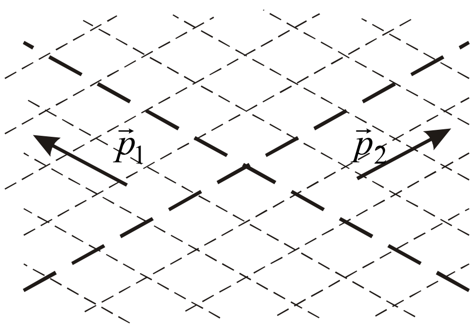


Рисунок 44 – Асимптотические направления пары пересекающихся действительных прямых

Гипербола и пара действительных пересекающихся прямых имеют два асимптотических направления $(J_2 < 0)$ и называются ***линиями гиперболического типа***.

6) Парабола: $y^2 = 2px$. В данном случае $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$. $J_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ – одно асимптотическое направление (рисунок 45).

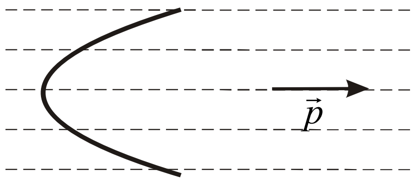


Рисунок 45 – Асимптотическое направление параболы

7) Пара действительных параллельных прямых: $y^2 - a^2 = 0$. $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} = 1$. Следовательно, $J_2 = 0$ – одно асимптотическое направление (рисунок 46).

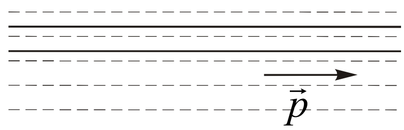


Рисунок 46 – Асимптотическое направление
пары параллельных действительных прямых

8) Пара мнимых параллельных прямых: $y^2 + a^2 = 0$, $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} = 1$, $J_2 = 0$ – одно асимптотическое направление.

9) Пара совпавших действительных прямых: $y^2 = 0$, $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} = 1$, $J_2 = 0$ – одно асимптотическое направление (рисунок 47).

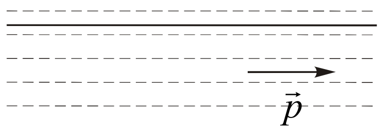


Рисунок 47 – Асимптотическое направление
пары совпавших действительных прямых

Парабола, пара действительных и пара мнимых параллельных прямых, пара совпавших действительных прямых имеют асимптотическое направление $(J_2 = 0)$ и называются ***линиями параболического типа***.

Пример. Найти векторы асимптотического направления для следующих линий второго порядка:

а) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$;

в) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$;

г) $x^2 - 2xy + 5x - y = 0$.

Решение.

а) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

Из уравнения имеем: $J_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -4 < 0$, следовательно, линия имеет два асимптотических направления.

Чтобы вектор $\vec{p}(\alpha;\beta)$ имел асимптотическое направление, необходимо и достаточно, чтобы

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

В данном примере

$$P = 3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 7\beta^2 = 0,\ a_{22} = 7 \neq 0.$$

Обозначим $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Разделим P на α^2, получим

$$7k^2 + 10k + 3 = 0.$$

Найдем корни уравнения

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 21}}{7} = \frac{-5 \pm 2}{7} \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = -\frac{3}{7}.$$

$$k_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = -1 \Rightarrow \alpha_1 = 1,\ \beta_1 = -1 \Rightarrow \overrightarrow{p_1}(1;-1);$$

$$k_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\frac{3}{7} \Rightarrow \alpha_2 = 7,\ \beta_2 = -3 \Rightarrow \overrightarrow{p_2}(7;-3).$$

Итак, векторами асимптотического направления будут $\overrightarrow{p_1}(1;-1)$, $\overrightarrow{p_2}(7;-3)$ и любые ненулевые векторы, которые им коллинеарны.

б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$.

$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, значит, линия имеет одно асимптотическое направление.

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

В этом примере

$$\alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 = 0,$$

причем $a_{22} \neq 0$. Аналогично предыдущему случаю, введем обозначение $k = \frac{\beta}{\alpha}$ и разделим P на α^2, получим:

$$9k^2 - 6k + 1 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow k_1 = k_2 = \frac{1}{3},\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 1.$$

Вектором асимптотического направления является $\overrightarrow{p_1}(3;1)$ и любой ненулевой коллинеарный ему вектор.

в) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$.

$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0$, следовательно, это линия эллиптического типа, асимптотических направлений нет.

г) $x^2 - 2xy + 5x - y = 0$.

$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Это линия гиперболического типа, два асимптотических направления. Условие

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

в данном случае имеет вид:

$$a_{22} = 0,\ \alpha^2 - 2\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 2\beta) = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha = 0, \\ \alpha - 2\beta = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha = 0, \beta \text{ л.д.число,} \\ \alpha = 2\beta. \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{p_1}(0;\beta)$, где β – любое действительное число. Координаты второго вектора асимптотического направления удовлетворяют условию $\alpha = 2\beta$. Пусть $\alpha = 2$, тогда $\beta = 1$. Получаем, что векторами асимптотического направления будут векторы $\overrightarrow{p_1}(0;\beta)$, $\overrightarrow{p_2}(2;1)$ и любые ненулевые коллинеарные им векторы.

2.8 Асимптоты

Определение. Асимптотой кривой второго порядка γ называется всякая прямая, которая любо вовсе не пересекается с линией (не имеет с ней ни вещественных, ни комплексно-сопряженных общих точек), либо всеми своими точками принадлежит линии γ.

Заметим, что асимптота линии второго порядка обязательно является асимптотической прямой. Рассматривая вопрос о пересечении прямой

$$l: \begin{cases} x = x_o + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

с линией

$$\gamma:\ a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

было получено уравнение: $Pt^2+2Qt+R=0$ (см. 2.6). При исследовании этого уравнения, было установлено, что прямая l не пересекает линию γ, если $P=Q=0, R\neq 0$, и принадлежит кривой всеми своими точками, если $P=Q=R=0$.

Так как асимптота имеет асимптотическое направление, то асимптоты могут существовать лишь для линий гиперболического и параболического типа.

Теорема. Если $\vec{p}(\alpha;\beta)$ является вектором асимптотического направления линии γ, то для того, чтобы точка $M(x;y)$ лежала на некоторой асимптоте, имеющей направление вектора $\vec{p}(\alpha;\beta)$, необходимо и достаточно, чтобы координаты точки удовлетворяли уравнению:

$$\alpha(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})+\beta(a_{21}x+a_{22}y+a_{00})=0. \qquad (2.8.1)$$

Доказательство.

Необходимость. Точка $M(x;y)$ принадлежит асимптоте l, имеющей направление $\vec{p}(\alpha;\beta)$. Примем точку $M(x;y)$ за начальную. Тогда уравнение l будет иметь вид:

$$\begin{cases} x=\alpha t, \\ y=\beta t. \end{cases}$$

Но для асимптоты должно выполняться условие $P=Q=0$.

Условие $Q=0$ имеет вид

$$\alpha(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})+\beta(a_{21}x+a_{22}y+a_{00})=0,$$

(вместо x_0, y_0 подставили x, y). А это и есть уравнение (2.8.1). Итак, если точка $M(x;y)$ принадлежит асимптоте, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.8.1).

Достаточность. Пусть координаты некоторой точки $M(x;y)$ удовлетворяют уравнению (2.8.1), где α, β – координаты вектора асимптотического направления (т.е. $P=0$). Проведем через точку $M(x;y)$ прямую l, параллельную вектору

$\vec{p}(\alpha;\beta)$. Докажем, что l – асимптота. Параметрические уравнения прямой l запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = \alpha t, \\ y = \beta t, \end{cases}$$

а параметры точек пересечения ее с линией l найдутся из условия $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. Но $P = 0$, так как $\vec{p}(\alpha;\beta)$ асимптотический вектор и

$$Q = \alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{00}) = 0,$$

т.к выполняется условие (2.8.1), а отсюда следует, что l есть асимптота.

Что и требовалось доказать.

Выясним, какие линии имеют асимптоты.

1) $J_2 > 0$. В этом случае линия эллиптического типа не имеет асимптотических направлений, а, следовательно, и асимптот.

2) $J_2 < 0$. Для линии γ гиперболического типа существует два асимптотических направления ($\overrightarrow{p_1}(\alpha_1,\beta_1)$ и $\overrightarrow{p_2}(\alpha_2,\beta_2)$) и две асимптоты, параллельные векторам $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$. Возьмем $\overrightarrow{p_1}(\alpha_1,\beta_1)$. Уравнение асимптоты запишется так:

$$\alpha_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta_1(a_{21}x + a_{22}y + a_{00}) = 0$$

или

$$x(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1) + y(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1) + (a_{10}\alpha_1 + a_{20}\beta_1) = 0.$$

Коэффициенты при x, y в этом уравнении одновременно в нуль не обращаются. Действительно, если предположить, что

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 = 0, \end{cases}$$

то отсюда следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{a_{12}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}, \end{cases}$$

при $\alpha \neq 0$. Отсюда $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Rightarrow J_2 = 0$, что противоречит условию, что $J_2 < 0$. То есть для линий гиперболического типа каждому асимптотическому вектору соответствует асимптота (рисунок 48).

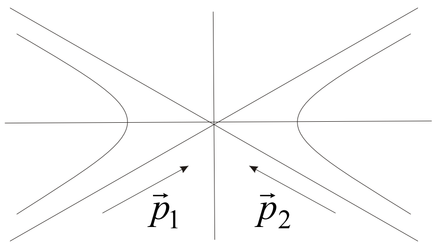


Рисунок 48

Асимптоты гиперболы не имеют с ней ни одной общей точки.

Пара действительных пересекающихся прямых $l_1 \cap l_2 = \gamma$ имеет две асимптоты (рисунок 49). Каждая из них всеми своими точками принадлежит линии второго порядка. То есть асимптоты совпадают с прямыми l_1 и l_2.

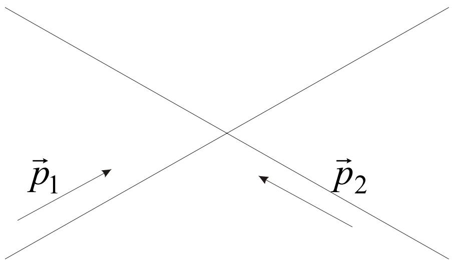


Рисунок 49

3) $J_2 = 0$. Линии параболического типа имеют одно асимптотическое направление. Тогда в качестве вектора асимптотического направления можно взять

вектор $\vec{p}(a_{22};-a_{12})$(см. 2.7). Значения координат этого вектора подставим в уравнение

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$$

и получим

$$a_{22}(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) - a_{12}(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0;$$

$$x(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + y(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}) + (a_{22}a_{10} - a_{12}a_{20}) = 0;$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + (a_{22}a_{10} - a_{12}a_{20}) = 0.$$

Обозначим

$$a_{11}a_{10} - a_{12}a_{20} = Z,$$

тогда

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + Z = 0.$$

Рассмотрим различные случаи.

Если $Z \neq 0$, то линия асимптоты не имеет.

Если $Z = 0$, то любая прямая, параллельная вектору $\vec{p}$, является асимптотой.

Таким образом, Z имеет вполне определенный геометрический смысл и не зависит от выбора системы координат.

Определи значения Z для линий параболического типа по их каноническим уравнениям.

а) $y^2 = 2px$ – парабола. Можно записать как $y^2 - 2px = 0$.

$$Z = a_{22}a_{10} - a_{12}a_{00} = 1(-p) - 0 \cdot 0 = -p \neq 0,$$

следовательно, парабола асимптоты не имеет (рисунок 50).

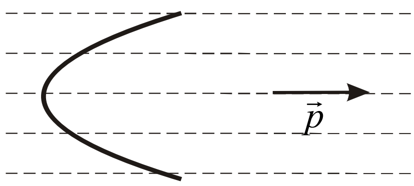


Рисунок 50

Любая асимптотическая прямая пересекает параболу в одной точке.

б) $x^2 \pm a^2 = 0$ – пара параллельных (действительных, или мнимых) прямых, пара совпавших прямых (если $a = 0$). В данном случае

$$Z = a_{22}a_{10} - a_{12}a_{00} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0,$$

следовательно, любая прямая параллельная вектору $\vec{p}$ является асимптотой. Линия имеет пучок параллельных асимптот (рисунок 51, 52).

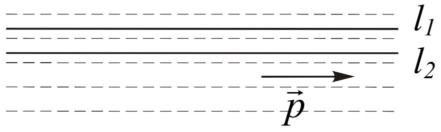


Рисунок 51

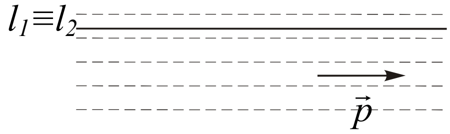


Рисунок 52

Пример. Найти уравнения асимптот следующих линий второго порядка.

а) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$;

б) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0$;

в) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

Решение.

а) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$.

Вычислим

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае

$$J_2 = \begin{vmatrix} 3 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Данная линия гиперболического типа имеет два различных асимптотических направления. Найдем их.

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \;\Rightarrow\; 3\alpha^2 + 7\alpha\beta + 4\beta^2 = 0.$$

Разделим почленно на α^2, с учетом того, что $\dfrac{\beta}{\alpha} = k$, получим

$$4k^2 + 7k + 3 = 0.$$

Найдем корни уравнения

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{8} \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} k_1 = -1, \\ k_2 = -\dfrac{3}{4}. \end{array} \right.$$

$$k_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = -1 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1,\; \beta_1 = 1.\; \overrightarrow{p_1}(1;-1).$$

$$k_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 4,\; \beta_1 = -3.\; \overrightarrow{p_1}(4;-3).$$

Напишем уравнения асимптот, используя уравнение

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0,$$

где $(\alpha;\beta)$ – координаты вектора асимптотического направления.

1) $\overrightarrow{p_1}(1;-1) \Rightarrow 1 \cdot \left(3x + \dfrac{7}{2}y + \dfrac{5}{2}\right) - 1 \cdot \left(\dfrac{7}{2}x + 4y + 1\right) = 0.$

Преобразуем это уравнение.

$$6x + 7y + 5 - 7x - 8y - 2 = 0,$$

$$-x - y + 3 = 0,$$

$$x + y - 3 = 0.$$

Получили уравнение асимптоты, параллельной вектору $\overrightarrow{p_1}(1;-1)$.

2) $\overrightarrow{p_2}(4;-3) \Rightarrow 4 \cdot \left(3x + \dfrac{7}{2}y + \dfrac{5}{2}\right) - 3 \cdot \left(\dfrac{7}{2}x + 4y + 1\right) = 0.$

$$12x+14y+10-\frac{21}{2}x-12y-3=0,$$

$$\frac{3}{2}x+2y+7=0$$

или

$$3x+4y+14=0.$$

Последнее есть уравнение асимптоты, параллельной вектору $\overrightarrow{p_2}(4;-3)$.

б) $x^2+2xy+y^2-x-y=0$.

Вычислим

$$J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Линия параболического типа, имеет одно асимптотическое направление. Так как $a_{22}\neq 0$, то $\vec{p}(a_{22};-a_{12})\Rightarrow \vec{p}(1;-1)$.

Напишем уравнение асимптоты:

$$1\cdot\left(x+y-\frac{1}{2}\right)-1\cdot\left(x+y-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$0\cdot x+0\cdot y+0=0,$$

последнее уравнение показывает, что любая прямая, параллельная вектору $\vec{p}(1;-1)$ является асимптотой линии γ.

в) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$.

$$J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Линия параболического типа имеет одно асимптотическое направление.

Так как $a_{22}\neq 0$, то $\vec{p}(a_{22};-a_{12})\Rightarrow \vec{p}(1;2)$.

Уравнение асимптоты

$$1\cdot(4x-2y-1)+2\cdot(-2x+y-7)=0,$$

$$0\cdot x+0\cdot y-15=0.$$

Очевидно, что не существует ни одной пары значений $(x;y)$, которые удовлетворяли бы последнему уравнению. То есть данная линия асимптот не имеет.

2.9 Диаметры линии второго порядка

Напомним, общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$$\gamma : a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \qquad (2.9.1)$$

$\vec{p}(\alpha;\beta)$ – вектор неасимптотического направления линии γ, т.е.

$$P=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2\neq 0.$$

Если через произвольную точку $(x;y)$ провести прямую l, параллельную вектору $\vec{p}$, то она пересечет линию в двух точках (действительных, мнимых, совпавших). Во всех случаях середина получившейся хорды есть действительная точка (рисунок 53).

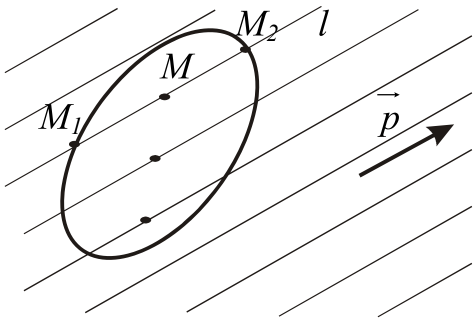


Рисунок 53

Определение. Множество середин хорд, параллельных вектору $\vec{p}$ неасимптотического направления, называется диаметром линии второго порядка.

Теорема. Диаметр линии γ второго порядка есть прямая, уравнение которой имеет вид

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0,$$

где $(\alpha; \beta)$ – координаты вектора $\vec{p}$ неасимптотического направления.

Доказательство.

1) Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит диаметру линии второго порядка. Проведем через эту точку прямую l, параллельную вектору $\vec{p}$.

$$l: \begin{cases} X = x + \alpha t, \\ Y = y + \beta t. \end{cases}$$

Параметры точек пересечения l и γ определяются как корни t_1, t_2 уравнения

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0. \tag{2.9.2}$$

Найдем координаты точек пересечения.

$$M_1: \begin{cases} X_1 = x + \alpha t_1, \\ Y_1 = y + \beta t_1 \end{cases} \text{ и } M_2: \begin{cases} X_2 = x + \alpha t_2, \\ Y_2 = y + \beta t_2. \end{cases}$$

Так как $M(x; y)$ – середина хорды M_1M_2, то

$$\begin{cases} x = \dfrac{X_1 + X_2}{2} = \dfrac{2x + \alpha(t_1 + t_2)}{2}, \\ y = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2} = \dfrac{2y + \beta(t_1 + t_2)}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(t_1 + t_2) = 0, \\ \beta(t_1 + t_2) = 0, \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 0.$$

Из теоремы Виета следует, что в уравнении (2.9.2) $Q = 0$, значит

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0 \tag{2.9.3}$$

(номер формулы переобозначили для удобства изложения материала данного подраздела).

Итак, если точка $M(x; y)$ принадлежит диаметру, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2.9.3).

2) Пусть координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению (2.9.3). Докажем, что эта точка принадлежит диаметру. Проведем через $M(x; y)$ прямую l, параллельную вектору $\vec{p}$, и найдем координаты точек пересечения l и γ.

Так как $Q = 0$, то $t_1 + t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = -t_1$,

$$M_1 : \begin{cases} X_1 = x + \alpha t_1, \\ Y_1 = y + \beta t_1 \end{cases} \text{и } M_2 : \begin{cases} X_2 = x - \alpha t_2, \\ Y_2 = y - \beta t_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 2x, \\ Y_1 + Y_2 = 2y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{X_1 + X_2}{2}, \\ y = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, точка $M(x; y)$ есть середина хорды M_1M_2, то есть $M(x; y)$ принадлежит диаметру.

3) Выше было доказано, что $M(x; y)$ принадлежит диаметру тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0,$$

где $\vec{p}\ (\alpha, \beta)$ – вектор неасимптотического направления.

Покажем, что (2.9.3) есть уравнение прямой линии. Перепишем его следующим образом:

$$x(\alpha a_{11} + \beta a_{12}) + y(\alpha a_{12} + \beta a_{22}) + (\alpha a_{10} + \beta a_{20}) = 0.$$

Покажем, что коэффициенты x и y не равны нулю одновременно. Предположим, что

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0. \end{cases}$$

Умножим первое равенство на α, а второе – на β и почленно сложим. Получаем:

$$a_{11}\alpha^2 + a_{12}\alpha\beta + a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0,$$

или

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Из этого тождества следует, что $\vec{p}\,(\alpha;\beta)$ является вектором асимптотического направления, что противоречит условию.

Итак, уравнение (2.9.3) есть уравнение прямой линии. Диаметр линии γ второго порядка есть прямая d_p. Говорят, что диаметр d_p сопряжен хордам данного направления (или сопряжен данному направлению).

Что и требовалось доказать.

Примеры

1) Для линии $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ определить диаметр, сопряженный вектору $\vec{p}(1;2)$.

Решение. Вектор не является асимптотическим так как $1^2 - 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 \neq 0$.

Уравнение диаметра d_P имеет вид (2.9.3)

$$1\cdot\left(x - \frac{3}{2}y - 2\right) + 2\left(-\frac{3}{2}x + 2y - 1\right) = 0,$$

следовательно,

$$d_P:\ 4x - 5y - 8 = 0.$$

2) Дана линия второго порядка $4xy-5y^2+2x+6y+1=0$. Написать уравнение диаметра этой линии, проходящего через точку $A(-4;2)$.

Решение. Уравнение диаметра имеет вид (2.9.3)

$$d_P:\ \alpha(2y+1)+\beta(2x-5y+3)=0.$$

Так как $A\in d_P$, то координаты точки $A(-4;2)$ удовлетворяют уравнению диаметра:

$$\alpha(2\cdot 2+1)+\beta(2\cdot(-4)-5\cdot 2+3)=0,$$
$$5\alpha-15\beta=0\ \Rightarrow\ \alpha-3\beta=0\ \Rightarrow\ \alpha=3,\ \beta=1.$$

Далее, после подстановки

$$d_P:\ 3(2y+1)+1(2\cdot x-5y+3)=0.$$

Окончательно имеем

$$d_P:\ 2x+y+6=0.$$

3) Написать уравнение диаметра линии $9x^2+4xy+6y^2+2x-4y-4=0$, параллельного прямой $x-2y-7=0$.

Решение. Уравнение диаметра имеет вид (2.9.3).

$$\alpha(9x+2y+1)+\beta(2x+6y-2)=0,$$
$$x(9\alpha+2\beta)+y(2\alpha+6\beta)+(\alpha-3\beta)=0.$$

Поскольку диаметр параллелен прямой $x-2y-7=0$, то коэффициенты при неизвестных должны быть пропорциональными, следовательно,

$$\frac{9\alpha+2\beta}{1}=\frac{2\alpha+6\beta}{2}\ \Rightarrow\ 9\alpha+2\beta-\alpha-\beta=0\Rightarrow\ 8\alpha-\beta=0\ \Rightarrow\ \alpha=1,\ \beta=8.$$

Вектор $\vec{p}(1;4)$ не является асимптотическим, так как

$$P=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=9\cdot 1+4\cdot 8+6\cdot 64\neq 0.$$

Уравнение диаметра запишется так:

$$x(9\cdot 1+2\cdot 8)+y(2\cdot 1+6\cdot 8)+1-2\cdot 8=0,$$

$$25x+50y-15=0,$$

$$d_P:5x+10y-3=0.$$

4) Найти направление хорд, сопряженных диаметру $13x-18y-2=0$ относительно линии $x^2-3xy+2y^2-4x-2y+5=0$.

Решение. Уравнение диаметра запишется так:

$$\alpha\left(x-\frac{3}{2}y-2\right)+\beta\left(-\frac{3}{2}x+2y-1\right)=0.$$

Сгруппируем по-другому, имеем:

$$x\left(\alpha-\frac{3}{2}\beta\right)+y\left(-\frac{3}{2}\alpha+2\beta\right)+(-2\alpha-\beta)=0.$$

По условию уравнение диаметра $13x-18y-2=0$, следовательно,

$$\frac{\alpha-\frac{3}{2}\beta}{13}=\frac{-\frac{3}{2}\alpha+2\beta}{-18}=\frac{-2\alpha-\beta}{-2}\Rightarrow 3\alpha+2\beta=0\Rightarrow \alpha=-2,\ \beta=3.$$

Искомый вектор направления – $\vec{p}(-2;3)$. Диаметр $13x-18y-2=0$ сопряжен направлению $\vec{p}(-2;3)$.

2.10 Центр линии второго порядка

Определение. Центром линии второго порядка называется точка $C(x_0;y_0)$, относительно которой линия симметрична (рисунок 54).

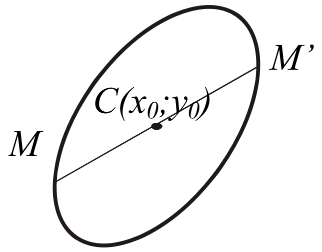


Рисунок 54

Так если M – произвольная точка линии γ и M' – точка, симметричная M относительно точки C, то, если C – центр, то M' принадлежит линии γ.

Теорема. Для того, чтобы точка $C(x_0; y_0)$ была центром линии второго порядка γ, необходимо и достаточно, чтобы координаты ее удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{2.10.1}$$

Доказательство.

1) Пусть $C(x_0; y_0)$ – центр линии γ. $\vec{p}(p_1; p_2)$ и $\vec{q}(q_1; q_2)$ – два неколлинеарных и неасимптотических вектора. Через точку C проведем прямые линии, параллельные векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, которые пересекут линию γ в точках M_1, M_2 и N_1, N_2. Так как точка C – центр γ, то она лежит на середине отрезков M_1M_2 и N_1N_2. Значит, точка C лежит на диаметрах d_P и d_q, и ее координаты удовлетворяют уравнениям диаметров, то есть

$$\begin{cases} p_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + p_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) = 0, \\ q_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + q_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) = 0. \end{cases}$$

Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарны, их координаты непропорциональны, то есть

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное нулевое решение относительно выражений в скобках, то есть

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{22}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases}$$

2) Пусть координаты некоторой точки $C(x_0; y_0)$ удовлетворяют системе (2.10.1). Докажем, что $C(x_0; y_0)$ – центр линии γ. Возьмем произвольную точку $M_1(x_1; y_1) \in \gamma$, и пусть точка $M_2(x_2; y_2)$ симметрична точке M_1 относительно точки C. Докажем, что $M_2(x_2; y_2) \in \gamma$.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 \Rightarrow x_2 = 2x_0 - x_1.$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 \Rightarrow y_2 = 2y_0 - y_1.$$

Подставим координаты x_2, y_2 в уравнение (2.10.1).

$$\begin{gathered} a_{11}(2x_0 - x_1)^2 + 2a_{12}(2x_0 - x_1)(2y_0 - y_1) + a_{22}(2y_0 - y_1)^2 + 2a_{10}(2x_0 - x_1) + \\ + 2a_{20}(2y_0 - y_1) + a_{00} = 4x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + 4(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) - \\ - 4x_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) - 4y_1(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + \\ + a_{22}y_1^2 + 2a_{10}x_1 + 2a_{20}y_1 + a_{00} = 0, \end{gathered}$$

так как $M_1 \in \gamma$.

Итак, $M_2 \in \gamma$, следовательно, точка $C(x_0; y_0)$ – центр линии γ.

Что и требовалось доказать.

Исследуем систему (2.10.1)

Рассмотрим матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix}.$$

Обозначим их ранги r и R $(r \le R)$.

1) $r = R = 2$. Система (2.10.1) имеет единственное решение. Линия имеет единственный центр.

2) $r = 1, \ R = 2$. Система (2.10.1) несовместна. Линия центра не имеет.

3) $r = R = 1$. Система (2.10.1) имеет бесчисленное множество решений. Одно из уравнений (2.10.1) есть следствие другого. Линия имеет прямую центров, уравнением которой является одно из уравнений системы (2.10.1).

Для линий эллиптического и гиперболического типа $r = R = 2$, так как для этих линий

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = J_2 \neq 0 .$$

Отсюда, эллипс (действительный и мнимый), гипербола и пара пересекающихся (действительных и мнимых) прямых имеют действительный центр. Так как понятие центра имеет геометрический смысл и не зависит от выбора системы координат, то для решения вопроса о центре рассмотрим канонические уравнения линий параболического типа.

а) Пара параллельных, или пара слившихся прямых:

$y^2 \pm a^2 = 0$, или $y^2 = 0$. Тогда $a_{11} = a_{22} = a_{10} = a_{20} = 0, \ a_{22} = 1$.

Система (2.10.1) принимает вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0. \end{cases}$$

В данном случае $r = R = 1$, следовательно, каждая линия имеет прямую центров, причем из системы видно, что x – любое действительное число, $y = 0$. Таким образом, в этом случае прямой центров является ось OX (рисунок 55).

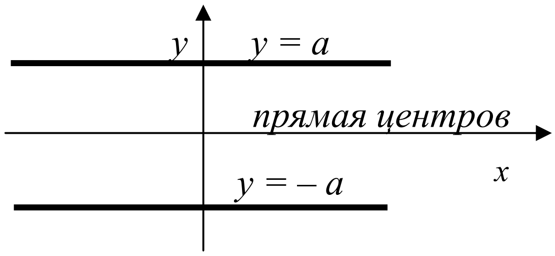


Рисунок 55

Для пары совпавших прямых линия центров совпадает с линией γ.

б) Парабола: $y^2 = 2px$. Тогда $a_{11} = a_{12} = a_{20} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{10} = -p$. Система (2.10.1) принимает вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y - p = 0, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 0. \end{cases}$$

Очевидно $r = 1,\ R = 2$.

Система несовместна, парабола не имеет центра.

Определение. Линии, имеющие единственный центр, называются центральными. Линии, имеющие прямую центров или совсем не имеющие центра, называются нецентральными.

Пример. Найти центр линии второго порядка:

а) $3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0$;

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;

в) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

Решение. Точка $C(x_0; y_0)$ является центром линии второго порядка тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе (2.10.1).

а) Составим систему (2.10.1) для данной линии γ.

$$\begin{cases} 3x_0 - 6y_0 + 1 = 0, \\ -6x_0 + 6y_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 36 = -18 \neq 0 .$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} 3x_0 - 6y_0 + 1 = 0, \\ -6x_0 + 6y_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x_0 = 0$, $y_0 = \dfrac{1}{6}$.

Окончательно $C\left(0; \dfrac{1}{6}\right)$ – центр линии второго порядка.

б) Составим систему (2.10.1) для данной кривой, имеем:

$$\begin{cases} 4x_0 - 2y_0 - 3 = 0, \\ -2x_0 + y_0 + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 - 1{,}5 = 0, \\ 2x_0 - y_0 + 4 = 0. \end{cases}$$

Сравнивая уравнения, видим, что система несовместна. Линия центра не имеет.

в) Составим систему (2.10.1) для данной кривой, имеем:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 - 3 = 0, \\ -x_0 + y_0 + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 3 = 0, \\ x_0 - y_0 - 3 = 0. \end{cases}$$

Данная система эквивалентна одному уравнению $x_0 - y_0 - 3 = 0$. Это и есть уравнение прямой центров.

2.11 Расположение диаметров линии второго порядка

Как было показано ранее, координаты центра линии второго порядка – точки $C(x_0, y_0)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{2.11.1}$$

Уравнение диаметра линии второго порядка имеет вид:

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0. \qquad (2.11.2)$$

Если координаты точки $C(x_0, y_0)$ удовлетворяют системе (2.11.1), то они удовлетворяют и уравнению (2.11.2), отсюда, всякий диаметр линии проходит через центр линии независимо от выбора вектора $\vec{p}(\alpha; \beta)$. Если линия имеет прямую центров, то всякий диаметр совпадает с этой прямой.

1) $J_2 > 0$. Линии эллиптического типа.

На рисунке 56 изображены диаметры эллипса. Все они проходят через центр эллипса $C(x_0, y_0)$. Мнимый эллипс имеет действительный центр. Пара мнимых пересекающихся прямых пересекается в действительной точке. Центр совпадает с этой точкой. Во всех случаях множество диаметров линий эллиптического типа образуют пучок прямых пересекающихся в центре линии (рисунок 56).

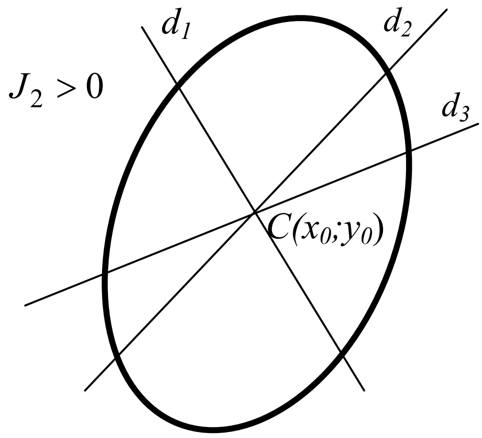


Рисунок 56

2) $J_2 < 0$ Линии гиперболического типа.

Линии гиперболического типа имеют две асимптоты, уравнения их имеют вид

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0,$$

где (α, β) – координаты вектора асимптотического направления. Ясно, что асимптоты также проходят через центр.

Итак, множество диаметров и асимптот линии гиперболического типа образует пучок прямых, пересекающихся в центре линии (рисунок 57).

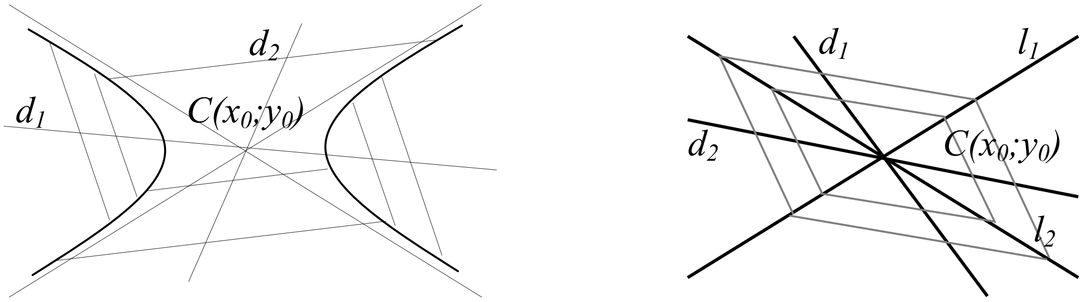


Рисунок 57 – Гипербола и пара действительных пересекающихся прямых

3) $J_2 = 0$. Линии параболического типа.

а) Парабола. Центра не имеет. Рассмотрим каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$ или $y^2 - 2px = 0$.

Уравнение диаметра в этом случае запишется как: (2.11.2)

$$\alpha \cdot (-p) + \beta \cdot y = 0$$

или

$$-\alpha p + \beta y = 0, \quad y = \frac{\alpha p}{\beta},$$

причем $\beta \neq 0$, иначе получилось бы, что $\vec{p}(\alpha; \beta)$ имеет асимптотическое направление.

Из этого уравнения следует, что все диаметры параболы параллельны между собой. Они образуют пучок параллельных прямых. Все диаметры параболы имеют асимптотическое направление (рисунок 58).

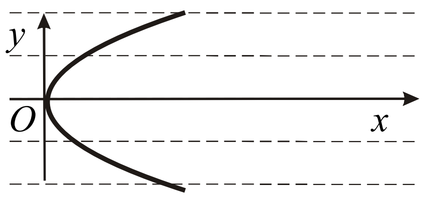


Рисунок 58

б) Пара параллельных (действительных или мнимых), пара совпавших прямых:

$$y^2 \pm a^2 = 0,\ y^2 = 0 .$$

Каждая из этих линий имеет прямую центров. Но всякий диаметр проходит через центр. Следовательно, всякий диаметр совпадает с прямой центров, то есть он единственный и имеет асимптотическое направление (рисунок 59).

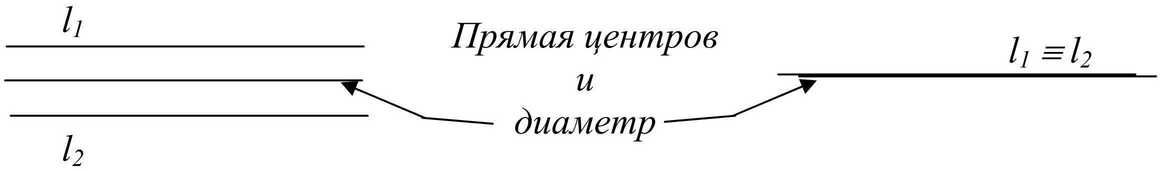


Рисунок 59 – Пара параллельных прямых и пара совпавших прямых

Пример. $\gamma : 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 88x + 66y + 121 = 0$. Найти центр линии и ее диаметр, сопряженный вектору $\vec{p}(2;1)$.

Решение. Определим центр линии

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x_0 - 12y_0 - 44 = 0, \\ -12x_0 + 9y_0 + 33 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 - 3y_0 - 11 = 0, \\ 4x_0 - 3y_0 - 11 = 0. \end{cases}$$

Последняя система эквивалентна уравнению $4x - 3y - 11 = 0$, то есть линия имеет прямую центров. Прямая центров будет являться и диаметром (единственным) линии.

Действительно, уравнение диаметра имеют вид:

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0,$$

$$2(16x - 12y - 44) + 1(-12x + 9y + 33) = 0,$$

$$4x - 3y - 11 = 0.$$

2.12 Сопряженные диаметры

Пусть $\vec{p}(p_1; p_2)$ – вектор неасимптотического направления. Проведем хорды, параллельные вектору $\vec{p}$. Множество середин хорд есть диаметр:

$$d_p : p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0$$

или

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)x + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)y + (a_{10}p_1 + a_{20}p_2) = 0. \qquad (2.12.1)$$

Направляющий вектор диаметра d_p есть вектор $\vec{q}(q_1; q_2)$, где

$$q_1 = -(a_{12}p_1 + a_{22}p_2) \text{ и } q_2 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2. \qquad (2.12.2)$$

И пусть $\vec{q}(q_1; q_2)$ – также вектор неасимптотического направления (рисунок 60). Проведем хорды параллельные вектору $\vec{q}$ (или диаметру d_p).

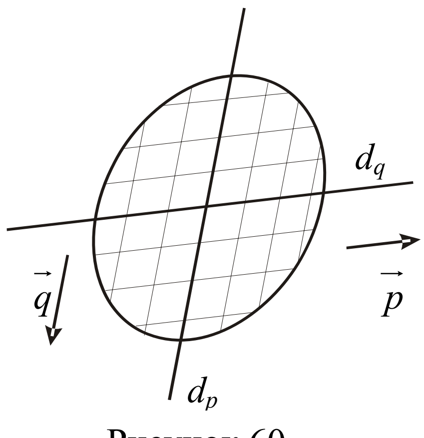


Рисунок 60

Множество середин таких хорд есть диаметр

$$d_p : (a_{11}q_1 + a_{12}q_2)x + (a_{21}q_1 + a_{22}q_2)y + (a_{10}q_1 + a_{20}q_2) = 0. \qquad (2.12.3)$$

Направляющий вектор диаметра d_p обозначим $\vec{c}(c_1; c_2)$, где

$$c_1 = -a_{12}q_1 + a_{22}q_2, \; c_2 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2.$$

Подставим в данное равенство значения q_1 и q_2 из соотношений (2.12.2), имеем:

$$c_1 = -a_{12}(-a_{12}p_1 - a_{22}p_2) - a_{22}(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) = (a_{12}^2 - a_{11}\cdot a_{22})p_1 = -J_2 p_1,$$
$$c_2 = a_{12}(-a_{12}p_1 - a_{22}p_2) + a_{12}(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) = (a_{12}^2 - a_{11}\cdot a_{22})p_2 = -J_2 p_2.$$

а) Если $J_2 \neq 0$, то $\vec{c} \parallel \vec{p} \Rightarrow d_p \parallel \vec{p} \Rightarrow d_p$ – есть множество середин всех хорд, параллельных диаметру d_q.

Определение. Два диаметра линии второго порядка, каждый из которых является множеством середин хорд, параллельных другому, называются сопряженными.

Сопряженные диаметры имеют лишь центральные линии второго порядка $(J_2 \neq 0)$

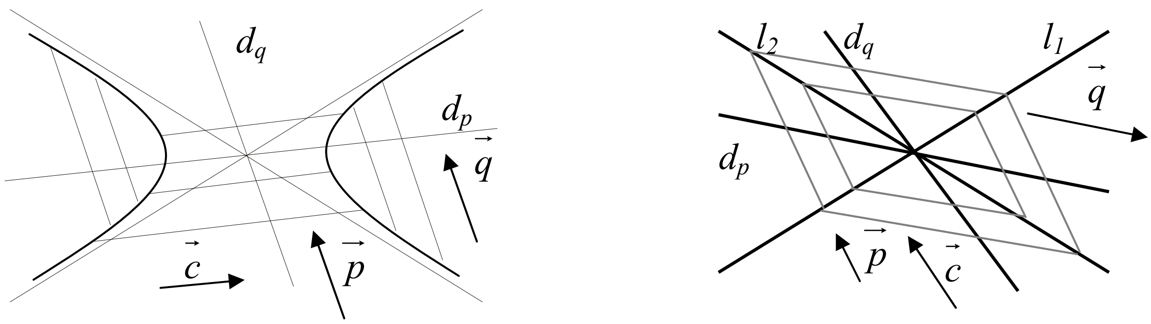


Рисунок 61 – Сопряженные диаметры гиперболы и пересекающихся прямых

б) $J_2 = 0$, то мы имеем линии параболического типа. Диаметры линий параболического типа имеют асимптотическое направление. Сопряженных диаметров они не имеют.

Найдем зависимость между координатами векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. По доказанному выше $d_q \parallel \vec{p}$. Используя условие параллельности вектора и прямой $(A\alpha + B\beta = 0)$, запишем:

$$p_1\,(a_{11}q_1 + a_{12}q_2) + p_2(a_{21}q_1 + a_{22}q_2) = 0,$$

или

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

Определение. Ненулевые векторы $\vec{p}(p_1, p_2)$ и $\vec{q}(q_1, q_2)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0, \qquad (2.12.4)$$

называются сопряженными относительно линии второго порядка, заданной общим уравнением (2.9.1).

1) $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряженные векторы относительно линии γ и пусть $\vec{q} = \lambda\vec{p}(\lambda \neq 0)$, то есть $\vec{p} \parallel \vec{q}$. Тогда по теореме о коллинеарных векторах $\vec{q}(\lambda p_1, \lambda p_2)$. В силу сопряженности векторов, их координаты удовлетворяют условию (4), тогда имеем:

$$a_{11}\lambda p_1 p_1 + a_{12}\lambda p_1 p_2 + a_{12}\lambda p_2 p_1 + a_{22}\lambda p_2 p_1 = 0,$$
$$\lambda(a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2) = 0.$$

Так как $\lambda \neq 0$, то $a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 = 0$. А это означает что $\vec{p}$ вектор асимптотического направления. Тогда $\vec{q}$ также вектор асимптотического направления. Отсюда вектор асимптотического направления есть самосопряженный вектор.

2) $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряженные векторы относительно линии γ. Тогда векторы $\lambda\vec{p}$ и $\mu\vec{q}$ $(\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$ также будут сопряженными относительно линии γ. В этом легко убедиться путем подстановки координат векторов $\lambda\vec{p}(\lambda p_1; \lambda p_2)$ и $\mu\vec{q}(\mu q_1; \mu q_2)$ в условие (2.12.4). Из этого следует, что понятие сопряженности по существу относится не к векторам, а к их направлениям.

3) Если вектор $\vec{p}$ есть вектор неасимптотического направления относительно линии γ, то существует единственный вектор $\vec{q}$, сопряженный с $\vec{p}$ относительно линии γ.

4) Если вектор $\vec{p}$ есть вектор асимптотического направления, то он либо сопряжен только с самим собой $(J_2 \neq 0)$, либо он сопряжен с любым вектором плоскости $(J_2 = 0)$. Примем без доказательства.

Примеры. а) Дана линия второго порядка γ: $x^2 + xy + 2y^2 - 4x + 5y - 3 = 0$ и вектор $\vec{a}(2;3)$. Определить координаты вектора $\vec{a'}$, сопряженного с вектором $\vec{a}$.

Решение. $\vec{a}(2;3)$ – вектор неасимптотического направления, так как

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 4 + 6 + 18 \neq 0.$$

Следовательно, для данного вектора $\vec{a}$ существует единственный сопряженный с ним вектор $\vec{a'}$. Запишем условие сопряженности.

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{12}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

В данном случае $p_1 = 2,\ p_2 = 3$, следовательно, условие запишется в виде:

$$2q_1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot q_2 + \frac{1}{2}\cdot 3q_1 + 2\cdot 3\cdot q_2 = 0;$$

$$\frac{7}{2}q_1 + 7q_2 = 0,\ q_1 + 2q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = 2,\ q_2 = -1.$$

Таким образом $\vec{a'}(2;-1)$.

б) Дана линия второго порядка γ: $2x^2 - 2xy + 6y^2 + 4x - 5 = 0$. Найти уравнения двух сопряженных диаметров, один из которых проходит через точку $(2;0)$.

Решение. Найдем уравнение того диаметра, который проходит через точку $(2;0)$.

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0.$$

Подставим значения коэффициентов и значения координат $(2;0)$. Получим:

$$p_1(2\cdot 2+2)+p_2(-2)=0,\ \ 6p_1-2p_2=0 \Rightarrow 3p_1-p_2=0 \Rightarrow p_1=1,\ \ p_2=3.$$

Уравнение диаметра, проходящего через точку $(2;0)$:

$$1\cdot(2x-y+2)+3\cdot(-x+6y)=0 \Rightarrow\ -x+17y+2=0.$$

Окончательно, ответ $x-17y-2=0$. Направляющий вектор этого диаметра $\vec{q}(17;1)$.

Напишем уравнение диаметра, сопряженного вектору $\vec{q}$:

$$17(2x-y+2)+1(-x+6y)=0,$$

окончательно

$$33x-11y+34=0.$$

в) Найти два сопряженных диаметра линии $x^2-6xy+2y^2-6x+7=0$, один из которых параллелен прямой $x-4y+5=0$.

Решение. Напишем уравнение того диаметра, который параллелен прямой $x-4y+5=0$.

$$p_1(x-3y-3)+p_2(-3x+2y)=0;$$
$$x(p_1-3p_2)+y(-3p_1+2p_2)-3p_1=0.$$

Используем условие параллельности двух прямых $\left(\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\right)$, запишем

$$\frac{p_1-3p_2}{1}=\frac{-3p_1+2p_2}{-4}.$$

Следовательно, $p_1-10p_2=0$, отсюда $p_1=10, p_2=1$.

Уравнение диаметра, параллельного прямой $x-4y+5=0$:

$$10(x-3y-3)+1(-3x+2y)=0,$$

$$7x-28y-30=0.$$

Направляющий вектор этого диаметра $\vec{q}(28;7)$ или $(4;1)$.

Уравнение диаметра, сопряженного вектору с координатами $(4;1)$:

$$4(x-3y-3)+1(-3x+2y)=0;$$
$$x-10y-12=0.$$

2.13 Главные направления линии второго порядка

Направление ненулевого вектора $\vec{p}$ называется главным относительно данной линии, если любой вектор $\vec{q}$, перпендикулярный $\vec{p}$, сопряжен с ним.

Из этого определения следует, что если $\vec{p}$ имеет главное направление, то $\vec{q}$ также имеет главное направление.

Выведем условие для определения главного направления. Пусть $\vec{p}(p_1;p_2)$. Если $\vec{q}\perp\vec{p}$, то $\vec{q}(-p_2;q_1)$. Так как $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряженные, то их координаты удовлетворяют условию

$$a_{11}p_1q_1+a_{12}p_1q_2+a_{12}p_2q_1+a_{22}p_2q_2=0.$$

Подставим вместо q_1, q_2 соответственно минус p_2 и минус p_1. Получим:

$$-a_{11}p_1p_2+a_{12}p_1^2-a_{12}p_2^2+a_{22}p_1p_2=0,$$
$$a_{12}p_1^2+(a_{22}-a_{11})p_1p_2-a_{12}p_2^2=0. \qquad (2.13.1)$$

Это условие того, что вектор $\vec{p}$ имеет главное направление относительно γ. Исследуем уравнение (2.13.1)

1) $a_{12}\neq 0$. Тогда $p_1\neq 0$. Обозначим $\frac{p_2}{p_1}=k$ – угловой коэффициент вектора $\vec{p}$. Разделим уравнение (2.13.1) на p_1^2, получим

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0. \qquad (2.13.2)$$

$$k_{1,2} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}.$$

$$D = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Следовательно, (2.13.2) имеет всегда два различных корня: k_1, k_2. А это означает, что если $a_{12} \neq 0$, то линия имеет два и только два главных направления. Эти направления взаимно перпендикулярны (легко проверить, что $k_1 \cdot k_2 = -1$).

2) $a_{12} = 0$. Из уравнения (2.13.1) следует

$$p_1 p_2 (a_{22} - a_{11}) = 0. \qquad (2.13.3)$$

Если $a_{22} - a_{11} \neq 0$, то уравнению (2.13.3) удовлетворяют два вектора $(1;0)$, $(0;1)$. Эти векторы определяют координатные оси.

Если $a_{22} - a_{11} = 0$, то $a_{22} = a_{11}$. К тому же $a_{12} = 0$. То условию (2.13.3) удовлетворяет любой вектор $(p_1; p_2)$. То есть любой вектор является главным.

Заметим, что если выполняются условия $a_{22} = a_{11}$ и $a_{12} = 0$, то кривая является окружностью.

Итак, всякая линия второго порядка (кроме окружности) имеет два и только два главных взаимно-перпендикулярных направления. Для окружности каждое направления является главным.

Замечание. При приведении уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, мы, по существу поворотом осей координат, добивается того, чтобы они имели главные направления.

Пример. Найти главные направления линии второго порядка

$$\gamma: \; x^2 - 4xy - 4y^2 - 5x + 6 = 0.$$

Решение. Координаты вектора главного направления удовлетворяют условию

$$a_{12}p_1^2+(a_{22}-a_{11})p_1p_2-a_{12}p_2^2=0.$$

В данном случае $a_{11}=1,\ a_{12}=-2,\ a_{22}=4$, $a_{12}\neq 0,\ p_1\neq 0$. Разделим на p_1^2. Обозначим $\frac{p_2}{p_1}=k$. Имеем:

$$2k^2+3k-2=0.$$

Найдем корни:

$$k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4},\ k_1=\frac{1}{2},\ k_2=-2,$$

$$k_1=\frac{1}{2}=\frac{p_2}{p_1}\ \Rightarrow\ p_1=2,\ p_2=1.$$

Следовательно, $\vec{p}_1(2;1)$.

$$k_2=-\frac{2}{1}=\frac{p_2}{p_1}\ \Rightarrow\ p_1=1,\ p_2=-2.$$

Следовательно, $\vec{p}_2(1;-2)$.

2.14 Главные диаметры

Диаметр линии второго порядка называется главным, если он перпендикулярен сопряженным осям.

Теорема. Чтобы диаметр был главным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему вектор $\vec{p}$ был главного, но неасимптотического направления.

Доказательство.

Необходимость. Пусть d_p – главный диаметр. По определению главного диаметра d_p перпендикулярен хордам, то есть $d_p\perp\vec{p}$. Пусть $\vec{p}$ сопряжен с $\vec{q}$ относительно линии γ (рисунок 62). Тогда $d_p\parallel\vec{q}$, отсюда следует, что $\vec{q}\perp\vec{p}$, следовательно, $\vec{p}$ вектор главного направления. Наличие диаметра d_p показывает, что $\vec{p}$ не имеет асимптотического направления.

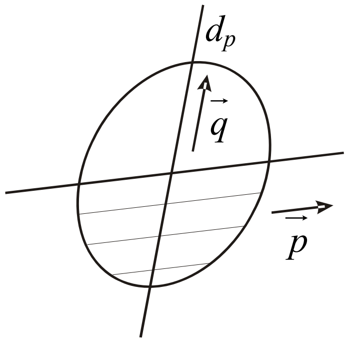


Рисунок 62

Достаточность. Пусть $\vec{p}$ – вектор главного, но не асимптотического направления, следовательно $\vec{p} \perp \vec{q}$, где $\vec{q}$ – сопряженный с ним вектор. Поскольку $d_p \parallel \vec{q}$, то $d_p \perp \vec{p}$, и, следовательно, d_p перпендикулярен сопряженным хордам, то есть d_p – главный диаметр.

Всякий диаметр окружности является главным. Эллипс (мнимый, или действительный), гипербола, пара пересекающихся действительных или комплексных прямых имеют два взаимно-перпендикулярных главных диаметра. Парабола имеет единственный главный диаметр. Для пары параллельных или слившихся прямых единственный диаметр является главным.

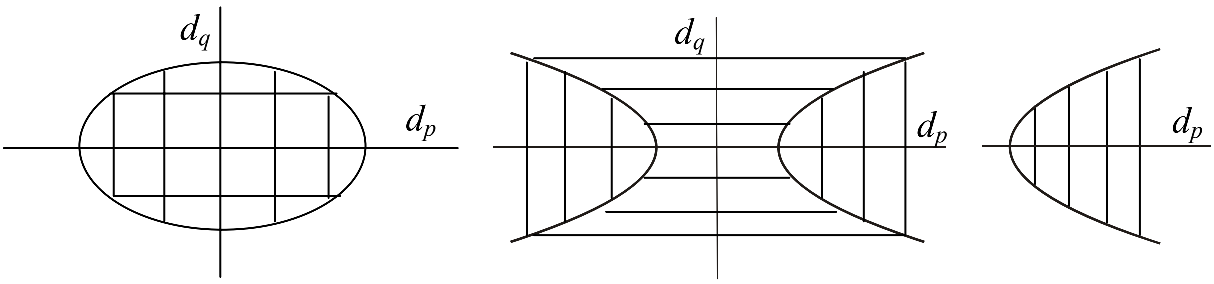


Рисунок 63 – Главные диаметры эллипса, гиперболы, параболы

Пример. Найти главные диаметры линии $\gamma:\ 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$.

1) Найдем главные направления линии второго порядка. Координаты вектора главного направления удовлетворяют условию

$$a_{12}p_1^2 + (a_{22} - a_{11})p_1 p_2 - a_{12}p_2^2 = 0.$$

Для данного случая

$$-2p_1 + (1-4)p_1 p_2 + 2p_2^2 = 0.$$

Разделим на p_1^2, с учетом обозначений $\frac{p_2}{p_1} = k$, имеем:

$$2k^2 - 3k - 2 = 0.$$

Решаем уравнение:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

$$k_1 = 2 = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow p_1 = 1,\ p_2 = 2.$$

Следовательно, $\overrightarrow{p_1}(1;2)$.

$$k_2 = -\frac{1}{2} = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow p_1 = 2,\ p_2 = -1.$$

Следовательно, $\overrightarrow{p_2}(2;-1)$.

2) Проверим, не является ли один из этих векторов вектором асимптотического направления. Координаты вектора асимптотического направления удовлетворяют условию:

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1 p_2 + a_{22}p_2^2 = 0.$$

В данном случае $\overrightarrow{p_1}(1;2)$ имеем:

$$4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 = 0,$$

следовательно, $\overrightarrow{p_1}(1;2)$ – вектор асимптотического направления.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{p_2}(2;-1)$, для него

$$4 \cdot 2^2 - 4(-1)2 + (-1)^2 = 16 + 8 + 1 \neq 0,$$

следовательно, $\overrightarrow{p_2}(2;-1)$ не является асимптотическим вектором.

Итак, один вектор $\overrightarrow{p_2}(2;-1)$ является главным, но не асимптотическим. Поэтому данная линия имеет один главный диаметр.

3) Запишем уравнение главного диаметра:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0.$$

$$2(4x - 2y - 1) - 1(-2x + y - 2) = 0.$$

Окончательный ответ:

$$10x - 5y - 2 = 0.$$

2.15 Оси симметрии линии второго порядка

Диаметр линии второго порядка есть множество середин хорд одного направления, а главный диаметр перпендикулярен к хордам. Отсюда следует, что всякий главный диаметр есть ось симметрии линии второго порядка.

Существует ли у линий второго порядка другие оси симметрии, отличные от главных диаметров? Для пары параллельных или совпавших прямых каждая прямая, перпендикулярная к данным, является осью симметрии (рисунок 64).

Рисунок 64

Для пары пересекающихся взаимно перпендикулярных прямых сами эти прямые являются осями симметрии (рисунок 65).

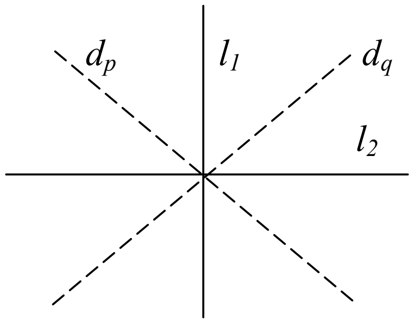


Рисунок 65

Во всех остальных случаях оси симметрии совпадают с главными диаметрами.

2.16 Касательные к линии второго порядка

Линия второго порядка задана общим уравнением

$$\gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \qquad (2.14.1)$$

Прямая

$$l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \qquad (2.14.2)$$

Определение. Прямая l называется касательной к линии γ в точке M_0, если она пересекает кривую γ в двух совпавших точках $M_0 = M_1$.

Теорема. Пусть $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$.

1) Если M_0 не является центром линии γ, то в этой точке существует одна и только одна касательная, определяемая уравнением:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0.$$

2) Если M_0 – центр линии γ, то любая прямая, проходящая через эту точку, является касательной к линии γ в этой точке.

Доказательство. Параметры точек пересечения l с γ находятся из уравнения $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. Чтобы l пересекала γ в двух совпавших точках, необходимо и достаточно, чтобы $D = Q^2 - PR = 0$. Так как $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$, то

$$R = a_{11}x_0^{\,2} + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^{\,2} + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = 0$$

(см. 2.6).

$$D = Q^2 = 0 \Rightarrow Q = 0.$$

$$Q = \alpha\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}\right) + \beta\left(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}\right) = 0. \qquad (2.14.3)$$

Итак, l является касательной к γ в точке $M_0\left(x_0; y_0\right) \in \gamma$ тогда и только тогда, когда координаты ее направляющего вектора $(\alpha; \beta)$ удовлетворяют условию (2.14.3).

1) $M_0\left(x_0, y_0\right)$ не является центром линии γ. Тогда выражения

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} \text{ и } a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}$$

не равны нулю одновременно. Так как координаты направляющего вектора прямой достаточно определить с точностью до множителя, то исходя из (2.14.3), можно принять

$$\alpha = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} \text{ и } \beta = -(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}).$$

Уравнение касательной запишем в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left(x - x_0\right)\beta - \left(y - y_0\right)\alpha = 0.$$

Тогда:

$$\left(x - x_0\right)\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}\right) + \left(y - y_0\right)\left(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}\right) = 0.$$

Преобразовав, получим:

$$\begin{gathered} \left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}\right)x + \left(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}\right)y - \\ - \left(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{10}x_0 + a_{20}y_0\right) = 0. \end{gathered}$$

Так как $M_0(x_0; y_0) \in \gamma$, то

$$a_{11}x_0^{\;2} + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^{\;2} + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 = -(a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}).$$

Окончательно имеем уравнение касательной

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0. \quad (2.14.4)$$

2) Пусть $M_0(x_0; y_0)$ центр линии γ. Тогда

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Условие $Q = 0$ запишется так: $\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, следовательно, α и β – любые действительные числа. Поэтому любая прямая, проходящая через точку M_0, является касательной к линии в этой точке.

Что и требовалось доказать.

Замечание. Если касательная имеет асимптотическое направление, то она принадлежит линии γ.

Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Пусть эти линии заданы в репере $R(0, \vec{i}, \vec{j})$ каноническими уравнениями. Так как ни одна из точек этих линий не является центром, то через каждую точку эллипса, гиперболы и параболы проходит одна касательная.

а) Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит эллипсу, тогда

$$a_{11} = \frac{1}{a^2},\ a_{22} = \frac{1}{b^2},\ a_{00} = -1,\ a_{12} = a_{10} = a_{20} = 0.$$

Уравнение (2.14.4) принимает вид

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Это уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0; y_0)$.

б) Гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе, тогда

$$a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=-\frac{1}{b^2},\ a_{00}=-1,\ a_{12}=a_{10}=a_{20}=0.$$

Уравнение (2.14.4) принимает вид

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Это уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(x_0; y_0)$.

в) Парабола $y^2=2px$ или $y^2-2px=0$. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит параболе, тогда $a_{11}=a_{12}=a_{20}=a_{00}=0, a_{22}=1, a_{10}=-p$. Уравнение (2.14.4) принимает вид

$$-px+yy_0-px_0=0,$$

или

$$yy_0=p(x+x_0).$$

Это уравнение касательной к параболе в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Примеры. а) К линии $\gamma:\ x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$ провести касательную, проходящую через точку $A(1;0)$.

Решение. Поверим, принадлежит ли точка A линии γ.

$$1-4+3=0\ \Rightarrow\ A\in\gamma.$$

В этом случае уравнение касательной имеет вид:

$$\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}\right)x + \left(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}\right)y + \left(a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}\right) = 0.$$

Подставим значение коэффициентов и координат точки A.

$$(1-2)x + (-1-3)y + (-2+3) = 0,$$
$$-x - 4y + 1 = 0.$$

Окончательно имеем: $x + 4y - 1 = 0$.

б) Через точку $B(4;1)$ провести касательную к линии γ: $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

Решение. Проверим, принадлежит ли точка $B(4;1)$ линии γ.

$$80 + 32 + 5 - 72 - 18 + 9 = 36 \neq 0,$$

следовательно, точка не принадлежит линии и использовать формулу (2.14.4) нельзя.

Касательная пересекает линию γ в двух совпавших точках. Подберем направляющий вектор прямой так, чтобы $Q^2 - PR = 0$.

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 5\alpha^2 + 8\alpha\beta + 5\beta^2;$$
$$Q = \alpha\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}\right) + \beta\left(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}\right) =$$
$$= \alpha(5\cdot 4 + 4 - 9) + \beta(4\cdot 4 + 5 - 9) = 15\alpha + 12\beta;$$
$$R = a_{11}{x_0}^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}{y_0}^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}.$$

Нетрудно подсчитать, что $R = 36$.

$$D = Q^2 - PR = 225\alpha^2 + 360\alpha\beta + 144\beta^2 - 180\alpha^2 - 228\beta - 180\beta^2 =$$
$$= 45\alpha^2 + 72\alpha\beta - 36\beta^2 = 0.$$

Разделив на 9, имеем $5\alpha^2 + 8\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$. Теперь разделим обе части уравнения на минус α^2, с учетом обозначения $\frac{\beta}{\alpha} = k$, получаем квадратное уравнение

$$4k^2 - 8k - 5 = 0,$$

решая которое, получаем

$$k_1 = \frac{5}{2}, k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Уравнение касательной находим в виде: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$1)\ y - 1 = \frac{5}{2}(x - 4) \Rightarrow 5x - 2y - 18 = 0,$$

$$2)\ y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow x + 2y - 6 = 0.$$

Итак, через точку $B(4;1)$ к линии γ можно провести две касательные $5x - 2y - 18 = 0$ и $x + 2y - 6 = 0$.

в) К кривой $\gamma: x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ провести касательные, параллельные прямой $3x + 3y - 5 = 0$.

Решение. Запишем уравнение касательной виде

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0. \quad (2.14.5)$$

С учетом данных, имеем

$$\left(x_0 + \frac{1}{2}y_0 + 1\right)x + \left(\frac{1}{2}x_0 + y_0 + \frac{3}{2}\right)y + \left(x_0 + \frac{3}{2}y_0 - 3\right) = 0.$$

Так как касательная должна быть параллельна прямой $3x+3y-5=0$, используем условие параллельности двух прямых:

$$\frac{x_0+\frac{1}{2}y_0+1}{3}=\frac{\frac{1}{2}x_0+y_0+\frac{3}{2}}{3} \Rightarrow x_0-y_0-1=0. \qquad (2.14.6)$$

Поскольку координаты точки касания удовлетворяют уравнениям (2.14.5) и (2.14.6), то решим их совместно и найдем x_0 и y_0.

Из (2.14.6) следует, что $y_0=x_0-1$. Подставим это значение в уравнение (2.14.5).

$$x_0^2+x_0(x_0-1)+(x_0-1)^2+2x_0+3(x_0-1)-3=0,$$

$$3x_0^2+2x_0-5=0.$$

Решая это квадратное уравнение, имеем:

$$(x_0)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{16}}{3}=\frac{-1\pm 4}{3}.$$

$$(x_0)_1=1 \Rightarrow (y_0)_1=0 \text{ и } (x_0)_2=-\frac{5}{3} \Rightarrow (y_0)_2=-\frac{8}{3}.$$

Получились две точки касания $A_1(1;0)$ и $A_1\left(-\frac{5}{3};-\frac{8}{3}\right)$. Найденные координаты точек касания поочередно подставляем в уравнение (2.14.5) и получаем уравнения касательных: $x+y-1=0$ и $3x+3y+13=0$.

3 Практические занятия

3.1 Эллипс. Гипербола. Парабола

Контрольные вопросы

1. Что называется эллипсом, фокусами эллипса, фокальными радиусами точки эллипса.

2. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса? Что представляет из себя система координат, в которой записывается это уравнение?

3. Что называется эксцентриситетом эллипса? Как зависит форма эллипса от его эксцентриситета?

4. Как написать параметрическое уравнение эллипса?

5. Сколько центров и осей симметрии у эллипса?

6. Что называется гиперболой? Что называют фокусами гиперболы, фокальными радиусами этой точки?

7. Как написать каноническое уравнение гиперболы? Как выбрана при этом система координат?

8. Сколько центров и осей симметрии у гиперболы?

9. Что называют асимптотами гиперболы, ее эксцентриситетом?

10. Что называется параболой? Что называют фокусом и директрисой параболы?

11. Как написать каноническое уравнение параболы? Как выбрана при этом система координат?

12. Сколько центров и осей симметрии у параболы? Есть ли у нее асимптоты?

13. Что называют директрисами эллипса (гиперболы)? Как формулируется директориальное свойство эллипса (гиперболы)?

14. Как написать уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах?

Задачи для аудиторных занятий

Во всех задачах этой главы предполагается, что система координат прямоугольная декартова. Из задач, предлагаемых для аудиторной и домашней работы можно выбирать задания, наиболее подходящие для студентов различных специальностей и направлений подготовки.

1. Написать уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $A(-4;0)$ и $B(4;0)$ равна 10.

2. Написать уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до прямой, заданной уравнением $x-4=0$, вдвое больше расстояния до точки $A(1;0)$.

3. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса, заданного уравнением $x^2+9y^2=9$.

4. Написать уравнение множества всех точек плоскости, для которых абсолютное значение разности расстояний до точек $A(-4;0)$ и $B(4;0)$ равно 6.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, если угол между ее асимптотами равен 60^0 и гипербола проходит через точку $A(6;3)$.

6. Написать каноническое уравнение и уравнение асимптот гиперболы, проходящей через точки $A(1;0)$ и $B(\sqrt{5};4)$. Найти эксцентриситет этой гиперболы.

7. Через один из фокусов гиперболы, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проведена хорда, параллельная оси ординат. Найти ее длину.

8. Написать уравнение параболы с фокусом $F(4;2)$ и одноименной директрисой, заданной уравнением $x+3y-6=0$.

9. Точка с координатами $(2;1)$ является серединой хорды параболы, заданной уравнением $y^2=4x$. Написать уравнение прямой, на которой лежит хорда.

10. Доказать, что хорда параболы проходит через ее фокус, то расстояние от середины этой хорды до директрисы параболы равно половине длины хорды.

11. Написать уравнение эллипса с фокусами F_1 и F_2; эксцентриситетом ε и малой полуосью b в полярной системе координат $\left(O,\vec{i}\right)$, если полюс O совпадает с фокусом: а) F_1, а $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{F_1F_2}$, б) F_2, а $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{F_1F_2}$.

12. Написать в полярной системе координат $\left(O,\vec{i}\right)$ уравнение окружности с центром C радиуса r, если точка C: а) совпадает с точкой O; б) имеет полярные координаты $(r,0)$; в) имеет полярные координаты (ρ_0,φ_0).

13. Написать каноническое уравнение гиперболы, которая в полярной системе координат задана уравнением $\rho = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$.

14. Написать уравнение параболы с фокальным параметром p в полярной системе координат, приняв ось параболы за полярную ось и ее вершину – за полюс (полярная ось направлена от вершины параболы к фокусу).

Домашнее задание

15. Найти эксцентриситет эллипса, у которого сумма полуосей равна расстоянию между фокусами.

16. Через один из фокусов эллипса, заданного уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проведена хорда, параллельная оси ординат. Найти ее длину.

17. Эллипс задан уравнением $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Через точку $C(-2;1)$ проведена хорда эллипса, делящаяся в этой точке пополам. Написать параметрические уравнения прямой, на которой лежит эта хорда.

18. Написать уравнения множества всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до точки $A(4;0)$ вдвое больше расстояния до прямой, заданной уравнением $x-1=0$.

19. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, директрисы и асимптоты гиперболы, заданной уравнением $16x^2-9y^2=144$.

20. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот не зависит от выбора точки на гиперболе.

21. Написать уравнение параболы: а) фокус которой имеет координаты $(5;0)$, а ось ординат является директрисой; б) которая проходит через точки $A(0;0)$, $B(1;4)$ и симметрична относительно оси абсцисс; в) которая симметрична относительно оси ординат, имеет вершину в начале координат и фокус в точке с координатами $(0;2)$.

22. На прямой, заданной уравнением $8x-3y+6=0$, найти точку, которая одинаково удалена от прямой $x-5=0$ и точки $A(-3;2)$.

23. Написать уравнение эллипса в полярной системе координат, полюс которой совпадает с одним из фокусов, а полярная ось направлена в сторону второго фокуса, если эллипс задан каноническим уравнением:

$$\text{а) } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1; \qquad \text{б) } \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{10}=1.$$

24. Написать каноническое уравнение эллипса, который в полярной системе координат задан уравнением $\rho=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}$.

25. Написать каноническое уравнение параболы, которая в полярной системе координат задана уравнением $\rho=\dfrac{7}{1-\cos\varphi}$.

Дополнительные задачи

26. Написать каноническое уравнение эллипса с эксцентриситетом $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и большой полуосью $a=3$.

27. Написать уравнения гиперболы, асимптоты которой заданы уравнениями $4y+3x=0$ и $4y-3x=0$, а директрисы – уравнениями $5x+16=0$ и $5x-16=0$.

28. Найти координаты фокуса и написать уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $3y^2+16x=0$.

29. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 метров от начального положения. Определить фокальный параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.

30. Доказать, что произведение длин отрезков перпендикуляров, проведенных из концов любой хорды параболы, проходящей через ее фокус, на ось параболы, постоянно.

31. Доказать, что окружность, построенная на большой оси эллипса, как на диаметре, касается окружности, диаметром которой служит фокальный радиус произвольной точки эллипса.

3.2 Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления, асимптоты

Контрольные вопросы

1. Почему понятие мнимой точки не зависит от выбора системы координат?

2. Указать, если это возможно, координаты какой-нибудь действительной, или мнимой точки следующих линий второго порядка:

а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $x^2 + y^2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = -1$; г) $x^2 = 0$; д) $xy = 1$.

3. Что представляет собой множество точек плоскости, координаты каждой из которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$.

4. Сформулировать определение асимптотического направления относительно линии второго порядка и привести примеры линий, которые а) не имеют асимптотических направлений; б) имеют одно асимптотическое направление; в) имеют два асимптотических направления; г) имеют более двух асимптотических направлений.

5. Почему знак выражения $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, составленного из коэффициентов общего уравнения линии второго порядка, не зависит от выбора системы координат?

6. Может ли не иметь асимптотических направлений линия второго порядка: а) если для коэффициентов общего уравнения линии второго порядка выполнено условие $a_{11} \cdot a_{22} = 0$; б) если члены второго порядка из общего уравнения линии $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ образуют полный квадрат; в) если $a_{12} = 0$ и $a_{11} \cdot a_{22} \le 0$?

7. Пересекается ли окружность радиуса r с прямой, расстояние которой от центра окружности больше r?

Задачи для аудиторных занятий

1. Выяснить (устно), имеют ли оси координат асимптотическое направление относительно линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $x^2 + 4xy - 4x - y + 4 = 0$; б) $x^2 - 4x - y + 3 = 0$; в) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 18y = 0$;

г) $x^2 - 4 = 0$; д) $y^2 = 0$; е) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$?

2. Найти векторы асимптотических направлений линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0 = 0$; б) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$;

в) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$.

3. Через точку $A(2;0)$ проведены две прямые, имеющие лишь по одной общей точке с линией, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $3x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 4y - 5 = 0$. Написать уравнения этих прямых и найти угол между ними.

4. Написать общее уравнение линии второго порядка, для которой ось абсцисс: а) имеет асимптотическое направление; б) не имеет с линией общих точек.

5. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(0;-5)$ и имеющей асимптоты, заданные уравнениями $x - 1 = 0$ и $2x - y + 1 = 0$.

Домашнее задание

6. Найти векторы асимптотических направлений линии второго порядка, заданной уравнениями:

а) $x^2-2xy+5x-y=0$; б) $y^2+5x-3y-1=0$;

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda$; г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$, где λ – некоторое вещественное число.

7. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат и пересекающих линию, заданную уравнением $6x^2-xy-y^2+5x-3y+2=0$, лишь в одной точке.

8. При каком значении параметра k прямая $y=kx+b$ является прямой асимптотического направления относительно линии, заданной уравнением $9x^2-24xy+16y^2-34x-38y+1=0$?

9. Найти условия для коэффициентов общего уравнения линии второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат, при которых обе прямые, содержащие биссектрисы координатных углов, имеют асимптотические направления.

10. Написать общее уравнение линии второго порядка, для которой обе координатные оси: а) имеют асимптотическое направление; б) не имеют с линией общих точек.

Дополнительные задачи

11. В прямоугольной декартовой системе координат линия второго порядка задана уравнением $2x^2-3xy+y^2-7x+\lambda y+4=0$. При каком значении параметра λ эта линия: а) отсекает на оси ординат хорду длиной, равной 3; б) касается оси ординат?

12. Написать уравнения асимптот второго порядка, заданной уравнением:

а) $2x^2+3xy+y^2-2x+y=0$; б) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$;

в) $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$; г) $2x^2+xy+y^2+11x+4y+5=0$;

д) $x^2+2xy+y^2-x-y=0$.

13. Написать общее уравнение линии второго порядка, если известно, что ее пересекает лишь в одной точке ось абсцисс и все прямые, параллельные оси абсцисс. Что представляет собой эта линия?

14. Написать уравнение линии второго порядка, которая пересекает каждую из координатных осей только в начале координат и проходит через точки $A(2;-1)$ и $B(-2;2)$.

3.3 Центр линии второго порядка. Касательная

Контрольные вопросы

1. Что называется центром линии второго порядка? Записать систему уравнений для нахождения координат центра. Сколько решений может иметь эта система? Что можно сказать о центрах линии второго порядка, уравнения которых отличаются только свободным членом?

2. Может ли линия второго порядка с уравнением $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$ не иметь центров?

3. Какие линии второго порядка называют центральными? Почему все линии параболического типа являются нецентральными? Верно ли обратное утверждение?

4. Какие точки линии второго порядка называются особыми? Назвать все линии второго порядка, которые: а) не имеют особых точек; б) имеют только одну особую точку; в) имеют более одной особой точки.

5. Почему все точки эллипса, гиперболы и параболы являются обыкновенными точками? Как определяется касательная к линии второго порядка в обыкновенной точке? Какой вид имеет уравнение касательной к каждой из этих линий в обыкновенной точке $M_0(x_0; y_0)$, если линии заданы своим каноническими уравнениями?

6. Сформулировать оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы. Выполнить соответствующие чертежи.

7. Существуют ли линии второго порядка, у которых: а) нет центра, и имеются две взаимно перпендикулярные оси симметрии; б) касательная имеет

асимптотическое направление; в) прямая, параллельная касательной, имеет с линией менее двух общих точек; г) есть три центра, не лежащие на одной прямой; д) каждая точка линии является ее центром.

8. Может ли линия второго порядка иметь с некоторой прямой: а) не менее двух точек касания; б) только две точки касания.

Задачи для аудиторных занятий

1. Найти множество центров для линий, заданных уравнениями:

а) $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$; б) $4x^2-4xy+y^2-6x+8y+13=0$;

в) $x^2-2xy+y^2-6x+6y-3=0$; г) $y^2=2x$.

2. Написать общий вид уравнения линии второго порядка, имеющей хотя бы один центр, совпадающий с началом координат.

3. Написать уравнение линии второго прядка, если она имеет центр в точке $C(0;-1)$, проходит через точку $A(3;0)$ и пересекает каждую из прямых $2x-3y+1=0$ и $x+y-5=0$ лишь в одной точке.

4. Написать уравнения касательных, проведенных через точку $A(-2;1)$ к линии, заданной уравнением $2x^2-xy-y^2-15x-3y+18=0$.

5. Написать уравнения касательных к линии, заданной уравнением $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ в точках этой линии, абсциссы которых равны минус 2.

6. Написать уравнение параболы, касающейся оси абсцисс в точке $A(3;0)$ и оси ординат в точке $B(0;5)$.

Домашнее задание

7. Найти множество всех центров линии, заданной уравнением

а) $3x^2-12xy+6y^2+2x-2y+5=0$;

б) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

в) $x^2+4xy+4y^2=0$;

г) $y^2=\lambda$, где λ – некоторое вещественное число.

8. При каких значениях параметров a и b уравнение $x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$ определяет линию второго порядка а) без центров; б) с прямой центров; в) с одним центром.

9. Линия второго порядка проходит через точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$, начало координат и симметрична относительно точки $C(2;3)$. Написать уравнение касательной к этой линии в начале координат.

10. Написать уравнения тех касательных к линии, заданной уравнением $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$, которые параллельны прямой $x - 2y + 7 = 0$.

Дополнительные задачи

11. Написать общий вид уравнения линии второго порядка, для которой ось абсцисс является прямой центров.

12. Линия второго порядка задана уравнением $xy = m$, где $m \neq 0$. Написать уравнение касательной к этой линии в ее точке с координатами $(x_0; y_0)$.

13. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через начало координат и касающейся прямой $4x + 3y + 2 = 0$ в точке $A(1;-2)$ и прямой $x - y - 1 = 0$ в точке $B(0;-1)$.

3.4 Диаметры линии второго порядка. Сопряженные направления

Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение диаметра линии второго порядка, сопряженного вектору $\vec{p}$ неасимптотического направления. Пояснить, почему в определении используется вектор неасимптотического направления.

2. Записать уравнение диаметра линии второго порядка, заданной общим уравнением. Почему это уравнение является уравнением прямой? Любая ли линия второго порядка имеет хотя бы один диаметр?

3. Серединой какой хорды является точка M диаметра d, изображенного на рисунке 66?

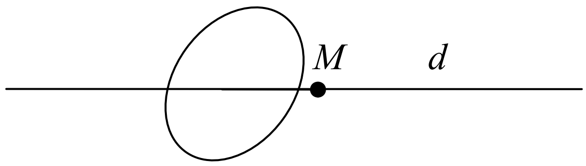


Рисунок 66

4. Почему центр линии второго порядка принадлежит любому ее диаметру?

5. Что можно сказать о диаметрах: а) линий второго порядка, имеющих прямую центров; б) нецентральных линий второго порядка?

6. Почему все диаметры параболы параллельны? Сколько диаметров у параболы?

7. Какие диаметры линий второго порядка называют сопряженными? У каждой ли линии второго порядка есть сопряженные диаметры?

8. Какие два направления называются сопряженными относительно линии второго порядка, и в чем состоит геометрический смысл сопряженности направлений?

9. Сколько направлений сопряжено направлению вектора $\vec{p} \neq \vec{0}$, если: а) $\vec{p}$ задает неасимптотическое направление; б) $\vec{p}$ является вектором асимптотического направления относительно центральной линии; в) $\vec{p}$ является вектором асимптотического направления относительно нецентральной линии второго порядка?

10. Сколько общих диаметров могут иметь: а) эллипс и гипербола; б) эллипс и парабола; в) центральная и нецентральная линии; г) две нецентральные линии; д) две центральные линии второго порядка?

Задачи для аудиторных занятий

1. Дана линия второго порядка уравнением $x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$. Написать уравнение множества середин хорд, параллельных: а) вектору $\vec{a}(1;2)$; б) вектору $\vec{b}(4;-2)$; в) прямой, заданной уравнением $4x - 2y + 13 = 0$; г) оси ординат.

2. Дана линия второго порядка уравнением $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$. Написать уравнения диаметра, параллельного оси абсцисс, и диаметра, ему сопряженного.

3. Найти середину хорды, отсекаемой линией $2x^2+4xy+3y^2-3x-3y=0$ на прямой $x+3y-12=0$.

4. Написать уравнение общего диаметра двух линий второго порядка, заданных уравнениями:

а) $x^2-xy-y^2-x-y=0$ и $x^2+2xy+y^2-x+y=0$;

б) $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$ и $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

в) $4x^2-4xy+y^2-6x+8y+13=0$ и $4x^2-4xy+y^2-1=0$.

5. Доказать, что уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$ можно находить, пользуясь уравнением $(a_{11}p_1+a_{12}p_2)x+(a_{21}p_1+a_{22}p_2)y+a_{10}p_1+a_{20}p_2=0$, где $p_1,\ p_2$ – координаты вектора асимптотического направления.

6. Написать уравнения асимптот гиперболы $2x^2+3xy+y^2-2x+y=0$.

7. Доказать, что направления осей координат сопряжены относительно линии второго порядка тогда и только тогда, когда в общем уравнении этой линии отсутствует член с произведением текущих координат.

Домашнее задание

8. Дана линия второго порядка уравнением $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$. Написать уравнением прямой, проходящей через середины хорд, отсекаемой этой линией на прямых $4x+5y=0$ и $4x+5y+1988=0$.

9. Написать уравнение диаметра, сопряженного вектору $\vec{p}(\alpha;\beta)$, если линия второго порядка задана уравнением:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; в) $y^2=2px$; г) $xy=m$.

10. Написать уравнение того диаметра линии, заданной уравнением $4x^2 - 6xy + y^2 - 8y + 1 = 0$, который проходит через точку $A(0;1)$.

11. Написать уравнение общего диаметра линий, заданных уравнениями:

а) $4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y = 0$ и $x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 7 = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 1$ и $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Дополнительные задачи

12. Найти направления, сопряженные направлению $\vec{p}(\alpha;\beta)$, относительно линий второго порядка, заданных уравнениями:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda$, где λ – некоторое вещественное число;

б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$; в) $y^2 = 2px$; г) $xy = m$.

13. Дана линия второго порядка уравнением $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$. Написать уравнение диаметра: а) проходящего через начало координат; б) сопряженного хордам, параллельным оси абсцисс; в) сопряженного хордам, параллельным оси ординат.

14. Написать уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением:

а) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$;

б) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

в) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;

г) $xy = \lambda$, где λ – некоторое ненулевое вещественное число.

15. Указать особенности расположения по отношению к системе координат линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $3x^2 + 2xy + y^2 - 7 = 0$; б) $5x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0$; в) $x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$;

г) $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$; д) $3x^2 - 4y^2 + 2y + 5 = 0$; е) $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$.

3.5 Главные направления. Главные диаметры. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение главного направления относительно линии второго порядка.

2. Почему направление, перпендикулярное главному, также является главным?

3. Записать условие, из которого по общему уравнению линии второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат находятся координаты вектора главного направления. Сколько главных направлений может иметь линия второго порядка?

4. Может ли главное направление относительно линии второго порядка совпадать с асимптотическим?

5. Сформулировать определение главного диаметра линии второго порядка. Почему главный диаметр является осью симметрии линии второго порядка? Верно ли обратное утверждение?

6. Сколько главных диаметров может иметь линия второго порядка?

7. Почему любая линия второго порядка имеет хотя бы одну ось симметрии?

8. Сколько существует типов линий второго порядка? Назвать все линии второго порядка.

9. Назвать все: а) центральные линии второго порядка; б) нецентральные линии с прямой центров; в) нецентральные линии без центров.

10. Назвать все линии второго порядка, у которых: а) два асимптотических направления; б) одно асимптотическое направление; в) нет асимптотических направлений.

11. Назвать все линии второго порядка, у которых: а) нет особых точек; б) одна особая точка; в) более одной особой точки.

12. Назвать все линии второго порядка, у которых: а) два главных направления; б) более двух главных направлений; в) нет главных диаметров; г) один

главный диаметр; д) два главных диаметра; е) более двух главных диаметров; ж) есть ось симметрии, которая не является главным диаметром.

13. Доказать утверждение: для того, чтобы направление вектора $\vec{n}(\alpha;\beta)$ было одновременно главным и асимптотическим относительно линии второго порядка, заданной уравнением $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения: $a_{11}\alpha+a_{12}\beta=0$, $a_{21}\alpha+a_{22}\beta=0$.

14. Как осуществляется приведение уравнения кривой второго порядка, заданной в прямоугольной декартовой системе координат, к каноническому виду? Единственным ли образом находится система координат, в которой линия имеет каноническое уравнение?

15. В системе координат $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ линия задана одним из уравнений а) – ж). Как расположена система координат, в которой эта линия имеет каноническое уравнение?

а) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

б) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

в) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$;

г) $xy=1$;

д) $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

е) $b^2(x-1)^2+a^2(y+2)^2=a^2b^2$;

ж) $(x-a)(y-b)=0$.

Задачи для аудиторных занятий

1. Найти главные направления и написать уравнения главных диаметров линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6=0$;

б) $x^2+y^2+2x+2y-14=0$;

в) $4x^2+y^2+2y+3=0$;

г) $2xy-4x+2y-3=0$;

д) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$;

е) $x^2-a^2=0$.

2. Найти ось симметрии и вершину параболы, заданной уравнением:

а) $x^2+4xy+4y^2-6x-2y+1=0$; б) $x^2-6x+4y+5=0$.

3. Пользуясь переносом начала координат, упростить уравнение линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $x^2+4y^2-4x-8y-8=0$;

б) $x^2-9y^2-4x+18y-5=0$;

в) $x^2-y^2-4y-2=0$;

г) $-x^2+y^2+2x-4y+2=0$.

Изобразить линию в исходной системе координат.

4. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка, записать формулы преобразования координат, начертить исходную и новую системы координат и изобразить на чертеже линию, заданную уравнением:

а) $2x^2-12xy-7y^2+8x+6y=0$;

б) $2xy+4x+2y+5=0$;

в) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

г) $2xy+3x-y-2=0$.

Домашнее задание

5. Найти направления хорд, перпендикулярных сопряженному диаметру, для линии заданной уравнением $3x^2+4xy+5y^2+2x-y+7=0$.

6. Найти главные диаметры линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $4x^2+8xy+4y^2+10x+2y-11=0$;

б) $xy=m$, где m – некоторое действительное число.

7. Определить вид линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$;

б) $(x+y+1)\cdot(x-y-1)=1$.

Дополнительные задачи

8. Привести к каноническому виду и определить тип линии второго порядка, заданной уравнением:

а) $29x^2+144xy+71y^2-40x+30y-50=0$;

б) $9x^2-6xy+y^2-3\sqrt{10}x-9\sqrt{10}y-90=0$;

в) $9x^2+4y^2-12xy+39=0$.

9. Найти вершину параболы, заданной уравнением:

а) $9x^2-12xy+4y^2-8x=0$; б) $3y^2+2x-6y+5=0$.

Ответы

3.1 Эллипс. Гипербола. Парабола

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 4. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$. 5. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. 6. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$; $y=2x$ и $y=-2x$; $\varepsilon=\sqrt{5}$. 7. $\frac{2b^2}{a}$. 8. $9x^2-6xy+y^2-68x-4y+164=0$. 9. $2x-y-3=0$. 10. Указание: воспользоваться каноническим уравнением параболы. 11. а) $\rho=\frac{b^2}{a(1-\varepsilon\cos\varphi)}$; б) $\rho=\frac{b^2}{a(1+\varepsilon\cos\varphi)}$, где a и b – полуоси, ε – эксцентриситет эллипса. 12. а) $\rho=r$; б) $\rho=2r\cos\varphi$; в) $\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\varphi-\varphi_0)=r^2-\rho_0^2$. 13. $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}=1$. 14. $\rho=\frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. 15. $\frac{4}{5}$. 16. $\frac{2b^2}{a}$. 17. $x=-2+9t, y=1+8t$. 18. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. 19. 3 и 4; (–5;0) и (5;0); $\varepsilon=\frac{5}{3}$; директрисы: $x+\frac{9}{5}=0$ и $x-\frac{9}{5}=0$; асимптоты: $y+\frac{4}{3}x=0$ и $y-\frac{4}{3}x=0$. 20. Указание: воспользоваться каноническим уравнением гиперболы. 21. а) $y^2=10x-25$; б) $y^2=16x$; в) $x^2=8y$. 22. Две точки с координатами (–3;–6) и $\left(\frac{3}{4};4\right)$. Указание: воспользоваться уравнением параболы с директрисой $x-5=0$ и фокусом А(–3;2). 23. а) $\rho=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{2}\cos\varphi}$.
24. $\frac{X^2}{4}+Y^2=1$. 25. $Y^2=14X$. 26. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$. 27. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 28. $\left(-\frac{4}{3};0\right)$; $x-\frac{4}{3}=0$.
29. $\frac{8}{3}$. 30. Указание: воспользоваться каноническим уравнением параболы. 31. Указание: выразить расстояние между центрами окружностей через их радиусы.

3.2 Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления, асимптоты

1. Ось абсцисс имеет асимптотическое направление в случае д), ось ординат в случаях а), б) и г). Указание: ось абсцисс (ординат) имеет асимптотическое направление тогда и только тогда, когда в уравнении линии второго порядка отсутствует член с x^2 (с y^2). 2. а) (1;4) и (1;1); б) (3;1); в) нет асимптотических направлений. 3. $3x-y-6=0$ и $x-2y-2=0$. 4. а) $a_{11}=0$; б) $a_{11}=a_{10}=0$, $a_{00}\neq 0$. 5. $2x^2-xy-x+y+5=0$. 6. а) (0;1) и (2;1); б) (1;0); в) нет асимптотических направлений; г) (a;b) и (a;–b); д) (0;1). 7. $y=2x$ и $y=-3x$. 8. $\dfrac{3}{4}$. 9. $a_{11}+a_{22}=0$, $a_{12}=0$. 10. а) $a_{11}=a_{22}=0$; б) $a_{11}=a_{22}=a_{10}=a_{20}=0$, $a_{00}\neq 0$. Указание: смотри задачу 4 данного подраздела. 11. а) 5 или минус 5; б) 4 или минус 4. 12. а) $2x+y+4=0$ и $x+y-3=0$; б) $2x-3y+1=0$ и $x-1=0$; в) $6x+14y+11=0$ и $2x+2y-1=0$; г) нет асимптот; д) $x+y=0$ и $x+y-1=0$. 13. $a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0$, где $a_{10}\neq 0$. Параболы, оси которых имеют направление оси абсцисс. 14. $xy+4x+6y=0$.

3.3 Центр линии второго порядка. Касательная

1. а) Один центр (3;–2); б) и г) нет центров; в) прямая центров $x-y-3=0$. 2. $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{00}=0$. 3. $2x^2-xy-3y^2-x-6y-15=0$. 4. $4x+5y+3=0$. 5. $7x+4y+10=0$ в точке (–2;1) и $3x-4y+18=0$ в точке (–2;3). 6. $25x^2-30xy+9y^2-150x-90y+225=0$. 7. а) Один центр $\left(0;\dfrac{1}{6}\right)$; б) один центр $(-1;-1)$; в) прямая центров $x+2y=0$; г) прямая центров $y=0$8. 8. а) при $a=9$, $b\neq 9$; б) при $a=b=9$; в) $a\neq 9$. 9. Указание: линия имеет уравнение $5x^2-5xy+2y^2-5x-2y=0$. 10. $2x-4y+5=0$. 11. $a_{22}y^2+a_{00}=0$. 12. $xy_0+yx_0=2m$. 13. $6x^2+3xy-y^2+2x-y=0$.

3.4 Диаметры линии второго порядка. Сопряженные направления

1. а) $4x-5y+8=0$; б) $7x-10y-6=0$; в) $4x-5y+8=0$; г) $3x-4y+2=0$. 2. $y-1=0$ и $4x+5y+3=0$. 3. (–3;5). 4. а) $5x+5y+2=0$; б) $x+4y+5=0$; в) $2x-y=0$. 5. Указание: использовать каноническое уравнение гиперболы. 6. $2x+y+4=0$ и $x+y-3=0$. 7. Указание: воспользоваться условием сопряженности двух направлений. 8. Указание: составить уравнение диаметра данной линии, сопряженного направлению вектора (–5; 4). 9. а) $\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=0$; б) $\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}=0$; в) $\beta y-\alpha p=0$; г) $\beta x-\alpha y=0$. 10. $7x-4y+4=0$. 11. а) $4x-7y+17=0$; б) $x-y=0$. 12. Указание: смотри задачу 9 данного подраздела. 13. а) $x-3y=0$; б) $x-3y-6=0$; в) $3x-9y-7=0$. 14. а) $2x-3y+1=0$ и $x-1=0$; б) $6x+14y+11=0$ и $2x+2y-1=0$; в) $5x+3=0$ и $25x-5y+13=0$; г) $x=0$ и $y=0$. 15. а) Начало координат совпадает с центром линии; б) ось абсцисс является диаметром, а ось ординат параллельна сопряженному диаметру; в) линия проходит через начало координат, оси координат имеют сопряженные направления; г) оси координат являются сопряженными диаметрами; д) ось ординат является диаметром линии, а ось абсцисс параллельна сопряженному диаметру; е) оси координат имеют сопряженные направления относительно этой линии второго порядка.

3.5 Главные направления. Главные диаметры. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

1. а) $2x-4y-5=0$; б) любое направление – главное; главным диаметром будет любая прямая, проходящая через точку $(-1;-1)$; в) $y+1=0, x=0$; г) $x+y-1=0, x-y+3=0$; д) при $a=b$ любое направление – главное; главным диаметром будет любая прямая, проходящая через начало координат; при $a\neq b$ главные направления совпадают с направлениями осей координат; сами оси координат в этом случае и являются главными диаметрами; е) главные

направления – направления осей координат; главный диаметр один – ось ординат. 2. а) $x+2y-1=0$, $\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$; б) $x-3=0$, (3;1). 3. Указание: выделить в левых частях уравнений полные квадраты вида $(x-a)^2$, $(y-b)^2$. 4. а) $10x'^2-5y'^2=1$; $x=\frac{x'}{\sqrt{5}}-\frac{2y'}{\sqrt{5}}-\frac{1}{5}$, $y=\frac{2x'}{\sqrt{5}}+\frac{y'}{\sqrt{5}}+\frac{3}{5}$; б) $x'^2-y'^2=1$; $x=\frac{\sqrt{2}x'}{2}+\frac{\sqrt{2}y'}{2}-1$, $y=-\frac{\sqrt{2}x'}{2}+\frac{\sqrt{3}y'}{2}-2$; в) $2x'^2-2y'^2=1$; $x=\frac{\sqrt{2}x'}{2}+\frac{\sqrt{2}y'}{2}+\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}x'}{2}-\frac{\sqrt{2}y'}{2}-\frac{3}{2}$; г) $y'^2=2x'$; $x=-\frac{4x'}{5}-\frac{3y'}{5}+\frac{18}{5}$, $y=-\frac{3x'}{5}+\frac{4y'}{5}+\frac{1}{5}$. 5. $\left(2;1-\sqrt{5}\right)$ и $\left(2;1+\sqrt{5}\right)$. 6. а) $4x+4y+3=0$; б) $x-y=0$ и $x+y=0$. 7. а) Парабола; б) гипербола. 8. а) $5x'^2-y'^2=1$; б) $y'^2=3x'$; в) $x'^2+3=0$. 9. а) $\left(\frac{18}{169};-\frac{51}{169}\right)$; б) (–1;1).

Контрольная работа по теме «Линии второго порядка»

для студентов направления подготовки 010100.62 Математика

Вариант 1

1. Привести к каноническому виду следующее уравнение линии второго порядка γ, записанное в прямоугольной декартовой системе координат: $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 30x - 40y - 25 = 0$.

2. Написать в прямоугольной декартовой системе координат уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до прямой, заданной уравнением $y + 4 = 0$, вдвое больше расстояния до точки $A(0;-1)$.

3. Найти сторону правильного треугольника, вписанного в параболу, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $y^2 = 2px,\ p > 0$.

Вариант 2

1. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(-5;0)$ и имеющей асимптоты, заданные уравнениями $y - 1 = 0,\ x - 2y - 1 = 0$.

2. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка γ и изобразить ее, если γ в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

3. Написать в прямоугольной декартовой системе координат уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до точек $A(0;-2)$ и $B(0;2)$ равно 3.

Вариант 3

1. Линия второго порядка γ задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y = 0$. Привести уравнение линии γ к каноническому виду и изобразить в данной системе координат.

2. Написать в прямоугольной декартовой системе координат уравнение множества всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от точки $A(4;2)$ и прямой l, заданной уравнением $x+3y-6=0$.

3. Парабола задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $y^2=8x$. Одна из вершин треугольника, вписанного в параболу, совпадает с вершиной параболы, а точка пересечения высот треугольника совпадает с ее фокусом. Написать уравнения прямых, содержащих стороны этого треугольника.

Вариант 4

1. Доказать, что произведение длин отрезков перпендикуляров, проведенных из концов любой хорды параболы, проходящей через ее фокус, на ось параболы, постоянно.

2. Написать уравнение эллипса с фокусами F_1 и F_2 в полярной системе координат $(F_1,\vec{i})$, где $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{F_1F_2}$, если эллипс задан каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{10}=1$.

3. Линия второго порядка γ задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$. Привести уравнение линии γ к каноническому виду и изобразить в данной системе координат.

Вариант 5

1. Написать уравнение линии второго порядка, которая пересекает каждую из координатных осей только в начале координат и проходит через точки $A(-1;2)$ и $B(2;-2)$.

2. Линия второго порядка γ задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$. Привести уравнение линии γ к каноническому виду и изобразить в данной системе координат.

3. Написать в прямоугольной декартовой системе координат уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до точки $A(0;8)$ вдвое больше расстояния до прямой, заданной уравнением $y-2=0$.

Вариант 6

1. Написать полярной системе координат $(O,\vec{i})$ уравнение гиперболы с эксцентриситетом ε и малой полуосью b, если один из ее фокусов F_1 совпадает с полюсом O, а $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{F_1F_2}$.

2. Уравнение $4x^2-4xy+y^2-15=0$ линии второго порядка, записанное в прямоугольной декартовой системе координат, привести к каноническому виду. Изобразить линию в данной системе координат.

3. Доказать, что множество центров всех окружностей, каждая из которых касается данной окружности и проходит через фиксированную точку, лежащую вне данной окружности, есть гипербола.

Вариант 7

1. Доказать, что множество точек, произведение расстояний от каждой из которых до двух заданных пересекающихся прямых a и b постоянно, является гиперболой с асимптотами a и b.

2. Написать уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$.

3. В системе координат $(O,\vec{i},\vec{j})$ линия задана уравнением $9x^2-6xy+y^2-3\sqrt{10}x-9\sqrt{10}y-90=0$. Как расположена система координат, в которой эта линия, в которой эта линия имеет каноническое уравнение? Написать формулы преобразования координат при переходе от данной системы координат к искомой. Написать каноническое уравнение.

Вариант 8

1. Найти полуоси и расстояние между фокусами эллипса, заданного в полярной системе координат уравнением $\rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\cos\varphi}$.

2. Уравнение $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 30x - 40y - 25 = 0$ линии второго порядка, записанное в прямоугольной декартовой системе координат, привести к каноническому виду. Изобразить линию в данной системе координат.

3. Доказать, что множеством центров всех окружностей, каждая из которых проходит через данную точку и касается данной прямой, не проходящей через эту точку, является парабола.

Вариант 9

1. Написать каноническое уравнение параболы, которая в полярной системе координат задана уравнением $\rho = \dfrac{2}{\sqrt{2} + \cos\varphi + \sin\varphi}$.

2. Уравнение $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$ линии второго порядка, записанного в прямоугольной системе координат, привести к каноническому виду. Изобразить линию в данной системе координат.

3. Найти множество середин всех хорд параболы, каждая из которых проходит через фокус параболы.

Вариант 10

1. Написать уравнения асимптот и директрис гиперболы, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \dfrac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}$.

2. Уравнение $9x^2 - 6xy + y^2 - 68x - 4y + 164 = 0$ линии второго порядка, записанное в прямоугольной декартовой системе координат, привести к каноническому виду. Изобразить линию в данной системе координат.

3. Доказать, что директриса гиперболы проходит через ортогональную проекцию соответствующего фокуса на асимптоту.

Самостоятельная работа по теме
«Линии второго порядка: асимптоты, диаметры, центр, касательные»

для студентов направления подготовки 010100.62 Математика

Вариант 1

1. При каких значениях a и b уравнение $ax^2+12xy+9y^2+4x+by-13=0$ является уравнением нецентральной линии?

2. Написать уравнения общих касательных двух линий второго порядка: $4\left(x-\sqrt{5}\right)^2+5(y-4)^2=20$ и $5\left(x-\sqrt{5}\right)^2+4(y-4)^2=20$.

Вариант 2

1. Написать уравнение линии второго порядка, если она имеет центр в точке $C(0;-1)$, проходит через точку $A(3;0)$ и пересекает каждую из прямых, заданных уравнениями $2x-3y+1=0$ и $x+y-5=0$, лишь в одной точке.

2. При каком значении параметра λ линия, заданная уравнением $x^2-2\lambda xy-y^2+5x-9=0$ пересекает прямую $2x-y+7=0$ только в одной точке?

Вариант 3

1. При каких значениях a и b уравнение $x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$ определяет линию, не имеющую центров.

2. Найти общий диаметр двух линий, заданных уравнениями $x^2-xy-y^2-x-y=0$ и $x^2+2xy+y^2-x+y=0$.

Вариант 4

1. Найти координаты центра или уравнение прямой центров для линии, заданной уравнением $x^2+4xy+4y^2=0$.

2. Написать уравнение тех касательных к линии $x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$, которые параллельны оси абсцисс.

Вариант 5

1. Найти множество всех центров линий второго порядка, заданных уравнением $y^2+2xy-x^2-2ay+4ax+1=0$, где a – переменный параметр.

2. Найти в прямоугольной декартовой системе координат уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, которая перпендикулярна прямой $x-y+5=0$.

Вариант 6

1. Для линии второго порядка, заданной уравнением $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$ написать уравнение диаметра, параллельного оси абсцисс, и диаметра, ему сопряженного.

2. Через точку $A(2,0)$ проведена касательная к линии, заданной уравнением $x\cdot y=1$. Составить уравнение касательной.

Вариант 7

1. Найти асимптоты линии второго порядка, заданной уравнением $2x^2+3xy+y^2-2x+y=0$.

2. Найти направление хорд, перпендикулярных сопряженному диаметру, для линии, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2+4xy+4y^2+2x+3y=0$.

Вариант 8

1. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=8x$, параллельной прямой $2x+2y-13=0$.

2. Написать уравнения главных диаметров линии второго порядка, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $2xy-4x+2y-3=0$.

Вариант 9

1. Написать уравнение главного диаметра и найти координаты вершины параболы, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2+2x-y+1=0$.

2. Через точку $A(-1;0)$ проведены касательные к параболе $y^2 = 2x$. Составить их уравнения.

Вариант 10

1. Написать уравнение общего диаметра линий второго порядка, заданных уравнениями $x^2 + 2xy + y^2 - 11 = 0$ и $(x-2)^2 - 2(y+2)^2 = 13$.

2. Написать уравнение параболы, которая касается координатных осей в точках $A(0,-5)$ и $B(-3,0)$.

Индивидуальные расчетные задания

Задание № 1

Решить задачи и построить фигуры в прямоугольной декартовой системе координат.

1. Составить канонические уравнения: *а*) параболы, если ее фокус имеет координаты (0; –3); *б*) эллипса, если его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$, большая полуось *a* равна 3; *в*) гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10, а расстояние между вершинами равно 8.

2. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 24 и большая ось равна 26; *б*) гиперболы, если действительная полуось равна 5 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$; *в*) параболы, директриса которой имеет уравнение $x + 2 = 0$.

3. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, если большая полуось равна 5, а расстояние между фокусами равно 8; *б*) гиперболы, если она равносторонняя и проходит через точку $M\left(\sqrt{2};1\right)$; *в*) параболы, фокус которой имеет координаты $(-5;0)$.

4. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, если большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен 0,8; *б*) гиперболы, асимптоты которой заданы уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии равном 5 от центра; *в*) параболы, симметричной относительно оси ординат и проходящей через точку $M(5;\ 1)$.

5. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, если эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$, а расстояние между фокусами равно 6; *б*) гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10, а расстояние между вершинами равно 8; *в*) параболы, директриса которой имеет уравнение $y + 6 = 0$.

6. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, проходящего через точки $M_1\left(2;\sqrt{3}\right), M_2(0;\ 2)$; *б*) гиперболы, если расстояние между директрисами равно $\frac{8}{5}$ и

эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$; *в*) параболы, если она проходит через точку (–4, 4) и симметрична относительно оси Ox.

7. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, расстояние между директрисами которого равно 12, а большая ось равна $2\sqrt{3}$; *б*) параболы, симметричной относительно оси абсцисс и проходящей через точку $M(-1;2)$. *в*) Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной каноническим уравнением $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

8. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, если его эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{5}}$, а малая полуось $b = 2$; *б*) параболы, симметричной относительно оси ординат и проходящей через точку $M\left(-2\sqrt{3};\,2\right)$. *в*) Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной каноническим уравнением $9x^2 - 16y^2 = 144$.

9. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, расстояние, между фокусами которого равно 8, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$; *б*) гиперболы, действительная полуось которого равна $\sqrt{20}$, и гипербола проходит через точку $N(-10;\ 4)$; *в*) параболы, фокус которой имеет координаты (0; –3).

10. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, сумма полуосей которого равна 18 и расстояние между фокусами равно 12; *б*) гиперболы, если даны уравнения ее асимптот $y = \pm\frac{5}{12}x$ и координаты точки $M(24;\ 5)$, лежащей на гиперболе; *в*) параболы, директриса которой имеет уравнение $x - 15 = 0$.

11. Составить канонические уравнения: *а*) параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат и проходящей через точку $A(-2;-3)$; *б*) эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,8; *в*) гиперболы, проходящей через точку $\mathrm{A}\left(6;-2\sqrt{2}\right)$ и имеющей мнимую полуось равную 2.

12. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, если малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$; *б*) гиперболы, если расстояние между фокусами равно 6 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$; *в*) параболы, расположенной в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox, если ее параметр $p = 3$.

13. Составить канонические уравнения: *а*) гиперболы, если уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$; *б*) эллипса, если расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$; *в*) параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A(9; 6)$.

14. Составить канонические уравнения: *а*) гиперболы, если ее расстояние между фокусами $2c = 10$ и мнимая ось равна 8; *б*) параболы, которая имеет фокус $F(0; -3)$, проходит через начало координат и симметрична относительно оси ординат; *в*) эллипса, если большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8.

15. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, если его полуоси равны соответственно 7 и 2; *б*) гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, проходящей через точки $M_1(6; -1)$ и $M_2\left(-8; 2\sqrt{2}\right)$; *в*) параболы, расположенной в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy, если ее параметр равен 3.

16. Составить канонические уравнения: *а*) гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; *б*) эллипса, если расстояние между фокусами равно 24, и эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{12}{13}$; *в*) параболы, симметричной относительно оси абсцисс и проходящей через точки $M_1(0; 0)$ и M_2 (1; –3).

17. Составить канонические уравнения: *а*) параболы, расположенной симметрично относительно оси абсцисс и проходящей через точку $B(-1; 3)$; *б*) гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно

начала координат и даны координаты точки $M_1\left(\frac{9}{2};-1\right)$, принадлежащей гиперболе, и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$; *в*) эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны точка $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$, принадлежащая эллипсу, и его малая ось равная 3.

18. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны точки $M\left(4;-\sqrt{3}\right)$ и $N\left(2\sqrt{2};\ 3\right)$ принадлежащие эллипсу; *б*) гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, кроме того, расстояние между ними 20, а эксцентриситет ε = $\frac{5}{3}$; *в*) параболы, если дано уравнение директрисы $x-5=0$.

19. Составить канонические уравнения: *а*) эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны точка $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ и эксцентриситет ε = $\frac{2}{3}$; *б*) гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, кроме того, уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48; *в*) параболы, если уравнение ее директрисы $y+1=0$.

20. Составить канонические уравнения: *а*) параболы, расположенной симметрично относительно оси ординат, проходящей через начало координат и точку $D(4;\ -3)$; *б*) эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны точка $M\left(\sqrt{15};-1\right)$ принадлежащая эллипсу и расстояние между фокусами $2c$ = 8; *в*) гиперболы, проходящей через точки $A(2;\ 1)$ и $B\left(-4;\ \sqrt{7}\right)$.

Задание № 2

Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, определить тип линии и построить эту кривую.

Таблица 2

№ варианта	**Коэффициенты уравнений кривой**					№ варианта	**Коэффициенты уравнений кривой**				
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	1	1	-6	10	-15	**11**	1	7	6	-28	-12
2	1	4	0	-1	-5	**12**	3	-3	-6	-24	-36
3	2	0	8	-1	12	**13**	9	4	18	-8	-23
4	9	4	-54	-32	109	**14**	2	0	-4	-1	-4
5	4	-9	-8	-36	-68	**15**	9	-4	-36	-8	-4
6	4	9	-40	36	100	**16**	4	4	-12	4	-3
7	9	-16	-54	-64	127	**17**	1	4	-4	-8	-8
8	3	3	-24	12	57	**18**	36	-4	-72	16	-88
9	5	1	10	-6	-6	**19**	9	4	54	8	49
10	1	-1	6	0	8	**20**	4	36	-16	72	-92

Задание № 3

Даны уравнения линии в полярной системе координат. Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, назвать и построить линию.

1. $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$. **2.** $r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$. **3.** $r = \dfrac{5}{1 - \cos\varphi}$.

4. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\varphi}$. **5.** $r = \dfrac{1}{2 + \cos\varphi}$. **6.** $r = \dfrac{1}{6 + 3\cos\varphi}$.

7. $r = \dfrac{5}{3 - 4\cos\varphi}$. **8.** $r = \dfrac{10}{2 + \cos\varphi}$. **9.** $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\varphi}$.

10. $r = \dfrac{3}{1-2\,cos\,\varphi}$.

11. $r = \dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\varphi}$.

12. $r = \dfrac{6}{1-cos\,\varphi}$.

13. $r = \dfrac{3}{1+cos\,\varphi}$.

14. $r = \dfrac{12}{2-cos\,\varphi}$.

15. $r = \dfrac{1}{3-3\,cos\,\varphi}$.

16. $r = \dfrac{9}{5+4\,cos\,\varphi}$.

17. $r = \dfrac{5}{3+2\,cos\,\varphi}$.

18. $r = \dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$.

19. $r = \dfrac{1}{1+cos\,\varphi}$.

20. $r = \dfrac{1}{3-3\,cos\,\varphi}$.

Задание № 4

С помощью поворота прямоугольной декартовой системы координат и переноса начала привести к каноническому виду уравнений кривой второго порядка. Назвать кривую, записать формулы преобразования. Выполнить чертеж.

1. $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 25 = 0$.

2. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0$.

3.. $9x^2 + y^2 - 6xy - 68x - 4y + 164 = 0$.

4. $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + y = 0$.

5. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

6. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

7. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

8. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$.

9. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

10. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$.

11. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

12. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$.

13. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.

14. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0$.

15. $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$.

16. $x^2+xy+y^2+x+y=0$.

17. $3x^2+4\sqrt{2}xy+5y^2+6x-1=0$.

18. $4x^2+4xy+y^2+8x+6y+3=0$.

19. $9x^2+12xy+4y^2+8x+14y+3=0$.

20. $x^2+6xy+9y^2-12x+24y+15=0$.

Список использованных источников

1. Атанасян, Л.С. Геометрия: в 2 ч. / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение. – 1986. – Ч. I. – 336 с.
2. Атанасян, Л.С. Сборник задач по геометрии: в 2 ч. / Л.С.Атанасян, В.А.Атанасян. – М.: Просвещение. – 1973. – Ч. I. – 255 с.
3. Базылев, В.Т. Геометрия: в 2 ч. / В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая. – М.: Просвещение. – 1974. – Ч. I. – 351 с.
4. Базылев, В.Т. Сборник задач по геометрии / В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая. – М.: Просвещение. – 1980. – 238 с.
5. Бортаковский, А.С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В.Пантелеев. – М.: Высш.шк. – 2005. – 496 с.: ил. – (серия «Прикладная математика»).
6. Немченко, К.Э. Аналитическая геометрия / К.А.Немченко. – М.: Эксмо. – 2007. – 352 с. – (Образовательный стандарт XXI).
7. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии: в 2 ч. / В.В.Прасолов. – М.: Наука. – 1986. – Ч.I. – 271 с.
8. Садовничий, Ю.В. Аналитическая геометрия. Курс лекций с задачами / Ю.В. Садовничий, В.В. Федорчук. – М.: Издательство «Экзамен». – 2009. – 350[2] с. (Серия «Учебников для вузов»)
9. Шарыгин, И.Ф. Задачи по геометрии (планиметрия) / И.Ф. Шарыгин. – М.: Наука. – 1982. – 160 с.