Министерство образования и науки
Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

С.Н. Летута, А.А. Чакак

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ

Рекомендовано к изданию Ученым советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических направлений подготовки, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я 73
Л 52

Рецензент
профессор, доктор физико-математических наук М.Г. Кучеренко

Летута, С.Н.
Л 52 Введение в физику: учебное пособие для студентов инженерно-технических направлений подготовки, слушателей курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, для студентов факультета дистанционных образовательных технологий / С.Н. Летута, А.А. Чакак; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011.–501 с.

ISBN

В учебном пособии дано систематическое изложение основных понятий физики и закономерностей развития отдельных процессов и явлений. Для каждого раздела учебного пособия разработаны контрольные задачи и экзаменационные тестовые задания. В приложении к пособию представлены справочные материалы, которые, по мнению авторов, окажутся полезными при выполнении практических заданий.

Учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения курса физики студентами очно-заочной формы обучения вузов, слушателями курсов повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов, студентами факультета дистанционных образовательных технологий. Пособие может оказаться полезным для студентов вузов и старшеклассников при самостоятельном изучении отдельных разделов физики.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3я 73

ISBN

Содержание

Предисловие

В основу этого учебного пособия легли материалы лекций и практических занятий, которые авторы в течение ряда лет проводили для студентов Оренбургского госуниверситета. Книга предназначена для студентов очно-заочной, заочной и дистанционной форм обучения. Основное внимание в ней уделено выяснению физического смысла и содержания основных законов и понятий физики, установлению границ применимости этих законов, развитию у студентов навыков физического мышления и умения ставить и решать конкретные задачи.

Авторы ограничились изложением основ трех разделов классической физики: механики, молекулярной физики и электромагнетизма. В основах механики дано описание физических явлений и законов, имеющих универсальный характер и используемых в дальнейшем при рассмотрении основных положений современной физики. Молекулярная физика и термодинамика излагаются с точки зрения статистического и термодинамического подходов к рассмотрению поведения многих частиц. Изложение основ электромагнетизма проведено путем обобщения основных понятий и принципов, используемых при описании электрических и магнитных явлений. Таким образом, сделан акцент на изложение основных идей и методов физической науки. Показана роль фундаментальных экспериментов в становлении современной физики. Даны разъяснения физических явлений, основополагающих законов и понятий с целью их дальнейшего применения для решения практических задач.

Данное учебное пособие включает в себя не только теоретические вопросы курса физики, изложенные с современных позиций, но и примеры решения задач по всем разделам курса, задачи для самостоятельного решения, а также необходимый справочный материал. Мы посчитали такую структуру книги методически оправданной, так как она способствует более глубокому пониманию содержания теории и ее связи с опытом.

Главная трудность, с которой столкнулись авторы, заключается в диспропорции между огромным объёмом материала и ограниченным количеством часов, отводимых на его изучение. Поэтому, авторы по мере возможности стремились доступно и сжато изложить основные законы и явления классической физики, их физический смысл и методы исследования.

Тем не менее, объём книги достаточно велик и авторы отчетливо понимают, что трудности, связанные со стремлением доступного изложения материала и подбором соответствующего уровня практических задач к каждому разделу, не могли не привести к недостаткам учебника. Мы будем благодарны всем, кто выскажет нам критические замечания и пожелания к улучшению этой книги.

Авторы выражают признательность профессору М.Г. Кучеренко и профессору Н.А. Манакову за проявленный интерес к учебному пособию и ценные замечания, высказанные при его обсуждении.

1 Механика

Механика – раздел физики, в котором изучается движение материальных объектов и азаимодействие между ними. Под механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел или их частей в пространстве; например, движение небесных тел, колебания земной коры, воздушные и морские течения, движения летательных аппаратов и транспортных средств, машин и механизмов, деформации элементов конструкций и сооружений, движения жидкостей и газов и др. Рассматриваемые в механике взаимодействия представляют собой такие действия тел друг на друга, результатом которых являются изменения скоростей этих тел или их деформации, например притяжения тел вследствие всемирного тяготения, взаимные давления соприкасающихся тел, воздействия частиц жидкости или газа друг на друга и на движущиеся (или покоящиеся) в них тела и т.п.

В основе классической механики лежат законы Ньютона и принцип относительности Галилея, а предметом изучения являются движение материальных тел и причины, вызывающие это движение. В нашем курсе мы ограничимся изучением движения тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

§ 1.1 Модели в механике. Системы отсчёта. Траектория, путь, перемещение

Для описания движения тел в механике используются различные физические модели. В реальном мире связи между явлениями столь многообразны, что учесть их все достаточно сложно. Однако при решении многих задач этого и не требуется. Часто целесообразно лишь выделить наиболее существенные особенности какого-либо явления, не учитывая второстепенные. Так создаётся модель, которая есть лишь отображение реальности. Выделить все несущественное – важнейший элемент физического исследования. К сожалению, не существует единого рецепта, следуя которому можно было бы выделять в исследуемом явлении главное и не учитывать второстепенное. Здесь следует опираться на опыт и физическую интуицию исследователя.

Учёт наиболее существенных факторов сводится к идеализации реальной ситуации и созданию определённой физической модели. В физике используется целый ряд абстракций (абстрактных понятий), связанных с идеализацией тех или иных объектов или процессов. Примерами абстракций, встречающихся в механике, являются: материальная точка, прямолинейное равномерное движение, абсолютно твёрдое тело, абсолютно упругий удар, гармонические колебания, несжимаемая и невязкая жидкость и др.

Простейшей физической моделью является материальная точка – тело, в геометрическом смысле эквивалентное математической точке, т.е. считается, что она не обладает внутренней структурой, формой и размерами, но обладает массой (т.е. инертностью). Введение понятия материальной точки облегчает решение практических задач. Например, изучая движение поезда из Оренбурга в Москву, можно принять его за материальную точку; если же мы рассматриваем перемещение пассажира относительно поезда, то размеры поезда необходимо учитывать. Таким образом, когда мы принимаем тело за материальную точку, то пренебрегаем размерами тела по сравнению с характерными расстояниями, на которых рассматривается его движение. Абсолютных материальных точек в природе не существует.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению движения системы материальных точек.

При взаимодействии друг с другом тела могут деформироваться, т.е. изменять свою форму и размеры. В определённых случаях деформации тел можно не учитывать. Для таких случаев вводится ещё одна модель – абсолютно твёрдое тело. Абсолютно твёрдым телом называется тело, которое ни при каких условиях не деформируется, т.е. расстояние между двумя его произвольными точками остаётся неизменным.

Всякое движение твёрдого тела можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное. Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с движущимся телом, остаётся параллельной самой себе. При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась в разные моменты времени.

Положение материальной точки в пространстве определяется с помощью системы координат, связанной с произвольно выбранным телом отсчёта (тело отсчёта – какое-либо протяжённое тело, по отношению к которому определяется положение материальной точки; точка отсчёта 0 на рисунке 1). Система отсчёта – это совокупность системы координат, связанной с телом отсчёта, и часов, необходимых для регистрации положения материальной точки в различные моменты времени. Наиболее часто используется прямоугольная декартова система координат, в которой положение точки A в данный момент времени t определяется заданием трёх функций x(t), y(t) и z(t), представляющих собой значения координат точки, отложенных в определённом масштабе, в момент времени t (рисунок 1). Эти функции являются проекциями или компонентами вектора $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$, идущего из начала системы координат в точку A, где находится материальная точка. По этой причине вектор **r** называют радиус-вектором (сведения о векторах и операциях с ними см. в **Приложении В** данного пособия). Общепринятой является так называемая «правовинтовая» система координат, определяемая по правилу правого винта. Если правый винт поворачивать в плоскости x0y кратчайшим путем от положительного направления оси 0x к положительному направлению направлению оси 0y, то поступательное движение винта будет происходить в положительном направлении оси 0z.

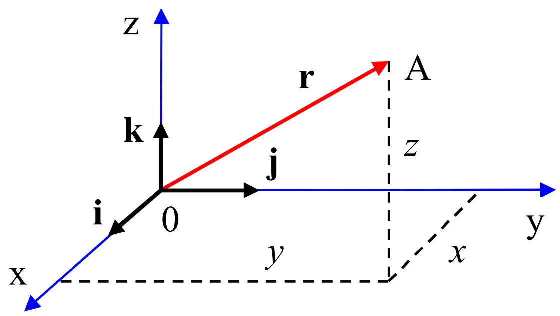


Рисунок 1

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

В общем случае движение материальной точки определяется скалярными уравнениями

$$x = x(\mathrm{t}),\ \ y = y(\mathrm{t}),\ \ z = z(\mathrm{t}), \tag{1.1}$$

или эквивалентным векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathbf{r}(x, y, z) = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k}, \tag{1.2}$$

где **i**, **j**, **k** – орты координатных осей, т.е. единичные векторы, направленные вдоль координатных осей x, y, z.

Уравнения (1.1) и (1.2) называются кинематическими уравнениями движения материальной точки. Уравнения (1.1) представляют координатный способ описания движения, при котором задаётся зависимость выбранных координат движущейся точки от времени. А уравнение (1.2) представляет векторный способ описания движения, при котором положение точки задаётся с помощью радиус-вектора **r**, проведённого в эту точку из начала отсчёта 0 (рисунок 1). Если **r** = const, то точка относительно системы отсчёта покоится. В общем случае при движении точки ее радиус-вектор меняется и по величине и по направлению. При этом точка А (конец радиус-вектора **r**(t)) движется по траектории, которую называют годографом вектора **r**.

Преимущество векторного способа задания движения точки в виде (1.2) состоит в том, что он позволяет в наглядной и компактной форме ввести такие векторные характеристики движения как перемещение, скорость, ускорение. Однако при решении конкретных задач, связанных с вычислениями, переходят к координатному способу описания движения. При этом оперируют проекциями радиус-вектора **r** на координатные оси.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы. Следовательно, если материальная точка движется в пространстве, то она обладает тремя степенями свободы (координаты *x, y* и *z*); если – в некоторой плоскости, то – двумя степенями свободы; если – вдоль заданной линии, то – одной степенью свободы.

Исключая время t из уравнений (1.1), получаем уравнение траектории движения материальной точки.

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве. Так как покой и движение точки относительны, то и вид траектории точки зависит от той системы отсчёта, к которой отнесено движение. Например, небольшое тело, брошенное вертикально вверх в прямолинейно и равномерно движущемся вагоне поезда, в разных системах отсчёта будет двигаться по разным траекториям: относительно вагона – прямолинейно, а относительно полотна железной дороги – по параболе. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

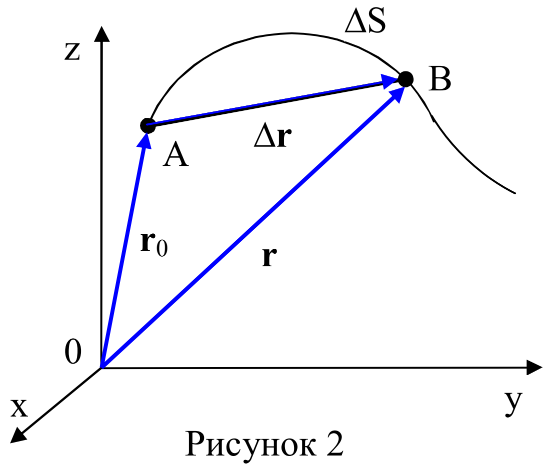


Рисунок 2

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рисунок 2). Отсчёт времени начнём с момента, когда точка находилась в положении А. Длина участка траектории АВ, пройденного материальной точкой с момента начала отсчёта времени, называется длиной пути ΔS (или путь) и является скалярной функцией времени: $\Delta S = \Delta S(t)$. Вектор, проведённый из начального положения А движущейся точки в положение В ее в данный момент времени (приращение радиус-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$), называется перемещением.

Необходимо отличать перемещение от пути – расстояния ΔS, отсчитываемого вдоль траектории. Путь – скалярная величина, представляющая собой неубывающую функцию ΔS. В частном случае, при прямолинейном движении материальной точки в одном направлении (и только в этом случае), например, вдоль положительной полуоси 0х, вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории, и модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$ равен пройденному пути ΔS. В остальных случаях значения модуля перемещения $\Delta r = |\Delta\mathbf{r}|$ и пройденного пути ΔS могут отличаться. Так, например, если материальная точка, начиная движение из точки A, снова вернется в исходное положение (в точку A), то в этом случае перемещение Δr будет равно нулю (модуль нулевого вектора), а путь ΔS отличен от нуля.

§ 1.2 Скорость и ускорение при прямолинейном движении

Нужно ясно понимать различие между системой отсчёта и системой координат. Систему отсчёта образуют реальные тела. Перемещение, скорость, ускорение материальной точки в выбранной системе отсчёта – это та реальность, с которой мы имеем дело при решении конкретной задачи. Система координат является математической абстракцией. Один и тот же вектор в различных системах координат имеет различные компоненты, однако его положение относительно системы отсчёта остаётся неизменным. Обычно выбор системы координат определяется соображениями удобства. Самое простое движение материальной точки – движение по прямой линии. С течением времени точка смещается вдоль прямой линии, удаляясь или приближаясь к заданной точке на данной линии. Вдоль прямой линии в этом случае направляется ось координат, относительно которой и рассматривается движение точки.

Если известна координата x (расстояние движущейся точки от некоторой произвольно выбранной точки 0 – начала координат на прямой) как функция времени t, то известен закон движения материальной точки по прямой – x(t). Для анализа удобно изобразить зависимость координаты x от времени t графически (рисунок 3), отложив по оси ординат координату x в определённом масштабе, а по оси абсцисс – время t, приняв определённый отрезок равным единице времени.

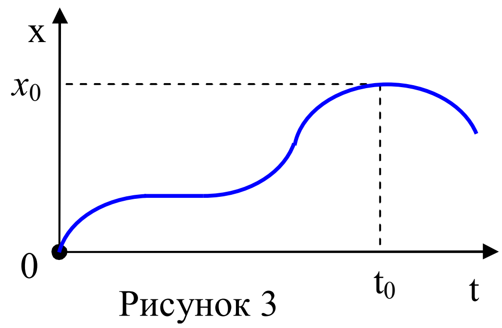


Рисунок 3

По графику можно полностью определить характер движения данной точки. Если с увеличением t кривая x(t) поднимается вверх, точка удаляется от начала координат 0, и чем круче кривая поднимается, тем быстрее точка удаляется от 0;

участки кривой, параллельные оси абсцисс, соответствуют остановке точки, падение кривой вниз – приближению точки к 0, и т.д.

Для получения экспериментальным путём графика движения тела, перемещающегося по прямой и рассматриваемого как материальная точка, необходимо произвести измерения расстояния x от начала координат 0 в известные моменты времени t. Нужно отметить, что таким образом мы можем определить координату x, которую имеет точка в данный момент времени t, а не путь, пройденный точкой. Путь, пройденный точкой, можно определить по ее координате только в том случае, если точка движется в одном направлении. Например, при движении, соответствующем графику рисунка 3, точка не может иметь координату, большую x_0, однако после момента t_0 путь S(t), пройденный точкой, будет больше величины x_0, а координата x, наоборот меньше x_0.

Зависимость координаты от времени $x(t)$ полностью определяет движение точки по прямой, однако в механике важно знать еще две величины: скорость и ускорение тела (точки).

Скорость точки есть физическая величина, определяющая быстроту изменения координаты с течением времени. Пусть в момент времени t материальная точка находилась в точке с координатами $x_1 = x(t)$, а в момент $t+\Delta t$ – в точке с координатами $x_2 = x(t+\Delta t)$. За время Δt материальная точка совершит перемещение $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t+\Delta t) - x(t)$. Перемещение считается положительным, если оно совершается в сторону положительной полуоси 0x, и отрицательным, если перемещение совершается в сторону отрицательной полуоси 0x. Отношение перемещения Δx к промежутку времени Δt, за которое это перемещение произошло, называется средней скоростью перемещения материальной точки за время Δt, или точнее за время между t и $t+\Delta t$. Таким образом, по определению средняя скорость перемещения равна:

$$\mathrm{v}_{\text{ср}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что размерность скорости равна отношению двух величин – длины и времени. Скорость измеряется в м/с, см/с, км/ч.

Очевидно, что средняя скорость зависит от промежутка времени, за который мы ее определяем. Если средняя скорость для любого промежутка времени при данном движении одинакова, то это движение происходит с постоянной скоростью и называется равномерным движением. На графике зависимости координаты от времени $x(\mathrm{t})$ равномерное движение представляется прямой линией. При равномерном движении от начала координат нет разницы между величиной координаты и перемещением.

При неравномерном движении средняя скорость будет различной в зависимости от того, за какой промежуток времени мы ее определяем. Поэтому для более полной и точной характеристики движения вводят мгновенную скорость перемещения, т.е. скорость точки в данный момент времени t. По определению мгновенная скорость перемещения равна пределу:

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{t}} = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{x(\mathrm{t} + \Delta \mathrm{t}) - x(\mathrm{t})}{\Delta \mathrm{t}}. \tag{2.2}$$

В математике этот предел называется производной координаты x по времени t и обозначается:

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \dot{x} = x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}}. \tag{2.3}$$

Понятие производной является основным понятием дифференциального исчисления. Используя это понятие можно сказать, что в рассматриваемом случае прямолинейного движения мгновенная скорость перемещения v(t) есть производная координаты $x(\mathrm{t})$ по времени t:

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \dot{x} = x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}}. \tag{2.4}$$

Перемещение, совершенное точкой за промежуток времени $t_2–t_1$ при постоянной скорости v_0, очевидно, равно произведению скорости v_0 на время $t_2–t_1$:

$$x_2 - x_1 = v_0 \cdot (t_2 - t_1). \tag{2.5}$$

При непостоянной скорости движения точки это выражение лишено смысла. Если известна средняя скорость $v_{ср}$ за время $t_2–t_1$, то перемещение будет выражаться формулой, аналогичной (2.5), в которой вместо v_0 будет стоять $v_{ср}$.

В случае, когда средняя скорость неизвестна, вычисление перемещения, совершённого телом, нужно производить особым способом, основанным на том, что всякое движение за достаточно малый промежуток времени можно всегда с достаточной точностью полагать равномерным. Поэтому для определения перемещения dx, которое совершает тело за достаточно малый промежуток времени dt, нужно скорость v(t) в данный момент времени t умножить на соответствующее приращение времени dt:

$$\mathrm{d}x = v(t) \cdot \mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Предположим, что мы разбили весь промежуток времени $t_2–t_1$ на бесконечно большое число малых промежутков dt. Каждому малому промежутку dt соответствует свое малое приращение dx. Перемещение $x_2–x_1$, совершаемое за время $t_2–t_1$, можно записать в виде суммы всех dx. Такая сумма называется интегралом и записывается в виде:

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x .$$

Вместо dx под знаком интеграла подставим равную ему величину v(t)·dt, и будем суммировать по времени от t_1 до t_2. Тогда отрезок (перемещение), пройденный телом за время $t_2–t_1$, можно записать в такой форме:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt\,. \tag{2.7}$$

Вычисление величины $x_2 – x_1$ по известной функциональной зависимости v(t) представляет задачу интегрального исчисления. Интегрирование представляет собой действие, обратное дифференцированию, т.е. получению производной. Величина перемещения равна интегралу от скорости v(t) по времени t. Закономерная связь трёх физических величин – координаты, времени и скорости – математически определяется производной и интегралом.

Из (2.7) следует, что, зная начальное положение $x(0)$ тела в начальный момент времени $t_0 = 0$ и зависимость скорости от времени v(t), можно определить координату $x(t)$ тела в произвольный момент времени t:

$$x(t) = x(0) + \int_{0}^{t} v(t) \cdot dt\,. \tag{2.8}$$

При этом длина пути S, пройденного телом за это же время t, будет определяться по формуле

$$S(t) = \int_{0}^{t} |v(t)| \cdot dt\,. \tag{2.9}$$

В отличие от (2.8) под знаком интеграла в (2.9) стоит не алгебраическая величина скорости, а ее модуль, поэтому $S(t) \geq |x(t) - x(0)|$.

Заметим, что при $v = v_0 = const$ формулы (2.8) и (2.9) упрощаются:

$$\begin{gathered} x(t) = x(0) + v_0 t. \\ S(t) = |v_0|\, t. \end{gathered} \tag{2.10}$$

При неравномерном движении точка имеет переменную скорость, которую, подобно координате, можно рассматривать как функцию времени v(t). На быстроту изменения скорости указывает величина ускорения. Ускорением материальной точки a называют величину, численно равную производной скорости по времени:

$$a = \dot{\mathrm{v}} = \mathrm{v}' = \frac{d\mathrm{v}}{dt}. \tag{2.11}$$

или

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{v}(t + \Delta t) - \mathrm{v}(t)}{\Delta t}. \tag{2.12}$$

Ускорение можно определить и так: ускорение – «скорость изменения» скорости. Понятно, что слово скорость в данном случае имеет различные значения, поэтому одно из них, выражающее быстроту изменения скорости, поставили в кавычки. Пользуясь математическими терминами, слово «скорость изменения» можно заменить словом «производная».

Из (2.12) следует, что размерность ускорения равна отношению размерностей скорости и времени. Если скорость измеряется в м/с, а время – в секундах, то ускорение будет измеряться в м/с^2. Единицы скорости и ускорения, как правило, не имеют названия. Только в морском деле употребляется единица скорости «узел», равная скорости, при которой одна морская миля (1,853 км) проходится за один час. В технике иногда ускорение выражают в долях ускорения свободного падения тела в безвоздушном пространстве у поверхности Земли; тогда величину ускорения, равную 9,81 м/с^2, принимают за единицу.

С учетом (2.3) выражение для ускорения (2.11) можно записать через вторую производную координаты x по времени, которую обозначают символами:

$$a = \ddot{x} = x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}. \tag{2.13}$$

Математические понятия производной и интеграла были введены Ньютоном для того, чтобы правильно представить законы неравномерного движения тела по прямой (термин «определённый интеграл» ввел Г. Лейбниц в 1686 г.; ему же принадлежат термины «координата», «функция», «дифференциальное» и «интегральное» исчисления; знаки равенства и умножения). Без этих математических понятий трудно и часто даже невозможно разобраться в закономерностях сложных механических движений. Поэтому изучение механики сложных движений тесно связано с развитием математических наук.

Движение с постоянным ускорением называется равнопеременным. В этом случае зависимости координаты x и скорости v от времени t даются уравнениями:

$$x(\mathrm{t}) = x_0 + \mathrm{v}_0\mathrm{t} + \frac{1}{2}a\mathrm{t}^2, \quad \mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_0 + a\mathrm{t}, \tag{2.14}$$

где $x_0 = x(0)$ – начальная координата;

$\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}(0)$ – начальная скорость.

В (2.14) v_0 и a – алгебраические величины, т.е. $\mathrm{v}_0 > 0$ и $a > 0$, если векторы скорости $\mathbf{v}_0$ и ускорения $\boldsymbol{a}$ направлены в сторону положительной полуоси 0x, и $\mathrm{v}_0 < 0$ и $a < 0$ – в противном случае.

Примерами равнопеременного движения могут служить свободное падение тел, движение тела, брошенного вертикально вверх, и скатывание тел по наклонной плоскости без трения.

§ 1.3 Скорость и ускорение при движении точки в пространстве

Для характеристики движения материальной точки в пространстве вводится векторная величина – скорость, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ее положение определено радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ (см.

рисунок 4). В течение малого промежутка времени Δt точка пройдет путь ΔS и совершит элементарное перемещение $\Delta \mathbf{r} = \overrightarrow{AB}$.

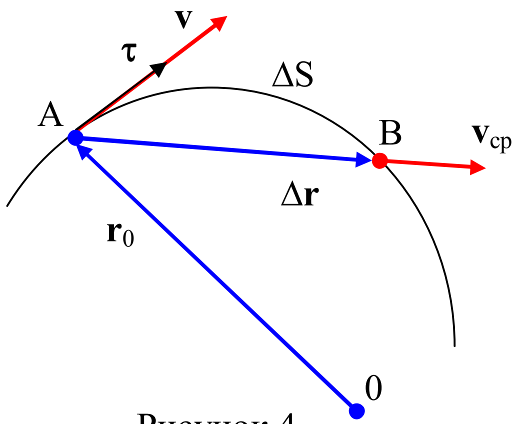


Рисунок 4

Вектором средней скорости $\mathbf{v}_{ср}$ называется физическая величина, равная отношению приращения $\Delta\mathbf{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt:

$$\mathbf{v}_{ср} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\mathbf{r}$. При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (3.1)$$

Мгновенная скорость $\mathbf{v}$, таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиус-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости $\mathbf{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения (рисунок 4). Выражение для $\mathbf{v}$ можно записать в виде:

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}, \qquad (3.2)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории в ту же сторону, что и $\mathbf{v}$;

v – модуль мгновенной скорости.

По мере уменьшения Δt путь ΔS все больше будет приближаться к $|\Delta\mathbf{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}. \tag{3.3}$$

При равнопеременном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В этом случае движение точки можно характеризовать скалярной величиной $v_{ср}$ – средней скоростью равнопеременного движения:

$$v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Из рисунка 4 вытекает, $v_{ср} > |\mathbf{v}_{ср}|$, так как $\Delta S > |\Delta \mathbf{r}|$, и только в случае прямолинейного движения

$$\Delta S = |\Delta \mathbf{r}|.$$

Если выражение $dS = v \cdot dt$ (см. формулу (3.3)) проинтегрировать по времени в пределах от t до $t+\Delta t$, то найдем путь, пройденный точкой за время Δt:

$$S = \int_{t}^{t+\Delta t} v \cdot dt. \tag{3.4}$$

В случае равномерного движения численное значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (3.4) примет вид

$$S = v \cdot \int_{t}^{t+\Delta t} dt = v \cdot \Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, дается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left| v(t) \right| \cdot dt\,. \qquad (3.5)$$

Под знаком интеграла в (3.5) стоит модуль скорости, а не ее алгебраическая величина, так как в общем случае при движении вдоль некоторой траектории материальная точка может изменить направление своего движения вдоль нее.

Если выражение $d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot dt$ (см. формулу (3.2)) проинтегрировать по времени в пределах от t_1 до t_2, то найдём перемещение $\Delta\mathbf{r}$ точки за этот интервал:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) \cdot dt\,. \qquad (3.6)$$

Подставляя в (3.1) выражение (1.2) для радиус-вектора имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \mathbf{k} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k}, \qquad (3.7)$$

где v_x, v_y, v_z – составляющие вектора скорости $\mathbf{v}$.

Значение его модуля находим по теореме Пифагора

$$\left| \mathbf{v} \right| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \qquad (3.8)$$

Скорость частицы **v** может изменяться со временем, как по величине, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения вектора скорости точки в механике вводится понятие ускорения.

Пусть в момент времени t скорость равна **v**, а в момент t + Δt она равна **v** + Δ**v**. Средним ускорением равнопеременного движения за интервал времени от t до t + Δt называется векторная величина, равная отношению изменения скорости Δ**v** к интервалу времени Δt:

$$\boldsymbol{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathrm{t}}.$$

Мгновенным ускорением называют предел среднего ускорения:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}}. \tag{3.9}$$

Таким образом, ускорение $\boldsymbol{a}$ есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени. Подставляя в (3.9) выражение (3.7) для вектора скорости имеем:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}} \cdot \mathbf{i} + \frac{\mathrm{dv_y}}{\mathrm{dt}} \cdot \mathbf{j} + \frac{\mathrm{dv_z}}{\mathrm{dt}} \cdot \mathbf{k} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{dt}^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{dt}^2} \cdot \mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{dt}^2} \cdot \mathbf{k} = a_{\mathrm{x}} \cdot \mathbf{i} + a_{\mathrm{y}} \cdot \mathbf{j} + a_{\mathrm{z}} \cdot \mathbf{k}, \tag{3.10}$$

где a_{x}, a_{y}, a_{z} – составляющие вектора ускорения $\boldsymbol{a}$.

Значение его модуля находим по теореме Пифагора

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2}. \tag{3.11}$$

Если подставить в формулу (3.9) выражение (3.2) для $\mathbf{v}$, то для ускорения $\boldsymbol{a}$ получим следующее соотношение:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\cdot\boldsymbol{\tau} + v\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \qquad (3.12)$$

Для исследования свойств обоих слагаемых ограничимся случаем, когда траектория тела является плоской кривой. Первое слагаемое есть вектор $\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$, направленный по касательной к траектории. Он представляет собой тангенциальную составляющую $\boldsymbol{a}_\tau$ ускорения $\boldsymbol{a}$ точки и связан с изменением величины (модуля) скорости. Таким образом,

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}. \qquad (3.13)$$

Модуль тангенциального ускорения равен:

$$|\boldsymbol{a}_\tau| = \left|\frac{dv}{dt}\right|. \qquad (3.14)$$

Если $\frac{dv}{dt} > 0$ (скорость увеличивается), вектор $\boldsymbol{a}_\tau$ направлен в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\tau}$ (или $\mathbf{v}$). Если $\frac{dv}{dt} < 0$ (скорость со временем уменьшается), векторы $\boldsymbol{a}_\tau$ и $\mathbf{v}$ направлены в противоположные стороны.

Для выяснения свойств второго слагаемого в (3.12) нужно установить, чем определяется $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$, т.е. быстрота изменения со временем направления касательной к траектории. Легко сообразить, что эта быстрота будет тем больше, чем сильнее искривлена траектория и чем быстрее перемещается частица по траектории.

Степень искривленности плоской кривой характеризуется кривизной траектории k, которая определяется выражением:

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS}. \qquad (3.15)$$

где $\Delta\varphi$ – угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на элементе участка траектории ΔS (рисунок 5).

Таким образом, кривизна определяет скорость поворота касательной при перемещении вдоль кривой. Величину, обратную кривизне k, называют радиусом кривизны в данной точке кривой и обозначают буквой R:

$$R = \frac{1}{k} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}. \qquad (3.16)$$

Радиус кривизны траектории представляет собой радиус окружности, которая совпадает с ней на данном участке траектории на бесконечно малом ее участке. Центр такой окружности называют центром кривизны для данной точки кривой.

Радиус и центр кривизны в точке А (см. рисунок 5) можно определить следующим образом. При движении точки по криволинейной траектории АВ в этих точках построим единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}'$, направленные по касательной к траектории. Перпендикуляры к ним пересекутся в некоторой точке 0′. Отметим, что для кривой, не являющейся окружностью, расстояния R=0A и R′=0′B будут отличаться друг от друга. Если точку В приближать к точке А, пересечение перпендикуляров 0′ будет перемещаться вдоль прямой R и в пределе окажется в некоторой точке 0. Расстояния R и R′ будут стремиться к общему пределу, рав-

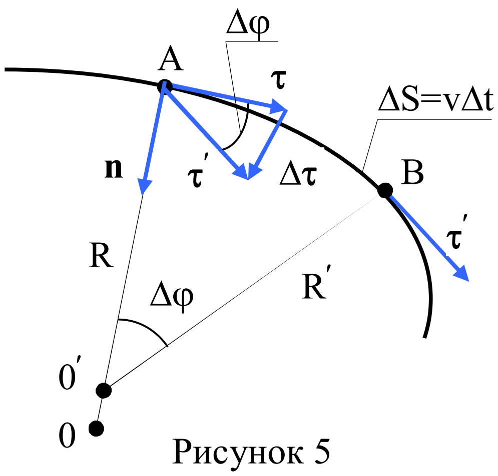


Рисунок 5

ному радиусу кривизны R. Если элемент участка траектории AB=ΔS, то радиус кривизны траектории в данной точке (A) определяют выражением (3.16), т.е. $R = dS/d\varphi$.

При $\Delta t \to 0$ направление вектора $\Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}$ будет приближаться к направлению нормали **n** к траектории в точке A (рисунок 5). По абсолютной величине

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{\tau}|\cdot|\Delta\varphi| = |\Delta\varphi|, \tag{3.17}$$

а сам вектор

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \Delta\varphi\cdot\mathbf{n}. \tag{3.18}$$

Отсюда находим, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\mathbf{n} = \frac{d\varphi}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{R}\cdot v\cdot\mathbf{n}, \tag{3.19}$$

где $R = \dfrac{dS}{d\varphi}$ – радиус кривизны траектории в точке A.

Таким образом, второе слагаемое ускорения $\boldsymbol{a}$ в формуле (3.12) равно

$$v\cdot\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = v\cdot\frac{1}{R}\cdot v\cdot\mathbf{n} = \frac{v^2}{R}\cdot\mathbf{n}. \tag{3.20}$$

Эта нормальная составляющая $\boldsymbol{a}_n$ ускорения $\boldsymbol{a}$ направлена по нормали **n** к центру кривизны траектории и связана с изменением вектора скорости **v** по направлению.

Окончательно для вектора ускорения $\boldsymbol{a}$ получаем:

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau = a_n \cdot \mathbf{n} + a_\tau \cdot \boldsymbol{\tau}, \qquad (3.21)$$

где a_τ и a_n – проекции ускорения $\boldsymbol{a}$ на направления касательной и нормали к касательной к траектории соответственно;

$\boldsymbol{a}_\tau$ и $\boldsymbol{a}_n$ – тангенциальное (касательное) и нормальное ускорения (рисунок 6).

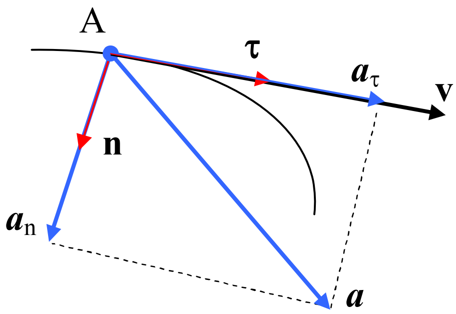


Рисунок 6

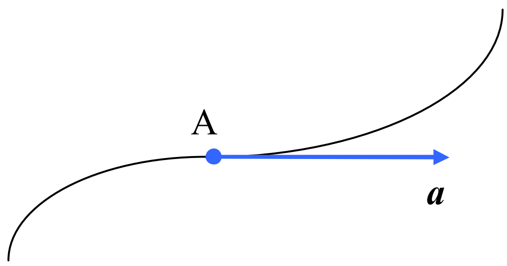


Рисунок 7

Так как $\boldsymbol{a}_\tau \perp \boldsymbol{a}_n$, то модуль полного ускорения будет равен

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}. \qquad (3.22)$$

Нормальная составляющая ускорения $\boldsymbol{a}_n$ направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны. Поэтому ее называют также центростремительным ускорением. При прямолинейном движении нормальное ускорение отсутствует, так как при этом радиус кривизны $R \to \infty$. Если при криволинейном движении $a_\tau = 0$ (скорость постоянна или достигает экстремума), то ускорение $\boldsymbol{a}$ будет направлено по нормали $\mathbf{n}$: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n$. Аналогично, если $a_n = \dfrac{v^2}{R} = 0$, то вектор $\boldsymbol{a}$ будет направлен по касательной к траектории. Такой случай может иметь место или при обращении скорости точки в нуль (изменение направления движения на противоположное) или в точке перегиба траектории (рисунок 7). Если же в течение некоторого промежутка времени а = 0

($a_\tau = 0$ и $a_n = 0$), то точка в это время движется в выбранной системе отсчета равномерно и прямолинейно.

Пусть точка движется равномерно с постоянным по величине ускорением. Поскольку при равномерном движении скорость не изменяется по величине, то $\boldsymbol{a}_\tau = 0$, так что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n$. Постоянство по величине $\boldsymbol{a}_n$ означает, что $v^2/R = \text{const}$. Отсюда заключаем, что $R = \text{const}$ ($v = \text{const}$ вследствие равномерности движения). Значит, точка движется по кривой постоянной кривизны, т.е. по окружности. Таким образом, в случае, когда ускорение точки постоянно по величине и направлено в любой момент времени перпендикулярно к вектору скорости, траекторией точки будет окружность.

§ 1.4 Кинематика вращательного движения

Рассмотрим твёрдое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса R (рисунок 8). Ее поворот за промежуток времени Δt зададим углом $\Delta\varphi$. Элементарному (бесконечно малому) углу поворота можно сопоставить вектор $\Delta\boldsymbol{\varphi}$. Модуль этого вектора $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения головки правого винта, если винт вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу правого винта (рисунок 8). Другими словами – если смотреть с конца вектора $\Delta\boldsymbol{\varphi}$, то мы видим круговое движение точки, совершаемое против часовой стрелки. Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами. Эти векторы не имеют определённых точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

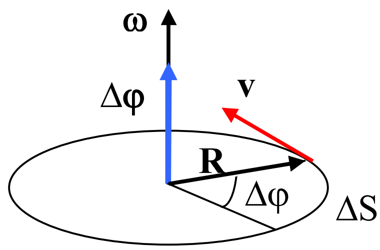


Рисунок 8

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота точки по времени:

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\boldsymbol{\varphi} / \Delta t) = (d\boldsymbol{\varphi} / dt)\ . \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси вращения так же, как и вектор $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ (см. рисунок 8). Если с конца $\boldsymbol{\omega}$ вектора смотреть на плоскость, в которой вращается рассматриваемая точка твёрдого тела, то наблюдаем вращение против часовой стрелки. Размерность угловой скорости – радиан в секунду (рад/с).

Вращение с постоянной угловой скоростью называют равномерным. Если вращение является равномерным, то $\omega = \varphi / t$, где φ – угол поворота за время t (сравните с выражением для скорости при равномерном движении $v = S / t$). Таким образом, при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается точка за единицу времени.

Равномерное вращение можно характеризовать периодом вращения T, под которым понимают время совершения одного оборота, т.е. время поворота на угол 2π. Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует угол поворота $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{4.2}$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{4.3}$$

Число оборотов в единицу времени (частота вращения) ν, очевидно, равно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что угловая скорость ω равна углу поворота 2π, умноженному на частоту вращения ν:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{4.5}$$

Понятия периода вращения T и частоты ν вращения можно сохранить и для неравномерного вращения. В этом случае под мгновенным значением T следует понимать то время, за которое точка совершала бы один оборот, если она вращалась равномерно с данным значением угловой скорости, а под ν, понимая то число оборотов, которое совершала бы точка за единицу времени при аналогичных условиях.

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости **v**. Скорость каждой из точек непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости v определяется угловой скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения. Пусть за малый промежуток времени тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ (рисунок 8). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси вращения при этом проходит путь $\Delta S = R\Delta\varphi$. Линейная скорость точки равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Таким образом,

$$v = \omega \cdot R. \qquad (4.6)$$

Формула (4.6) связывает модули линейной и угловой скоростей. Вектор скорости **v** связан с $\boldsymbol{\omega}$ через векторное произведение (см. Приложения В и Г):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}. \qquad (4.7)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ может изменяться как за счет изменения скорости вращения тела вокруг оси (в этом случае он изменяется по величине), так и за счет поворота оси вращения в пространстве (в этом случае $\boldsymbol{\omega}$ изменяется по направлению). Пусть за время Δt вектор $\boldsymbol{\omega}$ получает приращение $\Delta\boldsymbol{\omega}$. Изменение вектора угловой скорости со временем характеризуют величиной $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad , \tag{4.8}$$

называемой угловым ускорением. Угловое ускорение, как и угловая скорость, является псевдовектором. Размерность углового ускорения – рад/с^2.

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{\omega}$, при замедленном – направлен противоположно ему.

Предположим, что ориентация оси вращения тела не изменяется в пространстве. Согласно (3.14) модуль тангенциального ускорения равен dv/dt. Воспользовавшись соотношением (4.6) и учитывая, что расстояние рассматриваемой точки тела от оси вращения R = const, можно написать:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon = \varepsilon \cdot R\,, \tag{4.9}$$

где ε – модуль углового ускорения.

Комбинируя выражения (4.6) и (3.20), получим следующие уравнения для нормального (центростремительного) ускорения при движении точки по окружности:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.10) справедливы и при равнопеременном движении по окружности радиуса R, т.е. для любого произвольного момента времени, характеризуемого значением линейной скорости v(t) (или угловой скорости ω(t)).

Таким образом, связь между линейными и угловыми величинами определяется следующими формулами:

$$S = R\varphi, \qquad v = \omega R, \qquad a_\tau = \varepsilon \cdot R, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega. \qquad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что нормальное и тангенциальное ускорения растут линейно с увеличением расстояния от точки до оси вращения.

В случае равнопеременного движения точки по окружности (ε = const):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2, \qquad (4.12)$$

где ω_0 – начальная угловая скорость;

ε – угловое ускорение;

φ_0 – начальное угловое положение материальной точки на окружности.

§ 1.5 Первый закон Ньютона. Масса и импульс тела. Сила

Динамика материальной точки и поступательного движения твёрдого тела. Кинематика описывает движение тел, без рассмотрения его причин. Динамика - это раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Галилеем (1564–1642) и окончательно сформулированы английским учёным Ньютоном. В основе динамики лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г.

Механика Галилея-Ньютона называется классической (нерелятивистской) механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света *c* в вакууме ($c = 3\cdot10^8$ м/с). Законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью *c*, изучаются в релятивистской механике, основанной на специальной теории относительности, сформулированной Эйнштейном (1879–1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической (ньютоновой) механики заменяются законами квантовой механики. В нашем курсе рассматривается классическая механика, т.е. движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света *c* в вакууме.

При описании движений в кинематике нет никакой принципиальной разницы между различными системами отсчёта. Выбор той или иной системы диктуется лишь удобством ее использования. Иное дело в динамике – здесь обнаруживается существенное различие между разными системами отсчёта и преимущество одного класса систем по сравнению с другими. На это указывает хотя бы то обстоятельство, что ускорение тела при переходе от одной системы отсчёта к другой может либо измениться, либо остаться неизменным в зависимости от того, как эти системы движутся относительно друг друга.

Рассмотрим ускорение некоторого тела (материальной точки) относительно произвольной системы отсчёта. Какова же причина этого ускорения? Опыт показывает, что ускорение возникает либо вследствие взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами, либо за счёт свойств самой системы отсчёта (в одной системе тело может двигаться равномерно и прямолинейно, а в другой, движущейся относительно первой с ускорением, то же тело будет двигаться ускоренно).

Рассматривая окружающие нас тела в системе отсчёта, связанной с неподвижной относительно Земли лабораторией (далее – лабораторная система отсчёта), мы приходим к выводу, что их движение вызывается или изменяется в результате взаимодействия с другими телами. Например, движение биллиардного шара после удара по нему кием. Или полёт снаряда по искривлённой траектории за счёт притяжения к Земле после выстрела из орудия под некоторым углом к горизонту. Во всех этих случаях изменяется вектор скорости тела. Причиной ускорения тел здесь является их взаимодействие с другими телами.

В других случаях дело обстоит иначе. Наблюдая ускоренное движение скользящих по полу предметов в останавливающемся вагоне поезда (в системе отсчёта, связанной с вагоном), или отклонение сидений подвесной карусели (в системе отсчёта, связанной с вращающейся каруселью), мы не можем указать тел, взаимодействие с которыми приводит к этим эффектам.

Возникает вопрос: существуют ли такие системы отсчёта, в которых ускорение материального тела обусловлено только его взаимодействием с другими телами? В таких системах отсчёта свободное тело, не подверженное действию других тел, будет двигаться прямолинейно и равномерно, или, как говорят, по инерции. Утвердительный ответ на поставленный вопрос заключается в первом законе Ньютона. Инерциальная система отсчёта – система отсчёта, в которой справедлив первый закон Ньютона (закон инерции): «Всякая материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, когда на нее не действуют никакие силы (или действуют взаимно уравновешенные силы)». Инерциальной системой отсчёта является любая система, которая либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно относительно какой-то другой инерциальной системы. Следовательно, теоретически может существовать любое число равноправных инерциальных систем отсчёта, обладающих тем важным свойством, что во всех таких системах законы физики одинаковы. Система отсчёта, движущаяся по отношению к инерциальной системе отсчёта с ускорением, неинерциальна, и закон инерции в ней не выполняется. В вышеприведённых примерах системы отсчёта, связанные с останавливающимся вагоном или с вращающейся каруселью, являются неинерциальными.

Существование инерциальных систем отсчёта подтверждается опытом. Вместе с тем для строгой экспериментальной проверки первого закона Ньютона, очевидно, следовало бы изучать движение свободных тел. Свободное тело – это такая же физическая абстракция, как и материальная точка. Можно избавиться от взаимодействий, возникающих при непосредственном соприкосновении тел, но как избавиться от сил, например, гравитационного притяжения? Фактически при установлении инерциальности рассматриваемой системы отсчёта следует ответить на вопрос: всегда ли ускоренное движение тела в данной системе отсчёта можно объяснить его взаимодействием с окружающими телами или нет? Классическая механика, по сути, постулирует, что существуют такие системы отсчёта (инерциальные системы отсчёта), в которых все свободные тела либо сохраняют состояние покоя, либо движутся равномерно и прямолинейно.

Таким образом, понятие инерциальной системы отсчёта является научной абстракцией. Реальная система отсчёта всегда связывается с каким-нибудь конкретным телом (Солнцем, Землей, корпусом корабля или самолёта и т.п.), по отношению к которому и изучается движение различных тел. Поскольку все реальные тела движутся с тем или иным ускорением, любая реальная система отсчёта может рассматриваться как инерциальная система отсчёта лишь с определённой степенью приближения.

С очень высокой степенью точности инерциальной можно считать гелиоцентрическую систему отсчёта, связанную с Солнцем и звёздами (Солнце, находясь на расстоянии примерно 10 кпк от центра нашей Галактики – Млечного Пути, движется вокруг него со скоростью примерно 250 км/с с периодом вращения примерно 250 млн. лет). В гелиоцентрической системе начало координат находится в центре Солнца, а три взаимно перпендикулярные оси проведены в направлении трёх определённых звёзд, положение которых в силу их огромной удалённости практически не изменяется со временем. Такая инерциальная система отсчёта используется главным образом в задачах небесной механики и космонавтики. При изучении движения тел в земных условиях мы часто пользуемся лабораторной системой отсчёта, связанной с поверхностью Земли; рассматривать, как движутся эти тела относительно Солнца и звёзд, практически было бы затруднительно. Система отсчёта, связанная с поверхностью Земли, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной. В особенности это относится к таким движениям, которые происходят в течение не очень продолжительного времени и на сравнительно коротких расстояниях вблизи поверхности Земли. Вместе с тем, когда возникает необходимость, например, определить характер движения воздуха в циклонах и антициклонах или рассчитать полёт баллистической ракеты, то обнаруживается, что систему отсчёта «Земля» нельзя считать инерциальной.

При переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой в классической механике Ньютона для пространственных координат и времени справедливы преобразования Галилея, а в релятивистской механике – преобразования Лоренца.

Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое инертностью. Инертность – свойство материальных тел, проявляющееся в том, что тело сохраняет неизменным состояние своего движения или покоя по отношению к так называемой инерциальной системе отсчёта, когда внешние воздействия на тело (силы) отсутствуют или взаимно уравновешиваются. Если же на тело действует неуравновешенная система сил, то свойство инертности сказывается в том, что изменение состояния покоя или движения тела, т.е. изменение скоростей его точек, происходит постепенно, а не мгновенно; при этом движение изменяется тем медленнее, чем больше инертность тела. Мерой инертности тела является его масса.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

Масса – фундаментальная физическая величина, определяющая инерционные и гравитационные свойства тел – от макроскопических объектов до атомов и элементарных частиц – в нерелятивистском приближении, когда их скорости пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света c.

В этом приближении масса тела служит мерой содержащегося в теле вещества, и имеют место законы сохранения и аддитивности массы: масса изолированной системы тел не меняется со временем и равна сумме масс тел, составляющих эту систему. Нерелятивистское приближение является предельным случаем теории относительности, рассматривающей движение с любыми скоростями вплоть до скорости света.

Определение массы производят путем сравнения с эталоном. Масса тела m – скалярная физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства.

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т.е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, сила **F** – это векторная величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия тел. Это взаимодействие вызывает изменение скоростей точек тела или его деформацию. Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при трении, при давлении прижатых друг к другу тел), так и между удалёнными телами (посредством полей – гравитационного, электромагнитного и т.д.). Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Если тело можно рассматривать как недеформируемое (абсолютно твёрдое), то силу можно считать приложенной в любой точке на линии ее действия.

Группу рассматриваемых тел называют системой тел. Силы взаимодействия между телами, входящими в систему, называют внутренними. Силы, действующие на тела, входящие в систему, со стороны тел, не входящих в систему, называют внешними. Систему называют замкнутой (изолированной), если на нее не действуют внешние силы.

Массу материальной точки (произвольного тела) можно определить следующим образом. Под действием силы материальная точка изменяет свою скорость не мгновенно, а постепенно, т.е. приобретает конечное по величине ускорение, которое тем меньше, чем больше масса материальной точки. Если два тела с разными массами m_1 и m_2 испытывают одинаковые воздействия ($F_1 = F_2$), то тела движутся с ускорениями, обратно пропорциональными их массам:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \tag{5.1}$$

Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнивать массу любого тела с этим эталоном. В физике в качестве основной единицы массы принят килограмм. Килограмм есть масса эталонной гири из платиноиридиевого сплава, хранящейся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов.

Импульсом или количеством движения называют вектор **p**, равный произведению массы материальной точки (тела) на ее скорость:

$$\mathbf{p} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{v}. \tag{5.2}$$

Импульсом системы материальных точек называют векторную сумму импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \sum \mathrm{m}_i \cdot \mathbf{v}_i . \tag{5.3}$$

В релятивистской механике импульс частицы также определяется выражением (5.2), только масса m зависит от скорости v согласно формуле:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{m}_0}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}}, \tag{5.4}$$

где c – скорость света в вакууме;

m_0 – постоянная для данной частицы величина, называемая ее массой покоя.

Масса покоя совпадает с массой, рассматриваемой в классической механике.

§ 1.6 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения. Он отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил. Второй закон Ньютона гласит, что производная импульса материальной точки по времени равна действующей на эту точку силе:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}\,. \tag{6.1}$$

Уравнение (6.1) называют уравнением движения тела.

Заменив согласно (5.2) импульс **p** произведением $m \cdot \mathbf{v}$ и считая, что в классической механике масса остается постоянной (не зависит от скорости), можно представить соотношение (6.1) в виде:

$$m \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{F}, \tag{6.2}$$

где $\boldsymbol{a} = d\mathbf{v}/dt$.

Таким образом, мы пришли к другой формулировке второго закона Ньютона: произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе. Физический смысл этого закона заключён в следующих утверждениях: 1) направления ускорения тела и действующей на это тело силы совпадают; 2) ускорение пропорционально силе; 3) ускорение обратно пропорционально массе тела. Уравнение (6.2) также называют уравнением движения материальной точки. В механике Ньютона уравнения (6.1) и (6.2) различаются чисто формально. В зависимости от решаемой задачи используют то или иное уравнение.

Единица силы в СИ – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая телу массы 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: 1 Н = 1 кг·м/с^2. В технической литературе и на практике часто используют внесистемную единицу измерения силы (веса) – килограмм-сила (обозначают кгс или кГ, kgf или kG). Килограмм-сила определяется как сила, сообщающая телу массы 1 кг ускорение, равное 9,80665 м/с^2. Из этого определения следует, что 1 кгс = 9,80665 Н. Значение веса тела в кгс (кГ) численно совпадает с массой в кг (например, нам в магазине продукты взвешивают в кГ). В некоторых европейских государствах для килограмм-силы официально принято название килопонд (kP).

Вес можно непосредственно измерять с помощью пружинных весов и косвенно на рычажных весах, где используется пропорциональность веса и массы. Даже при покоящихся пружинных весах измеренный вес тела может более или менее отличаться от «истинного» (измеренного при тех же условиях в вакууме) за счет уменьшения веса в газообразной или жидкой среде из-за действия выталкивающей силы (Архимеда).

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было, т.е. действие каждой силы не зависит от присутствия или отсутствия других сил. Из этого принципа следует принцип суперпозиции, – если на рассматриваемое тело действует несколько сил, то его движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i. \tag{6.3}$$

Под **F** в уравнениях (6.1) и (6.2) понимают результирующую силу, определяемую соотношением (6.3).

Интегрируя (6.1), можно определить приращение импульса за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt. \tag{6.4}$$

В случае постоянной силы выражение (6.4) упрощается:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t. \tag{6.5}$$

Выражения, стоящие в правых частях уравнений (6.4) и (6.5), называются импульсом силы за промежуток времени Δt. Эти уравнения означают, что приращение импульса тела за некоторый промежуток времени равно импульсу равнодействующей всех сил, действующих на это тело.

Таким образом, импульс (количество движения), приобретаемый телом, зависит не только от величины силы, но и от продолжительности ее действия. Это утверждение можно проиллюстрировать большим числом эффектных опытов: выдёргиванием полоски бумаги из-под колбы с водой, ломанием резким ударом деревянной рейки, опирающейся на бумажные кольца, и т.п. Один из таких опытов представлен на рисунке 9. Тяжёлый шар подвешен на нити, снизу к нему прикреплена такая же нить. Если медленно тянуть за нижнюю нить, то рвётся верхняя нить. Это происходит потому, что в результате незначительного смещения тела вниз деформация верхней нити достигает предельно допустимого значения. При этом непосредственно перед разрывом разность сил натяжения $F_1 - F_2$ уравновешивает вес груза и, таким образом, $F_1 > F_2$. Если же быстро дёрнуть за нижнюю нить, то рвётся именно она, а верхняя остается целой. В этом случае шар «не успевает» сколько-нибудь сдвинуться за время рывка, верхняя нить практически не испытывает дополнительного растяжения и поэтому остаётся целой.

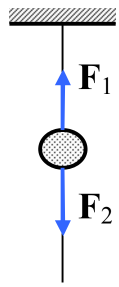


Рисунок 9

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчёта. Первый закон Ньютона постулирует существование таких систем отсчёта.

§ 1.7 Третий закон Ньютона

Механическое воздействие тел друг на друга носит характер их взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой $\mathbf{F}_{21}$, то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой $\mathbf{F}_{12}$. Третий закон Ньютона утверждает, что силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21} . \qquad (7.1)$$

Физический смысл третьего закона Ньютона заключён в следующих утверждениях: 1) силы возникают парами и имеют одинаковую природу; они приложены к разным телам; 2) эти силы равны по величине в любой момент времени независимо от движения взаимодействующих тел; 3) они действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях.

При использовании законов динамики иногда допускают следующую ошибку: так как действующая сила (например, $\mathbf{F}_{12}$) всегда вызывает равную по модулю и противоположную по направлению силу противодействия ($\mathbf{F}_{21}$), то, следовательно, их равнодействующая должна быть равна нулю и тела вообще не могут приобрести ускорения. Однако надо помнить, что во втором законе Ньютона речь идет об ускорении, приобретаемом телом под действием приложенных к нему сил. Равенство нулю ускорения означает равенство нулю равнодействующей сил, приложенных к одному и тому же телу. Третий же закон Ньютона говорит о равенстве сил, приложенных к различным телам. На каждое из двух взаимодействующих тел действует только одна сила ($\mathbf{F}_{12}$ или $\mathbf{F}_{21}$), которая и сообщает данному телу ускорение.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к динамике системы материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

Третий закон Ньютона строго выполняется в случае контактных взаимодействий (т.е. при непосредственном соприкосновении тел), а также при взаимодействии посредством поля находящихся на некотором расстоянии покоящихся тел.

§ 1.8 Энергия, работа, мощность

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия материи. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной вторым телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы. Работа является мерой изменения энергии.

Если тело движется поступательно и на него действует постоянная сила **F**, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения d**S**, то элементарная работа dA этой силы равна скалярному произведению этих векторов, т.е. произведению проекции силы F_s на направление перемещения ($F_s = F\cdot\cos\alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы (рисунок 10):

$$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{F},d\mathbf{S}) = F_s\cdot dS = F\cdot dS\cdot\cos\alpha\ . \qquad (8.1)$$

Если вектор силы и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha>0$), работа положительна. Если угол α – тупой ($\cos\alpha<0$), работа отрицательна. При $\alpha=\pi/2$ работа равна нулю. Последнее обстоятельство особенно отчётливо показывает, что понятие работы в механике существенно отличается от обыденного представления о работе. В обыденном понимании всякое усилие, в частности мускульное напряжение, всегда сопровождается совершением работы. Например, для того, чтобы держать тяжелый груз, стоя неподвижно или перемещать его горизонтально, носильщик затрачивает много усилий, т.е. «совершает работу». Однако работа как механическая величина в этих случаях равна нулю, а энергия груза при этом не изменяется.

Если при перемещении точки приложения сила изменяется как по величине, так и по направлению, то нужно вычислить элементарную работу dA на каждом бесконечно малом участке пути dS, равную $F_s \cdot dS$, а затем сложить значения всех элементарных работ вдоль всего участка пути, например, от точки 1 до точки 2 (рисунок 10). Эта сумма приводится к интегралу

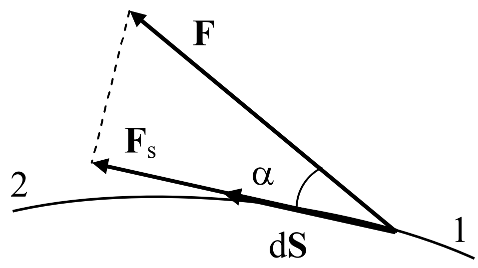


Рисунок 10

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = \int_1^2 F_s \cdot dS = \int_L F_s \cdot dS \ , \qquad (8.2)$$

который называется криволинейным интегралом вдоль траектории 12 (часто кривую 12 обозначают одной буквой L). Как видно из (8.2) работа A в общем случае зависит не только от характеристик силы, но и от вида траектории, по которой движется частица. Именно поэтому использование в выражении (8.1) обозначения элементарной работы дифференциала dA является не совсем корректным, но это в целом не повлияет на ход всех приведённых рассуждений.

Если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, то, проецируя это векторное уравнение на направление элементарного перемещения $d\mathbf{S}$, получим $F_s = F_{1s} + F_{2s}$, а после умножения на dS: $F_s \cdot dS = F_{1s} \cdot dS + F_{2s} \cdot dS$, или

$$dA = dA_1 + dA_2. \qquad (8.3)$$

Таким образом, элементарная работа результирующей двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил. Очевидно, то же утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях:

$$A = A_1 + A_2. \tag{8.4}$$

Соотношение (8.3) выражает очевидное свойство аддитивности работы.

Единица работы в СИ – джоуль (Дж): 1 Дж – работа, совершаемая силой в 1 Н при перемещении на 1 м при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения (1 Дж = 1 Н·м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности. Мощность – это работа, совершаемая силой за единицу времени. Если за время dt совершается работа dA, то мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt}. \tag{8.5}$$

За время dt сила $\mathbf{F}$ совершает работу $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$P = \frac{(\mathbf{F}, d\mathbf{S})}{dt} = \left(\mathbf{F}, \frac{d\mathbf{S}}{dt}\right) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \tag{8.6}$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; из выражений (8.5) и (8.6) видно, что мощность, как и работа, – величина скалярная.

Зная мощность силы $\mathbf{F}$, можно найти и работу, которую совершает эта сила за промежуток времени t. В самом деле, представив подынтегральное выражение в формуле (8.2) в виде $(\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}dt) = P\cdot dt$, получим

$$A = \int_0^t P \cdot dt. \tag{8.7}$$

Единица мощности – ватт (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с). Внесистемная единица измерения мощности лошадиная сила (л.с.), 1 л.с. = 735 Вт.

Когда говорят о работе (или мощности), то необходимо в каждом конкретном случае чётко представлять себе, работа (мощность) какой силы или сил имеется в виду.

§ 1.9 Кинетическая энергия

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы **F** (в общем случае сила **F** может быть результирующей нескольких сил). Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила **F** на элементарном перемещении d**S**. Учитывая, что **F** = m·d**v**/dt и d**S** = **v**·dt, можем записать:

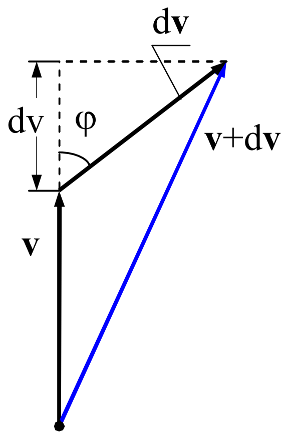


Рисунок 11

$$dA = (\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = m(\mathbf{v}, d\mathbf{v}). \tag{9.1}$$

В выражении (9.1) d**v** обозначает элементарное приращение вектора **v**, которое может не совпадать по направлению с вектором **v** (рисунок 11). По определению скалярного произведения

$$(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| \cdot |d\mathbf{v}| \cdot \cos\varphi = v \cdot dv, \tag{9.2}$$

где dv – элементарное приращение длины вектора **v**.
Отсюда получается, что

$$(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) = \frac{d(v^2)}{2}. \tag{9.3}$$

Такое соотношение справедливо не только для вектора **v**, но и для любого другого вектора.

Поэтому элементарную работу (9.1) запишем следующим образом:

$$dA = m\frac{d\left(v^2\right)}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \qquad (9.4)$$

Отсюда видно, что работа силы **F** (под **F** можно понимать результирующую всех сил, действующих на рассматриваемую частицу) идёт на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \qquad (9.5)$$

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы при элементарном перемещении равно

$$dT = dA, \qquad (9.6)$$

а при конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = A_{12}, \qquad (9.7)$$

т.е. приращение кинетической энергии частицы при некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу при этом перемещении. Если $A_{12} > 0$, то $T_2 > T_1$, т.е. кинетическая энергия частицы увеличивается; если $A_{12} < 0$, то кинетическая энергия частицы уменьшается.

Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем соотношение (9.7) для каждой материальной точки системы, а затем все такие соотношения сложим. В результате снова получится формула (9.7), но уже не для одной материальной точки, а для системы материальных точек. Под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом, работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии системы.

Из формулы (9.5) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

При выводе формулы (9.5) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчёта, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчёта, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а, следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчёта.

§ 1.10 Потенциальная энергия

Потенциальная энергия – это энергия, определяемая взаимным расположением тел и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть, $F(x, y, z)$ – сила, действующая на тело. Тогда элементарная работа этой силы по перемещению тела равна

$$dA = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{F}, d\mathbf{S}) = F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\cdot dz, \tag{10.1}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы $\mathbf{F}$ на оси координат.

Введем функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{10.2}$$

Функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям (10.2), называют потенциальной функцией, а силу **F** – консервативной (или потенциальной) силой. При этом элементарная работа dA будет равна:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -dU. \tag{10.3}$$

Пусть тело под действием силы **F** перемещается из точки 1 в точку 2, тогда работа этой силы при таком перемещении в соответствии с (10.3) равна:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{U_1}^{U_2} dU = -(U_2 - U_1), \tag{10.4}$$

где U_1, U_2 – начальное и конечное значения потенциальной функции $U(x, y, z)$.

Таким образом, работа консервативной силы зависит лишь от начального и конечного положения точек пути, и не зависит от формы пути, по которому движется тело при перемещении из точки 1 в точку 2. Если, например, тело переходит под действием силы тяжести с высоты h_0 над уровнем Земли на высоту h, то работа зависит не от того, по какому пути тело двигалось, а лишь от начального и конечного уровней.

Потенциальная функция, определяемая соотношениями (10.2), связывающими ее с консервативной силой, называется потенциальной энергией. Из (10.3) заключаем, что изменение dU потенциальной энергии тела определяется как взятая с обратным знаком элементарная работа dA действующих на тело консервативных сил при его перемещении из одной точки в другую (dU = –dA). Из выражения (10.4) следует, что работа консервативной силы на любом замкнутом пути равна нулю, так как в этом случае $U_1 = U_2$.

Если же работа, совершаемая силой, зависит от формы пути, то такая сила называется неконсервативной. Примерами неконсервативных сил являются: сила тяги ракеты; сила, действующая на заряженную частицу в вихревом электрическом поле; сила трения, направленная, как известно, против относительной скорости тела. Если сила трения не зависит от скорости (сухое трение), то работа, очевидно, прямо пропорциональна длине l траектории, по которой движется частица:

$$A_{тр} = \int_1^2 \mathbf{F}_{тр} \cdot d\mathbf{S} = -F_{тр} l < 0. \tag{10.5}$$

Таким образом, работа силы сухого трения при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 (рисунок 12) по разным путям будет различна. Очевидно, что $|A_{тр1}| > |A_{тр2}|$, так как $l_1 > l_2$.

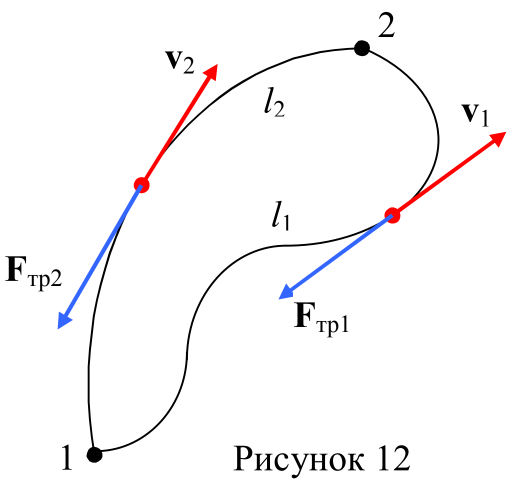


Рисунок 12

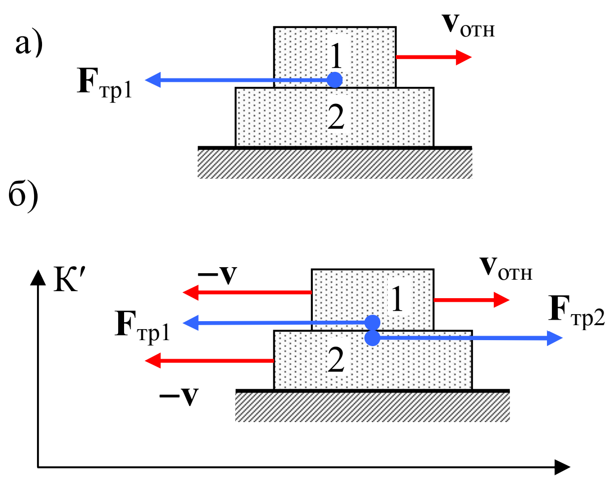


Рисунок 13

Заметим, что силу трения называют еще диссипативной силой. В зависимости от выбора системы отсчёта работа такой силы может быть как положительной, так и отрицательной. Однако суммарная работа всех внутренних диссипативных сил, действующих на тела системы, всегда отрицательна: $A_{дис} < 0$. Это неравенство является отличительной особенностью диссипативных сил.

В качестве примера рассмотрим тело 1, которое скользит по поверхности неподвижного тела 2 со скоростью $\mathbf{v}_{отн}$ (рисунок 13а). Сила трения $\mathbf{F}_{тр1}$ направлена против скорости $\mathbf{v}_{отн}$ и, таким образом, совершает отрицательную работу. В системе отсчёта К′, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ в направлении $\mathbf{v}_{отн}$, тело 1 будет иметь скорость ($\mathbf{v}_{отн} - \mathbf{v}$), а тело 2 – скорость – $\mathbf{v}$ (рисунок 13б). Если $v > v_{отн}$, то работа δA_1 силы $\mathbf{F}_{тр1}$ за время dt в этой системе отсчёта окажется положительной:

$$\delta A_1 = F_{тр1}\,(v - v_{отн})\,dt > 0.$$

Работа δA_2 силы $\mathbf{F}_{тр2}$, действующей на тело 2, будет отрицательной:

$$\delta A_2 = -\,F_{тр2}\,v\,dt < 0.$$

Полная работа сил трения

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = -\,F_{тр1}\,v_{отн}\,dt,$$

т.е. всегда отрицательна, независимо от скорости v выбранной системы отсчёта.

Тело, находясь в поле консервативных сил, называемом потенциальным полем, обладает потенциальной энергией $U(x, y, z)$. Согласно (10.3) работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению ее потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии $dA = -dU$.

Поскольку начало отсчёта (состояние с энергией U_1) выбирается произвольно, то потенциальная энергия U системы может иметь отрицательное значение. Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты глубиной h, равна $U = -mgh$. Таким образом, потенциальная энергия системы определяется с точностью до постоянной величины и в зависимости от начала отсчёта может принимать положительные или отрицательные значения. В то же время ее кинетическая энергия независимо от выбора системы отсчёта может принимать только положительные значения.

Пример 1. Рассмотрим растяжение (сжатие) пружины. Согласно закону Гука сила упругости при небольших растяжениях и сжатиях пропорциональна изменению длины пружины x, взятому с обратным знаком, т.е. $F = -kx$, где k – жесткость (коэффициент упругости) пружины, а знак минус означает, что сила упругости всегда направлена в сторону, противоположную смещению из положения равновесия, в котором пружина не деформирована. С другой стороны согласно (10.2) $F = -dU/dx$. Из приведённых двух выражений заключаем, что потенциальная энергия упругой деформации U равна:

$$U = \int k \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} kx^2. \qquad (10.6)$$

Пружина (упругое тело) приобретает энергию за счет работы A внешней силы (см. рисунок 14). Эта работа является мерой изменения потенциальной энергии деформируемого тела (пружины), т.е. $A = \Delta U$.

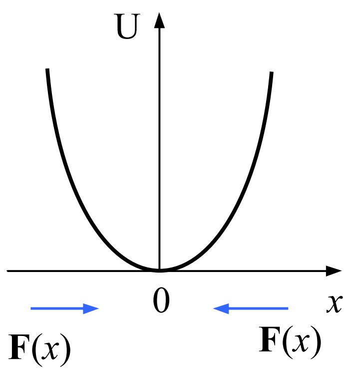


Рисунок 14

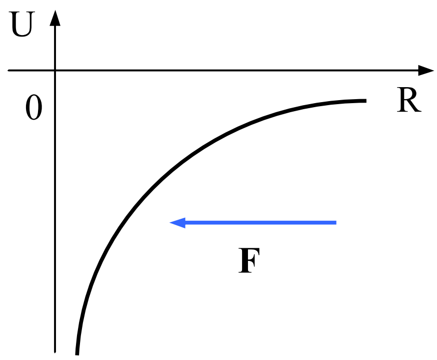


Рисунок 15

Пример 2. Пусть, потенциальная энергия взаимодействия двух тел обратно пропорциональна расстоянию R между ними, взятому с обратным знаком, т.е. $U = -C/R$, где C – некоторая постоянная. Тогда, сила взаимодействия между этими телами, равная $F = -dU/dR = -C/R^2$, будет являться силой притяжения этих тел друг к другу (см. рисунок 15).

Из этих примеров следует, что внутренние силы, возникающие в системе, действуют в сторону уменьшения ее потенциальной энергии.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + U. \tag{10.7}$$

§ 1.11 Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии – результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М. В. Ломоносову (1711–1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814–1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821–1894).

Пусть на рассматриваемое тело действуют только потенциальные силы, т.е. силы, удовлетворяющие условию (10.2). Для такого случая согласно (10.3) $dA = -dU$. С другой стороны, согласно (9.6) приращение кинетической энергии происходит за счёт работы этих сил, т.е. $dT = dA$. Из сравнения выражений (9.6) и (10.3) находим, что $dT = -dU$ или $d(T + U) = dE = 0$. Откуда следует, что величина $E = T + U = \text{const}$. Таким образом, выполняется закон сохранения полной механической энергии E, равной сумме кинетической T и потенциальной U энергий, если на тело действуют только потенциальные силы.

Теперь рассмотрим замкнутую консервативную систему тел, т.е. такую систему, на которую не действуют внешние силы. Положение отдельных тел системы определяется радиус-векторами $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3,\ldots, n$; n – количество тел в системе. Потенциальная энергия системы зависит от положения всех тел системы, т.е. $U=U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3,\ldots, \mathbf{r}_n)$. Предположим, что смещается только i-ое тело, а все остальные неподвижны. Тогда элементарная работа перемещения i-го тела будет равна:

$$dA_i=\left(\mathbf{F}_i,d\mathbf{S}_i\right)=F_{xi}\cdot dx_i+F_{yi}\cdot dy_i+F_{zi}\cdot dz_i=-\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=-dU_i, \quad (11.1)$$

т.е. элементарная работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии. С другой стороны эта элементарная работа идёт на приращение кинетической энергии i-го тела, т.е.

$$dA_i = dT_i. \qquad (11.2)$$

Сравнивая соотношения (11.1) и (11.2), получаем

$$dT_i+\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=0. \qquad (11.3)$$

Просуммируем выражения (11.3) для всех тел системы в предположении возможности перемещения всех тел системы:

$$\sum\left(dT_i\right)+\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right)=0. \qquad (11.4)$$

Первое слагаемое в (11.4) представляет собой полное изменение кинетической энергии всех тел системы dT, а второе слагаемое представляет собой изменение потенциальной энергии системы dU. Тогда выражение (11.4) принимает вид d(T+U) = dE = 0. Откуда следует, что величина

$$E = T + U = \text{const}. \qquad (11.5)$$

Таким образом, выполняется закон сохранения полной механической энергии E для замкнутой консервативной системы тел. В замкнутых системах могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно в эквивалентных количествах, так что полная механическая энергия остаётся неизменной.

В данном параграфе мы рассматриваем закон сохранения энергии при макроскопическом движении макроскопических тел, т.е. мы полностью отвлекаемся от внутреннего атомистического (микроскопического) строения вещества. Закон сохранения и превращения энергии – фундаментальный закон природы, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микрочастиц.

Системы, в которых действуют диссипативные силы, например силы трения, называются диссипативными. В диссипативных системах полная механическая энергия постепенно уменьшается за счёт преобразования в другие (немеханические) формы энергии, например, во внутреннюю энергию (внутренняя энергия складывается из кинетической энергии невидимого беспорядочного движения атомов и молекул вещества и потенциальной энергии их взаимодействия; беспорядочное движение атомов и молекул воспринимается нашими органами чувств в виде тепла; таково физическое объяснение кажущейся потери механической энергии при действии диссипативных сил). Этот процесс получил название диссипации (или рассеяния) энергии.

Строго говоря, все реальные макроскопические системы в природе являются диссипативными. Замкнутая система тел является идеализированной моделью для упрощённого рассмотрения многих явлений и процессов.

Следовательно, в реальных случаях закон сохранения механической энергии не выполняется. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. В этом и заключается физическая сущность закона сохранения и превращения энергии. Нужно иметь ввиду, что деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике и не охватывает всех форм энергии.

Применительно к незамкнутым (неизолированным) системам закон сохранения энергии означает, что изменение энергии такой системы равно работе, совершаемой системой (энергия системы уменьшается), или работе, совершаемой над системой внешними силами (энергия системы увеличивается).

§ 1.12 Закон сохранения импульса

Рассмотрим произвольную систему из n частиц в любой инерциальной системе отсчёта. В общем случае частицы этой системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. Поэтому уравнение движения i-й частицы согласно (6.1) можем записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i, \tag{12.1}$$

где $\mathbf{F}_i$ – векторная сумма внешних сил, действующих на i-ую частицу;

$\mathbf{F}_{ik}$ – сила, действующая на i-ую частицу со стороны k-й частицы; и их векторная сумма (первое слагаемое в уравнении) равна векторной сумме внутренних сил, действующих на i-ую частицу.

Просуммируем соотношение (12.1) по всем частицам (телам) системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \,. \tag{12.2}$$

В правой части уравнения (12.2) второе слагаемое представляет собой результирующую внешнюю силу $\mathbf{F}_{внеш}$, действующую на систему, а первое слагаемое, представляющее векторную сумму всех внутренних сил, равно нулю, так как в соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между любыми парами частиц системы равны по величине и противоположны по направлению: $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$. А в левой части, поменяв порядки суммирования и дифференцирования, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}_i\right)=\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}_{\text{внеш}}, \tag{12.3}$$

т.е. производная по времени импульса системы частиц равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы. Импульс системы частиц $\mathbf{p}=\sum\mathbf{p}_i$ может изменяться только под действием внешних сил. Внутренние силы не могут изменить импульс системы. В случае замкнутой (изолированной) системы на нее не действуют внешние силы ($\mathbf{F}_{\text{внеш}}=\sum\mathbf{F}_i=0$), и $d\mathbf{p}/dt=0$. Таким образом, получаем закон сохранения импульса – импульс замкнутой системы $\mathbf{p}=\sum\mathbf{p}_i$ остаётся постоянным, т.е. не меняется со временем. При этом отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться импульсами так, что приращение импульса одной части системы всегда равно уменьшению импульса оставшейся части системы.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии равенства нулю результирующей всех внешних сил. Это непосредственно вытекает из уравнения (12.3). Закон сохранение импульса даёт возможность получать достаточно простым путём ряд сведений о поведении системы, не вникая в детальное рассмотрение процесса.

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс $\mathbf{p}$, а его проекция p_x на некоторое направление $0x$, в случае если проекция результирующей внешней силы $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ на направление $0x$ равна нулю, т.е. когда вектор $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ перпендикулярен направлению $0x$. Действительно, из уравнения (12.3) для проекций на направление $0x$, имеем:

$$\frac{d\mathbf{p}_x}{dt}=\mathbf{F}_{\text{внеш}\,x}\,. \tag{12.4}$$

Отсюда следует, что если $\mathbf{F}_{\text{внеш}\,x}=0$, то $p_x=\text{const}$. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление. В таких случаях говорят, что система замкнута в данном направлении, и рассматривают сохранение проекции импульса на данное направление.

а) б)

Рисунок 16

Рассмотрим примеры на закон сохранения импульса. Допустим, что платформа с орудием движется без трения по горизонтальной поверхности с некоторой постоянной скоростью v_1 (рисунок 16а). В некоторый момент времени был произведён выстрел в сторону движения платформы, причём скорость снаряда относительно платформы равна u (рисунок 16б). Зная массу m снаряда и массу M платформы с орудием без снаряда, можно определить скорость v_2 платформы после выстрела. Действительно, записывая закон сохранения импульса в системе отсчёта, связанной с горизонтальной поверхностью, получим:

$$(M + m)v_1 = m(v_2 + u) + Mv_2, \tag{12.5}$$

откуда

$$v_2 = v_1 - \frac{m}{m + M}u. \tag{12.6}$$

Чем больше масса платформы, тем на меньшую величину изменяется ее скорость в результате выстрела.

Отметим, что тот же результат можно получить в другой инерциальной системе отсчёта – например, в системе, движущейся со скоростью v_1 (скорость платформы до выстрела). В этой системе начальный импульс равен нулю, а конечный складывается из импульса $m(v_2 - v_1 + u)$ снаряда и импульса $M(v_2 - v_1)$ платформы с орудием. Таким образом,

$$0 = m(v_2 - v_1 + u) + M(v_2 - v_1), \tag{12.7}$$

откуда для скорости v_2 платформы получается результат (12.6). Данный пример показывает, что если импульс сохраняется в одной инерциальной системе отсчёта, то он сохраняется и в любой другой инерциальной системе отсчёта. Это утверждение находится в полном соответствии с принципом относительности Галилея.

Заметим, что в рассмотренном выше примере закон, описывающий силу давления пороховых газов, и время действия этой силы неизвестны, поэтому решить эту задачу с помощью законов Ньютона было бы нельзя.

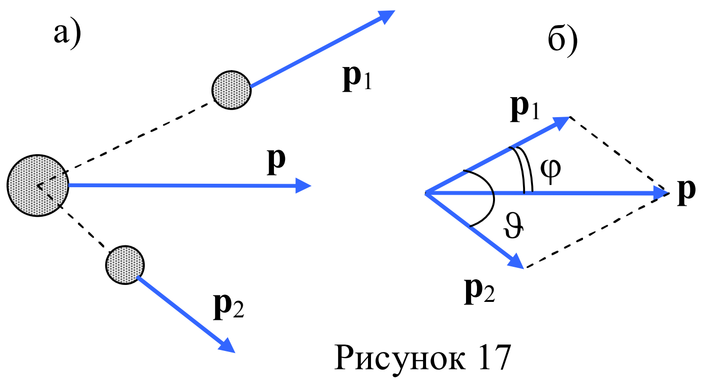


Рисунок 17

В следующем примере частица с импульсом **p** распадается на две более мелкие частицы, разлетающиеся под некоторым углом друг к другу (рисунок 17а). Зная импульс p_1 одной из образовавшихся частиц и угол φ ее отклонения от исходного направления, можно определить импульс p_2 второй частицы (рисунок 17б):

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2 - 2pp_1\cos\varphi} \tag{12.8}$$

и угол ϑ разлета частиц:

$$\sin\vartheta = \frac{p\sin\varphi}{p_2}. \tag{12.9}$$

Существует еще одна ситуация, при которой закон сохранения импульса можно в определённом приближении применять для незамкнутой системы. Это случай, когда начальное и конечное состояния отделены малым промежутком времени (выстрел, взрыв, удар), а внутренние силы значительно больше внешних сил. При этом импульс внешней силы (например, силы тяжести, реакции опоры или трения) не может заметно изменить импульс системы тел за рассматриваемый промежуток времени, и им можно пренебречь. Такая ситуация, например, имеет место в задаче о разрыве летящего снаряда, когда приравниваются импульс снаряда непосредственно перед разрывом и суммарный импульс осколков сразу же после разрыва: импульс внешних сил (тяжести, сопротивления воздуха) незначителен ввиду малости времени разрыва.

§ 1.13 Закон сохранения момента импульса

Важные законы механики связаны с понятиями момента импульса и момента силы. Следует различать моменты этих векторов относительно точки и относительно оси. Момент вектора относительно точки и относительно оси – разные понятия, хотя и связанные между собой. Момент вектора относительно точки сам есть вектор. Момент того же вектора относительно оси есть его проекция на эту ось относительно точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора относительно оси уже не является вектором.

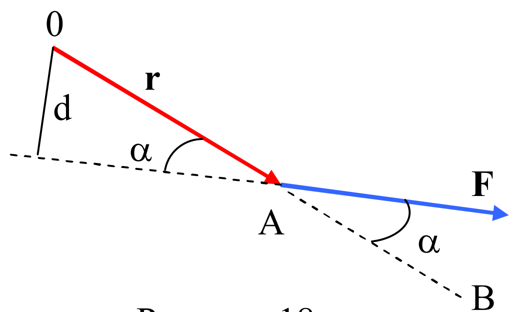


Рисунок 18

Пусть, 0 – какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы. Ее называют началом или полюсом. Обозначим буквой **r** радиус-вектор, проведённый из этой точки к точке приложения силы **F** (рисунок 18). Моментом силы **F** относительно точки 0 называют векторное произведение радиус-вектора **r** на силу **F**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]. \qquad (13.1)$$

Здесь **M** – псевдовектор, перпендикулярный векторам **r** и **F**, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от **r** к **F** в направлении кратчайшего поворота (на рисунке 18 вектор **M** будет направлен «на нас»). Модуль момента силы равен:

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d, \qquad (13.2)$$

где α – угол между **r** и **F** (см. приложение Г данного пособия);

$r \cdot \sin\alpha = d$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой 0 (d – плечо силы).

Из этого определения непосредственно следует, что момент силы **M** не изменится, если точку приложения силы **F** перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.

Аналогично определяется момент импульса **L** материальной точки относительно точки или полюса 0. Моментом импульса называется векторное произведение

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \qquad (13.3)$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс материальной точки;

r – радиус-вектор, проведенный из полюса в точку, в которой в данный момент находится рассматриваемая материальная точка.

Вектор **L** перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **r** и **p**, а его направление зависит от взаимной ориентации **r** и **p** и определяется по правилу правого винта. Если векторы **r** и **p** привести к одному началу и правый винт поворачивать кратчайшим путем от **r** к **p**, то поступательное движение винта укажет направление вектора **L**. Модуль вектора момента импульса **L** равен

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha = p \cdot d, \qquad (13.4)$$

где α – угол между векторами **r** и **p**;

d – плечо вектора **p** относительно точки 0.

Рассмотрим произвольную систему из n частиц в некоторой инерциальной системе отсчёта. В общем случае частицы этой системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в систему. Поэтому уравнение движения i-й частицы согласно (6.1) можем записать в виде:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i, \qquad (13.5)$$

где $\mathbf{F}_i$ - векторная сумма внешних сил, действующих на i-ую частицу;

$\mathbf{F}_{ik}$ - сила, действующая на i-ую частицу со стороны k-й частицы; и их векторная сумма (первое слагаемое в уравнении (12.5)) равна векторной сумме внутренних сил, действующих на i-ую частицу.

Если все слагаемые в уравнении (13.5) векторно умножить на $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор относительно некоторого полюса, то, учитывая, что $\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$, $\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]$, $\mathbf{M}_{ik} = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}]$, получим:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathbf{M}_{ik} + \mathbf{M}_i, \qquad (13.6)$$

где $\mathbf{M}_i$ – векторная сумма моментов внешних сил, действующих на i-ую частицу;

$\mathbf{M}_{ik}$ – момент силы, действующей на i-ую частицу со стороны k-й частицы, их векторная сумма (первое слагаемое в уравнении) равна векторной сумме моментов внутренних сил, действующих на i-ую частицу;

$\mathbf{L}_i$ – момент импульса i-й частицы.

Просуммируем соотношение (13.6) по всем частицам (телам) системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \mathbf{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i . \qquad (13.7)$$

В правой части уравнения (13.7) второе слагаемое представляет собой результирующий момент внешних сил $\mathbf{M}_{внеш}$, действующих на систему, а первое слагаемое, представляющее векторную сумму моментов всех внутренних сил, равно нулю, так как в соответствии с третьим законом Ньютона $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, т.е. и $\mathbf{M}_{ik} = -\mathbf{M}_{ki}$ для любой пары частиц системы. Момент таких двух сил, а значит и моменты всех внутренних сил равны нулю. А в левой части, поменяв порядки суммирования и дифференцирования, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{L}_i\right) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{внеш} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{внеш} \tag{13.8}$$

Соотношение (13.8) означает, что производная по времени от момента импульса системы частиц (материальных точек) относительно произвольной точки выбранной системы отсчёта равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно той же точки (полюса). Следовательно, момент импульса системы частиц $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$ может изменяться только под действием момента внешних сил. Моменты внутренних сил не могут изменить момент импульса системы.

Если момент внешних сил относительно неподвижной точки 0 равен нулю, т.е. $\mathbf{M}_{внеш} = 0$, то момент импульса системы относительно той же точки остаётся постоянным во времени, т.е. $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \text{const}$. Это положение называют законом сохранения момента импульса. В частности, момент импульса сохраняется для изолированной системы частиц. При этом отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться моментами импульса так, что приращение момента импульса одной части системы всегда равно уменьшению момента импульса остальной части системы.

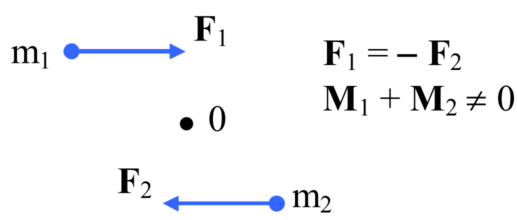


Рисунок 19

Некоторые замечания к закону сохранения момента импульса:

1. Если результирующая внешних сил равна нулю, то это еще не значит, что будет $\mathbf{L} = \text{const}$, так как в этом случае может быть $\mathbf{M} \neq 0$ (например, в случае действия пары сил, не лежащих на одной прямой, рисунок 19).

2. Часто встречаются случаи, когда система частиц не замкнута (ее импульс изменяется со временем), и, тем не менее, существуют точки, относительно которых **M** = 0, и, следовательно, **L** = const. Примером может служить система, находящаяся в поле центральных сил. В этом случае момент импульса системы относительно силового центра (полюса) остаётся неизменным.

3. У незамкнутых систем может сохраняться не сам вектор **L**, а его проекция на некоторую неподвижную ось 0z. Так будет в том случае, когда проекция вектора **M** на эту ось равна нулю. Действительно, записывая уравнение (13.7) в проекциях на ось 0z, получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z .$$

Отсюда и следует, что если $M_z = 0$, то и $L_z = \text{const}$. Так, например, система, включающая в себя планеты Солнечной системы, является незамкнутой. Ее импульс изменяется под действием сил тяготения со стороны Солнца. Вместе с тем суммарный момент импульса системы планет относительно центра Солнца остаётся неизменным, так как гравитационное поле, создаваемое Солнцем, – центральное. Интересно отметить, что орбиты всех планет Солнечной системы лежат приблизительно в одной плоскости, так что их орбитальные моменты импульса складываются алгебраически. При этом все планеты движутся вокруг Солнца в одном и том же направлении, в связи с чем суммарный момент импульса планет Солнечной системы отличен от нуля. Момент импульса самого Солнца направлен в ту же сторону, а его величина составляет около 2 % от момента импульса планет.

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси каждая отдельная точка (частица) тела движется по окружности постоянного радиуса $\mathbf{r}_i$ с некоторой скоростью $\mathbf{v}_i$. Скорость $\mathbf{v}_i$ и импульс $m_i\mathbf{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\mathbf{v}_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_i = m_i v_i r_i \qquad (13.9)$$

и направлен вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твёрдого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных его частиц:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i \,. \tag{13.10}$$

Подставляя в (13.10) формулу (4.6) $v_i = \omega r_i$ и учитывая, что в твёрдом теле все частицы вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, получим:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J\omega, \tag{13.11}$$

где

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \,. \tag{13.12}$$

Моментом инерции J системы (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек (частиц) системы (тела) на квадраты их расстояний до оси вращения. Как видно из (13.12) момент инерции твёрдого тела зависит от распределения массы относительно оси вращения и является величиной аддитивной. В случае непрерывного распределения массы суммирование сводится к интегрированию по объёму тела V:

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV \,, \tag{13.13}$$

где dm и dV – масса и объём элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси вращения;

ρ – плотность тела в данной точке.

Уравнение (13.11) в векторной форме имеет вид:

$$\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}. \tag{13.14}$$

Таким образом, момент импульса $\mathbf{L}$ твёрдого тела относительно выбранной оси равен произведению момента инерции J тела относительно той же оси на угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$.

С учётом (13.14) уравнение (13.8) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(J\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_{внеш}, \tag{13.15}$$

где $\mathbf{M}_{внеш}$ – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения.

Соотношение (13.15) представляет основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси. Оно напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы в нём играет момент инерции J, роль скорости – угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, роль силы – момент силы $\mathbf{M}_{внеш}$.

Если система неинерциальная, то момент $\mathbf{M}_{внеш}$, помимо момента сил взаимодействия данного тела с другими телами, должен включать в себя также момент сил инерции.

При вращении симметричного твёрдого тела вокруг неподвижной оси симметрии момент инерции J остаётся постоянным, и уравнение (13.15) примет вид:

$$J\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M}_{внеш}. \tag{13.16}$$

Произведение момента инерции J твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ равно моменту внешних сил $\mathbf{M}_{внеш}$ относительно той же оси.

Рассмотрим пример использования уравнения моментов (13.8) при исследовании вращательных движений. Небольшое тело массой m, подвешенное на лёгкой невесомой нити 0A, вращается вокруг вертикальной оси так, что угол φ между осью и нитью остаётся постоянным (рисунок 20). При этом вектор **L** момента импульса тела относительно точки подвеса 0 «движется» по конической поверхности с углом полураствора $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Изменение вектора **L** по направлению обусловлено наличием момента силы тяжести $[\mathbf{r}\times m\mathbf{g}] = \mathbf{M}$ относительно точки 0; момент силы **T** натяжения нити относительно точки подвеса 0 равен нулю.

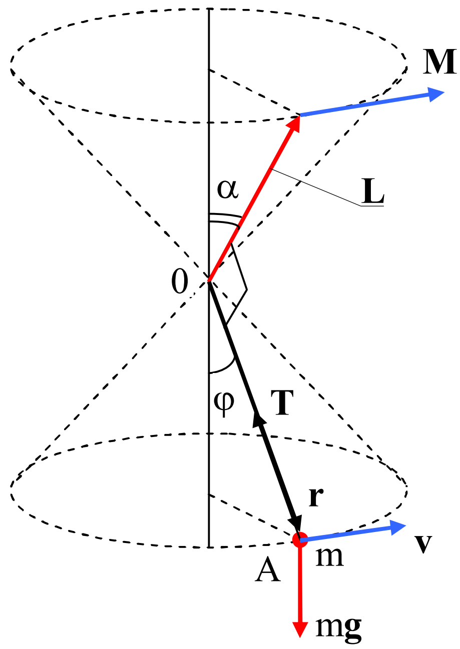


Рисунок 20

Интегрируя (13.8), можно определить приращение момента импульса частицы за конечный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}dt\,. \tag{13.17}$$

Величину, стоящую в правой части, называют импульсом момента силы за промежуток времени Δt. Таким образом, приращение момента импульса материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу момента силы за это же время.

Из уравнения моментов (13.8) следует, что если M = 0, то L = const. Таким образом, если относительно некоторой точки 0 момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой точки остаётся неизменным.

§ 1.14 Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчёта

В системах отсчёта, движущихся ускоренно, появляются добавочные силы, обусловленные наличием ускорения. Такие силы называют силами инерции. Их характерной особенностью является пропорциональность массе тела, на которое они действуют.

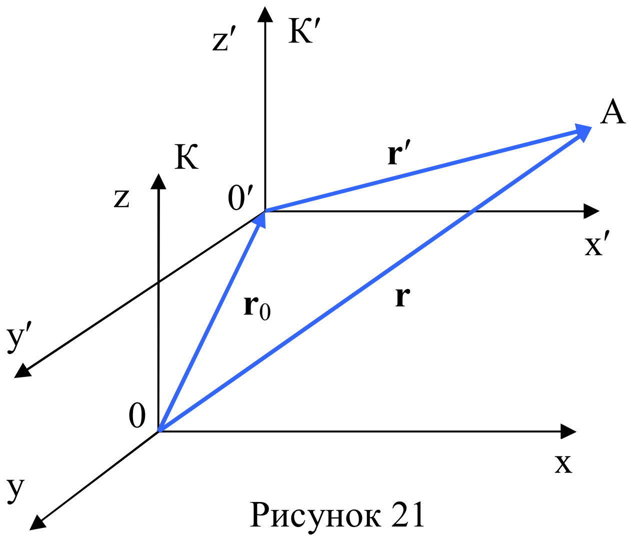


Рисунок 21

Рассмотрим инерциальную систему отсчёта К, относительно которой поступательно с ускорением $\boldsymbol{a}_0$ движется система отсчёта К′ (см. рисунок 21). Тогда положение частицы, находящейся в точке А, относительно указанных систем отсчёта определяется радиус-векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, а положение начала координат 0′ системы К′ относительно начала координат 0 системы К определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Можно записать очевидное соотношение между этими векторами:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \tag{14.1}$$

Дважды дифференцируя это соотношение по времени, получим:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'. \tag{14.2}$$

Все слагаемые соотношения (14.2) умножим на массу частицы m и с учетом того, что произведение m$\boldsymbol{a}$ равно результирующей силе $\mathbf{F}$, действующей на частицу, имеем:

$$m\boldsymbol{a}' = \mathbf{F} - m\boldsymbol{a}_0 \qquad \text{или} \qquad m\boldsymbol{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}}. \tag{14.3}$$

Полученное уравнение (14.3) представляет собой уравнение движения частицы в неинерциальной системе отсчёта. Таким образом, при описании движения в неинерциальных системах отсчёта можно пользоваться уравнениями динамики Ньютона, если наряду с силами **F**, обусловленными воздействием тел друг на друга, учитывать так называемые силы инерции $\mathbf{F}_{ин}$. Силы инерции следует полагать равными произведению массы частицы (тела) на взятое с обратным знаком ускорение неинерциальной системы отсчёта, т.е.

$$\mathbf{F}_{ин} = -m\boldsymbol{a}_0. \tag{14.4}$$

Это можно пояснить следующим примером. К потолку железнодорожного вагона, движущегося с ускорением $\boldsymbol{a}_0$, подвешен на нити груз массы m (рисунок 22). Наблюдатель, находящийся в вагоне, отмечает, что груз на нити отклоняется от вертикального направления на угол α и несмотря на действие сил тяжести m**g** и натяжения нити $\mathbf{F}_н$ остаётся в таком состоянии. Это можно объяснить, если допустить, что на груз, находящийся в ускоренно движущейся системе отсчёта, действует дополнительная сила – сила инерции, равная

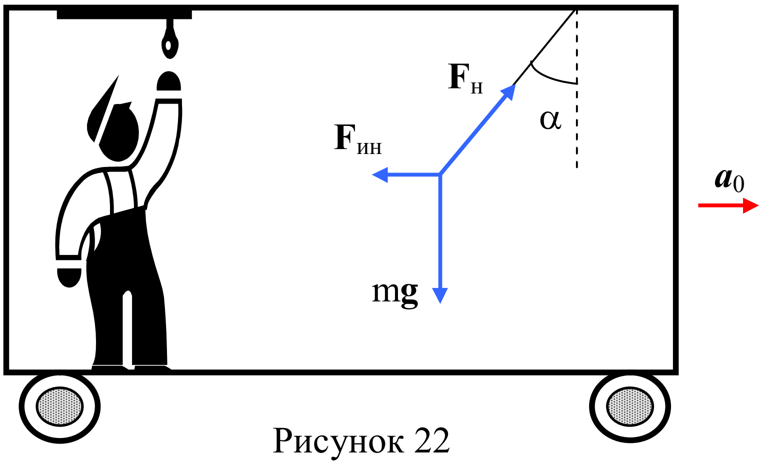


Рисунок 22

$$\mathbf{F}_{ин} = -m\boldsymbol{a}_0,$$

которая направлена противоположно ускорению. Под действием трёх перечисленных сил груз может находиться в равновесии, т.е. в отклонённом от вертикали положении, если их векторная сумма равна нулю:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_н + \mathbf{F}_{ин} = 0.$$

Если бы грузу, висящему в вагоне (см. рисунок 22), сообщили толчок, то груз стал бы совершать колебания, как маятник. Если ускорение вагона остаётся постоянным во время его движения, то анализ колебаний маятника относительно вагона не представляет никаких затруднений. В самом деле, к силе тяжести $m\mathbf{g}$ будет прибавлена сила инерции $\mathbf{F}_{ин}$, результирующая этих двух сил направлена под углом α к вертикали, и маятник будет совершать колебания около направления равновесия нити, наклонённой под углом α к вертикали. В состоянии равновесия сила, действующая вдоль нити, будет больше силы тяжести, она равна квадратному корню из суммы квадратов силы тяжести и силы инерции и направлена противоположно силе натяжения нити $\mathbf{F}_н$. Если обрезать нить, то груз будет падать в вагоне по прямой, направленной под углом α к вертикали, с ускорением $\sqrt{a_0^2 + g^2}$. Относительно Земли груз будет двигаться по параболе, которая определяется скоростью вагона в момент отрыва груза и ускорением g.

Наличие сил инерции отражает ускоренное движение системы отсчёта, и силы инерции определяют движение тела в ускоренной системе отсчёта. В этом смысле они ничем не отличаются от обычных сил взаимодействия тел. Однако следует отметить принципиальное отличие сил инерции от остальных сил, выражающих взаимодействие тел. Оно заключается в том, что силы инерции не имеют противодействующей, нельзя указать того тела, со стороны которого приложена сила инерции. Поэтому иногда и называют силу инерции «фиктивной силой». Такое название нельзя считать целесообразным: сила инерции реальна, поскольку она отображает ускоренное движение системы отсчёта, она отлична от сил взаимодействия тем, что не имеет противодействующей, но ничего фиктивного в этом нет.

Силы инерции, учитывающие ускоренное движение системы отсчёта, возникают только при рассмотрении движения относительно ускоренной системы отсчёта. Если то же самое движение рассматривается относительно инерциальной системы отсчёта, нет необходимости во введении каких-либо сил инерции. Действие силы инерции хорошо ощущают пассажиры при резком торможении или разгоне автомобиля.

Свойство пропорциональности сил инерции массе тела делает их аналогичными силам тяготения. Допустим, к потолку кабины космического корабля, движущегося поступательно с ускорением свободного падения **g**, подвешен на нити груз массы m (см. рисунок 23). Тогда, если можно пренебречь взаимодействием с окружающими телами в случае их значительной удалённости от корабля, на тело действует сила инерции $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{g}$. Точно такая же по величине сила (сила гравитации) будет действовать на тело, если кабина корабля находится неподвижно у поверхности Земли. Таким образом, наблюдатель, находящийся в кабине корабля, не сможет установить, чем обусловлена сила $-m\mathbf{g}$, – ускоренным движением корабля или гравитационным полем Земли. Поэтому говорят, что силы тяготения в однородном гравитационном поле и силы инерции эквивалентны.

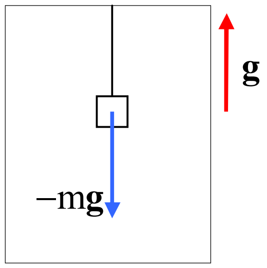


Рисунок 23

§ 1.15 Центробежная сила инерции

Пусть горизонтальный диск равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске на разных расстояниях от оси вращения установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой m). При вращении маятников вместе с диском все шарики маятников отклоняются от вертикали (рисунок 24). Углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем дальше маятник отстоит от центра диска (маятник, висящий на оси вращения диска не будет отклоняться при угловых скоростях $\omega \le \sqrt{g/L}$, L – длина нити подвеса). Все маятники находятся в состоянии покоя относительно диска, но совершают равномерное движение по кругу относительно Земли (относительно инерциальной системы отсчёта; неинерциальностью из-за вращения Земли пренебрегаем). Так как радиусы кругов, по которым движутся грузики маятников, различны, то центростремительные силы, действующие на грузики, прямо пропорциональны расстоянию R грузиков от центра диска. Центростремительная сила **F** создается натяжением нитей $\mathbf{F}_н$ и силой тяготения грузиков m**g** (рисунок 25), $F = m\omega^2R$. Поэтому угол отклонения нити от вертикали α будет таков, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}, \tag{15.1}$$

где R – расстояние грузика от оси вращения (центра) диска;

g – ускорение свободного падения;

ω – угловая скорость вращения диска.

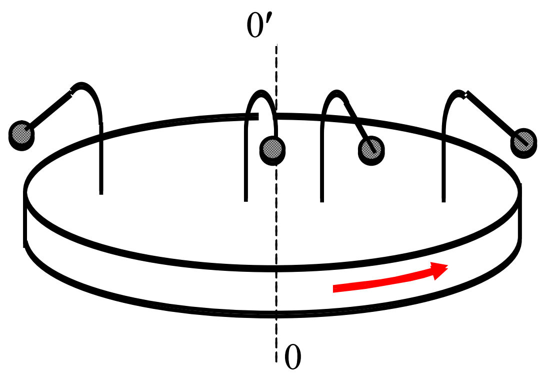


Рисунок 24

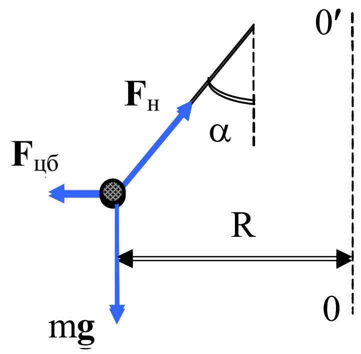


Рисунок 25

Относительно диска маятники находятся в состоянии покоя в отклонённом положении. Следовательно, кроме сил тяготения на грузики маятников действует еще какая-то горизонтальная сила, направленная от центра и притом различная для различных маятников. Эта сила и есть центробежная сила инерции, равная по величине массе грузика, умноженной на ускорение (относительно Земли) того места диска, над которым грузик находится, направлена она противоположно ускорению, т.е. от центра диска по радиусу. Таким образом, в состоянии покоя относительно диска на грузик каждого маятника действуют три силы: сила тяготения m**g**, сила натяжения $\mathbf{F}_н$ и центробежная сила инерции

$$\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2\mathbf{R}, \tag{15.2}$$

где вектор **R** направлен от оси вращения.

Сумма всех этих сил равна нулю (см. рисунок 25), и грузик поэтому находится в покое относительно диска. Если бы по какой-то причине равновесие нарушилось, то начались бы колебания маятников относительно диска, грузики получили бы ускорение относительно диска.

Силы инерции, действующие на тело, которое покоится во вращающейся системе отсчёта, зависят от места, которое занимает тело в этой системе. При движении тела относительно вращающейся системы отсчёта на тело будут действовать и другие силы инерции, величину и направление которых определим в следующем параграфе. Отметим, что в системе отсчёта, движущейся ускоренно и прямолинейно, силы инерции одинаковы для всех точек этой системы, и поэтому силы инерции, действующие на покоящееся и на движущееся относительно этой системы тело, имеют одно и то же значение.

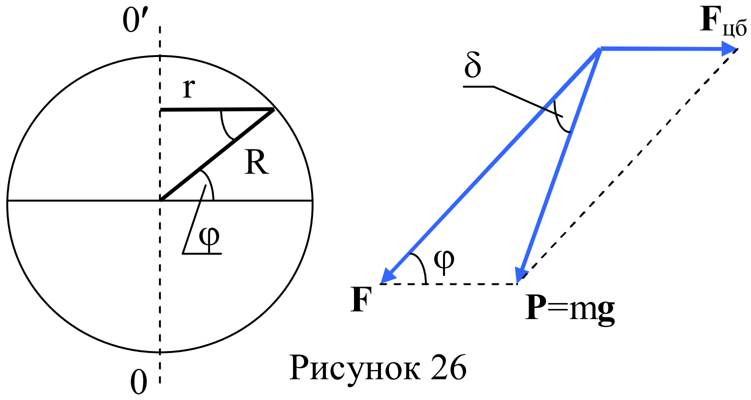


Рисунок 26

При точном решении задач о движении тел относительно земной поверхности нужно учитывать центробежную силу инерции, равную $m\omega^2 r$, где m – масса тела, ω – угловая скорость суточного вращения Земли вокруг ее оси, r – расстояние тела от земной оси (рисунок 26). В случаях, когда высота тела над поверхностью Земли невелика, можно положить r равным Rcosφ, где R – радиус Земли, φ – широта местности. Тогда выражение для центробежной силы инерции примет вид:

$$F_{цб} = m\omega^2 R\cos\varphi. \qquad (15.3)$$

Наблюдаемое относительно Земли ускорение свободного падения тела **g** обусловлено действием силы **F**, с которой тело притягивается Землёй, и центробежной силы инерции $\mathbf{F}_{цб}$. Результирующая этих сил

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{цб} \qquad (15.4)$$

есть сила тяжести, равная $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$.

Отличие силы тяжести **P** от силы притяжения к Земле **F** невелико, так как центробежная сила инерции значительно меньше **F**. Так, для массы 1 кг наибольшее значение $\mathbf{F}_{цб}$, наблюдаемое на экваторе ($\varphi = 0$), равно

$$m\omega^2 R = 1\ кг\cdot(2\pi/86\,400\ с)^2\cdot 6{,}4\cdot 10^6\ м = 0{,}035\ Н,$$

в то время как значение силы тяготения **F** равно приблизительно 9,8 Н, т.е. почти в 300 раз больше.

Угол δ между направлениями **F** и **P** (см. рисунок 26) можно определить, воспользовавшись теоремой синусов:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varphi} = \frac{F_{цб}}{P} = \frac{m\omega^2 R\cos\varphi}{mg} \approx \frac{0{,}035}{9{,}8}\cos\varphi \approx 0{,}0035\cos\varphi\ ,$$

откуда

$$\sin\delta \approx 0{,}0035\sin\varphi\cos\varphi \approx 0{,}0018\sin 2\varphi.$$

Синус малого угла можно приближённо заменить значением самого угла (в радианах). В результате получим, что

$$\delta \approx 0{,}0018\sin 2\varphi. \qquad (15.5)$$

Таким образом, угол δ изменяется в пределах от нуля (на экваторе, где $\varphi = 0$, и на полюсах, где $\varphi = 90^0$) до 0,0018 рад или $6'$ (на широте 45^0).

Направление силы **P** совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса или вертикальным направлением (вертикалью). Сила **F** направлена к центру Земли. В рассмотренном нами случае угол δ представляет собой отклонение нити отвеса (вертикали) от направления к центру однородной Земли. Следовательно, вертикаль направлена к центру Земли только на полюсах и на экваторе, отклоняясь на промежуточных широтах на угол δ, определяемый выражением (15.5). Если учитывать несферичность и неоднородность Земли, определение вертикали (т.е. оценка угла δ) окажется несколько сложнее.

Здесь шла речь только о суточном вращении Земли вокруг оси. Легко убедиться, что влияние сил инерции, возникающих вследствие вращения Земли вокруг Солнца, будет несравненно меньше. Центробежная сила инерции вследствие вращения вокруг Солнца будет порядка 0,2 от центробежной силы вследствие суточного вращения на экваторе. К тому же, при движении тел вблизи поверхности Земли силы инерции, связанные с вращением Земли вокруг Солнца, и силы притяжения тел к Солнцу практически компенсируют друг друга и в большинстве случаев могут вообще не учитываться.

Самые простые примеры проявления центробежной силы инерции – центрифуга стиральной машины, различные аттракционы в развлекательных парковых комплексах, центробежные насосы для перекачки жидких продуктов.

§ 1.16 Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчёта кроме центробежной силы инерции появляется еще одна сила, называемая силой Кориолиса или кориолисовой силой инерции.

Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере. Возьмём горизонтально расположенный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на диске радиальную прямую OA (рисунок 27). Запустим в направлении от O к A шарик со скоростью $\mathbf{v}'$. Если диск не вращается, шарик будет катиться вдоль прочерченной нами прямой. Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик будет катиться по штриховой кривой OB, причём его скорость относительно диска $\mathbf{v}'$ будет изменять свое направление. Следовательно, по отношению к вращающейся системе отсчёта шарик ведёт себя так, как если бы на него действовала сила $\mathbf{F}_K$, перпендикулярная к скорости $\mathbf{v}'$.

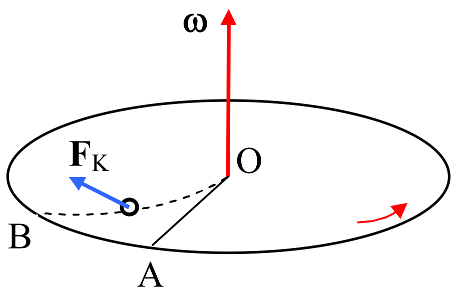


Рисунок 27

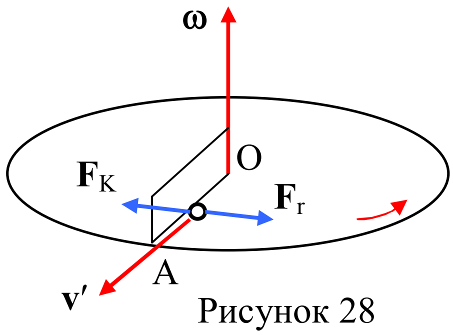


Рисунок 28

Чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой, нужно сделать направляющую, например, в виде ребра OA (рисунок 28). При качении шарика направляющее ребро действует на него с некоторой силой $\mathbf{F}_r$. Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной по направлению скоростью. Это можно формально объяснить тем, что сила $\mathbf{F}_r$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\mathbf{F}_K$, перпендикулярной к скорости $\mathbf{v}'$. Сила $\mathbf{F}_K$ и есть кориолисова сила инерции.

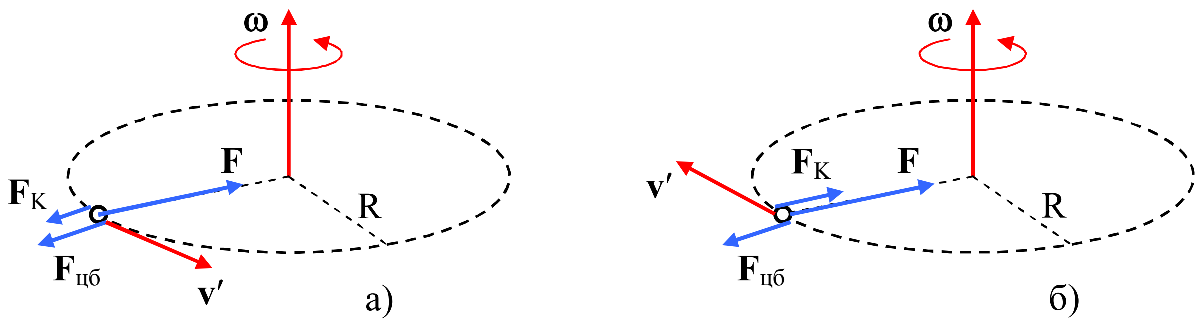


Рисунок 29

Найдём сначала выражение силы Кориолиса для частного случая, когда частица массы m движется относительно вращающейся системы отсчёта равномерно по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, с центром, находящимся на этой оси (рисунок 29). Скорость частицы относительно вращающейся системы отсчета обозначим $\mathbf{v}'$. Скорость частицы относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета $\mathbf{v}$ равна по модулю v′ +

ωR в случае (а) и $|v' - \omega R|$ в случае (б), где ω – угловая скорость вращающейся системы, R – радиус окружности (см. (4.6)).

Для того, чтобы частица двигалась относительно неподвижной системы по окружности со скоростью $v = v' + \omega R$, на нее должна действовать направленная к центру окружности сила F, например, сила натяжения нити, которой частица привязана к центру окружности (см. рисунок 29а). Модуль этой силы равен

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{R} = m\frac{(v' + \omega R)^2}{R} = m\frac{v'^2}{R} + 2mv'\omega + m\omega^2 R. \qquad (16.1)$$

Относительно вращающейся системы частица в этом случае движется с ускорением $a_n' = \dfrac{v'^2}{R}$, т.е. так, как если бы на нее действовала сила

$$ma_n' = m\frac{v'^2}{R} = F - 2mv'\omega - m\omega^2 R \qquad (16.2)$$

(см. (16.1)). Таким образом, во вращающейся системе частица ведёт себя так, как если бы на нее, кроме направленной к центру окружности силы **F**, действовали ещё две направленные от центра силы: $\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2\mathbf{R}$ и сила $\mathbf{F}_K$, модуль которой равен $2mv'\omega$ (см. рисунок 29а). Легко сообразить, что силу $\mathbf{F}_K$ можно представить в виде векторного произведения

$$\mathbf{F}_K = 2m[\mathbf{v}',\boldsymbol{\omega}]. \qquad (16.3)$$

Сила (16.3) и есть кориолисова сила инерции. При $\mathbf{v}' = 0$ эта сила отсутствует. Центробежная сила инерции $\mathbf{F}_{цб}$ не зависит от $\mathbf{v}'$ – она, как мы уже отмечали в § 1.15, действует как на покоящиеся, так и на движущиеся тела.

В случае, изображенном на рисунке 29б,

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{R} = m\frac{\left(v' - \omega R\right)^2}{R} = m\frac{v'^2}{R} - 2mv'\omega + m\omega^2 R. \qquad (16.4)$$

Соответственно

$$ma_n' = m\frac{v'^2}{R} = F + 2mv'\omega - m\omega^2 R \qquad (16.5)$$

Следовательно, во вращающейся системе частица ведёт себя так, как если бы на нее действовали две направленные к центру окружности силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_K$, а также направленная от центра сила $\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2\mathbf{R}$ (см. рисунок 29б). Кориолисова сила $\mathbf{F}_K$ и в этом случае может быть представлена в виде (16.3).

Запоминанию формулы (16.3) могут способствовать следующие соображения. Сила Кориолиса возникает при движении частицы относительно вращающейся системы отсчёта, т.е. при условии, что «имеется в наличии» масса m, скорость частицы $\mathbf{v}'$ и угловая скорость системы $\boldsymbol{\omega}$. Очевидно, что сила Кориолиса определяется именно этими тремя параметрами и никакими другими. Простейший способ получить из скаляра m и двух векторов $\mathbf{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}$ новый вектор $\mathbf{F}$ состоит в том, чтобы перемножить $\mathbf{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}$ векторно, а затем умножить результат на m. В итоге получается выражение $m[\mathbf{v}',\boldsymbol{\omega}]$, которое с точностью до двойки совпадает с (16.3).

В примерах, разобранных на рисунке 29, движение частицы происходило в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, т.е. векторы скорости частицы $\mathbf{v}'$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ были перпендикулярны ($\mathbf{v}' \perp \boldsymbol{\omega}$). В общем случае, из векторного уравнения (16.3) получаем выражения для модуля силы Кориолиса:

$$F_K = 2mv'\omega\cdot\sin\alpha, \qquad (16.6)$$

где α – угол между векторами $\mathbf{v}'$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Рассмотрим **примеры проявления кориолисовой силы инерции**.

Отклонение падающих тел к востоку. Все тела, падающие на Землю с большой высоты, отклоняются относительно ее поверхности к востоку. Определим это отклонение в неинерциальной системе отсчёта, связанной с вращающейся Землёй. Будем рассматривать свободное падение тела с высоты h на широте местности φ. Вследствие действующих сил тяготения и Кориолиса скорость тела $\mathbf{v}'$ будет иметь две составляющие – вертикальную и горизонтальную (рисунок 30). Отклонение к востоку обусловлено горизонтально направленной силой Кориолиса $\mathbf{F}_К$, связанной с наличием вертикальной составляющей скорости. Это отклонение описывается уравнением:

$$m\boldsymbol{a}_{гор} = \mathbf{F}_К = 2m[\mathbf{v}_{верт},\boldsymbol{\omega}]. \qquad (16.7)$$

Из (16.7) с учетом (16.6) находим выражение для модуля ускорения

$$a_{гор} = 2v_{верт}\omega\cdot\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi), \qquad (16.8)$$

где $(\frac{\pi}{2} + \varphi)$ – угол между векторами $\mathbf{v}_{верт}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Приближённо можно считать, что $v_{верт} = gt$. Тогда

$$a_{гор} = 2g\omega t\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = 2g\omega t\cos\varphi\ . \qquad (16.9)$$

Уравнение (16.9) проинтегрируем по времени. Первый интеграл – это горизонтальная компонента скорости:

$$v_{гор} = \int_0^t a_{гор}dt = g\omega t^2\cos\varphi, \qquad (16.10)$$

а второй интеграл определяет искомое отклонение к востоку:

$$L = \int_0^t v_{гор} dt = \int_0^t g\omega t^2 \cos\varphi \cdot dt = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi. \qquad (16.11)$$

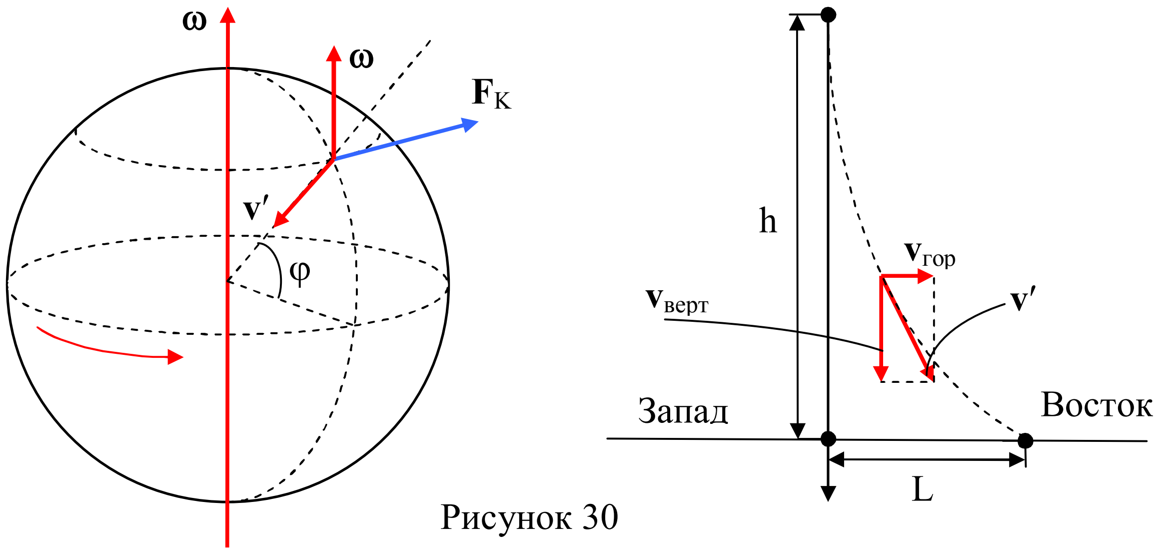


Рисунок 30

Если в (16.11) подставить время падения τ с высоты h на экваторе (φ = 0), то окончательно получим:

$$L = \frac{1}{3} g\omega \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}\ . \qquad (23.12)$$

Численная оценка для h = 100 м дает L ≈ 2,2 см. Малое значение L оправдывает применение приближённого метода.

Подмывание правых берегов крупных рек, текущих на север (или юг) в Северном полушарии. Если в Северном полушарии река течёт вдоль меридиана, т.е. на юг или на север, со скоростью $\mathbf{v}'$, на поток воды действует сила Кориолиса $\mathbf{F}_K$, направленная вправо по ходу течения (рисунок 31). В результате поток воды прижимается к правому берегу и подмывает его. Легко убедиться, что в Южном полушарии подмываются левые берега. В случае небольших быстрых извилистых речек определяющую роль играют центробежные силы инерции, в результате чего подмываются как левый так и правый берега.

Также действием кориолисовой силы объясняется то, что при выстреле из орудия, направленного вдоль меридиана, снаряд будет отклоняться вправо по ходу стрельбы в Северном полушарии (рисунок 31) и влево – в Южном. При стрельбе вдоль экватора силы Кориолиса будут прижимать снаряд к Земле, если выстрел произведён в направлении на Запад, и поднимать его кверху, если выстрел произведён в направлении на Восток, что приводит к увеличению или к уменьшению дальности стрельбы. Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении.

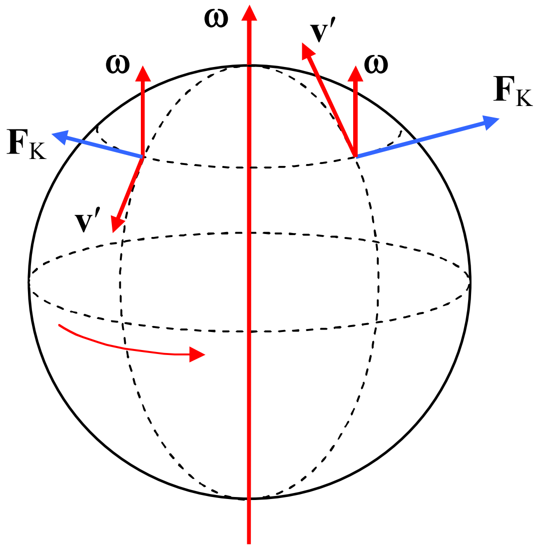


Рисунок 31

Господствующие направления ветров для некоторых районов Земли и крупномасштабные **течения воды в морях и океанах** (например, Гольфстрим и Куросиво) также обусловлены действием силы инерции Кориолиса.

Следующий пример – **поворот плоскости качаний маятника Фуко** – шара массы 28 кг на тросе длиной 67 м, который французский физик Ж. Фуко установил в Пантеоне Парижа в 1851 г. Через 24 ч маятник не возвращается в исходное положение: плоскость качаний смещается на угол $2\pi\sin\varphi$, называемый углом Ханнея. Фуко, наблюдая колебания маятника, доказал вращение Земли. Такой же маятник массы 54 кг на тросе длиной 98 м был недавно демонтирован в Исаакиевском соборе Санкт-Петербурга в связи с передачей собора в собственность православной церкви.

Подводя итоги, с учётом пояснений, приведённых к уравнению (14.3), можем записать уравнение движения в неинерциальной системе отсчёта для произвольного случая:

$$m\boldsymbol{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{и}} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{К}}, \tag{16.13}$$

где силы инерции задаются формулами (14.4), (15.2), (16.3).

Введение сил инерции позволяет описывать движение тел и в неинерциальных системах отсчёта с помощью известного нам второго закона Ньютона.

Таким образом, только приближённо можно считать систему отсчёта, связанную с Землёй, инерциальной. Ошибка, которая совершается в этом случае, определяется отношением величин сил инерции к величине всех остальных сил, действующих на тело.

Отметим особенности сил инерции, отличающие их от сил взаимодействия:

- силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчёта. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется;

- силы инерции существуют только в неинерциальных системах отсчёта. В инерциальных системах отсчёта сил инерции нет вообще, и понятие сила в инерциальных системах отсчёта применяется только как мера взаимодействия тел;

- все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в поле сил инерции, как и в однородном поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

§ 1.17 Периодические колебания. Гармонические колебания

Механические колебания. Колебаниями называются процессы, которые характеризуются той или иной степенью повторяемости во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например, смена дня и ночи, вращение планет и спутников, вращение частей машин (а всякое вращение можно представить себе как два одновременных колебания во взаимно перпендикулярных направлениях), изменения давления и температуры в течение определённого времени, движение Луны вызывает приливы и отливы на Земле и т.д. Внутри любого живого организма – от одиночной клетки до высокоорганизованных их популяций – непрерывно происходят ритмично повторяющиеся процессы (биение сердца, колебания психических состояний и др.).

В технике колебания выполняют либо определённые функциональные обязанности (колесо, маятник, колебательный контур, генератор колебаний и т.д.), либо возникают как неизбежное проявление физических свойств (вибрации машин и сооружений, неустойчивости и вихревые потоки при движении тел в газах и т.д.).

В зависимости от природы колебаний различают механические, звуковые, электромагнитные, электромеханические колебания, колебания температуры, давления и т.д. В физике особо выделяются колебания двух видов – механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации. Это обусловлено той исключительной ролью, которую играют гравитационные и электромагнитные взаимодействия в масштабах, характерных для жизнедеятельности человека. Но все колебательные процессы описываются одинаковыми уравнениями, несмотря на различие их физической природы.

С помощью распространяющихся механических колебаний плотности и давления воздуха, воспринимаемых нами как звук, а также очень быстрых колебаний электрических и магнитных полей, воспринимаемых нами как свет, мы получаем большую часть прямой информации об окружающем мире. Волны – изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства. В современном понимании понятие волны настолько широко и многозначно, что фактически невозможно указать ни одного признака, общего для всех видов движений или процессов, которые наша интуиция или традиция относит к волновым процессам.

Колебания называют собственными (свободными), если они совершаются колебательной системой после выведения ее из положения равновесия под действием только внутренних сил. Колебания называют вынужденными, если они совершаются колебательной системой под действием внешней переменной силы.

При механических колебаниях состояния движущегося тела с течением времени повторяются, когда тело проходит через положение своего устойчивого равновесия поочерёдно в противоположных направлениях. Мы ограничимся рассмотрением движения механических систем с одной степенью свободы, т.е. систем, положение которых в пространстве определяется заданием зависимости переменной x от времени t: x(t).

Колебания называются периодическими, если значения всех физических величин (при механических колебаниях – значения смещения, скорости, ускорения), характеризующих колебательную систему, и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T, удовлетворяющий этому условию, называют периодом колебаний. За период колебаний T система совершает одно полное колебание:

$$x(t) = x(t+T). \tag{17.1}$$

Написанное соотношение представляет собой наиболее строгое определение периодичности колебательного процесса. Частотой периодических колебаний называют величину

$$\nu = T^{-1}, \tag{17.2}$$

равную числу полных колебаний за единицу времени. Единица измерения частоты – герц (1 Гц = 1 $с^{-1}$).

Простейшим видом периодических колебаний является гармоническое колебание – такое движение колебательной системы, при котором координата (смещение) x изменяется со временем по закону синуса (косинуса):

$$x(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{17.3}$$

где A – амплитуда колебаний – величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия;

$(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза колебаний определяет положение системы в момент времени t после начала колебаний;

ω_0 – круговая (циклическая) частота;

α – начальная фаза.

Начальная фаза представляет собой значение фазы в момент времени $t = 0$. Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчёта времени. Так как значение x не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π, всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π. Поэтому обычно рассматривают только значения α, лежащие в пределах от $-\pi$ до $+\pi$. Так как максимальное значение синуса равно единице, то максимальное значение координаты равно амплитуде A, т.е. координата x изменяется в пределах от – A до + A ($|x(t)| \le A$).

Состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через период колебаний T, за который фаза колебания получает приращение 2π, т.е. $\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$, откуда находим

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (17.4)$$

Сравнивая выражение (17.4) с (17.2) получаем

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \qquad (17.5)$$

т.е. ω_0 определяет число колебаний за 2π секунд.

Приведённый математический анализ гармонических колебаний будет более полным, если его дополнить анализом следующего физического примера. Для этого рассмотрим равномерное движение шарика по окружности радиуса A с угловой скоростью ω_0 (рисунок 32). В начальный момент времени $t = 0$ радиус-вектор шарика образует угол $\varphi(t) = \alpha$ с горизонтальным направлением. За время t угол φ изменится на величину $\frac{2\pi}{T}t = \omega_0 t$ и станет равным $\varphi(t) = \omega_0 t + \alpha$. В этот момент времени проекция радиус-вектора шарика на ось 0x равна

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t+\alpha). \tag{17.6}$$

Из рисунка 32 видно, что проекция x(t) совпадает с положением тени шарика при освещении параллельным пучком света. Приведённый рисунок позволяет пояснить понятие фазы колебаний. Если известна функция $x(t) = A\sin(\omega_0 t+\alpha)$, то гармоническому колебанию можно поставить в соответствие вращение по окружности: значениям x(t) соответствуют определённые значения угла

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \alpha \tag{17.7}$$

между радиус-вектором и горизонталью. Именно в этом смысле угол φ(t) называют фазой колебаний. За одно полное колебание (один цикл) радиус-вектор шарика повернётся на 2π радиан.

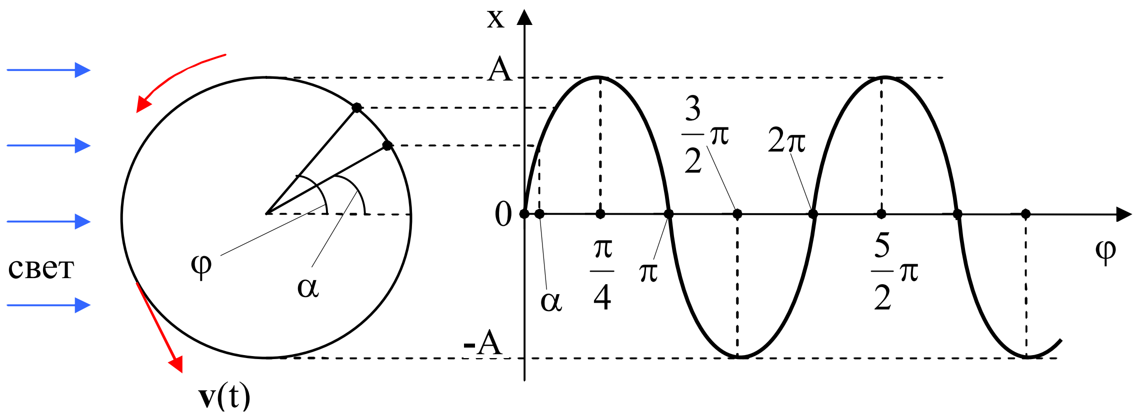


Рисунок 32

Если задана зависимость координаты x от времени t, то можно найти скорость v и ускорение *a*:

$$x = x(t)=A\sin(\omega_0 t+\alpha); \tag{17.8}$$

$$v=v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\alpha)=A\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}); \tag{17.9}$$

$$a=a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=x''(t)=-A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha)=A\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\alpha+\pi)=-\omega_0^2 x(t). \qquad (17.10)$$

Можно убедиться, что v(t) и a(t) являются проекциями модулей векторов скорости ($|\mathbf{v}|=A\omega_0$) и ускорения ($|\boldsymbol{a}|=A\omega_0^2$) на ось 0x. Нужно отметить, что в точках максимального отклонения от положения равновесия скорость равна нулю, а ускорение достигает наибольшей величины.

На рисунке 33 приведены графики зависимостей от времени для фазы φ(t), смещения x(t), скорости v(t), ускорения a(t) для случая, когда начальная фаза $\alpha = 0$. На графиках за масштаб времени взят период колебаний T.

Из уравнения (17.10) следует характерная для гармонических колебаний связь между ускорением и координатой:

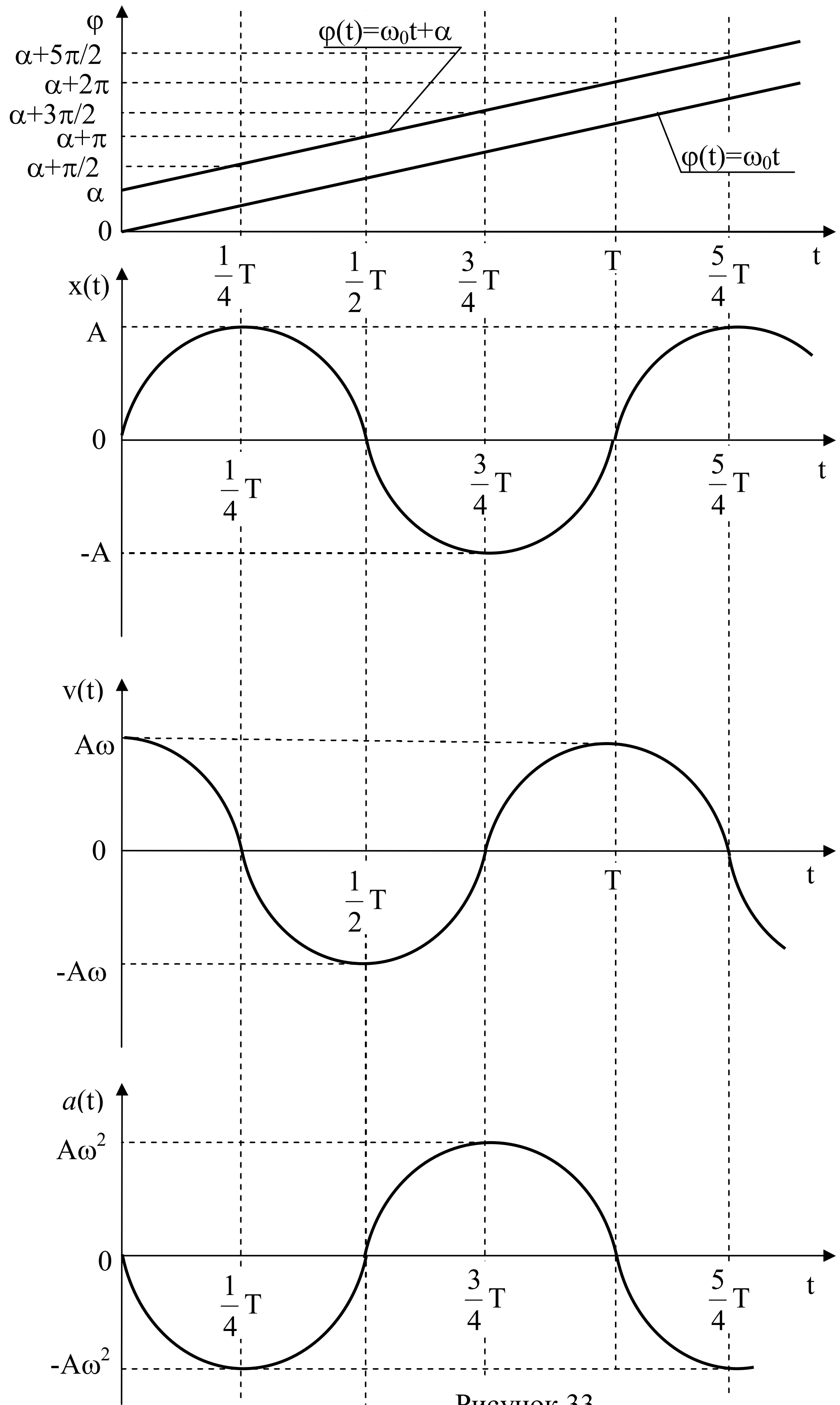
$$a(t) = -\omega_0^2 x(t), \qquad \text{или} \qquad x'' + \omega_0^2 x = 0. \qquad (17.11)$$

Уравнение (17.11) $x''+ \omega_0^2 x = 0$ называют дифференциальным уравнением 2-го порядка (максимальный порядок производной). В теории дифференциальных уравнений доказывается, что если уравнение движения тела имеет вид (17.11), то его решение имеет вид (17.8). Причём начальная фаза α и амплитуда A колебаний определяются начальными условиями.

Пусть, в начальный момент времени t = 0 тело сместили из положения равновесия на x_0 и сообщили в этой точке скорость v_0. Для начального момента соотношения (17.8) и (17.9) принимают вид:

$$x_0= x(t)\big|_{t=0}=A\sin(\omega_0 t+\alpha)\big|_{t=0}=A\sin\alpha; \qquad (17.12)$$

$$v_0=v(t)\big|_{t=0}=A\cos(\omega_0 t+\alpha)\big|_{t=0}=A\omega_0\cos\alpha. \qquad (17.13)$$



φ
φ(t)=ω₀t+α
α+5π/2
α+2π
α+3π/2
α+π
α+π/2
α
0
φ(t)=ω₀t
t
1/4 T
1/2 T
3/4 T
T
5/4 T
x(t)
A
0
-A
v(t)
Aω
-Aω
a(t)
Aω²
-Aω²

Рисунок 33

Решая уравнения (17.12) и (17.13), находим:

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}; \quad \sin\alpha=\frac{x_0}{A} \text{ и } \cos\alpha=\frac{v_0}{A\omega_0} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega_0 x_0}{v_0}. \qquad (17.14)$$

С учетом (17.14) решение уравнения (17.11) можно представить в виде:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t. \qquad (17.15)$$

§ 1.18 Динамика свободных гармонических колебаний. Маятники

Колебания, совершаемые системой, называют свободными, если они совершаются системой только под действием внутренних сил после выведения ее из равновесия. Гармоническим осциллятором называют систему, совершающую колебания, описываемые уравнением вида:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \qquad (18.1)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат характерной моделью во многих задачах. Примеры гармонического осциллятора – различные маятники, электрический колебательный контур и др.

Основой динамики является второй закон Ньютона – по заданным силам определяют зависимость координат тела от времени.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной L, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой металлический шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. После отклонения из положения равновесия шарик будет двигаться к положению равновесия с ускорением, которое возникло под действием силы натяжения нити $\mathbf{F}_н$ и силы тяжести $m\mathbf{g}$ (рисунок 34). Достигнув положения равновесия 0, где ускоряющая сила равна нулю, шарик по инерции пройдёт положение равновесия, и далее будет тормозиться той же силой, которая его ускоряла ранее. Затем он остановится и пойдёт обратно – так возникнут собственные колебания маятника. Собственными они называются потому, что во время колебаний шарик находится только под действием сил, определяемых физическим устройством самого маятника, а не других тел.

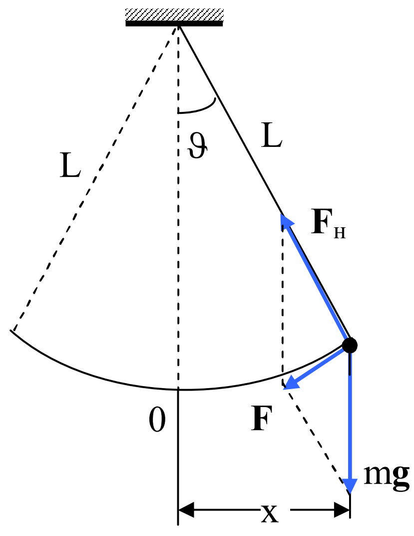


Рисунок 34

С течением времени колебания маятника будут затухать. Это происходит по той причине, что начальная энергия, которая была сообщена грузу маятника при отклонении его из положения равновесия, постепенно переходит в тепло вследствие наличия сил трения. Колебания маятника при этом будут негармоническими и непериодическими, но если силы трения уменьшить, то колебания будут очень близки к гармоническим колебаниям. Далее проанализируем предельный случай – колебания маятника в отсутствие силы трения, которые, очевидно, будут периодическими. Рассмотрим малые собственные колебания математического маятника.

Маятник совершает колебания вдоль дуги окружности радиуса, равного длине нити L. Колебания, совершаемые математическим маятником, можно считать за гармонические колебания только в случае малых углов ϑ отклонения нити от вертикали. Для малых углов выполняется условие: $\sin\vartheta \approx \mathrm{tg}\vartheta \approx \vartheta$. Предположим, что условие малости углов ϑ выполнено. Отклонение шарика от положения равновесия обозначим через x. При малых углах ϑ можно приближённо принять дугу траектории шарика за прямую и

$$x \approx L\vartheta, \tag{18.2}$$

где L – длина маятника от точки подвеса нити до центра тяжести шарика.

Сила F, действующая вдоль дуги, равна $mg\cdot\sin\vartheta$ или при малых углах ϑ

$$F \approx mg\vartheta . \tag{18.3}$$

Тогда уравнение движения шарика будет иметь вид:

$$mx'' = -F. \tag{18.4}$$

Мы написали перед F знак минус, так как сила F направлена против положительного направления смещения x. Если в (18.3) заменить ϑ на x/L, то уравнение (18.4) можно записать так:

$$mx'' = -mg\frac{x}{L}, \tag{18.5}$$

или, сокращая на m, получаем окончательно:

$$x'' + \frac{g}{L}x=0. \tag{18.6}$$

Движение шарика происходит под действием силы $F = mg\frac{x}{L}$ (см. (18.5)), величина которой изменяется пропорционально отклонению шарика (x) от положения равновесия (x = 0). Эта сила, равная равнодействующей силы натяжения нити $\mathbf{F}_н$ и силы тяжести $m\mathbf{g}$, т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}_н + m\mathbf{g}$, всегда направлена к положению равновесия. Поэтому силу **F** называют возвращающей силой.

Уравнение (18.6) идентично с уравнением (17.11) или (18.1), если положить

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} . \tag{18.7}$$

Решение уравнения (18.6) имеет вид (17.8), т.е.

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t+\alpha). \qquad (18.8)$$

Следовательно, при малых колебаниях смещение x (как следует из (18.2) и угловое отклонение ϑ) математического маятника от положения равновесия изменяется со временем по гармоническому закону. В (18.8) величину A, равную максимальному отклонению от положения равновесия, называют амплитудой гармонических колебаний. Величина амплитуды зависит от первоначального отклонения и от толчка, после которых начались колебания маятника. Величину, стоящую под знаком синуса, $\omega_0 t + \alpha$, называют фазой. Фаза растёт пропорционально времени t. Величина α – начальная фаза или фаза в момент $t = 0$; она зависит от отклонения и скорости в момент начала отсчёта времени t.

Как следует из (18.7), собственная циклическая (или круговая) частота колебаний математического маятника ω_0 зависит только от длины L маятника и от ускорения свободного падения g в данном месте и не зависит от массы m маятника. По формуле (17.4) с учетом (18.7) получается выражение для периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ . \qquad (18.9)$$

Как видно из (18.9) период колебаний не связан с амплитудой колебаний. Это утверждение верно только при малых углах отклонения. Так, например, колебания с амплитудой угла отклонения ϑ в 2^0 практически имеют тот же период, что и колебания с амплитудой в 4^0. При обычной точности измерения (до 0,2 %) это справедливо при колебаниях, когда углы отклонения маятника не превышают 10^0.

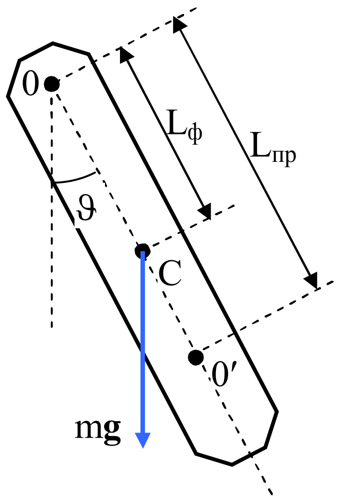


Рисунок 35

При больших углах отклонения маятника приближённое уравнение (18.5) не будет справедливым. Колебания маятника при больших углах отклонения будут периодическими, но негармоническими. Период колебаний будет зависеть от амплитуды.

Физическим маятником называют твёрдое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. В этом случае твёрдое тело нельзя принять за материальную точку. Пусть твёрдое тело (рисунок 35) может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси 0, перпендикулярной к плоскости чертёжа. Если расстояние от центра масс С до оси равно $L_ф$, то при повороте тела от положения равновесия на угол ϑ возникнет возвращающий момент силы тяжести, равный

$$mgL_ф \sin\vartheta, \tag{18.10}$$

где m – масса тела;

g – ускорение свободного падения;

$L_ф$ – длина физического маятника.

При колебаниях только этот момент действует на тело, тогда согласно основному закону динамики вращательного движения

$$J\vartheta'' = -mgL_ф \sin\vartheta, \tag{18.11}$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения 0,

$\vartheta'' = \varepsilon$ – модуль углового ускорения.

При малых углах отклонения $\sin\vartheta \approx \vartheta$. Тогда

$$J\vartheta'' + mgL_ф\vartheta = 0, \tag{18.12}$$

или

$$\vartheta'' + \frac{mgL_ф}{J}\vartheta = 0. \tag{18.13}$$

Уравнение (18.13) по виду совпадает с уравнением (17.11) или (18.1), если положить, что частота колебаний физического маятника равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL_ф}{J}}. \qquad (18.14)$$

В соответствии с (17.4) и (18.14) период колебаний физического маятника определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL_ф}}. \qquad (18.15)$$

Сравнивая (18.14) с (18.7), можно заключить, что математический маятник, длина которого равна

$$L_{пр} = \frac{J}{mL_ф}, \qquad (18.16)$$

будет иметь ту же частоту (период) колебаний, что и данный физический маятник. Величину (18.16) называют приведённой длиной физического маятника. Таким образом, приведённая длина физического маятника – это длина математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точку, лежащую на расстоянии $L_{пр}$ от оси вращения на прямой, соединяющей точку подвеса 0 (точка подвеса – это точка пресечения оси вращения с плоскостью чертёжа) с центром масс C, называют центром качания физического маятника (см. точку 0′ на рисунке 35). Если точку подвеса (ось вращения) поместить в центре качания, то маятник будет совершать колебания с той же частотой.

В этом можно убедиться расчётом, если воспользоваться теоремой Штейнера для момента инерции: момент инерции J относительно произвольной оси равен моменту инерции J_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс C тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния $L_ф$ между осями:

$$J = J_C + m\,L_ф^2. \qquad (18.17)$$

Тогда выражение (18.16) можно записать так:

$$L_{пр} = \frac{J_C}{mL_ф} + L_ф. \qquad (18.18)$$

Из (18.18) следует:

$$L_ф = \frac{J_C}{m\left(L_{пр} - L_ф\right)}. \qquad (18.19)$$

Центр качания перевёрнутого маятника по (18.18) будет на расстоянии

$$L_{пр}' = \frac{J_C}{m\left(L_{пр} - L_ф\right)} + L_{пр} - L_ф. \qquad (18.20)$$

Учитывая (18.19), находим, что $L_{пр} = L_{пр}'$, т.е. точка подвеса и центр качания являются взаимными или сопряжёнными точками в следующем смысле. Если маятник подвесить за центр качания 0′, то его период не изменится и прежняя точка подвеса 0 станет новым центром качания. Это положение называют теоремой Гюйгенса.

Формула (18.18) показывает, что если отношение $\frac{J_C}{mL_ф}$ ничтожно мало по сравнению с $L_ф$, то физический маятник приближается к математическому маятнику, для которого $J_C = 0$.

Зная точно длину $L_{пр}$ и определяя период колебаний физического маятника с помощью часов, можно измерить величину ускорения свободного падения g в данном месте. Таким методом были произведены наиболее точные измерения силы тяжести и определены ее изменения в различных точках земной поверхности. С помощью таких измерений g определяют местные изменения плотности земной коры и на их основании судят о породах, залегающих на глубине (гравитационная разведка ископаемых).

Пружинным маятником называют систему, состоящую из материальной точки (шарика или грузика) массой m, подвешенной на невесомой упругой пружине жёсткостью k (см. рисунок 36). В условиях равновесия на грузик действуют сила тяжести mg и сила упругости, определяемая в соответствии с законом Гука, и равная $F = -k \cdot \Delta l$, где Δl – удлинение пружины под действием силы тяжести. В условиях равновесия эти силы по модулю равны, т.е.

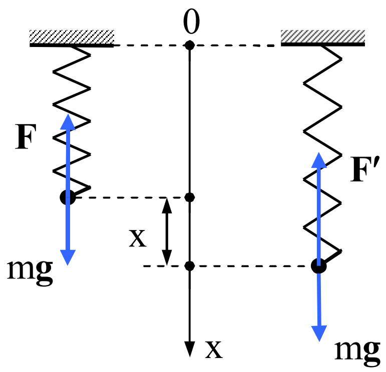


Рисунок 36

$$mg = k \cdot \Delta l. \tag{18.21}$$

Если пружину растянуть дополнительно на величину x, то сила упругости становится равной $F' = -k \cdot (x+\Delta l)$. Если теперь грузик отпустить, то под действием силы тяжести mg и силы упругости F′ он будет совершать свободные колебания. Уравнение движения грузика (пружинного маятника) записывается так:

$$mx'' = mg - k \cdot (x+\Delta l). \tag{18.22}$$

С учетом выражения (18.21) уравнение (18.22) принимает вид:

$$x'' + \frac{k}{m} x = 0. \tag{18.23}$$

Сравнивая уравнения (18.1) и (18.23), заключаем, что уравнение движения пружинного маятника (18.23) представляет собой уравнение гармонических колебаний с циклической частотой ω_0 и периодом T, определяемыми соотношениями:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{18.24}$$

Из (18.24) следует, что период колебаний пружинного маятника зависит только от массы груза m и жёсткости пружины k. Величина силы тяжести не оказывает никакого влияния на характер колебаний груза на пружине. Следовательно, груз, подвешенный на пружине, будет одинаково колебаться, если он будет находиться в различных точках земной поверхности, даже если его можно было бы перенести на другую планету или на космический корабль. Характер собственных колебаний не зависит от постоянной силы тяжести, действующей на тело, а зависит только от переменной возвращающей силы пружины.

Пружинный маятник совершает гармонические колебания, когда при деформациях пружины выполняется закон Гука. Все написанные условия и соотношения справедливы, если грузик массы m, прикреплённый к свободному концу горизонтально расположенной пружины жёсткости k, совершает колебания на гладкой горизонтальной поверхности. При этом другой конец пружины прикреплён к вертикальной стене (см. рисунок 37).

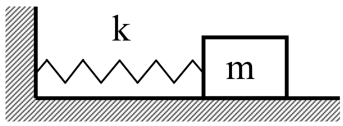


Рисунок 37

Рассмотренные примеры относятся к свободным колебаниям без трения для случая, когда действующие силы являются квазиупругими, т.е. эти силы направлены к положению равновесия и линейно зависят от смещения из положения равновесия. Квазиупругость сил выполняется при малых колебаниях.

§ 1.19 Энергия гармонического осциллятора

Сравнивая рассмотренные примеры колебаний математического, физического, пружинного маятников и аналогичные им, можно сделать вывод: собственные гармонические колебания всегда совершаются около устойчивого положения равновесия, когда возвращающая сила пропорциональна отклонению из положения равновесия.

Собственные гармонические колебания возникают после того, как тело выведено из положения равновесия или ему некоторым импульсом сообщена начальная скорость, или после того, как сделано и то и другое вместе, т.е. после того, как тело выведено из состояния равновесия. Если в системе нет трения, то колебания после начального «толчка» будут продолжаться сколь угодно долго. Иначе говоря, в начальный момент системе сообщили некоторый запас энергии, который при отсутствии сил трения будет сохраняться неизменным в системе в виде энергии колебаний.

Поэтому по закону сохранения энергии при гармонических колебаниях полная энергия остаётся постоянной, но кинетическая или потенциальная, каждая в отдельности, совершают колебания во времени. В момент, когда колеблющееся тело достигает крайнего положения и имеет скорость, равную нулю, вся энергия является потенциальной, а кинетическая равна нулю. Когда тело проходит через положение равновесия, вся энергия является кинетической, а потенциальная энергия равна нулю (конечно, если заранее известно, что потенциальная энергия в положении равновесия полагается равной нулю). Поскольку тело за период колебаний два раза проходит через положение равновесия, то периоды колебаний кинетической и потенциальной энергий в два раза меньше периода колебаний груза (тела). Энергетические соотношения в колебательной системе рассмотрим на примере пружинного маятника.

Для упрощения выкладок предположим, что начальная фаза колебаний $\alpha = 0$. В этом случае зависимости координаты x и скорости v от времени t принимают вид (см. (17.8) и (17.9)):

$$x = x(t) = A\sin\omega_0 t; \tag{19.1}$$

$$v = v(t) = A\omega_0\cos\omega_0 t. \tag{19.2}$$

При колебаниях груза на пружине потенциальная энергия U будет равна $kx^2/2$. Следовательно, с учётом известной формулы тригонометрии имеем

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2\omega_0 t = \frac{kA^2}{2}\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{2}. \tag{19.3}$$

А кинетическая энергия T будет равна $mv^2/2$. С учетом выражения (18.24) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, т.е. $k = m\omega_0^2$, имеем

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos\omega_0{}^2 t = \frac{kA^2}{2}\frac{1+\cos 2\omega_0 t}{2}. \tag{19.4}$$

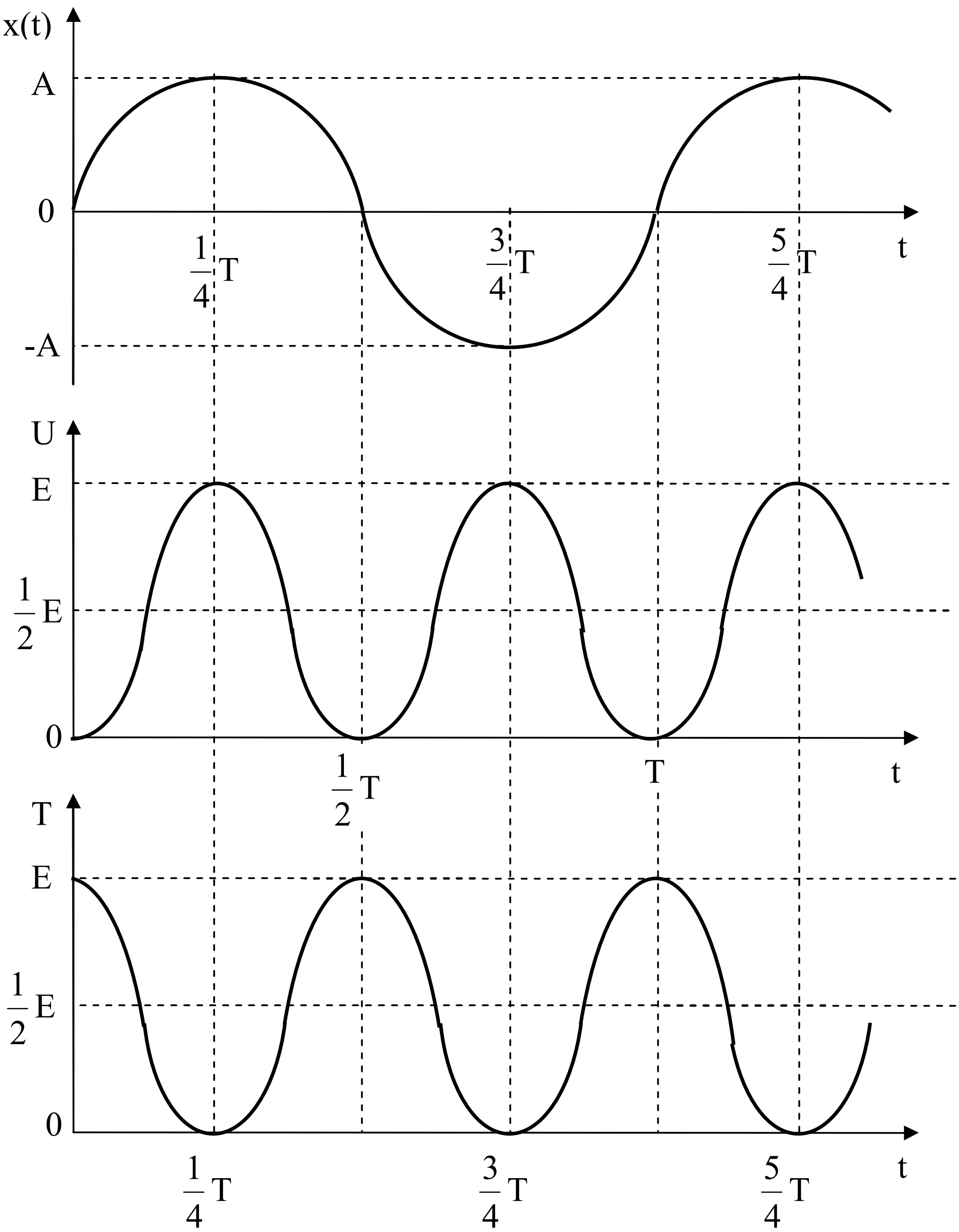


Рисунок 38

Полная энергия системы E равна сумме кинетической T и потенциальной U энергий:

$$E = T + U = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (19.5)$$

Полная энергия остаётся постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Используя выражение для полной энергии E, выражениям для потенциальной U и кинетической T энергии можно придать вид:

$$U = E\sin^2\omega_0 t = E\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega_0 t\right), \qquad (19.6)$$

$$T = E\cos^2\omega_0 t = E\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0 t\right), \qquad (19.7)$$

где E – полная энергия системы.

Из формул (19.6) и (19.7) видно, что потенциальная U и кинетическая T энергия изменяются с частотой $2\omega_0$, т.е. с частотой в два раза превышающей частоту гармонических колебаний, с амплитудой $\frac{E}{2}$ относительно значения энергии, равного $\frac{E}{2}$.

На рисунке 38 показан ход изменения со временем t смещения x, потенциальной энергии U и кинетической энергии T.

Контрольные вопросы к § 1.1 – § 1.4

1 Что называется материальной точкой? Какое тело называют абсолютно твёрдым? Почему в механике вводят такие модели?

2 Что такое система отсчёта?

3 Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?

4 Какое движение называется поступательным? вращательным?

5 Запишите кинематические уравнения движения материальной точки.

6 Что понимают под числом степеней свободы?

7 Дать определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?

8 Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?

9 Что называется угловой скоростью? угловым ускорением? Как определяются их направления?

10 Какова связь между линейными и угловыми величинами?

Контрольные вопросы к § 1.5 – § 1.7

1 Какое движение называют движением по инерции? Какая система отсчёта называется инерциальной? Почему система отсчёта, связанная с Землёй, строго говоря, неинерциальная?

2 Что такое масса (инертная, гравитационная)? Что такое сила? Как их можно охарактеризовать?

3 Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему?

4 Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.

5 В чём заключается принцип независимости действия сил?

6 Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми?

Контрольные вопросы к § 1.8 – § 1.13

1 В чём различие между понятиями энергии и работы? Как найти работу переменной силы?

2 Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?

3 Что такое мощность? Единицы измерения работы и мощности.

4 Какова связь между силой и потенциальной энергией?

5 Почему изменение потенциальной энергии обусловлено только работой консервативных сил?

6 В чём заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?

7 Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?

8 Что такое момент инерции тела?

9 Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?

10 Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела. Что такое момент импульса материальной точки? твёрдого тела? Как определяется направление момента импульса?

11 В чём заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.

12 Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

Контрольные вопросы к § 1.14 – § 1.16

1 Справедлив ли второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчёта? Как следует изменить основное уравнение динамики, чтобы оно оказалось справедливым и для неинерциальных систем отсчёта?

2 Что понимают под силами инерции?

3 Запишите уравнение движения частицы в неинерциальной системе отсчёта.

4 Чему равна сила инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчёта?

5 В чём проявляется аналогичность сил инерции силам тяготения?

6 Какие особенности отличают силы инерции от сил взаимодействия?

7 Какие силы инерции появляются при вращательном движении системы отсчёта? Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса?

8 Приведите примеры проявления сил инерции.

Контрольные вопросы к § 1.17 – § 1.19

1 Что такое колебания? свободные колебания? гармонические колебания? периодические процессы?

2 Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебаний.

3 Какова связь амплитуды и фазы смещения, скорости и ускорения при прямолинейных гармонических колебаниях?

4 Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.

5 От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?

6 Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.

7 Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей эти колебания?

8 Как можно сравнить между собой массы тел, измеряя частоты колебаний при подвешивании этих масс к пружине?

9 Что называется гармоническим осциллятором? пружинным маятником? математическим маятником? физическим маятником?

10 Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, математического и физического маятников.

11 Что такое приведённая длина физического маятника?

12 Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний пружинного маятника.

Тесты к § 1.1 – § 1.4

1. Реактивный самолет летит со скоростью v_0 = 720 км/час. С некоторого момента самолет движется с ускорением в течение t = 10 с и в последнюю секунду проходит путь S = 295 м. Определите конечную скорость v самолета.

А) 250 м/с В) 300 м/с С) 280 м/с Д) 275 м/с Е) 240 м/с

2. Пуля, летящая со скоростью 400 м/с, ударяется в земляной вал и, двигаясь равнозамедленно, проникает в него на глубину 36 см. Чему будет равна скорость пули к моменту, когда пуля пройдет 99 % своего пути?

А) 40 м/с В) 32 м/с С) 4 м/с Д) 10 м/с Е) 16 м/с

3. Автомобиль, движущийся с начальной скоростью 30 м/с, проехал 175 м с ускорением 2 м/с^2. Сколько времени потребовалось на это?

А) 4 с В) 5 с С) 6 с Д) 8 с Е) 3 с

4. Первую четверть пути автомобиль двигался со скоростью 60 км/час, а оставшуюся часть пути – со скоростью 20 км/час. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

А) 40 км/час В) 36 км/час С) 32 км/час Д) 28 км/час Е) 24 км/час

5. По наклонной доске пустили катиться снизу вверх шарик. На расстоянии ℓ = 30 см от начала пути шарик побывал дважды: через t_1 = 1 с и через t_2 = 2 с после на-

чала движения. Определите начальную скорость v_0, считая ускорение движения шарика постоянным.

А) 40 см/с В) 45 см/с С) 30 см/с Д) 35 см/с Е) 50 см/с

6. Две стрелки начинают двигаться по окружности в одну сторону. Период вращения 1-й составляет $T_1 = 50$ с, а 2-й – $T_2 = 30$ с. Положения стрелок при этом совпадают через минимальный интервал времени, равный

А) 80 с В) 60 с С) 70 с Д) 65 с Е) 75 с

7. С крыши с интервалом времени в 1 с падают одна за другой две капли. Через 2 с после начала падения второй капли расстояние между каплями станет равным (полагайте $g = 10$ м/с^2):

А) 30 м В) 25 м С) 20 м Д) 15 м Е) 10 м

Тесты к § 1.5 – § 1.7

1. Шарик массы m, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в момент прохождения положения равновесия и при максимальном отклонении из положения равновесия равны друг другу. Чему равна сила натяжения нити в нижнем положении, если угол отклонения нити в крайнем положении равен α? Ускорение свободного падения g.

А) $mg(1-\cos\alpha)$ В) $mg(1-\sin\alpha)$ С) $mg(1+\sin\alpha)$ Д) $3mg$ Е) $mg(1+\cos\alpha)$

2. Определите массу груза, который нужно сбросить с аэростата массой 1 100 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы аэростат стал двигаться с такой же по модулю скоростью вверх. Архимедова сила, действующая на аэростат, равна

10^4 Н. Сила сопротивления воздуха при движении аэростата пропорциональна скорости. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 400 кг В) 300 кг С) 250 кг Д) 200 кг Е) 150 кг

3. Груз массой m, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Найдите максимальную разность сил натяжения нити. Ускорение силы тяжести g.

А) 4 mg В) 2 mg С) 6 mg Д) 5 mg Е) 3 mg

4. В шахту опускается равноускоренно груз массой 580 кг. За первые 10 с он проходит 35 м. Найдите натяжение каната, на котором висит груз. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 4,6 кН В) 5,0 кН С) 5,4 кН Д) 5,8 кН Е) 6,2 кН

5. Сани с седоками общей массой 100 кг начинают съезжать с горы высотой 8 м и длиной 100 м. Какова средняя сила сопротивления движению санок, если в конце горы они достигли скорости 10 м/с? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

А) 30 Н В) 50 Н С) 20 Н Д) 40 Н Е) 80 Н

6. Груз массой m может скользить без трения по горизонтальному стержню, вращающемуся вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Груз соединяют с этим концом стержня пружиной, коэффициент упругости которой k. При какой угловой скорости ω пружина растянется на 50 % первоначальной длины?

A) $\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{m}}$ B) $\sqrt{\frac{2}{1}\cdot\frac{k}{m}}$ C) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ Д) $\sqrt{\frac{3}{1}\cdot\frac{k}{m}}$ E) $\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{m}}$

7. Два тела связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К телу массы m_1 приложена сила F_1, направленная вдоль поверхности, а к телу массы m_2 – сила F_2 ($F_2 < F_1$), направленная в противоположную сторону. Найдите силу натяжения T нити при движении тел.

A) $\frac{m_2F_1 - m_1F_2}{m_1 + m_2}$ B) $\frac{m_1F_1 - m_2F_2}{m_1 + m_2}$ C) $\frac{m_1F_1 + m_2F_2}{m_1 + m_2}$ Д) $\frac{m_1F_2 + m_2F_1}{m_1 + m_2}$ E) $\frac{m_1F_2 - m_2F_1}{m_1 + m_2}$

Тесты к § 1.8 – § 1.13

1. Пуля массой m, летящая горизонтально, попадает в центр бруска массой 10 m, висящий неподвижно на нити, и застревает в нем. Во сколько раз кинетическая энергия пули перед ударом превышает кинетическую энергию бруска с пулей сразу после удара?

A) 11 раз B) 10 раз C) 121 раз Д) 100 раз E) $\sqrt{10}$ раз

2. Тело массой m = 2 кг двигалось со скоростью v = 5 м/с и упруго столкнулось с жёсткой стенкой, двигавшейся навстречу со скоростью u = 2 м/с. Чему будет равна кинетическая энергия тела после столкновения?

A) 81 Дж B) 49 Дж C) 25 Дж Д) 9 Дж E) 1 Дж

3. Канат массой m висит вертикально, касаясь нижним концом поверхности пола. Какова будет максимальная сила действия каната на пол, если верхний конец каната отпустить? Ускорение свободного падения равно g.

A) mg B) 2 mg C) 3 mg Д) 4 mg E) 5 mg

4. Тележка массой 0,8 кг движется по инерции со скоростью 2,5 м/с. На тележку с высоты 50 см падает кусок пластилина массой 0,2 кг и прилипает к ней. Рассчитайте энергию, которая перешла во внутреннюю энергию при этом ударе. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 2 Дж В) 1 Дж С) 0,5 Дж Д) 1,5 Дж Е) 2,5 Дж

5. Грузовики, снабжённые двигателями мощностью N_1 и N_2, развивают скорости, соответственно, v_1 и v_2. Какова будет скорость грузовиков, если их соединить тросом?

А) $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ В) $\frac{N_1v_2+N_2v_1}{N_1+N_2}$ С) $\frac{N_1v_1+N_2v_2}{N_1+N_2}$ Д) $\frac{(N_1+N_2)v_1v_2}{N_1v_2+N_2v_1}$ Е) $\frac{(N_1+N_2)v_1v_2}{N_1v_1+N_2v_2}$

6. С какой начальной скоростью v_0 надо бросить вниз мяч с высоты h, чтобы он подпрыгнул на высоту 2h от поверхности Земли? Удар мяча о поверхность Земли считайте абсолютно упругим. Ускорение свободного падения равно g.

А) $\sqrt{2gh}$ В) $\sqrt{gh}$ С) $2\sqrt{gh}$ Д) $2\sqrt{2gh}$ Е) $\frac{\sqrt{gh}}{2}$

7. При произвольном делении покоившегося ядра химического элемента образовалось три осколка массами 3m; 4,5m; 5m. Скорости первых двух взаимно перпендикулярны, а их модули равны, соответственно, 4v и 2v. Определите модуль скорости третьего осколка.

А) V В) 3V С) 5V Д) 4V Е) 6V

Тесты к § 1.14 – § 1.16

1. Какую мощность P развивает сила Кориолиса?

A) $2mv^2\omega\sin\alpha$ B) $mv^2\omega\sin\alpha$ C) 0 Д) $mv^2\omega\sin^2\alpha$ E) $mv^2\omega^2\sin\alpha$

2. Движение частицы массы m = 10 г рассматривается в системе отсчёта, вращающейся относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Какую работу A совершают над частицей силы инерции при перемещении ее из точки, отстоящей от оси вращения на расстояние r_1 = 1 м, в точку, отстоящую на расстояние r_2 = 2 м?

A) 3,0 Дж B) 2,5 Дж C) 2,0 Дж Д) 1,5 Дж E) 1,0 Дж

3. С какой наименьшей скоростью может ехать мотоциклист по внутренней вертикальной стенке вертикального цилиндра радиусом R = 12 м, описывая горизонтальную окружность, если коэффициент трения покрышек о стенку μ = 0,5, а центр масс мотоциклиста и мотоцикла находится на расстоянии ℓ = 1 м от стенки?

A) 10 м/с B) 12 м/с C) 15 м/с Д) 18 м/с E) 20 м/с

4. Небольшое тело падает без начальной скорости на Землю на экваторе с высоты h = 10 м. На какое расстояние L отклонится тело к востоку от вертикали под действием силы Кориолиса за время падения τ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

A) 0,69 мм B) 0,87 мм C) 0,93 мм Д) 1,12 мм E) 1,45 мм

5. На широте $\varphi = 45^0$ из ружья, закреплённого горизонтально в плоскости меридиана, произведён выстрел в направлении на север по мишени, установленной на

расстоянии S = 100 м от дула ружья. Центр мишени находится на оси ружейного ствола. Считая, что пуля летит горизонтально с постоянной скоростью v = 500 м/с, определить, на какое расстояние L отклонится пуля от центра мишени?

А) 1,64 мм В) 1,47 мм С) 1,25 мм Д) 1,03 мм Е) 0,83 мм

6. Найдите силу F, отделяющую сливки (плотностью $\rho_c = 0{,}93$ г/см^3) от снятого молока ($\rho_м = 1{,}03$ г/см^3) в расчете на единицу объёма, если отделение сливок происходит в центробежном сепараторе, вращающемся с частотой $\nu = 6\,000$ об/мин, если жидкость находится на расстоянии r = 10 см от оси вращения.

А) $3{,}95 \cdot 10^4$ Н/м^3 В) $3{,}95 \cdot 10^6$ Н/м^3 С) $3{,}95 \cdot 10^5$ Н/м^3 Д) $2{,}83 \cdot 10^5$ Н/м^3 Е) $2{,}83 \cdot 10^4$ Н/м^3

7. Электровоз массы $m = 184 \cdot 10^3$ кг движется вдоль меридиана со скоростью v = 72 км/ч на широте $\varphi = 45^0$. Определить горизонтальную составляющую F силы, с которой электровоз давит на рельсы.

А) 350 Н В) 380 Н С) 420 Н Д) 470 Н Е) 520 Н

Тесты к § 1.17 – § 1.19

1. Амплитуда колебаний камертона за 15 с уменьшилась в 100 раз. Найдите коэффициент затухания колебаний.

А) 0,8 $с^{-1}$ В) 0,6 $с^{-1}$ С) 0,5 $с^{-1}$ Д) 0,4 $с^{-1}$ Е) 0,3 $с^{-1}$

2. Найдите частоту колебаний груза массой m = 0,2 кг, подвешенного на пружине и помещённого в масло, если коэффициент трения в масле r = 0,5 кг/с, а жёсткость пружины k = 50 Н/м.

A) 1,2 Гц B) 2,5 Гц C) 3,8 Гц Д) 5,2 Гц E) 7,3 Гц

3. Тонкий стержень длиной L вращается вокруг одного из концов, описывая круговой конус (физический конический маятник). Найти период движения T в зависимости от угла при вершине конуса 2α.

A) $T=2\pi\sqrt{\frac{2L\cos\varphi}{3g}}$ B) $T=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\varphi}{3g}}$ C) $T=2\pi\sqrt{\frac{2L\cos\varphi}{g}}$

Д) $T=2\pi\sqrt{\frac{3L\cos\varphi}{2g}}$ E) $T=2\pi\sqrt{\frac{3L\cos\varphi}{g}}$

4. Стакан массой 20 г и площадью поперечного сечения 5 см^2 содержит ртуть массой 80 г и плавает на поверхности воды. Под действием вертикальной силы стакан выводится из положения равновесия и отпускается. Определите период вертикальных колебаний системы.

A) 1,8 с B) 1,5 с C) 1,2 с Д) 0,9 с E) 0,6 с

5. Определите амплитуду вынужденных колебаний груза массой 0,2 кг, подвешенного на пружине жёсткостью 20 Н/м, если действует вынуждающая сила с амплитудой 2 Н и частотой в 2 раза большей собственной частоты колебаний груза, а коэффициент затухания 0,5 с$^{-1}$.

A) 3 см B) 5 см C) 7 см Д) 8 см E) 9 см

6. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны друг другу по модулю. Найдите угол α отклонения нити в крайнем положении.

А) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ В) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ С) arccos0,6 Д) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ Е) arcsin0,5

7. Во сколько раз уменьшится полная энергия колебаний секундного маятника за 5 мин, если логарифмический декремент затухания 0,031?

А) в 10^4 раз В) в 10^6 раз С) в 10^8 раз Д) в 500 раз Е) в 240 раз

Упражнения для самоконтроля

1.1. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол, под которым тело брошено к горизонту, если максимальная высота подъема тела равна 1/4 дальности его полета. [45^0].

1.2. Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиуса R=4 м, задаётся уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ (A=1 м/с^2, B=6 м/с^3, C=3 м/с^4). Определить: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время t_1= 5 с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени t_2 = 1 с.
[1) 6 м/с^2; 2) 85 м; 3) 6,32 м/с^2].

1.3. На катере массой m = 5 т находится водомёт, выбрасывающий γ = 25 кг/с воды со скоростью u = 7 м/с относительно катера назад. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определить: 1) скорость катера через 3 мин после начала движения; 2) предельно возможную скорость катера.
[1) $v = u\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right)$=6,6 м/с; 2) 7 м/с]

1.4. Теплоход движется на восток вдоль параллели с географической широтой $\varphi = 60^0$. Скорость теплохода v = 10 м/с. Определить вес тела P на теплоходе, если взвешивание происходит на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0.

[$P = P_0\left(1 - \frac{2\omega v\cos\varphi + v^2/R}{g}\right) \approx P_0(1 - 7{,}5\cdot10^{-5})$]

1.5. С башни высотой 35 м горизонтально брошен камень массой 0,3 кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) скорость, с которой брошен камень, если через 1 с после начала движения его кинетическая энергия составляет 60 Дж; 2) потенциальную энергию камня через 1 с после начала движения.
[1) 17,4 м/с; 2) 88,6 Дж]

1.6. При центральном абсолютно упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в $n = 1,5$ раза. Определить: 1) отношение m_1/m_2; 2) кинетическую энергию T_2', с которой начнёт двигаться второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела T_1=1 000 Дж. [1) 5; 2) 555 Дж]

1.7. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом R = 5 м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели T = 10 с, скорость пули v = 300 м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближённо, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень? [$\alpha = \dfrac{4\pi R}{vT} = 0,0209$ рад]

1.8. Из ружья произведён выстрел строго вверх (т.е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули v_0 = 100 м/с, географическая широта местности $\varphi = 60^0$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближённо насколько восточнее или западнее от места выстрела упадёт пуля. Сопротивлением воздуха пренебречь. [Пуля отклонится к западу на расстояние $L = \dfrac{4}{3}\dfrac{v_0^2\omega}{g}\cos\varphi \approx 51$ см]

1.9. Полная энергия гармонически колеблющейся точки равна 30 мкДж, а максимальная сила, действующая на точку, равна 1,5 мН. Написать уравнение движения этой точки, если период колебаний равен 2 с, а начальная фаза $\pi/3$.
[$x = 0,04\cdot\cos(\pi t + \pi/3)$]

1.10. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 25 см. Определить, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной. [7,2 см]

2 Молекулярная физика

§ 2.20 Идеальный газ

Из трёх агрегатных состояний, в которых может находиться вещество, наиболее простым для описания является газообразное состояние, так как в газах силы, действующие между молекулами, очень малы, и ими, при определённых условиях, можно пренебречь. Поэтому изложение молекулярной физики начнём с рассмотрения свойств газов. При этом сначала будем полагать, что межмолекулярные силы в них даже не малы, а полностью отсутствуют. Для простоты пренебрежём также размерами молекул, считая их материальными точками. Газ, обладающий такими же свойствами, как и совокупность невзаимодействующих материальных точек, называется идеальным газом.

Переходя к рассмотрению реальных газов мы снимем эти произвольные допущения, оправданные, впрочем, тем, что при определённых условиях такая идеализация не уводит нас слишком далеко от действительности.

Итак, идеальный газ – теоретическая модель газа, в которой пренебрегают размерами и взаимодействием молекул и учитывают лишь упругие столкновения. Это первоначальное представление было расширено, в более широком понимании идеальный газ состоит из молекул, представляющих собой упругие сферы радиуса R или эллипсоиды, у них проявляется атомная структура. Расширенная модель идеального газа позволяет учитывать не только поступательное, но и вращательное и колебательное движения его частиц, вводить в рассмотрение наряду с центральным и нецентральное соударение, исследовать переходы энергии из одной степени свободы в другую и т.д.

Наиболее полно изучены свойства достаточно разрежённых газов, в которых расстояния между молекулами (при нормальных условиях ~10 нм) значительно больше радиуса действия сил межмолекулярного взаимодействия (менее 0,5 – 1 нм). Сближение молекул на расстояния меньше радиуса действия межмолекулярных сил принято трактовать как столкновение молекул, а общий объём, в котором эти силы сказываются, – как собственный объём молекул, который в разрежённых газах пренебрежимо мал (~10 нм^3). В этом случае молекулы можно рассматривать как невзаимодействующие материальные точки, а модель газа, состоящего из них, называют идеальным газом. В разрежённых газов молекулы практически не взаимодействуют между собой. Они лишь иногда сталкиваются друг с другом. Однако эти столкновения происходят настолько редко, что большую часть времени молекулы движутся свободно. Газ, взаимодействием между молекулами которого можно пренебречь, называют идеальным.

Чем слабее взаимодействие между частицами, тем свойства газа ближе к свойствам идеального газа. Все газы при не слишком высоких давлениях и при не слишком низких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу, и их поведение можно описывать уравнениями, полученными для идеального газа.

При повышении плотности газа его свойства перестают быть идеальными, процессы столкновения играют всё большую роль и размерами молекул и их взаимодействием уже нельзя пренебречь. Такой газ называют реальным (неидеальным). Размеры молекул являются одной из основных характеристик неидеального газа.

Все газы из-за малости межмолекулярных взаимодействий способны неограниченно расширяться и занимать весь предоставленный им объём, причём для смеси газов это справедливо по отношению к каждой компоненте смеси.

Нашей первой задачей будет изложение кинетической теории идеальных газов. В молекулярно-кинетической теории пользуются моделью идеального газа, согласно которой считают, что:

- собственный объём молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объёмом сосуда;
- между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

§ 2.21 Давление газа

Непрерывно двигаясь молекулы газа сталкиваются с поверхностью тел, находящихся в газе, например, со стенками сосуда, содержащего газ, и друг с другом. Столкновения молекул между собой играют очень большую роль в поведении газа. Рассмотрим столкновения молекул со стенками сосуда или с любой другой поверхностью, соприкасающейся с газом. Именно взаимодействием молекул газа и стенок определяется сила, испытываемая стенками со стороны газа. Будем характеризовать действие газа на стенку силой F, отнесённой к единице площади S поверхности стенки, нормальной к этой силе:

$$P = \frac{F}{S}.$$

Эта величина называется давлением.

Свойство газа оказывать давление на стенки содержащего его сосуда – одно из основных свойств газа. Именно своим давлением газ чаще всего и обнаруживает свое присутствие. Поэтому величина давления является одной из главных характеристик газа.

Давление газа на стенки сосуда, как это предположил ещё в XVIII в. Даниил Бернулли, есть следствие бесчисленных столкновений молекул со стенками. Эти удары молекул о стенки приводят к некоторым смещениям частиц материала стенки, и значит, к её деформации. Деформированная же стенка действует на газ упругой силой, направленной в каждой точке перпендикулярно к стенке. Эта сила равна по абсолютному значению и противоположна по направлению силе, с которой газ действует на стенку.

Хотя силы взаимодействия каждой отдельной молекулы с молекулами стенки при столкновении неизвестны, тем не менее, законы механики позволяют найти среднюю силу, возникающую от совокупного действия всех молекул газа, т.е. найти давление газа.

Допустим, что газ заключён в сосуд, имеющий форму параллелепипеда (рисунок 39), и что газ находится в состоянии равновесия. В данном случае это означает, что газ как целое покоится относительно стенок сосуда: число молекул, движущихся в каком-нибудь произвольном направлении, в среднем равно числу молекул, скорости которых направлены в противоположную сторону.

Вычислим давление газа на одну из стенок сосуда, например на правую боковую стенку abcd. Направим координатную ось 0x вдоль ребра параллелепипеда перпендикулярно к стенке abcd, как это показано на рисунке 39. Как бы ни были направлены скорости v молекул, нас будут интересовать только проекции v_x скоростей молекул на ось 0x: по направлению к стенке abcd молекулы движутся со скоростью v_x.

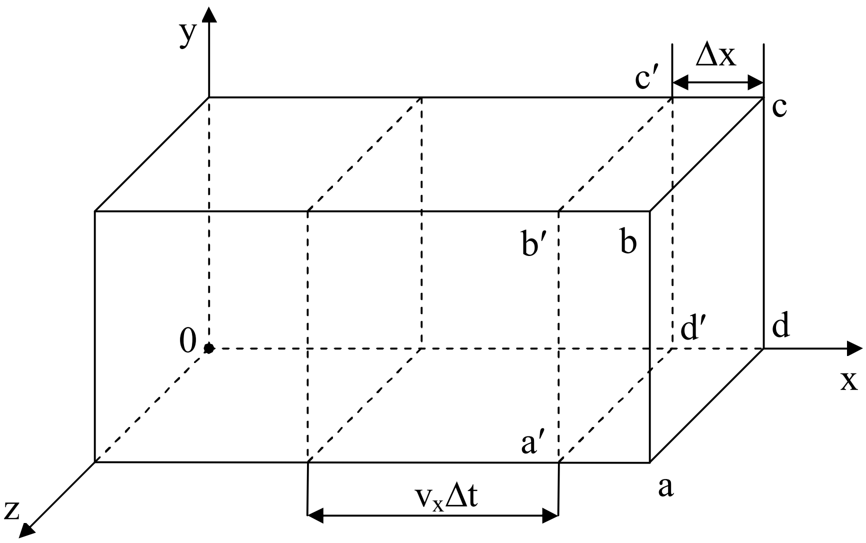


Рисунок 39

Выделим мысленно слой газа толщиной Δx, прилегающий к выбранной стенке. На него со стороны деформированной стенки действует упругая сила **F**. С такой же по абсолютному значению силой и газ действует на стенку. По второму закону Ньютона импульс силы **F**Δt (где Δt – некоторый произвольный промежуток времени) равен изменению импульса газа в выбранном слое. Так как газ находится в состоянии равновесия, то слой никакого приращения импульса в направлении импульса силы (против направления оси 0x) не получает. Происходит это потому, что из-за молекулярных движений выделенный слой получает импульс противоположного направления и, конечно, такой же по абсолютному значению. Его нетрудно вычислить.

При беспорядочных движениях газовых молекул за время Δt в выбранный слой газа слева направо входит некоторое число молекул и столько же молекул выходит из него в обратном направлении – справа налево. Входящие молекулы несут с собой определённый импульс. Выходящие молекулы несут такой же импульс противоположного знака, так что импульс, получаемый слоем, равен алгебраической сумме импульсов входящих в слой и выходящих из него молекул.

Найдём число молекул, входящих в слой слева за время Δt.

За время Δt к границе $a'b'c'd'$ слева могут подойти те молекулы, которые находятся от нее на расстоянии, не превышающем $v_x\Delta t$. Все они находятся в объёме параллелепипеда с площадью основания S (это площадь рассматриваемой стенки) и длиной $v_x\Delta t$, т.е. в объёме $Sv_x\Delta t$. Если в единице объёма содержится n молекул, то в указанном объеме находится $nSv_x\Delta t$ молекул. Но из них лишь половина движется слева направо и попадет в слой. Другая половина движется от него и в слой не попадает. Следовательно, за время Δt в слой слева направо входит $\frac{1}{2}nSv_x\Delta t$ молекул. Каждая из молекул обладает импульсом mv_x (m – масса молекулы), и общий импульс, вносимый ими в слой, равен:

$$\frac{1}{2}nm{v_x}^2S\Delta t.$$

За это же время Δt слой покидает, двигаясь справа налево, такое же число молекул с таким же общим импульсом, но обратного знака. Таким образом, из-за прихода в слой молекул с положительным импульсом и ухода из него молекул с отрицательным импульсом общее изменение импульса слоя равно:

$$\frac{1}{2}nm{v_x}^2S\Delta t - \left(-\frac{1}{2}nmv_x^2S\Delta t\right) = nm{v_x}^2S\Delta t.$$

Это изменение импульса слоя и компенсирует то изменение, которое должно было бы произойти под действием импульса силы $F\Delta t$. Поэтому можем написать:

$$F\Delta t = nm{v_x}^2S\Delta t.$$

Разделив обе части этого равенства на $S\Delta t$, получаем:

$$\frac{F}{S} = P = nm{v_x}^2. \tag{21.1}$$

До сих пор предполагали, что у всех молекул газа одинаковые проекции скорости v_x. В действительности это, конечно, не так. И скорости молекул **v**, и их проекции v_x на ось 0x у разных молекул, разумеется, различны. Вопрос о различии скоростей газовых молекул в условиях равновесия подробно рассмотрим позже в § 2.25. Пока же учтём различие скоростей молекул и их проекций на оси координат тем, что заменим величину ${v_x}^2$, входящую в формулу (21.1), ее средним значением $\overline{v_x^2}$, так что формуле для давления газа (21.1) придадим вид:

$$P = nm\overline{v_x^2}. \tag{21.2}$$

Для скорости v каждой молекулы можно написать:

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_x}^2 + {v_x}^2,$$

поэтому

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{21.3}$$

(последнее равенство означает, что порядок проведения операций усреднения и сложения можно изменять).

Из-за полной беспорядочности молекулярных движений можно полагать, что средние значения квадратов проекций скоростей на три оси координат равны друг другу, т.е.

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}.$$

А это значит, принимая во внимание (21.3), что

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}.$$

Подставив это выражение в формулу (21.2), получаем:

$$P = \frac{1}{3}nm\overline{v^2},$$

Или, умножив и разделив правую часть этого равенства на двойку, имеем:

$$P = \frac{2}{3}n\frac{m\overline{v^2}}{2}. \qquad (21.4)$$

Приведённые простые рассуждения справедливы для любой стенки сосуда и для любой площадки, которую мысленно можно поместить в газ. Во всех случаях мы получим для давления газа результат, выраженный формулой (21.4). Величина $m\overline{v^2}/2$ в формуле (21.4) представляет собой среднюю кинетическую энергию одной молекулы газа. Следовательно, давление газа равно двум третям средней кинетической энергии молекул, содержащихся в единице объёма газа.

Это – один из важнейших выводов кинетической теории идеального газа. Формула (21.4) устанавливает связь между молекулярными величинами, т.е. величинами, относящимися к отдельной молекуле, и величиной давления, характеризующей газ как целое, – величиной макроскопической, непосредственно измеряемой на опыте. Уравнение (21.4) иногда называют основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов.

Важно подчеркнуть, что давление газа определяется средней кинетической энергией его молекул. Это значит, что давление газа – величина, органически связанная с тем, что газ состоит из большого числа молекул. Поэтому не имеет смысла говорить, например, о давлении, создаваемом одной или немногими молекулами. О таких понятиях, которые имеют смысл только для систем, содержащих очень много частиц, говорят, что они имеют статистический характер.

Отметим, что в формулу (21.4) входит величина среднего значения квадрата скорости поступательного движения $\overline{v^2}$. Величину, равную корню квадратному из него, называют средней квадратичной скоростью $\overline{\overline{v}} = \sqrt{\overline{v^2}}$. Если в системе (сосуде), состоящей из n молекул, скорость i-ой молекулы равна v_i, то средняя квадратичная скорость определяется следующим образом:

$$\overline{\overline{v}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2}{n}}.$$

А средняя (среднеарифметическая) скорость $\overline{v}$, как известно, определяется выражением:

$$\overline{v} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i}{n}.$$

Таким образом, с точки зрения молекулярно-кинетической теории давление является результатом многочисленных ударов молекул газа о стенки сосуда, усреднённых по времени и площади поверхности сосуда. При нормальных условиях и макроскопических размерах сосуда число ударов об 1 см^2 поверхности ~10^{24} в секунду, заметных флуктуаций даже за время ~10^{-13} с не возникает.

Единицы давления. В системе единиц СИ за единицу давления принимается давление, при котором на 1 м^2 поверхности нормально к ней действует сила в 1 ньютон. Такая единица называется паскаль (сокращенно Па):

$$1\ \text{Па} = 1\ \text{Н/м}^2.$$

Далее приведем некоторые внесистемные единицы измерения давления.

Ввиду малости единицы измерения 1 Па пользуются единицей в 10^5 раз большей, которой присвоено название бар:

$$1\ \text{бар} = 10^5\ \text{Па}.$$

В технике широко применяется единица давления, называемая технической атмосферой (сокращенно ат), равная 1 кгс/см^2. Эта единица лишь на 2 % отличается от бара:

$$1\ \text{ат} = 1\ \text{кгс/см}^2 = 98\ 066{,}5\ \text{Па} \approx 0{,}98\ \text{бар}.$$

Иногда используется единица – физическая атмосфера (сокращенно атм.), равная давлению столба ртути высотой 760 мм. Считая плотность ртути равной 13 595,1 кг/м^3 и ускорение свободного падения равным 9,80665 м/с^2, получаем:

$$1\ \text{атм} = 101\ 325\ \text{Па} \approx 1{,}01\ \text{бар}.$$

В области низких давлений применяется единица давления тор (миллиметр ртутного столба):

$$1\ \text{тор} = \frac{1}{760}\ \text{атм} = 133{,}322\ \text{Па}.$$

§ 2.22 Температура

Из уравнения (21.4)

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m\overline{v^2}}{2}$$

следует, что давление идеального газа пропорционально его плотности (плотность газа определяется числом молекул n в единице объёма) и средней кинетической энергии поступательного движения молекул. При неизменном n, а значит, при неизменном объёме V газа ($n = N/V$, где N – число молекул в сосуде) давление газа зависит только от средней кинетической энергии молекул.

Между тем из опыта известно, что при постоянном объёме давление газа можно изменять только одним способом: его нагреванием или охлаждением; при нагревании газа его давление растёт, при охлаждении уменьшается. Нагретый или охлаждённый газ, как и всякое тело, характеризуется своей температурой – особой величиной, которой издавна пользуются в науке, технике и быту. Следовательно, между температурой и средней кинетической энергией молекул должна существовать связь.

Выясним эту связь.

В повседневной жизни понятие температуры используется для оценки степени нагретости тел. И первые представления о температуре возникли из ощущений тепла и холода. Используем эти знакомые каждому человеку ощущения, чтобы выяснить главную особенность температуры как физической величины.

Возьмём три сосуда. В один из них нальём горячую воду, в другой – холодную, а в третий – смесь горячей и холодной воды. Опустим одну руку, например, правую, в сосуд с горячей водой, а левую – в сосуд с холодной. Подержав руки некоторое время в этих сосудах, перенесём их в третий сосуд. Каковы же наши ощущения о воде в этом сосуде? Правой руке покажется, что вода в нём холодная, а левой – что она тёплая. Но эти различные ощущения исчезнут, если подержать обе руки в третьем сосуде подольше. Через некоторое время обе руки станут испытывать совершенно одинаковые ощущения, соответствующие температуре воды в третьем сосуде.

Дело в том, что руки, побывавшие сначала в сосудах с горячей и холодной водой, имели различные температуры, отличные и одна от другой, и от температуры в третьем сосуде. И требуется некоторое время, чтобы температура каждой из рук стала равной температуре воды, в которую они погружены. Тогда и температуры рук станут одинаковы. Одинаковы будут и ощущения. Необходимо, как говорят, чтобы в системе тел «правая рука – левая рука – вода» установилось тепловое равновесие.

Этот простой опыт показывает, что температура – это величина, количественно характеризующая состояние теплового равновесия: у тел, находящихся в состоянии теплового равновесия, температуры одинаковы. И наоборот, тела с одинаковой температурой находятся в тепловом равновесии друг с другом. А если два тела находятся в тепловом равновесии с каким-нибудь третьим телом, то оба тела находятся в тепловом равновесии и между собой. Это важное утверждение является одним из основных законов природы. И на нём основана сама возможность измерения температуры. В описанном опыте, например, речь шла о тепловом равновесии обеих рук, после того как каждая из них оказалась в тепловом равновесии с водой.

Если тело или система тел не находится в состоянии теплового равновесия и если система изолирована (не взаимодействует с другими телами), то через некоторое время состояние теплового равновесия устанавливается само собой. Состояние теплового равновесия – это и есть состояние, в которое переходит любая изолированная система. После того как это состояние достигнуто, оно уже больше не изменяется и никакие макроскопические изменения в системе не происходят. Одним из признаков состояния теплового равновесия и является равенство температур всех частей тела или всех тел системы. Известно, что в процессе установления теплового равновесия, т.е. при выравнивании температуры двух тел, происходит передача теплоты от одного тела к другому. Следовательно, с экспериментальной точки зрения температура тела – это величина, которая определяет, будет ли оно обмениваться теплотой с другим телом с иной температурой.

Своеобразие температуры состоит, прежде всего, в том, что она, в отличие от многих других величин, не аддитивна. Это значит, что если мысленно разделить тело на части, то температура всего тела не равна сумме температур его частей. Этим температура отличается от таких величин как длина, объём, масса и некоторых других, значения которых для всего тела складываются из значений соответствующих величин для его частей.

Вследствие этого температуру тела нельзя измерять непосредственно, как измеряют длину или массу, т.е. методом сравнения с эталоном. Если об одном стержне можно сказать, что его длина во столько-то раз больше длины другого стержня, то вопрос о том, сколько раз одна температура содержится в другой, не имеет смысла.

Для измерения температуры издавна пользуются тем, что при изменении температуры тела изменяются и его свойства. Следовательно, изменяются величины (термодинамические параметры), характеризующие эти свойства. На этом основано измерение температуры при помощи термометра. Для создания термометра, выбирают какое-либо вещество (термометрическое вещество) и определённую величину, характеризующую свойство вещества (термометрическую величину). Выбор того и другого произволен. В бытовых термометрах, например, термометрическим веществом является ртуть, а термометрической величиной – длина ртутного столбика.

Для изготовления термометра необходимо знать зависимость термометрической величины от температуры. Выбор этой зависимости тоже произволен: ведь пока нет термометра, нельзя опытным путём установить эту зависимость. В случае ртутного термометра, например, избирается линейная зависимость длины ртутного столбика (объёма ртути) от температуры.

Остаётся ещё установить единицу температуры – градус (хотя в принципе её можно было бы выражать в тех же единицах, в которых измеряется термометрическая величина, например по ртутному термометру – в сантиметрах). Величина градуса избирается тоже произвольно (как и термометрическое вещество, термометрическая величина и вид функции, связывающей термометрическую величину с температурой). Размер градуса устанавливается следующим образом. Выбирают, опять-таки произвольно, две температуры (их называют реперными точками), например, температуры таяния льда и кипения воды при атмосферном давлении. Затем делят этот температурный интервал на некоторое (тоже произвольное) число равных частей – градусов, а одной из этих температур приписывают определённое числовое значение. Тем самым определяется значение второй температуры и любой промежуточной. Таким образом, получают температурную шкалу. Понятно, что с помощью описанной процедуры можно получить бесчисленное множество различных термометров и температурных шкал.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа, устанавливаемой с помощью газового термометра. В принципе газовый термометр – это закрытый сосуд, наполненный идеальным газом и снабжённый манометром для измерения давления газа. Значит, термометрическим веществом в таком термометре служит идеальный газ, а термометрической величиной – давление газа при постоянном объёме. Зависимость давления от температуры принимается (именно принимается!) линейной. Такое допущение приводит к тому, что отношение давлений при температурах кипения воды ($P_к$) и таяния льда (P_0) равно отношению этих самых температур:

$$\frac{P_к}{P_0} = \frac{T_к}{T_0}.$$

Отношение $P_к/P_0$ легко определить из опыта. Многочисленные измерения показали, что

$$P_к/P_0 = 1,3661.$$

Таково, следовательно, и значение отношения температур:

$$T_к/T_0 = 1,3661.$$

Размер градуса выбирается делением разности $T_к – T_0$ на сто частей:

$$T_к – T_0 = 100.$$

Из последних двух равенств следует, что температура таяния льда по выбранной шкале равна T_0 = 273,15 градусов, а температура кипения воды равна $T_к$ = 373,15 градусов. Для того, чтобы при помощи газового термометра измерить температуру какого-нибудь тела, надо привести тело в контакт с газовым термометром и, дождавшись равновесия, измерить давление P газа в термометре. Тогда температура тела T определяется по формуле:

$$T = \frac{273{,}15}{P_0} P,$$

где P_0 – давление газа в термометре, помещённом в тающий лёд.

На практике газовым термометром пользуются крайне редко. На него возложена более ответственная роль – по нему градуируются все употребляемые вторичные термометры. К числу распространённых вторичных термометров относятся жидкостные термометры; термометры сопротивления; термометры, основанные на температурной зависимости ЭДС термопар, диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков, падения напряжения на полупроводниковом диоде и другие.

Температура, равная нулю в нашей шкале, – это, очевидно, температура, при которой давление идеального газа было бы равно нулю (это, конечно, не значит, что идеальный газ, в самом деле, можно настолько охладить, что его давление станет равным нулю). Если при нуле температурной шкалы термометрическая величина обращается в нуль, то такая шкала называется абсолютной шкалой, а температура, отсчитанная по такой шкале, называется абсолютной температурой. Описанная здесь шкала газового термометра является абсолютной. Ее часто называют также шкалой Кельвина, а единицу температуры в этой шкале – градусом Кельвина или просто кельвином (обозначение: К).

В технике и быту часто используется температурная шкала Цельсия, в которой температуре таяния льда приписывается значение нуль, а температуре кипения воды – 100 градусов. Температура t, отсчитываемая по шкале Цельсия, связана с абсолютной температурой T очевидным соотношением:

$$t = T - 273{,}15.$$

Определение температурной шкалы неоднозначно и зависит от способа градуировки термометра. Общепринятой является температурная шкала Кельвина. В некоторых используют температурную шкалу Фаренгейта (обозначение ^{0}F), в которой первой реперной точке – температуре плавления льда приписывают значение 32 ^{0}F, второй реперной точке – температуре кипения воды при атмосферном давлении приписывают значение 212 ^{0}F. Разность температур между этими реперными точками определяет основной интервал температурной шкалы Фаренгейта 180 ^{0}F. Температура t, отсчитываемая по шкале Цельсия, связана с температурой T_F по шкале Фаренгейта соотношением:

$$t = \frac{5}{9}\left(T_F - 32\right).$$

Таким образом, температура характеризует тепловое равновесие тел: при переходе к состоянию равновесия температуры тел выравниваются, а в состоянии равновесия температура всех частей тела или системы тел одна и та же. С этим связана сама процедура измерения температуры. Ведь для того, чтобы измерить значение термометрической величины при температурах таяния льда и кипения воды, термометр необходимо привести в состояние равновесия с тающим льдом и с кипящей водой, а чтобы измерить температуру какого-нибудь тела, необходимо обеспечить возможность установления теплового равновесия между термометром и телом. И только тогда, когда такое равновесие достигнуто, можно считать, что температура тела равна температуре, отсчитанной по термометру.

Итак, температура – это то, что выравнивается в процессе установления равновесия в системе. Но само понятие выравнивания означает, что от одной части системы что-то передаётся к другой. Полученное нами уравнение (21.4) для давления идеального газа позволит нам понять, что представляет это «что-то».

Представим себе изолированный цилиндр с идеальным газом, в котором уже установилось тепловое равновесие, так что температура во всех частях объёма газа одинакова. Допустим, что без нарушения равновесия в цилиндр помещён подвижный поршень, разделяющий объём газа на две части (рисунок 40а). В условиях равновесия поршень будет находиться в покое. Это значит, что при равновесии не только температуры, но и давления по обе стороны поршня одинаковы. Согласно уравнению (21.4) одинаковы и величины $n(m\overline{v^2})$:

$$\left(n\frac{m\overline{v^2}}{2}\right)_{\text{слева}} = \left(n\frac{m\overline{v^2}}{2}\right)_{\text{справа}}.$$

Нарушим теперь временно изоляцию нашего цилиндра с газом и нагреем одну из его частей, например ту, что по левую сторону от поршня, после чего снова восстановим изоляцию. Теперь газ в цилиндре не находится в равновесии – температура T_1 в левом отделении выше, чем в правом (рисунок 40б). Но система изолирована, и сам собой начнётся переход к состоянию равновесия. При этом мы увидим, что поршень начнёт двигаться слева направо. А это значит, что совершается работа и, следовательно, от газа в левом отделении газу в правом отделении через поршень передаётся энергия. Значит, то, что передаётся в процессе установления теплового равновесия, – это энергия. Через некоторое время движение поршня прекратится. Но остановится поршень после ряда колебаний. И остановится он в том же самом месте, где он находился до того, как левое отделение цилиндра подверглось нагреванию. В цилиндре с газом вновь установилось состояние равновесия. Но теперь температура газа и его давление, конечно, выше, чем до нагревания.

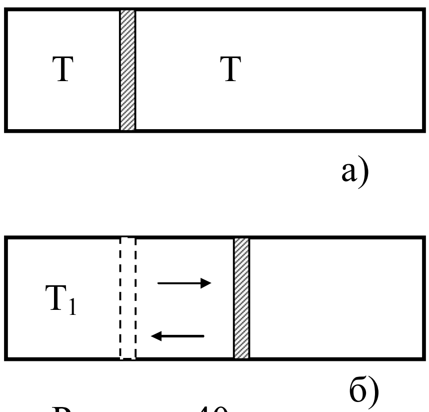


Рисунок 40

Так как поршень остановился на прежнем месте, то концентрация n молекул (т.е. число молекул в единице объёма) осталась прежней. Это значит, что в результате нагревания газа изменилась только средняя кинетическая энергия его молекул. Выравнивание температуры, следовательно, означает выравнивание значений средней кинетической энергии молекул по обе стороны поршня. При переходе к равновесию от одной части газа к другой передаётся энергия, но выравнивается не энергия всего газа как целого, а средняя кинетическая энергия, отнесённая к одной молекуле. Именно средняя кинетическая энергия молекулы ведёт себя как температура.

Эти две величины сходны ещё и тем, что средняя кинетическая энергия, как и температура, – величина не аддитивная, она одинакова для всего газа и для любой его части (содержащей достаточно большое число молекул). Энергия же всего газа – величина, конечно, аддитивная, – она складывается из энергий его частей.

Не следует думать, что наши рассуждения относятся только к случаю, когда газ в цилиндре разделён на две части поршнем. И без поршня молекулы при столкновениях между собой обменивались бы энергией, и она передавалась бы от более нагретой части к менее нагретой части, в результате чего выравнивались бы средние кинетические энергии молекул. Поршень лишь делает передачу энергии как бы видимой, так как его движение связано с совершением работы.

Приведённые простые, хотя и не очень строгие рассуждения показывают, что величина, давно известная под названием температуры, в действительности представляет собой среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул. То, что мы получили этот результат для случая идеального газа, не меняет дела. Нет оснований считать, что это не относится также к жидким и твёрдым телам.

Энергию, которой обмениваются тела, имеющие различную температуру, называют теплотой. Таким образом, при взаимодействии двух тел, имеющих различную температуру, происходит процесс установления равновесия между ними, сопровождающийся теплопередачей. При этом количество теплоты, отданное одним телом, равно количеству теплоты, приобретённому другим. На этом основано количественное измерение переданной теплоты при помощи калориметра, который служит источником или стоком тепла. В качестве калориметра можно использовать любое тело, термодинамические параметры которого зависят от количества переданной ему теплоты.

В применении к идеальному газу удобнее считать, что температура равна двум третям средней кинетической энергии молекул, так как это упростит вид формулы

(21.4) для давления газа. Обозначив определённую таким образом температуру буквой ϑ, можем написать:

$$\frac{2}{3}\frac{m\overline{v^2}}{2} = \vartheta.$$

Тогда уравнение (21.4) примет простой вид:

$$P = n\vartheta.$$

При таком определении температуры она, очевидно, должна измеряться в единицах энергии (в системе СИ – в джоулях). Однако практически пользоваться такой единицей температуры неудобно. При пользовании ею обычно встречающиеся температуры выражались бы ничтожно малыми числами. Например, температура таяния льда равнялась бы $5{,}65 \cdot 10^{-21}$ Дж. К тому же и измерение температуры, выражаемой в джоулях, было бы очень затруднительно.

По этой причине, а также потому, что величиной температуры пользовались ещё задолго до того, как были развиты молекулярно-кинетические представления, разъяснившие истинный смысл температуры, её всё-таки измеряют в старых единицах – градусах, несмотря на условность этой единицы.

Но если измерять температуру в градусах, то необходимо ввести соответствующий коэффициент, переводящий единицы энергии в градусы. Его принято обозначать буквой k. Тогда связь между температурой T, измеряемой в градусах, и средней кинетической энергией выражается равенством:

$$\frac{2}{3}\frac{m\overline{v^2}}{2} = kT,$$

отсюда

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT. \qquad (22.1)$$

Напомним, что формула (22.1) относится к молекуле, которую мы условились считать подобной точке. Ее кинетическая энергия – это кинетическая энергия поступательного движения, скорость которого может быть разложена на три составляющие. Вследствие хаотичности молекулярных движений можно принять, что энергия молекулы равномерно распределяется по всем трём составляющим скорости, так что на каждую из них приходится энергия $\frac{1}{2}kT$.

Множитель k, выражающий соотношение между единицей энергии и единицей температуры – кельвином, называется постоянной Больцмана. Понятно, что его числовое значение должно быть установлено экспериментально. Ввиду особой важности этой постоянной она была определена многими методами. Ее значение равно:

$$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}.$$

Из формулы (22.1) следует, что нулём температуры является температура, при которой средняя кинетическая энергия беспорядочных движений молекул равна нулю, т.е. температура, при которой хаотические движения молекул прекращаются. Это и есть тот абсолютный нуль, начало отсчёта абсолютной температуры, о котором упоминалось выше. Из формулы (22.1) вытекает также, что отрицательных температур быть не может, так как кинетическая энергия – существенно положительная величина.

Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, является статистической величиной. Нельзя говорить о «температуре» одной или немногих молекул, о «горячих» или «холодных» молекулах. Не имеет смысла, например, говорить о температуре газа в космическом пространстве, где число молекул в единице объёма настолько мало, что они не образуют газ в обычном смысле слова и нельзя говорить о средней энергии движения молекул.

Энергии, связанные с хаотическими движениями частиц газа, очень малы. Из формулы (22.1) и из приведённого значения постоянной Больцмана видно, что температуре в 1 К соответствует энергия, равная $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж. При наинизшей достигнутой к настоящему времени температуре (порядка 10^{-6} К) средняя энергия молекул равна приблизительно 10^{-29} Дж. Даже наивысшей искусственно полученной – около 100 миллионов градусов, развивающейся при взрыве ядерной бомбы, – соответствует ничтожная энергия частиц ~10^{-15} Дж.

В СИ единица температуры (кельвин) устанавливается не на основе температурного интервала «температура тающего льда – температура кипящей воды», а на основе интервала «абсолютный нуль – температура тройной точки воды». Тройная точка воды – это температура, при которой вода, водяной пар и лёд находятся в равновесии. Температуре тройной точки воды приписывается значение 273,16 К (точно). Таким образом, 1 кельвин равен 1/273,16 части температурного интервала от абсолютного нуля температуры до температуры тройной точки воды.

Так как температура тройной точки воды равна 0,01 ^{0}С, то размеры градуса в шкалах Цельсия и Кельвина одинаковы и любая температура может выражаться либо в градусах Цельсия (^{0}С), либо в кельвинах (К). Это означает, что изменения температуры по обеим шкалам численно совпадают – так, например, если температура увеличилась на 5 ^{0}С, то это равносильно увеличению температуры на 5 К.

§ 2.23 Уравнение состояния идеального газа

Развитые выше молекулярно-кинетические представления и полученные на их основе уравнения позволяют найти те соотношения, которые связывают между собой величины, определяющие состояние газа. Этими величинами являются параметры состояния. Параметры состояния (термодинамические параметры) – физические величины, характеризующие равновесное состояние термодинамической системы: температура, объём, давление, плотность. Различают экстенсивные параметры состояния, пропорциональные объёму (или массе) системы (внутренняя энергия U, энтропия S, энтальпия H, энергия Гельмгольца или свободная энергия F, энергия Гиббса G), и интенсивные параметры состояния, не зависящие от массы системы (температура T, давление P, концентрация n, химический потенциал μ). В состоянии термодинамического равновесия параметры состояния не зависят от времени и пространственных координат. В неравновесном (квазиравновесном) состоянии параметры состояния могут зависеть от координат и от времени.

Термодинамическое состояние определяется заданием совокупности независимых параметров состояния. Однако не все параметры состояния являются независимыми. Уравнение состояния идеального газа выражает зависимые параметры состояния через независимые; например, давление является функцией температуры и объёма $P = P(V,T)$. Это значит, что состояние газа определяется только двумя параметрами (например, давлением и объёмом, давлением и температурой или, наконец, объёмом и температурой), третий параметр однозначно определяется двумя другими. Если уравнение состояния известно в явном виде, то любой параметр можно вычислить, зная два других.

Объём является внешним параметром состояния, так как определяется положением внешних тел (стенки сосуда, положением поршня). Температура зависит только от внутреннего состояния системы и называется внутренним параметром состояния.

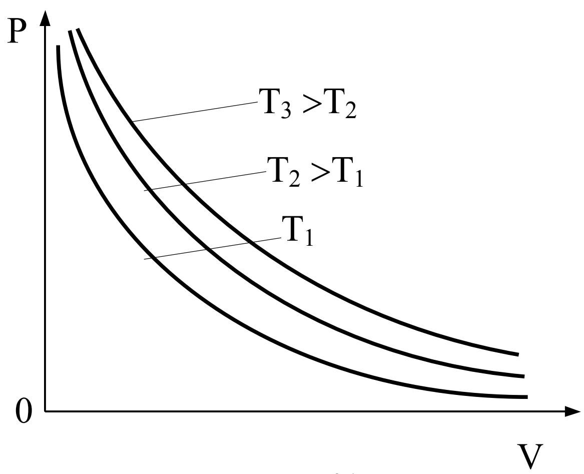


Рисунок 41

Для изучения различных процессов в газах (и не только в газах) удобно пользоваться графическим представлением уравнения состояния в виде кривых зависимости одного из параметров от другого при заданном постоянном третьем. Например, при заданной постоянной температуре зависимость давления газа от его объёма имеет вид, изображённый на рисунке 41, где разные кривые соответствуют разным значениям температуры: чем выше температура, тем выше на графике лежит кривая. На такой диаграмме состояние газа изображается точкой. Кривая зависимости одного параметра от другого показывает изменение состояния, называемое процессом в газе. Так, например, кривые рисунка 41 изображают процесс расширения или сжатия газа при данной постоянной температуре.

Очень удобно пользоваться подобными графиками при изучении различных процессов в молекулярных системах.

Для идеальных газов уравнение состояния легко получить из основных уравнений кинетической теории (21.4) и (22.1).

Действительно, подставив в уравнение (21.4) вместо средней кинетической энергии молекул её выражение из уравнения (22.1), получаем:

$$P = nkT. \tag{23.1}$$

Если в объёме V содержится N частиц, то $n = N/V$; подставив это выражение в (23.1), имеем:

$$PV = NkT. \tag{23.2}$$

Это уравнение, в которое входят все три параметра состояния, и является уравнением состояния идеальных газов.

Его, однако, полезно преобразовать так, чтобы в него вместо недоступного прямому измерению числа частиц N входила легко измеряемая масса газа M. Для такого преобразования воспользуемся понятием о моле. Моль – это такое количество вещества, масса которого выраженная в граммах, равна относительной молекулярной массе вещества (иногда говорят: молекулярному весу). Эта своеобразная единица количества вещества примечательна тем, что моль любого вещества содержит одно и то же число молекул. Действительно, если обозначить молярные массы двух каких-либо веществ через μ_1 и μ_2, а массы молекул этих веществ – через m_1 и m_2, то можно написать такие очевидные равенства:

$$\mu_1 = m_1N_1, \qquad \mu_2 = m_2N_2, \tag{23.3}$$

где N_1 и N_2 – числа частиц в моле этих веществ.

Так как из самого определения относительной массы вытекает, что $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_1}{m_2}$, то, разделив первое из равенств (23.3) на второе, получим, что $N_1 = N_2$, т.е. что моль любого вещества содержит одинаковое число молекул.

Число частиц в моле, одинаковое для всех веществ, называется числом Авогадро. Мы будем его обозначать через N_A. Теперь можем определить моль как единицу особой величины – количества вещества: 1 моль – это количество вещества, содержащее число молекул или других частиц (например, атомов, если вещество состоит из атомов), равное числу Авогадро.

Если разделить число молекул N в данной массе газа на число Авогадро N_A, то мы получим число молей ν в этой массе газа. Но эту же величину можно получить, разделив массу M газа на его молярную массу μ, так что

$$\frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A}, \quad \text{отсюда} \quad N = \frac{M}{\mu} N_A.$$

Подставим это выражение для N в формулу (23.2). Тогда уравнение состояния примет вид:

$$PV = \frac{M}{\mu} N_A kT. \tag{23.4}$$

В это уравнение входят две универсальные константы: число Авогадро N_A и постоянная Больцмана k. Зная одну из них, например постоянную Больцмана, можно другую (число Авогадро) определить простыми опытами, пользуясь самим уравнением (23.4). Для этого следует взять какой-нибудь газ с известным значением молярной массы μ, заполнить им сосуд известного объёма V, измерить давление P этого газа и его температуру T и определить его массу M, взвесив пустой (откачанный) сосуд и сосуд, наполненный газом. Число Авогадро N_A оказалось равным $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Наиболее точное к настоящему времени значение числа Авогадро:

$$N_A = 6{,}0220943 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Произведение универсальных констант $N_A k$, очевидно, также является универсальной константой. Она получила название универсальной газовой постоянной и обычно обозначается через R:

$$R = N_A k \approx 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} = 8{,}31\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}.$$

(точное значение R = 8,31441 Дж/(моль·К)).

Заменив в уравнении (23.4) $N_A k$ универсальной газовой постоянной R, получим:

$$PV = \frac{M}{\mu} RT. \tag{23.5}$$

Представленное в таком виде уравнение состояния идеального газа часто называют уравнением Клапейрона-Менделеева. Величина M/μ, входящая в это уравнение, представляет собой количество вещества (число молей в данной массе газа). Для одного моля газа, т.е. для случая, когда $M = \mu$, уравнение (23.5) имеет вид:

$$PV = RT. \tag{23.6}$$

Из уравнения (23.5) следует, что

$$\frac{PV}{T} = \frac{M}{\mu} R.$$

Следовательно, если состав (молярная масса μ) и масса (M) газа неизменны в процессах, производимых над газом, то

$$\frac{PV}{T} = \text{const}.$$

Это соотношение, впервые полученное Б. Клапейроном, называют уравнением Клапейрона. Оно показывает, что для данной массы идеального газа отношение произведения численных значений давления P и объёма V к абсолютной температуре T есть величина постоянная. Численное значение постоянной зависит от массы и химического состава газа, а также от выбора единиц измерения P, V и T.

Закон Авогадро. Из уравнения состояния идеального газа непосредственно следует и закон Авогадро, согласно которому при одинаковых давлениях и температурах в равных объёмах любого газа содержится одинаковое число молекул. Действительно, пусть мы имеем два одинаковых объёма двух различных газов при одинаковых давлениях и температурах. Для каждого из них можно написать уравнение состояния в форме (23.2):

$$PV = N_1kT, \qquad PV = N_2kT,$$

где N_1 и N_2 – число молекул в каждом из объемов.
Из этих двух равенств непосредственно следует, что

$$N_1 = N_2.$$

Это и есть закон Авогадро.

Из этого закона с очевидностью следует, что и, наоборот, различные газы, но содержащие одинаковое число молекул, будут при одинаковых давлениях и температурах занимать одинаковые объёмы. Поэтому моль любого газа при данных давлении и температуре занимает одинаковый объём. В частности, при температуре 0 ^{0}C (273,15 K) и давлении 1 атм. ($1{,}013\cdot10^5$ Па) моль любого газа занимает объём

$$V_0 = \frac{RT}{P} = \frac{8{,}31 \cdot 273}{1{,}013 \cdot 10^5} \approx 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ м^3/моль.$$

Точное значение: $V_0 = 22{,}41383 \cdot 10^{-3}$ $м^3$/моль = 22,41383 л/моль.

Легко вычислить и число n_0 молекул в 1 $м^3$ при этих (так называемых нормальных) условиях:

$$n_0 = \frac{N_A}{V_0} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{22{,}4 \cdot 10^{-3}} = 2{,}7 \cdot 10^{25}\ м^{-3}.$$

Это число называется числом Лошмидта.

Закон Дальтона. Пусть в сосуде объёмом V имеется находящаяся в состоянии теплового равновесия смесь различных газов, не реагирующих химически друг с другом. Для такой смеси уравнение состояния имеет вид

$$PV = (N_1 + N_2 + N_3 + ...)kT,$$

где N_1, N_2, N_3, ... – числа молекул соответствующих компонентов смеси.

Очевидно, что

$$N_1 + N_2 + N_3 + ... = N,$$

где N – общее число молекул в сосуде.

Давление газа

$$P = \frac{N_1}{V}kT + \frac{N_2}{V}kT + \frac{N_3}{V}kT + ...$$

Это выражение показывает, что каждая группа молекул оказывает давление, не зависящее от того, какое давление оказывают другие молекулы. Это обусловлено тем, что в идеальном газе между молекулами нет взаимодействия, молекулы «не знают» о существовании других молекул. Выражения

$$\frac{N_1}{V}kT = P_1, \qquad \frac{N_2}{V}kT = P_2, \qquad \frac{N_3}{V}kT = P_3 \ldots$$

представляют собою давление каждого из компонентов смеси, занимающей объём V, т.е. P_1, P_2, P_3, ... являются парциальными давлениями компонентов смеси. Напомним, что парциальным давлением какого-либо газа – компонента газовой смеси – называется давление, которое оказывал бы этот газ, если бы он один занимал весь объём, занимаемый смесью.

Таким образом,

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots ,$$

т.е. давление смеси газов равно сумме парциальных давлений её компонентов. Это и есть содержание закона Дальтона, который, очевидно, справедлив только для идеальных газов.

Опыт показывает, что при достаточно высоких давлениях (порядка десятков атмосфер), когда газы уже нельзя считать идеальными, наблюдаются отклонения (в ту и другую сторону) от закона Дальтона.

Пользуясь основными результатами кинетической теории газов, мы, таким образом, получили законы, управляющие поведением газов, установленные экспериментально задолго до того, как была развита теория. Это в какой-то мере подтверждает правильность теории, позволяет считать ее проверенной опытом. Это указывает также на то, что газовые законы, рассмотренные выше, относятся только к идеальным газам, что, вообще говоря, не было известно до появления кинетической теории газов. Опыт, в самом деле, показывает, что когда условия идеальности не выполнены, то наблюдаются отклонения от газовых законов. Можно поэтому считать, что строгое следование приведённым выше газовым законам является признаком идеальности газа. Именно поэтому идеальным иногда называют газ, следующий, например, законам Бойля-Мариотта или Гей-Люссака.

§ 2.24 Скорости газовых молекул

Основное уравнение кинетической теории идеальных газов устанавливает связь между средней кинетической энергией поступательного движения молекул и абсолютной температурой:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Тем самым определяется и средняя квадратичная скорость молекул:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \overline{\overline{v}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \qquad (24.1)$$

которая для данного газа (при данном значении массы молекулы m) зависит только от температуры. Если числитель и знаменатель дроби в подкоренном выражении правой части равенства (24.1) умножить на число Авогадро, то

$$\overline{\overline{v}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \qquad (24.2)$$

так как $N_A k = R$ и $N_A m = \mu$. Поскольку по уравнению состояния (23.5) $PV = MRT/\mu$, равенство (24.2) можно представить в виде:

$$\overline{\overline{v}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}, \qquad (24.3)$$

где $\rho = M/V$ – плотность газа.

Формула (24.3) показывает, что средняя квадратичная скорость молекул может быть вычислена из данных измерений чисто макроскопических величин – давления газа и его плотности. Так, например, плотность азота при атмосферном давлении и температуре 0 ^{0}C равна 1,25 кг/м^3. Средняя квадратичная скорость молекул азота в этом случае равна

$$\bar{\bar{v}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1{,}013\cdot 10^5}{1{,}25}} \approx 500 \text{ м/с.}$$

Плотность водорода при тех же условиях примерно в 15 раз меньше, чем у азота. Поэтому средняя квадратичная скорость молекул водорода почти в 4 раза больше и равна примерно 2 000 м/с.

Интересно отметить, что скорости молекул газа близки к скорости звука в том же газе. Это объясняется тем, что звуковые волны в газе переносятся движущимися молекулами. Неудивительно поэтому, что скорость звука *c* в газе приближённо определяется формулой:

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Большой интерес представляет экспериментальное определение скорости газовых молекул, так как это даёт возможность определить опытным путём значение постоянной Больцмана k, важность которой в кинетической теории очевидна. Первое экспериментальное определение скорости газовых молекул было проведено Штерном (1920 г.).

Опыт Штерна. Схема опыта (в плане) представлена на рисунке 42. Источником частиц (в данном случае атомов), скорость которых исследуется, в опыте служила платиновая проволока, покрытая слоем серебра. Она окружена двумя цилиндрическими диафрагмами, в которых прорезаны узкие щели S_1 и S_2 так, что проволока и щели лежат в одной вертикальной плоскости. Это устройство помещено внутрь цилиндра P, на внутренней поверхности которого против щели S_2 имеется мишень – съёмная латунная пластинка. Вся эта система помещена под колокол насоса, создающего высокий вакуум (~10^{-6} тора), и может вращаться с большой скоростью около оси, вдоль которой натянута проволока L.

Пропусканием электрического тока через проволоку L Штерн нагревал её до температуры, при которой серебро заметно испарялось (1 235 К). При этом атомы серебра, скорости которых соответствуют температуре проволоки, вылетают по всем направлениям. Часть атомов проходит через щели S_1 и S_2, которые вырезают из потока атомов узкий пучок, состоящий из движущихся в одном направлении и не сталкивающихся между собой частиц (такие направленные потоки молекул носят название молекулярных пучков).

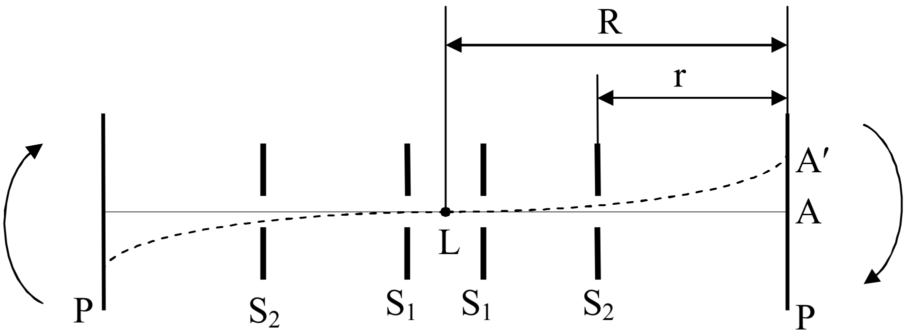


Рисунок 42

Когда вся система неподвижна, атомы серебра, образующие пучок, конденсируются на мишени в месте, обозначенном на рисунке 42 буквой А, образуя на мишени полоску, являющуюся как бы изображением щели S_2. Но если прибор привести во вращение, атомы пучка попадут уже не в точку А, а окажутся смещёнными относительно А на некоторое расстояние δ (на рисунке $\delta = AA'$). Расстояние r от щели S_2 до мишени атомы, движущиеся со скоростью v, проходят за время $t = r/v$. Но за это время каждая точка вращающегося цилиндра сместится на расстояние δ, равное $2\pi\nu Rt$, где ν – частота вращения цилиндра и R – радиус этого цилиндра:

$$\delta = 2\pi\nu Rt.$$

Подставив сюда вместо t его значение r/v, получаем:

$$\delta = \frac{2\pi\nu Rr}{v}. \qquad (24.4)$$

При вращении прибора в обратном направлении полоска сместится на такое же расстояние по другую сторону от А. Таким образом на мишени получаются две полоски, разделённые расстоянием 2δ. Это повышает точность измерения δ.

Измерив расстояние между полосками и зная ν, r и R, по формуле (24.4) вычисляют скорость атомов v при данной температуре проволоки. Измеренные таким образом значения скорости атомов оказались близкими к значениям, вычисленным по формуле (24.1).

Метод молекулярных пучков, разработанный Штерном, до сих пор широко используется для исследования различных свойств частиц.

Важно отметить, что смещённые полоски на мишени в опытах Штерна получались довольно широкими, размытыми и вовсе не были изображением щели, в отличие от резкой, узкой несмещённой полоски. Этого следовало ожидать, имея в виду, что атомы серебра вылетают из источника с различными скоростями. Ясно, что более быстрые атомы попадают на мишень с меньшим смещением относительно места попадания атомов при неподвижном приборе, чем более медленные атомы. Расстояние 2δ между полосками – это расстояние между теми их частями, где наблюдалась наибольшая плотность серебра и куда, следовательно, попадало наибольшее число молекул.

Можно показать, что с максимальной плотностью на мишень попадут молекулы, скорость которых примерно в 1,3 раза больше средней квадратичной скорости. Поэтому скорость v, вычисленная из формулы (24.4), в которой δ – половина расстояния между наиболее плотными частями осадков серебра, равна:

$$v \approx 1{,}3\ \overset{=}{v}.$$

Получив значение средней квадратичной скорости из описанных опытов Штерна, можно пользуясь (24.1) определить значение постоянной Больцмана. Опыты Штерна позволяют не только измерить среднюю квадратичную скорость, но и по размытию осадка грубо определить распределение молекул по скоростям.

§ 2.25 Закон Максвелла распределения молекул по скоростям

Закон распределения по скоростям молекул газа, находящегося в термодинамическом равновесии, был найден Максвеллом (1859). Мы ограничимся в основном рассмотрением подхода к решению этой проблемы, а также физического смысла закона Максвелла и некоторых его следствий.

Следуя Максвеллу, представим себе пространство скоростей с прямоугольными координатными осями, по которым будем откладывать значения проекций скоростей v_x, v_y, v_z отдельных молекул. Тогда скорости каждой молекулы будет соответствовать точка в этом пространстве – конец вектора $\mathbf{v}$. Из-за столкновений молекул положение точек будет стремительно меняться (при нормальных условиях каждая молекула газа испытывает порядка 10^9 столкновений в секунду; с такой частотой непредсказуемо меняется модуль и направление её скорости.), но их распределение в целом будет оставаться неизменным, поскольку макросистема находится в термодинамическом равновесии.

Вследствие равноправности всех направлений движения расположение точек относительно начала координат будет сферически симметричным. Поэтому плотность точек может зависеть только от модуля скорости v (но не от $\mathbf{v}$).

Итак, пусть макросистема (газ) содержит N молекул. Выделим в некоторой точке – конце вектора $\mathbf{v}$ – малый объём $dv_x dv_y dv_z$ (рисунок 43, где ось v_z направлена на нас). Этот малый объём должен быть таким, чтобы число dN молекул в нём было достаточно большим (во избежание заметных флуктуаций). Если, например, макросистема содержит $N \sim 10^{20}$ молекул, то число $dN \sim 10^6$ на много порядков меньше N, и это даёт нам право рассматривать dN как физически бесконечно малую величину, относительные флуктуации которой пренебрежимо малы. В дальнейшем под dN мы будем понимать среднее число молекул в соответствующем интервале той или иной величины.

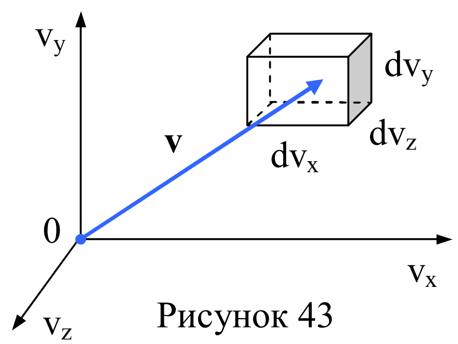


Рисунок 43

Относительное число точек (молекул) в этом объёме dN/N, или другими словами, вероятность dP того, что скорость молекулы, т.е. конец вектора **v**, попадёт в этот объём, можно записать так:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v)dv_x dv_y dv_z\,, \tag{25.1}$$

где f(v) имеет смысл объёмной плотности вероятности.

Вероятность же того, что молекула (точка) будет иметь проекции скорости в интервале (v_x, $v_x + dv_x$), есть

$$dP(v_x) = \frac{dN(v_x)}{N} = \varphi(v_x)dv_x\,, \tag{25.2}$$

где $\varphi(v_x)$ – функция распределения по v_x .

Выражение (25.2) – это по существу интеграл от (25.1) по v_y и v_z , т.е. относительное число молекул (точек) в тонком слое от v_x до $v_x + dv_x$.

Вероятности того, что молекула имеет проекции скорости в интервалах (v_x, $v_x + dv_x$), (v_y, $v_y + dv_y$), (v_z, $v_z + dv_z$), являются независимыми, поэтому в соответствии с теоремой об умножении вероятностей независимых событий можно записать:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = dP(v_x)dP(v_y)dP(v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_x dv_x\,. \tag{25.3}$$

Из соображений равноправия осей v_x, v_y и v_z ясно, что функции φ должны одинаковым образом зависеть от соответствующих проекций скоростей. Сопоставив (25.3) с (25.1), находим:

$$f(v) = \varphi(v_x)\cdot\varphi(v_y)\cdot\varphi(v_z). \tag{25.4}$$

Применяя методы теории вероятностей и с учётом условия нормировки можно получить следующий результат:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m{v_x}^2}{2kT}\right), \tag{25.5}$$

аналогичный вид имеют функции $\varphi(v_y)$ и $\varphi(v_z)$. И тогда согласно (25.4)

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \tag{25.6}$$

График функции $\varphi(v_x)$ изображён на рисунке 44. Он совпадает с гауссовой кривой погрешностей. Площадь заштрихованной полоски на рисунке 44 – это вероятность того, что проекция скорости молекулы лежит в интервале (v_x, $v_x + dv_x$).

Функция (25.5) нормирована на единицу, т.е. площадь под кривой $\varphi(v_x)$ равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x)dv_x = 1. \tag{25.7}$$

Интегрирование в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ не означает, что в газе есть молекулы с такими большими скоростями. Это следует рассматривать только как вычислительный приём. Молекул с весьма большими скоростями очень мало, и они практически не вносят никакого вклада в нормировочный интеграл. Это и позволяет записывать такие пределы.

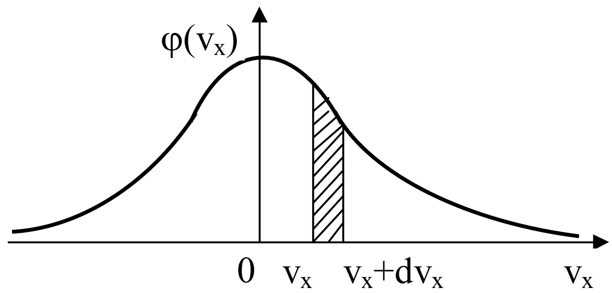


Рисунок 44

Распределение молекул по модулю скорости. Величина (25.6) не может, конечно, зависеть от направления вектора скорости **v**. Теперь найдём функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, т.е. найдём вероятность или относительное число молекул, модуль скорости которых заключён в интервале (v, v + dv). Таким молекулам соответствуют все точки, попадающие в шаровой слой с радиусами v и v + dv (рисунок 45). Объём этого слоя равен произведению площади поверхности слоя на его толщину, т.е. $4\pi v^2 dv$, объёмная же плотность вероятности f(v) во всех точках слоя одинакова. Следовательно, согласно теореме сложения вероятностей, вероятность попадания в этот слой равна:

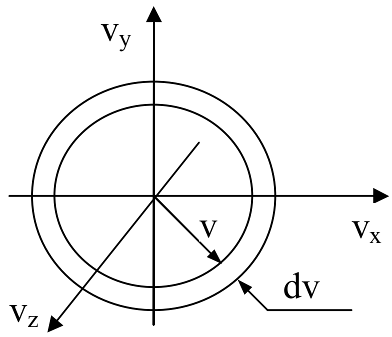


Рисунок 45

$$dP = f(v)\cdot 4\pi v^2 dv. \qquad (25.8)$$

Величина dP/dv – мы её обозначим F(v) – характеризует искомую вероятность, т.е. $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$. Учитывая (25.6), получим:

$$F(v) = 4\pi\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\cdot\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \qquad (25.9)$$

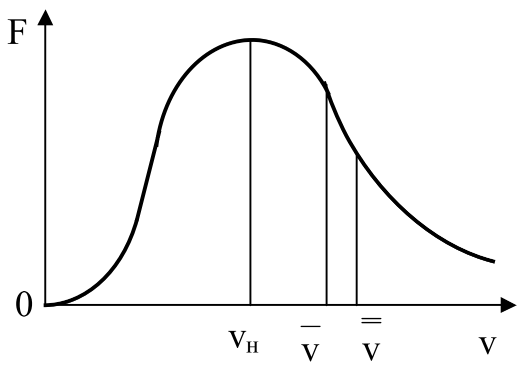


Рисунок 46

Эта формула выражает закон Максвелла распределения молекул по скоростям. Вид функции F(v) показан на рисунке 46. Эта функция тоже нормирована на единицу:

$$\int_0^\infty F(v)dv = 1. \qquad (25.10)$$

Следует отметить, что полученные Максвеллом распределения по скоростям не зависят ни от структуры молекул, ни от того, как они взаимодействуют друг с другом. Поэтому они применимы не только к газам, но и к другим агрегатным состояниям вещества.

Как видно из формулы (25.9), вид кривой распределения зависит от природы газа (в формулу входит масса молекулы m) и от температуры. На рисунке 47 приведены кривые распределения молекул по скоростям при различных температурах. Из них видно, что при повышении температуры скорости молекул возрастают, так что вся кривая смещается в сторону больших скоростей. Но площади, ограниченные кривыми и осью скоростей, остаются, конечно, неизменными. Вследствие этого максимум кривой при повышении температуры уменьшается.

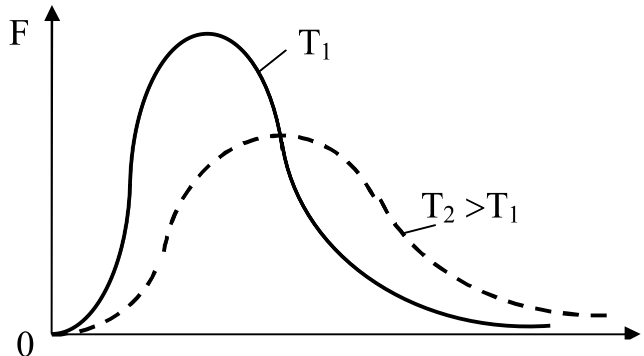


Рисунок 47

Максвелловское распределение по скоростям устанавливается только благодаря столкновениям между молекулами. В самом деле, представим себе, что газ находится в таком состоянии, что все молекулы имеют одинаковые по модулю скорости. Такое состояние не может быть устойчивым (равновесным), потому что столкновения между молекулами непременно приведут к тому, что скорости молекул перестанут быть одинаковыми. При каждом столкновении двух молекул скорость одной из них увеличивается, а скорость другой уменьшается. И Максвелл впервые обратил внимание на то, что должно существовать такое состояние, при котором число молекул, скорость которых при столкновениях увеличивается, равно числу молекул, у которых скорость в результате столкновений уменьшается. Такое состояние и является равновесным. Именно такому состоянию и соответствует максвелловское распределение по скоростям. Позже Больцман показал, что если газ находится в состоянии, в котором его молекулы распределены по скоростям не по Максвеллу, то такой газ благодаря столкновениям молекул сам собой переходит в состояние с максвелловским равновесным распределением.

Молекулярные движения, происходящие в газе, мы всё время называли хаотическими. Теперь можем дать точное определение понятию хаотичности тепловых движений: движение молекул полностью беспорядочно (хаотично), если скорости молекул распределены по закону Максвелла.

Такие вполне хаотические движения молекулы совершают, когда газ находится в состоянии равновесия. Как мы видели в § 2.22, это состояние характеризуется величиной температуры, которая в свою очередь определяется средней кинетической энергией движения молекул. Отсюда следует, что температура определяется средней кинетической энергией именно хаотических движений. Всякое же направленное движение молекул, каковы бы ни были их скорости в таком движении, никакого отношения к температуре не имеет. Как бы велика ни была скорость воздуха, образующего сильный ветер, она не сделает его горячим. Ветры даже самые сильные, могут быть и тёплыми и холодными, потому что температура газа определяется не направленной скоростью ветра, а теми хаотическими движениями, которые молекулы совершают наряду с направленным движением газа как целого и независимо от него.

§ 2.26 Внутренняя энергия идеального газа. Количество теплоты

Внутренняя энергия является одной из важнейших величин, характеризующих систему в состоянии термодинамического равновесия. Внутренней энергией U макросистемы называют величину, состоящую из:

- суммарной кинетической энергии хаотического движения самих молекул в системе отсчёта, связанной с самой системой (в этой системе суммарный импульс всех молекул равен нулю, и система как целое покоится);

- потенциальной энергии взаимодействия всех молекул, принадлежащих данной системе;

- внутренней энергии самих молекул, атомов, ядер (сюда входят кинетическая энергия движения атомов внутри молекулы, если молекула не одноатомная, потенциальная энергия взаимодействия между атомами внутри молекулы и кинетическая энергия частиц, входящих в состав атомов, ядер...).

Внутренняя энергия, однако, не включает ту кинетическую энергию, которой газ может обладать, если он, как целое, движется, и ту потенциальную энергию, которой он может обладать, если находится в поле каких-нибудь сил.

Пока мы не будем включать во внутреннюю энергию U внутреннюю энергию молекул, атомов, ядер, считая во многих процессах вклад этой составляющей энергии в U постоянным, не зависящим от вида процесса. Т.е. будем считать, что внутренняя энергия U определена с точностью до некоторой постоянной. Поскольку в термодинамические формулы входит не сама энергия, а ее изменение либо производная по какому-либо параметру, то эту составляющую энергии будем просто отбрасывать, так как в нашем курсе будем изучать процессы, при которых внутримолекулярная энергия остаётся постоянной.

Средняя энергия молекулы идеального газа, если считать его материальной точкой, определяется выражением (22.1):

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Это выражение справедливо для молекул-точек, способных совершать только поступательное движение. Такое представление о газе может считаться справедливым для одноатомных газов. Если же молекула газа содержит более одного атома, то она может совершать и другие виды движения – вращательное и колебательное, с которыми тоже связана некоторая энергия.

Так как для идеального газа потенциальной энергией взаимодействия молекул по сравнению с их кинетической энергией пренебрегаем, то поэтому внутренняя энергия N молекул идеального газа будет равна

$$U = \frac{3}{2}NkT. \tag{26.1}$$

Если газ содержит ν молей $\left(\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A}\right)$, то его внутренняя энергия равна

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}N_A kT = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu}RT = \frac{3}{2}\nu RT, \tag{26.2}$$

где M – масса газа;

μ – его молярная масса;

R – универсальная газовая постоянная;

N_A – число Авогадро;

T – абсолютная температура.

Внутренняя энергия данной массы идеального газа зависит, как это видно из формул (26.1) и (26.2), только от температуры и не зависит ни от давления, ни от объёма газа (для неидеальных – реальных газов это неверно). Таким образом, внутренняя энергия U(T) является функцией состояния системы. Это означает, что внутренняя энергия в данном состоянии имеет присущее этому состоянию значение и не зависит от того, каким путём система пришла в это состояние. Поэтому при изменении состояния системы приращение внутренней энергии определяется только конечным и начальным состояниями и не зависит от характера процесса, который перевёл систему из одного состояния в другое.

В отличие, например, от температуры T, которая характеризует равновесное состояние макросистемы, внутренняя энергия U присуща как равновесным, так и неравновесным состояниям. В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать внутреннюю энергию лишь равновесных состояний.

Если макросистема состоит из нескольких частей, то энергией межмолекулярного взаимодействия на границах этих частей (в тонком слое) можно пренебречь и считать, что внутренняя энергия всей системы практически равна сумме внутренних энергий ее частей. Это значит, что внутренняя энергия является величиной аддитивной.

Внутреннюю энергию макросистемы можно изменить, совершив над системой работу A′ внешними макроскопическими силами, либо путём теплопередачи. Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, действующих на систему (так, например, ведёт себя поршень в цилиндре с газом). Передача макросистеме тепла Q не связана с перемещением внешних тел. Она осуществляется путём непосредственной передачи внутренней энергии макросистеме от внешних тел при контакте с ними за счёт теплопроводности. Передача энергии при этом может происходить и через излучение.

Механизм передачи энергии за счёт теплопроводности заключается в том, что молекулы соприкасающихся тел при взаимных столкновениях обмениваются энергией, так что частицы сильнее нагретого тела теряют энергию, передавая её частицам менее нагретого тела. Значит, в этом случае вместо изменения энергии за счёт затраты работы тот же результат достигается путём передачи энергии хаотически движущихся молекул одного тела молекулам другого.

Однако в силу обстоятельств, связанных с историей развития физики, в том случае, когда изменение температуры (нагрев или охлаждение) тела производится за счёт теплопроводности, говорят, что к телу подводится или от него отводится некоторое количество теплоты.

Итак, количество теплоты представляет собой энергию, которая передаётся от одного тела к другому путём теплопроводности или излучения. По существу при теплопередаче мы тоже имеем дело с работой, но работу в этом случае совершают не макроскопические упорядоченно движущиеся тела, а беспорядочно движущиеся молекулы.

Никакой другой разницы между теплотой и работой (энергией) нет. Поэтому они должны измеряться в одних и тех же единицах. В СИ за единицу количества теплоты принят 1 джоуль (Дж). Но в силу исторических причин количество теплоты измеряют и в калориях. Эта единица была введена в те времена, когда теплота считалась особым веществом, способным подобно некоторой жидкости перетекать из одного тела в другое. Калория определяется как количество теплоты, подвод (или отвод) которого вызывает нагревание (или, соответственно, охлаждение) одного грамма воды при атмосферном давлении на 1 кельвин. Эквивалентность теплоты и энергии была определена Д. Джоулем, показавшим, что нагрев 1 калорией теплоты такой же, какой даёт вполне определённая и всегда одна и та же работа. Именно оказалось, что

$$1 \text{ кал} = 4{,}1868 \text{ Дж}.$$

Число, показывающее отношение единицы механической работы к единице теплоты, называют механическим эквивалентом теплоты:

$$I = 4{,}1868 \text{ Дж/кал.}$$

Обратная ему величина называется тепловым эквивалентом механической работы:

$$I' = 0{,}239 \text{ кал/Дж.}$$

В дальнейшем будем считать, что и количество теплоты и работа или энергия измеряются в джоулях.

§ 2.27 Первое начало термодинамики

Изменение состояния любого тела или системы тел, вообще говоря, сопровождается работой, произведённой этой системой, или работой, совершаемой над ней внешними силами. Эта работа может быть выражена через параметры, определяющие состояние системы. Если, как мы уже знаем, состояние системы определяется двумя из трёх параметров P, V, T, то в общем случае изменение любого из них должно сопровождаться внешней работой. Так, например, изменение температуры газа, т.е. его нагревание или охлаждение, может быть осуществлено в результате затраты механической работы извне (нагревание) или за счёт работы, произведённой против внешних сил (охлаждение). Эта механическая работа совершается при сжатии газа внешней силой, когда газ нагревается, или при расширении газа, когда он сам производит работу, охлаждаясь при этом. Изменение объёма газа может быть произведено и без изменения его температуры (см. ниже), тогда соответственно требуется меньшая работа.

Телом в термодинамике называют макроскопическую систему, заключённую в определённый объем.

Но, как было указано, состояние газа (или других тел) можно изменить, сообщив ему или, наоборот, отняв от него некоторое количество теплоты, т.е. приведя его в контакт с более нагретым или более холодным телом.

Какая работа будет совершена при этом способе изменения состояния? Ответ на этот вопрос даёт закон сохранения энергии (применительно к механическим и тепловым процессам) – работа, совершаемая системой, равна разности между количеством теплоты, сообщаемой системе, и изменением её внутренней энергии:

$$dA = dQ - dU, \tag{27.1}$$

или

$$dQ = dU + dA. \tag{27.2}$$

Этот закон получил название первого начала термодинамики. Согласно (27.2) можно дать и такую формулировку первого начала термодинамики: количество теплоты, сообщаемое системе, идёт на приращение её внутренней энергии и на совершение работы над внешними телами.

Если рассматривать работу dA' над системой, выражение первого начала термодинамики примет вид:

$$dU = dQ + dA', \tag{27.3}$$

т.е. приращение внутренней энергии системы равно сумме совершённой над системой работы всех внешних сил и количества теплоты, переданной системе.

Все входящие в уравнения (27.1), (27.2) и (27.3) величины являются алгебраическими, т.е. могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки. Если, например, $dQ < 0$, то это значит, что тепло отводится от системы, если $dA < 0$, то работа производится над системой. Приращение dU внутренней энергии может иметь любой знак, в частности быть равной нулю.

Можно говорить о приращении внутренней энергии U, но нельзя говорить о приращении работы или тепла. Говорят только о количестве последних двух величин в том или ином процессе, т.е. A и Q являются функциями процесса.

Работа при изменении объёма газа. Вычислим работу, связанную с расширением или сжатием газа, т.е. с изменением его объёма. Пусть газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным, легко скользящим невесомым поршнем (рисунок 48). Пусть под действием приложенной внешней силы F поршень переместился на расстояние dh, сжав при этом газ. Газ будет сжиматься до тех пор, пока сила F не уравновесится силой, действующей на поршень со стороны газа и равной PS, где P – давление газа, S – площадь поршня. Работа dA, затраченная на перемещение поршня на расстояние dh, равна, очевидно, PSdh. Но Sdh есть изменение объёма газа dV при сжатии, т.е.

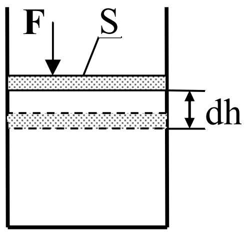


Рисунок 48

$$Sdh = - dV,$$

откуда

$$dA = - PdV. \tag{27.4}$$

Наоборот, при расширении газа, т.е. при увеличении объёма на dV, газ сам совершает работу против внешних сил, равную +PdV.

Изменение элементарного объёма газа сопровождается элементарной работой, равной произведению давления, под которым находится газ, на изменение его объёма (при элементарном перемещении давление можно считать постоянным).

Формула (27.4) верна не только для газа, но и для любых тел. Если при изменении состояния тела внешняя работа совершается только за счёт изменения объёма, то первое начало термодинамики можно написать в виде:

$$dQ = dU + PdV. \tag{27.5}$$

Возможны случаи, когда изменение состояния тел сопровождается изменением электрических, магнитных или других параметров, тогда к правой части уравнения следует добавить соответствующие слагаемые: электрическую, магнитную и другие виды энергии. Мы ограничимся здесь рассмотрением изменения только параметров P и V.

Если же при изменении объёма давление меняется, то при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 работа A определяется путём интегрирования уравнения (27.4):

$$A = \int_1^2 dA = \int_{V_1}^{V_2} PdV\,. \tag{27.6}$$

Этот интеграл можно определить графически. Действительно, состояние системы, как было указано, характеризуется точкой на кривой P = f(V). Поэтому, если зависимость P = f(V) построена графически, например, если эта зависимость выражается кривой I на рисунке 49, то

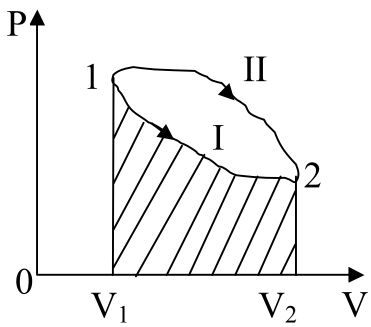


Рисунок 49

$$\int_{V_1}^{V_2} PdV$$

равен заштрихованной площади под этой кривой.

Если переход из состояния 1 в состояние 2 происходит так, что изменение давления с объёмом изображается кривой II, то связанная с этим переходом работа будет другой.

Внешняя работа, произведённая системой (или над ней) при изменении его объёма, зависит от последовательности состояний, которую проходит система при переходе от начального в конечное состояние.

Что касается внутренней энергии U, то она зависит только от состояния системы и её изменение не зависит от промежуточных состояний, в которых система пребывала.

Поэтому уравнение (27.5) может быть переписано в виде:

$$\int_{1}^{2} dQ = U_2 - U_1 + \int_{V_1}^{V_2} PdV, \qquad (27.7)$$

где U_1 и U_2 – значения внутренней энергии в состояниях 1 и 2 соответственно.

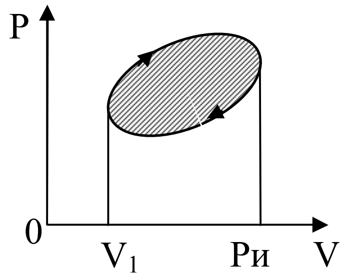


Рисунок 50

В частном случае, если система в результате всех изменений состояния вернулась в исходное состояние, т.е. $U_1 = U_2$, то в этом случае говорят, что процесс изменения состояния – круговой, или циклический. На диаграмме P-V такой процесс имеет вид замкнутой кривой (рисунок 50). Совершаемая (или затраченная) работа при таком процессе определяется заштрихованной площадью.

Очевидно, если работа

$$\oint PdV$$

за цикл положительна, т.е. сама система совершила работу против внешних сил, то это означает, что она получила извне равное этой работе количество теплоты Q. Если же работа A за цикл отрицательна, т.е. над системой совершена работа внешними силами, то при этом выделилось равное ей количество теплоты. Таким образом, при циклическом процессе Q = A.

Нас не должно смущать, что на некоторых участках кривых P(V) рисунков 49 и 50 давление возрастает при увеличении объёма. «Обычная» зависимость, при которой давление обратно пропорционально объёму газа наблюдается только при постоянной температуре, т.е. при изотермическом процессе. Рассматриваемый же нами процесс изменения объёма газа относится к случаю, когда газу сообщается или от него отнимается некоторое количество теплоты и над ним совершается (или он сам совершает) работа, и на разных стадиях изменения объёма температура газа разная. Поэтому одновременно с расширением газ может за счёт источника тепла настолько повысить свою температуру, что его давление, несмотря на увеличение объёма, повысится (и, наоборот, при сжатии газ может отдать тепло более холодному телу, и его давление понизится).

Этим объясняется и то обстоятельство, что при переходе из одного и того же начального состояния (P_1, V_1) в одно и то же конечное состояние (P_2, V_2), но через различные промежуточные состояния работа получается разной и, следовательно, при круговом процессе она не равна нулю. Именно на этом основана работа всех тепловых машин (двигателей).

Ясно, что никакая положительная работа не может быть произведена системой, если в течение всего кругового процесса температура системы неизменна (т.е. если процесс изотермический). В газе, очевидно, такой изотермический круговой процесс вообще невозможен, так как, если изменение давления с объёмом происходит вдоль изотермы, то вернуться в исходное состояние можно только вдоль той же изотермы; но такой процесс нельзя назвать круговым в упомянутом выше смысле.

Процессом в термодинамике называют изменение состояния тела со временем. Важными характеристиками процесса являются поглощённое телом количество теплоты Q, а также совершённая над ним работа A. Обе эти величины существенно зависят от хода процесса.

Внутреннее строение молекул газа слабо влияет на термические свойства – давление, температуру, плотность – и на связь между ними. По этой причине все выражения для состояния идеального газа и процессов над идеальным газом справедливы для всех газов (например, для водорода, кислорода, азота, паров воды и др.), когда их ещё можно принять за идеальный газ.

Квазистатические процессы. При выводе уравнения (27.4) для работы газа, связанной с изменением его объёма, молчаливо предполагалось, что в течение всего процесса изменения объёма давление в каждый момент времени одинаково во всех точках газа. В противном случае значение давления P было бы совершенно неопределённо. Между тем обеспечить такое постоянство давления во всём объёме газа в процессе его расширения или сжатия вовсе не так просто.

Если расширение или сжатие газа происходит быстро, то давления в разных его частях не успевают выравниваться. Под действием разности давлений возникают течения газа с различными скоростями в разных точках, в частности, вихревые течения. Эти движения требуют для своего создания некоторой работы. Кроме того, разные части газа могут при этом иметь разные температуры и плотности.

Следовательно, при быстром изменении объёма газ не находится в состоянии равновесия. Для того, чтобы в процессе изменения своего объёма (или другой величины, характеризующей состояние) газ находился в равновесии, необходимо, чтобы этот процесс протекал весьма медленно, в пределе – бесконечно медленно. В этом случае все отклонения от равновесия будут успевать исчезать, газ будет проходить через ряд состояний равновесия, переходящих одно в другое. Равновесным состоянием называют состояние системы, в котором отсутствуют потоки (массы, заряда, энергии, импульса и т.п.) между ее подсистемами.

Такие процессы называются квазистатическими (равновесными), потому что при этом в любой момент состояние газа мало отличается от статического состояния, при котором параметры состояния одинаковы во всём объёме. Ясно, что только квазистатические процессы можно графически представить в виде кривых, подобных, например, приведённым на рисунках 41 или 49. Неквазистатический процесс изобразить нельзя. Уравнением (27.4) и следствиями из него можно пользоваться только для квазистатических процессов. Все реальные процессы неравновесны (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

Если процесс изменения объёма, т.е. сжатие или расширение газа, происходит неквазистатически, то совершённая при сжатии или расширении работа будет меньше, чем при квазистатическом процессе. Это можно понять из следующих соображений. Представим себе, что газ в сосуде с поршнем (см. рисунок 48) находится сначала в равновесии; это значит, что давление газа P внутри сосуда равно внешнему давлению. Пусть под действием тех или иных причин газ стал расширяться (неквазистатически), т.е. поршень стал перемещаться вверх. Значит, внешнее давление P_1 стало меньше равновесного давления P и, следовательно, внешняя работа

$$P_1dV < PdV.$$

Соответственно при неквазистатическом сжатии газа внешнее давление P_1 больше равновесного и поэтому работа (на этот раз она отрицательная)

$$-P_1dV < -PdV.$$

И только при квазистатическом процессе внешнее давление бесконечно мало отличается от равновесного и, следовательно, работа, произведённая в этом случае, наибольшая.

Более того, газ может расширяться, вовсе не совершив никакой внешней работы. Такой случай можно осуществить, соединив друг с другом два сосуда, из которых один наполнен газом, а другой пустой. Тогда газ перетечёт из первого сосуда во второй и займет, следовательно, больший объём. Но при этом никакой внешней работы не будет совершено, так как нет внешних сил, против которых эта работа могла совершаться. Это так называемый процесс расширения в пустоту (вакуум). И действительно, в течение всего этого процесса газ не находится в равновесии, как бы медленно он ни протекал.

§ 2.28 Теплоёмкость идеальных газов

Идеальный газ – система, состоящая из невзаимодействующих материальных точек. Вместе с тем, взаимодействие между молекулами даже в случае идеальных газов должно быть, но весьма слабое. Оно необходимо, так как только благодаря ему в системе может установиться равновесие. Уравнение состояния идеального газа для ν молей имеет вид: $PV = \nu RT$.

Из первого начала термодинамики ($dQ = dU + dA = dU + PdV$) ясно, что количество теплоты, необходимое для изменения температуры газа, зависит от того, совершается ли при этом работа, т.е. изменяется ли при этом объём. Если нагреваемый (или охлаждаемый) газ заключён в закрытый сосуд постоянного объёма, то подводимое к нему тепло dQ затрачивается исключительно на изменение его внутренней энергии. Если же газ находится в сосуде, подобном изображённому на рисунке 48, то он будет расширяться, совершая работу подъёма поршня и сохраняя при этом давление постоянным. В этом случае из уравнения

$$dQ = dU + PdV$$

следует, что при сохранении давления газа постоянным для такого же изменения внутренней энергии требуется большее количество теплоты.

Количество теплоты, необходимое для нагревания газа, зависит от количества нагреваемого газа и от того, на сколько градусов должна быть изменена его температура. Чем больше то и другое, тем больше требуется количества теплоты. Поэтому для характеристики тепловых свойств газа, как и любого другого тела, пользуются особой величиной – теплоёмкостью.

Теплоёмкостью тела (газа) называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно подвести к нему или отнять от него для изменения его температуры на 1 К (1 кельвин).

Теплоёмкость, отнесённая к единице массы вещества, называется удельной теплоёмкостью. Она характеризует уже не тело, а вещество, из которого тело состоит.

Теплоёмкость, отнесённая к одному молю вещества, называется молярной теплоёмкостью. Как и удельная теплоёмкость, она является характеристикой вещества.

Из приведённых определений ясно, что теплоёмкость тела выражается в Дж/К, удельная теплоёмкость – в Дж/(кг·К), а молярная теплоёмкость – в Дж/(моль·К).

Между удельной теплоёмкостью, которую будем обозначать через с, и молярной С существует очевидное соотношение:

$$c = C/\mu,$$

где μ – молярная масса вещества (численно равная массе моля).

Если 1 моль вещества нагревается не на 1 градус, а на dT градусов, то количество тепла, затрачиваемое на это, равно

$$dQ = CdT,$$

откуда

$$C = \frac{dQ}{dT}\ . \tag{28.1}$$

Пусть нагревание происходит в условиях, когда объём остаётся постоянным (V = const). Соответствующая молярная теплоёмкость называется теплоёмкостью при постоянном объёме и обозначается C_V:

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V. \tag{28.2}$$

Так как теплота при этом тратится только на изменение внутренней энергии dU, то dQ = dU и

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V. \tag{28.3}$$

Отсюда $dU = C_V dT$. Уравнение для первого начала термодинамики (27.5) можно теперь переписать в виде

$$dQ = C_V dT + PdV. \tag{28.4}$$

Следовательно, в общем случае подводимое к телу тепло расходуется на изменение температуры dT (изменение внутренней энергии) и изменение объёма dV (с этим связана механическая работа dA). При изохорном процессе (V = const) работа dA = PdV = 0.

Если при нагревании постоянным остаётся давление, то соответствующая молярная теплоёмкость называется теплоёмкостью при постоянном давлении C_P:

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P. \tag{28.5}$$

Пользуясь результатами кинетической теории газов легко вычислить молярные теплоёмкости идеального газа.

§ 2.29 Теплоёмкость одноатомных газов

Для идеального одноатомного газа согласно (26.2) внутренняя энергия 1 моля равна $\frac{3}{2}RT$, значит,

$$C_V = \frac{3}{2}R. \tag{29.1}$$

Если разделить это значение молярной теплоёмкости на число молекул в 1 моле, т.е. на число Авогадро, то получим выражение для среднего вклада, вносимого каждой молекулой в теплоёмкость газа:

$$\frac{3}{2}\frac{R}{N_A} = \frac{3}{2}k. \tag{29.2}$$

Следовательно, при повышении температуры на 1 кельвин энергия каждой одноатомной молекулы возрастает в среднем на $\frac{3}{2}k$ джоулей.

Теплоёмкость C_P идеального газа при постоянном давлении найдём, подставив выражение (28.4) в (28.5):

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = \left(\frac{C_V dT + PdV}{dT}\right)_P = C_V + P\left(\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{3}{2}R + P\left(\frac{dV}{dT}\right)_P . \qquad (29.3)$$

Для 1 моля идеального газа в соответствии с (23.5) $V = RT/P$. Продифференцировав это выражение по T в предположении, что $P = \text{const}$, получим

$$\left(\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{R}{P}. \qquad (29.4)$$

Подстановка этого выражения в (29.3) приводит к соотношению:

$$C_P = C_V + R = \frac{5}{2}R. \qquad (29.5)$$

Из формулы (29.5) видно, что молярная теплоёмкость при постоянном давлении превосходит молярную теплоёмкость при постоянном объёме на величину газовой постоянной R:

$$C_P - C_V = R. \qquad (29.6)$$

Значит, универсальная газовая постоянная численно равна работе, которую 1 моль идеального газа совершает, расширяясь изобарически (при постоянном давлении) при нагревании на 1 кельвин. Соотношение (29.6) называют формулой Майера.

Важной характеристикой газов является отношение C_P/C_V, которое обозначают γ и называют постоянной (показателем) адиабаты. Имея в виду (29.5), запишем

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}. \qquad (29.7)$$

Откуда молярная теплоёмкость при постоянном объёме

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \tag{29.8}$$

Учитывая (28.3), (29.8) и (23.5), получаем для внутренней энергии 1 моля идеального газа формулы:

$$U = C_V T = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{PV}{\gamma - 1}. \tag{29.9}$$

§ 2.30 Теплоёмкость газов и число степеней свободы молекул

Для теоретических вычислений теплоёмкости мы выбирали одноатомные газы, т.е. газы, молекулы которых состоят из одного единственного атома. И это не случайно. Одно из предположений, лежащих в основе кинетической теории, из которой и следует изложенная выше теория теплоёмкости, состоит в том, что молекулы идеального газа можно рассматривать как точки или, по крайней мере, мельчайшие шарики. А такому представлению о газе ближе всего отвечают именно одноатомные газы.

Средняя энергия такой частицы полностью определяется средней кинетической энергией ее поступательного движения $m\overline{v^2}/2$. Эту энергию можно представить как сумму трёх слагаемых – кинетических энергий по трём взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{m\overline{v_x^2}}{2} + \frac{m\overline{v_y^2}}{2} + \frac{m\overline{v_z^2}}{2},$$

где v_x, v_y, v_z – составляющие скорости молекулы по трём осям координат.

Полная хаотичность молекулярных движений позволяет считать, что средние значения кинетических энергий по трём направлениям равны друг другу:

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} = \frac{m\overline{v_y^2}}{2} = \frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{3}\frac{m\overline{v^2}}{2}. \qquad (30.1)$$

Так как согласно основному уравнению кинетической теории

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

то каждое из трёх слагаемых равенства (30.1) равно kT/2.

Разделение кинетической энергии молекулы на три независимые составляющие связано с тем, что одноатомная молекула рассматривается как свободная материальная точка, обладающая тремя степенями свободы.

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых координат, определяющих ее положение и конфигурацию в пространстве. Значит, на каждую степень свободы одноатомной молекулы приходится энергия, равная kT/2. К одноатомным газам относятся инертные газы.

Теперь рассмотрим другой случай – двухатомной молекулы, например, водорода (H_2). Ее можно представить себе в виде системы, состоящей из двух атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга (рисунок 51). Если расстояние между этими атомами не меняется (такие молекулы называют жёсткими), то такая система, вообще говоря, имеет шесть степеней свободы.

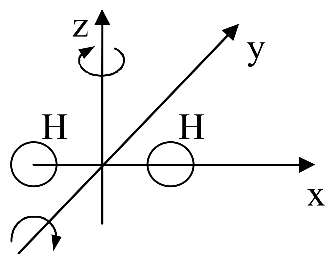


Рисунок 51

Действительно, положение и конфигурация такой молекулы определяется: тремя координатами ее центра масс, которыми определяется поступательное движение молекулы как целого, и тремя координатами, определяющими возможные вращения молекулы около взаимно перпендикулярных осей 0x, 0y, 0z.

Однако опыт и теория показывают, что вращение молекул около оси 0x (см. рисунок 51), на которой лежат центры обоих атомов, может быть возбуждено лишь при очень высоких температурах. При обычных температурах вращение около оси 0x не происходит, так же как не вращается отдельный атом. Поэтому для описания возможных вращений двухатомной молекулы достаточно двух координат.

Следовательно, число степеней свободы жёсткой двухатомной молекулы равно 5, из них три поступательные и две вращательные степени свободы. К двухатомным газам относятся водород (H_2), кислород (O_2), азот (N_2), воздух.

Если молекула упругая, то возможны колебания атомов. Если амплитуды колебаний атомов в молекуле достаточно малы (по сравнению с расстоянием между ними), то такие колебания можно считать гармоническими. Атомы в этом случае являются гармоническими осцилляторами. Но осциллятор обладает не только кинетической, но и потенциальной энергией, обусловленной силами, возвращающими атом в положение равновесия. Для гармонического осциллятора, как известно из механики, средние значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой. Следовательно, если в молекуле возбуждены гармонические колебания атомов, то по закону равнораспределения на каждую колебательную степень свободы приходится $kT/2$ в виде кинетической энергии и $kT/2$ в виде потенциальной. Для ангармонических (не гармонических) колебаний это неверно. Другими словами: энергия, приходящаяся на каждую колебательную степень свободы, равна не $kT/2$, а $2\cdot(kT/2) = kT$.

Упомянутый выше вывод, что на каждую степень свободы одноатомной молекулы приходится энергия, равная $kT/2$, Больцман обобщил в виде гипотезы (теоремы) о равном распределении средней энергии по степеням свободы. Согласно этой теореме: если система молекул находится в тепловом равновесии при температуре T, то средняя энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы и для каждой степени свободы молекулы она равна $kT/2$.

Итак, если число степеней свободы молекулы газа равно i, то её средняя энергия равна

$$i\frac{kT}{2},$$

а внутренняя энергия одного моля такого газа

$$U = \frac{i}{2}RT. \tag{30.2}$$

Соответственно этому молярные теплоёмкости газа

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2}R \tag{30.3}$$

и

$$C_P = C_V + R = \left(\frac{i}{2}+1\right)R. \tag{30.4}$$

При подсчёте числа степеней свободы i необходимо число колебательных степеней свободы удвоить.

§ 2.31 Изменение состояния при изменении объёма газа

Из уравнения закона сохранения энергии (28.4)

$$dQ = C_V dT + PdV$$

видно, что подводимая к газу теплота может вызывать изменения температуры газа (dT) и изменение его объёма (dV). Ранее мы рассмотрели с энергетической точки зрения процесс изменения температуры газа. Теперь обратимся к вопросу о расширении и сжатии идеального газа, т.е. к вопросу об изменении его состояния при изменении объёма.

Было показано, что количество теплоты, необходимое для изменения температуры газа, зависит от условий, в которых это изменение происходит, от того, сохраняется ли при нагревании газа неизменным его объём или давление, т.е. является ли изменение температуры изохорическим или изобарическим.

Сжатие и расширение газа тоже может происходить в различных условиях, и от условий опыта зависит энергетический результат процесса, т.е. совершаемая при этом работа (ведь изменение объёма газа связано именно с работой).

Сжатие и расширение газа можно произвести так, чтобы его температура оставалась постоянной. Такой процесс называется изотермическим. Его можно осуществить, поместив газ в сосуд, снабжённый поршнем, причём температура сосуда поддерживается постоянной. Для этого его помещают в термостат – аппарат, снабжённый каким-нибудь источником энергии (электрической печью, горелкой и т.д.). При хорошем контакте газа со средой термостата можно добиться того, чтобы при выделении энергии газом количество тепла, подводимого от источника, уменьшалось, а при поглощении газом энергии оно увеличивалось и тем самым обеспечивалось постоянство температуры. Специальное устройство – терморегулятор – автоматически поддерживает температуру в термостате постоянной.

Если в этих условиях перемещать с помощью внешней силы поршень вниз (см. рисунок 48), газ будет сжиматься, а внешняя сила – совершать работу. Наоборот, при расширении положительная работа совершается силой, с которой газ давит на поршень.

Изменение объёма можно также произвести в условиях, когда к газу не подводится и от него не отводится теплота. Такой процесс называется адиабатным. В отличие от изотермического процесса, требующего хорошего контакта со средой термостата, адиабатный процесс, напротив, требует тщательной тепловой изоляции газа от окружающей среды.

§ 2.32 Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах

Работа при изотермическом изменении объёма газа. Чтобы определить работу при изотермическом изменении объёма газа, необходимо, согласно уравнению (27.4), вычислить интеграл

$$\int dA = \int PdV$$

вдоль изотермы. Мы не можем вынести P за знак интеграла, так как давление во время расширения газа непрерывно изменяется. А изменяется оно с изменением объёма по закону Бойля-Мариотта, т.е.

$$PV = RT = const, \quad \text{откуда} \quad P = \frac{RT}{V}.$$

Подставив это выражение для P под знак интеграла, получим для работы A_{12} при изменении объёма от V_1 до V_2:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} RT\frac{dV}{V} = RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = RT\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (32.1)$$

Это и есть выражение для работы изотермического расширения (или сжатия) 1 моля идеального газа. Если масса газа не равна 1 молю, то формула (32.1) принимает вид:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu}RT\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad (32.2)$$

где M/μ – число молей (количество вещества).

Из формул (32.1) и (32.2) видно, что работа изотермического расширения зависит не от разности объёмов, между которыми происходит расширение, а от их отношения. То же относится, конечно, и к сжатию.

Так как по закону Бойля-Мариотта $P_1V_1 = P_2V_2$ (зависимость давления от объёма – гипербола), то

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Поэтому в формулах (32.1) и (32.2) вместо отношения объёмов можно подставить обратное отношение давлений. Тогда

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} RT \cdot \ln\frac{P_1}{P_2}. \qquad (32.3)$$

Как уже указывалось, при изотермическом расширении подводимая к газу теплота тратится только на совершение внешней работы. Наоборот, при изотермическом сжатии работа внешних сил идёт на увеличение внутренней энергии (нагревание) окружающих тел. Формально это соответствует тому, что теплоёмкость газа $\frac{dQ}{dT}$ равна ∞ (так как $dT = 0$).

Адиабатный процесс. При адиабатном процессе газ не отдаёт окружающим телам теплоту, так же как и не получает её извне ($dQ = 0$). Закон сохранения энергии (28.4) принимает в этом случае вид:

$$-PdV = C_V dT. \qquad (32.4)$$

Это значит, что работа, связанная с изменением объёма газа, должна сопровождаться изменением внутренней энергии, а значит, и температуры. Знак минус в выражении (32.4) означает, что увеличение объёма газа (расширение) сопровождается понижением его температуры, а сжатие – повышением температуры. В первом случае работа совершается газом за счёт убыли его собственной внутренней энергии, поэтому его температура понижается. Во втором случае работа совершается внешней силой и за счёт этой работы растёт внутренняя энергия, а значит, и температура газа.

Уравнение Пуассона. Прежде чем вычислить работу при адиабатном изменении объёма газа, необходимо найти соотношение между объёмом газа и его давлением, так как при адиабатном процессе оно уже не будет определяться законом Бойля-Мариотта. Для этого следует из уравнения

$$C_V dT + PdV = 0 \qquad (32.5)$$

исключить T. Это можно сделать, воспользовавшись уравнением состояния

$$PV = RT,$$

дифференцирование которого даёт:

$$PdV + VdP = RdT, \qquad \text{откуда} \qquad dT = \frac{PdV + VdP}{R}.$$

Подставив это значение dT в (32.5), получаем:

$$C_V \frac{PdV + VdP}{R} + PdV = 0,$$

или после замены R равным ему значением $C_P - C_V = R$ имеем:

$$C_V VdP + C_P PdV = 0.$$

Обозначим отношение $C_P/C_V = \gamma$, тогда последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \qquad (32.6)$$

В предположении, что γ постоянно, можно написать:

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \int \frac{dV}{V} = 0.$$

После интегрирования получаем: $\ln P + \gamma \ln V = const$, или

$$PV^{\gamma} = const. \qquad (32.7)$$

Это и есть искомое соотношение между давлением и объёмом идеального газа при адиабатном процессе изменения объёма. Уравнение (32.7) называется уравнением Пуассона или уравнением адиабаты, а величина $\gamma = C_P/C_V$ – показателем адиабаты.

При интегрировании уравнения (32.6) мы приняли величину γ постоянной. Строго говоря, это не совсем точно. Теплоёмкость C_V, а следовательно, C_P и γ могут меняться с изменением объёма, давления и температуры. Поэтому уравнение (32.7) строго справедливо для ограниченного интервала значений давлений и объёмов. Дифференциальное же уравнение (32.6) является точным.

Из уравнения Пуассона видно, что, в отличие от изотермического процесса, при адиабатном изменении объёма газа его давление меняется обратно пропорционально не первой степени объёма, а V^{γ}, причём $\gamma > 1$, так как $C_P > C_V$. Понятно, что график зависимости давления от объёма теперь уже не будет гиперболой.

Так как $\gamma > 1$, то кривая P-V при адиабатном процессе, называемая адиабатой, круче изотермы, как это видно из рисунка 52, на котором изображена адиабата и, для сравнения, изотерма идеального газа. Более крутое падение давления с увеличением объёма при адиабатном процессе объясняется тем, что при адиабатном расширении идеального газа его давление уменьшается не только за счёт увеличения объёма, но и вследствие происходящего при этом понижения температуры газа.

Нетрудно найти соотношения между другими параметрами газа при адиабатном процессе.

Так, например, исключив из уравнения (32.7) и уравнения состояния PV = RT давление P, получим соотношение между температурой и объёмом газа при его адиабатном изменении. Подставив в уравнение (32.7) значение P = RT/V, получаем:

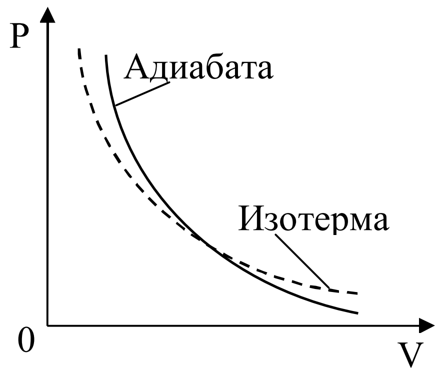


Рисунок 52

$$\frac{RT}{V}V^{\gamma} = \text{const},$$

или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \qquad (32.8)$$

(поскольку R – постоянная).

Точно так же, подставив в уравнение (32.7) значение V из уравнения состояния, V = RT/P, получим соотношение между давлением и температурой при адиабатном процессе:

$$P\left(\frac{RT}{P}\right)^{\gamma} = \text{const}$$

или

$$T^{\gamma}P^{1-\gamma} = \text{const}. \qquad (32.9)$$

Возведя обе части равенства (32.9) в степень 1/γ, получаем:

$$T\,P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}. \qquad (32.10)$$

Так как $\gamma > 1$, то из (32.8) следует, что при адиабатном сжатии газ нагревается, а при адиабатном расширении – охлаждается. На этом основано явление пневматического огнива. Это явление находит применение в дизелях, где воспламенение горючей смеси осуществляется путём адиабатного сжатия. Нагревание газа при адиабатном сжатии объясняется тем, что во время сжатия над газом производится работа, которая идёт на увеличение его внутренней энергии. А так как внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, то это увеличение внутренней энергии проявляется в повышении его температуры. Аналогично объясняется и охлаждение газа при адиабатном расширении.

Работа при адиабатном изменении объёма газа. Пользуясь полученным уравнением адиабаты, мы теперь можем вычислить работу, совершаемую газом при его адиабатном расширении (или работу, производимую внешними силами при сжатии газа).

Вычислим работу расширения 1 моля газа от некоторого начального значения объёма V_1 до V_2. По-прежнему элементарная работа при изменении объёма на dV равна

$$dA = PdV.$$

Связь между давлением газа P и его объёмом V определяется уравнением адиабаты (чтобы быть равновесным, процесс расширения должен вестись вдоль адиабаты):

$$PV^{\gamma} = \text{const},$$

которое мы можем написать и в таком виде:

$$PV^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma},$$

где P_1 – начальное давление газа;

V_1 – начальный его объём.

Отсюда

$$P = \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}}.$$

Подставив это значение P в формулу для работы, получим:

$$dA = \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} dV.$$

Чтобы получить работу расширения от V_1 до V_2 надо проинтегрировать выражение для dA в этих пределах:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P_1 V_1^{\gamma} \frac{dV}{V^{\gamma}} = P_1 V_1^{\gamma} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}}.$$

После интегрирования получаем для интеграла в правой части равенства выражение:

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right).$$

Поэтому выражение для работы A_{12} принимает вид:

$$A_{12} = \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Из уравнения состояния следует, что $P_1 = RT_1/V_1$, откуда получаем окончательное выражение:

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (32.11)$$

Если масса газа M, эта формула принимает вид:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (32.12)$$

Так как $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$, то $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$. Поэтому формулу для работы при адиабатном изменении объёма 1 моля газа можно представить в виде:

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\frac{T_2}{T_1}\right] = \frac{R}{\gamma-1}(T_1-T_2) = C_V(T_1-T_2), \qquad (32.13)$$

так как $\frac{R}{\gamma-1} = C_V$.

При адиабатном расширении совершается меньшая работа, чем при изотермическом (при одном и том же изменении объёма). Это связано с большей крутизной адиабаты по сравнению с изотермой, так как из-за этого при одинаковых начальных условиях в любой стадии процесса расширения давление при адиабатном процессе будет меньше, чем при изотермическом.

Работа при адиабатном расширении газа существенно зависит от значения показателя адиабаты $\gamma = C_P/C_V$. Легко видеть, что если $\gamma\to1$, работа адиабатного расширения стремится к значению работы при изотермическом процессе. У многоатомных газов, для которых γ ближе всего к единице, разница в значениях работ изотермического и адиабатного процессов наименьшая.

Работа при изобарном изменении объёма газа. Диаграмма этого процесса (изобара) на графике P-V изображается прямой, параллельной оси V. При изобарном процессе работа газа (см. рисунок 53) при увеличении объёма от V_1 до V_2 равна

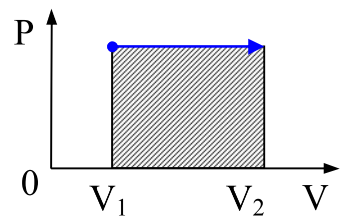


Рисунок 53

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P\int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1) \qquad (32.14)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника. Если использовать уравнение состояния для выбранных нами двух состояний, то

$$PV_1 = \frac{M}{\mu}RT_1, \qquad PV_2 = \frac{M}{\mu}RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{M}{\mu}\frac{R}{P}(T_2 - T_1).$$

Тогда выражение (32.14) для изобарного расширения примет вид:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu}R(T_2 - T_1). \qquad (32.15)$$

Измерение отношения C_P/C_V. Как выше было показано, отношение теплоёмкостей газов $\gamma = C_P/C_V$ играет важную роль в теории идеальных газов, так как оно зависит от числа степеней свободы i молекул. Кроме того, эта величина входит в уравнение адиабаты. Роль этой величины заключается ещё и в том, что, зная её, можно не прибегать к измерениям C_V, которые всегда трудны. Значение C_V можно получить из измеренных значений C_P и γ. Часто именно так и поступают.

Существует несколько способов измерения C_P/C_V. Наиболее удобным и точным из них следует считать метод, основанный на измерении скорости звука. Дело в том, что скорость звука $v_{зв}$ в газе определяется формулой:

$$v_{зв} = \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}},$$

где P – давление газа;

ρ – его плотность.

Если P и ρ известны, то, измерив скорость звука, мы получаем и значение величины $\gamma = C_P/C_V$. Метод этот удобен тем, что, используя его, нет надобности измерять ни количество теплоты, ни температуру.

§ 2.33 Реальные газы. Молекулярные силы и отклонения свойств газов от идеальности

Законы идеальных газов являются приближёнными законами. Отклонения от них носят как количественный, так и качественный характер. Количественные отклонения проявляются в том, что уравнение Клапейрона-Менделеева $PV = RT$ соблюдается для реальных газов только приближённо. Качественные отклонения носят более глубокий характер. Реальные газы могут быть переведены в жидкое и твёрдое состояния. Это было бы невозможно, если бы газы строго следовали уравнению Клапейрона-Менделеева.

Отклонения от законов идеальных газов связаны с тем, что между молекулами газа действуют силы, которые в теории идеальных газов во внимание не принимаются. Эти силы могут приводить к образованию химических соединений. Тогда они называются химическими, или валентными, силами. Будем рассматривать такие газы, в которых химические реакции не происходят, и химические силы в дальнейшем не будем учитывать. Если газ ионизован, то появляются силы кулоновского притяжения и отталкивания между ионами, имеющимися в газе. Такими силами определяется поведение плазмы, т.е. квазинейтрального ионизованного газа (квазинейтральным называется такой газ, в котором с большой точностью заряды положительных ионов компенсируются зарядами отрицательных ионов). Физика плазмы представляет обширный раздел физики, имеющий широкие применения в астрофизике, теории распространения радиоволн, в проблеме управляемых термоядерных реакций и пр. Однако в этом разделе свойства плазмы не будем рассматривать. Рассмотрим только газы, состоящие из электрически нейтральных молекул или атомов. Химические силы по своей природе не отличаются от молекулярных сил. И те и другие сводятся к силам электрического взаимодействия между элементарными зарядами, из которых построены атомы и молекулы. Однако полное понимание природы молекулярных и химических сил стало возможным только после возникновения квантовой механики. Не останавливаясь детально на квантовой теории, ограничимся некоторыми заечаниями о природе молекулярных сил.

На расстояниях, превышающих размеры молекул, между ними преобладают силами притяжения. Эти силы называют силами Ван-дер-Ваальса (1837-1923) по имени голландского учёного, заложившего основы молекулярной теории реальных газов. На близких расстояниях, когда электронные оболочки взаимодействующих частиц перекрываются, между молекулами возникают силы отталкивания. Силы отталкивания велики, когда расстояние между взаимодействующими частицами мало. Но они очень быстро убывают с увеличением расстояния.

Взаимодействие молекул удобно характеризовать потенциальной энергией взаимодействия U(x), как функцией расстояния x между центрами сблизившихся молекул. Сами молекулы для простоты можно считать сферическими. Функция U(x) должна иметь вид кривой, представленной на рисунке 54 жирной кривой. Она имеет минимум, в котором силы притяжения уравновешиваются силами отталкивания.

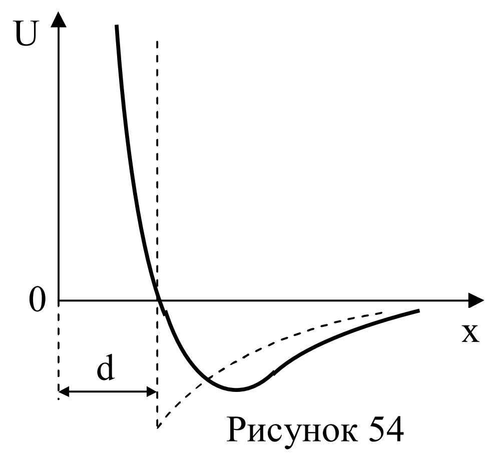


Рисунок 54

Во многих вопросах теории газов к хорошим результатам приводит следующая аппроксимация функции U(x):

$$U(x) = \frac{a_1}{x^{12}} - \frac{a_2}{x^6}, \tag{33.1}$$

где a_1 и a_2 – постоянные.

Она называется потенциалом Леннарда-Джонса. Первое слагаемое соответствует силам отталкивания, второе – силам притяжения Ван-дер-Ваальса.

В теории уравнения состояния Ван-дер-Ваальса применяется ещё более грубая аппроксимация. Так как кривая U(x) слева круто поднимается вверх, то этот участок кривой заменяется вертикальной прямой, как это изображено на рисунке 54 штриховой линией. Если d – расстояние от этой прямой до начала координат, то центры взаимодействующих частиц не могут сблизиться на расстояние, меньшее d. Рассматриваемая аппроксимация соответствует поэтому модели твёрдых упругих шаров, между которыми действуют силы притяжения. Этой моделью мы и будем пользоваться в дальнейшем. Силы отталкивания учитываются тем, что размеры шаров считаются конечными. Эти силы проявляются только в моменты столкновений. Расстояние d играет роль диаметра молекулы.

Уравнение Клапейрона-Менделеева оказывается справедливым только при достаточно малых давлениях и высоких температурах и выполняется тем точнее, чем меньше давление газа. При повышении давления наблюдаются отклонения от газовых законов Бойля-Мариотта и Гей-Люссака, являющихся прямыми следствиями уравнения состояния Клапейрона-Менделеева. В таблице 1 приведены экспериментальные значения произведения PV для азота, занимающего при нормальных условиях объём, равный одному литру. Указанные значения даны для различных давлений и одной и той же температуре 0 ^{0}С.

Таблица 1

P, атм	PV, атм·л	P, атм	PV, атм·л
1	1,000	700	1,661
100	1,071	900	1,951
300	1,138	1 000	2,058
500	1,437		

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева PV = RT произведение PV при неизменной температуре T должно оставаться постоянным. В действительности, как видно из таблицы, что уже при давлении в 100 атм значение PV отличается от теоретического (1,000) более чем на 7 %. При больших давлениях значение PV непрерывно растёт с увеличением давления, всё более отклоняясь от значения, требуемого уравнением Клапейрона-Менделеева. Эти отклонения обусловлены и взаимодействием между молекулами.

При высоком давлении реальный газ сжимается внешними силами значительно меньше, чем этого можно было ожидать на основании уравнения состояния идеального газа. Коэффициент сжимаемости газа уменьшается с увеличением давления быстрее, чем обратно пропорционально давлению, как должно быть для идеального газа, для которого

$$\chi = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{P}.$$

При низком давлении соотношение между объёмом V и давлением P газа при постоянной температуре сложнее. Оказывается, что при сравнительно малых давлениях кривая, выражающая зависимость произведения PV от давления P при заданной температуре (изотерма), имеет минимум. Таким образом, при малых давлениях величина PV падает с увеличением давления (сжимаемость больше, чем для идеального газа), при некотором давлении достигает минимума, после чего снова начинает возрастать (сжимаемость меньше, чем у идеального газа).

Давление, при котором величина PV проходит через минимум, зависит от температуры.

Существует температура, характерная для каждого газа (температура Бойля), при которой произведение PV в некотором интервале давлений не зависит от давления, т.е. при этой температуре газ подчиняется закону Бойля-Мариотта.

Таким образом, экспериментально доказано, что реальные газы значительно отличаются по своим свойствам от идеальных газов. В этом нет ничего удивительного, если вспомнить те допущения, которые были сделаны при выводе уравнения состояния идеального газа. В самом деле, идеальный газ определён как газ, состоящий из не взаимодействующих между собой молекул, при этом молекулы считаются материальными точками, т.е. не учитывается их объём.

Отсутствие взаимодействия между молекулами означает, что на молекулы в промежутках между столкновениями не действуют никакие силы, и они движутся свободно. Между тем при столкновениях молекул между собой они изменяют свою скорость, что невозможно без действия силы. Следовательно, межмолекулярные силы существуют, но они становятся заметными только при малых расстояниях между молекулами.

Наличие объёма у молекул подтверждено экспериментально. Размеры молекул составляют порядка 10^{-10} м.

Таким образом, оба допущения, положенные в основу теории идеального газа, являются приближёнными. При атмосферном давлении среднее расстояние между молекулами в 10 раз превосходит их собственные размеры, а их общий объём в 2 000 раз меньше объёма, занимаемого газом. При этих условиях (а тем более при ещё меньших давлениях) можно пренебречь как объёмом молекул, так и силами взаимодействия между ними. Но уже при давлении в 100 атм молекулы газа в среднем удалены друг от друга на расстояние, которое только вдвое больше их собственных размеров, а собственный объём молекул лишь в 20 раз меньше объёма газа. В этих условиях объёмом молекул нельзя пренебречь, а силы взаимодействия уже сказываются не только в моменты столкновений.

§ 2.34 Уравнение Ван-дер-Ваальса

Экспериментально показано, что в широком диапазоне давлений PV не является постоянным при T = const, как это следует из уравнения состояния идеального газа. Произведение PV изменяется с давлением так, как будто бы при малых давлениях газ сжимается более охотно, чем идеальный, а при больших давлениях он сопротивляется сильнее, чем идеальный. Другими словами, при малых плотностях газа в нём действуют вспомогательные силы притяжения, а при больших плотностях – силы отталкивания. Эти результаты экспериментальных исследований подтверждают общий характер потенциальной кривой межмолекулярного взаимодействия (см. рисунок 54).

Сжимаемость. Сжимаемостью æ называется коэффициент пропорциональности между относительным изменением объёма $\Delta V/V$ и изменением давления ΔP:

$$\Delta V/V = -æ\Delta P,$$

откуда

$$æ = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T. \tag{34.1}$$

Для идеального газа $(\partial V/\partial P)_T = -V/P$ и, следовательно, $æ = 1/P$. Эксперимент показывает, что при малом давлении сжимаемость реального газа больше, чем идеального, а при большом – меньше.

У жидкостей сжимаемость очень мала, поскольку в ней молекулы упакованы достаточно плотно. Поэтому требуются очень большие давления, чтобы незначительно изменить объём жидкости. Например, сжимаемость воды $0{,}47\cdot10^{-9}$ Па$^{-1}$; бензина $0{,}82\cdot10^{-9}$ Па$^{-1}$; глицерина $0{,}22\cdot10^{-9}$ Па$^{-1}$; ацетона $1{,}27\cdot10^{-9}$ Па$^{-1}$, т.е. сжимаемость жидкостей в тысячи раз меньше, чем газов.

Уравнение состояния зависит от характера взаимодействия между молекулами. Поэтому, строго говоря, каждый сорт молекул имеет своё уравнение состояния. Никакого универсального уравнения состояния для газов с межмолекулярным взаимодействием и для жидкостей не существует.

При изучении конкретных веществ было использовано очень большое число различных приближённых уравнений состояния. Наиболее широкую известность среди приближённых уравнений состояния получило уравнение Ван-дер-Ваальса. Оно в наиболее простой и компактной форме учитывает основные физические характеристики газа (конечные размеры молекул и силы взаимодействия между ними) и представляет их учёт в очень наглядной форме.

Уравнение Ван-дер-Ваальса очень удачно, просто и наглядно учитывает основные особенности вещества в жидком и газообразном состояниях. Поэтому оно сыграло в течение нескольких десятилетий после своего появления (1873) очень большую роль в работах по сжижению газов, причём не только потому, что позволило оценить значение температур и давлений, при которых сжижение возможно, но главное потому, что создало твёрдую уверенность в возможности сжижения вообще.

Учёт сил отталкивания между молекулами. В уравнении состояния идеального газа

$$PV = RT, \tag{34.2}$$

под V подразумевается объём сосуда, в котором заключён газ. В теории идеального газа считается, что весь этот объём доступен для каждой движущейся в нём молекулы. В реальном же газе не весь объём сосуда находится в распоряжении молекул, так как каждая молекула занимает определённую часть объёма сосуда, и эта часть недоступна для всех остальных частиц.

Обозначим суммарный объём всех молекул газа через b. Тогда для движения молекул будет доступным объём (V – b), а уравнение (34.2) примет вид:

$$P(V - b) = RT, \tag{34.3}$$

Введённая таким образом поправка b представляет собой тот предельный объём, который занял бы газ при бесконечно большом давлении. Действительно, переписав (34.3) в виде:

$$P = \frac{RT}{V - b}, \tag{34.4}$$

находим, что при $P \to \infty$ объём $V = b$.

Введением в уравнение состояния постоянной b учтено то обстоятельство, что молекулы газа не могут сблизиться друг с другом до расстояния, равного нулю (даже при бесконечно большом давлении). Фактически здесь принимается во внимание существование сил отталкивания между молекулами, которые и мешают молекулам приближаться друг к другу на расстояние, меньше некоторого минимального. Оно, это минимальное расстояние, и определяет то, что называется размером молекулы. Значит, учёт размеров молекул фактически означает учёт сил отталкивания между молекулами газа, а постоянная b, введённая в уравнение состояния, может рассматриваться как характеристика этих сил.

Если сделать определённые предположения о структуре молекул и о характере действующих между ними сил, то можно вычислить значение постоянной b, т.е. величину той части объёма сосуда, которая оказывается недоступной для молекул. Проще всего это сделать на модели твёрдых шаров.

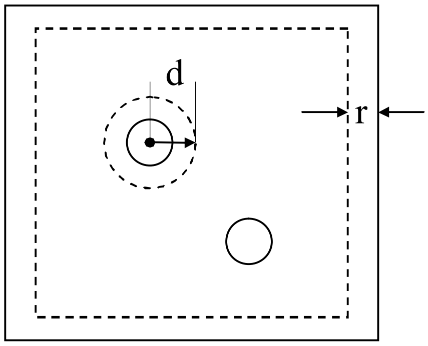


Рисунок 55

Представим себе сосуд в форме куба, объём которого V равен объёму, занимаемому при данных давлении и температуре одним молем газа (рисунок 55). Сторона куба равна, очевидно, $\sqrt[3]{V}$. Пусть диаметр молекулы равен d, а радиус r = d/2.

Допустим, что сначала в нашем сосуде содержится всего одна молекула. Для ее движения (точнее – для движения ее центра) доступен весь объём сосуда, за вычетом слоя толщиной r, прилегающего к стенкам, так как центр молекулы не может приблизиться к стенке на расстояние, меньшее, чем r (на рисунке 55 этот слой отделён пунктирной линией). Это значит, что наша молекула может двигаться в объёме куба со стороной на d меньшей, чем сторона действительного куба – сосуда. Объём этот равен:

$$\left(\sqrt[3]{V}-d\right)^3.$$

Введём теперь в сосуд вторую молекулу (именно этот момент и изображён на рисунке 55). Центр любой из имеющихся теперь в сосуде двух молекул для своего движения имеет в своём распоряжении тот же объём, что и раньше, но за вычетом дополнительного объёма, ставшего теперь недоступным из-за присутствия второй молекулы. На рисунке 55 пунктиром показан объём, окружающий каждую молекулу, в пределы которого не может попасть центр ее партнёра. Этот объём равен

$\frac{4}{3}\pi d^3$. Следовательно, для любой из двух молекул оказывается доступным объём, равный

$$\left(\sqrt[3]{V} - d\right)^3 - \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Если в сосуде окажутся все N_A молекул (N_A – число Авогадро), составляющих один моль, каждая из них будет иметь возможность двигаться в объёме

$$\left(\sqrt[3]{V} - d\right)^3 - N_A \cdot \frac{4}{3}\pi d^3. \qquad (34.5)$$

При этом расчёте мы, однако, не учли того обстоятельства, что в каждом акте сближения (столкновения) участвуют две молекулы. Для каждой из них существенна не вся запретная сфера, окружающая вторую участницу сближения, а только та ее половина (полусфера), которая обращена к ней. Если применить это соображение к любой паре из всех N_A молекул, то в выражение (34.5) мы должны будем вместо N_A написать $N_A/2$. Тогда свободным для движения любой молекулы окажется такой объём:

$$V' = \left(\sqrt[3]{V} - d\right)^3 - \frac{N_A}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Если, как это всегда, конечно, бывает, $d \ll \sqrt[3]{V}$ (здесь $\sqrt[3]{V}$ – сторона сосуда, d – диаметр молекулы), то, пренебрегая d по сравнению с $\sqrt[3]{V}$, получим:

$$V' = V - N_A \cdot \frac{2}{3}\pi d^3 = V - N_A \cdot \frac{16}{3}\pi r^3.$$

Это и есть та величина V – b, которую мы поставили вместо V в уравнение состояния (34.3). Следовательно,

$$b = \frac{16}{3}\pi r^3 N_A.$$

Значит, в модели твёрдых шаров поправка на объём молекул равна не объёму самих молекул, а учетверённому значению этой величины.

Учёт сил притяжения между молекулами. Кроме сил отталкивания, которые учитываются введением поправки b, существуют и силы притяжения между молекулами. Эти силы приводят к тому, что давление, оказываемое молекулами газа на любую площадку, например на стенки сосуда, будет при прочих равных условиях меньше, чем в случае идеального газа.

Действительно, любая молекула, находящаяся вблизи стенки сосуда, где она с одной стороны имеет больше «соседей», чем с другой, испытывает действие результирующей силы со стороны остальных молекул, и сила эта направлена внутрь газа. Благодаря этому давление на стенку сосуда станет меньше на некоторую величину ΔP, так что вместо выражения (34.4) мы получим для давления формулу:

$$P = \frac{RT}{V - b} - \Delta P, \qquad \text{или} \quad P + \Delta P = \frac{RT}{V - b}.$$

Силы притяжения между молекулами стремятся сблизить их между собой. Но точно таким же образом действует и внешнее давление P.

Нетрудно установить, от чего должно зависеть это добавочное давление.

Давление, которое испытывает пристенный слой со стороны молекул газа, равно силе, действующей на все молекулы на единице площади поверхности слоя. Очевидно, что эта сила пропорциональна плотности молекул n. С другой стороны, число молекул в пристенном слое, испытывающих силу притяжения, также пропорционально n. Следовательно, $\Delta P \sim n^2$. Так как n обратно пропорционально объёму, занимаемому газом, то $\Delta P = a/V^2$, где V – объём газа, a – коэффициент пропорциональности, численное значение которого зависит от характера сил притяжения между молекулами. В настоящее время нет способа вычисления этого коэффициента.

Таким образом, выражение для давления газа с учётом сил притяжения между молекулами можно теперь написать в виде:

$$P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b},$$

отсюда

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \tag{34.6}$$

Это уравнение, связывающее давление, объём и температуру газа, является уравнением состояния реального газа. В нём учтены как силы притяжения (поправочный член a/V^2), так и силы отталкивания (поправка b) между молекулами. Оно называется уравнением Ван-дер-Ваальса. Это уравнение довольно хорошо объясняет основные опытные факты, касающиеся реальных газов.

Уравнение (34.6) относится к одному молю газа. Для произвольного количества газа оно принимает вид:

$$\left(P + \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{M}{\mu}b\right) = \frac{M}{\mu}RT, \tag{34.7}$$

где M – масса газа;

μ – его молярная масса;

V – объём, занимаемый газом.

Коэффициент a в выражении для поправки к давлению и поправку b называют постоянными Ван-дер-Ваальса, численные значения которых различны для различных газов, так что уравнение (34.6) не является универсальным в такой мере, как уравнение Клапейрона-Менделеева.

Постоянная b измеряется, очевидно, в единицах объёма, т.е. в $м^3$. Размерность же константы a определяется тем, что величина a/V^2 должна иметь размерность давления. Поэтому a измеряется в единицах $(Н \cdot м^{-2}) \cdot (м^6)$, т.е. в $Н \cdot м^4$.

§ 2.35 Изотермы газа Ван-дер-Ваальса

Наиболее содержательные результаты получаются из уравнения Ван-дер-Ваальса путём анализа изотерм. Для исследования изотерм при любых значениях температуры T умножим уравнение (34.6) на V^2. После раскрытия скобок уравнение изотермы примет вид:

$$PV^3 - (bP + RT)V^2 + aV - ab = 0.$$

Разделив обе части этого равенства на P, получим:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0. \qquad (35.1)$$

Это уравнение третьей степени относительно объёма V и оно имеет три корня. Это значит, что при данных значениях температуры и давления могут быть три значения молярного объёма или три значения плотности газа.

Чтобы выяснить смысл корней уравнения Ван-дер-Ваальса, проще всего рассмотреть изотермы уравнения (34.6), т.е. зависимость давления P от объёма V при постоянной температуре, и сравнить их с изотермами, полученными опытным путём.

В отличие от изотермы идеального газа, представляющей собой гиперболу, изотерма, соответствующая уравнению (34.6), которую назовём изотермой Ван-дер-Ваальса, имеет вид, представленный на рисунке 56. Эта кривая, являющаяся графическим изображением уравнения третьей степени, имеет максимум и минимум, так что данному значению давления, например P_1, соответствуют три значения молярного объёма V_1, V_2, V_3. Естественно считать, что минимальному из этих трёх значений объёма (максимальной плотности) соответствует жидкое состояние, а максимальному – газообразное. Остаётся выяснить смысл третьего состояния с объёмом V_2.

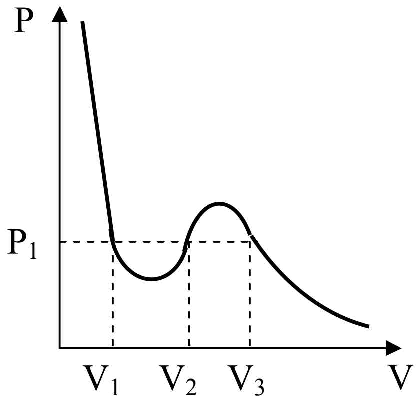


Рисунок 56

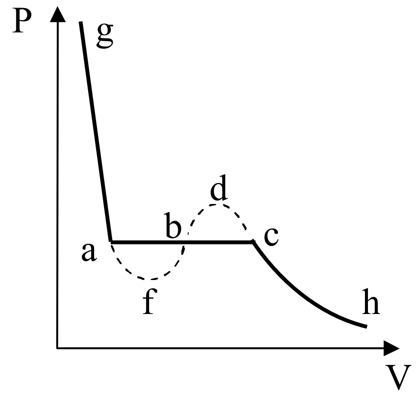


Рисунок 57

Между изотермой Ван-дер-Ваальса и опытной изотермой имеется существенное различие, как это видно из рисунка 57, на котором в произвольном масштабе изображены: сплошной линией – характерный вид опытной изотермы, пунктиром – изотерма Ван-дер-Ваальса. Сразу видно, что вместо прямолинейного горизонтального участка abc изотерма Ван-дер-Ваальса имеет в этой области характерный завиток с максимумом и минимумом.

Это важное различие легко объясняется при анализе изотермы.

Прежде всего, отметим, что участки hc и ag изотермы Ван-дер-Ваальса совпадают (по крайней мере, качественно) с соответствующими участками опытной изотермы. Напомним, что участок hc соответствует газообразному состоянию, а участок ag – жидкости. Следовательно, из уравнения Ван-дер-Ваальса непосредственно следует существование двух фаз вещества.

Легко видеть, что состояния, отвечающие точкам на участке fbd, не могут существовать, так как этому участку соответствует необычная зависимость объёма от давления: с увеличением давления объём не уменьшается, а растёт. В природе не существуют такие вещества, которые при росте давления увеличивали бы свой объём, т.е. уменьшали бы свою плотность. Состояние вещества с такими странными свойствами неизбежно должно быть крайне неустойчивым.

Что касается состояний, соответствующих участкам изотермы cd и af, то, такие состояния могут быть осуществлены, но только при особых условиях.

Вещество, состояния которого соответствуют точкам участка кривой cd (см. рисунок 57), находится в газообразном состоянии. Но давление газа (пара) в любом из этих состояний выше упругости насыщенного пара при той же температуре. Это состояние реализуется, когда пар находится в пересыщенном состоянии, т.е. когда количество его больше, чем необходимо для того, чтобы он был насыщенным. Такой пар поэтому и называется пересыщенным или переохлаждённым.

Что касается состояний вещества, характеризуемых точками участка af изотермы Ван-дер-Ваальса, то эти состояния практически ещё труднее реализовать, опять-таки вследствие их малой устойчивости.

Точки на этом участке отвечают жидкому состоянию – участок af является продолжением ветви ag. Часто это состояние вещества называют перегретой жидкостью. Название это нельзя считать удачным, так как перегретой жидкостью принято называть жидкость в открытом сосуде, нагретую выше температуры кипения, но не кипящую. Но при этом жидкость свободно испаряется, т.е. меняется ее масса. Нас же здесь интересует поведение определённой массы (например, одного моля) жидкости или пара, находящейся в закрытом сосуде, когда о кипении говорить нельзя.

Состояния, соответствующие участкам cd и af, в отличие от нестабильных состояний участка fbd, называются метастабильными.

Таким образом, различие между изотермой Ван-дер-Ваальса и опытной изотермой находит своё объяснение: состояния, отвечающие корню V_2 уравнения состояния, не наблюдаются на опыте из-за их нестабильности или метастабильности. При данной температуре (для данной изотермы) только при одном определённом значении давления, а именно, при давлении насыщенного пара, этому корню соответствует устойчивое состояние – состояние пара, находящегося в равновесии с жидкостью, т.е. двухфазное состояние.

Из уравнения состояния Ван-дер-Ваальса нельзя определить положение горизонтального участка опытной кривой относительно максимума и минимума кривой Ван-дер-Ваальса. Это значит, что нельзя определить величину равновесного давления насыщенного пара при данной температуре. Это, однако, можно сделать из общих термодинамических соображений. Как было показано Максвеллом, если представить себе переход из состояния A в состояние B (рисунок 58), то независимо от того, будет ли он совершён по однофазной кривой ACdB или по двухфазной прямой AB, он должен сопровождаться одной и той же работой. Так как работа на диаграмме в координатах PV равна площади под соответствующими участками диаграммы, то площадь под кривой ACdB должна быть равна площади под прямой AB. Отсюда очевидно, что прямая AB расположена так, чтобы площади заштрихованных косыми линиями областей были бы равны друг другу (см. рисунок 58).

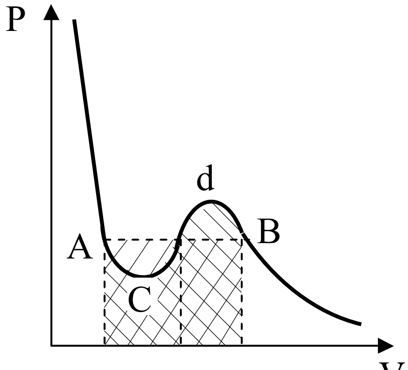


Рисунок 58

Значение уравнения Ван-дер-Ваальса не ограничивается тем, что оно описывает факт существования двух фаз вещества – жидкой и газообразной, в которых может находиться вещество. Как мы сейчас увидим, из уравнения Ван-дер-Ваальса непосредственно следует и такой важный факт, как существование критической температуры и критического состояния.

§ 2.36 Критическая температура и критическое состояние

В предыдущем параграфе мы рассмотрели изотерму Ван-дер-Ваальса при некоторой произвольной температуре. Посмотрим теперь, как изменяются эти изотермы с изменением температуры.

Общий характер изменения изотерм Ван-дер-Ваальса с температурой показан на рисунке 59, на котором представлен ряд изотерм.

Каждому корню уравнения (35.1) на плоскости (P,V) соответствует точка, в которой изобара P = const пересекает изотерму. Когда корень один, точка пересечения будет одна. Так будет при любых давлениях, если температура достаточно высока. Изотерма имеет вид монотонно опускающейся кривой AB (рисунок 59). При более низких температурах и надлежащих значениях давления P уравнение (35.1) имеет три корня V_1, V_2, V_3. В таких случаях изобара P = const пересекает изотерму в трёх точках a, b, c (рисунок 59). Изотерма содержит волнообразный участок afbdc. Она сначала монотонно опускается вниз (участок Gf), затем на участке fd монотонно поднимается вверх, а за точкой d снова монотонно опускается. При некоторой промежуточной температуре $T_к$ все три значения объёма сливаются (корни уравнения V_1, V_2, V_3 становятся кратными). При этой температуре исчезает различие между различными состояниями вещества. Такая температура и соответствующая ей изотерма называются критическими. Критическая изотерма LKM всюду монотонно опускается вниз, за исключением одной точки K, являющейся точкой перегиба изотермы. В ней касательная к изотерме горизонтальна. Точка K называется критической точкой. Соответствующие ей давление $P_к$, объём $V_к$ и температура $T_к$ называются также критическими. Говорят, что вещество находится в критическом состоянии, если его объём и давление (а, следовательно, и температура) равны критическим.

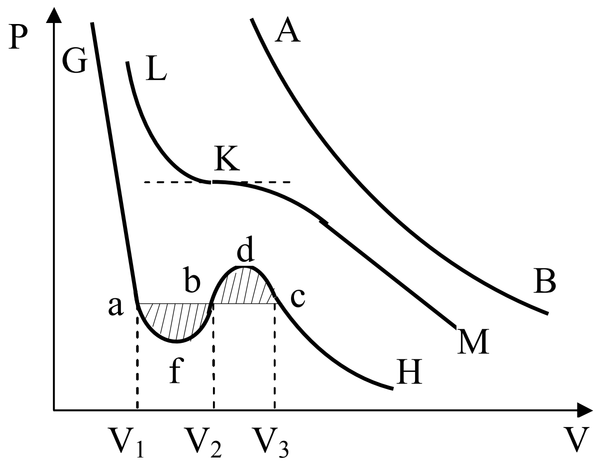


Рисунок 59

Вычислим значение критической температуры $T_к$ и соответствующие ей значения двух других критических параметров – критического объёма $V_к$ и критического давления $P_к$.

Действительно, левая часть уравнения Ван-дер-Ваальса (35.1) при значениях $T = T_к$ и $P = P_к$, т.е. выражение

$$V^3 - \left(b + \frac{RT_к}{P_к}\right)V^2 + \frac{a}{P_к}V - \frac{ab}{P_к},$$

должно быть точным кубом (поскольку в критической точке все три корня совпадают и равны $V_к$), т.е. оно должно приводиться к виду

$$(V - V_к)^3 = 0.$$

Возводя в куб, приравняем оба выражения:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT_к}{P_к}\right)V^2 + \frac{a}{P_к}V - \frac{ab}{P_к} = V^3 - 3V_кV^2 + 3V_к^2V - V_к^3. \tag{36.1}$$

Это равенство тождественно выполняется, если коэффициенты при одинаковых степенях V в обеих его частях равны между собой:

$$b + \frac{RT_к}{P_к} = 3V_к, \qquad \frac{a}{P_к} = 3V_к^2, \qquad \frac{ab}{P_к} = V_к^3.$$

Решив эту систему уравнений, получаем значения критических параметров, выраженные через константы a и b:

$$P_к = \frac{a}{27b^2}, \qquad V_к = 3b, \qquad T_к = \frac{8a}{27Rb}. \tag{36.2}$$

Эти же результаты и некоторые выводы можно получить из более детального математического анализа уравнения Ван-дер-Ваальса. Для этого напишем его в виде:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \tag{36.3}$$

Найдем, прежде всего, значения объёма, соответствующие максимуму и минимуму на изотерме Ван-дер-Ваальса. В обеих этих точках первая производная от давления по объёму равна нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0.$$

Дифференцируя равенство (36.3) и приравнивая производную нулю, получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a}{(V-b)^2}\left[\frac{(V-b)^2}{V^3} - \frac{RT}{2a}\right]. \tag{36.4}$$

Отсюда ясно, что условие $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$ выполняется при

$$\frac{(V-b)^2}{V^3} = \frac{RT}{2a}. \tag{36.5}$$

Это равенство представляет собой кубическое уравнение. Из этого следует, что при любом T, т.е. для всякой изотермы, существуют три значения V, при которых она проходит через максимум или минимум. Одно из этих значений соответствует, очевидно, минимуму, другое – максимуму на изотерме; в их существовании мы убедились при непосредственном построении изотерм. Что касается третьего значения, т.е. третьего экстремума, то он лежит в области V < b и поэтому не имеет физического смысла.

Покажем теперь, что при некотором значении температуры $T = T_к$ максимум и минимум изотермы сливаются и в точке их слияния кривая имеет точку перегиба, т.е. что в этой точке и вторая производная обращается в нуль.

Для этого найдём значение второй производной $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}$ в точках, где первая производная равна нулю. Вторая производная P по V равна:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}. \tag{36.6}$$

В точках, где $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$, выполняется условие (36.5). Подставим теперь в (36.6) значение из (36.5). Тогда получаем:

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right|_{\frac{RT}{2a}=\frac{(V-b)^2}{V^3}} = \frac{2a(3b-V)}{V^4(V-b)}. \tag{36.7}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$ при $V = 3b = V_к$.

Если подставить это значение V в (36.5), то для T в точке перегиба получим:

$$T = \frac{8a}{27Rb} = T_к.$$

Таким образом, при

$$T = T_к = \frac{8a}{27Rb} \quad \text{и} \quad V = V_к = 3b$$

изотерма Ван-дер-Ваальса имеет точку перегиба, в которой

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0.$$

Очевидно, что $T_к = \frac{8a}{27Rb}$ и является критической температурой.

Из уравнения (36.4) следует, что при $T > T_к$ производная $\frac{\partial P}{\partial V} < 0$ при всех условиях, потому что при $T = T_к$ выражение в скобках в правой части (36.4) равно нулю. Это значит, что выше критической температуры $T_к$ изотерма является монотонно убывающей кривой (производная всегда отрицательная).

Значение критического давления $P_к$ получается из самого уравнения Ван-дер-Ваальса, если в него подставить найденные значения $T_к$ и $V_к$:

$$P_к = \frac{a}{27b^2}.$$

Таким образом, мы получили другим путём формулы (36.2) для критических параметров.

Отметим, что в критической точке сжимаемость вещества равна бесконечности. Действительно, сжимаемость

$$\chi = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}.$$

Но так как в критической точке $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$, то $\frac{\partial V}{\partial P} = \infty$, значит χ равна ∞.

В качественном смысле уравнение Ван-дер-Ваальса очень хорошо описывает систему жидкость-газ, однако, в количественном отношении предсказания на его основе отклоняются от данных эксперимента. Главные отклонения состоят в следующем:

1. Для данного вещества постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса должны быть независимыми от температуры. В действительности же для изотерм, соответствующих различным температурам, приходится подбирать различные постоянные a и b, т.е. они зависят от температуры.

2. Из (36.2) следует, что величина

$$P_к V_к/(RT_к) = 3/8 = 0{,}375$$

должна быть универсальной постоянной для всех веществ. В действительности же она изменяется. Например, для воды она равна 0,23, а для гелия – 0,31. Вообще для лёгких газов согласие с предсказанием уравнения Ван-дер-Ваальса лучше, чем для тяжёлых. Этим объясняется успех предсказаний теории об условиях сжижения водорода и гелия, которыми руководствовались экспериментаторы в начале XX века.

3. Соотношение $V_к = 3b$ не соблюдается. Более точным соотношением является $V_к \approx 2b$.

4. В области двухфазных состояний уравнение Ван-дер-Ваальса не обосновано теоретически и даёт расхождения с экспериментом.

Как уже отмечалось, универсального уравнения состояния вещества существовать не может, и уравнение Ван-дер-Ваальса не претендовало на эту роль. Однако даже для описания конкретного вещества уравнение Ван-дер-Ваальса является лишь приближённым уравнением состояния.

Примем теперь в качестве единиц объёма, давления и температуры критические значения этих величин. Объём, давление и температура, измеренные в таких единицах, называются приведёнными. Они определяются выражениями:

$$\varphi = \frac{V}{V_к}, \qquad \pi = \frac{P}{P_к}, \qquad \tau = \frac{T}{T_к}. \tag{36.8}$$

Уравнение состояния, записанное в этих безразмерных переменных, называется приведённым уравнением состояния. Для газов Ван-дер-Ваальса из (36.2) находим

$$V = 3b\varphi, \qquad P = \frac{a\pi}{27b^2}, \qquad T = \frac{8a\tau}{27Rb}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение Ван-дер-Ваальса оно принимает вид:

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau. \tag{36.9}$$

В этом виде уравнение состояния не содержит никаких индивидуальных констант вещества. Приведённые уравнения состояния одинаковы для всех веществ.

Этот вывод обладает большей общностью, чем уравнение Ван-дер-Ваальса, из которого он был получен. Для справедливости вывода конкретный вид уравнения состояния не играет роли. Существенно только, что оно содержит три параметра: a, b и R. Всякое уравнение состояния, обладающее этим свойством, записанное в безразмерных величинах φ, π, τ, должно быть также одинаковым для всех веществ. Это положение называется законом соответственных состояний. Соответственными называются такие состояния разных веществ, которые имеют одинаковые значения приведённых параметров φ, π и τ. Из закона соответственных состояний следует, что если для различных веществ из трёх параметров φ, π, τ совпадают значения каких-либо двух, то будут совпадать и значения третьего параметра, т.е. эти вещества находятся в соответственных состояниях.

С помощью закона соответственных состояний можно вычислить неизвестные изотермы различных газов, если известны их критические параметры и измерены изотермы других газов.

§ 2.37 Равновесные состояния

Кинетическая теория газов хорошо объясняет многие явления в идеальных газах, в которых движения молекул из-за малости сил взаимодействия между ними могут считаться свободными. В тех случаях, когда силами взаимодействия пренебречь нельзя, как, например, в реальных газах, теория значительно менее точно описывает происходящие в них явления. Это объясняется тем, что в большинстве случаев детальная картина молекулярных движений неизвестна, так как не удаётся учесть достаточно точно все силы, действующие на молекулы. Ведь любая молекулярная система состоит из огромного числа взаимодействующих между собой и непрерывно движущихся частиц. При таких условиях точное знание сил, действующих в любой момент времени на молекулы, а значит и их движений, невозможно. Нельзя поэтому теоретически определить и связь между молекулярными движениями и свойствами вещества.

Тем не менее, ряд свойств вещества, многие явления в нём, могут быть изучены и без детального знания механизма молекулярных движений, если пользоваться только макроскопическими величинами, характеризующими вещество в целом, но не имеющими смысла применительно к отдельным частицам. К таким величинам относятся, прежде всего, давление и температура. Как мы уже видели раньше, эти величины имеют смысл только по отношению к совокупности очень большого числа частиц. Нельзя говорить о давлении или температуре одной молекулы. Это следует уже из того, что обе величины определяются средней кинетической энергией частиц. Поэтому при изучении свойств вещества, связанных с тепловыми движениями частиц следует пользоваться общими законами, справедливыми всегда, независимо от характера движений молекул, взаимодействия между ними, структуры вещества. Эти общие законы относятся к энергии и к связанным с ней величинам.

Часть физики, занимающаяся изучением общих свойств вещества, связанных с тепловым движением в условиях равновесия, называется термодинамикой.

Особое положение термодинамики в физике связано с тем, что по причинам, о которых речь будет ниже, любая форма энергии при ее превращениях, в конце концов, переходит в энергию тепловых движений. Если, например, в процессе механического движения энергия тела или системы тел уменьшается из-за действия сил трения, то это происходит потому, что она переходит в тепло – трущиеся тела нагреваются. В тепло переходит и энергия электрического тока, энергия света, энергия химических реакций и т.д. Любой вид энергии в процессе превращений может пройти через многие формы энергии, но конечным результатом всех таких превращений непременно является тепловая энергия.

Наибольший практический интерес имеет превращение механической энергии в тепловую и обратный процесс получения механической работы за счёт тепловой энергии. Этот вопрос мы рассмотрим наиболее подробно.

Но прежде чем приступить к этому вопросу и к формулировке законов термодинамики, обсудим вопрос о равновесии. В механике равновесием называется такое состояние тела, при котором оно находится в покое относительно какой-то системы координат. В термодинамике понятие равновесия несколько более широкое.

Система находится в термодинамическом равновесии, если макроскопические величины, определяющие ее состояние, остаются постоянными и равными своим средним значениям. Равновесное состояние системы характеризуется значением макроскопических параметров P, V и T. Но в первую очередь это относится к давлению и температуре. Поэтому в состоянии равновесия не могут происходить такие явления, как теплопроводность, диффузия, химические реакции, фазовые переходы.

Но термодинамическое равновесие (его иногда называют также статистическим равновесием) существенно отличается от механического тем, что хотя макроскопические величины, характеризующие систему, остаются постоянными, частицы, из которых система состоит (атомы, молекулы), не прекращают своих сложных движений. А то обстоятельство, что это не мешает системе оставаться в неизменном состоянии, обусловлено большим числом частиц системы.

Так, например, если два тела, обладающие одинаковыми температурами, привести в соприкосновение, то, как хорошо известно из повседневного опыта, тепло не будет переходить от одного тела к другому, и температуры соприкасающихся тел останутся неизменными, тела будут находиться в равновесии. Между тем не исключено, что в каких-нибудь отдельных точках соприкосновения этих тел частицы одного из них обладают большей кинетической энергией, чем частицы другого. В этих точках будет происходить переход тепла от одного тела к другому. Но он обязательно будет компенсироваться обратным переходом в других точках, где разность энергий имеет обратный знак.

В общей сложности в случае тел с одинаковой температурой тепловая энергия не переходит от одного тела к другому, и это связано с тем, что вдоль соприкосновения частицы, имея самые разнообразные «индивидуальные» энергии, обладают одинаковыми для обоих тел средними значениями энергий.

То же относится к хорошо известному факту, что в состоянии равновесия газ распределяется равномерно по всему объёму сосуда, так что его плотность во всех частях сосуда одинакова. Это обусловлено тем, что число молекул газа необычайно велико. Но даже при большом числе частиц некоторые отклонения от равномерного распределения их по объёму могут иметь место в отдельных частях сосуда. Одинакова и постоянна только средняя плотность газа во всём объёме.

С аналогичным положением мы встречаемся и при установлении равновесия между жидкостью и паром в закрытом сосуде. Пар над жидкостью образуется в результате испарения – процесса, который состоит в том, что молекулы жидкости, обладающие большой скоростью, покидают жидкость с ее поверхности. Но часть молекул, покинувших жидкость, при своём хаотическом движении может снова вернуться в нее, и это происходит тем чаще, чем больше образовалось пара. Равновесие между жидкостью и ее паром наступает тогда, когда число молекул, покидающих жидкость в единицу времени, становится равным числу молекул, возвращающихся в нее из пара. Пар станет насыщенным, и после этого никакие макроскопические изменения в системе уже не происходят – давление и температура остаются постоянными. Однако выход молекул из жидкости и возвращение их из пара продолжаются и после установления равновесия. И в этом случае не исключено, что в состоянии равновесия в отдельных частях объёма пара его плотность может несколько отличаться от средней плотности, т.е. от плотности насыщенного пара.

Эти примеры указывают на две особенности равновесного состояния. Во-первых, понятие о термодинамическом равновесии является определённой идеализацией, потому что, строго говоря, параметры состояния при равновесии не остаются постоянными, а испытывают небольшие колебания вблизи своих равновесных (средних) значений. Такие колебания называются флуктуациями. Во-вторых, о термодинамическом равновесии можно говорить только в том случае, когда число частиц, составляющих систему, очень велико.

Заметим, что и законы термодинамики, о которых будет идти речь в этой главе, относятся только к системам, состоящим из большого числа частиц.

§ 2.38 Обратимые и необратимые процессы

Если система по каким-либо причинам не находится в состоянии равновесия или выведена из него и после этого предоставлена самой себе (это значит, что она не подвергается внешним воздействиям), то как показывает опыт, сам собой происходит переход к равновесному состоянию. Можно даже сказать, что состояние равновесия – это и есть такое состояние, в которое переходит всякая молекулярная система при отсутствии внешних на нее воздействий. Процесс перехода к равновесию называется релаксацией, а время, необходимое на это, называется временем релаксации.

Но когда равновесие уже установилось, то система не может, как показывает опыт, сама собой возвратиться к первоначальному неравновесному состоянию. Другими словами, изменения состояния, которые претерпела система, переходя в состояние равновесия, не могут происходить в обратном направлении без внешнего воздействия.

Так, например, если два соприкасающихся тела обладали вначале разностью температур и были предоставлены самим себе, то, в конце концов, температуры обоих тел выравниваются. Но обратный процесс – возникновение разности температур между ними – без внешнего воздействия не происходит.

Газ сам по себе всегда распределяется равномерно по всему объёму сосуда, и такое состояние соответствует равновесию. Но газ никогда не скапливается в одной части сосуда в большем количестве (с большей плотностью), чем в другой, без действия внешних сил.

Точно так же, если ввести в сосуд два разных газа, то вследствие взаимной диффузии они сами собой перемешаются, так что состав смеси станет всюду одинаковым. Это и будет равновесное состояние. Однако для того, чтобы вновь разделить эти газы, требуется затратить большие усилия извне.

Процессом называется переход системы из одного равновесного состояния в другое, т.е. от одних значений P_1, V_1, T_1 к другим P_2, V_2, T_2. Существенным в этом определении является требование, чтобы конечное и начальное состояния были равновесными.

Пусть, например, надо перейти в состояние с другим объёмом. Ясно, что если это сделать не очень медленно, то постоянство давления по объёму нарушится и нарушится также постоянство температуры. Нельзя будет вообще говорить о каких-либо определённых давлении и температуре, поскольку они во всех точках будут различными. Более того, распределение давления и температуры по объёму зависит не только от начального и конечного объёмов, но и от способа, которым этот переход осуществляется. Таким образом, промежуточные состояния при таком процессе являются неравновесными. Такой процесс называется неравновесным.

Можно осуществить переход другим способом – бесконечно медленно. После каждого бесконечно малого изменения параметров следующее изменение не производится до тех пор, пока система не придёт в равновесное состояние, когда все макроскопические параметры примут по всей системе постоянные значения. После этого совершается следующий шаг и т.д. Таким образом, весь процесс состоит из последовательности равновесных состояний. Такой процесс называется равновесным. Его можно изображать на диаграммах в виде непрерывных кривых. В уравнении состояния идеальных газов (для одного моля) $PV = RT$ любые из двух параметров могут считаться независимыми параметрами, характеризующими процесс. Например, некоторый равновесный процесс перехода от состояния P_1, V_1 в состояние P_2, V_2 показан на рисунке 60. Температура в каждой точке процесса однозначно определяется уравнением состояния.

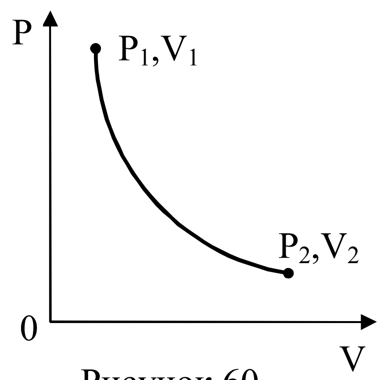


Рисунок 60

Изменение состояния системы всегда связано с переходом в неравновесные состояния. Удаление от равновесного состояния тем значительнее, чем быстрее изменение. Возвращение в равновесное состояние требует некоторого времени. Поэтому, производя изменения состояния системы достаточно медленно, мы с одной стороны, не будем уводить систему далеко от равновесного состояния, а с другой стороны, дадим системе в каждом промежуточном состоянии достаточно времени для возвращения к равновесному состоянию. В результате система проходит последовательность равновесных состояний. Неправильно думать, что это утверждение приближённое, что система проходит последовательность лишь почти равновесных, но не точно равновесных состояний. Дело в том, что само равновесное состояние осуществляется посредством флуктуаций через неравновесные состояния. Поэтому если «почти равновесные состояния» при переходе отличаются от равновесных меньше, чем флуктуационные, их следует рассматривать как просто равновесные состояния. При достаточной медленности процесса этого всегда можно добиться.

Обратимым процессом называется такое изменение состояния системы (или одного отдельного тела), которое, будучи проведено в обратном направлении, возвращает ее в исходное состояние так, чтобы система прошла через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, но в обратной последовательности, а состояние тел вне системы осталось неизменным.

Обратимым процессом называют процесс, достаточно медленный для того, чтобы состояние тела в каждый момент времени можно было считать равновесным. Равновесное состояние тела изображается точкой в пространстве его термодинамических параметров, так что обратимый процесс изображается некоторой кривой в этом пространстве.

Обратимыми являются все движения, рассматриваемые в механике, кроме тех, в которых участвуют силы трения (действие сил трения приводит к выделению тепла, и процесс перестаёт быть чисто механическим).

Процессы, не удовлетворяющие приведённому выше условию обратимости, называются необратимыми. При необратимом процессе обратный переход через те же промежуточные состояния невозможен.

Очевидно, что неравновесный процесс в принципе не может быть обратимым; он всегда необратим. С другой стороны, равновесный процесс является всегда обратимым.

Однако не следует думать, что понятие обратимого процесса равнозначно понятию бесконечно медленного процесса. Можно указать бесконечно медленные необратимые процессы, например пластическая деформация твёрдых тел может происходить бесконечно медленно и, тем не менее, не является обратимым процессом.

Приведём здесь пример, который позволит уточнить понятие обратимости и необратимости изменений или процессов.

Пусть пружина, один из концов которой закреплён, деформируется (растягивается) силой F, приложенной к другому ее концу (рисунок 61). Пружина растягивается, увеличивая свою потенциальную энергию за счёт работы силы F. Если после того, как пружина окажется растянутой на определённую длину, прекратить действие силы, то пружина вернётся в исходное состояние, соответственно уменьшив свою потенциальную энергию.

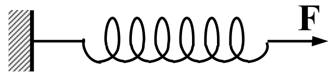


Рисунок 61

Можно ли считать описанный процесс растяжения пружины обратимым?

Легко видеть, что если пружину растянуть быстро (ниже будет видно, что значит «быстро») и сразу прекратить действие силы, то процесс не будет обратимым. В самом деле, когда сила F начинает растягивать пружину, то, прежде всего, деформируется та часть пружины, к которой непосредственно приложена сила, т.е. часть, прилегающая к незакреплённому концу. Постепенно деформация передаётся остальным частям пружины, и последней деформацию испытает та ее часть, которая прилегает к закреплённому концу.

После прекращения действия силы пружина начнёт сжиматься. Но и теперь деформацию, на этот раз деформацию сжатия, первой испытает часть пружины, прилегающей к точке приложения силы, так как она, очевидно, первой «почувствует», что сила перестала действовать. От этой части деформация постепенно передастся вдоль пружины, пока не восстановится исходное состояние.

Таким образом, хотя процесс сжатия и идёт в обратном направлении, но пружина при этом не проходит промежуточные состояния в обратном порядке: в прямом процессе сначала деформировалась та часть пружины, которая прилегает к ее незакреплённому концу, и от нее деформация передавалась остальным частям пружины; в таком же, а не в обратном порядке пружина деформировалась и при сжатии, поэтому в описанном опыте процесс растяжения пружины нельзя считать обратимым. Необратимость скажется в том, что при быстром прекращении действия силы пружина придёт в колебательное движение, которое не является обратимым: сила трения приведёт к затуханию колебаний и их энергия перейдёт в тепло.

По той же причине быстрое сжатие или расширение газа – изотермическое или адиабатное – не являются обратимыми процессами. Как и в случае с пружиной, необратимость здесь состоит в том, что чередование промежуточных состояний при прямом и обратном процессах оказывается одинаковым.

К числу необратимых процессов относится и расширение газа в пустоту, не уравновешенное внешними силами. Необратимыми являются все явления переноса: теплопроводность, диффузия и внутреннее трение.

В связи с понятием обратимости и необратимости напомним, что говорилось в § 2.27 о квазистатических процессах.

В некоторых случаях процессы, которые при одних условиях протекают необратимо, могут оказаться обратимыми при других. Например, описанный выше процесс растяжения пружины может быть проведён и обратимым образом. Для этого нужно, чтобы внешняя сила, растягивающая пружину, по мере растяжения непрерывно увеличивалась, с тем, чтобы в каждый данный момент она была равна и противоположна упругой силе самой пружины. Другими словами нужно, чтобы в каждый данный момент пружина находилась в состоянии равновесия. Для этого растяжение должно вестись настолько медленно, чтобы деформация успевала передаваться по всей длине пружины и была всегда и во всех точках одинакова. Тогда пружина и будет в любой момент времени в равновесии. Принципиально процесс должен вестись бесконечно медленно. Практически время растяжения должно быть большим по сравнению со временем релаксации. Если же продолжительность процесса меньше времени релаксации, то равновесие установиться не успевает, процесс оказывается слишком быстрым, чтобы быть обратимым.

Напомним, что процессы, в ходе которых система всё время остаётся в состоянии равновесия, называются квазистатическими. Понятно, что такие процессы являются обратимыми, поскольку все промежуточные состояния равновесны.

В приведённых выше примерах сжатия и расширения пружины или газа время релаксации – это время распространения звука, поскольку звуковые волны представляют собой распространяющиеся в теле расширения и сжатия.

Расширение газа или его сжатие, производимое, например, при помощи поршня, будут квазистатическими, если скорость перемещения поршня мала по сравнению со скоростью звука в газе, так как при этом условии давление успевает выровняться по всему объёму газа. Как мы видели (§ 2.27), работа расширения газа в этом случае максимальна.

Напомним ещё раз, что квазистатические процессы могут быть изображены в виде кривой зависимости давления от объёма или, например, в виде кривой зависимости давления от температуры. Необратимый же процесс не может быть изображён такой кривой. Ведь если процесс неравновесный (не квазистатический), то нельзя говорить об определённом давлении или определённой температуре, соответствующих данному значению объёма. Все естественно идущие процессы, такие, как переход тепла от более нагретого тела к менее нагретому, выравнивание концентраций в газовых смесях и т.д., всегда являются необратимыми и, конечно, неквазистатическими процессами.

Таким образом, мы видим, что процессы, связанные с тепловыми движениями молекул, отличаются от механических движений тем, что они обычно бывают необратимыми. Между тем сами по себе движения молекул, по крайней мере, в первом приближении, подчиняются законам механики, и мы пользовались этими законами при выводе основных уравнений кинетической теории идеальных газов. Возникает естественный вопрос, каким образом совокупность частиц, каждая из которых подчиняется законам механики и движение которых, следовательно, обратимо, способна только к необратимым изменениям (если исключить квазистатические процессы, которые сами собой не происходят)? Причиной этого является грандиозность числа частиц и полная хаотичность их движений.

Этим обстоятельством объясняются многие процессы с участием большого числа частиц. Так, самопроизвольная концентрация молекул в малой части объёма сосуда столь же маловероятна, как и самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему или самопроизвольное разделение компонентов газовой смеси. Во всех подобных случаях сам собой происходит переход к равновесному состоянию, вероятность которого велика. Но обратный переход к неравновесному состоянию практически никогда не происходит, потому что вероятность такого состояния мала. Законы механики, которым подчиняются молекулы, разрешают оба направления процесса, но из-за большого числа частиц вероятность одного из них настолько мала, что его практически невозможно наблюдать.

Значит, необратимость процессов в молекулярных системах, состоящих из частиц, каждая из которых подчиняется законам механики, т.е. движется обратимо, объясняется исключительно тем, что очень велико число этих частиц. Будь их немного, система не знала бы никаких необратимых процессов.

Что касается квазистатических процессов, то, поскольку переход к равновесию в этих случаях совершается через равновесные же промежуточные состояния, они с равной вероятностью могут протекать в любом направлении.

§ 2.39 Взаимные превращения механической и тепловой энергии

Понятия о равновесии, об обратимости и необратимости процессов, являются общими и относятся ко всем процессам, происходящим в природе.

Одним из процессов, часто происходящих в природе при переходе какой-нибудь системы к равновесию, является превращение механической энергии в теплоту. Примером такого превращения является выделение тепла при трении. Напомним, что механической энергией мы здесь и в дальнейшем будем называть макроскопическую энергию, т.е. кинетическую энергию движения тел и их потенциальную энергию, обусловленную силами, действующими на эти тела. В противоположность этому кинетическая энергия тепловых движений молекул и потенциальная энергия их взаимодействия называется внутренней энергией. Значит, выделение тепла за счёт механической энергии – это процесс превращения макроскопической энергии в энергию микроскопических тепловых движений.

Обратный этому процесс – это превращение теплоты в механическую энергию или что то же, получение механической энергии за счёт теплоты. В своё время изобретение методов получения механической работы за счёт теплоты явилось началом новой эпохи в истории цивилизации. Наше время является эпохой использования ядерной энергии для получения работы. Но и ядерная энергия в настоящее время превращается в механическую работу не непосредственно, а через посредство опять-таки теплоты. Этим определяется важность изучения общих законов, управляющих процессами взаимного превращения механической и тепловой энергий.

Исторически термодинамика зародилась как раздел физики, изучающий связи между механической и тепловой энергиями. В дальнейшем своём развитии термодинамика стала наукой, исследующей связи между тепловой и всеми другими видами энергии – химической, электрической, энергии излучений и т.д. Далее мы ограничимся рассмотрением общих законов, связывающих тепловую и механическую энергии.

Первым законом, связывающим механическую и тепловую энергии, является закон сохранения энергии, который мы уже подробно рассмотрели применительно к идеальному газу (см. § 2.27). Этот закон и называют первым началом термодинамики. Напомним здесь содержание этого закона.

Если состояние системы изменяется вследствие подвода к ней некоторого количества тепла dQ и при этом изменении состояния система совершает работу dA, то закон сохранения энергии гласит: количество подведённого тепла равно сумме произведённой работы и изменения внутренней энергии системы. Математически закон сохранения энергии выражается в форме:

$$dQ = dU + dA. \tag{39.1}$$

Как мы видели,

$$dA = PdV.$$

Формулу (39.1) можно записать и так:

$$dU = dQ - dA.$$

Если речь идёт не о малом, а о макроскопическом изменении состояния, то нужно просуммировать все dQ и все dA и таким образом вычислить изменение внутренней энергии при переходе системы, например, из состояния 1 в состояние 2:

$$\int_1^2 dU = \int_1^2 dQ - \int_1^2 dA\,.$$

Здесь важно отметить, что количество подведённого тепла, так же как и совершённая системой (или над ней) работа, зависит от того, каким именно образом осуществлялся переход из состояния 1 в состояние 2. Изменение энергии dU не зависит от пути перехода, а только от начального и конечного состояний. Поэтому можно написать, что

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1 = \int_1^2 dQ - \int_1^2 dA\,,$$

но нельзя написать

$$\int_1^2 dQ = Q_2 - Q_1 \quad \text{или} \quad \int_1^2 dA = A_2 - A_1.$$

Это значит, что в каждом состоянии система обладает определённым значением внутренней энергии U, но о ней нельзя сказать, что она обладает определённым количеством теплоты или работы. Поэтому внутреннюю энергию называют функцией состояния. Но Q и A являются функциями не состояния, а процесса изменения состояния[1].

Особое значение имеют так называемые циклические (или круговые) процессы, при которых система, пройдя ряд состояний, возвращается к исходному состоянию. В этом случае $\oint dU = 0$. Но это, конечно, не значит, что Q и A тоже равны нулю. При циклическом процессе тело может получить или отдать некоторое количество теплоты, оно может совершить работу, или работа может быть совершена над ним, но изменение внутренней энергии будет равно нулю.

Первое начало термодинамики в таком случае записывается так:

[1] Математически это означает, что, в отличие от dU, величины dA и dQ не являются полными дифференциалами.

$$\oint dQ = \oint dA,$$

где знак $\oint$ означает интегрирование по замкнутому контуру.

Первое начало термодинамики в равной мере применимо к равновесным и неравновесным процессам. Хотя последние и не могут быть представлены в виде кривой, но начальное и конечное состояния системы и в этом случае вполне определены.

Напомним также основные соотношения, которые мы получили, применяя первое начало термодинамики к идеальному газу.

1. Работа, совершаемая одним молем идеального газа при его изотермическом расширении от объёма V_1 до объёма V_2, равна:

$$A = RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \tag{39.2}$$

2. При адиабатном расширении, если температура газа падает от T_1 до T_2, работа, совершённая одним молем газа, равна:

$$A = \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}, \tag{39.3}$$

где $\gamma = C_P/C_V$ – отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме.

Напомним, что приведённые формулы относятся к случаю, когда изменение состояния газа происходит квазистатически, т.е. обратимым путём.

Важно отметить, что первое начало термодинамики не указывает, в каком направлении идут процессы изменения состояния. С точки зрения первого начала, например, тепло может переходить и от горячего тела к холодному, и от холодного к горячему. Лишь бы энергия, переданная одним телом, и энергия, полученная другим, были равны друг другу. Следовательно, необратимость процессов природы из первого начала термодинамики не вытекает.

Приведённые выше соотношения позволяют вычислить количество теплоты, выделяющейся в результате совершения механической работы. Как известно, результатом произведённой механической работы может явиться в определённых случаях возникновение равного ей количества теплоты. Это значит, что энергия макроскопического движения целиком переходит в энергию микроскопических движений молекул вещества.

Рассмотрим теперь обратный процесс преобразования теплоты в механическую работу.

§ 2.40 Преобразование теплоты в механическую работу

Теплотой, как известно, называется энергия, передаваемая от тела с более высокой температурой телу с меньшей температурой, например, при их контакте. Сама по себе такая передача энергии не сопровождается совершением работы, потому что при этом нет перемещения каких-либо тел. Она приводит лишь к увеличению внутренней энергии тела, которому теплота передаётся, и к выравниванию температур, после чего прекращается и сам процесс теплопередачи. Но если тепло передаётся телу, которое при этом может расширяться, то оно может совершить работу. Согласно закону сохранения энергии эта работа равна

$$dA = dQ - dU, \tag{40.1}$$

где dU – изменение внутренней энергии.

Наибольшая работа совершается при изотермическом процессе, когда внутренняя энергия не изменяется, так что

$$dA = dQ.$$

Большей работы, конечно, не может быть. Следовательно, для получения максимальной работы, равной подведённой теплоте, нужно передавать теплоту расширяющемуся телу так, чтобы между ним и источником теплоты не было разности температур, так как необратимый процесс теплопроводности бесполезен для превращения теплоты в работу, приводя лишь к увеличению внутренней энергии тела в ущерб работе. Правда, если между источником теплоты и телом, которому она передаётся, вовсе нет разности температур, то теплота и передаваться не будет. Но для того, чтобы теплота передавалась, достаточно и бесконечно малой разности температур, что практически не отличается от полной изотермичности. Процесс передачи теплоты при таких условиях идёт бесконечно медленно и поэтому обратим.

Всё это относится к однократному акту передачи теплоты телу, совершающему работу. В этом случае, повторяем, тело может совершить работу, равную полученной от источника теплоте. Например, если моль идеального газа, получив теплоту, изотермически расширится от объёма V_1 до объёма V_2, то при этом будет совершена работа, равная $RT \cdot \ln(V_2/V_1)$.

Но для техники представляет интерес не такие единичные акты преобразования теплоты в механическую работу. Реально существующие устройства для превращения теплоты в работу (паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т.д.) – двигатели действуют, как известно, циклически, т.е. в них процессы передачи тепла и преобразования его в работу периодически повторяются. Для этого нужно, чтобы тело (рабочее вещество), совершающее работу, после получения теплоты от источника вернулось в исходное состояние, чтобы снова начать такой же процесс. Другими словами, оно должно совершать круговые процессы.

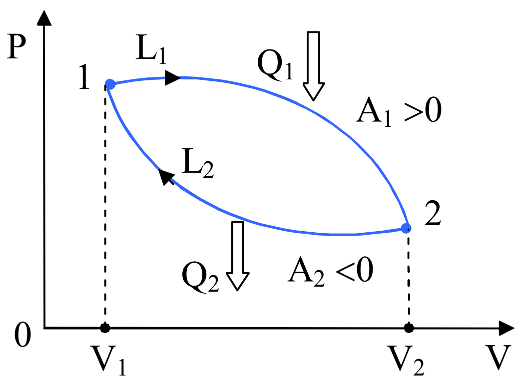


Рисунок 62

Совокупность изменений состояния, в результате которых состояние восстанавливается, называется циклом. Циклическим называется процесс, начало и конец которого совпадают. Цикл изображается на диаграмме процессов замкнутой кривой (рисунок 62). Цикл можно пройти как по часовой, так и против часовой стрелки.

Поэтому в необходимых случаях надо указывать стрелками, в каком направлении проходит цикл. Можно также различные части замкнутой линии, составляющей цикл, обозначать буквами. Например, L_1 и L_2 указывают различные линии, соединяющие состояния 1 и 2. Работа, совершённая за цикл, равна площади, охватываемой этой замкнутой кривой $1L_12L_21$ (ср. § 2.27, рисунок 50).

Принцип Кельвина. Возникает важный вопрос: можно ли и при циклическом процессе получить работу, равную теплоте, полученной от источника? На первый взгляд, кажется, что для этого никаких препятствий нет. Ведь в результате цикла тело, совершившее работу, возвращается в исходное состояние, его внутренняя энергия остаётся неизменной и работа должна быть равна поглощённой теплоте. В действительности, однако, совокупность опытных данных заставляет дать на поставленный вопрос отрицательный ответ. Он был сформулирован ещё в 1854 г. В. Томсоном (Кельвином) в виде следующего общего принципа (это одна из формулировок второго начала термодинамики):

Невозможно осуществить циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение в механическую работу теплоты, отнятой у какого-нибудь тела, без того, чтобы произошли какие-либо изменения в другом теле или телах.

Согласно этому принципу (основанному на многочисленных опытных данных, касающихся работы тепловых машин), теплота, заимствованная у источника, может быть превращена в работу в циклическом процессе при непременном условии, что кроме этого превращения должно изменяться состояние какого-то другого тела или тел. Значит, в процессе превращения теплоты в работу кроме источника теплоты, от которого теплота отнимается, и тела, совершающего работу, которому теплота непосредственно передаётся, должно участвовать ещё какое-то третье тело (или тела). Что это за тело и какова его роль в процессе преобразования теплоты в работу?

Как мы уже знаем, для преобразования теплоты в работу нужно «отнять» теплоту у источника и передать ее телу с более низкой температурой. Но сама по себе такая передача ни с какой работой не связана. Поэтому такая передача осуществляется не непосредственно, а через другое тело, которое, расширяясь, совершает попутно механическую работу и возвращается к исходному состоянию. Оно называется рабочим телом, в то время как источник теплоты называют нагревателем, а тело с более низкой температурой, которому теплота передаётся, – холодильником. Именно холодильник и есть то «другое тело», о котором говорится в принципе Кельвина. Само оно никакой работы не совершает, но оно необходимо, потому что рабочее тело должно передать ему теплоту.

Утверждение о том, что для совершения работы в циклической машине необходимо участие двух тел с различной температурой, называют принципом Карно.

Но почему же у нас не было нужды в этом дополнительном теле, получающем теплоту, но не совершающем работу, когда мы говорили о единичном акте преобразования теплоты в работу, и почему нельзя обойтись без него, когда речь идёт о циклическом процессе?

Дело, очевидно, в том, что при циклическом, круговом процессе рабочее тело, после того, как оно, расширившись, совершит за счёт полученной от нагревателя теплоты работу, должно быть возвращено к исходному состоянию. Если, например, рабочее тело, расширяясь и совершая работу, проходит через ряд состояний вдоль кривой $1L_12$ (рисунок 62), то для того, чтобы оно вернулось в первоначальное состояние, его нужно сжать. А для этого необходимо совершить работу над рабочим телом. Но работа эта должна быть меньше, чем работа, совершённая рабочим телом при расширении. Иначе цель нашего цикла не будет достигнута. А чтобы работа при сжатии была меньше, чем работа расширения, рабочее тело при сжатии должно пройти ряд состояний по кривой, лежащей ниже кривой расширения, например по кривой $2L_21$ на рисунке 62. Но более низкая кривая на диаграмме P-V соответствует более низкой температуре. Значит перед сжатием рабочее тело должно быть охлаждено, от него нужно отнять некоторое количество теплоты и передать его холодильнику. Вот почему никакая тепловая машина (циклическая) не может обойтись только источником тепла и рабочим телом.

Если бы можно было обойтись только рабочим телом и источником теплоты, то для получения работы можно было бы воспользоваться такими «источниками», как вода морей и океанов, земная кора, атмосфера Земли, от которых можно заимствовать практически неограниченное количество теплоты. Машина, работающая за счёт теплоты таких источников, не требующая никакого топлива, имела бы такое же значение, как «вечный двигатель» (такая воображаемая машина и называется вечным двигателем второго рода). Однако она не «запрещена» законом сохранения энергии – работа совершается за счёт теплоты. Но опыт показывает, что такая машина не может быть построена. Для работы циклической тепловой машины необходим холодильник – тело с температурой более низкой, чем источник теплоты. Именно атмосфера обычно и служит холодильником.

Тепловая машина. Первое начало термодинамики имеет разные формы записи и различные формулировки, например, следующим образом: невозможен вечный двигатель первого рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

Всякий двигатель представляет собой систему, совершающую многократно некий круговой процесс (цикл). Пусть в ходе цикла рабочее тело (например, газ) сначала расширяется до объёма V_2, а затем снова сжимается до первоначального объёма V_1 (рисунок 62). Чтобы работа за цикл была больше нуля, давление (а, следовательно, и температура) в процессе расширения должно быть больше, чем при сжатии. Для этого рабочему телу нужно в ходе расширения сообщать теплоту, а в ходе сжатия отнимать от него теплоту. Совершив цикл, рабочее тело возвращается в исходное состояние. Поэтому изменение внутренней энергии за цикл равно нулю. Количество теплоты, сообщаемое рабочему телу за цикл, равно $Q_1 - Q_2$, где Q_1 – теплота, получаемая рабочим телом при расширении, а Q_2 – теплота, отдаваемая при сжатии. Работа A, совершаемая за цикл, равна площади цикла. Таким образом, выражение (27.7), написанное для цикла, имеет вид:

$$A = Q_1 - Q_2. \qquad (40.2)$$

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт получаемой извне теплоты, называется тепловой машиной. Как следует из (40.2), не вся получаемая от нагревателя теплота Q_1 используется для получения работы, часть теплоты, равная Q_2, должна быть передана холодильнику. Очевидно, что чем полнее превращает тепловая машина получаемую от нагревателя теплоту Q_1 в работу A, тем эта машина выгоднее. Поэтому тепловую машину принято характеризовать коэффициентом полезного действия (КПД) η, который определяется как отношение совершаемой за цикл работы A к получаемой за цикл теплоте Q_1:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \tag{40.3}$$

Приняв во внимание соотношение (40.2), выражение для КПД можно записать в виде:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{40.4}$$

Из определения КПД следует, что он не может быть больше единицы.

§ 2.41 Цикл Карно

Рассмотрим теперь круговой процесс, при помощи которого тепло, отнятое от какого-нибудь тела, можно превратить в работу, и притом наилучшим образом, т.е. так, чтобы полученная работа была максимально возможной.

Чтобы осуществить этот процесс, нужно, как мы знаем, иметь три тела: источник тепла, от которого тепло отнимается (нагреватель), более холодное тело, которому тепло передаётся (холодильник), и рабочее тело, которое осуществляет передачу тепла и совершает работу. Положим ещё, для простоты рассуждений, что нагреватель и холодильник имеют настолько большую теплоёмкость, что их температуры не изменяются от того, что от первого отнимается, а второму передаётся некоторое количество тепла. Посмотрим, как при таких условиях рабочее тело действительно совершит работу за счёт тепла, отданного нагревателем.

Начнём круговой процесс над рабочим телом с того, что оно, сжатое до некоторого давления, находится в контакте с нагревателем и, следовательно, имеет такую же, как он, температуру T_1 (точка 1 на рисунке 63). Процесс теплопроводности при этом не происходит, так как нет разности температур. Не происходит, значит, и передачи тепла без совершения работы. Так как задачей является получение максимальной работы, мы не должны допускать в нашем цикле таких процессов.

Предоставим теперь рабочему телу возможность расшириться и переместить какое-нибудь тело, например, поршень, не прерывая контакт с нагревателем. Расширение, следовательно, будет изотермическим (кривая 12 на рисунке 63). При этом будет совершена работа. Она совершается за счёт тепла, отнятого от нагревателя, который, однако, благодаря своей большой теплоёмкости не изменяет своей температуры.

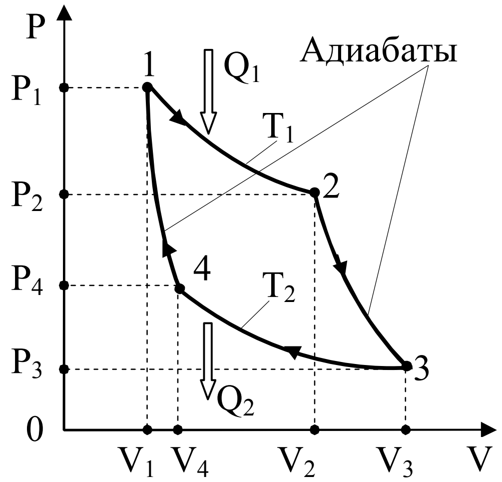


Рисунок 63

Полученное рабочим телом тепло нужно теперь передать холодильнику. Эту передачу тоже не следует осуществлять прямым соприкосновением рабочего тела с холодильником, так как температура изотермически расширившегося рабочего тела выше температуры холодильника и передача тепла при контакте не будет сопровождаться совершением полезной работы. Поэтому рабочее тело надо сначала охладить до температуры холодильника и уже после этого их можно привести в соприкосновение. Для охлаждения же рабочего тела оно должно быть изолировано от нагревателя, а затем ему нужно дать возможность адиабатно расшириться (см. кривую 23 на рисунке 63) до тех пор, пока оно не примет температуру холодильника (при адиабатном расширении тела охлаждаются). На этом втором этапе тело, расширяясь и перемещая, например, поршень, дополнительно совершит механическую работу. После достигнутого таким образом охлаждения рабочего тела его приводят в контакт с холодильником. На этом этапе заканчивается первая половина цикла, во время которой тело совершило полезную работу за счёт тепла, полученного от нагревателя.

Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние, т.е. восстановить первоначальные давление и температуру. Это значит, что рабочее тело должно быть сжато и приведено снова в контакт с нагревателем. Этот контакт по-прежнему не следует осуществлять, пока температура рабочего тела ниже температуры нагревателя. Поэтому возвращение к первоначальному состоянию тоже проводится в два этапа. Сначала рабочее тело сжимают, не прерывая его контакта с холодильником, т.е. изотермически (см. кривую 34 на рисунке 63). Затем, изолировав рабочее тело от холодильника, его дополнительно сжимают адиабатно, так, чтобы оно нагрелось до температуры нагревателя (см. кривую 41 на рисунке 63). При адиабатном сжатии тело нагревается за счёт внешней работы, совершаемой над ним. После того, как в процессе адиабатного сжатия температура рабочего тела станет равной температуре нагревателя, их приводят в контакт, и цикл на этом завершается: рабочее тело находится в исходном состоянии, и процесс может быть начат снова.

Описанный круговой процесс состоит, таким образом, из двух изотермических и двух адиабатных расширений и сжатий. При расширениях рабочее тело совершает полезную работу; сжатия, наоборот, происходят за счёт работы, совершаемой над рабочим телом внешними силами.

На всех стадиях рассмотренного кругового процесса нигде не допускается соприкосновение двух тел с различными температурами и, таким образом, исключается возникновение необратимого процесса теплопроводности. Весь цикл проводится, следовательно, обратимым путём (для полной обратимости расширения и сжатия нужно вести очень медленно, в принципе бесконечно медленно, так чтобы процессы эти были квазистатическими).

Описанный цикл, совершаемый рабочим телом, носит название цикла Карно, по имени французского учёного, впервые его рассмотревшего.

В результате кругового процесса Карно некоторое количество тепла оказывается переданным при посредстве рабочего тела от нагревателя холодильнику. В ходе процесса рабочее тело совершает, кроме того, некоторую работу. В свою очередь над рабочим телом совершают работу внешние силы. Получается ли при этом полезная механическая работа, т.е. достигается ли цель всего процесса?

На первый взгляд кажется, что работа, произведённая рабочим телом при его расширении в первых двух стадиях цикла, полностью компенсируется работой, произведённой внешними силами в последующих двух стадиях, так что полезная работа, в конечном счете, равна нулю. В действительности, однако, нетрудно убедиться, что положительная работа, совершаемая телом при его расширении, больше, чем отрицательная работа, совершаемая над ним при его сжатии, и что, следовательно, часть тепла, полученная от нагревателя, действительно преобразуется в механическую работу.

Как уже говорилось в § 2.27, работа, совершённая за цикл, равна площади, охватываемой замкнутой кривой 12341 (см. рисунок 63).

Проще всего в этом можно убедиться в случае, когда рабочим телом является идеальный газ, для которого можно точно вычислить работы расширения и сжатия. Как мы увидим, выводы, которые мы при этом получим, не зависят от природы рабочего тела, т.е. справедливы для любого тела.

Рассмотрим поэтому количественно весь цикл Карно, когда рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок 63).

Пусть рабочим телом служит 1 моль идеального газа и пусть исходное состояние характеризуется давлением P_1 и объёмом V_1, т.е. точкой 1 на рисунке 63. Температура газа $T_1 = P_1V_1/R$ по нашему условию равна температуре нагревателя. Температуру холодильника обозначим через T_2, Значит, $T_1 > T_2$.

В исходном состоянии рабочее тело контактирует с нагревателем. Первая стадия кругового процесса, который совершает газ, – это изотермическое расширение (сохраняется контакт с нагревателем) до объёма V_2. Соответственно давление падает по изотерме до значения P_2 (точка 2 на рисунке 63).

Положительная работа, совершаемая газом при расширении, равна:

$$A_1 = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = Q_1, \tag{41.1}$$

где Q_1 – количество тепла, полученное газом от нагревателя.
За счёт этого тепла и совершена работа A_1.

Вторая стадия состоит в том, что газ изолируется от нагревателя и дальнейшее его расширение происходит адиабатно, вследствие чего газ охлаждается. Это адиабатное расширение прекращают, когда температура газа станет равной температуре холодильника T_2. Значение объёма, до которого должен расшириться газ, можно определить, учитывая, что при адиабатном расширении справедливо равенство:

$$T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1}. \tag{41.2}$$

Объём V_2 можно, следовательно, найти из равенства:

$$\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{41.3}$$

Давление при этом изменяется по адиабате до значения P_3 (точка 3 на рисунке 63). Работа, совершаемая газом на этой второй стадии процесса, равна (см. § 2.32):

$$A_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{R}{\gamma-1}\left(T_1-T_2\right). \tag{41.4}$$

На третьем этапе циклического процесса газ изотермически сжимается внешними силами при температуре T_2 холодильника от объёма V_3 до V_4. Совершённая при этом над газом работа равна:

$$A_3 = RT_2\ln\frac{V_4}{V_3} = -\,RT_2\ln\frac{V_3}{V_4} = Q_2, \tag{41.5}$$

За счёт этой работы выделяется теплота Q_2 и передаётся холодильнику, с которым газ контактирует.

Наконец, последнее изменение, которое претерпевает газ, чтобы вернуться в исходное состояние, – это адиабатное сжатие до исходного объёма V_1 и давления P_1, при которых его температура станет равной T_1. Для этого нужно, чтобы на предыдущем, третьем этапе газ был сжат до объёма V_4, определяемого равенством:

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}, \tag{41.6}$$

так как по-прежнему $T_2V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$.

Работа сжатия на последнем этапе цикла равна:

$$A_4 = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = -\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2). \tag{41.7}$$

Теперь газ снова находится в первоначальном состоянии, цикл Карно завершён и газ «готов» вновь начать процесс.

Каков же результат цикла? В какой мере достигнута его цель – преобразование теплоты в механическую работу?

Общая работа A, совершённая газом и над газом, равна, очевидно,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Из равенств (41.1), (41.4), (41.5) и (41.7) получаем:

$$A = RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) - RT_2\ln\frac{V_3}{V_4} - \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) =$$

$$= RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} - RT_2\ln\frac{V_3}{V_4}.$$

Из (41.3) и (41.6) следует, что $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$, или $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Обозначим это отношение через r. Тогда

$$\ln\frac{V_2}{V_1} = \ln\frac{V_3}{V_4} = \ln r. \tag{41.8}$$

Так как $V_2 > V_1$ и $V_3 > V_4$, то $\ln r > 0$.

Следовательно, общая работа

$$A = R(T_1 - T_2)\ln r, \tag{41.9}$$

и так как $T_1 > T_2$, то $A > 0$. Значит, работа, совершённая газом при расширении, больше работы внешних сил, затраченной на его сжатие. За счёт теплоты, полученной рабочим телом от нагревателя, совершена, таким образом, некоторая полезная работа. Эта работа, однако, не равна тому количеству теплоты Q_1, которое рабочее тело получило от нагревателя.

Из отданного нагревателем количества тепла

$$Q_1 = RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$$

часть, равная

$$Q_2 = RT_2\ln\frac{V_4}{V_3},$$

была передана холодильнику при изотермическом сжатии газа от объёма V_3 до объёма V_4 (газ в это время находился в контакте с холодильником). В полезную работу удалось, таким образом, преобразовать лишь часть полученной теплоты, равную:

$$Q_1 - Q_2 = R(T_1 - T_2)\ln r = A. \tag{41.10}$$

Работа А графически определяется площадью, ограниченной кривой 12341 (см. рисунок 63).

Этим процесс преобразования теплоты в работу отличается от обратного процесса превращения работы в тепло. Механическая работа при определённых условиях может быть целиком превращена в тепло. Тепло лишь частично превращается в работу.

Заметим здесь, что из равенств (41.1), (41.5) и (41.8) следует весьма важное соотношение (41.11). Равенства (41.1) и (41.5) можно переписать в виде:

$$\frac{Q_1}{T_1} = R\ln\frac{V_2}{V_1}, \qquad -\frac{Q_2}{T_2} = R\ln\frac{V_3}{V_4}$$

Сложив их и принимая во внимание (41.8), получаем $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$, откуда

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{41.11}$$

Коэффициент полезного действия в цикле Карно. Из приведённого анализа кругового процесса Карно следует, что при его посредстве нельзя полностью превратить заимствованную от нагревателя теплоту в механическую энергию. Часть этого тепла непременно должна быть передана холодильнику – телу с более низкой, чем у нагревателя, температурой.

Если количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, равно Q_1, а в работу преобразована часть $Q_1 - Q_2$ этой теплоты, то отношение

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

представляет собой КПД кругового процесса (точнее – машины, работающей по этому процессу). Как видно из формулы (41.11), КПД η цикла Карно определяется равенством:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{41.12}$$

Коэффициент полезного действия (КПД) η, следовательно, всегда меньше единицы и зависит от соотношения между температурами нагревателя и холодильника.

Цикл Карно, рассмотренный нами, был на всех своих стадиях проведён так, чтобы нигде не было соприкосновения тел с различными температурами, что исключает возможность необратимых процессов теплопроводности. Изменения объёма рабочего тела также проводились обратимым путём, что, как мы знаем, обеспечивает максимум совершаемой при этом работы (см. § 2.27). Это значит, что были обеспечены наилучшие условия для использования тепловой энергии. Поэтому более высокий КПД, чем представленный формулой (41.12), получить принципиально нельзя.

Тепловая машина, работающая при данных значениях температур нагревателя и холодильника, не может иметь КПД больший, чем машина, работающая по обратимому циклу Карно при тех же значениях температур нагревателя и холодильника. (Это утверждение иногда называют первой теоремой Карно).

Из формулы (41.12) видно, что коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от рода рабочего тела, а только от температур нагревателя и холодильника. (Это утверждение составляет содержание второй теоремы Карно).

При расчёте мы выбрали в качестве рабочего тела идеальный газ потому, что для него точно известно уравнение состояния, что и позволило легко вычислить величину коэффициента полезного действия.

Тот факт, что КПД машины, работающей по циклу Карно, максимален, обусловлен, как мы видели, тем обстоятельством, что этот круговой процесс полностью обратим. Во-вторых, для достижения более высокого КПД тепловой машины нужно по возможности повысить температуру нагревателя и понизить температуру холодильника.

Что касается выбора рабочего тела, то он диктуется соображениями технической и экономической целесообразности. То обстоятельство, что в современных тепловых машинах используется главным образом водяной пар, обусловлено доступностью воды и простотой обращения с ней.

Прогресс в технике паросиловых установок достигается повышением температуры нагревателя (холодильником обычно является окружающий воздух). Однако с паросиловыми установками успешно конкурируют двигатели внутреннего сгорания, где рабочим телом служит смесь воздуха с соответствующим горючим. Достигаемые в этом случае температуры значительно выше, а потому и КПД таких машин выше. К тому же в этих двигателях устранён необратимый процесс передачи тепла от топки, что тоже повышает КПД.

Необходимо, однако, иметь в виду, что обратимый процесс является процессом идеальным и на практике полная обратимость не может быть обеспечена. Поэтому то значение КПД, которое даётся формулой (41.12), фактически является недостижимым верхним пределом, к которому, однако, можно подойти принципиально сколь угодно близко.

§ 2.42 Холодильная машина

При проходе цикла, изображённого на рисунке 62, в обратном направлении машина не производит работы, а, наоборот, над машиной совершается работа. Эта работа превращается в теплоту, причём так, что некоторое количество теплоты берётся от тела с более низкой температурой, к этой теплоте добавляется за счёт работы эквивалентное количество теплоты и суммарное количество теплоты передаётся нагревателю. Таким образом, чистый результат цикла состоит в том, что тело с меньшей температурой, от которого отнимается теплота, охлаждается, а тело с большей температурой, которому отдаётся теплота, нагревается. Такая машина, работающая по обратному циклу, называется холодильной машиной или нагревателем в зависимости от назначения. Такая машина отбирает за цикл от более холодного тела («холодильника» – в терминах § 2.40, в котором рассматривали принцип работы тепловой машины) количество теплоты Q_2 и отдаёт телу с более высокой температурой («нагревателю») количество тепла Q_1. Эффективность холодильной машины характеризуется ее холодильным коэффициентом ξ, который определяется как отношение отнятой от охлаждаемого тела теплоты Q_2 к работе A, которая затрачивается на приведение машины в действие:

$$\xi_1 = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \tag{42.1}$$

Если эффективность машины оценивается по способности повышения температуры тела с более высокой температурой, т.е. машина действует как нагреватель, то эффективность нагревателя характеризуется коэффициентом

$$\xi_2 = \frac{Q_1}{A}. \tag{42.2}$$

В формулах (42.1) и (42.2) использованы абсолютные значения количества теплоты и работы, а не их алгебраические значения, как в (40.4).

При применении обратного процесса к циклу Карно тепло также будет передаваться, но не от нагревателя к холодильнику, а, наоборот, – от холодильника к нагревателю. Результатом обратного цикла Карно будет не внешняя полезная работа, а перенос тепла от холодильника к нагревателю, т.е. от менее нагретого тела к более нагретому. Эффективность холодильной машины, работающей по циклу Карно, равна

$$\xi_1 = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \tag{42.3}$$

Нужно отметить, что рабочее тело при обратном процессе Карно проходит через те же промежуточные состояния, что и при прямом, но в обратном порядке.

В принципе существует бесчисленное множество возможных циклов, поскольку каждой замкнутой кривой, например, на диаграмме P-V, соответствует цикл. Различные циклы используются в технике для превращения теплоты в работу и работы в теплоту. Практически используется несколько десятков циклов. Они подробно изучаются в технической термодинамике и соответствующих разделах техники.

§ 2.43 Энтропия

Энтропия (от греческого глагола εντρεπει – преобразовать, превратить) – понятие, впервые введённое в термодинамике одним из основоположников термодинамики Р. Клаузиусом в 1865 г. для определения меры необратимого рассеяния энергии. В статистической физике энтропия служит мерой вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния.

Для выяснения физического смысла понятия энтропии S рассматривают отношение теплоты dQ, полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела, называемое приведённым количеством теплоты:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \qquad (43.1)$$

Следует обратить внимание на особенность этой формулы. В математическом отношении величина dQ не является полным дифференциалом, так как Q не является функцией состояния. Однако после деления на T она становится полным дифференциалом. В отличие от теплоты, энтропия такая же функция состояния как температура, внутренняя энергия или давление. Полученное системой тепло Q зависит от процесса перехода из начального состояния в конечное, приращение же энтропии ΔS совершенно не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний.

В интегральной форме соотношение (43.1) имеет вид

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad (43.2)$$

при этом не играет роли, какой именно процесс перевёл систему из состояния 1 в состояние 2. Процесс может быть даже необратимым. Важно лишь, чтобы состояния 1 и 2 были равновесными, расчёт же с помощью (43.2) может проводиться по любому обратимому процессу между состояниями 1 и 2.

Введение таким образом энтропии S означает, что можно вычислить только разность энтропий, но нельзя сказать, чему равна энтропия в каждом из состояний, т.е. энтропия может быть определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Но как всегда в таких случаях делается, можно выбрать некоторое состояние, которому приписывается значение S, равное нулю, и сравнивать с ним все прочие состояния. Поэтому в дальнейшем будем считать, что функция S равна интегралу:

$$S = \int \frac{dQ}{T}. \qquad (43.3)$$

Определённая таким образом величина S и называется энтропией.

На практике всегда требуется знать не саму величину S, а только ее изменение при изменении состояния системы. Поэтому безразлично, какому именно состоянию приписать нулевую энтропию. Принято, (и на это есть достаточные основания) считать, что энтропия равна нулю при абсолютном нуле температуры.

Значит, для нахождения энтропии системы в данном состоянии надо перевести систему из этого состояния в нулевое состояние каким-либо обратимым путём и найти значение $\int \frac{dQ}{T}$ вдоль этого пути. Разумеется, сама энтропия системы совершенно не зависит от того, будет ли в действительности совершён этот обратимый процесс или нет.

То же касается изменения энтропии. Согласно (43.2), чтобы определить разность значений энтропии системы в двух ее равновесных состояниях 1 и 2, нужно перевести систему каким-нибудь обратимым процессом из состояния 1 в состояние 2 и вычислить значение $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ для такого процесса.

Изменение энтропии системы определяется соотношением (43.1), из которого находим dQ = TdS. Воспользовавшись этим выражением и вспомнив, что согласно первому началу термодинамики dQ = dU + PdV, получаем:

$$TdS = dU + PdV. \tag{43.4}$$

Это уравнение носит название термодинамического тождества. Его часто называют вторым началом термодинамики для обратимых процессов. Собственно, второе начало термодинамики для обратимых процессов заключается в том, что система может быть охарактеризована функцией состояния - энтропией, определяемой уравнениями (43.1) или (43.4). Глубокий физический смысл этой функции выясним ниже.

Для обратимых круговых процессов,

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \tag{43.5}$$

Это в свою очередь означает, что при всяком обратимом не круговом процессе значение $\int \frac{dQ}{T}$ не зависит от пути, по которому происходит процесс.

Если круговой процесс, претерпеваемый системой, необратим, то

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0. \tag{43.6}$$

Это неравенство называется неравенством Клаузиуса.

Энтропия, будучи функцией состояния тела или системы тел, может служить таким же параметром состояния тела, как уже известные нам величины: температура T, давление P и объём V.

Подобно тому, как любая из этих величин является функцией двух других, так и энтропия может быть выражена через любые из двух параметров P, V и T. Покажем, как это можно сделать. Это тем более важно, что энтропия непосредственно не может быть измерена на опыте подобно, например, температуре, объёму или давлению.

Выразим из уравнения (43.4)

$$dS = \frac{dU + PdV}{T},$$

или

$$dU = TdS - PdV. \tag{43.7}$$

Любые две из четырёх величин T, S, P и V, входящих в это уравнение, можно выбрать в качестве независимых переменных, через которые выразятся остальные.

Из курса математического анализа известно, что если x и y являются независимыми переменными функции U(x, y) и dU – ее полный дифференциал, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Произведя двойное дифференцирование (43.7), получим:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}; \tag{43.8}$$

Вместо x и y в это равенство можно подставить любые две из четырёх величин T, S, P и V. Пусть, например, состояние системы изменяется вследствие изменения объёма на dV и температуры на dT; вычислим обусловленное этим изменение энтропии dS.

Это значит, что в равенстве (43.8) мы вместо x и y должны подставить соответственно x = V и y = T, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial V}\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial T}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial V};$$

но если T и V – независимые переменные, то $\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial V}{\partial T} = 0$ и, следовательно, имеем:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V. \tag{43.9}$$

Кроме того, учтём, что dS есть полный дифференциал:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV. \tag{43.10}$$

Последнее равенство означает, что полное увеличение энтропии складывается из увеличений энтропии, вызванных отдельно увеличением температуры и увеличением объёма. Из (43.9) и (43.10) следует:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV. \tag{43.11}$$

Первое слагаемое в правой части (43.11) представляет собою изменение энтропии $(dS)_V$, вызванное только изменением температуры при неизменном объёме ($dV = 0$). Согласно определению [см. (43.1)]

$$(dS)_V = \frac{(dQ)_V}{T},$$

где $(dQ)_V$ – это количество теплоты, сообщённое телу для изменения его состояния при постоянном объёме, т.е.

$$(dQ)_V = C_V dT,$$

здесь C_V – теплоёмкость тела при постоянном объёме; следовательно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT = \frac{C_V}{T} dT,$$

и окончательно

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV. \tag{43.12}$$

Таким образом, мы выразили dS через измеряемые на опыте величины P, V, T и C_V.

Аналогично можно выразить изменение энтропии dS через изменение температуры dT и давления dP, т.е. выбрав независимыми переменными T и P. Для этого в уравнение (43.8) нужно вместо x и y подставить T и P. Получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial P}{\partial P}\frac{\partial V}{\partial T}.$$

Но $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{\partial P}{\partial T} = 0$, потому что T и P – независимые переменные. В результате получается уравнение, аналогичное (43.9):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \qquad (43.13)$$

и соответственно по аналогии с (43.12)

$$dS = \frac{C_P}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP. \qquad (43.14)$$

Интегрируя (43.12) и (43.14), можно вычислить энтропию S(V, T) данной массы (например, 1 моля) вещества при данных значениях объёма V и температуры T, или энтропию S(P, T) при данных значениях давления P и температуры T, если известны значения энтропии $S(V_0, T_0)$ и $S(P_0, T_0)$ при каких-нибудь других значениях параметров V_0 и T_0 или P_0 и T_0. Очевидно, что

$$S(V, T) - S(V_0, T_0) = \int_{T_0, V_0}^{T, V_0} \frac{C_V dT}{T} + \int_{T, V_0}^{T, V} \left(\frac{dP}{dT}\right)_V dV$$

и

$$S(P, T) - S(P_0, T_0) = \int_{P_0, T_0}^{P_0, T} \frac{C_P dT}{T} - \int_{P_0, T}^{P, T} \left(\frac{dV}{dT}\right)_P dP.$$

В частности для 1 моля идеального газа

$$\int_{T_0}^{T} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln\frac{T}{T_0},$$

$$\int\limits_{V_0}^{V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV = R\ln\frac{V}{V_0}, \qquad \text{так как} \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V};$$

получаем:

$$\Delta S = S(V, T) - S(V_0, T_0) = C_V \ln\frac{T}{T_0} + R\ln\frac{V}{V_0}.$$

Из последнего выражения, в частности, видно, что энтропия возрастает как с увеличением объёма газа, так и с увеличением температуры. Так, если идеальный газ расширяется изотермически, т.е. $T = T_0$, то изменение энтропии

$$\Delta S = R\ln\frac{V}{V_0}. \tag{43.15}$$

Зависимость внутренней энергии от объёма. У неидеальных газов внутренняя энергия U зависит не только от температуры T, но и от объёма V (плотности) газа: $U = U(T, V)$. Изменение внутренней энергии, вызванное изменением объёма при постоянной температуре, определяется уравнением:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$$

Пользуясь полученными термодинамическими соотношениями, выведем это важное уравнение. Для этого используем снова термодинамическое тождество (43.4) в виде:

$$dS = \frac{dU + PdV}{T} = \frac{1}{T}dU + \frac{1}{T}PdV.$$

Из того, что dU есть полный дифференциал, следует, что

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT,$$

т.е. полное изменение внутренней энергии системы складывается из изменений, вызванных отдельно изменением объёма $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$ и изменением температуры $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$. Отсюда в свою очередь следует:

$$dS = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]dV + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT.$$

Сопоставим с этим выражением полученное выше равенство (43.11):

$$dS = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT.$$

Из сравнения коэффициентов при dV в обоих равенствах становится очевидным, что

$$\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

откуда и получается интересующее нас выражение:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \qquad (43.16)$$

Полезно заметить, что выражение $T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ есть не что иное, как $\frac{dQ}{dV}$, т.е. количество теплоты, приходящееся на единицу изменения объёма, которое нужно сообщить телу для того, чтобы его объём возрос, но температура при этом осталась постоянной.

Для идеального газа

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = P \quad \text{и поэтому} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0.$$

Применим (43.16) для вычисления внутренней энергии газа, состояние которого описывается уравнением Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

В этом случае, как легко видеть,

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{RT}{V-b} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}.$$

Отсюда

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV$$

и, следовательно,

$$U = \int C_V dT + \int \frac{a}{V^2} dV = C_V T - \frac{a}{V} + B,$$

где B – постоянная интегрирования.

Ее значение можно определить из условия, что при $V \to \infty$, т.е. когда газ становится бесконечно разрежённым, он должен обладать свойствами идеального газа, для которого

$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия такого газа складывается из кинетической энергии молекул ($C_V T$), которая определяется температурой, и потенциальной энергии $\left(-\frac{a}{V}\right)$, обусловленной силами взаимодействия молекул. Понятно, что потенциальная энергия убывает с увеличением расстояния между молекулами (потому что при этом убывают силы взаимодействия), т.е. с увеличением объёма, занимаемого газом.

§ 2.44 Энтропия при обратимых процессах в замкнутой системе

Замкнутой называется система, изолированная от какого-либо внешнего воздействия. Такую систему всегда можно разбить на составляющие ее подсистемы, слабо взаимодействующие между собой. В данном случае система замкнута в том смысле, что она изолирована от внешних источников теплоты, как отдающих ей тепло, так и поглощающих теплоту. Очевидно, что если процесс изменения состояния в такой системе обратимый, то изменение энтропии равно нулю, так как в равенстве

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

равна нулю величина dQ. При адиабатном изменении состояния замкнутой системы ее энтропия остаётся неизменной.

Правда, над такой системой внешние по отношению к ней тела могут совершать работу, и сама система может совершать работу над внешними телами. В этом случае считать систему замкнутой нельзя.

Можно показать, что при любом обратимом изменении состояния замкнутой системы энтропия не изменяется. В самом деле, пусть некоторое тело, способное расширяться или сжиматься, обменивается теплом с источниками теплоты – получает теплоту от одних источников или передаёт теплоту другим. Пусть также над телом совершается работа или тело само совершает работу. Назовём те тела, которые совершают работу или над которыми совершается работа, источниками работы. Рассмотрим замкнутую систему, включающую и тело, и источники теплоты, и источники работы.

Пусть состояние тела обратимо изменяется из-за того, что оно обменивается теплотой с источниками теплоты, и из-за того, что оно совершает работу или над ним совершается работа. Совершение работы не приводит к какому-либо изменению энтропии. Энтропия изменяется только при обмене теплотой между телом и источниками теплоты. Если тело, например, получило от источника теплоту, которую мы обозначим через $dQ_{тела}$, то его энтропия изменилась на величину $\frac{dQ_{тела}}{T}$, где T – температура тела. Но при этом источник потерял такое же количество теплоты. Если обозначить количество потерянной теплоты через $dQ_{ист}$, то очевидно, что $dQ_{тела} = -\, dQ_{ист}$. При этом энтропия источника теплоты изменится на величину $-\,\frac{dQ_{ист}}{T}$, где T – температура источника. Так как процесс обмена теплотой обратимый, то температура тела должна быть равна температуре источника. Иначе будет происходить необратимый процесс теплопроводности. Ясно поэтому, что

$$\frac{dQ_{тела}}{T} = -\,\frac{dQ_{ист}}{T}, \qquad \text{или} \qquad dS_{тела} = -\,dS_{ист}.$$

Общее же изменение dS энтропии всей замкнутой системы равно нулю:

$$dS = dS_{тела} + dS_{ист} = 0.$$

Следовательно, энтропия замкнутой системы при любом обратимом процессе в ней остаётся неизменной.

Нужно отметить, что замкнутая система по истечении достаточно большого промежутка времени всегда приходит в равновесное состояние. Равновесное состояние макроскопической системы однозначно определяется несколькими термодинамическими параметрами. Так, равновесное состояние жидкости или газа с фиксированным числом частиц можно задать двумя параметрами, например, давлением P и объёмом V. В более сложных системах число термодинамических параметров увеличивается. Например, в смеси газов или жидком растворе в их число необходимо включить концентрации отдельных компонентов, а состояние твёрдого тела следует описывать тензором деформации.

§ 2.45 Энтропия при необратимых процессах в замкнутой системе

Важной особенностью энтропии является ее поведение при необратимых процессах.

Выше показано, что для необратимого кругового процесса справедливо соотношение

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

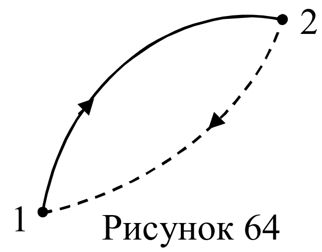


Рисунок 64

Рассмотрим процесс, при котором система необратимым образом переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 (на рисунке 64 он показан сплошной линией). Необратимость перехода означает, что промежуточные состояния неравновесны. Как при таком переходе изменяется энтропия системы? Чтобы это выяснить, вернём систему в первоначальное состояние какимнибудь обратимым путём, например путём, показанным на рисунке 64 пунктирной линией. Получившийся круговой процесс необратим, потому что одна его часть необратима. Поэтому для него справедливо уравнение

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Но

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T}.$$

Второй из двух интегралов, поскольку он относится к обратимому процессу, равен

$$\int_2^1 \frac{dQ}{T} = S_1 - S_2.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_1 - S_2 < 0, \qquad \text{или} \qquad S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Если система замкнута, т.е. изолирована от источников теплоты, то $dQ = 0$ и

$$S_2 - S_1 > 0, \qquad \text{или} \qquad S_2 > S_1.$$

Отсюда следует, что энтропия замкнутой (т.е. адиабатно изолированной) системы при необратимом процессе возрастает.

Таким образом, энтропия замкнутой системы либо остаётся постоянной, либо возрастает. Это закон возрастания энтропии при необратимых процессах – одна из важнейших особенностей энтропии. Возрастание энтропии в естественно идущих процессах, позволяет судить, какое направление процесса возможно, и какое нет, какое состояние является начальным, и какое конечным.

Если, например, смешать две массы воды с разными температурами, то нетрудно убедиться, что сумма энтропий обеих масс до смешивания меньше энтропии смеси, имеющей промежуточную температуру. Ясно, что процесс смешения может идти сам собой, но обратный процесс разделения смешанных масс ни в коем случае идти не может, так как он сопровождался бы уменьшением энтропии.

Рост энтропии в любом процессе продолжается не беспредельно, а лишь до определённого максимального значения, характерного для данной системы. Это максимальное значение энтропии соответствует состоянию равновесия, и после того, как оно достигнуто, какие бы то ни было изменения состояния без внешнего воздействия прекращаются.

Закон возрастания энтропии при необратимых процессах также часто называют вторым началом термодинамики.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие этот закон.

Увеличение энтропии при теплопередаче. Если привести в соприкосновение два тела 1 и 2, температуры которых соответственно равны T_1 и T_2, то теплота будет переходить от более нагретого тела к менее нагретому, в результате чего температуры обоих тел будут выравниваться.

Пусть $T_1 > T_2$. Вычислим изменение энтропии, которым сопровождается этот необратимый процесс.

Состояние тела 1 изменяется при этом за счёт потери им некоторого количества теплоты $-\,dQ$; соответственно тело 2 изменяет своё состояние за счёт получения такого же количества теплоты dQ.

Для определения изменения энтропии системы, состоящей из обоих тел, нужно вычислить значения $\frac{dQ}{T} = dS$ для какого-нибудь обратимого процесса, приводящего к тому же изменению состояния системы. Таким процессом может служить, например, процесс передачи тепла от тела 1 телу 2 при помощи третьего рабочего тела, как это было сделано при рассмотрении процесса Карно, который осуществляется обратимым путём на всех стадиях. Тогда для тела 1 и, соответственно, для тела 2

$$dS_1 = -\frac{dQ}{T_1}, \qquad dS_2 = \frac{dQ}{T_2}.$$

Общее изменение энтропии обоих тел равно:

$$dS = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) dQ. \tag{45.1}$$

Поскольку $T_1 > T_2$, то $dS > 0$, т.е. энтропия системы возрастает.

Приведённое рассуждение не зависит от того, посредством какого процесса осуществлён переход теплоты от тела 1 к телу 2 – теплопроводностью или излучением. Существенно лишь, что температуры обоих тел различны.

Рост энтропии при адиабатном расширении идеального газа в пустоту. Расширение газа в пустоту – процесс необратимый. Покажем теперь, что этот процесс сопровождается возрастанием энтропии.

Представим себе сосуд с теплоизолирующими стенками, разделённый на две части перегородкой с отверстием, закрытым заслонкой (рисунок 65). Пусть одна из частей сосуда, объёмом V_1, заполнена 1 молем идеального газа, в то время как другая свободна от газа. Если открыть заслонку, то газ адиабатно расширится и заполнит весь объём V сосуда. Известно, что при этом температура газа не изменяется (опыт Джоуля).

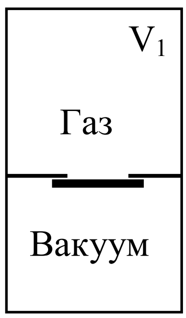


Рисунок 65

На первый взгляд, кажется, что энтропия газа при таком расширении не должна измениться, поскольку от него не отводится и к нему не подводится теплота. Однако это не так. Процесс расширения в описанном опыте - необратимый, и к нему нельзя применять соотношение $dS = \frac{dQ}{T}$. При необратимом процессе величина $\frac{dQ}{T}$

не является дифференциалом какой-либо функции состояния. В частности, интеграл $\int \frac{dQ}{T}$ не равен изменению энтропии.

В действительности энтропия газа при адиабатном расширении в пустоту изменяется. Чтобы найти это изменение, нужно вычислить изменение энтропии при каком-нибудь обратимом процессе, приводящем к такому же изменению состояния. Таким процессом может быть, например, обратимое изотермическое расширение газа при той же температуре. В § 2.43 показано, что при изотермическом обратимом расширении 1 моля газа в пустоту изменение энтропии ΔS равно:

$$\Delta S = R\ln\frac{V}{V_1}. \tag{45.2}$$

Так как $V > V_1$, то $\Delta S > 0$, т.е. энтропия при расширении газа возрастает.

Рост энтропии при взаимной диффузии газов. Если привести в соприкосновение два различных газа, то они сами собой, без всякого внешнего воздействия, перемешаются благодаря взаимной диффузии. Обратный процесс, т.е. разделение газовой смеси на ее компоненты, сам собой не происходит и возможен только при определённом внешнем воздействии. Перемешивание газов – это необратимый процесс, и он должен поэтому сопровождаться ростом энтропии.

Действительно, представим себе, что в сосуде объёмом V_1 находится 1 моль некоторого идеального газа. В другом сосуде объёмом V_2 содержится 1 моль другого газа. Соединим вместе оба сосуда. Газы тогда смешаются, и образовавшаяся смесь займёт объём $V = V_1 + V_2$. Этот процесс можно рассматривать как расширение каждого из газов: первый расширился от объёма V_1 до объёма V, второй – от объёма V_2 до объёма V. При этом энтропия первого газа, как мы только что видели, изменяется на величину $R\ln\frac{V}{V_1}$, второго – на величину $R\ln\frac{V}{V_2}$. Общее же изменение энтропии ΔS выразится равенством:

$$\Delta S = R\left(\ln\frac{V}{V_1} + \ln\frac{V}{V_2}\right). \qquad (45.3)$$

Так как и V_1 и V_2 меньше, чем V, то $\Delta S > 0$, т.е. энтропия системы возросла.

Формула Больцмана.

Выше были охарактеризованы некоторые свойства энтропии. Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике, энтропия служит мерой термодинамической вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния системы. **Термодинамическая вероятность Ω** состояния системы – это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние (по определению, $\mathbf{\Omega} \geq 1$, т.е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле, последняя ≤ 1).

Больцман доказал, энтропия S определяется логарифмом числа микросостояний, посредством которых реализуется рассматриваемое макросостояние, т.е.

$$S = k\cdot\ln\mathbf{\Omega}, \qquad (45.4)$$

где k – постоянная Больцмана.

Это равенство называется формулой Больцмана.

Формула (45.4) позволяет дать энтропии очень наглядное толкование. Чем более сильно упорядочена система, тем меньше число микросостояний, которыми осуществляется макросостояние. Допустим, например, что все атомы закреплены в определённых местах. Тогда существует только одно микросостояние, а соответствующая ему энтропия равна нулю. Чем больше число микросостояний, тем больше разупорядочена система. Поэтому можно сказать, что энтропия является мерой упорядоченности системы. В состоянии равновесия энтропия достигает своего максимального значения, поскольку равновесие есть наиболее вероятное состояние, совместимое с фиксированными условиями и, следовательно, является макросостоянием, осуществляемым посредством максимального числа микросостояний. Очевидно, что система, предоставленная самой себе, движется в направлении равновесного состояния, т.е. энтропия должна возрастать в предоставленной самой себе системе. Это одна из формулировок второго начала термодинамики

Из необратимости реальных процессов следует, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии – **принцип возрастания энтропии.** При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор, пока вероятность состояния не станет максимальной.

§ 2.46 Второе начало термодинамики и превращение теплоты в работу

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, но в природе они не осуществляются. Второе начало термодинамики даёт ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет, определяет направление развития процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса, второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики: в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает. Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрастать, оставаться постоянной). Кроме того, энтропия остаётся постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

1) по Кельвину: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу. На первый взгляд может показаться, что такой формулировке противоречит, например, процесс изотермического расширения идеального газа. Действительно, вся теплота, полученная идеальным газом от какого-то тела, превращается полностью в работу. Однако получение теплоты и превращение ее в работу – не единственный конечный результат процесса; кроме того, в результате процесса происходит изменение объёма газа. В тепловой машине превращение теплоты в работу обязательно сопровождается дополнительным процессом – передачей некоторого количества теплоты Q_2 более холодному телу, вследствие чего получаемое от более нагретого тела количество теплоты Q_1 не может быть превращено полностью в работу.

2) по Клаузиусу: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Не следует представлять дело так, что второе начало вообще запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. В холодильной машине как раз совершается такой переход. Однако этот переход не является единственным результатом процесса. Он сопровождается изменениями в окружающих телах, связанных с совершением над системой работы A'.

Легко убедиться в том, что утверждение, содержащееся в формулировке Кельвина, логически вытекает из утверждения, заключающегося в формулировке Клаузиуса. В самом деле, работа может быть полностью превращена в теплоту, например, при посредстве трения. Поэтому, превратив с помощью процесса, запрещённого формулировкой Кельвина, теплоту, отнятую от какого-нибудь тела, полностью в работу, а затем, превратив эту работу при посредстве трения в теплоту, сообщаемую другому телу с более высокой температурой, осуществился бы процесс, невозможный согласно формулировке Клаузиуса. Отсюда следует эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса.

Когда механическая энергия переходит в теплоту, то этот процесс идёт очень просто: вся механическая энергия целиком превращается в теплоту. Обратный процесс получения механической работы за счёт теплоты, производится в тепловой машине. Даже у наилучшей из мыслимых тепловых машин, т.е. работающей по циклу Карно, коэффициент полезного действия всегда меньше единицы (см. (41.12)):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Таким образом, возможности непрерывного (циклического) получения работы за счёт теплоты определённым образом ограничены в том смысле, что тепло, заимствованное у источника, не может быть целиком превращено в работу.

Легко убедиться в том, что именно второе начало термодинамики накладывает эти ограничения.

Невозможно построить циклически действующую машину, единственным результатом действия которой является производство работы за счёт охлаждение теплового резервуара. Если бы это было возможным, то по своему значению такая тепловая машина не уступала бы «вечному двигателю», поскольку могла бы производить работу за счёт практически неисчерпаемых запасов энергии атмосферы и мирового океана. Построение такого двигателя не противоречит закону сохранения энергии.

Описанная гипотетическая тепловая машина, действие которой заключается только в том, что в ней за счёт теплоты совершается механическая работа, названа Вильгельмом Оствальдом вечным двигателем второго рода, в отличие от вечного двигателя первого рода, в котором, в нарушение закона сохранения энергии, создаётся больше работы, чем потрачено энергии. Коэффициент полезного действия этой машины был бы равен единице, так как при изотермическом процессе расширения идеального газа $dA = dQ$.

В действительности такая машина действовать не может. При этом, однократное превращение тепла в работу вполне возможно – оно не противоречит ни первому, ни второму началам термодинамики. Однако циклический процесс невозможен.

Иногда второе начало термодинамики даже формулируют в виде утверждения о невозможности построения вечного двигателя второго рода, подобно тому, как первое начало можно выразить в форме утверждения о невозможности создания вечного двигателя первого рода.

Второе начало термодинамики даёт ответ и на вопрос о том, что требуется для того, чтобы циклическая тепловая машина могла действовать.

Мы не можем просто отнимать с помощью рабочего тела тепло от источника (нагревателя) и превращать это тепло в работу, потому что такой процесс сопровождается уменьшением энтропии нагревателя (рабочее тело совершает круговой процесс и его энтропия остаётся неизменной). Значит, нужно иметь систему, состоящую не из двух тел – нагревателя и рабочего тела, а из трёх, причём роль третьего тела должна заключаться в том, чтобы его энтропия увеличивалась, по крайней мере, на такую величину, на какую уменьшается энтропия нагревателя в результате отнятия от него тепла ($dS = dQ/T$). Для того, чтобы энтропия третьего тела увеличилась, ему надо передать часть теплоты, взятой у нагревателя. Этим третьим телом и является холодильник. Так как его температура ниже, то и теплоты ему нужно передать меньше, чем отнято у нагревателя, так что часть этой теплоты может быть превращена в работу. При этих условиях энтропия системы «нагреватель – рабочее тело – холодильник» остаётся постоянной, что уже допускается вторым началом термодинамики, запрещающим лишь процессы с уменьшением энтропии.

Отсюда и следует, что принципиально нельзя с помощью циклически действующей машины превратить в работу всю теплоту, полученную рабочим телом от нагревателя. Часть ее мы непременно должны передать холодильнику. Это и есть та цена, которую нужно уплатить за то, чтобы другая часть тепла превращалась в работу.

Заметим, что в реальной машине нельзя обеспечить полностью обратимые процессы на всех стадиях цикла. Поэтому энтропия не будет оставаться постоянной, а будет расти. Это, в свою очередь, означает, что в реальной машине холодильнику придётся передать больше тепла, чем то, которое определяется равенством $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

Следовательно, в этом случае большая, чем в обратимой машине часть теплоты, полученной от нагревателя, станет недоступной для превращения в работу, и КПД машины будет меньше, чем КПД, рассчитанный для обратимого цикла Карно.

С энтропией связана и свободная энергия, представляющая собой ту часть энергии, которую при изотермическом процессе ($dT = 0$) можно превратить в механическую работу.

Напишем уравнение закона сохранения энергии:

$$dQ = dU + dA.$$

Так как $dS = dQ/T$, то $dQ = TdS$, и наше уравнение принимает вид:

$$dU = TdS - dA. \tag{46.1}$$

Из равенства (46.1) следует, что

$$-dA = dU - TdS = d(U - TS), \qquad \text{или} \qquad dA = -d(U - TS)$$

(так как $T = \text{const}$, то $SdT = 0$).

Последнее равенство показывает, что работа dA при изотермическом процессе равна изменению некоторой функции $U - TS$, которая и представляет собой, очевидно, свободную энергию системы F:

$$F = U - TS. \tag{46.2}$$

Свободная энергия, т.е. энергия, способная дать механическую работу, равна, следовательно, внутренней энергии U за вычетом величины TS. Ясно, что TS представляет собой ту часть энергии, которая не может быть превращена в работу, и она тем больше, чем больше энтропия. Поэтому величину TS иногда называют связанной энергией.

Второе начало термодинамики устанавливает, что необратимые процессы (а такими являются практически все тепловые процессы, во всяком случае, все естественно протекающие процессы) идут так, что энтропия системы тел, участвующих в процессе, растёт, стремясь к максимальному значению. Максимальное значение энтропии достигается тогда, когда система приходит в состояние равновесия.

Вместе с тем, сама необратимость тепловых процессов связана с тем, что переход к равновесному состоянию является подавляюще более вероятным по сравнению со всеми другими переходами. Поэтому и наблюдаются только те изменения состояния, при которых система переходит из менее вероятного в более вероятное состояние. Бросается в глаза сходство поведения обеих величин – энтропии и вероятности: обе они растут при переходе к равновесию.

С учётом сказанного можно несколько иначе трактовать второе начало термодинамики. Оно теперь означает, что всякий процесс в природе протекает так, что система переходит в состояние, вероятность которого больше. Вместе с тем утверждение, содержащееся во втором начале, теряет свою категоричность. Ведь тот факт, что всякий сам собой идущий процесс ведёт к состоянию с большей вероятностью, не означает, что другое направление процесса невозможно. Он только означает, что переход к равновесию лишь более вероятен, чем самопроизвольное удаление от равновесного состояния. Поэтому второе начало на самом деле надо понимать так, что если система находится в каком-то состоянии с данной энтропией, то с подавляющей вероятностью следует ожидать, что она перейдёт в состояние с большей энтропией, т.е. что наиболее вероятным изменением энтропии является ее возрастание. Принципиально же мыслимы и процессы, сопровождающиеся уменьшением энтропии.

Следует здесь напомнить, что флуктуации, о которых уже не раз упоминалось, представляют собой такие изменения состояния, которые сопровождаются уменьшением энтропии (и, конечно, вероятности). Но эти малые отклонения от равновесного состояния не противоречат второму началу. Они являются неизбежным следствием именно вероятностного характера энтропии.

§ 2.47 Теплоёмкость неидеальных газов

Для идеальных газов молярная (или удельная) теплоёмкость не зависит ни от температуры, ни от объёма, занимаемого газом. Это связано с тем, что внутренняя энергия U идеального газа не зависит от объёма, занимаемого молем (или единицей массы) этого газа, т.е. от плотности, и определяется только температурой. Но это верно только для идеального газа. Для неидеального газа, как и вообще для любого тела, внутренняя энергия U может зависеть не только от температуры, но и от объёма, занимаемого данной массой газа (см. § 2.43). Это связано с тем, что в неидеальных газах внутренняя энергия складывается из кинетической энергии молекул, зависящей от температуры, и потенциальной энергии, которая, конечно, зависит от взаимного расстояния между молекулами, т.е. от плотности.

Следовательно, для неидеальных газов внутренняя энергия U одного моля является функцией температуры T и занимаемого им объёма V:

$$U = U(T, V).$$

В этом случае молярная теплоёмкость

$$C = \frac{dQ}{dT} \tag{47.1}$$

уже не может быть выражена простыми формулами (29.3), (29.5) или (30.3), (30.4).

Вычислим теплоёмкость неидеального газа. Подставим в (47.1) вместо dQ выражение согласно первому началу термодинамики $dQ = dU + PdV$, тогда

$$C = \frac{dU + PdV}{dT}.$$

Но теперь изменение внутренней энергии dU складывается из двух частей: 1) части, зависящей только от изменения температуры при неизменном объёме, которую обозначим $(dU)_V$, и 2) части $(dU)_T$, зависящей только от изменения объёма при неизменной температуре. Очевидно, что

$$(dU)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT,$$

где $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ – это изменение внутренней энергии, приходящееся на единицу изменения температуры при постоянном объёме.

Точно так же

$$(dU)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV.$$

Следовательно,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV.$$

Соответственно, теплоёмкость C

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\frac{dV}{dT}. \qquad (47.2)$$

Выражение (47.2) для теплоёмкости является общим, пригодным для всех изотропных тел. Оно отличается от полученного ранее выражения для теплоёмкости идеальных газов (29.3) тем, что в него входит слагаемым величина $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \frac{dV}{dT}$, которая для идеального газа равна нулю, так как $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$. Для теплоёмкости при постоянном объёме C_V из (47.2) получается известное уже выражение:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \qquad (dV = 0).$$

Теплоёмкость же при постоянном давлении

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \qquad (47.3)$$

Все величины, входящие в правую часть (47.3), могут быть измерены на опыте, кроме величины $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, которая на опыте не измеряется.

Однако, согласно (43.16)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$$

Подставив это выражение в (47.3), получаем:

$$C_P = C_V + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \qquad (47.4)$$

и соответственно

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Как и следовало ожидать, для идеального газа

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = R.$$

что непосредственно следует из уравнения PV = RT. Для неидеальных газов разность $C_P - C_V$ может существенно отличаться от R.

§ 2.48 Термодинамическая шкала температур

В § 2.22, рассматривая способы измерения температуры, отмечалось, что при таких измерениях возникает серьёзное затруднение. Оно заключается в том, что температурные шкалы, устанавливаемые с помощью различных термометрических тел, не совпадают друг с другом.

Сейчас мы, однако, познакомились с одним свойством, которое совершенно не зависит от рода вещества и которое поэтому может служить безупречным термометрическим свойством для установления температурной шкалы. Свойство это состоит в том, что любое вещество, если его использовать в качестве рабочего тела в обратимой тепловой машине, даёт один и тот же коэффициент полезного действия (разумеется, при одних и тех же температурах нагревателя и холодильника).

Если рабочее тело, каково бы оно ни было, поглощает при температуре T_1 теплоту Q_1 и отдаёт холодильнику при температуре T_2 теплоту Q_2, то справедливо соотношение (см. (41.11)):

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \qquad \text{или} \qquad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{48.1}$$

Последнее соотношение, справедливое для любого вещества, позволяет использовать машину Карно в качестве своеобразного термометра. Правда, этот «термометр» позволяет определить лишь отношение двух температур T_1 и T_2, а не сами температуры. Но если условиться о том, чтобы одной из этих температур приписать определённое численное значение или выбрать тем или иным образом размер градуса, то тем самым будет определён и искомая температура[2]. Таким образом, будет установлена температурная шкала, не зависящая от рода вещества, т.е. шкала, физически безупречная.

Поясним примером способ измерения температуры таким необычным «термометром». Пусть требуется измерить температуру T некоторого тела, причём никаких термометров, кроме машины Карно, в нашем распоряжении нет.

Возьмём в качестве нагревателя в машине Карно резервуар тепла при температуре кипения воды (измерять эту температуру мы, разумеется, не будем, так как нет термометра для этой цели), а в качестве холодильника – резервуар тепла при температуре тающего льда (которую мы по той же причине также не станем измерять). Разность температур между нагревателем и холодильником разделим на 100 частей (градусов); впрочем, можно выбрать и любое другое число, так же как и любые другие резервуары тепла. Кроме машины Карно нам потребуется ещё калориметр для измерения количеств теплоты Q_1 и Q_2. Ведь в «термометре» Карно термометрическая задача превращается в калориметрическую!

Проведём теперь обратимый цикл Карно между выбранными нами нагревателем и холодильником, используя любое рабочее тело (ведь от него ничего не зависит), и измерим количество теплоты $Q_{нагр}$, полученное от нагревателя, и количество теплоты $Q_{хол}$, отданное холодильнику. Обозначим через $T_{нагр}$, $T_{хол}$ и T температуры (пока неизвестные) кипящей воды, тающего льда и исследуемого тела. Тогда можно записать:

$$\frac{Q_{нагр}}{Q_{хол}} = \frac{T_{нагр}}{T_{хол}}. \quad (48.2)$$

Затем проведём ещё раз цикл Карно, но с исследуемым телом в качестве холодильника и с прежним нагревателем, или, наоборот, с прежним холодильником, но с исследуемым телом в качестве нагревателя. Измерив опять теплоту, полученную от

[2] По решению X Генеральной конференции по мерам и весам 1954 года температурой, которой приписывается определённое численное значение, является температура тройной точки воды. Она считается равной 273,16 К.

нагревателя $Q_{нагр}$, которая останется такой же, как и в первом опыте, и теплоту $Q_{хол}$, отданное холодильнику, мы опять сможем написать соотношение

$$\frac{Q_{нагр}}{Q_{хол}} = \frac{T_{нагр}}{T}. \qquad (48.3)$$

Таким образом, получаем два уравнения (48.2) и (48.3) для определения трёх величин $T_{нагр}$, $T_{хол}$ и T. Но мы можем, кроме того, написать третье уравнение, определяющее размер градуса:

$$T_{нагр} - T_{хол} = 100.$$

Этих трёх уравнений достаточно для определения искомой температуры T и величин $T_{нагр}$ и $T_{хол}$.

Остаётся ещё добавить, что можно пустить тепловую машину и в обратном направлении, так, чтобы она работала как холодильная машина. Тогда пришлось бы измерять количество тепла, переданное от холодильника к нагревателю, и величину внешней работы, потраченной на это.

Конечно, никто и никогда не измерял температуру таким необычным способом, к тому же и технически невыполнимым. Но в этом и нет нужды, потому что установленную с помощью машины Карно температурную шкалу можно воспроизвести, используя какое-нибудь конкретное вещество с хорошо известными свойствами. Таким веществом является, например, идеальный газ, для которого точно известно уравнение состояния. Как было показано, формула (48.1) получается, если использовать идеальный газ в качестве рабочего тела в машине Карно. Можно показать, что температуры, измеренные по шкале газового термометра, где температура получается из формулы

$$T = \frac{PV}{R},$$

в точности совпадает с температурой, которая была бы получена, если бы был проведён описанный выше опыт.

Заметим, что температурная шкала, основанная на свойствах обратимой машины Карно, называется термодинамической шкалой температур. Она была предложена Кельвином и поэтому выраженные в этой шкале температуры измеряются в кельвинах.

Что касается нуля термодинамической шкалы, то из формулы (41.12) видно, что нулём должна служить температура, при которой $Q_2 = 0$. В этом случае коэффициент полезного действия машины Карно равен единице, и, следовательно, более низкой температуры быть не может, так как КПД не может превышать единицу.

Поскольку термодинамическая шкала температур совпадает со шкалой идеального газа, то и нуль шкалы Кельвина совпадает с абсолютным нулём температуры, определённым ранее. Следует впрочем, заметить, что согласно второму началу термодинамики коэффициент полезного действия тепловой машины никогда не может быть равен единице: количество теплоты, полученной от нагревателя, не может быть целиком преобразовано в механическую работу. Поэтому и абсолютный нуль температуры не может быть достигнут.

§ 2.49 Третье начало термодинамики

Многочисленные опыты показывают, что с понижением температуры во всякой системе наблюдается тенденция ко всё большей степени упорядоченности. На это указывают исследования строения тел, магнитные их свойства и многие другие данные. Можно полагать, что упорядоченное состояние отвечает меньшей энергии частиц, образующих тело, но что установлению порядка при высоких температурах препятствует тепловое движение. Если бы можно было охладить тело до абсолютного нуля, когда тепловые движения не могут мешать установлению порядка, то в системе установился бы максимальный мыслимый порядок, и этому состоянию соответствовала бы минимальная энтропия.

Возникает, однако, вопрос: как бы вело себя тело при абсолютном нуле, если бы над ним совершалась внешняя работа (например, под давлением)? Может ли изменяться энтропия тела, находящегося при абсолютном нуле?

На основании многих опытов, проводившихся при низких температурах, был сделан важный вывод, который формулируется в следующем виде (Нернст, 1906 г.): при абсолютном нуле температуры любые изменения состояния происходят без изменения энтропии.

Это утверждение обычно называют теоремой Нернста. Иногда его возводят в ранг третьего начала термодинамики.

Как было показано выше, вероятностная трактовка понятия энтропии позволяет сделать вывод о том, что энтропия при абсолютном нуле температуры равна нулю, что, конечно, не противоречит формулировке Нернста.

Из того факта, что при T = 0 и энтропия равна нулю, следует, что абсолютный нуль принципиально недостижим, так как нетрудно показать, что если бы существовало тело с температурой, равной нулю, то можно было бы построить вечный двигатель второго рода, что не противоречит второму началу термодинамики. Иногда третье начало термодинамики и формулируют как принцип недостижимости абсолютного нуля.

Из третьего начала термодинамики следуют важные выводы о поведении вещества при очень низких температурах. Так, например, из него вытекает, что с понижением температуры теплоёмкость тел должна стремиться к нулю вместе с температурой, а при абсолютном нуле она должна быть равна нулю. Опыт хорошо подтверждает эту тенденцию. Можно показать, что должны стремиться к нулю (а при T = 0 стать равными нулю) коэффициент теплового расширения тел, коэффициент сжимаемости и т.д. Всё это, впрочем, относится к системам, находящимся в равновесном состоянии, энтропия при абсолютном нуле может и отличаться от нуля.

Контрольные вопросы к § 2.20 – § 2.32

1 Дайте определение теоретической модели идеального газа.

2 Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры вам известны?

3 Каков физический смысл постоянной Авогадро? универсальной газовой постоянной?

4 В чём заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? термодинамической температуры?

5 Дайте соотношения между температурными шкалами Кельвина, Цельсия и Фаренгейта.

6 В чём содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов?

7 Какие единицы измерения давления вы знаете?

8 Каков физический смысл функции распределения молекул по скоростям?

9 В каком случае движение молекул полностью беспорядочно (хаотично)?

10 Опишите опыт Штерна.

11 Что такое внутренняя энергия идеального газа? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?

12 Что такое теплоёмкость газа? молярная теплоёмкость при постоянном объёме и при постоянном давлении? Какая из молярных теплоёмкостей C_V или C_P больше и почему? Что такое число степеней свободы молекул газа?

13 Чему равна работа изобарного расширения 1 моля одноатомного идеального газа при нагревании на 1 К?

14 Дайте вывод уравнения Пуассона. Чему равен показатель адиабаты?

15 Запишите уравнение адиабатического процесса в координатах T-V и T-P.

16 Как изменяется температура газа при его адиабатическом сжатии?

17 Чему равна работа расширения идеального газа в пустоту?

18 Какие процессы называются квазистатическими (равновесными)?

19 Какой процесс изменения состояния системы называют круговым, или циклическим?

20 Чему равен механический эквивалент теплоты?

21 Что понимают под количеством теплоты?

22 Дайте определения первого начала термодинамики. Что оно выражает?

Контрольные вопросы к § 2.33 – § 2.48

1 Каков характер межмолекулярных сил взаимодействия и потенциальной энергии взаимодействия молекул?

2 Чем отличаются реальные газы от идеальных?

3 Что такое критическое состояние вещества?

4 Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?

5 Кроме уравнения Ван-дер-Ваальса какие уравнения состояния реальных газов вам известны?

6 Каковы различия между изотермой Ван-дер-Ваальса и опытной изотермой?

7 Как выражаются постоянные Ван-дер-Ваальса через критические параметры вещества?

8 Запишите приведённое уравнение состояния вещества. Что называют законом соответственных состояний?

9 Проанализируйте соотношение между равновесными и неравновесными, обратимыми и необратимыми процессами.

10 Какой процесс называют циклическим? Чему равна работа, совершённая за цикл?

11 Проанализируйте прямой и обратный циклы.

12 Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?

13 Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?

14 Объясните принцип работы холодильной машины (или нагревателя).

15 Дайте понятие энтропии (определение, размерность и математическое выражение изменения энтропии для различных процессов) для идеального газа.

16 В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы (незамкнутой системы) при любом обратимом процессе?

17 Как может изменяться энтропия в изолированных (неизолированных) системах в зависимости от характера процесса (на примере идеального газа)?

18 Представив цикл Карно на диаграмме в координатах P-V, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершённая над газом; 2) работа, совершённая самим расширяющимся газом.

19 Чем обусловливается максимальность КПД обратимой машины, работающей по циклу Карно?

20 В каком случае КПД цикла Карно повышается больше – при увеличении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

21 Дайте различные формулировки второго начала термодинамики и докажите их эквивалентность.

22 Что представляет собой термодинамическая шкала температур?

23 Сформулируйте теорему Нернста (третье начало термодинамики).

Тесты к § 2.20 – § 2.32

1. Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло $5{,}4^0$ при частоте вращения прибора 150 c^{-1}? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно 2 см.

А) 100 м/с В) 150 м/с С) 200 м/с Д) 250 м/с Е) 300 м/с

2. Определите температуру газа, находящегося в закрытом сосуде, если давление газа увеличивается на 0,4 % первоначального давления при нагреве на 1 ^{0}С.

А) 225 К В) 250 К С) 275 К Д) 300 К Е) 325 К

3. Определите концентрацию молекул водорода, находящегося под давлением $2{,}67 \cdot 10^4$ Па, если среднеквадратичная скорость поступательного движения молекул

при этих условиях равна $2 \cdot 10^3$ м/с. Молярная масса водорода равна $\mu = 2$ г/моль. Число Авогадро равно $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

A) $3 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$ B) $6 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$ C) $5 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$ Д) $4 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$ E) $2 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$

4. Газ занимает объём $V_1 = 8$ л при температуре 300 К. Определите массу газа, если после изобарического нагревания его до температуры $T_2 = 900$ К его плотность стала равна $\rho_2 = 0{,}6$ кг/м^3.

A) 12,4 г B) 13,4 г C) 14,4 г Д) 15,4 г E) 16,4 г

5. Чему равна масса газа в сосуде, если концентрация молекул кислорода в сосуде вместимостью 5 л равна $9{,}41 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$? Молярная масса кислорода $\mu = 32$ г/моль. Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

A) 0,10 г B) 0,25 г C) 0,75 г Д) 1,25 г E) 2,05 г

6. Процесс в идеальном газе сначала идёт так, что давление и объём связаны равенством $P\sqrt{V} = B$. Когда температура газа достигает значения T, процесс продолжается при другом характере зависимости давления от объема: $P = DV^{-2}$. Найдите температуру T, считая константы B и D, газовую постоянную R, а так же количество молей газа ν известными.

A) $\dfrac{D^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{\nu R}$ B) $\dfrac{D^{\frac{1}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{\nu R}$ C) $\dfrac{D^{\frac{1}{3}}B^{\frac{2}{3}}}{\nu R}$ Д) $\dfrac{D^{3}B^{\frac{3}{2}}}{\nu R}$ E) $\dfrac{D^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}}{\nu R}$

7. Найдите объем V_0 засасывающей камеры поршневого насоса, если при откачивании этим насосом воздуха из баллона объёма $V = 4$ л давление уменьшается при каждом цикле в $n = 1{,}2$ раза.

A) 1,25 л B) 0,6 л C) 1,2 л Д) 1 л E) 0,8 л

Тесты к § 2.33 – § 2.48

1. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изохорно так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определите совершённую газом работу. Молярная масса газа μ. Универсальная газовая постоянная R.

A) $\frac{n+1}{n}\frac{m}{\mu}RT$ B) $\frac{n-1}{n}\frac{m}{\mu}RT$ C) $n\frac{m}{\mu}RT$ Д) $\frac{1}{n}\frac{m}{\mu}RT$ E) $\frac{n}{n+1}\frac{m}{\mu}RT$

2. Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно, а затем – изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 4,5 кДж. Чему равна работа газа за весь процесс?

A) 7,0 кДж B) 9,0 кДж C) 8,5 кДж Д) 8,0 кДж E) 7,5 кДж

3. 1 г кислорода первоначально заключён в объёме V_1 = 0,2 л под давлением P_1 = 500 Па. Затем газ расширился, в результате чего объём газа стал равным V_2 = 0,5 л, а давление стало равным P_2 = 200 Па. Считая газ идеальным, определить приращение внутренней энергии газа ΔU.

A) 0,1 Дж B) 0,2 Дж C) 0 Дж Д) 1 Дж E) 2 Дж

4. В ограниченном интервале температур приращение энтропии некоторого вещества оказывается пропорциональным приращению температуры: $\Delta S = \alpha\Delta T$. Как зависит от температуры теплоёмкость C вещества в том же интервале?

A) $C = \alpha T^2$ B) $C = \alpha/T^2$ C) $C = \alpha^2 T$ Д) $C = \alpha/T$ E) $C = \alpha T$

5. 1 г кислорода первоначально заключён в объёме V_1 = 0,2 л под давлением P_1 = 500 Па. Затем газ расширился, в результате чего объём газа стал равным V_2 = 0,5 л, а давление стало равным P_2 = 200 Па. Считая газ идеальным, определить приращение внутренней энергии газа ΔU.

A) 0,1 Дж B) 0,2 Дж C) 0 Дж Д) 1 Дж E) 2 Дж

6. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причём наибольшее давление в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объём в 5 раз больше наименьшего. Определите КПД цикла.

A) 13 % B) 15 % C) 17 % Д) 19 % E) 21 %

7. Гелий в количестве 1 моль, изобарно расширяясь, увеличил свой объём в 4 раза. Найдите приращение энтропии при этом расширении.

A) 59 Дж/К B) 49 Дж/К C) 39 Дж/К Д) 29 Дж/К E) 19 Дж/К

Упражнения для самоконтроля

2.1. Азот массой 1 кг находится при температуре 280 К. Определить: 1) внутреннюю энергию молекул азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул азота. Газ считать идеальным. [1) 208 кДж; 2) 83,1 кДж]

2.2. Углекислый газ массой m = 1 кг находится при температуре 290 К в сосуде вместимостью 20 л. Определить давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Объяснить различие в результатах. Постоянные Ван-дер-Ваальса принять равными $a = 0{,}364$ Н·м^4/моль^2 и $b = 4{,}3\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

[1) 2,44 МПа; 2) 2,76 МПа]

2.3. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передаёт тепло от холодильника с водой при температуре $t_2 = 0\ ^0C$ кипятильнику с водой при температуре $t_1 = 100\ ^0C$. Какую массу воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар воду массой $m_1 = 1$ кг в кипятильнике? Удельная теплота парообразования воды 2,25 МДж/кг, удельная теплота кристаллизации воды 333 кДж/кг. [$m_2 = 4{,}94$ кг]

2.4. Воспользовавшись законом распределении молекул идеального газа по относительным скоростям, определить, какая доля молекул кислорода, находящегося при температуре $t = 0\ ^0C$, имеет скорости от 100 до 110 м/с. [0,4]

2.5. Водород массой m = 20 г был нагрет на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Определить: 1) количество теплоты Q, переданное газу; 2) приращение ΔU внутренней энергии газа; 3) работу A расширения.
[1) 29,3 кДж; 2) 20,9 кДж; 3) 8,4 кДж]

2.6. Тепловая машина, совершая обратимый цикл Карно, за один цикл совершает работу 1 кДж. Температура нагревателя 400 К, а холодильника 300 К. Определить: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за цикл; 3) количество теплоты, отданное холодильнику за цикл.
[1) 25 %; 2) 4 кДж; 3) 3 кДж]

2.7. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу Карно, отнимает от охлаждаемого тела с температурой $t_1 = -10\ ^0C$ количество теплоты $Q_2 = 28$ кДж и передаёт телу с температурой $t_2 = 17\ ^0C$. Чему равен холодильный коэффициент машины ξ_1? [$\xi_1 = 9{,}7$]

2.8. В закрытом сосуде объёмом $V = 0{,}5$ м^3 находится углекислый газ количеством $\nu = 0{,}6$ кмоль при давлении P = 3 МПа. Пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса, найти, во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое. Для углекислого газа считайте известными значения критических температуры $T_к = 304$ К и давления $P_к = 7{,}38$ МПа. [1,85 раза]

2.9. В сосуде объёмом V = 10 л находится масса m = 0,25 кг азота при температуре $t = 27\ ^0C$. Какая часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объёма сосуда составляет собственный объем молекул? Для азота считайте известными значения критических температуры $T_к$ = 126 К и давления $P_к$ = 3,4 МПа.   [4,95 %; 0,86 %]

2.10. Идеальный газ количеством вещества ν = 2 моль сначала изобарно нагрели так, что его объем увеличился в n =2 раза, а затем изохорно охладили так, что давление газа уменьшилось в n = 2 раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов. [11,5 Дж/К]

3 Электричество

§ 3.50 Закон сохранения электрического заряда

Еще в древности было обнаружено, что янтарь, потёртый о шерсть, приобретает способность притягивать пылинки и ворсинки. Однако только в 1600 г. английский врач У. Гильберт подробно исследовал это явление и выяснил, что подобным свойством обладают и другие вещества. Тела, способные, подобно янтарю, после натирания притягивать лёгкие предметы, он назвал наэлектризованными (от греческого *electron* – янтарь). Теперь мы знаем, что на телах в таком состоянии имеются электрические заряды, т.е. они заряжены. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело взаимодействует с другими заряженными телами.

Несмотря на огромное разнообразие веществ в природе, существуют только два рода электрических зарядов: 1) «положительные» – подобные тем, которые возникают на стекле, потёртом о шёлк, 2) «отрицательные» – подобные тем, которые возникают на эбоните, потёртом о мех. Одноимённые заряды друг от друга отталкиваются, разноимённые – притягиваются. Существование двух родов зарядов открыл французский учёный Ш. Дюфе (1733).

Опытным путём в 1910–1914 г.г. американский физик Р. Милликен (1868–1953) показал, что электрический заряд дискретен, т.к. заряд q любого тела является кратным элементарному заряду e (наименьший встречающийся в природе электрический заряд называют элементарным зарядом):

$$q = \pm N \cdot e, \qquad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, N = 1,2,3,... \qquad (50.1)$$

Однако элементарный заряд настолько мал, что возможную величину макроскопических зарядов можно считать изменяющейся непрерывно. Так, например, электрон ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг) и протон ($m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг) являются, соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов. Электрон был открыт в 1897 г. английским физиком Дж. Томсоном. Протон был открыт в 1919 г. английским физиком Э. Резерфордом.

Согласно современным представлениям все вещества состоят из атомов, а каждый атом состоит из ядра и движущихся вокруг него электронов. Размер атома порядка 10^{-10} м, а размер ядра порядка $5 \cdot 10^{-15}$ м, т.е. отношение объёма ядра к объёму атома порядка 10^{-13}. Ядро состоит из протонов и нейтронов. Атомный номер элемента Z в таблице Менделеева равен числу протонов. Общее число Z протонов и N нейтронов в ядре называется массовым числом А: $A = Z + N$. В нормальном состоянии атом имеет Z электронов, т.е. атом электрически нейтрален.

Первая последовательная теория электрических явлений была создана американским ученым Б. Франклином. В 1749 г. он высказал гипотезу, что оба рода электричества представляют собой избыток или недостаток «электрической жидкости». При натирании янтарной палочки мехом часть электрической жидкости переходит к меху, порождая недостаток электричества на палочке. В его теории недостаток электрической жидкости определялся как отрицательное электричество, а избыток – как положительное. Величину избытка или недостатка электричества он назвал зарядом тела. Поэтому на янтаре возникает отрицательный заряд. Когда мы натираем стеклянную палочку, часть электричества переходит от шёлка к стеклу, которое приобретает положительный заряд. После открытия электрона стало ясно, что именно электроны переходят от стеклянной палочки на шёлк. Однако к этому времени представления, введённые Франклином, прочно утвердились в электротехнике. Для того чтобы не менять установившуюся терминологию и маркировку генераторов и моторов, пришлось приписать электронам отрицательный заряд. Мы по-прежнему говорим, что ток течёт от шёлка к стеклянной палочке.

Установив электрическую природу молнии, Франклин осуществил свое главное изобретение – молниеотвод или громоотвод. Штырь молниеотвода на здании не предотвращает удар молнии, а обеспечивает безопасный путь к земле для любой молнии, оказавшейся рядом со штырём. Проволока, соединяющая штырь с влажной землёй, должна быть достаточно массивной, чтобы не сильно нагреваться при проскальзывании молнии. Штырь молниеотвода создаёт защитный конус с углом около 60^0 для всего находящегося под ним. Штырь не разряжает облака, которые обычно находятся гораздо выше. Не оказывает он никакого влияния на то, что молния может оборваться в какой-либо точке небосвода, хотя острый конец штыря и может создавать небольшое локализованное облако заряженного воздуха вокруг себя, увеличивая, таким образом, защищённую область.

Б. Франклин сформулировал фундаментальную гипотезу: при натирании стеклянной палочки шёлком величина положительного заряда палочки в точности равна величине отрицательного заряда, переданного шёлку. Полный заряд изолированной системы палочка – шёлковая ткань остается равным нулю (изолированной или замкнутой называют систему, которая не обменивается заряженными частицами с другими системами). Таким образом, при электризации сумма зарядов двух тел не меняется, – электроны переходят от одного тела к другому.

Все тела в природе способны электризоваться, т.е. приобретать электрический заряд. Электризация тел может осуществляться различными способами (соприкосновением, трением, электростатической индукцией и т.д.), но всегда сводится к разделению зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительного заряда, а на другом (или другой части тела) – избыток отрицательного заряда. Общее количество зарядов обоих знаков, содержащихся в телах, не изменяется: эти заряды только перераспределяются между телами.

Из обобщения опытных данных был установлен фундаментальный закон природы, экспериментально подтверждённый в 1843 г. английским физиком М. Фарадеем (1791–1867), – закон сохранения заряда: алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остаётся неизменной, какие бы процессы не происходили внутри этой системы.

Электрический заряд тела не зависит от выбора (инерциальной) системы отсчёта, в которой он измеряется. Он инвариантен относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

В 1729 г. англичанин С. Грей обнаружил, электричество может перемещаться по нити и другим телам, и ввёл понятия проводник и изолятор (он же открыл явление электростатической индукции).

В зависимости от концентрации свободных зарядов все тела можно делить на проводники, диэлектрики и полупроводники. Проводники – тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объёму. Проводники делятся на две группы:

- проводники первого рода (металлы) – перемещение в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается переносом частиц вещества самого проводника;

- проводники второго рода (например, расплавленные соли, растворы кислот, щёлочей, солей) – перемещение в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) сопровождается химическими превращениями.

Диэлектрики (например, стекло, пластмассы) – тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды. Полупроводники (например, германий, кремний) занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Указанное деление тел является весьма условным, однако большое различие в них концентраций свободных зарядов обуславливает огромные качественные различия в их поведении и оправдывает деление тел на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Единица заряда – кулон (Кл) – является производной единицей и определяется как заряд, проходящий за 1 с через сечение проводника при силе постоянного тока 1 А (1 Кл = 1 А·с). Определение ампера основано на законе магнитного взаимодействия токов.

§ 3.51 Закон Кулона

Закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов установлен в 1785 г. Ш. Кулоном (примерно за 11 лет до Кулона этот закон был получен Г. Кавендишем, однако его работа оставалась неизвестной в течение более 100 лет). К этому времени большинство учёных уже предполагали, что по аналогии с законом Всемирного тяготения сила взаимодействия зарядов должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Точность измерений Кулона была невысокой, но достаточной для того, чтобы показать правдоподобность закона обратных квадратов.

Для заряженных тел произвольных размеров такой закон в общей форме дать нельзя, так как сила взаимодействия протяженных тел зависит от их формы и взаимного расположения. Однако форма тел и их взаимная ориентация перестают сказываться, если размеры тел весьма малы по сравнению с расстоянием между ними. Под точечным зарядом в физике понимают протяженное заряженное тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других зарядов. Понятие точечного заряда, как и материальной точки, является физической абстракцией.

С помощью крутильных весов Кулон измерял силу взаимодействия двух заряженных шариков в зависимости от величины зарядов на них и от расстояния между ними. При этом Кулону в своих опытах не было необходимости знать абсолютную величину зарядов на шариках. Он исходил из того, что при касании к заряженному шарику точно такого же незаряженного шарика заряд распределяется между обоими шариками поровну. Таким образом, Кулон получал равные заряды или известные доли первоначальных зарядов на двух различных шарах.

Закон Кулона: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна величинам зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния R между ними:

$$F = k\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{R^2}, \qquad (51.1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц;

$|q_1|$ и $|q_2|$ – модули зарядов.

Сила **F** (называемая кулоновской) направлена вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие заряды. Она соответствует притяжению в случае разноимённых зарядов и отталкиванию в случае одноимённых зарядов. Опытная проверка закона Кулона проводится в воздухе, так как влияние воздуха на силы взаимодействия очень мало и в большинстве случаев им можно пренебречь.

В векторной форме закон Кулона записывается так:

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{R_{12}^{\ 3}}\mathbf{R}_{12}, \qquad (51.2)$$

где $\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2;

$\mathbf{R}_{12}$ – радиус-вектор, проведенный от заряда q_2 к заряду q_1;

$R = |\mathbf{R}_{12}|$.

На заряд q_2 со стороны заряда q_1 действует сила $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, т.е. взаимодействие электрических точечных зарядов удовлетворяет третьему закону Ньютона.

В СИ коэффициент пропорциональности равен $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, т.е.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1| \cdot |q_2|}{R^2}, \qquad (51.3)$$

Величина ε_0 называется электрической постоянной; она относится к числу фундаментальных физических постоянных и равна $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2), или

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}\ , \tag{51.4}$$

где фарада (Ф) – единица электрической ёмкости.

Тогда

$$k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{9}\ \text{м/Ф}. \tag{51.5}$$

Опыт показывает, что сила взаимодействия двух данных зарядов не изменяется, если вблизи них поместить еще какие-либо заряды (принцип независимости действия сил). Если в окрестности заряда q помещены еще N зарядов q_1, q_2, ..., q_N, то результирующая сила **F**, с которой действуют на q все N зарядов q_i, определяется формулой:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i\ , \tag{51.6}$$

где $\mathbf{F}_i$ – сила, с которой действует на q заряд q_i в отсутствие остальных N-1 зарядов.

Из формулы (51.6), выражающей принцип суперпозиции для силы, следует, что, зная закон взаимодействия между точечными зарядами, можно вычислить силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно мысленно разбить каждое тело на столь малые кусочки с зарядом dq, чтобы их можно было считать точечными, вычислить по формуле (51.2) силу взаимодействия между зарядами dq, взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил.

Иногда, когда заряженное тело конечных размеров нельзя принять за точечный заряд, необходимо знать распределение зарядов внутри тела. При этом для упрощения математических расчетов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру (электроны, ядра), и считать, что они «размазаны» определённым образом в пространстве. Другими словами, удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. Это позволяет значительно упрощать расчеты, не внося сколько-нибудь значительной ошибки. При переходе к непрерывному распределению вводят понятие плотности зарядов – объёмной ρ, поверхностной σ и линейной τ. По определению,

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \tau = \frac{dq}{d\ell}, \tag{51.7}$$

где dq – заряд, заключенный соответственно в объеме dV, на поверхности dS и на длине dℓ.

Опыты Кулона являются не единственным доказательством справедливости закона обратных квадратов. В настоящее время имеется большое количество других экспериментальных данных, показывающих, что закон Кулона выполняется очень точно как для очень больших, так и для очень малых расстояний. В частности, исследования атомных явлений позволяет заключить, что он справедлив, по крайней мере, вплоть до расстояний порядка 10^{-15} м.

§ 3.52 Электростатическое поле. Напряжённость электростатического поля

При исследовании взаимодействия электрических зарядов естественно возникают вопросы: почему появляются силы, действующие на заряды, как они передаются от одного заряда к другому, возникают ли силы только при наличии двух зарядов, происходят ли какие-либо изменения в окружающем пространстве при наличии только одного заряда?

В процессе развития физики существовали два противоположных подхода к ответу на поставленные вопросы. При одном из них предполагалось, что телам присуще свойство действовать на другие тела на расстоянии, без участия промежуточных тел и среды, т.е. предполагалось, что силы могут передаваться от одного тела к другому через пустоту и притом мгновенно (теория дальнодействия). С этой точки зрения при наличии только одного заряда никаких изменений в окружающем пространстве не происходит.

Согласно второму представлению силовые взаимодействия между разобщёнными телами могут передаваться только при наличии какой-либо среды, окружающей эти тела, последовательно от одной части этой среды к другой, и с конечной скоростью (теория близкодействия); даже при наличии только одного заряда в окружающем пространстве происходят определённые изменения.

Современная физика подтверждает теорию близкодействия и отвергает теорию дальнодействия.

Таким образом, для понимания происхождения и передачи сил, действующих между покоящимися зарядами, необходимо допустить наличие между зарядами какого-то физического агента, осуществляющего это взаимодействие. Этим агентом и является электрическое поле. Когда в каком-либо месте появляется электрический заряд, то вокруг него возникает электрическое поле. Основное свойство электрического поля заключается в том, что на всякий другой заряд, помещённый в это поле, действует сила.

Рассматривая взаимодействие покоящихся зарядов, мы приходим к понятию электрического поля. Подобным же образом, рассматривая магнитное взаимодействие движущихся зарядов (токов) или постоянных магнитов, мы приходим к понятию магнитного поля. Электрические и магнитные поля могут превращаться друг в друга и что каждое из них есть частный случай электромагнитного поля.

Мы будем рассматривать электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами и называются электростатическими. В дальнейших рассуждениях для упрощения терминологии электростатическое поле будем называть электрическим, если это несущественно при пояснении приведённых явлений.

Для количественной характеристики электрического поля служит специальная физическая величина – напряжённость электрического поля (напряжённость электростатического поля).

Для обнаружения и опытного исследования электрического поля используется пробный заряд – точечный очень малый по величине положительный заряд, не искажающий исследуемое поле (не вызывающий перераспределения зарядов, создающих поле). Если в поле, создаваемое зарядом q, поместить пробный заряд $q_{пр}$, то на последний действует сила **F**, различная в разных точках поля, которая, согласно закону Кулона, пропорциональна пробному заряду $q_{пр}$. Поэтому отношение $\mathbf{F}/q_{пр}$ не зависит от $q_{пр}$ и характеризует электрическое поле в той точке, где пробный заряд находится. Эта величина называется напряжённостью и является силовой характеристикой электростатического поля.

Итак, напряжённость электростатического поля в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный единичный положительный заряд, помещённый в эту точку поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_{пр}. \qquad (52.1)$$

Направление вектора **E** совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, помещённый в рассматриваемую точку поля. Если поле создаётся точечным положительным зарядом, то вектор **E** направлен вдоль радиус-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда); если поле создаётся отрицательным зарядом, то вектор **E** направлен к заряду (см. рисунок 66).

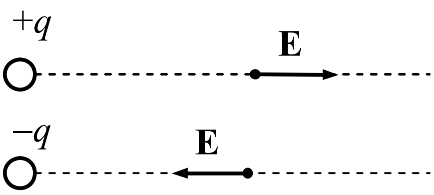


Рисунок 66

Пользуясь законом Кулона в векторной форме, мы можем написать выражение для напряжённости электрического поля точечного заряда в вакууме в форме:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathrm{R}^3}\mathbf{R}, \qquad (52.2)$$

где R – расстояние от заряда до рассматриваемой точки поля;

R – радиус-вектор, направленный от заряда в данную точку.

В скалярной форме выражение (52.2) имеет вид:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathrm{R}^2}. \qquad (52.3)$$

Из выражения (52.3) видно, что напряжённость поля точечного заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстоянию от заряда.

Из (52.1) следует, что если известна напряжённость поля в какой-либо точке, то тем самым определена и сила, действующая на электрический заряд q, помещённый в эту точку. А именно:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{52.4}$$

Из формулы (52.1) следует, что единица напряжённости электростатического поля – ньютон на кулон (Н/Кл). 1 Н/Кл – напряжённость такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой в 1 Н; 1 Н/Кл = 1 В/м, где В (вольт) – единица потенциала электростатического поля (см. § 3.51).

Для описания электрического поля нужно задать вектор напряженности **E** в каждой точке поля. Это можно сделать аналитически, выражая зависимость вектора напряжённости поля от координат в виде формул. Совокупность этих векторов образует поле вектора напряжённости электрического поля. Другой способ описания электрического поля – графический: с помощью линий напряжённости (силовых линий) – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора **E** (см. рисунок 67). Линиям напряжённости приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряжённости. Так как в каждой точке пространства вектор напряжённости имеет вполне определённое направление, то линии напряжённости нигде не пересекаются. При этом силовую линию можно провести через всякую точку поля. Для однородного поля (когда вектор напряжённости в любой точке постоянен по величине и направлению) линии напряжённости параллельны вектору напряжённости.

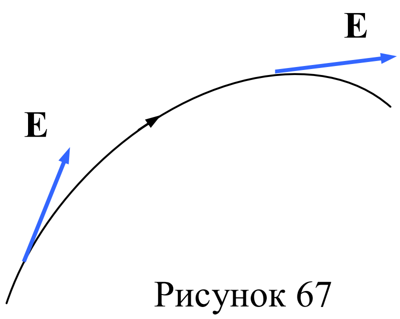


Рисунок 67

Чтобы при помощи силовых линий изображать не только направление, но и величину напряжённости поля, условились на графиках поля проводить силовые линии с такой густотой, чтобы число силовых линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной к силовым линиям, было пропорционально модулю вектора **E** в данном месте.

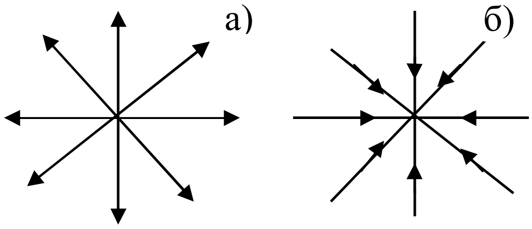


Рисунок 68

Линии **E** поля точечного заряда представляют собой совокупность радиальных прямых, направленных от заряда, если он положителен, и к заряду, если он отрицателен (рисунок 68, случаи а) и б), соответственно). Силовые линии начинаются и заканчиваются лишь на зарядах либо уходят в бесконечность.

По картине распределения силовых линий можно судить о конфигурации данного электрического поля, т.е. о направлении и модуле вектора **E** в разных точках поля. Вследствие большой наглядности графический способ представления электрического поля широко применяется в электротехнике.

Отметим в заключение, что силовые линии перпендикулярны к поверхности металлических проводников. Это и понятно. Если бы напряжённость поля была не перпендикулярна к поверхности проводника, то существовала составляющая поля, направленная вдоль поверхности. Под действием этой составляющей электроны проводимости пришли бы в движение вдоль этой поверхности, и мы не имели бы равновесия электрических зарядов.

Опыт показывает, что напряжённость поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей, которые создавал бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_\mathrm{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_\mathrm{i}}{\mathrm{R}_\mathrm{i}^3}\mathbf{R}_\mathrm{i}. \qquad (52.5)$$

Формула (52.5) выражает принцип суперпозиции (наложения) электрических полей. Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда свести к совокупности точечных зарядов.

Введём понятие потока вектора напряжённости электрического поля. Рассмотрим в однородном электрическом поле элементарную плоскую поверхность dS и выберем определённое направление нормали **n** к ней (рисунок 69).

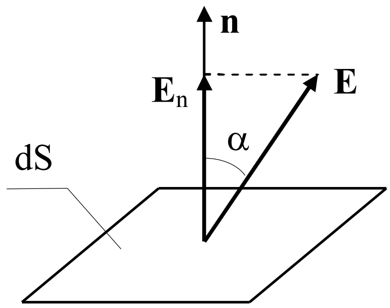


Рисунок 69

Величину

$$d\Phi = E_n \cdot dS = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \qquad (52.6)$$

называют потоком вектора напряжённости через площадку dS. Здесь через E_n обозначена проекция вектора **E** на направление нормали **n**, $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали **n** к площадке, α – угол между **E** и **n**. Выбор направления вектора **n** (а, следовательно, и d**S**) условен, так как его можно направить в любую сторону.

Единица потока вектора напряжённости электростатического поля – 1 В·м.

Если поле неоднородно и поверхность, через которую определяется поток, не является плоской, то эту поверхность можно разбить на бесконечно малые элементы dS и каждый элемент считать плоским, а поле возле него – однородным. Поэтому для любого электрического поля поток вектора напряжённости электрического поля есть $d\Phi = E_n \cdot dS$. Полный поток вектора **E** через любую поверхность S в любом неоднородном электрическом поле равен:

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E_n \cdot dS. \qquad (52.7)$$

Поток вектора **E** является алгебраической величиной: зависит не только от конфигурации поля **E**, но и от выбора направления **n**. Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

§ 3.53 Потенциал. Связь между потенциалом и напряжённостью электрического поля

Для понимания свойств электрического поля большое значение имеет понятие разности потенциалов или электрического напряжения. К этому понятию мы приходим, рассматривая работу сил электрического поля.

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q_1. Предположим, что электрический заряд q_2 перемещается из некоторой точки 1 в другую точку 2 (см. рисунок 70). Так как на заряд q_2 в электрическом поле действует кулоновская сила, то при таком перемещении совершается работа A_{12}. Предположим для определённости, что оба заряда положительные. Тогда на заряд q_2 со стороны q_1 действует кулоновская сила отталкивания. Обозначим через d**l** – элементарное перемещение заряда q_2 на произвольном участке траектории, $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ – радиус-векторы, проведенные от заряда q_1 к начальной 1 и конечной 2 точкам траектории перемещения q_2, α – угол между кулоновской силой **F** и перемещением d**l** в произвольной точке траектории с радиус-вектором **R**, $\mathrm{dl}\cdot\cos\alpha = \mathrm{dR}$ – приращение модуля радиус-вектора.

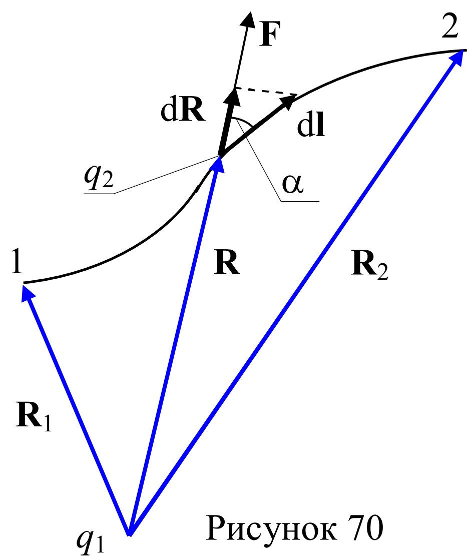


Рисунок 70

Запишем выражение для элементарной работы перемещения заряда q_2 с учетом, что кулоновская сила взаимодействия зарядов определяется соотношением (51.3):

$$\mathrm{dA} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \mathrm{F}\cdot\mathrm{dl}\cdot\cos\alpha = \mathrm{F}\cdot\mathrm{dR} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\mathrm{R}^2}\cdot\mathrm{dR}. \qquad (53.1)$$

Работа, совершаемая силами поля над зарядом q_2 при перемещении из точки 1 в точку 2 равна:

$$A_{12} = \int_{R_1}^{R_2} dA = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \qquad (53.2)$$

Как видно из (53.2), работа A_{12} не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является потенциальным, а электростатические силы – консервативными.

Из (53.2) следует, что работа перемещения заряда в электростатическом поле по любой замкнутой траектории равна нулю (в этом случае начальная и конечные точки совпадают и $R_1 = R_2$):

$$\oint_L dA = 0. \qquad (53.3)$$

Согласно (52.4) на заряд q_2 в электрическом поле напряженностью **E** действует сила $\mathbf{F} = q_2\,\mathbf{E}$. Тогда в соответствии с (53.1) элементарная работа равна:

$$dA = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = q_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = q_2 \cdot E \cdot dl \cdot \cos\alpha = q_2 \cdot E_l \cdot dl, \qquad (53.4)$$

где E_l – проекция вектора напряжённости на направление перемещения.

Так как в (53.4) множитель $q_2 \neq 0$, выражение (53.3) примет вид:

$$\oint_L E_l \cdot dl = \oint_L \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0. \qquad (53.5)$$

Интеграл (53.5) называют циркуляцией вектора **E** по замкнутому контуру L. Из (53.5) следует, что циркуляция вектора **E** электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю (это условие выражает суть теоремы о циркуляции вектора **E**). Из обращения в нуль циркуляции вектора **E** следует, что силовые линии не могут быть замкнутыми, они начинаются и заканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность.

Тело, находящееся в потенциальном силовом поле (а электростатическое поле является потенциальным), обладает потенциальной энергией, за счёт которой силами поля совершается работа. Поэтому работу (53.2) сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд q_2 в начальной и конечной точках поля, создаваемого зарядом q_1:

$$\mathrm{A}_{12} = \int\limits_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \mathrm{dA} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathrm{R}_1}^{\mathrm{R}_2} \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{R}^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right) = \mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2. \qquad (53.6)$$

Получили, что работа электростатических сил совершается за счет убыли потенциальной энергии $\{\mathrm{A}_{12} = \mathrm{W}_1 - \mathrm{W}_2 = -(\mathrm{W}_2 - \mathrm{W}_1) = -\Delta\mathrm{W}\}$. Из анализа выражения (53.6) приходим к следующему соотношению для потенциальной энергии заряда q_2 в поле заряда q_1:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\mathrm{R}} + \mathrm{const}.$$

Значение константы в выражении потенциальной энергии обычно выбирается таким образом, чтобы при удалении заряда на бесконечность (т.е. при $\mathrm{R}\to\infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что потенциальная энергия равна

$$\mathrm{W} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\mathrm{R}}. \qquad (53.7)$$

Для одноимённых зарядов $q_1 q_2 > 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия положительна, для разноимённых зарядов $q_1 q_2 < 0$ и потенциальная энергия их взаимодействия отрицательна.

Воспользуемся зарядом q_2 в качестве пробного заряда для исследования поля ($q_{\text{пр}} = q_2$). Согласно (53.7) потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его величины q_2, но и от величин q_1 и R, определяющих поле.

Следовательно, эта энергия может быть использована для описания поля подобно тому, как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды q_2', q_2'' и т.д. будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией W′, W″ и т.д. Однако отношение W/q_2, как видно из (53.7), будет для всех зарядов одним и тем же. Величина

$$\varphi = \frac{W}{q_2} \tag{53.8}$$

называется потенциалом поля в данной точке и используется наряду с напряжённостью поля **E** для описания электрических полей.

Из (53.8) следует, что потенциал численно равен потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля. Подставив в (53.8) значение потенциальной энергии (53.7), получим следующее выражение для потенциала φ поля точечного заряда $q = q_1$ (индекс 1 в произвольном случае можно опустить):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}. \tag{53.9}$$

Если поле создается системой N точечных зарядов q_1, q_2, ..., q_N, то работа электростатических сил, совершаемая над пробным зарядом равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия W пробного заряда $q_{пр}$, находящегося в этом поле, равна сумме его потенциальных энергий W_i, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i = q_{пр}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{R_i}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{R_i}. \tag{53.10}$$

Сопоставление (53.10) и (53.9) приводит к заключению, что потенциал поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности в данной точке, т.е.

$$\varphi = \sum \varphi_i . \qquad (53.11)$$

Выражение (53.11) определяет принцип суперпозиции для потенциала электрического поля. В то время как напряжённости поля складываются при наложении полей векторно, потенциалы складываются алгебраически. По этой причине вычисление потенциалов оказывается обычно гораздо проще, чем вычисление напряжённостей электрического поля.

Из формулы (53.8) вытекает, что заряд q, находящийся в точке с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$W = q\varphi . \qquad (53.12)$$

Следовательно, работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2, может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) . \qquad (53.13)$$

Таким образом, работа, совершаемая силами поля над зарядом, равна произведению величины перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках. Из сказанного следует, что физический смысл имеет только разность потенциалов или напряжение между двумя точками поля, так как работа определена только тогда, когда заданы две точки – начало и конец пути. Несмотря на это часто говорят просто о потенциале в данной точке, но всегда имеют в виду, разность потенциалов, подразумевая, что одна из точек выбрана заранее. Такую постоянную точку часто выбирают в «бесконечности», т.е. на достаточном удалении от всех заряженных тел, где потенциал по условию равен нулю.

Если заряд q удаляется из точки с потенциалом φ на бесконечность, работа сил поля будет равна:

$$A_\infty = q\varphi \,. \tag{53.14}$$

Отсюда следует, что $\varphi = A_\infty/q$, т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность. Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Из выражения (53.8) определяется единица потенциала – вольт (В): 1 В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/Кл). Учитывая размерность вольта, можно показать, что введенная в § 3.52 единица напряженности электростатического поля действительно равна 1 В/м: 1 Н/Кл = 1Н·м/(Кл·м) = 1Дж/(Кл·м) = 1 В/м.

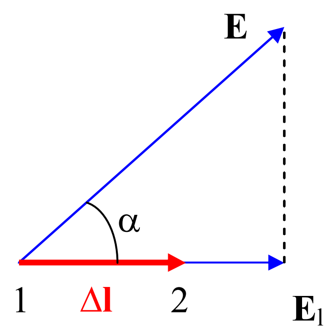


Рисунок 71

В физике часто пользуются внесистемной единицей энергии и работы, называемой электронвольтом (эВ). Это такая энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным элементарному заряду $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, пробегая в вакууме разность потенциалов (напряжение) 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6\cdot10^{-19} \text{ Кл}\cdot1 \text{ В} = 1{,}6\cdot10^{-19} \text{ Дж}. \tag{53.15}$$

В электронвольтах обычно выражают энергию различных элементарных частиц (электронов, протонов и др.). При этом применяют также более крупные единицы:

1 кэВ (килоэлектронвольт) = 10^3 эВ,

1 МэВ (мегаэлектронвольт) = 10^6 эВ,

1 ГэВ (гигаэлектронвольт) = 10^9 эВ.

Если известно распределение потенциала, т.е. его значение в каждой точке поля, то можно найти и напряжённость этого поля в каждой точке.

Рассмотрим в однородном электрическом поле две точки 1 и 2 и предположим, что единичный положительный заряд ($q = +1$) переходит из точки 1 в точку 2 вдоль отрезка прямой $\Delta\mathbf{l}$ (рисунок 71). Работу электрических сил A_{12} при этом перемещении можно выразить через напряженность поля (см. (53.4)):

$$A_{12} = q \cdot E_l \cdot \Delta l = E_l \cdot \Delta l,$$

где E_l – проекция вектора напряженности $\mathbf{E}$ на направление перемещения $\Delta\mathbf{l}$.
С другой стороны, ту же работу перемещения единичного положительного заряда можно выразить через разность потенциалов точек 1 и 2 (см. (53.13)):

$$A_{12} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Сравнивая оба выражения для работы, заключаем, что:

$$E_l \cdot \Delta l = \varphi_1 - \varphi_2.$$

В последнем соотношении разность потенциалов поменяем на приращение потенциала, т.е. на $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -(\varphi_1 - \varphi_2)$, и получаем для напряжённости электрического поля выражение:

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}. \qquad (53.16)$$

В общем случае неоднородного поля обе точки 1 и 2 нужно выбирать достаточно близко друг от друга, строго говоря, бесконечно близко, чтобы считать напряжённость поля на отрезке Δl постоянной. Переходя в (53.16) к пределу при $\Delta l \to 0$, получим:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \qquad (53.17)$$

Производная, стоящая в правой части равенства (53.17), выражает быстроту изменения потенциала в данном направлении. Из этого равенства мы заключаем, что быстрота изменения потенциала в данном направлении равна проекции вектора напряжённости **E** на это направление с обратным знаком. Знак ″–″ означает, что вектор **E** направлен в сторону убывания потенциала φ. Равенство (53.17) устанавливает связь между напряжённостью электростатического поля (являющейся его силовой характеристикой) и потенциалом – энергетической характеристикой поля.

Из соотношения (53.17) можно получить выражение для работы перемещения единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2, т.е. для разности потенциалов любых двух точек 1 и 2:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl, \qquad (53.18)$$

где интегрирование производится вдоль любого контура L, соединяющего рассматриваемые точки, в направлении от точки 1 к точке 2.

Если в электрическом поле перемещается не единичный заряд, а заряд величины q, то в каждой точке сила, действующая на заряд, увеличится в q раз. Поэтому работа A_{12}, совершаемая силами поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2, равна

$$A_{12} = qU_{12}, \qquad (53.19)$$

где величину U_{12} часто называют напряжением между точками 1 и 2.
Из (53.19) следует, что работа определяется только через разность потенциалов или напряжение между двумя точками поля.

Преимущество использования потенциала для описания электрического поля заключается в том, что

- рассчитать распределение потенциала в пространстве значительно легче, чем распределение вектора напряжённости,

- зная значения потенциала в двух точках по формуле (53.13) можно найти работу перемещения заряда между этими точками,

- зная распределение потенциала в пространстве, можно легко рассчитать напряжённость поля в любой точке пространства,

- есть простые в исполнении приборы для измерения разности потенциалов (напряжения).

Для графического представления электрического поля удобно использовать так называемые эквипотенциальные поверхности или поверхности равного потенциала. Эквипотенциальная поверхность есть такая поверхность, на которой потенциал остается постоянным. Он может меняться только при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к другой. Пользуясь эквипотенциальными поверхностями, можно изображать электрические поля графически, подобно тому, как это делают с помощью силовых линий. Пересекаясь с плоскостью чертежа, эквипотенциальные поверхности дают эквипотенциальные линии. Прочерчивая эквипотенциальные линии, соответствующие различным значениям потенциала, мы получаем наглядное представление о том, как изменяется потенциал в данном поле.

Силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т.е. электростатические силы, действующие на заряд, всегда направлены по нормалям к эквипотенциальным поверхностям. Следовательно, вектор **E** всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям, а поэтому линии вектора **E** ортогональны этим поверхностям.

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряжённость поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряжённость поля больше.

Таким образом, зная расположение линий напряжённости электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно всегда построить силовые линии данного поля. Поэтому любое электрическое поле можно графически изобразить при помощи эквипотенциальных поверхностей так же хорошо, как и при помощи силовых линий. На рисунке 72 для примера показан вид линий напряжённости (сплошные линии) и эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии) поля двух разноимённо заряженных металлических шаров.

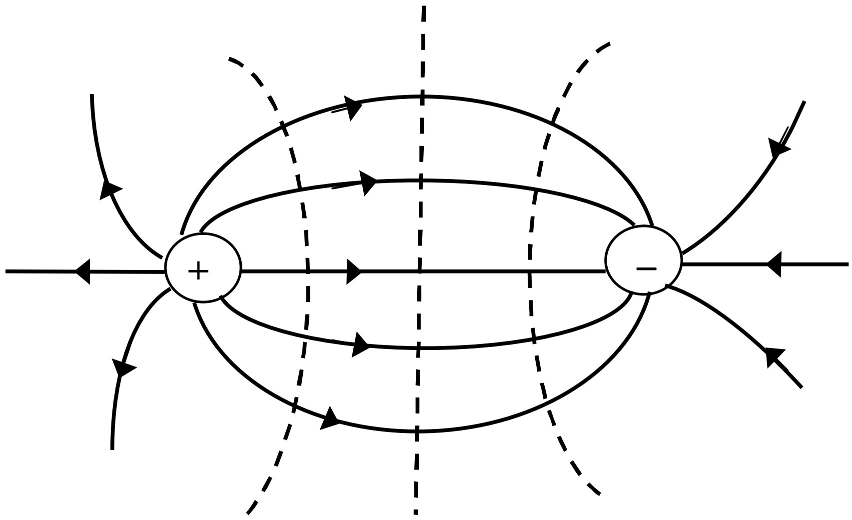


Рисунок 72

В отсутствие электрического тока все точки проводника имеют одинаковый потенциал. Это значит, что в отсутствие тока поверхность проводника есть одна из его эквипотенциальных поверхностей и вектор напряжённости электрического поля направлен нормально к его поверхности. Отсюда следует, что для перемещения какого-либо заряда из любой точки проводника в любую другую его точку не требуется никакой работы, т.е. разность потенциалов любых двух точек внутри проводника равна нулю. При этом заряды в проводнике находятся в равновесии, и напряжённость поля внутри проводника равна нулю, т.е. $\mathbf{E} = 0$.

§ 3.54 Электрический ток

Электрическим током называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов. При отсутствии электрического поля носители тока совершают хаотическое (тепловое) движение в проводящей среде. При включении же электрического поля свободные электрические заряды перемещаются: ″положительные″ – по полю, ″отрицательные″ – против поля, т.е. в проводнике возникает электрический ток, называемый током проводимости. Если же упорядоченное движение электрических зарядов осуществляется перемещением в пространстве заряженного макроскопического тела, то возникает так называемый конвекционный ток. Носители тока в металлах – электроны, в электролитах – ионы, в газах – ионы и электроны. За направление тока условились считать направление движения положительно заряженных частиц. Поэтому направление тока в металлах противоположно направлению движения электронов. Для возникновения и существования электрического тока необходимо, с одной стороны, наличие свободных носителей тока – заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно, а с другой – наличие электрического поля, энергия которого, каким-либо образом восполняясь, расходуется на их упорядоченное движение.

Для количественной характеристики электрического тока служат две основные величины: сила тока и плотность тока.

Сила тока I – скалярная физическая величина, равная электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{54.1}$$

Единицей силы тока служит ампер (А). При токе в 1 А через полное сечение проводника проходит заряд в 1 Кл за время 1 с.

Электрический ток может быть обусловлен движением как положительных, так и отрицательных носителей. Перенос отрицательного заряда в одном направлении эквивалентен переносу такого же по величине положительного заряда в противоположном направлении. Если ток создаётся носителями обоих знаков, причём за время dt через данную поверхность положительные носители переносят заряд dq_+ в одном направлении, а отрицательные – заряд dq_- в противоположном направлении, то

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt} = I_+ + I_-. \tag{54.2}$$

Таким образом, сила тока I в таком проводнике складывается из сил тока, создаваемых положительными и отрицательными зарядами: $I = I_+ + I_-$.

Следует отметить, что электрическое поле, вызывающее в проводнике постоянный ток, по своим свойствам отличается от электростатического поля:

- это поле существует как внутри проводника, так и вне его, тогда как электростатическое поле, создаваемое неподвижными зарядами на проводнике, существует только вне проводника, а внутри проводника отсутствует;

- потенциалы разных точек проводника с током различны, тогда как потенциалы всех точек на поверхности проводника, находящегося в электростатическом поле, одинаковы;

- линии напряжённости стационарного электрического поля внутри проводника с током параллельны его оси, а на поверхности проводника расположены наклонно к его поверхности, тогда как линии напряжённости электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника.

Физическая величина, определяемая силой тока dI через расположенную в данной точке перпендикулярную к направлению движения носителей тока площадку $dS_\perp$, отнесённой к величине этой площадки, называется плотностью тока:

$$j = \frac{dI}{dS_\perp}. \tag{54.3}$$

Единица плотности тока есть ампер на квадратный метр (А/м^2).

Рассмотрим сначала простейший случай, когда все носители тока одинаковы (например, электроны в металлах). Выделим мысленно в среде, по которой течёт ток, произвольный бесконечно малый объём и обозначим через **v** средний вектор скорости рассматриваемых носителей в этом объеме. Его называют средней, дрейфовой или упорядоченной скоростью движения носителей тока. Обозначим далее через *n* концентрацию носителей тока, т.е. их число в единице объёма. Прове-

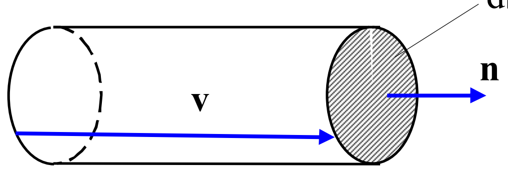


Рисунок 73

дём бесконечно малую площадку dS, перпендикулярную к скорости **v**. Построим на ней бесконечно короткий прямой цилиндр с высотой vdt, как указано на рисунке 73. Все частицы, заключенные внутри этого цилиндра, за время dt пройдут через площадку dS, перенеся через нее в направлении скорости **v** электрический заряд dq = *n*evdSdt, где e – заряд одной частицы (например, электрона). Таким образом, через единицу площади за единицу времени переносится электрический заряд j = *n*ev. Вектор

$$\mathbf{j} = n e \mathbf{v} \tag{54.4}$$

называют вектором плотности электрического тока.

Скаляр j есть заряд, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к току. Направление вектора **j** совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов.

В случае нескольких типов зарядов, создающих ток, плотность тока определяется выражением

$$\mathbf{j} = \sum n_i e_i \mathbf{v}_i , \tag{54.5}$$

где суммирование ведётся по всем типам носителей тока (n_i, e_i, $\mathbf{v}_i$ означают концентрацию, заряд и упорядоченную скорость i-го носителя).

Зная вектор плотности тока в каждой точке интересующей нас поверхности S, можно найти и силу тока через эту поверхность как поток вектора **j**:

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int j \cdot dS_{\perp} = \int j_n \cdot dS , \tag{54.6}$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ (**n** – единичный вектор нормали к площадке dS);

j_n – проекция вектора плотности тока **j** на направление нормали **n**.

Сила тока I является величиной скалярной и алгебраической. Ее знак, как видно из формулы (54.6), определяется, кроме всего прочего, выбором направления нормали в каждой точке поверхности S, т.е. выбором направления векторов d**S**. Последняя формула остаётся верной и в том случае, когда площадка dS не перпендикулярна к вектору **j**. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что составляющая вектора **j**, перпендикулярная к вектору **n**, через площадку dS электричества не переносит.

§ 3.55 Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Если бы на носители тока действовали только силы электростатического поля, то под их действием положительные носители перемещались из мест с большим потенциалом к местам с меньшим потенциалом, а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это вело бы к выравниванию потенциалов всех соединённых между собой проводников и ток прекратится. Чтобы этого не произошло, в цепи постоянного тока наряду с участками, где положительные носители движутся в сторону уменьшения потенциала φ, должны иметься участки, на которых перенос положительных носителей происходит в сторону возрастания φ, т.е. против сил электрического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил неэлектростатического происхождения. Такие силы назвали сторонними. Работа сторонних сил обеспечивается при помощи источников тока.

Таким образом, для поддержания постоянного тока необходимы сторонние силы, действующие либо на отдельных участках цепи, либо на всем протяжении цепи. Физическая природа сторонних сил может быть различной. Они могут быть обусловлены, например, химической и физической неоднородностью проводника. Такие силы, возникают при соприкосновении разнородных проводников (гальванические элементы, аккумуляторы) или проводников с различной температурой (термоэлементы). Сторонние силы могут быть также обусловлены электрическими (но не электростатическими) полями, порождаемыми переменными магнитными полями и т.д.

Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Величину, равную работе сторонних сил над единичным положительным зарядом, называют электродвижущей силой (ЭДС) $\mathscr{E}$, действующей в цепи или на ее участке. Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна A, то

$$\mathscr{E} = \frac{A}{q}. \tag{55.1}$$

Из сопоставления формул (55.1) и (53.14) вытекает, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала. Поэтому $\mathscr{E}$ измеряется в вольтах (В), как и φ.

Стороннюю силу $\mathbf{F}_{ст}$, действующую на заряд q, можно представить в виде

$$\mathbf{F}_{ст} = q\mathbf{E}_{ст}. \tag{55.2}$$

Векторную величину $\mathbf{E}_{ст}$ называют напряженность поля сторонних сил ($\mathbf{E}_{ст}$ равна силе, действующей на единичный положительный заряд, которая обусловлена не электростатическим полем). Работа сторонних сил над зарядом q на участке 1-2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_{ст} d\mathbf{l} = q\int_1^2 \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l}$$

Разделив эту работу на q, получим ЭДС, действующую на данном участке:

$$\mathscr{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l}. \tag{55.3}$$

Аналогичный интеграл, вычисленный для замкнутой цепи, даст ЭДС, действующую в этой цепи:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_{ст} d\mathbf{l}. \tag{55.4}$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряжённости сторонних сил.

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\mathbf{F}_E$ = q$\mathbf{E}$. Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд q, равна:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_{ст} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ст}\right).$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1-2, определяется интегралом:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}d\mathbf{l} = q\int_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{l} + q\int_1^2 \mathbf{E}_{ст}d\mathbf{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathscr{E}_{12}. \qquad (55.5)$$

Падением напряжения или просто напряжением U на участке 1-2 называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи. Таким образом, согласно (55.5):

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}. \qquad (55.6)$$

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называют однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называют неоднородным. Для однородного участка цепи $\mathscr{E}_{12} = 0$, и

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \qquad (55.7)$$

т.е. напряжение совпадает с разностью потенциалов на концах участка.

§ 3.56 Закон Ома. Сопротивление проводников

Немецкий физик Георг Ом (1787–1854) экспериментально установил, что сила тока I, текущего по однородному металлическому проводнику (т.е. проводнику, в котором не действуют сторонние силы), пропорциональна напряжению U на концах проводника:

$$I = \frac{1}{R}U. \tag{56.1}$$

где R – электрическое сопротивление проводника.

Уравнение (56.1) выражает закон Ома для однородного участка цепи. Единицей сопротивления служит Ом, равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет ток силой 1 А. Величина, обратная сопротивлению

$$G = 1/R,$$

называется электрической проводимостью проводника. Единица проводимости сименс (См): 1 См – проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и формы, а также от свойств материала, из которого он изготовлен. Для однородного цилиндрического проводника сопротивление R прямо пропорционально его длине l и обратно пропорционально площади его поперечного сечения S:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \tag{56.2}$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, характеризующий свойства материала проводника.

Коэффициент ρ называется удельным электрическим сопротивлением вещества. Единица удельного электрического сопротивления – Ом-метр (Ом·м). Наименьшим удельным сопротивлением обладают серебро ($1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) и медь ($1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). На практике наряду с медными применяются алюминиевые провода. Хотя алюминий и имеет большее, чем медь, удельное сопротивление ($2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), но зато обладает меньшей плотностью по сравнению с медью.

Найдем связь между векторами плотности тока **j** и напряжённости **E** в одной и той же точке проводника. В изотропном проводнике упорядоченное движение положительных носителей тока происходит в направлении вектора **E**. Поэтому направление векторов **j** и **E** совпадают. Выделим мысленно в окрестности некоторой точки элементарный цилиндрический объём с образующими, параллельными векторам **j** и **E** (рисунок 74). Через поперечное сечение цилиндра течёт ток силой jdS. Напряжение, приложенное к цилиндру, равно Edl, где E – напряжённость поля в данном месте, dl – высота цилиндра. Наконец, сопротивление цилиндра, согласно (56.2), равно ρ(dl/dS). Подставив эти значения в формулу (56.1), придём к соотношению:

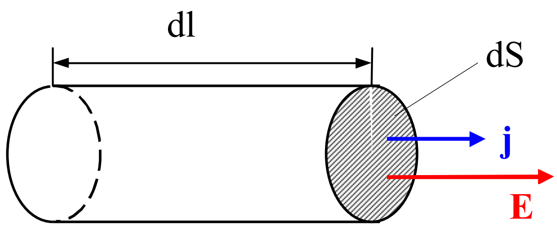


Рисунок 74

$$jdS = \frac{dS}{\rho dl}Edl \qquad \text{или} \qquad j = \frac{E}{\rho}.$$

Воспользовавшись тем, что векторы **j** и **E** имеют одинаковое направление, можно написать

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}. \qquad (56.3)$$

Формула (56.3) выражает закон Ома в дифференциальной форме. Обратная ρ величина σ называется удельной электрической проводимостью материала. Единица, обратная Ому, называется сименсом (См). Соответственно единицей σ является сименс на метр (См/м). Это соотношение справедливо и для переменных полей.

Допустим для простоты, что в проводнике имеются носители лишь одного знака. Согласно формуле (54.5) плотность тока в этом случае равна

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}. \tag{56.4}$$

Сравнение этого выражения с формулой (56.3) приводит к заключению, что скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна напряжённости поля **E**, т.е. силе, сообщающей носителям упорядоченное движение. Пропорциональность скорости приложенной к телу силе наблюдается в тех случаях, когда кроме силы, вызвавшей движение, на тело действует сила сопротивления среды. Эта сила вызывается взаимодействием носителей тока с частицами, из которых построено вещество проводника. Наличие силы сопротивления упорядоченному движению носителей тока обусловливает электрическое сопротивление проводника.

Способность вещества проводить электрический ток характеризуется его удельным сопротивлением ρ или удельной проводимостью σ. Эти величины определяются химической природой вещества и внешними условиями, в частности температурой, при которых оно находится.

Если в закон Ома для однородного участка цепи I = U/R (56.1) подставим выражение (55.6) для напряжения $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$, действующего на этом участке, то получаем соотношение

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R} \qquad \text{или} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = IR, \tag{56.5}$$

выражающее закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщённый закон Ома).

На примере схем, приведённых на рисунке 75, можно рассмотреть примеры использования обобщённого закона Ома. На схеме (а) вольтметр, подключенный к точкам 1 и 2 цепи, покажет напряжение $\varphi_1 - \varphi_2$. Так как клемма «+» источника присоединена со стороны точки 1, то, если бы в цепи ток отсутствовал, точка 1 находилась бы под более положительным потенциалом в сравнении с потенциалом точки 2, поэтому в последнем равенстве слагаемое $\mathcal{E}$ необходимо брать со знаком « + ». В схеме (а) ток течет от точки 2 к точке 1, поэтому слагаемое IR нужно брать со знаком « – ». В итоге, в схеме (а) вольтметр, подключенный к точкам 1 и 2, покажет напряжение: $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} - IR$.

В схеме (б) ток течет навстречу ЭДС, это возможно в том случае, когда к рассматриваемому участку цепи подключен источник тока с ЭДС, большей ЭДС данного участка. Такую схему включения используют при зарядке аккумуляторной батареи. В схеме (б) вольтметр, подключенный к точкам 1 и 2, покажет напряжение: $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E} + IR$.

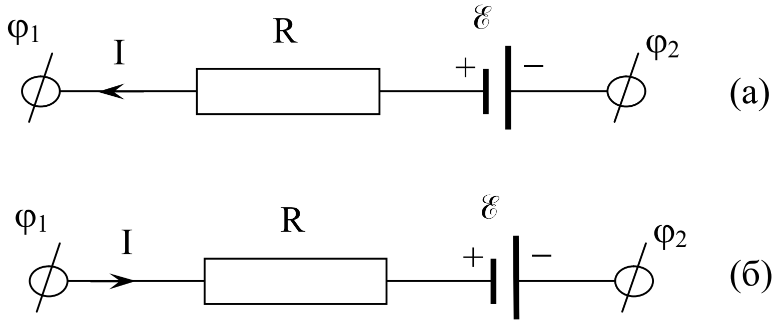


Рисунок 75

Если на данном участке цепи источник тока отсутствует ($\mathcal{E} = 0$), то из (56.5) приходим к закону Ома для однородного участка цепи (56.1):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}. \qquad (56.1)$$

Если же электрическая цепь замкнута, то выбранные точки 1 и 2 совпадают, и $\varphi_1 = \varphi_2$; тогда из (56.5) получаем выражение для закона Ома для замкнутой (полной) цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{общ}},$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС, действующая в цепи;

$R_{общ}$ – суммарное (общее) сопротивление всей цепи.

В общем случае $R_{общ} = r + R$, где r – внутреннее сопротивление источника тока, R – сопротивление внешней цепи. Поэтому закон Ома для замкнутой цепи будет иметь вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \qquad (56.6)$$

Если цепь разомкнута и, следовательно, в ней ток отсутствует (I = 0), то из закона Ома для неоднородного участка цепи (56.5) получим, что $\mathscr{E} = \varphi_1 - \varphi_2$, т.е. ЭДС, действующая в разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на ее концах. Следовательно, для того, чтобы найти ЭДС источника тока, надо измерить разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой цепи.

Закон Ома для полной цепи можно представить и в форме

$$\mathscr{E} = I(R + r) = IR + Ir = U_R + U_r, \qquad (56.7)$$

и сформулировать его следующим образом: в замкнутой цепи постоянного тока ЭДС источника тока равна сумме падений напряжений на внешней и внутренней частях цепи. Величину $U_R = IR$, равную напряжению на внешней нагрузке, называют напряжением на клеммах источника. Замкнутую цепь в простейшем случае изображают так, как она представлена на рисунке 76. Если приведённая на рисунке 76 цепь разомкнута, то $R \to \infty$, а сила тока в цепи I = 0, и $\mathscr{E} = U_R$, т.е. напряжение на полюсах источника тока при разомкнутой цепи равно ЭДС источника тока.

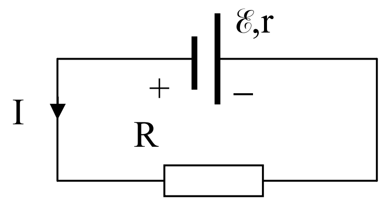


Рисунок 76

Если клеммы источника $\mathscr{E}$ в приведённой на рисунке 76 цепи закоротить, т.е. замкнуть между собой, то мы имеем случай так называемого короткого замыкания. При коротком замыкании источника сопротивление внешней цепи R = 0, и в случае незначительного внутреннего сопротивления r источника тока сила тока короткого замыкания $I_{кз}$, равная

$$I_{кз} = \left.\frac{\mathscr{E}}{R + r}\right|_{R=0} = \frac{\mathscr{E}}{r}, \qquad (56.8)$$

может оказаться значительной и привести к разрушению источника тока.

§ 3.57 Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа

Расчет разветвлённых цепей, например, нахождение сил токов в отдельных ее ветвях, значительно упрощается при применении правил Кирхгофа, чем при применении обобщённого закона Ома для всех ее отдельных ветвей (Г. Р. Кирхгоф (1824–1887) – немецкий физик). Этих правил два. Первое из них относится к узлам цепи. Любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трёх проводников с током, называется узлом. При этом ток, входящий в узел, считается имеющим один знак (например, плюс), а ток, выходящий из узла, – имеющим другой знак (например, минус).

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю

$$\sum I_k = 0. \qquad (57.1)$$

Например, применительно к рисунку 77 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения электрического заряда. Действительно, в случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае вместе с зарядами менялось бы во времени и электрическое поле, а потому токи не могли бы оставаться постоянными.

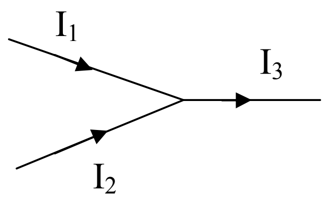


Рисунок 77

Второе правило Кирхгофа: для любого замкнутого контура разветвлённой цепи алгебраическая сумма произведений сил токов в отдельных участках этого контура на сопротивления соответствующих участков равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_n \ . \qquad (57.2)$$

Каждое из произведений IR в (57.2) определяет разность потенциалов, которая существовала бы между концами соответствующего участка, если бы ЭДС в нем была равна нулю, т.е. это произведение есть падение напряжения, вызываемого протекающим по R током. Поэтому второе правило Кирхгофа можно выразить следующим образом: для любого замкнутого контура алгебраическая сумма всех падений напряжения равна алгебраической сумме всех ЭДС в этом контуре.

Рассмотрим контур, состоящий из трех участков (рисунок 78). Направление обхода по часовой стрелке примем за положительное, отметив, что выбор этого направления совершенно произволен. Все токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными, не совпадающие с направлением обхода – отрицательными. Источники ЭДС считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура. Затем применим к каждому из трех участков обобщенный закон Ома (см. (55.5)):

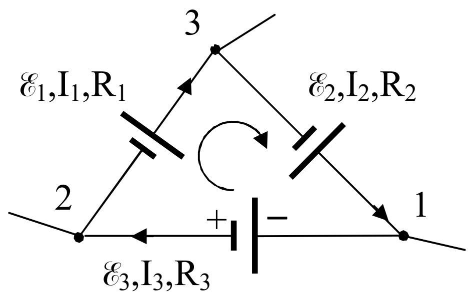


Рисунок 78

$$I_1 R_1 = \varphi_2 - \varphi_3 - \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_3 - \varphi_1 - \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_3.$$

Сложив эти равенства, приходим после сокращения всех потенциалов к формуле (57.2), т.е. ко второму правилу Кирхгофа. Таким образом, уравнение (57.2) является следствием закона Ома для неоднородных участков цепи.

При расчете разветвлённых цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

- выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи – если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, отрицательным – его истинное направление противоположно выбранному;

- выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение IR положительно, если направление тока на данном участке совпадает с направлением обхода, и наоборот. ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными;

- составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи). При этом надо следить, чтобы одни уравнения не являлись следствием других;

- если в разветвлённой цепи N узлов, то независимые уравнения типа (56.1) можно составить лишь для N-1 узлов, так как уравнение для последнего узла будет следствием предыдущих. Если в разветвлённой цепи можно выделить несколько замкнутых контуров, то независимые уравнения типа (56.2) можно составить только для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных.

§ 3.58 Работа и мощность тока. Закон Джоуля-Ленца

Рассмотрим однородный участок цепи, между концами которого существует напряжение U. При силе тока I за время t через цепь пройдет заряд q = It. Поэтому работа электрического тока на этом участке будет равна:

$$A = Uq = IUt. \tag{58.1}$$

Комбинируя законом Ома для однородного участка цепи U = IR, можно получить еще два выражения работы тока:

$$A = IUt = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt. \qquad (58.2)$$

Выражение (58.2) справедливо для постоянного тока в любом случае, для какого угодно участка цепи.

Мощность тока, т.е. работа в единицу времени равна:

$$P = \frac{A}{t} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2R. \qquad (58.3)$$

Формулу (58.3) в системе СИ используют для определения единицы напряжения. Единица напряжения вольт есть

$$[U] = [P] / [I] = 1 \text{ Вт/А} = 1 \text{ В}.$$

Вольт – электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 А при мощности 1 Вт.

Если сила тока выражается в амперах, напряжение – в вольтах, сопротивление – в омах, то работа тока выражается в джоулях, а мощность – в ваттах. На практике применяются также внесистемные единицы работы тока: ватт·час (Вт·ч) и киловатт·час (кВт·ч). 1 Вт·ч – работа тока мощностью в 1 Вт в течение 1 часа: 1 Вт·ч = 3 600 Вт·с = $3{,}6 \cdot 10^3$ Дж; 1 кВт·ч = 10^3 Вт·ч = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

В однородном неподвижном проводнике при отсутствии в нём химических превращений вся работа тока идёт на увеличение внутренней энергии проводника, в результате чего проводник нагревается. По закону сохранения энергии количество теплоты Q, выделившейся в неподвижном проводнике, при пропускании тока за время t равно A, то из (58.2) имеем

$$Q = IUt = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt. \qquad (58.4)$$

Выражение (58.4) представляет собой закон Джоуля-Ленца, экспериментально установленный независимо друг от друга Дж. Джоулем и Э. Х. Ленцем. Джоуль и Ленц установили свой закон для однородного участка цепи. Однако он справедлив и для неоднородного участка цепи при условии, что действующие в нем сторонние силы имеют нехимическое происхождение.

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объём $dV = dS \cdot dl$ (ось цилиндра совпадает с направлением тока), электрическое сопротивление которого равно $R = \rho \cdot dl/dS$. По закону Джоуля – Ленца, за время dt в объеме dV выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = \frac{\rho dl}{dS}(jdS)^2 dt = \rho j^2 \cdot dV \cdot dt.$$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется удельной тепловой мощностью тока. Она равна

$$w = \frac{dQ}{dV \cdot dt} = \rho j^2 . \tag{58.5}$$

Используя дифференциальную форму закона Ома (56.3) из соотношения (58.5) получим:

$$w = \rho j^2 = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma E^2 = jE. \tag{58.6}$$

Формулы (58.6) являются обобщённым выражением закона Джоуля–Ленца в дифференциальной форме, пригодным для любого проводника.

Тепловое действие тока находит широкое применение в технике, которое началось с изобретения в 1873 г. русским инженером А. Н. Лодыгиным (1847–1923) лампы накаливания. На нагревании проводников электрическим током основано действие электрических муфельных печей, электрической дуги (открыта русским инженером В. В. Петровым (1761–1834)), контактной электросварки, бытовых электронагревательных приборов и т.д.

§ 3.59 Магнитное поле и его характеристики

В 1820 г. датский физик Эрстед обнаружил, что проводник с током вызывает появление сил, действующих на магнитную стрелку. Если заменить металлическую проволоку стеклянной трубкой, наполненной каким-либо проводящим раствором, например раствором серной кислоты в воде, и присоединить проводящий столб раствора при помощи металлических проволок, опущенных в него, к полюсам источника тока, то магнитная стрелка также отклоняется. Отклонение стрелки наблюдается и в том случае, если вместо проволоки использовать газоразрядную трубку, питаемую постоянным током. Магнитное действие тока наблюдается во всех случаях независимо от природы проводника и является самым общим признаком тока. Существует и обратное явление: магниты действуют на токи. А в 1820 г. Ампером было открыто взаимодействие токов.

Опыты показывают, что взаимодействие контуров с током подобно действию токов на магниты и действию магнитов на токи, поэтому взаимодействие проводников с током назвали магнитным взаимодействием токов. Причина возникновения сил магнитного взаимодействия заключается в появлении вокруг проводников с током магнитного поля. Основное свойство магнитного поля заключается в том, что на проводники с током в магнитном поле действуют силы.

Так как электрический ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов, то отсюда следует, что магнитное поле создается движущимися зарядами.

В опыте Эрстеда проволока, по которой протекал ток, была натянута над магнитной стрелкой, вращающейся на игле. При включении тока стрелка устанавливалась перпендикулярно к проволоке. Изменение направления тока заставляло стрелку повернуться в противоположную сторону. Из этих примеров следует, что магнитное поле имеет направленный характер и может быть охарактеризовано некоторой векторной величиной, которую обозначают **B** и называют магнитной индукцией.

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся в этом поле электрические заряды.

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции, т.е. индукция **B** результирующего магнитного поля нескольких токов равна векторной сумме магнитных индукций полей отдельных токов:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i \,. \tag{59.1}$$

Подобно тому, как при исследовании электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля используется замкнутый плоский контур с током (рамка с током), размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали к контуру. В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током правилом правого винта, т.е. за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рисунок 79).

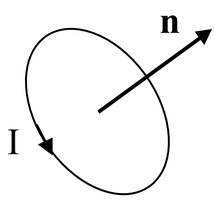


Рисунок 79

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определённым образом. Этот результат связывается с определённым направлением магнитного поля. За направление магнитного поля **B** в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к рамке (рисунок 80). За направление **B** индукции магнитного поля также принимают направление, совпадающее с направлением силы, которая действует на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку (рисунок 80). Если

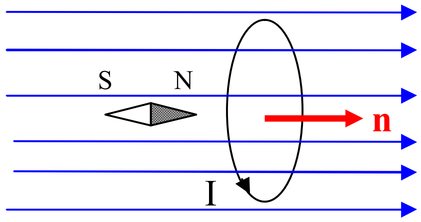


Рисунок 80

контур повернуть так, чтобы направления нормали и поля не совпадали, возникает вращающий момент, стремящийся вернуть контур в равновесное положение. Модуль момента зависит от угла α между нормалью и направлением поля, достигая максимального значения M_{max} при $\alpha = \pi/2$ (в этом случае $\mathbf{n} \perp \mathbf{B}$); при $\alpha = 0$ имеем $\mathbf{n} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$, и момент равен нулю, как в случае на рисунке 72.

Поведение плоских контуров с током в магнитном поле удобно характеризовать с помощью вектора магнитного момента рамки с током:

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \tag{59.2}$$

где I – сила тока в контуре;

S – его площадь;

n – положительная нормаль к контуру.

Единицей магнитного момента является ампер умноженный на квадратный метр ($А{\cdot}м^2$).

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение M_{max}/p_m при фиксированном α для всех контуров оказывается одним и тем же. Поэтому отношение M_{max}/p_m может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}. \tag{59.3}$$

Итак, магнитная индукция есть векторная величина, модуль которой определяется выражением (59.3), а направление задается равновесным положением положительной нормали к контуру с током. Единица измерения величины магнитной индукции – тесла (Тл) равна магнитной индукции однородного поля, в котором на плоский контур с током, имеющим магнитный момент 1 $А{\cdot}м^2$, действует максимальный вращающий момент 1 Н·м.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует пара сил. Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m\mathbf{B}] . \tag{59.4}$$

где $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, являющейся количественной характеристикой магнитного поля;

$\mathbf{p}_m$ – вектор магнитного момента рамки с током.

Для графического изображения магнитного поля часто используют понятие силовых линий. Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\mathbf{B}$, называют силовыми линиями магнитной индукции (линиями магнитной индукции). Величина магнитной индукции, пропорциональна числу силовых линий, пересекающих единицу площади, перпендикулярную им.

Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током, поэтому магнитное поле называют вихревым полем. Этим они отличаются от линий напряжённости электростатического поля, которые являются разомкнутыми (начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность).

§ 3.60 Закон Био-Савара-Лапласа

Французские учёные Ж. Био и Ф. Савар в 1820 г. провели исследования магнитных полей, создаваемых постоянными токами в проводниках различной формы. Результаты их опытов обобщил П. Лаплас и установил зависимость, которая получила название закона Био-Савара-Лапласа. Согласно этому закону магнитное поле любого тока может быть вычислено как векторная сумма (суперпозиция) полей, создаваемых отдельными элементарными участками тока. Когда ток течёт по тонкому проводу, можно ввести понятие элемента тока $I \cdot d\mathbf{l}$, где I – сила тока, dl – элемент длины провода, d**l** – вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с направлением тока. А индукция d**B** элемента тока в вакууме (в воздухе) согласно опытам равна:

$$d\mathbf{B} = K\frac{I[d\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (60.1)$$

где **r** – радиус-вектор, проведенный из элемента тока в рассматриваемую точку;

К – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения (в СИ $K = \mu_0/4\pi$, μ_0 – магнитная постоянная).

Следовательно, в СИ формула (60.1) имеет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad (60.2)$$

Из (60.2) следует, что модуль магнитной индукции в точке, удаленной на расстояние r от элемента тока, равен:

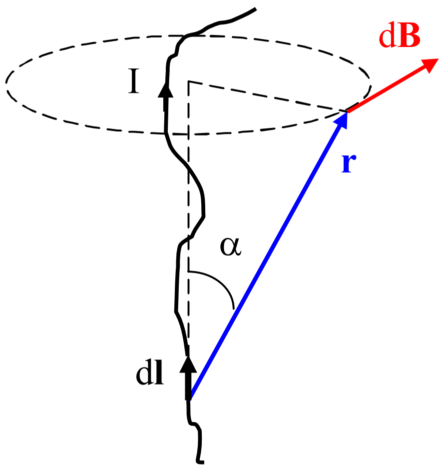


Рисунок 81

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot dl\cdot\sin\alpha}{r^2}, \qquad (60.3)$$

где α – угол между d**l** и **r** (рисунок 81).

Направление вектора d**B** перпендикулярно к d**l** и **r**, т.е. перпендикулярно к плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Это направление может быть найдено по правилу нахождения линий магнитной индукции (правилу правого винта): направление вращения головки винта дает направление d**B**, если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Формула (60.2) носит название закона Био-Савара-Лапласа. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ единицы СИ. Это значение μ_0 непосредственно следует из определения единицы силы тока ампер, которое будет дано в § 3.62. Сама же единица для измерения μ_0 в СИ получила название Гн/м (генри на метр).

Расчёт характеристик магнитного поля (индукции **B**) по приведённым формулам в общем случае довольно сложен. Однако если распределение тока имеет определённую симметрию, то применение закона Био-Савара-Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет довольно просто рассчитать конкретные поля.

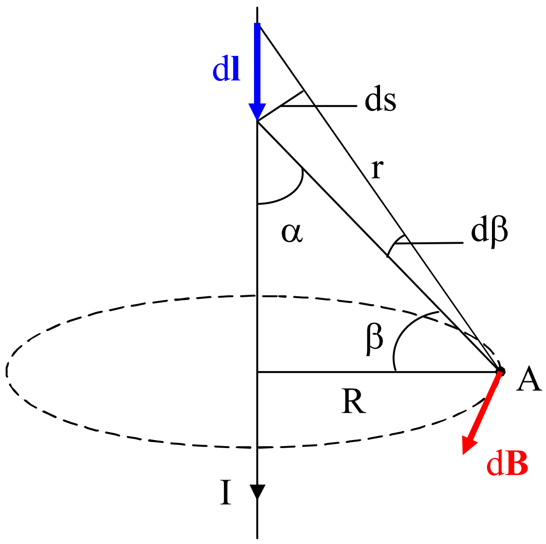


Рисунок 82

Применим формулу (60.3) для вычисления магнитного поля прямого тока. Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого тонким прямым проводом в точке А (рисунок 82), удалённой на расстояние R от оси провода. Длину провода будем считать весьма большой по сравнению с R. В этом случае направление магнитного поля всех элементов тока провода одинаково (перпендикулярно к плоскости рисунка 82), и поэтому можно складывать модули индукций отдельных элементов тока. Индукция магнитного поля какого-либо элемента проводника dl с током I выражается формулой (60.3). Из рисунка 82 видно, что

$$\frac{dl \cdot \sin\alpha}{r} = \frac{dl \cdot \cos\beta}{r} = \frac{ds}{r} = d\beta \ , \qquad r = \frac{R}{\cos\beta} \ .$$

Подставляя эти выражения в (60.3), мы находим, индукция магнитного поля, создаваемого элементом провода, равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos\beta d\beta \ .$$

Угол β для всех элементов бесконечного прямого повода изменяется в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Поэтому для полной индукции поля получаем

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\beta d\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется формулой:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \tag{60.4}$$

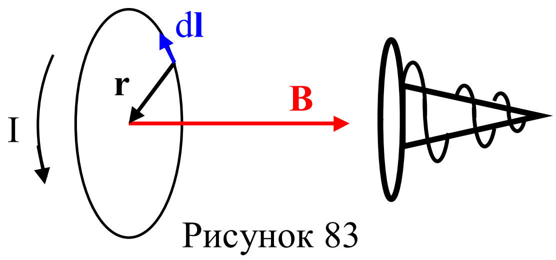


Рисунок 83

Применяя закон Био-Савара-Лапласа (60.3), найдем индукцию магнитного поля в вакууме в центре кругового тока (рисунок 83). В этом случае все элементы проводника перпендикулярны к радиус-вектору **r** и $\sin\alpha = 1$. Расстояние всех проводников в центре круга одинаково и равно радиусу круга R. Поэтому (60.3) дает:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I}{R^2}\cdot dl.$$

Все элементы тока создают магнитное поле одинакового направления, перпендикулярное к плоскости витка, и поэтому полная индукция поля в центре кругового витка равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \tag{60.5}$$

Направление магнитного поля находим по правилу правого винта, который нужно расположить перпендикулярно к плоскости витка; при вращении головки винта по кругу в направлении протекания тока поступательное движение винта укажет ориентацию поля (см. рисунок 83).

Для описания магнитного поля наряду с магнитной индукцией широко используют еще другую величину – напряжённость магнитного поля **H**. Если **B** – магнитная индукция в какой-либо точке поля в вакууме (в воздухе), то напряжённостью магнитного поля в той же точке поля называется:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \tag{60.6}$$

Так как μ_0 есть положительная скалярная величина, то направления векторов **H** и **B** совпадают. Принимая во внимание (60.6), (60.2) и (60.3), можем записать уравнения выражающие закон Био-Савара-Лапласа для напряжённости магнитного поля:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{I[d\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}; \qquad dH = \frac{1}{4\pi}\frac{I\cdot dl\cdot\sin\alpha}{r^2}. \tag{60.7}$$

С учетом (60.6) выражения для напряжённости магнитного поля прямого тока и кругового тока имеют вид (сравните с индукциями для соответствующих случаев (60.4) и (60.5)):

$$H = \frac{I}{2\pi R} \quad \text{и} \quad H = \frac{I}{2R}. \tag{60.8}$$

Из (60.8) следует, что напряжённость магнитного поля имеет размерность ампер на метр (А/м).

§ 3.61 Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический же ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме или среде заряд создаёт вокруг себя магнитное поле. Из формулы (60.2) легко получить выражение для магнитной индукции поля, создаваемого точечным зарядом q, движущимся со скоростью **v**. Допустим, что ток создается носителями с зарядом e′ (знак безразличен), скорость упорядоченного движения которых равна **v**. Тогда

$$I = jS = ne'vS, \tag{61.1}$$

где S – площадь поперечного сечения проводника;

n – концентрация носителей тока (число носителей тока в единице объема).

Подставим выражение (61.1) в формулу (60.2):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ne'vS[d\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}. \tag{61.2}$$

Учитывая, что векторы e′**v** и d**l** совпадают по направлению, заменим e′vd**l** на e′**v**dl. Тогда формула (61.2) примет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ne'Sdl[\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}, \tag{61.3}$$

так как скалярные множители можно вносить и выносить за знак векторного произведения от любого множителя векторного произведения (свойство векторного произведения).

Произведение Sdl соответствует объему отрезка провода длины dl, а *n*Sdl равно числу носителей тока, содержащихся в этом объеме. Следовательно, разделив выражение (61.3) на *n*Sdl, найдем магнитную индукцию **B** поля, создаваемого зарядом e′, движущимся со скоростью **v** в вакууме (в воздухе). Заменив e′ на q, получим

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}, \tag{61.4}$$

где **r** – радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке поля;

r – его модуль;

α – угол между векторами **v** и **r** (рисунок 84).

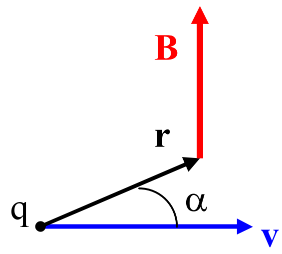


Рисунок 84

Согласно выражению (61.4), вектор **B** направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы **v** и **r**, а его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от **v** к **r**. Модуль магнитной индукции (61.4) вычисляется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin\alpha . \qquad (61.5)$$

Приведённые соотношения (61.4) и (61.5) справедливы лишь при малых скоростях v (v << c, c – скорость света в вакууме) движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т.е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени находится движущийся заряд.

Формула (61.4) определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью **v**. Если движется отрицательный заряд, то q надо заменить на -q. Скорость **v** – относительная скорость, т.е. скорость относительно наблюдателя. Вектор **B** в рассматриваемой системе отсчёта зависит как от времени, так и от положения точки наблюдения. Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.

Впервые поле движущегося заряда удалось обнаружить американскому физику Г. Роуланду (1848−1901). Окончательно этот факт был установлен профессором Московского университета А. А. Эйхенвальдом (1863−1944), изучившим магнитное поле конвекционного тока, а также магнитное поле связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Магнитное поле свободно движущихся зарядов было измерено академиком А. Ф. Иоффе, доказавшим, что электронный пучок и ток проводимости эквивалентны с точки зрения образования магнитного поля.

§ 3.62 Закон Ампера. Сила Лоренца

Причина возникновения сил магнитного взаимодействия токов (§ 3.59) заключается в появлении вокруг проводников с током магнитного поля (§ 3.60). Это магнитное поле в свою очередь действует на второй проводник с током. Сила взаимодействия двух контуров с током конечных размеров складывается из взаимодействия отдельных элементов тока. Она зависит от размеров контуров, их формы и взаимного расположения, и поэтому сформулировать общий закон взаимодействия контуров с током нельзя. Однако такой закон можно дать для элементов тока.

Оба контура с током мысленно разбиваем на элементы тока. Применяя закон Био-Савара-Лапласа совместно с принципом суперпозиции, довольно просто рассчитать конкретное поле, создаваемое одним из контуров в точке пространства, где располагается элемент тока другого контура. Затем, используя принцип суперпозиции для силы, можно рассчитать результирующую силу магнитного взаимодействия контуров с током. Согласно третьему закону Ньютона силы взаимодействия двух контуров равны по модулю и противоположны по направлению.

Результаты опытов Ампера и последующих многочисленных исследований можно сформулировать следующим образом. Сила $d\mathbf{F}$, действующая на элемент тока $I \cdot d\mathbf{l}$, равна

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}], \qquad (62.1)$$

где $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции.

Соотношение (62.1) было установлено экспериментально Ампером и носит название закона Ампера. Полную силу, действующую на проводник, можно найти суммированием элементарных сил $d\mathbf{F}$ на отдельных элементах проводника, т.е. $\mathbf{F} = \int d\mathbf{F}$. Силы, действующие на токи в магнитном поле, называют амперовыми или силами Ампера.

Если имеется прямолинейный отрезок провода и магнитная индукция во всех его точках постоянна, то сила Ампера согласно (62.1):

$$\mathbf{F} = I[\mathbf{l}\cdot\mathbf{B}]. \qquad (62.2)$$

Величина этой силы равна

$$F = I\cdot l\cdot B\cdot \sin\alpha, \qquad (62.3)$$

где α – угол между векторами **l** и **B**,

l – длина провода,

I – сила тока в проводнике.

Направление силы **F** перпендикулярно к **l** и **B** и подчиняется правилу правого винта: при движении головки винта от вектора **l** к вектору **B** поступательное движение винта происходит в направлении силы **F**. Взаимное расположение векторов **l**, **B** и **F** показано на рисунке 85.

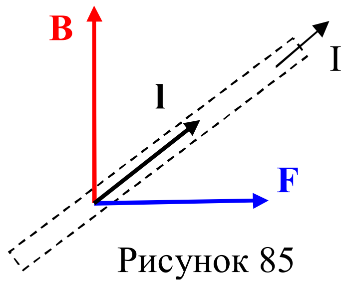


Рисунок 85

Закон Ампера позволяет определить единицу измерения магнитной индукции. Предположим, что проводник длиной l с током I перпендикулярен вектору магнитной индукции. Тогда закон Ампера (61.3) запишется в виде $F = I\cdot l\cdot B$, и

$$B = \frac{F}{I\cdot l},$$

откуда определяем, что 1 Тл – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой в 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику протекает ток в 1 А, т.е. 1 Тл = 1 Н/(А·м).

Одним из методов измерения магнитной индукции B является использование зависимости электрического сопротивление висмута от величины индукции магнитного поля (примерно на 5 % на каждую десятую долю тесла). Помещая предварительно проградуированную висмутовую спираль в магнитное поле, и измеряя относительное изменение ее сопротивления, можно определить магнитную индукцию поля. Следует отметить, что у других металлов электрическое сопротивление также возрастает в магнитном поле, но в гораздо меньшей степени. У меди, например, увеличение сопротивления примерно в 10^4 раз меньше, чем у висмута.

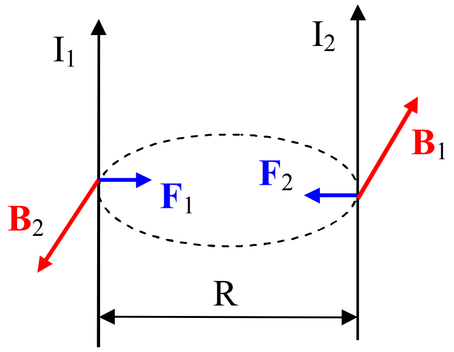


Рисунок 86

Применим закон Ампера для вычисления силы взаимодействия двух находящихся в вакууме параллельных бесконечно длинных прямых токов. Если расстояние между токами R (рисунок 86), то каждый элемент тока I_2 будет находиться в магнитном поле, индукция которого равна $B_1 = (\mu_0/2\pi)\cdot(I_1/R)$ (см. формулу (60.4)). Угол α между элементами тока I_2 и вектором $\mathbf{B}_1$ прямой. Следовательно, согласно (62.3) на единицу длины ($l_2 = 1$ м) тока I_2 действует сила

$$F_2 = I_2 l_2 B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{R} I_1 I_2. \qquad (62.4)$$

Нетрудно убедиться, что токи, одинаково направленные, притягиваются, а противоположно направленные – отталкиваются. Для силы F_1, действующей на единицу длины тока I_1, получается аналогичное (62.4) выражение.

Единица силы тока (ампер) – определяется через магнитное взаимодействие токов. Если в (62.4) положить $I_1 = I_2 = 1$ А, а $R = 1$ м, то можно дать следующее определение: 1 А – сила постоянного тока, протекающего по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызывающего между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ Н на каждый метр длины. Из этого определения следует, что магнитная постоянная должна иметь значение $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ единицы системы СИ.

Так как всякий ток есть движение заряженных частиц (электронов или ионов), то очевидно, что на движущийся заряд в магнитном поле действует сила. Нетрудно определить величину этой силы. На проводник длиной l с током I в однородном магнитном поле с индукцией B действует сила Ампера

$$F_A = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами **l** и **B**.

С другой стороны

$$I \cdot l = Nev,$$

где N – полное число движущихся заряженных частиц;

e – заряд частицы (носителя тока);

v – скорость движения частиц.

Учитывая, что направление **l** совпадает с направлением скорости **v** движения положительных частиц (с направлением тока), мы можем выражение для силы представить в следующем виде:

$$F_A = Nev \cdot B \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами **v** и **B**.

Сила, действующая на проводник, пропорциональна полному числу движущихся частиц, а значит, сила, действующая на одну частицу, равна:

$$F = ev \cdot B \cdot \sin\alpha. \tag{62.5}$$

Заменяя в (62.5) заряд носителя тока на q, получаем

$$F = qv \cdot B \cdot \sin\alpha. \tag{62.6}$$

Полученный результат можно выразить в векторной форме:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}]. \tag{62.7}$$

Направление этой силы перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы **v** и **B**, и подчиняется правилу правого винта. Скорость **v** в этой формуле есть скорость заряда относительно магнитного поля. Если заряд q положителен, направление силы **F** совпадает с направлением векторного произведения $[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]$. В случае отрицательного заряда q направления **F** и $[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]$ противоположны. Сила **F** всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила **F** работы не совершает. Иными словами, постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется. Причем на покоящуюся заряженную частицу ($\mathbf{v} = 0$) магнитное поле не действует ($\mathbf{F} = 0$).

Если одновременно имеются электрическое и магнитное поля, сила, действующая на заряженную частицу, равна:

$$\mathbf{F}_{л} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]. \tag{62.8}$$

Это выражение было получено Лоренцем путем обобщения экспериментальных данных, и $\mathbf{F}_{л}$ носит название силы Лоренца.

Сила Лоренца складывается из двух слагаемых: $\mathbf{F}_{л} = \mathbf{F}_{эл} + \mathbf{F}_{м}$, где $\mathbf{F}_{эл} = q\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_{м} = q[\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}]$, которые называют, соответственно, электрической и магнитной составляющими силы Лоренца. Разделение полной силы Лоренца $\mathbf{F}_{л}$ на электрическую и магнитную составляющие зависит от выбора системы отсчёта. Без указания системы отсчёта такое разделение не имеет смысла.

§ 3.63 Работа при перемещении проводника с током в постоянном магнитном поле

Понятие потока вектора магнитной индукции или магнитного потока вводится аналогично потоку вектора напряжённости электрического поля (см. § 3.52). Рассмотрим в однородном магнитном поле элементарную плоскую поверхность dS и выберем определённое направление нормали **n** к ней (рисунок 87). Величину

$$d\Phi = B_n \cdot dS = B \cdot dS \cdot \cos\alpha = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad (63.1)$$

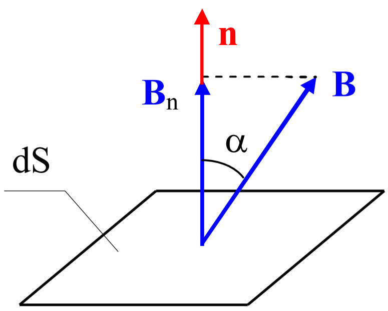


Рисунок 87

называют магнитным потоком через площадку dS. Здесь через B_n обозначена проекция вектора **B** на направление нормали **n**, $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали **n** к площадке, α – угол между **B** и **n**. Выбор направления вектора **n** (а, следовательно, и d**S**) условен, так как его можно направить в любую сторону.

Из формулы (63.1) определяется единица измерения магнитного потока вебер (Вб): 1 Вб – магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл (1 Вб = 1 Тл·м^2).

Если поле неоднородно и поверхность не является плоскостью, то последнюю можно разбить на бесконечно малые элементы dS и каждый элемент считать плоским, а поле в котором он находится – однородным. Поэтому для любого магнитного поля поток вектора магнитной индукции через площадку dS есть $d\Phi = B_n \cdot dS$. Полный поток вектора **B** через поверхность S в любом неоднородном магнитном поле равен:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S B_n \cdot dS. \qquad (63.2)$$

Поток вектора **B** может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака cosα (определяется выбором положительного направления нормали **n**). Обычно поток вектора **B** связывают с определенным контуром, по которому течёт ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено (см. § 3.59) (оно связано с направлением тока правилом правого винта). Таким образом, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Теорема Гаусса для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \oint_S B_n \cdot dS = 0 \qquad (63.3)$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми, т.е. магнитное поле является вихревым.

Так как на проводник с током в магнитном поле действуют силы Ампера, то при движении проводника совершается определённая работа. Найдём величину этой работы.

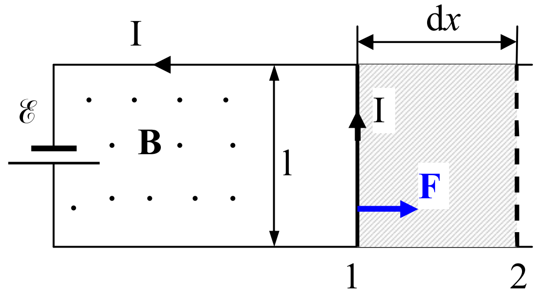


Рисунок 88

Предположим, что прямая перемычка длиной l, входящая в цепь тока, может перемещаться поступательно параллельно самой себе на отрезок dx по двум параллельным шинам (рисунок 88). Допустим, что этот контур находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура («на нас»). При указанных направлениях тока и индукции **B** сила **F**, действующая на перемычку, будет направлена вправо в плоскости контура и равна

$$F = I\cdot l\cdot B.$$

Поэтому механическая работа dA, совершаемая при перемещении перемычки, выразится формулой

$$dA = I\cdot l\cdot B\cdot dx = I\cdot B\cdot dS, \qquad (63.4)$$

где $dS = l\cdot dx$ – площадь, описанная перемычкой с током при движении (на рисунке 88 заштрихована).

Если индукция **B** направлена иначе, то ее всегда можно разложить на составляющую $\mathbf{B}_n$, перпендикулярную к dS, и составляющую $\mathbf{B}_\tau$, лежащую в плоскости dS. Так как сила **F** всегда перпендикулярна к **B** (§ 3.62), то составляющая $\mathbf{B}_\tau$ вызовет силу, перпендикулярную к dx, и работа этой силы будет равна нулю. Поэтому

$$dA = I \cdot B_n \cdot dS = I \cdot d\Phi, \tag{63.5}$$

где dΦ – приращение магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром с током.

Для работы по перемещению перемычки из положения 1 в положение 2 при I = const имеем:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = I\int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1), \tag{63.6}$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки сквозь контур в начальном и конечном положениях.

Выражая в этой формуле магнитный поток в веберах, а силу тока – в амперах, мы получим работу в джоулях.

Выражение (63.6) дает величину и знак работы, совершаемой силой Ампера. Указанная работа совершается за счет источника тока, а не за счет энергии внешнего магнитного поля.

§ 3.64 Явление электромагнитной индукции

В § 3.59 и § 3.60 было показано, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Связь магнитного поля с током привела к многочисленным попыткам возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Эта фундаментальная задача была блестяще решена в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем, открывшим явление электромагнитной индукции. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, возникает электрический ток, получивший название индукционного тока.

Рассмотрим классические опыты Фарадея, с помощью которых было обнаружено явление электромагнитной индукции. Если в замкнутую на гальванометр G катушку (соленоид) вдвигать или выдвигать постоянный магнит (рисунок 89а), то в моменты его движения наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток); направления отклонений стрелки при изменении направления движения магнита также меняются. Отклонение стрелки гальванометра и, следовательно, сила индукционного тока тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита (N $\Leftrightarrow$ S) направление отклонения стрелки, т.е. направление индукционного тока, изменяется. Для получения индукционного тока можно передвигать соленоид относительно неподвижного магнита.

Если концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к гальванометру G, а через другую катушку пропускается ток, то при перемещении катушек друг относительно друга (рисунок 89б), в моменты включения (выключения) тока или при изменении силы тока реостатом R наблюдается отклонение стрелки гальванометра. Направления отклонений стрелки гальванометра также противоположны при включении и выключении тока, его увеличении или уменьшении, сближении или удалении катушек.

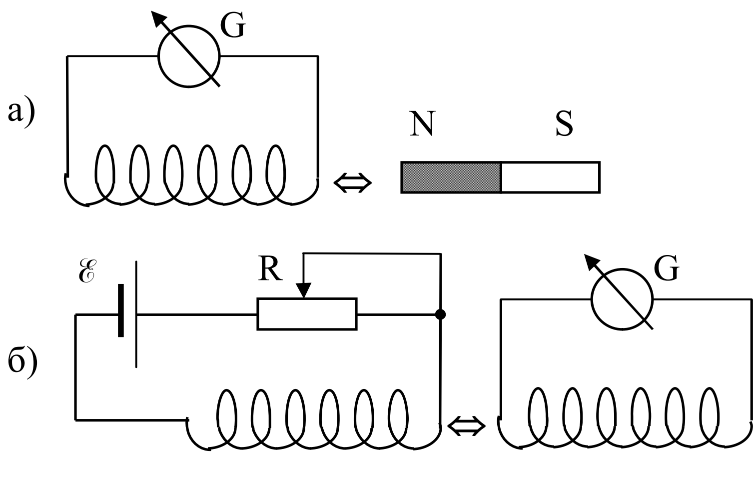


Рисунок 89

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции. Например, при повороте в однородном магнитном поле замкнутого проводящего контура в нем также возникает индукционный ток. В данном случае индукция магнитного поля вблизи проводника остается постоянной, а меняется только поток магнитной индукции через площадь контура.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$. При этом $\mathcal{E}_i$ совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока Ф, и определяется лишь скоростью его изменения, т.е. величиной $d\Phi/dt$. Причем изменение знака производной $d\Phi/dt$ приводит к изменению направления индукционного тока, т.е. полярности $\mathcal{E}_i$. Направление индукционного тока, а значит и знак $\mathcal{E}_i$, определяется правилом Ленца: индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемый им магнитный поток препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток. Правило Ленца выражает существенный факт – стремление системы противодействовать изменению ее состояния (электромагнитная инерция).

Открытие явления электромагнитной индукции имело огромное научное и техническое значение. Это явление показало, что можно не только получить магнитное поле при помощи токов, но и, обратно, получить электрические токи при помощи магнитного поля. Этим была установлена взаимосвязь между электрическими и магнитными явлениями, что послужило в дальнейшем толчком для разработки теории электромагнитного поля.

§ 3.65 Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

В результате многочисленных опытов Фарадей установил основной количественный закон электромагнитной индукции. Он показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток. Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой электродвижущей силой электромагнитной индукции. Фарадей установил, что значение ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$ пропорционально скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -K\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (65.1)$$

где К – коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения.

В системе единиц СИ коэффициент К = 1, т.е.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (65.2)$$

Эта формула и представляет собой закон электромагнитной индукции Фарадея. Знак минус в этой формуле соответствует правилу (закону) Ленца.

Закон Фарадея можно сформулировать еще таким образом: ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$ в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Этот закон является универсальным: ЭДС $\mathcal{E}_i$ не зависит от способа изменения магнитного потока.

Знак минус в (65.2) показывает, что увеличение потока ($\frac{d\Phi}{dt} > 0$) вызывает ЭДС $\mathcal{E}_i < 0$, т.е. магнитный поток индукционного тока направлен навстречу потоку, вызвавшему его; уменьшение потока ($\frac{d\Phi}{dt} < 0$) вызывает $\mathcal{E}_i > 0$ т. е. направления магнитного потока индукционного тока и потока, вызвавшего его, совпадают. Знак минус в формуле (65.2) является математическим выражением правила Ленца – общего правила для нахождения направления индукционного тока (а значит и знака и ЭДС индукции), выведенного в 1833 г. Правило Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

ЭДС индукции выражается в вольтах (В). Действительно, учитывая, что единицей магнитного потока является вебер (Вб), получим:

$$\left[\frac{d\Phi}{dt}\right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В}.$$

Если замкнутый контур, в котором индуцируется ЭДС индукции, состоит из N витков, то $\mathcal{E}_i$ будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков. И если магнитный поток, охватываемый каждым витком, одинаков и равен Ф, то суммарный поток сквозь поверхность N витков, равен (NФ) – полный магнитный поток (потокосцепление). В этом случае ЭДС индукции равна:

$$\mathcal{E}_i = -N\cdot\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (65.3)$$

Формула (65.2) выражает закон электромагнитной индукции в общей форме. Она применима как к неподвижным контурам, так и к движущимся проводникам в магнитном поле. Входящая в нее производная от магнитного потока по времени в общем случае состоит из двух частей, одна из которых обусловлена изменением магнитной индукции во времени, а другая – движением контура относительно магнитного поля (или его деформацией). Рассмотрим некоторые примеры применения этого закона.

Пример 1. Прямолинейный проводник длиной l движется параллельно самому себе в однородном магнитном поле (рисунок 90). Этот проводник может входить в состав замкнутой цепи, остальные части которой неподвижны. Найдем ЭДС, возникающую в проводнике.

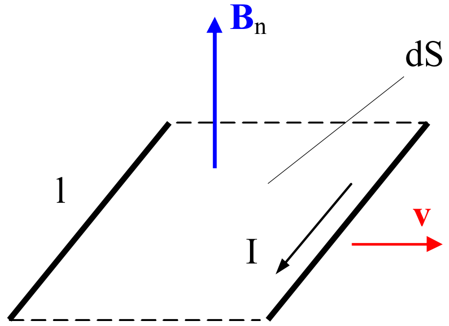


Рисунок 90

Если мгновенное значение скорости проводника есть v, то за время dt он опишет площадь $dS = l\cdot v\cdot dt$ и за это время пересечет все линии магнитной индукции, проходящие через dS. Поэтому изменение магнитного потока через контур, в состав которого входит движущийся проводник, будет $d\Phi = B_n\cdot l\cdot v\cdot dt$. Здесь B_n – составляющая магнитной индукции, перпендикулярная к dS. Подставляя это выражение в формулу (65.2) получаем величину ЭДС:

$$\mathcal{E}_i = B_n \cdot l \cdot v. \qquad (65.4)$$

Направление индукционного тока и знак ЭДС определяются правилом Ленца: индукционный ток в контуре всегда имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток. В некоторых случаях возможно определение направления индукционного тока (полярности ЭДС индукции) согласно другой формулировке правила Ленца: индукционный ток в движущемся проводнике направлен таким образом, что возникающая при этом сила Ампера противоположна вектору скорости (тормозит движение).

Разберем численный пример. Вертикальный проводник (автомобильная антенна) длиной $l = 2$ м движется с востока на запад в магнитном поле Земли со скоростью $v = 72$ км/час = 20 м/с. Вычислим напряжение между концами проводника. Так как проводник разомкнут, то тока в нем не будет и напряжение на концах будет равно ЭДС индукции. Учитывая, что горизонтальная составляющая магнитной индукции поля Земли (т.е. составляющая, перпендикулярная к направлению движения) для средних широт равна $2 \cdot 10^{-5}$ Тл, по формуле (64.4) находим

$$U = B_n \cdot l \cdot v = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 20 = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ В},$$

т.е. около 1 мВ. Магнитное поле Земли направлено с юга на север. Поэтому мы находим, что ЭДС направлена сверху вниз. Это значит, что нижний конец провода будет иметь более высокий потенциал (зарядится положительно), а верхний – более низкий (зарядится отрицательно).

Представим себе теперь, что автомобильная антенна (проводник) расположена не вертикально, а под углом φ к горизонту (см. рисунок 91). В этом случае ЭДС индукции будет пропорциональной площади контура, прочерченного проводником:

$S = l \cdot v \cdot \sin\varphi = l \cdot h$, где h – проекция длины проводника на направление, перпендикулярное к вектору скорости. Из сказанного можно заключить, что при перемещении в магнитном поле Земли деформированной антенны ЭДС индукции определяется не длиной l проводника, а его «высотой» h, т.е. размерами антенны по вертикали.

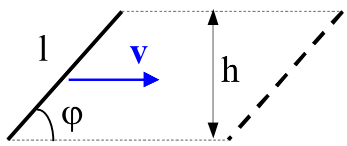


Рисунок 91

Пример 2. В магнитном поле находится замкнутый проволочный контур, пронизываемый магнитным потоком Ф. Предположим, что этот поток уменьшается до нуля, и вычислим полную величину заряда, прошедшего по цепи. Мгновенное значение ЭДС в процессе исчезновения магнитного потока выражается формулой (65.2). Следовательно, согласно закону Ома мгновенное значение силы тока есть

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (65.5)$$

где R – полное сопротивление цепи.

Величина прошедшего заряда равна

$$q = \int I \cdot dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R}\int_{\Phi}^{0} d\Phi = \frac{\Phi}{R}. \qquad (65.6)$$

Полученное соотношение выражает закон электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем, который из своих опытов заключил, что величина заряда, прошедшего по цепи, пропорциональна полному числу линий магнитной индукции, пересечённых проводником (т.е. изменению магнитного потока $\Phi_1 - \Phi_2$), и обратно пропорциональна сопротивлению цепи R. Соотношение (65.6) позволяет дать определение единицы магнитного потока в системе СИ: вебер – магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцеплённом с ним контуре сопротивлением 1 Ом проходит заряд 1 Кл.

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в переменном магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае она не может быть причиной возникновения ЭДС индукции. Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. Циркуляция вектора напряжённости $\mathbf{E}_B$ этого поля по любому неподвижному контуру L проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции:

$$\mathscr{E}_i = \oint_L \mathbf{E}_B d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} . \qquad (65.7)$$

Линии напряжённости вихревого электрического поля представляют собой замкнутые кривые, поэтому при перемещении заряда в вихревом электрическом поле по замкнутому контуру совершается отличная от нуля работа. В этом заключается отличие вихревого электрического поля от электростатического, линии напряжённости которого начинаются и заканчиваются на зарядах.

§ 3.66 Генератор переменного тока

Явление электромагнитной индукции применяют для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этого используют генераторы. Принцип действия генератора переменного тока рассмотрим на примере плоской рамки, вращающейся в однородном магнитном поле, не касаясь деталей конструкции генератора.

На рисунке 92 изображена плоская рамка площадью S, равномерно вращающаяся вокруг горизонтальной оси. Концы рамки подключены к двум изолированным медным кольцам (контактные кольца) 1 и 2, укрепленным на оси вращения рамки. Кольца при помощи прижимных проводников из меди или графита (щетки) 3 и 4 могут быть включены в замкнутую цепь, не создавая помехи вращению рамки.

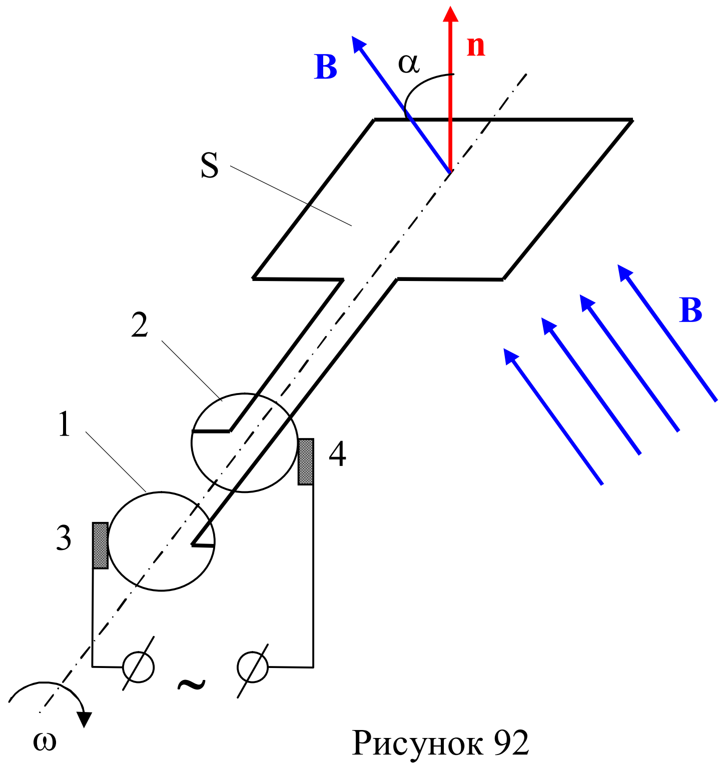


Рисунок 92

Если α – угол между нормалью к плоскости рамки (витка) и вектором магнитной индукции **B**, то поток магнитной индукции через рамку равен:

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha \,. \tag{66.1}$$

При равномерном вращении рамки с угловой скоростью ω угол $\alpha = \omega t$, и магнитный поток

$$\Phi_1 = BS\cos\omega t \,. \tag{66.2}$$

Из основного закона электромагнитной индукции найдем ЭДС индукции $\mathscr{E}_1$:

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = BS\omega\sin\omega t = \mathscr{E}_{01}\sin\omega t, \tag{66.3}$$

где $\mathscr{E}_{01} = BS\omega$ – амплитудное значение ЭДС.

Если рамка состоит из N витков, то полный магнитный поток через рамку Ф и амплитудное значение ЭДС $\mathscr{E}_0$, индуцируемой в рамке, будут в N раз больше:

$$\Phi = N\Phi_1 = NBS\cos\alpha = NBS\sin\omega t; \tag{66.4}$$

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(t) = \frac{d\Phi}{dt} = NBS\sin\omega t = \mathscr{E}_0\sin\omega t; \tag{66.5}$$

$$\mathscr{E}_0 = N\mathscr{E}_{01} = NBS\omega. \tag{66.6}$$

Итак, если в однородном магнитном поле равномерно вращается рамка, то на выходе рамки возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону. Таким образом, получили генератор переменного тока, который на выходе создает переменную разность потенциалов (переменное напряжение), подаваемую во внешнюю цепь:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = U = \mathcal{E}_0 \sin\omega t. \qquad (66.7)$$

При равномерном вращении период T и частота ν вращения выражаются через угловую скорость ω:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (66.8)$$

Из приведённых выше уравнений следует, что частота и период переменного тока равны частоте ν и периоду T вращения рамки.

Для увеличения амплитудного значения ЭДС, равного $\mathcal{E}_0 = NBS\omega$, следует увеличивать число витков N, площадь рамки S и индукцию магнитного поля B.

Процесс преобразования механической энергии в электрическую обратим. Если через рамку, помещённую в магнитное поле, пропускать ток, то на рамку будет действовать вращающий момент ($\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m\mathbf{B}]$; $\mathbf{p}_m = NIS\mathbf{n}$) и рамка начинает вращаться. На этом принципе действуют электродвигатели.

Однако, генераторы (электродвигатели), имеющие в своей основе вращающиеся в магнитном поле рамки, имеют существенные недостатки:

- щёточная система передачи тока не позволяет развивать большие токи (мощности);

- увеличение площади рамки и числа витков приводит к увеличению массы рамки и в итоге к нежелательным деформациям и потерям на преодоление сил трения при вращении. Поэтому на практике рамку, состоящую из множества витков, закрепляют неподвижно (статор), а во вращение приводят многополюсный электромагнит (ротор). Так как в России принята стандартная частота ν = 50 Гц, то частота ν' вращения ротора равна

$$\nu' = \frac{\nu}{p}\,, \qquad (66.9)$$

где p – число пар полюсов.

В мощных генераторах (электродвигателях) число пар полюсов электромагнита может достигать нескольких десятков. Двухполюсный ротор должен был бы вращаться с частотой 50 об/с.

При протекании переменного тока, изменяющегося по гармоническому закону $I(t) = I_0 \sin\omega t$ по резистору с сопротивлением R на резисторе выделяется мгновенная мощность

$$P(t) = I^2(t)R = I_0^2 R\sin^2\omega t = I_0^2 R\sin^2\frac{2\pi}{T}t\,. \qquad (66.10)$$

Обычно необходимо знать не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за продолжительное время. Так как мы имеем дело с периодическим процессом, то для нахождения среднего значения мощности достаточно вычислить среднее значение мощности за период колебаний T.

Работа переменного тока за время dt равна

$$dA = P(t)dt = I_0^2 R\,\sin^2\frac{2\pi}{T}tdt\,. \qquad (66.11)$$

Тогда работа A за время полного периода T будет равна:

$$A = \int_0^T P(t)dt = I_0^2 R\int_0^T \sin^2\frac{2\pi}{T}tdt = \frac{1}{2}I_0^2 RT. \qquad (66.12)$$

Отсюда получаем для средней мощности P выражение:

$$P = \frac{A}{T} = \frac{1}{2} I_0^2 R. \qquad (66.13)$$

Так как $U_0 = I_0R$, то имеем

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} U_0 I_0. \qquad (66.14)$$

Обозначим через $I_Э$ и $U_Э$ – силу тока и напряжение постоянного тока, который выделяет на сопротивлении R такую же мощность, что и данный переменный ток, т.е.

$$P = I_Э^2 R = \frac{U_Э^2}{R} = U_Э I_Э. \qquad (66.15)$$

Сравнивая эти выражения (66.15) с выражениями (66.14) для мощности переменного тока, находим

$$I_Э = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad U_Э = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \qquad (66.16)$$

где U_0, I_0 – амплитудные значения напряжения и силы переменного тока.

Величины $I_Э$ и $U_Э$ – называют, соответственно, эффективными (действующими) значениями силы тока и напряжения. Обычно амперметры и вольтметры градуируются по эффективным значениям силы тока и напряжения. Пользуясь эффективными значениями, можно выразить среднюю мощность переменного тока теми же формулами, что и мощность постоянного тока. В цепях переменного тока резисторы с сопротивлением R называют активным сопротивлением.

Контрольные вопросы к § 3.39 – § 3.47

1 Запишите, сформулируйте и объясните закон Кулона.

2 Что такое электрическое поле? Какие поля называются электростатически-

ми? Что такое напряжённость **E** электростатического поля?

3 Что называют силовыми линиями (линиями напряжённости электрического поля)? Какими свойствами они обладают? Приведите примеры графического изображения электрических полей.

4 Что называется циркуляцией вектора напряжённости?

5 Какова связь между напряжённостью и потенциалом? Выведите ее и объясните. Каков физический смысл этих понятий?

6 Чему равна работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности?

7 Что называется силой тока? плотностью тока? Назовите условия возникновения и существования электрического тока.

8 Что такое сторонние силы? Какова их природа?

9 Почему напряжение является обобщённым понятием разности потенциалов?

10 Какова связь между сопротивлением и проводимостью, удельным сопротивлением и удельной проводимостью? Каковы их единицы измерения?

11 Что понимают под средней, дрейфовой или упорядоченной скоростью движения носителей тока?

12 Что понимают под напряжённостью поля сторонних сил?

13 Выведите законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

14 В чём заключается физический смысл удельной тепловой мощности тока?

15 Проанализируйте обобщённый закон Ома. Какие частные законы можно из него получить?

16 Как формулируются правила Кирхгофа? На чём они основаны?

17 Как составляются уравнения, выражающие правила Кирхгофа? Как избежать лишних уравнений?

Контрольные вопросы к § 3.48 – § 3.55

1 Как, пользуясь магнитной стрелкой, можно определить знаки полюсов источников постоянного тока?

2 Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?

3 Что называют индукцией магнитного поля? Как определяют направление вектора магнитной индукции **B**?

4 Что такое линии магнитной индукции? Как определяется их направление? Чем они отличаются от линий напряжённости электростатического поля?

5 Записав закон Био-Савара-Лапласа, объясните его физический смысл.

6 Рассчитайте, применяя закон Био-Савара-Лапласа, магнитное поле: 1) прямого тока; 2) в центре кругового проводника с током.

7 Найдите выражение для силы взаимодействия двух бесконечных прямолинейных одинаковых токов противоположного направления. Начертите рисунок с указанием сил.

8 Назовите единицу измерения магнитной индукции и напряжённости магнитного поля. Дайте их определения.

9 Что называют потоком вектора магнитной индукции? Запишите теорему Гаусса для магнитного поля, объяснив ее физический смысл.

10 Чему равна работа по перемещению проводника с током в магнитном поле?

11 В чём заключается явление электромагнитной индукции? Что является причиной возникновения ЭДС индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит ЭДС индукции, возникающая в контуре?

12 Сформулируйте правило Ленца, проиллюстрировав его примерами.

13 Выведите выражение для ЭДС индукции в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле. За счёт чего ее можно увеличить?

14 Запишите выражение для мощности переменного тока.

Тесты к § 3.39 – § 3.47

1. Два одинаковых положительных заряда находятся на расстоянии 20 см друг от друга. Найдите на прямой, перпендикулярной линии, соединяющей заряды и проходящей через середину этой линии, точку, в которой напряжённость поля максимальна.

A) 10 см B) 8 см C) 7,8 см Д) 7,1 см E) 5 см

2. Восемь заряженных капель воды радиусом 1 мм каждая сливаются в одну большую каплю. Найдите потенциал большой капли, если заряд малой 10^{-10} Кл. Электрическая постоянная $8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

A) 2,8 кВ B) 3,2 кВ C) 3,6 кВ Д) 4,0 кВ E) 4,4 кВ

3. Два проводника, соединенные последовательно, имеют сопротивление в 6,25 раза большее, чем при их параллельном соединении. Найдите во сколько раз сопротивление одного проводника больше сопротивления другого.

A) 8 B) 2 C) 3 Д) 4 E) 5

4. Аккумуляторная батарея перед зарядкой имела ЭДС $\mathscr{E}_1 = 90$ В, после зарядки $\mathscr{E}_2 = 100$ В. Величина тока в начале зарядки была $I_1 = 10$ А. Какова была величина тока I_2 в конце зарядки, если внутреннее сопротивление батареи $r = 2$ Ом, а напряжение U, создаваемое зарядным устройством, постоянно.

A) 8 А B) 9 А C) 6 А Д) 5 А E) 4 А

5. По тонкому кольцу радиуса R равномерно распределен заряд q. Найдите модуль напряжённости электрического поля на оси кольца на расстоянии $R\sqrt{3}$ от его центра.

A) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{3q}{R^2}$ B) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{3q}{8R^2}$ C) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{3q}{4R^2}$ Д) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}q}{4R^2}$ E) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}q}{8R^2}$

6. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 0{,}08$ Ом при токе $I_1 = 4$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 8$ Вт. Какую мощность P_2 отдаст он во внешнюю цепь при токе $I_2 = 6$ А?

A) 16 Вт B) 12 Вт C) 8 Вт Д) 10 Вт E) 11 Вт

7. Два резистора, сопротивления которых отличаются в n = 4,8 раза, включают в цепь постоянного тока при неизменном напряжении в цепи один раз последовательно, а другой – параллельно. Каково отношение $\frac{P_2}{P_1}$ тепловых мощностей, выделяющихся на резисторах во втором (P_2) и в первом (P_1) случаях?

A) 3 B) 4 C) 5 Д) 6 E) 7

Тесты к § 3.48 – § 3.55

1. По двум направляющим параллельным проводникам, расстояние между которыми ℓ = 15 см, движется с постоянной скоростью v = 0,6 м/с перемычка перпендикулярно магнитному полю с индукцией B = 1 Тл. В замкнутую цепь включён резистор с сопротивлением R = 2 Ом. Определите количество теплоты Q, выделенной в резисторе в течение t = 2 с.

A) 9,2 мДж B) 8,1 мДж C) 7,0 мДж Д) 5,9 мДж E) 4,8 мДж

2. Электрон влетает в область однородного магнитного поля индукцией B = 0,01 Тл со скоростью v = 1 000 км/с перпендикулярно линиям магнитной индукции. Какой путь он пройдёт к тому моменту времени, когда вектор его скорости повернётся на угол, равный 1^0? Элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

A) $1 \cdot 10^{-4}$ м B) $5 \cdot 10^{-5}$ м C) $1 \cdot 10^{-5}$ м Д) $1 \cdot 10^{-3}$ м E) $5 \cdot 10^{-3}$ м

3. По жёсткому проволочному кольцу диаметром d = 10 см и сечением S = 5 мм^2 течёт ток силой I = 5 A. Плоскость кольца перпендикулярна магнитному по-

лю, индукция которого B = 1 Тл. Определите механическое напряжение (силу, действующую на единицу площади поверхности) в проволоке.

А) $1 \cdot 10^5$ Па В) $2 \cdot 10^5$ Па С) $5 \cdot 10^5$ Па Д) $8 \cdot 10^5$ Па Е) $10 \cdot 10^5$ Па

4. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно к плоскости кольца, изготовленного из медной проволоки. Радиус кольца R = 10 см. Диаметр проволоки d = 2 мм. С какой скоростью должна изменяться во времени магнитная индукция B, чтобы индукционный ток в кольце равнялся 10 А? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

А) $1{,}02\ \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$ В) $1{,}08\ \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$ С) $1{,}14\ \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$ Д) $1{,}20\ \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$ Е) $1{,}26\ \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$

5. Медный куб с длиной ребра a = 10 см скользит по столу с постоянной скоростью v = 10 м/с, касаясь стола одной из плоских поверхностей. Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль поверхности стола перпендикулярно вектору скорости куба. Найдите модуль вектора напряжённости электрического поля, возникающего внутри металла, если модуль вектора индукции B = 0,2 Тл.

А) 2 000 В/м В) 200 В/м С) 20 В/м Д) 2 В/м Е) 0,2 В/м

6. В однородном магнитном поле, индукция которого равна 0,1 Тл, равномерно вращается катушка, состоящая из 100 витков проволоки. Площадь поперечного сечения катушки 100 см^2. Ось вращения катушки перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Угловая скорость вращения катушки равна 10 рад/с. Чему равна максимальная ЭДС, возникающая в катушке?

А) 10 В В) 8 В С) 4 В Д) 2 В Е) 1 В

7. Прямолинейный проводник длиной 20 см перемещают в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Проводник, вектор его скорости и вектор индукции поля взаимно перпендикулярны. С каким ускорением нужно перемещать проводник, чтобы разность потенциалов на его концах возрастала со скоростью v = 0,1 В/с?

A) 2 м/с^2 В) 25 м/с^2 С) 20 м/с^2 Д) 10 м/с^2 Е) 5 м/с^2

Упражнения для самоконтроля

3.1. На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью σ = 1,5 нКл/см^2 расположена круглая пластинка. Плоскость пластинки составляет с линиями напряжённости угол $\alpha = 45^0$. Определить поток вектора напряжённости через эту пластинку, если ее радиус R = 10 см. [1,88 кВ·м]

3.2. Электростатическое поле создается сферой радиусом R_0 = 4 см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ = 1 нКл/м^2. Определить разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях R_1 = 6 см и R_2 = 10 см от центра сферы. [1,2 В]

3.3. Заряд q > 0 равномерно распределён по тонкому кольцу радиусом R. Найти напряжённость E электрического поля на оси кольца как функцию расстояния x от его центра. $\left[E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \right]$

3.4. Предположим, что положительный заряд в 1 мкКл равномерно распределён по поверхности шара радиусом 10 см. Каков потенциал этой поверхности? Какую работу необходимо совершить, чтобы переместить положительный пробный заряд в 10^{-8} Кл на поверхность шара из точки, удалённой на 30 см от его центра?
[90 кВ; 600 мкДж]

3.5. По медному проводнику сечением 1 мм^2 течёт ток; сила тока 1 А. Определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди 8,9 г/см^3. [74 мкм/с]

3.6. По медному проводу сечением 0,3 мм^2 течет ток 0,3 А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление меди 17 нОм·м. [$2{,}72 \cdot 10^{-21}$ Н]

3.7. Плотность электрического тока в алюминиевом проводе равна 5 А/см^2. Определить удельную тепловую мощность тока, если удельное сопротивление алюминия 26 нОм·м. [65 Дж/(м^3·с)]

3.8. Электрический утюг, рассчитанный на напряжение U_0 = 120 В, имеет мощность Р = 300 Вт. При включении утюга в сеть напряжение на розетке падает с U_1 = 127 В до U_2 = 115 В. Определите сопротивление подводящих проводов. Считайте, что сопротивление утюга не меняется. [5 Ом]

3.9. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми равно 25 см, текут токи 20 А и 30 А в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию В в точке, удаленной на r_1 = 30 см от первого и r_2 = 40 см от второго проводника. [9,5 мкТл]

3.10. Определить индукцию поля, создаваемого прямолинейно равномерно движущимся со скоростью 500 км/с электроном в точке, находящейся от него на расстоянии 20 нм и лежащей на перпендикуляре к скорости, проходящем через мгновенное положение электрона. [20 мкТл]

3.11. Кольцо из алюминиевого провода (ρ = 26 нОм·м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца 20 см, диаметр провода 1 мм. Определить скорость изменения индукции магнитного поля, если сила тока в кольце 0,5 А. [0,33 Тл/с]

3.12. В однородном магнитном поле, индукция которого 0,5 Тл, равномерно с частотой 300 мин$^{-1}$ вращается катушка, содержащая 200 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь поперечного сечения катушки 100 см^2. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определить максимальную ЭДС, индуцируемую в катушке. [31,4 В].

4 Контрольная работа

§ 4.67 Общие методические указания к решению задач и выполнению контрольных работ

1. За время изучения курса физики студент должен представить контрольную работу после изучения дисциплины.

2. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам вариантов. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачётной книжки. Критерии оценки контрольной работы следующие:

“отлично” - 9-10 правильных ответов;

“хорошо” - 8-9 правильных ответов;

“удовлетворительно” - 6-7 правильных ответа;

“неудовлетворительно” - менее 6 правильных ответов.

При получении положительной оценки контрольная работа считается засчитанной.

3. Контрольную работу нужно выполнять письменно на листах формата А4, либо в электронном виде (высылается на имя методиста учебного отдела). Титульный лист включает в себя следующие пункты, расположенные по высоте страницы в следующей последовательности (сверху вниз):

- Министерство образования и науки Российской Федерации;
- Оренбургский государственный университет;
- Контрольная работа по дисциплине «Физика»;
- Фамилию и инициалы студента, группа, номер зачётной книжки;
- Номер варианта.

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах оставлять поля. В конце контрольной работы необходимо оставить 1-2 чистые страницы, предназначенные для замечаний рецензента.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

При выполнении контрольных заданий студентам можно рекомендовать данное пособие, литературу, указанную в конце пособия, справочные материалы из приложений к данному пособию.

6. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с не зачтенной.

7. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертёж, выполненный с помощью чертёжных принадлежностей.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач								
1	701	711	721	731	741	751	761	771	781	791
2	702	712	722	732	742	752	762	772	782	792
3	703	713	723	733	743	753	763	773	783	793
4	704	714	724	734	744	754	764	774	784	794
5	705	715	725	735	745	755	765	775	785	795
6	706	716	726	736	746	756	766	776	786	796
7	707	717	727	737	747	757	767	777	787	797
8	708	718	728	738	748	758	768	778	788	798
9	709	719	729	739	749	759	769	779	789	799
0	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800

8. Решать задачу надо в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

9. После получения расчётной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

10. Числовые значения величин при подстановке их в расчётную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

11. При подстановке в расчётную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти (т.е. в нормированном виде). Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52\cdot10^{3}$, вместо 0,00129 записать $1{,}29\cdot10^{-3}$ и т.п.

12. Вычисления по расчётной формуле надо проводить с соблюдением правил приближённых вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

§ 4.68 Контрольные задачи

701. Первую треть пути поезд прошел со скоростью 60 км/час. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 40 км/час. С какой скоростью поезд прошел оставшуюся часть пути?

702. Катер проходит расстояние между двумя пунктами по реке вниз по течению за время 10 часов, а обратно за 15 часов. За какое время катер прошел бы это расстояние в стоячей воде?

703. Поезд проехал первую половину пути со скоростью $v = 80$ км/ч, а вторую – в $n = 2$ раза медленнее. Определите среднюю скорость поезда на всем участке.

704. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми ℓ = 120 км, движется со скоростью v_1 = 40 км/ч товарный поезд. Одновременно с ним из пункта B в пункт A по параллельному пути движется со скоростью v_2 = 60 км/ч пассажирский поезд. Запишите уравнения движения поездов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в системе координат $0x$, начало которой совпадает с пунктом A, а направление – с направлением движения товарного поезда. Определите через сколько времени t_0 и на каком расстоянии S_0 от пункта A поезда встретятся.

705. На некотором отрезке пути скорость тела увеличилась с 12 до 13 см/с. Зная, что движение равноускоренное, определите, на сколько возрастёт скорость тела после того, как будет пройден следующий участок такой же длины?

706. Тело движется вдоль оси $0x$ по закону $x = 6 - 3t + 2t^2$. Найти среднюю скорость тела и ускорение за промежуток времени 1–4 с. Построить графики перемещения, скорости и ускорения.

707. Два диска, расположенные на одной оси, вращаются с частотой 100 об/с. Пуля, летящая параллельно оси вращения, пробивает оба диска, причем пробоина на втором диске сдвинута относительно пробоины на втором диске на 24^0. Расстояние между дисками 45 см. Определите скорость пули.

708. Автомобиль при торможении начинает скользить по дороге так, что колеса при этом продолжают вращаться. Верхняя точка одного из колес имеет скорость относительно земли v_1 = 110 км/ч, нижняя точка – скорость v_2 = 10 км/ч (направлена вперед по движению). Какова скорость v автомобиля?

709. Горизонтальную платформу перемещают с помощью круглых катков. На какое расстояние переместится каждый каток, если платформа передвинется на 1 м?

710. Стержень длиной ℓ = 0,8 м вращается с угловой скоростью ω = 8 рад/с вокруг оси, проходящей через стержень и перпендикулярной к нему. Один из концов стержня движется с линейной скоростью v = 2 м/с. Определите линейную скорость другого конца стержня.

711. Диаметр задних колес старинного автомобиля в n = 1,5 раза больше диаметра передних. Определите отношение угловых скоростей вращения колес при равномерном движении автомобиля.

712. Две материальные точки равномерно движутся по окружностям, отношение радиусов которых равно $n = 3$. Определите отношение периодов обращения этих точек, если их ускорения равны по величине.

713. Линейная скорость точек обода вращающегося диска $v_1 = 10$ м/с, а точек, находящихся на $\ell = 20$ см ближе к оси вращения, $v_2 = 6$ м/с. Определите угловую скорость вращения и радиус диска.

714. Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшило свою частоту вращения с $\nu_1 = 300$ об/мин до $\nu_2 = 180$ об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

715. Ведёрко с водой вращают в вертикальной плоскости на верёвке длиной 0,5 м. С какой минимальной скоростью нужно его вращать, чтобы при прохождении через верхнюю точку удержать воду в ведёрке?

716. Лифт разгоняется с постоянным ускорением до скорости $v = 10$ м/с в течение $t = 10$ с. Столько же времени занимает и остановка лифта. Определите отношение весов человека в поднимающемся лифте в начале и конце движения.

717. Определите во сколько раз вес человека в лифте, движущемся с ускорением вверх, больше веса в лифте, движущемся с ускорением вниз. В обоих случаях величина ускорения $a = 3$ м/с^2.

718. Сила **F**, направленная вертикально вверх, поднимает тело массой $m = 2$ кг с ускорением $a = 4$ м/с^2. Определите работу, которую совершает сила за время $t = 10$ с подъема.

719. Сила тяги трактора при пахоте равна 10 кН, а его скорость равна 7,2 км/ч. Какую работу совершает трактор за 5 ч?

720. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью $k = 150$ Н/м был произведен выстрел пули массой $m = 8$ г. Определить скорость v пули при вылете ее из пистолета, если пружина была сжата на $\Delta\ell = 4$ см.

721. С какой начальной скоростью v_0 надо бросить вертикально вниз мяч с высоты 2 м, чтобы он подпрыгнул на высоту 4 м? Считать удар о землю абсолютно упругим.

722. Снаряд, летевший со скоростью $v = 400$ м/с, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью $u_1 = 150$ м/с. Определить скорость u_2 большего осколка.

723. При горизонтальном полёте со скоростью $v = 250$ м/с снаряд массой $m = 8$ кг разорвался на две части. Большая часть массой $m_1 = 6$ кг получила скорость $u_1 = 400$ м/с в направлении полета снаряда. Определить модуль и направление скорости u_2 меньшей части снаряда.

724. Камень брошен вертикально вверх со скоростью 10 м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня равна его потенциальной энергии?

725. Человек массой $m_1 = 70$ кг, бегущий со скоростью $v_1 = 9$ км/ч, догоняет тележку массой $m_2 = 190$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 3{,}6$ км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке?

726. Определить момент инерции однородного диска радиусом $R = 20$ см и массой $m = 1$ кг относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через середину одного из радиусов диска.

727. К ободу колеса радиусом 0,5 м и массой $m = 50$ кг приложена касательная сила $F = 100$ Н. Найти угловое ускорение ε колоса. Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

728. Маховик, момент инерции которого $J = 63{,}6$ кг·м^2, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 31{,}4$ рад/с. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик останавливается через $t = 20$ с.

729. Определить момент инерции шара относительно оси, совпадающей с касательной к его поверхности. Радиус шара 10 см, его масса 5 кг.

730. Определить момент силы M, который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой $\nu = 12$ с$^{-1}$, чтобы он остановился в течение времени $\Delta t = 8$ с. Диаметр блока $D = 30$ см. Массу блока $m = 6$ кг считать равномерно распределённой по ободу.

731. Газ находится в сосуде объёмом V при давлении P_0. Его откачивают из сосуда с помощью поршневого насоса с рабочей камерой объёмом v. Требуется найти число n ходов поршня, которое надо сделать, чтобы давление газа в сосуде понизилось до величины P_n.

732. Открытая с обеих сторон цилиндрическая трубка небольшого сечения длиной 100 см наполовину погружена в ртуть. Верхний конец ее закрывают и вынимают из ртути. Определить длину столбика ртути, оставшейся в трубке. Атмосферное давление считать нормальным.

733. В сосуд вместимостью 10 л, наполненный сухим воздухом при нормальных условиях, вводят 3 г воды и нагревают до 100 ^{0}С. Определить давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре. Зависимостью температуры кипения от давления пренебречь.

734. В начальный момент времени сжатый газ в закрытом цилиндре сечением 100 см^2 удерживается на расстоянии 10 см от дна цилиндра подвижным поршнем, на который действует внешняя сила 10^3 Н и атмосферное давление 10^5 Па. Затем внешняя сила убирается, и газ начинает изотермически расширяться. На каком расстоянии по отношению к первоначальному положению поршень будет иметь наибольшую скорость?

735. Сосуд, заполненный смесью водорода и гелия, отделён от равного ему по объёму пустого сосуда полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы гелия и не пропускающей молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде упало на 10 %. Определить отношение масс гелия и водорода. Все процессы считать изотермическими. Молярные массы водорода и гелия соответственно равны 2 г/моль и 4 г/моль.

736. Одинаковые по массе количества водорода и гелия находятся в сосуде объёмом V_1, который отделён от пустого сосуда объёмом V_2 полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы водорода и не пропускающей гелий. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в 2 раза. Определите отношение V_2/V_1. Температура постоянна. Молярные массы водорода и гелия соответственно равны 2 г/моль и 4 г/моль.

737. Узкая вертикальная цилиндрическая трубка длиной ℓ, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути длиной h. Плотность ртути равна ρ. Трубка расположена открытым концом вверх. Какова была длина ℓ столбика воздуха в трубке, если при перевёртывании трубки открытым концом вниз из трубки вылилась половина ртути? Атмосферное давление равно P_0.

738. В закрытом сосуде объёмом $V = 0{,}1$ м^3 находится вода объёмом $V_в = 10^{-3}$ м^3 при температуре $t = 30$ ^{0}С. Каким стало бы давление в сосуде, если бы силы притяжения между молекулами внезапно исчезли?

739. Кристаллик поваренной соли массой $m = 0{,}1$ г бросили в пруд, глубина которого $h = 5$ м, а площадь $S = 100$ м^2. Какое число N ионов натрия окажется в ведре воды, зачерпнутом из пруда? Объем ведра $V = 10$ л. Считать, что соль равномерно распределилась в пруде. Молярная масса NaCl $\mu = 58{,}5$ г/моль. Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

740. В узкой стеклянной трубке, запаянной с одного конца и расположенной горизонтально, находится столбик воздуха длиной 30,7 см, запертый столбиком ртути длиной 21,6 см. Как изменится длина воздушного столбика, если трубку поставить отверстием вверх? Давление атмосферы 99,6 кПа.

741. Посередине узкой, запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной 10 см. В обеих половинах остальное пространство занимает воздух под давлением 100 кПа. На какое расстояние переместится столбик ртути, если трубку поставить вертикально? Длина трубки 1 м.

742. На дне цилиндра, заполненного воздухом, лежит стальной шарик радиусом 2 см и массой 5 г. До какого давления надо сжать газ, чтобы шарик висел в сжатом воздухе? Газ считать идеальным.

743. Газ нагрели от 27 ^{0}С до 39 ^{0}С. На сколько процентов увеличился объём, если давление осталось неизменным?

744. Газ, занимающий объём 10^{-3} м^3 при нормальном атмосферном давлении, расширился изотермически до объёма 2 л. При этом же объёме его давление было уменьшено в 2 раза. Затем газ расширился при постоянном давлении до объёма 4 л. Начертите график зависимости P(V) и, используя его, установите, при каком из пе-

речисленных процессов газ совершил наибольшую работу. Как изменилась температура?

745. Открытую пробирку с воздухом, находящимся при атмосферном давлении P_1, медленно нагрели до температуры T_1, затем герметически закрыли и охладили до 283 К. Давление при этом упало до 0,7 P_1. До какой температуры была нагрета пробирка? Расширение пробирки не учитывать.

746. Сколько молекул воздуха находится в комнате размерами $12 \cdot 5 \cdot 4$ м^3 при температуре 15 ^{0}C и давлении 100 кПа? Если бы каждую секунду из этой комнаты вылетал 1 млрд. молекул, сколько времени потребовалось бы для удаления всех их? Считать для воздуха молярную массу равной $\mu = 28{,}9$ г/моль.

747. Газ, занимающий при температуре 127 ^{0}C и давлении 10^5 Па объём 2 л, изотермически сжимают до объема V_2 и давления P_2, затем изобарически охлаждают до температуры -73 ^{0}C, после чего изотермически изменяют объем до 1 л. Найдите конечное давление P_4. Решить задачу графически, построив графики в координатах P-V, P-T, V-T.

748. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое число атомов гелия, соединены краном. В первом сосуде средняя скорость атомов равна 1 000 м/с, а во втором 2 000 м/с. Какой будет эта скорость, если открыть кран и сделать сосуды сообщающимися?

749. Сосуд с газом разделён подвижной перегородкой на две части, объёмы которых равны V_1 и V_2, соответственно ($V_1 < V_2$). Температура газа в меньшем объёме $t_1 = -73$ ^{0}C, в большем объёме $t_2 = 527$ ^{0}C. После выравнивания температур перегородка переместилась так, что меньший объём стал равным $\frac{2}{3}V$, где V – объём сосуда. Найдите отношение объёмов V_1 / V_2.

750. Каково давление азота, если средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с, а его плотность 1,35 кг/м^3?

751. Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло $5{,}4^0$ при частоте вращения прибора 150 с$^{-1}$? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно 2 см.

752. В баллоне вместимостью 10 л находится газ при температуре 27 ^{0}С. Вследствие утечки газа давление снизилось на 4,2 кПа. Какое число молекул вышло из баллона, если температура сохранилась неизменной?

753. При расширении газа тепловая машина совершает работу, при этом его объём увеличивается от V_1 = 1 л до V_2 = 2 л, а давление линейно убывает от P_1 = 1 МПа до P_2 = 0,4 МПа. Определите изменение внутренней энергии газа при его расширении и КПД тепловой машины, если количество теплоты, получаемой за цикл тепловой машиной от нагревателя Q_1 = 100 Дж, а отданной холодильнику Q_2 = 80 Дж.

754. В идеальном тепловом двигателе газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику k = 0,73 часть количества теплоты, получаемого от нагревателя. Определите температуру нагревателя $T_н$, если температура холодильника равна $T_х$ = 272 К.

755. Один моль идеального атомарного газа сначала изобарно расширяется, а затем изохорно нагревается, при этом количество теплоты, сообщённое газу на этих участках, одинаково $Q_1 = Q_2 = Q$ = 400 Дж. Начальная температура газа T = 300 К. Определите конечную температуру газа и молярную теплоемкость этого процесса.

756. В вертикальном цилиндре с площадью основания S = 10 см^2 под поршнем массы M = 1 кг, при температуре T = 300 K находится идеальный газ объёмом V = 20 л. Для повышения температуры газа на ΔT = 50 К ему было сообщено количество теплоты Q = 833 Дж. Определите изменение внутренней энергии газа, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

757. В герметично закрытом теплоизолированном сосуде содержится ν = 2 моль идеального двухатомного газа. Какое количество теплоты Q следует подвести к газу для того, чтобы увеличить его температуру на ΔT = 1 К? Потерями тепла на нагрев стенок сосуда пренебречь.

758. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя T_1=500 К, температура холодильника T_2=250 К. Определить термический КПД η цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа A_2=70 Дж.

759. В двух теплоизолированных цилиндрах с объёмами $V_1 = 3$ л и $V_2 = 5$ л находятся одинаковые газы при давлениях $P_1 = 4 \cdot 10^5$ Па и $P_2 = 6 \cdot 10^5$ Па и температурах $t_1 = 27\ ^0C$ и $t_2 = 127\ ^0C$. Цилиндры соединяются теплоизолированной трубкой. Какая температура T и какое давление P установятся в цилиндрах после смешивания газов?

760. В вертикальном открытом сверху цилиндре под тяжёлым поршнем находится газ при температуре $T_1 = 300$ К. Найти работу расширения газа при нагревании его на $\Delta T = 100$ К, если первоначально газ занимал объем $V_1 = 180$ см^3. Масса поршня $M = 100$ кг, его площадь сечения $S = 50$ см^2. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

761. Три одинаковых одноименных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q противоположного знака нужно поместить в центре этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

762. Два одинаковых шарика подвешены на непроводящих нитях равной длины в одной точке. После того, как каждому шарику был сообщен заряд $q = 4 \cdot 10^{-7}$ Кл, они разошлись на угол $\alpha = 60^0$. Найти массу шариков, если расстояние от центров шариков до точки подвеса $\ell = 0{,}2$ м.

763. Два точечных заряда, находясь в воздухе на расстоянии $r_1 = 5$ см, взаимодействуют друг с другом с силой $F_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Н, а находясь в некоторой непроводящей жидкости на расстоянии $r_2 = 10$ см, – с силой $F_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Н. Какова диэлектрическая проницаемость жидкости?

764. Между зарядами $q_1 = +q$ и $q_2 = +9q$ расстояние равно $\ell = 8$ см. На каком расстоянии от первого заряда находится точка, в которой напряженность поля равна нулю?

765. К бесконечной плоскости, расположенной вертикально и имеющей поверхностную плотность заряда σ, прикреплен на непроводящей и нерастяжимой нити одноименно заряженный шарик массы m и с зарядом q. Найти силу натяжения нити и угол отклонения нити от вертикали. Напряженность поля, создаваемого за-

ряженной плоскостью, не зависит от расстояния до плоскости и равна $E = \sigma/2\varepsilon_0$ (ε_0 – электрическая постоянная), вектор напряженности **E** перпендикулярен плоскости.

766. Две частицы, массами m и M, имеющие заряды -q и Q соответственно, движутся как одно целое вдоль силовой линии однородного поля напряженностью **E**. При каком расположении частиц это возможно? Определите ускорение частиц и расстояние между ними. Силой тяжести, действующей на частицы, пренебречь.

767. Положительно заряженный шарик массой $m_ш = 0{,}18$ г и плотностью $\rho_ш = 1{,}8\cdot10^3$ кг/м^3 находится во взвешенном состоянии в жидком диэлектрике плотностью $\rho_д = 900$ кг/м^3. В диэлектрике имеется однородное электрическое поле напряжённостью $E = 4{,}5\cdot10^4$ В/м, направленное вертикально вверх. Найти заряд шарика.

768. При переносе точечного заряда $q_0 = 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии r = 20 см от поверхности заряженного металлического шара, необходимо совершить работу $A = 5\cdot10^{-7}$ Дж. Радиус шара R = 4 см. Найти потенциал φ_0 на его поверхности.

769. Два заряда $q_1 = 2\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2 = 3\cdot10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $\ell = 20$ см друг от друга. Определите потенциал электрического поля в точке, где напряжённость поля равна нулю.

770. Найти напряжённость электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами $q_1 = 8\cdot10^{-9}$ K и $q_2 = -6\cdot10^{-9}$ K, находящимися в вакууме. Расстояние между зарядами равно R = 10 см.

771. Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_0 = 4\cdot10^{-7}$ Кл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол 60^0. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно 20 см.

772. На двух одинаковых капельках воды находятся по одному лишнему электрону. Сила электрического отталкивания капелек уравновешивается силой их тяготения. Найдите радиус капелек. Элементарный заряд $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ (Н·м^2)/кг^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

773. С какой силой (на единицу площади) отталкиваются две одноименные заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда в $\sigma = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл/см^2?

774. Два одинаковых маленьких металлических шарика заряжены положительными зарядами q и 4q. Центры шариков находятся на расстоянии r друг от друга. Шарики привели в соприкосновение. На какое расстояние x после этого нужно развести центры шариков, чтобы сила их взаимодействия осталась прежней?

775. Определите величину (модуль) силы, действующей на точечный заряд q = 4 нКл, который помещен посередине между двумя точечными зарядами q_1 = 30 нКл и q_2 = - 50 нКл, если они находятся в вакууме на расстоянии r = 0,6 м. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

776. Медный шар диаметром 1 см помещен в масло. Плотность масла равна ρ = 800 кг/м^3. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Электрическое поле направлено вертикально вверх и его напряженность равна E = 36 кВ/см.

777. Нагреватель в электрическом чайнике, предназначенном для включения в сеть с напряжением U = 120 В, имеет n = 3 секции одинакового сопротивления R = 40 Ом. Если все три секции соединены последовательно, то вода в чайнике закипит через время t_0 = 90 мин. Вычислите количество теплоты Q, необходимое для нагревания воды до кипения. Считать, что КПД чайника близок к 100%. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

778. Рассчитайте отношение периодов обращения T_1/T_2 двух электронов, если они имеют скорости v_1 и v_2 и движутся по окружностям в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции.

779. Две электрические лампочки включены в сеть параллельно. Сопротивление первой лампочки 360 Ом, сопротивление второй 240 Ом. На какой из лампочек выделяется большая мощность? Во сколько раз?

780. Сколько по весу меди потребуется для изготовления проволоки с площадью поперечного сечения 0,5 мм^2, чтобы сопротивление этой проволоки было равно

1,72 Ом? Плотность меди 8,9 г/см^3, ее удельное сопротивление $1{,}68 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Ускорение силы тяжести 9,8 м/с^2.

781. Генератор, способный давать мощность 100 кВт, подсоединен к фабрике через кабель с общим сопротивлением 5 Ом. Если этот генератор даёт энергию с разностью потенциалов 5 кВ, то какова будет мощность, получаемая фабрикой?

782. Найдите минимальную площадь сечения проводов, отводящих ток от генератора мощности $P = 1$ ГВт, если ток передается на трансформатор под напряжением $U = 15$ кВ. Плотность тока в проводе не должна превышать $j = 10$ А/мм^2.

783. Рассчитайте силу тока, проходящего по медному проводу длиной 100 м и площадью поперечного сечения 0,5 мм^2 при напряжении 6,8 В. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

784. Сопротивления $R_1 = 300$ Ом и $R_2 = 100$ Ом включены параллельно в сеть. Какое количество теплоты Q_1 выделилось на первом сопротивлении, если на втором за это же время выделилось $Q_2 = 60$ кДж?

785. Найдите индукцию магнитного поля в точке, отстоящей на 2 см от бесконечно длинного прямого провода, по которому течет ток 5 А. Магнитная постоянная равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

786. В однородном магнитном поле расположен виток сопротивлением $R = 9{,}5$ Ом и площадью $S = 100$ см^2. Плоскость витка составляет угол $\alpha = 60^0$ с вектором **B**. За время $\tau = 0{,}5$ с индукция поля увеличивается с постоянной скоростью от $B_1 = 0{,}1$ Тл до $B_2 = 0{,}6$ Тл. Найти количество тепла, которое выделилось в витке за это время.

787. Определите скорость, с которой должен двигаться прямолинейный проводник перпендикулярно магнитным линиям однородного поля с индукцией $B = 1$ Тл, чтобы между концами проводника возникла разность потенциалов $\Delta\varphi = 0{,}1$ В. Длина проводника $\ell = 20$ см.

788. Ток силой $I = 10$ А течет по проводнику квадратного сечения, помещенному в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2$ Тл, магнитные линии которого перпендикулярны боковой поверхности проводника. Разность потенциалов между нижней и верхней поверхностями проводника $\Delta\varphi = 2 \cdot 10^{-6}$ В. Определите плот-

ность электронов проводимости в проводнике, если площадь его сечения $S = 0{,}04$ см^2.

789. Из двух одинаковых проводников равной длины, изготовлены два контура – квадратный и круглый. Оба контура помещены в одной плоскости в однородном, изменяющемся во времени магнитном поле. В квадратном контуре возникает постоянный ток $I = 2$ А. Определите силу тока в круглом контуре.

790. Один из способов измерения магнитной индукции состоит в том, чтобы, выдергивая из этого поля катушку, пропустить индукционный ток через устройство для измерения заряда. Если катушка из 50 витков с поперечным сечением 1 см^2 включена в цепь с общим сопротивлением 10 Ом и выдергивается из магнитного поля с индукцией 1 Тл, какой заряд проходит по цепи?

791. Рамка площадью $S = 400$ см^2 имеет $N = 100$ витков и равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл, причем период вращения $T = 0{,}1$ с. Определите максимальное значение ЭДС, возникающей в рамке, если ось ее вращения перпендикулярна силовым линиям.

792. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл расположен плоский проволочный виток так, что плоскость его перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, прошедший через гальванометр при повороте витка, $q = 9{,}5$ мКл. На какой угол повернули виток? Площадь витка $S = 10^3$ см^2, сопротивление $R = 2$ Ом.

793. Металлический диск радиусом $r = 10$ см, расположенный перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 1$ Тл, вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с частотой $n = 100$ об/с. Два скользящих контакта (один – на оси диска, другой – на окружности) соединяют диск с нагрузкой, сопротивление которой $R = 5$ Ом. Чему равна мощность P, выделяемая на нагрузке?

794. Неоновая лампа начинает светиться, когда напряжение на ее электродах достигает строго определённого значения. Какую часть периода T будет светить лампа, если ее включить в сеть, действующее напряжение в которой равно этому напряжению? Считайте, что потенциалы зажигания и гашения неоновой лампы одинаковы.

795. За 2 с магнитный поток, пронизывающий контур, равномерно уменьшился с 8 до 2 Вб. Чему при этом было равно значение ЭДС индукции в контуре?

796. Какой магнитный поток пронизывал каждый виток катушки, имеющей n витков, если при равномерном исчезновении магнитного поля за время τ в катушке возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}$?

797. Определите приращение магнитного потока через катушку, если она имеет 2 000 витков и за время 10 мс в ней возникает ЭДС индукции 200 В.

798. Материальная точка с зарядом 0,67 нКл, двигаясь в ускоряющем электрическом поле, приобретает кинетическую энергию 10 МэВ. Найдите разность потенциалов между начальной и конечной точками траектории частицы в поле, если ее начальная скорость равна нулю. Элементарный заряд равен $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

799. Ионы двух изотопов с массами m_1 и m_2, имеющие одинаковый заряд и прошедшие в электрическом поле одинаковую ускоряющую разность потенциалов, влетают в магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Рассчитайте отношение радиусов окружностей $\frac{r_1}{r_2}$, по которым будут двигаться ионы в магнитном поле.

800. Прямолинейный проводник с током длиной 5 см перпендикулярен линиям индукции однородного магнитного поля. Чему равен модуль индукции магнитного поля, если при токе в 2 А на проводник действует сила, модуль которой равен 0,01 Н?

5 Экзамены

§ 5.69 Общие положения

За время дистанционного изучения курса физики студент должен представить экзаменационное тестовое задание после изучения дисциплины (при очной форме обучения необходимо сдать экзамен, на котором предлагаются теоретические вопросы и задача по теме курса).

Номера тестовых заданий, которые студент, обучающийся по дистанционной форме обучения, должен включить в свою экзаменационную работу, определяются по таблицам вариантов. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Каждый вариант включает в себя 20 (двадцать) тестовых заданий, номера которых определяются номером варианта.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач									
1	701,	711,	721,	731,	741,	751,	761,	771,	781,	791,
	705	715	725	737	747	757	769	783	793	773
2	702,	712,	722,	732,	742,	752,	762,	772,	782,	792,
	706	715	724	738	748	758	770	784	794	774
3	703,	713,	723,	733,	743,	753,	763,	773,	783,	793,
	707	716	725	739	749	759	761	785	795	775
4	704,	714,	724,	734,	744,	754,	764,	774,	784,	794,
	708	717	726	740	750	760	762	786	796	776
5	705,	715,	725,	735,	745,	755,	765,	775,	785,	795,
	709	718	727	741	751	731	763	787	797	777
6	706,	716,	726,	736,	746,	756,	766,	776,	786,	796,
	710	719	728	742	752	732	764	788	798	778
7	707,	717,	727,	737,	747,	757,	767,	777,	787,	797,
	711	720	729	743	753	733	765	789	799	779
8	708,	718,	728,	738,	748,	758,	768,	778,	788,	798,
	712	721	730	744	754	734	766	790	800	780
9	709,	719,	728,	739,	749,	759,	769,	779,	789,	799,
	713	722	701	745	755	735	767	791	771	781
0	710,	720,	730,	740,	750,	760,	770,	780,	790,	800,
	714	723	702	746	756	736	768	792	772	782

Оформление экзаменационного теста производится либо в электронном виде, либо письменно. При оформлении записываются номера тестовых заданий и отмечаются правильные ответы (Если, например, по мнению студента в 37 тестовом задании верный ответ С, то правильный ответ следует отмечать следующим образом: 37-С). Как и в контрольных работах непременно необходимо оформлять титульный лист.

Критерии экзаменационной оценки следующие:

“отлично” - более 18 правильных ответов;

“хорошо” - 16-18 правильных ответов;

“удовлетворительно” - 12-15 правильных ответа;

“неудовлетворительно” - менее 12 правильных ответов.

§ 5.70 Экзаменационные тестовые задания

701. Скорость течения реки v_1 = 3 км/ч, а скорость движения лодки относительно воды v_2 = 6 км/ч. Определите, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперёк реки.

А) $\frac{\pi}{2}$ рад В) $\frac{\pi}{3}$ рад С) $\frac{\pi}{4}$ рад Д) $\frac{\pi}{5}$ рад Е) $\frac{\pi}{6}$ рад

702. Два поезда одинаковой длины идут навстречу друг другу по параллельным путям с одинаковой скоростью 36 км/ч. В момент, когда поравнялись головные вагоны, один из поездов начинает тормозить и полностью останавливается к моменту, когда поравнялись последние вагоны составов. Найдите длину каждого поезда, если время торможения составило 1 мин.

А) 500 м В) 600 м С) 650 м Д) 550 м Е) 450 м

703. Если при торможении автомобиль, двигаясь равнозамедленно, проходит за пятую секунду 5 см и останавливается, то за третью секунду этого движения он прошел путь, равный:

A) 15 см B) 30 см C) 10 см Д) 45 см E) 25 см

704. Пуля, летящая со скоростью 140 м/с, попадает в доску и проникает на глубину 6 см. Если пуля в доске двигалась равнозамедленно, то на глубине 3 см ее скорость была равна:

A) 80 м/с B) 120 м/с C) 70 м/с Д) 50 м/с E) 100 м/с

705. При скорости ветра, равной 10 м/с, капли дождя падают под углом 30^0 к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом 60^0 к вертикали?

A) 35 м/с B) 30 м/с C) 25 м/с Д) 20 м/с E) 15 м/с

706. От движущегося поезда отцепляется последний вагон. Поезд продолжает двигаться с той же скоростью v_0. Как будут относиться пути, пройденные поездом – S_n и вагоном $S_в$ к моменту остановки вагона? Считайте, что вагон двигался равнозамедленно.

A) 4 : 1 B) 2 : 1 C) 3 : 2 Д) 3 : 1 E) 4 : 3

707. Движущийся со скоростью 5 м/с автомобиль подвергается ускорению 2 м/с^2 в течение 5 с. Какой путь он прошел за это время?

A) 25 м B) 50 м C) 30 м Д) 60 м E) 75 м

708. Санки скользят вниз по склону с постоянным ускорением, равным 3 м/с^2. Определите скорость санок после того, как они проскользили 10 м вниз, если их начальная скорость была 2 м/с.

A) 12 м/с B) 18 м/с C) 8 м/с Д) 6 м/с E) 16 м/с

709. Самолет летит горизонтально со скоростью 360 км/ч на высоте 490 м. Когда он пролетает над точкой А, с него сбрасывают пакет. На каком расстоянии от точки А пакет упадет на землю? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

А) 0,8 км В) 1,0 км С) 1,2 км Д) 1,4 км Е) 1,6 км

710. Если поезд, двигаясь от остановки с постоянным ускорением, прошел 180 м за 15 с, то за первые 5 с от начала движения он прошел:

А) 80 м В) 60 м С) 36 м Д) 20 м Е) 10 м

711. Со станции вышел товарный поезд, идущий со скоростью 72 км/час. Через 10 мин по тому же направлению вышел экспресс, скорость которого 30 м/с. На каком расстоянии от станции экспресс догонит товарный поезд?

А) 20 км В) 24 км С) 28 км Д) 32 км Е) 36 км

712. Пуля вылетает из ствола в горизонтальном направлении со скоростью 800 м/с. На сколько снизится пуля во время полета, если щит с мишенью находится на расстоянии, равном 400 м? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

А) 0,2 м В) 2 м С) 0,5 м Д) 0,75 м Е) 1,25 м

713. Автомобиль, двигавшийся прямолинейно со скоростью 10 м/с, начал торможение. Сила трения сообщает при этом ускорение 2 м/с^2, направление которого противоположно вектору скорости. Какой путь пройдет автомобиль за 6 с после начала движения?

А) 25 м В) 54 м С) 24 м Д) 30 м Е) 96 м

714. С крыши с интервалом времени в 1 с падают одна за другой две капли. Через 2 с после начала падения второй капли расстояние между каплями станет равным (полагайте $g = 10$ м/с^2):

А) 30 м В) 25 м С) 20 м Д) 15 м Е) 10 м

715. Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии ℓ по горизонтали от пушки на два одинаковых осколка. Один из них вернулся к пушке по первоначальной траектории снаряда. Где упал второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебрегайте.

А) на расстоянии ℓ по горизонтали от пушки
В) на расстоянии 2 ℓ по горизонтали от пушки
С) на расстоянии 3 ℓ по горизонтали от пушки
Д) на расстоянии 4 ℓ по горизонтали от пушки
Е) на расстоянии 5 ℓ по горизонтали от пушки

716. Две стрелки движутся по циферблату в одну сторону. Период вращения 1-й составляет $T_1 = 50$ с, а 2-й – $T_2 = 30$ с. Положения стрелок при этом совпадают через интервал времени, равный

А) 80 с В) 60 с С) 70 с Д) 65 с Е) 75 с

717. Начальное значение скорости материальной точки v_{x1}=1 м/с, v_{y1}=3 м/с, v_{z1}=0. Конечное значение скорости v_{x2} =4 м/с, v_{y2}=6 м/с, v_{z2}=0. Определите приращение модуля скорости.

А) 4 м/с В) 3 м/с С) 5 м/с Д) 2 м/с Е) 8 м/с

718. Какую скорость должен иметь вагон, движущийся по закруглению радиуса 100 м, чтобы шарик, подвешенный на нити к потолку вагона, отклонился от вертикали на угол 45^0? Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

А) 17,8 м/с   В) 21,2 м/с   С) 27,6 м/с   Д) 31,3 м/с   Е) 41,5 м/с

719. Копер массой 180 кг падает с высоты 5 м на сваю и приходит в состояние покоя через 0,3 с. Подсчитайте среднюю силу, приложенную к свае, пренебрегая движением сваи. Ускорение силы тяжести 10 м/с^2.

А) 24 кН   В) 18 кН   С) 12 кН   Д) 9 кН   Е) 6 кН

720. Барабан сушильной машины, имеющий диаметр D = 1,96 м, вращается с угловой скоростью ω = 20 рад/с. Во сколько раз сила F, прижимающая ткань к стенке, больше силы тяжести mg, действующей на ткань? Ускорение силы тяжести g = 9,8 м/с^2.

А) 5   В) 10   С) 20   Д) 40   Е) 80

721. Автомашина массой 1 т, передвигающаяся со скоростью 72 км/ч, врезается в кирпичную стену и приходит в состояние покоя за 0,5 с. Определите среднюю силу, действующую на автомашину со стороны стены.

А) 40 кН   В) 36 кН   С) 20 кН   Д) 48 кН   Е) 24 кН

722. Тележка движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_1 = 0,5 м/с. С нее прыгает человек со скоростью v_0 = 3 м/с относительно тележки в направлении, противоположном направлению движения. Найдите приращение скорости тележки Δv_1 после прыжка. Масса тележки m_1 = 240 кг. Масса человека m_2 = 80 кг.

А) 0,5 м/с   В) 1 м/с   С) 1,5 м/с   Д) 2 м/с   Е) 3 м/с

723. Человек, находящийся в вагонетке, толкает другую вагонетку. Обе вагонетки приходят в движение и через некоторое время останавливаются вследствие трения. Определите отношение путей, пройденных вагонетками до остановки, если масса первой вагонетки вместе с человеком в 3 раза больше массы второй вагонетки:

А) $S_1 : S_2 = 1: 9$ В) $S_1 : S_2 = 1: 3$ С) $S_1 : S_2 = 1: 1$
Д) $S_2 : S_1 = 1: 3$ Е) $S_2 : S_1 = 1: 9$

724. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок равной толщины и расположенных вплотную друг к другу. В какой по счету доске застрянет пуля, если скорость ее после прохождения первой доски $v_1 = 0,8\ v_0$?

А) 6   В) 4   С) 2   Д) 5   Е) 3

725. Из орудия массой 1 500 кг вылетает горизонтально снаряд массой 12 кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете равна 1,5 МДж. Какую кинетическую энергию получает орудие вследствие отдачи?

А) $1,25 \cdot 10^4$ Дж   В) $1,5 \cdot 10^4$ Дж   С) $1,2 \cdot 10^4$ Дж
Д) $1,8 \cdot 10^4$ Дж   Е) $2,5 \cdot 10^4$ Дж

726. Вычислить момент импульса Земли, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Землю считать однородным шаром. Масса Земли $5,96 \cdot 10^{24}$ кг, ее радиус $6,37 \cdot 10^6$ м.

А) $7,0 \cdot 10^{34}$ кг·м²/с   В) $7,0 \cdot 10^{33}$ кг·м²/с
С) $7,0 \cdot 10^{32}$ кг·м²/с   Д) $7,0 \cdot 10^{31}$ кг·м²/с   Е) $7,0 \cdot 10^{30}$ кг·м²/с

727. Маховик, момент инерции которого $J = 63{,}6$ кг·м^2, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 31{,}4$ рад/с. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик останавливается через $t = 20$ с.

А) 100 Н·м В) 75 Н·м С) 50 Н·м Д) 25 Н·м Е) 10 Н·м

728. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 0{,}2$ м вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Закон движения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 4$ рад/с^2, $C = -1$ рад/с^3. Найти момент сил M в момент времени $t = 2$ с.

А) -0,25 Н·м В) -0,32 Н·м С) -0,36 Н·м Д) -0,48 Н·м Е) -0,64 Н·м

729. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом $R = 2$ м и массой $m = 4$ кг, стоит человек, масса которого $M = 80$ кг. Платформа может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. С какой угловой скоростью ω будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы?

А) 0,45 рад/с В) 0,55 рад/с С) 0,65 рад/с Д) 0,75 рад/с Е) 0,85 рад/с

730. Частота вращения колеса, вращающегося при торможении равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшилась от $\nu_1 = 300$ об/мин до $\nu_2 = 180$ об/мин. Момент инерции колеса 2 кг·м^2. Определить момент силы торможения M.

А) 0,82 Н·м В) 0,72 Н·м С) 0,62 Н·м Д) 0,52 Н·м Е) 0,42 Н·м

731. При повышении температуры идеального газа на $\Delta T_1 = 150$ K средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась с 400 до 500 м /с. На сколько ΔT_2

нужно нагреть этот газ, чтобы увеличить среднеквадратическую скорость его молекул от 500 до 600 м/с?

А) 127 К В) 141 К С) 150 К Д) 183 К Е) 192 К

732. Определите плотность смеси газа массы m_1 молярной массы μ_1 и газа массы m_2 молярной массы μ_2 при температуре T и давлении p. Газовая постоянная равна R.

А) $\dfrac{p(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{RT(m_2\mu_1 - m_1\mu_2)}$ В) $\dfrac{p(m_1\mu_2 - m_2\mu_1)}{RT(m_1 + m_2)}$

С) $\dfrac{p(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)}{RT(m_1 + m_2)}$ Д) $\dfrac{p(m_1 + m_2)}{RT(\mu_1 + \mu_2)}$ Е) $\dfrac{p(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{RT(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)}$

733. Газ занимает объем $V_1 = 0{,}008$ м^3 при температуре $T_1 = 300$ К. Определите массу газа, если после изобарического нагревания его до $T_2 = 900$ К его плотность равна $\rho_2 = 0{,}6$ кг/м^3.

А) 18 г В) 21,6 г С) 19,6 г Д) 14,4 г Е) 12 г

734. Если в сосуде находится смесь двух невзаимодействующих между собой газов соответственно с массами m_1 и m_2 и молярными массами μ_1 и μ_2, то масса одного моля такой смеси равна:

А) $\dfrac{\mu_1\mu_2}{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}$ В) $\dfrac{(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{m_1\mu_2 + m_2\mu_1}$ С) $\dfrac{m_1\mu_1 + m_2\mu_2}{m_1 + m_2}$

Д) $\dfrac{m_1\mu_2 + m_2\mu_1}{m_1 + m_2}$ Е) $\dfrac{\mu_1\mu_2}{m_1\mu_2 + m_2\mu_1}$

735. Азот массой 7 г находится под давлением P = 0,1 МПа и температуре $T_1 =$ 290 К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем $V_2 = 10$ л. Определите

плотность газа ρ_1 до расширения. Молярная масса азота μ = 28 г/моль. Газовая постоянная R = 8,31Дж/(моль·К).

A) 1,06 кг/м^3 B) 1,16 кг/м^3 C) 1,26 кг/м^3 Д) 1,36 кг/м^3 E) 1,46 кг/м^3

736. Определите плотность смеси m_1 = 8 г водорода и m_2 = 16 г кислорода при температуре T =290 К и давлении P =10^5 Па. Молярная масса водорода μ_1 = 2 г/моль, кислорода μ_2=32 г/моль. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

A) 0,11 кг/м^3 B) 0,22 кг/м^3 C) 0,33 кг/м^3
Д) 0,44 кг/м^3 E) 0,55 кг/м^3

737. Определите плотность смеси, состоящей из 4 г водорода и 32 г кислорода, при температуре 7 ^{0}C и давлении 93 кПа. Молярная масса водорода 2 г/моль, кислорода 32 г/моль. Газовая постоянная равна 8,31 Дж/(моль·К).

A) 0,36 кг/м^3 B) 0,42 кг/м^3 C) 0,48 кг/м^3 Д) 0,54 кг/м^3 E) 0,60 кг/м^3

738. При некотором процессе, проведенном с идеальным газом, соотношение между давлением и объемом газа таково, что PV^3 = const. Как изменится температура T газа при увеличении его объема в 2 раза?

A) не изменится B) увеличится в 4 раза C) уменьшится в 4 раза
Д) увеличится в 2 раза E) уменьшится в 2 раза

739. Сосуд, содержащий некоторую массу азота при нормальных условиях, движется со скоростью 100 м/с. Какова будет максимальная температура азота при внезапной остановке сосуда? Удельная теплоемкость азота при постоянном объёме равна 745 Дж/(кг·К).

А) 273 К   В) 320 К   С) 300 К   Д) 400 К   Е) 280 К

740. Гелий из состояния с температурой T_1 = 200 К расширяется в процессе PV^2 = const (P – давление, V – объем газа) с постоянной теплоемкостью С. От газа отвели количество теплоты 400 Дж, и конечный объем газа стал вдвое больше начального. Определите теплоемкость С.

А) 16 Дж/К   В) 2 Дж/К   С) 8 Дж/К   Д) 32 Дж/К   Е) 4 Дж/К

741. Для испарения воды массой 1 кг при постоянной температуре 40 ^{0}С необходимо передать ей энергию, равную 2,4 МДж. Чему равна энергия взаимодействия каждой молекулы воды со своими "соседками" в жидкости? Относительная молекулярная масса воды равна 18. Число Авогадро $6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

А) $8\cdot10^{-20}$ Дж   В) $8\cdot10^{-19}$ Дж   С) $7{,}2\cdot10^{-20}$ Дж
Д) $7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж   Е) $1{,}8\cdot10^{-20}$ Дж

742. При изотермическом сжатии газа его объем уменьшился на 1 л, а давление возросло на 20 %. Чему равен первоначальный объем?

А) 4 л   В) 12 л   С) 16 л   Д) 10 л   Е) 6 л

743. Некоторую массу m идеального газа с молярной массой μ нагревают под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления от первоначального значения T_1 до T_2. Определите работу, совершенную газом. Газовая постоянная R.

А) $2\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)$ В) $\frac{1}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)$

С) $4\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)$ Д) $\frac{1}{4}\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)$ Е) $\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)$

744. При изобарном расширении 80 г кислорода с температурой 300 К его объём увеличился в 1,5 раза. Определите работу, совершённую для расширения кислорода. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К); молярная масса кислорода μ = 32 г/моль.

А) 2,28 кДж В) 2,56 кДж С) 2,81 кДж Д) 3,12 кДж Е) 3,48 кДж

745. Из сосуда объёмом 1 дм^3 выкачивается воздух. Рабочий объём цилиндра насоса 0,1 л. Через сколько циклов работы насоса давление в сосуде уменьшится в 2 раза?

А) 10 В) 7 С) 5 Д) 4 Е) 3

746. Процесс в идеальном газе сначала идет так, что давление и объём связаны равенством $P\sqrt{V}$ = B. Когда температура газа достигает значения T, процесс продолжается при другом характере зависимости давления от объема: P = DV^{-2}. Найдите температуру T, считая константы B и D, газовую постоянную R, а так же количество молей газа ν известными.

А) $\dfrac{D^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{\nu R}$ В) $\dfrac{D^{\frac{1}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{\nu R}$ С) $\dfrac{D^{\frac{1}{3}}B^{\frac{2}{3}}}{\nu R}$ Д) $\dfrac{D^{3}B^{\frac{3}{2}}}{\nu R}$ Е) $\dfrac{D^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}}{\nu R}$

747. 1 моль газа, имевший начальную температуру T_1 = 300 К, изобарно расширился, совершив работу А = 12,5 кДж. Во сколько раз при этом увеличился объём газа? Газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

А) 7 В) 5 С) 8 Д) 4 Е) 6

748. Трубку длиной ℓ опускают вертикально в воду на глубину H (H < ℓ), затем, закрыв верхний конец трубки, вынимают ее из воды. При этом в трубке остаёт-

ся столб воды высотой h. Считая температуру постоянной, найдите атмосферное давление P_0. Плотность воды равна ρ, ускорение силы тяжести равно g.

A) $\rho gh\frac{\ell - h}{\ell - H}$ B) $\rho gH\frac{\ell - H}{H - h}$ C) $\rho gh\frac{\ell - H}{H - h}$ Д) $\rho gH\frac{\ell - h}{H - h}$ E) $\rho gh\frac{\ell - h}{H - h}$

749. Определите температуру газа, находящегося в закрытом сосуде, если давление газа увеличивается на 0,4 % первоначального давления при нагреве на 1 ^{0}C.

A) 225 K B) 250 K C) 275 K Д) 300 K E) 325 K

750. Найдите объём V_0 засасывающей камеры поршневого насоса, если при откачивании этим насосом воздуха из баллона объёма V = 4 л давление уменьшается при каждом цикле в n = 1,2 раза.

A) 1,25 л B) 0,6 л C) 1,2 л Д) 1 л E) 0,8 л

751. Масса m идеального газа, находящегося при температуре T, охлаждается изохорно так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определите совершенную газом работу. Молярная масса газа μ. Универсальная газовая постоянная R.

A) $\frac{n+1}{n}\frac{m}{\mu}RT$ B) $\frac{n-1}{n}\frac{m}{\mu}RT$ C) $n\frac{m}{\mu}RT$ Д) $\frac{1}{n}\frac{m}{\mu}RT$ E) $\frac{n}{n+1}\frac{m}{\mu}RT$

752. Какое количество теплоты нужно подвести к идеальному одноатомному газу, количество вещества которого равно 1 моль, чтобы изобарно увеличить его объём в 3 раза? Начальная температура газа равна T_0. Газовая постоянная R.

A) $3RT_0$ B) $5RT_0$ C) $\frac{5}{2}$ RT_0 Д) $\frac{7}{2}$ RT_0 E) $\frac{15}{2}$ RT_0

753. Теплоизолированный сосуд объёмом $V = 2$ м^3 разделен теплоизолирующей перегородкой на две равные части. В одной части сосуда находится 2 моль He, а в другой – такое же количество моль Ar. Температура гелия $T_1 = 300$ К, а температура аргона $T_2 = 600$ К. Определите парциальное давление аргона в сосуде после удаления перегородки. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

A) 2 490 Па B) 4 830 Па C) 5 610 Па Д) 3 220 Па E) 3 740 Па

754. Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно, а затем – изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 4,5 кДж. Чему равна работа газа за весь процесс?

A) 7,0 кДж B) 9,0 кДж C) 8,5 кДж Д) 8,0 кДж E) 7,5 кДж

755. Тепловая машина периодического действия имеет коэффициент полезного действия 40 %. В результате ее усовершенствования количество теплоты, получаемое от нагревателя за один цикл, увеличилось на 20 %, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшилось на 20 %. Каким стал КПД этой тепловой машины?

A) 30 % B) 33 % C) 40 % Д) 60 % E) 66 %

756. Если в идеальной тепловой машине, абсолютная температура нагревателя которой вдвое больше температуры холодильника, не изменяя температуру нагревателя температуру холодильника уменьшить вдвое, то КПД этой машины:

A) возрастет на 20 % B) возрастет на 25 % C) возрастет на 50 %
Д) возрастет вдвое E) возрастет на 40 %

757. В идеальном тепловом двигателе абсолютная температура нагревателя втрое больше абсолютной температуры холодильника. Если, не меняя температуры холодильника, повысить температуру нагревателя на 25 %, то КПД этого двигателя станет равным:

А) 0,7 В) 0,6 С) 0,5 Д) 0,4 Е) 0,3

758. Два свинцовых шара одинаковой массы движутся навстречу друг другу со скоростями v и 2v . На сколько (Δt) увеличится температура шаров в результате неупругого удара? Удельная теплоемкость свинца равна С.

А) $\frac{3}{5}\frac{v^2}{C}$ В) $\frac{4}{5}\frac{v^2}{C}$ С) $\frac{7}{8}\frac{v^2}{C}$ Д) $\frac{9}{8}\frac{v^2}{C}$ Е) $\frac{3}{4}\frac{v^2}{C}$

759. Каково изменение ΔU внутренней энергии идеального газа: 1) изотермического расширения 2) адиабатического расширения?

А) в 1 $\Delta U>0$, во 2 $\Delta U=0$ В) в 1 $\Delta U<0$, во 2 $\Delta U=0$ С) в 1 $\Delta U>0$, во 2 $\Delta U<0$
Д) в 1 $\Delta U=0$, во 2 $\Delta U<0$ Е) в 1 $\Delta U=0$, во 2 $\Delta U>0$

760. В теплоизолированном цилиндре под теплонепроницаемым поршнем находится идеальный газ с начальными давлением $P = 10^5$ Па, объемом $V = 3$ л, температурой $T = 300$ К. При сжатии газа над ним совершили работу $A = 90$ Дж. Найдите температуру газа после сжатия.

А) 300 К В) 360 К С) 390 К Д) 320 К Е) 350 К

761. По тонкому кольцу радиуса R равномерно распределён заряд q. Модуль напряжённости электрического поля на оси кольца на расстоянии $R\sqrt{3}$ от его центра равен

A) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{3q}{R^2}$ B) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{3q}{8R^2}$ C) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{3q}{4R^2}$ Д) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}q}{4R^2}$ E) $\frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{\sqrt{3}q}{8R^2}$

762. Положительный заряд в 1 мкКл равномерно распределён по поверхности шара радиусом 10 см. Каков потенциал в точке, удаленной на 20 см от поверхности шара? Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

A) 45 кВ B) 40 кВ C) 25 кВ Д) 20 кВ E) 30 кВ

763. Два маленьких одинаковых металлических шарика заряжены разноимёнными зарядами +q и -5q. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Как изменился модуль силы взаимодействия шариков?

A) уменьшился в 1,25 раза
B) увеличился в 1,25 раза
C) увеличился в 1,8 раза
Д) уменьшился в 1,8 раза
E) не изменился

764. Ртутный шарик, заряженный до потенциала 800 В, разбивается на 64 одинаковых капли. Определите потенциал каждой капли.

A) 50 В B) 100 В C) 80 В Д) 40 В E) 20 В

765. Потенциал одной маленькой заряженной сферической капли ртути равен φ. При слиянии N таких капель в одну большую, ее потенциал станет равным:

A) $\varphi\cdot N^{\frac{1}{3}}$ B) $\varphi\cdot N^{\frac{2}{3}}$ C) φ Д) $\varphi\cdot N$ E) $\varphi\cdot\frac{1}{N}$

766. На стержне электроскопа имеется небольшой положительный электрический заряд +q. К стержню постепенно приближается шар с большим отрицательным зарядом -Q. Что будет происходить с лепестками электроскопа по мере приближения шара до момента соприкосновения?

А) Лепестки неподвижны до соприкосновения, после соприкосновения их отклонение увеличивается

В) Отклонение лепестков постепенно увеличивается

С) Отклонение лепестков сначала увеличивается, после соприкосновения уменьшается

Д) Лепестки совершают малые колебания

Е) Отклонение лепестков сначала уменьшается до нуля, потом увеличивается

767. Два одинаковых шарика, имеющих одинаковые одноимённые заряды, соединены пружиной, жёсткость которой 20 Н/м, а длина $\ell_0 = 4$ см. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от $\ell_1 = 3$ см до $\ell_2 = 6$ см. Найдите заряды шариков. Электрическая постоянная равна $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

А) $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ Кл В) $1{,}4 \cdot 10^{-6}$ Кл С) $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ Кл Д) $1{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл Е) $1{,}4 \cdot 10^{-9}$ Кл

768. Два одинаковых металлических шарика, заряженные одноимёнными зарядами q_1 и q_2 ($q_1 > q_2$) находятся на расстоянии r друг от друга (r много больше размеров шариков). Шарики привели в соприкосновение. На какое расстояние нужно их развести, чтобы сила взаимодействия осталась прежней?

А) $r\dfrac{q_1 - q_2}{2\sqrt{q_1 q_2}}$ В) $r\dfrac{q_1 + q_2}{2\sqrt{q_1 q_2}}$ С) $r\dfrac{q_1 + q_2}{\sqrt{q_1 q_2}}$ Д) $r\dfrac{q_1 - q_2}{\sqrt{q_1 q_2}}$ Е) $r\dfrac{q_1}{q_2}$

769. Рассчитайте, на какое наименьшее расстояние α-частица, имеющая скорость $1{,}9 \cdot 10^7$ м/с, может приблизиться к ядру атома золота, двигаясь по прямой,

проходящей через центр ядра. Заряд ядра золота $1{,}3\cdot10^{-17}$ Кл. Масса α-частицы равна $6{,}6\cdot10^{-27}$ кг, ее заряд $3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

А) $6{,}1\cdot10^{-14}$ м В) $5{,}1\cdot10^{-14}$ м С) $4{,}1\cdot10^{-14}$ м Д) $3{,}1\cdot10^{-14}$ м Е) $2{,}1\cdot10^{-14}$ м

770. Напряжённость электрического поля на поверхности капли, образовавшейся от слияния N маленьких равновеликих одинаково заряженных капелек, больше напряжённости на поверхности маленькой капельки до слияния в … раз (считайте, что капли имеют сферическую форму):

А) $\sqrt[3]{N^2}$ В) $\sqrt{N^3}$ С) N Д) $\sqrt[3]{N}$ Е) $\sqrt{N}$

771. Два заряда $q_1 = 600$ нКл и $q_2 = -200$ нКл расположены в керосине на расстоянии 0,4 м друг от друга. Определите напряжённость электрического поля в точке, расположенной на середине отрезка прямой, соединяющего центры зарядов. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$. Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

А) 15 кВ/м В) 30 кВ/м С) 45 кВ/м Д) 60 кВ/м Е) 90 кВ/м

772. Стальной шар радиусом 0,5 см, погружённый в керосин, находится в однородном электрическом поле напряжённостью 35 кВ/см, направленной вертикально вверх. Определите заряд шара, если он находится во взвешенном состоянии. Плотности керосина – 0,8 г/см^3, стали – 7,8 г/см^3. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.

А) 10,3 нКл В) 11,3 нКл С) 12,3 нКл Д) 13,3 нКл Е) 14,3 нКл

773. Диэлектрическая проницаемость воды равна 81. Как надо изменить каждый из двух одинаковых точечных положительных зарядов, чтобы при погружении

их в воду сила электрического взаимодействия зарядов при том же расстоянии между ними была такой же, как и в вакууме?

А) увеличить в 9 раз В) уменьшить в 9 раз С) уменьшить в 81 раз
Д) увеличить в 81 раз Е) уменьшить в 3 раза

774. На каком расстоянии от маленького заряженного шара напряжённость электрического поля в воде с диэлектрической проницаемостью 81 будет такой же, как в вакууме на расстоянии 18 см от центра шара?

А) 0,22 см В) 1 см С) 2 см Д) 4 см Е) 8,8 см

775. Два заряда q_1 = 600 нКл и q_2 = -200 нКл расположены в керосине на расстоянии 0,4 м друг от друга. Определите напряжённость электрического поля в точке, расположенной на середине отрезка прямой, соединяющего центры зарядов. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

А) 15 кВ/м В) 30 кВ/м С) 45 кВ/м Д) 60 кВ/м Е) 90 кВ/м

776. При замыкании источника тока на внешнее сопротивление 4 Ом в цепи протекает ток 0,3 А, а при замыкании на сопротивление 7 Ом протекает ток 0,2 А. Определите ток короткого замыкания этого источника.

А) 1,2 А В) 2,1 А С) 0,5 А Д) 1,6 А Е) 0,9 А

777. Два проводника, соединенные последовательно, имеют сопротивление в 6,25 раза большее, чем при их параллельном соединении. Найдите во сколько раз сопротивление одного проводника больше сопротивления другого.

А) 8 В) 2 С) 3 Д) 4 Е) 5

778. Два резистора, сопротивления которых отличаются в n = 4,8 раза, включают в цепь постоянного тока при неизменном напряжении в цепи один раз последовательно, а другой – параллельно. Каково отношение $\frac{P_2}{P_1}$ тепловых мощностей, выделяющихся на резисторах во втором (P_2) и в первом (P_1) случаях?

А) 3 В) 4 С) 5 Д) 6 Е) 7

779. Каково сопротивление R отрезка медного провода диаметром d = 2 мм, если его масса m = 0,89 кг? Плотность меди τ = 8,9 г/см^3, ее удельное сопротивление $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-4}$ Ом·см.

А) 0,17 Ом В) 0,34 Ом С) 1,7 Ом Д) 3,4 Ом Е) 0,85 Ом

780. Аккумулятор замыкается внешней цепью: один раз – с сопротивлением R_1 = 2 Ом, другой раз R_2 = 8 Ом. При какой величине внутреннего сопротивления аккумулятора количество теплоты, выделяющейся во внешней цепи в единицу времени, будет одинаковым в обоих случаях?

А) 2 Ом В) 10 Ом С) 5 Ом Д) 8 Ом Е) 4 Ом

781. Если два одинаковых сопротивления подключают к источнику постоянной ЭДС сначала последовательно, а затем параллельно, и в обоих случаях тепловая мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова, то отношение силы токов, протекающих в цепи в 1-м и во 2-м случае $\frac{I_1}{I_2}$, равно:

А) 0,50 В) 0,10 С) 0,75 Д) 0,25 Е) 0,05

782. Определите силу тока в обмотке двигателя электропоезда, развивающего силу тяги 6 кН, если напряжение, подводимое к двигателю, равно 600 В и поезд движется со скоростью 72 км/ч. КПД двигателя равен 80 %.

А) 75 А В) 125 А С) 200 А Д) 250 А Е) 300 А

783. Две лампочки имеют одинаковые мощности. Первая лампочка рассчитана на напряжение 127 В, а вторая на 220 В. Отношение сопротивления второй лампочки к сопротивлению первой лампочки равно:

А) 1,73 В) 2,00 С) 3,00 Д) 3,46 Е) 4,00

784. Найдите кинетическую энергию $W_к$ протона, движущегося по дуге окружности радиусом r = 60 см в магнитном поле с индукцией B = 1 Тл. Масса протона $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, его заряд $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

А) 14,2 МэВ В) 15,2 МэВ С) 16,2 МэВ Д) 17,2 МэВ Е) 18,2 МэВ

785. Частица, имеющая заряд $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, движется в однородном магнитном поле индукцией B по круговой орбите радиусом $R = 3 \cdot 10^{-4}$ м. Значение импульса частицы равно $p = 2{,}4 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с. Чему равна индукция B магнитного поля?

А) 4 Тл В) 5 Тл С) 2,5 Тл Д) 2 Тл Е) 0,4 Тл

786. Если заряженная частица, имеющая импульс p, движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиуса R, то заряд этой частицы равен …

А) $pB2\pi R$ В) pBR С) $\dfrac{p}{BR}$ Д) $\dfrac{p}{B2\pi R}$ Е) $pB\pi R^2$

787. По кольцу из медной проволоки с площадью поперечного сечения 1 мм^2 протекает ток 10 А. К концам кольца приложена разность потенциалов 100 мВ. Найдите индукцию магнитного поля в центре кольца. Магнитная постоянная равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

А) 57 мкТл В) 67 мкТл С) 77 мкТл Д) 87 мкТл Е) 97 мкТл

788. В магнитном поле с индукцией В поместили две разноимённо заряженные параллельные металлические пластины, расстояние между которыми равно d. Поток электронов между пластинами движется со скоростью v прямолинейно параллельно плоскости пластин. Векторы **v**, **E**, **B** взаимно перпендикулярны. Какова разность потенциалов между пластинами?

А) $\frac{Bv}{d}$ В) Bvd С) Bvd^2 Д) Bv Е) $\frac{vd}{B}$

789. Металлический диск радиусом r = 10 см, расположенный перпендикулярно магнитному полю с индукцией B = 1 Тл, вращается вокруг оси, проходящей через центр, с частотой $\nu = 100$ с$^{-1}$. Два скользящих контакта (один на оси диска, другой – на окружности) соединяют диск с реостатом сопротивлением R = 5 Ом. Чему равна тепловая мощность, выделяемая на реостате?

А) 0,5 Вт В) 1 Вт С) 2 Вт Д) 4 Вт Е) 5 Вт

790. По двум направляющим параллельным проводникам, расстояние между которыми $\ell = 15$ см, движется с постоянной скоростью v = 0,6 м/с перемычка перпендикулярно магнитному полю с индукцией B = 1 Тл. В замкнутую цепь включён резистор сопротивлением R = 2 Ом. Определите силу индукционного тока I в цепи.

А) 45 мА В) 50 мА С) 60 мА Д) 75 мА Е) 80 мА

791. Какую силу нужно приложить к металлической перемычке для равномерного ее перемещения со скоростью 8 м/с по двум параллельным проводникам (рельсам), расположенным на расстоянии 25 см друг от друга в однородном магнитном поле с индукцией 2 Тл? Вектор индукции перпендикулярен плоскости, в которой расположены рельсы. Проводники замкнуты резистором с электрическим сопротивлением 2 Ом.

А) 200 Н В) 2 Н С) 4 Н Д) 1 Н Е) 400 Н

792. Проволочная рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с индукцией В = 0,06 Тл, направление линий индукции этого поля составляет угол $\alpha = 30^0$ с перпендикуляром к плоскости рамки. Если при равномерном уменьшении индукции до нуля за время $\Delta t = 0{,}03$ с в рамке индуцируется ЭДС 30 мВ, то длина стороны рамки равна:

А) 0,2 м В) 0,15 м С) 0,1 м Д) 0,05 м Е) 0,025 м

793. Медное кольцо, площадь которого 0,08 м^2, а сопротивление $4\cdot10^{-3}$ Ом, помещено в однородное магнитное поле так, что плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции поля. Какое количество теплоты выделится в кольце за 0,1 с, если индукция магнитного поля убывает со скоростью 0,01 Тл/с?

А) 8 мкДж В) 16 мкДж С) 32 мкДж Д) 36 мкДж Е) 64 мкДж

794. Два металлических стержня расположены вертикально и замкнуты вверху проводником. По этим стержням без трения и нарушения контакта скользит перемычка длиной $\ell = 5$ см и массой m = 10 г. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией В = 1 Тл, перпендикулярной плоскости рамки. Установившаяся скорость v = 1 м/с. Найдите сопротивление перемычки. Сопротивлением стержней и провода пренебрегайте. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

А) $2,5\cdot10^{-3}$ Ом   В) $25\cdot10^{-3}$ Ом   С) $5\cdot10^{-3}$ Ом   Д) $50\cdot10^{-3}$ Ом   Е) $12,5\cdot10^{-3}$ Ом

795. В однородном магнитном поле с индукцией B с постоянной скоростью v движется металлический шарик радиусом r. Определите максимальную разность потенциалов $\Delta\varphi_{max}$ между точками на поверхности шарика. Угол между направлениями скорости **v** и индукции **B** равен α. Заряд электрона равен e.

А) $\frac{2vB}{r}\sin\alpha$ В) $\frac{2evB}{r}\sin\alpha$ С) $\frac{2vBr}{e}\sin\alpha$ Д) $2vBr\sin\alpha$ Е) $2evBr\sin\alpha$

796. Квадратная рамка со стороной a = 10 см помещена в однородное магнитное поле. Нормаль к плоскости рамки составляет с линиями индукции магнитного поля угол $\alpha = 60^0$. Найдите магнитную индукцию B этого поля, если в рамке при выключении поля в течение времени $\Delta t = 10$ мс индуцируется ЭДС $\mathcal{E} = 50$ мВ.

А) 25 мТл   В) 50 мТл   С) 100 мТл   Д) 200 мТл   Е) 400 мТл

797. Прямоугольная рамка площадью 500 см^2, состоящая из 238 витков провода, равномерно вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, проходящей через ее центр параллельно одной из ее сторон с частотой 10 об/с. При этом в рамке индуцируется ЭДС, максимальное значение которой 150 В. Найдите индукцию магнитного поля.

А) 0,15 Тл   В) 0,2 Тл   С) 0,25 Тл   Д) 0,3 Тл   Е) 0,35 Тл

798. Магнитная индукция поля между полюсами двухполюсного генератора равна 1 Тл. Ротор имеет N = 140 витков площадью S = 500 см^2 каждый виток. Определите частоту вращения якоря, если максимальное значение ЭДС индукции 220 В.

А) 50 об/с   В) 40 об/с   С) 20 об/с   Д) 10 об/с   Е) 5 об/с

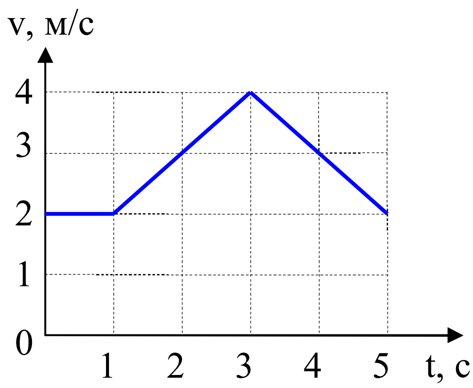
799. Прямой провод длиной ℓ = 20 см с током I = 5А, находящийся в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл, расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите работу сил поля, под действием которых проводник переместился на 2 см.

А) 1 мДж В) 1,5 мДж С) 2 мДж Д) 3 мДж Е) 4 мДж

800. Один электрон движется со скоростью v к другому неподвижному свободному электрону. На какое минимальное расстояние электроны сближаются? Элементарный заряд – e, масса электрона – m, электрическая постоянная равна ε_0.

А) $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}$ В) $\dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 mv^2}$ С) $\dfrac{e^2}{\pi\varepsilon_0 mv^2}$ Д) $\dfrac{2e^2}{\pi\varepsilon_0 mv^2}$ Е) $\dfrac{4e^2}{\pi\varepsilon_0 mv^2}$

6 Примеры решения задач



1. По приведённому графику зависимости скорости некоторого тела от времени v(t) начертите графики зависимости пройденного им пути и ускорения от времени, т.е. S(t) и a(t).

Дано: v(t)

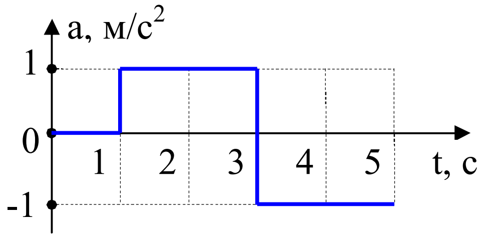
S(t) - ? a(t) - ?

Решение. В промежутке времени 0-1 с движение равномерное, скорость остаётся постоянной, поэтому в этом интервале ускорение a_1 = 0.

В промежутке времени 1-3 с движение равноускоренное, скорость линейно возрастает со временем, поэтому ускорение в этом интервале равно:

$$a_2 = \frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = \frac{4\ м/с - 2\ м/с}{2\ с} = 1\ м/с^2.$$

В промежутке времени 3-5 с движение равнозамедленное, скорость линейно убывает со временем, поэтому ускорение в этом интервале равно:



$$a_2 = \frac{v(5) - v(3)}{5 - 3} = \frac{2\ м/с - 4\ м/с}{2\ с} = -1\ м/с^2.$$

В итоге получаем график a(t), приведённый на рисунке.

Для построения графика S(t) сначала подсчитаем пути $S_{0\text{-}1}$; $S_{1\text{-}3}$; $S_{3\text{-}5}$, пройденные телом за соответствующие промежутки времени (0-1 с, 1-3 с, 3-5 с). Эти пути равны площадям фигур под графиком v(t) за соответствующие интервалы времени:

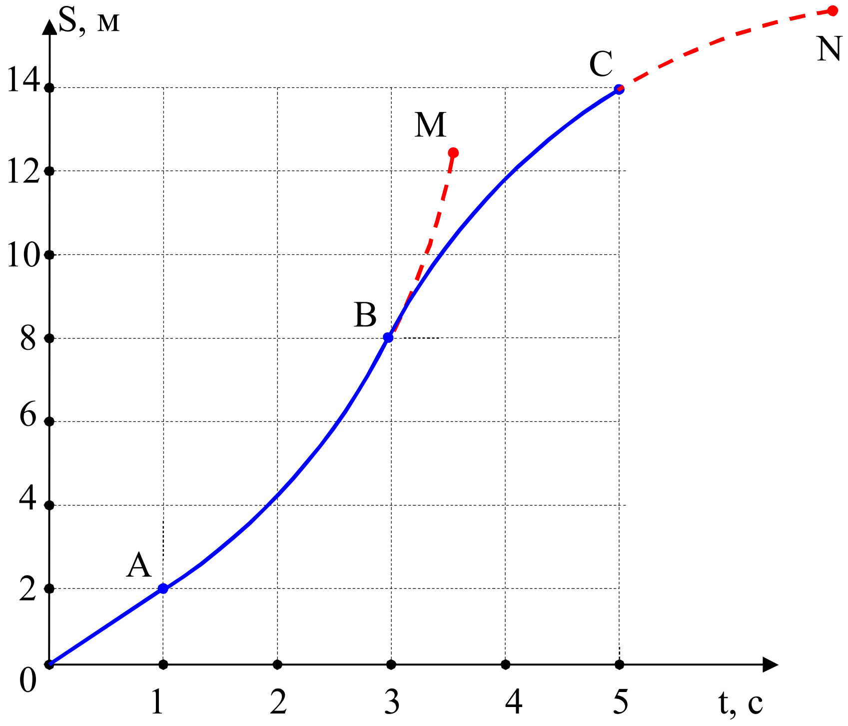
$$S_{0\text{-}1} = S_{прямоугольника} = 2\ \frac{м}{с} \cdot (1 - 0)\ с = 2\ м;$$

$$S_{1\text{-}3} = S_{трапеции} = \frac{1}{2}\left(2\ \frac{м}{с} + 4\ \frac{м}{с}\right) \cdot (3 - 1)\ с = 6\ м;$$

$$S_{3\text{-}5} = S_{трапеции} = \frac{1}{2}\left(4\ \frac{м}{с} + 2\ \frac{м}{с}\right) \cdot (5 - 3)\ с = 6\ м.$$

Путь, пройденный за промежуток времени 0-1 с равен $S_1 = S_{0\text{-}1} = 2$ м. Путь, пройденный за промежуток времени 0-3 с равен $S_2 = S_{0\text{-}1} + S_{1\text{-}3} = 2 + 6 = 8$ м. Путь, пройденный за промежуток времени 0-5 с равен $S_3 = S_{0\text{-}1} + S_{1\text{-}3} + S_{3\text{-}5} = 14$ м. Полученные значения отметим на графике S(t) в виде точек A(1 с, 2 м); B(3 с, 8 м); C(5 с, 14 м), соответственно, и 0 – начало координат (S(0) = 0, т.к. в начальный момент времени движение только начинается).

На участке 0A графика зависимость S(t) – линейная, т.к. в интервале 0-1 с движение равномерное. На участке AB график S(t) имеет вид параболы, и если бы равноускоренное движение продолжалось после момента времени t = 3 с, то зависимость S(t) выражалась линией ABM (ветка параболы смотрит вверх, т.к. $a_2 > 0$ – движение равноускоренное). На участке BC – зависимость S(t) имеет вид параболы, и если бы равнозамедленное движение продолжалось после момента времени t = 5 с, то зависимость S(t) выражалась линией BCN (ветка параболы смотрит вниз, т.к. $a_3 < 0$ – движение равнозамедленное).

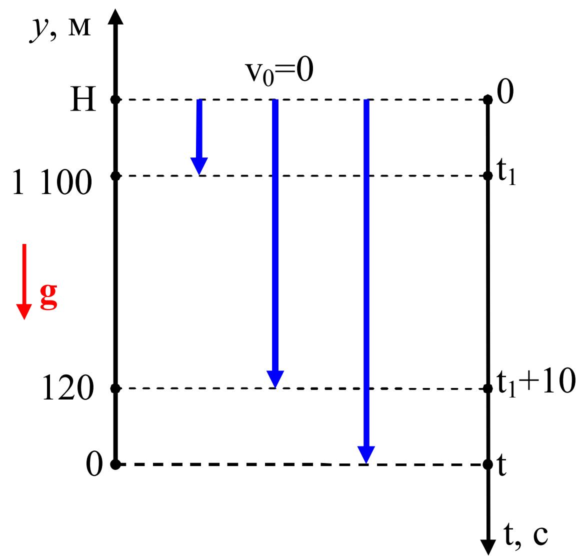


2. Свободно падающее тело спустя некоторый промежуток времени после начала падения находилось на высоте 1 100 м, а еще через 10 с на высоте 120 м над поверхностью Земли. С какой высоты падало тело? Сколько времени оно было в движении? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Дано: $y(t_1) = 1\,100$ м; $y(t_1 + 10) = 120$ м; $g = 10$ м/с^2; $v_0 = 0$.

H –? T –?

Решение. Так как движение тела происходит по вертикали, то для описания



движения возьмем вертикальную ось $0y$ с началом на поверхности земли. Раз тело падает свободно, то начальная скорость $v_0 = 0$. Обозначим H – искомая высота, t – время падения (см. рисунок).

Направим ось $0y$ вертикально вверх, ось времени 0t направим вертикально вниз с началом отсчета времени $t = 0$ на высоте H (т.к. тело начинает движение с высоты H). Каждой высоте будем сопоставлять моменты времени:

- в начальный момент времени $t = 0$ тело находится на высоте H;

- спустя некоторый промежуток времени t_1 – на высоте 1 100 м;

- еще через 10 с, т.е. через $t_1 + 10$ после начала движения – на высоте 120 м;

- через время t после начала движения $y = 0$ (тело достигает поверхности Земли).

В уравнение движения тела по оси $0y$ в общем виде $y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ подставляем значения $y_0 = H$ (тело начинает движение в момент $t = 0$ с этой координаты), $v_0 = 0$ (тело свободно падает), $a = -g$ (т.к. проекция $g_y = -g$). Итак, уравнение движения имеет вид:

$$y(t) = y = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Применяя последнее уравнение для моментов времени t_1, $t_1 + 10$ и t, получим 3 уравнения:

$$1\,100 = H - \frac{1}{2}gt_1^2; \qquad 120 = H - \frac{1}{2}g(t_1+10)^2; \qquad 0 = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Решая систему из трех уравнений, найдем искомые величины H и t.

Вычтем почленно из первого уравнения второе, затем найдем t_1:

$$1\,100 - 120 = H - \frac{1}{2}gt_1^{\,2} - H + \frac{1}{2}g(t_1+10)^2 ,$$

Откуда

$$t_1 = \frac{980 - 50g}{10g} = \frac{980 - 50 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 4{,}8 \text{ с.}$$

Подставляя полученное значение t_1 в первое уравнение, найдем H:

$$1\,100 = H - \frac{1}{2}gt_1^{\,2} \quad \text{и} \quad H = 1\,100 + \frac{1}{2}gt_1^{\,2} = 1\,100 + \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4{,}8^2 = 1\,215\text{м.}$$

Из третьего уравнения $0 = H - \frac{1}{2}gt^2$, найдем t:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1215}{10}} = 15{,}6 \text{ с.}$$

Ответ: H = 1 215 м; t = 15,6 с.

3. Точка движется по окружности со скоростью, которая меняется по закону $v = bt$, где $b = 0{,}5$ м/с^2. Найдите модуль полного ускорения, когда точка совершит первый оборот после начала движения.

Дано: <u>$v = bt$; $b = 0{,}5$ м/с^2.</u>

$a - ?$

Решение. Из уравнения $v = bt$ следует, что в начальный момент времени $t = 0$ начальная скорость $v_0 = b\cdot 0 = 0$, и в этот момент угловая скорость равна $\omega_0 = v_0/R = 0/R = 0$, где R – радиус окружности.

Один оборот соответствует повороту на угол 2π рад. Уравнение вращательного движения точки

$$\varphi = 2\pi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2,$$

откуда находим

$$t^2 = 4\pi/\varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение.

Поскольку тангенциальное ускорение по определению $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(bt) = b$, то из выражения $a_\tau = \varepsilon R$, находим $\varepsilon = a_\tau/R = b/R$.

Нормальное ускорение равно:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(bt)^2}{R} = \frac{b^2}{R} \cdot t^2 = \frac{b^2}{R} \cdot \frac{4\pi}{\varepsilon} = \frac{b^2}{R} \cdot \frac{4\pi}{b/R} = 4\pi b.$$

Полное ускорение равно:

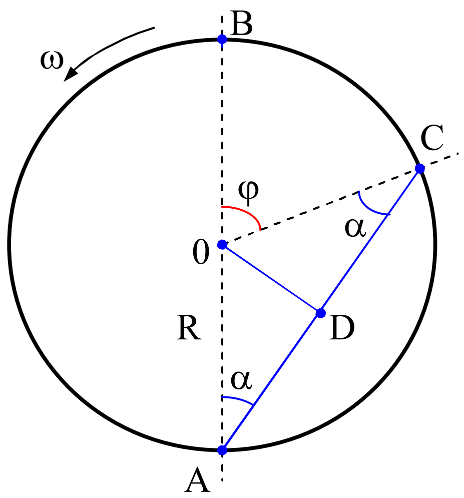
$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = \sqrt{(4\pi b)^2 + b^2} = b\sqrt{(4\pi)^2 + 1} = 0{,}5\sqrt{(4\pi)^2 + 1} = 6{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 6{,}3$ м/с^2.

4. Тонкостенный цилиндр радиусом R = 0,5 м вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω = 4 рад/с. В цилиндр попадает пуля, летящая по линии, проходящей через ось перпендикулярно к ней. Отверстия от пули оказались лежащими на прямой, отстоящей от оси вращения на расстоянии ℓ = 0,5 см. Найдите скорость v пули.

Дано: R = 0,5 м; ω = 4 рад/с; ℓ = 0,5 см = $0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

v – ?



Решение. Представим тонкостенный цилиндр радиуса R, вращающийся вокруг оси 0 с угловой скоростью ω. Если бы цилиндр не вращался, пуля внутри цилиндра двигалась по линии A0B. Из-за вращения цилиндра пуля внутри цилиндра будет двигаться вдоль отрезка прямой ADC. Радиус цилиндра 0A = R. Расстояние от оси вращения до линии движения пули равно 0D = ℓ. За время t движения пули внутри цилиндра цилиндр повернётся на угол φ. Тогда для интервала времени t можно записать выражения:

$$t = \frac{2R}{v}; \qquad t = \frac{\varphi}{\omega}.$$

Приравнивая правые части выражений, находим:

$$v = \frac{2R\omega}{\varphi}.$$

Из рисунка видно, что угол φ – внешний угол треугольника 0CA, следовательно, φ = 2α. Из треугольника 0DA следует:

$$\sin\alpha = \frac{0D}{0A} = \frac{\ell}{R} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-2}}{0{,}5} = 0{,}01.$$

При малых углах sinα можно заменить самим углом α, выраженным в радианах, т.е. α = 0,01. Подставляя найденное значение угла φ = 2α в выражение для скорости v полёта пули, полученное выше, имеем:

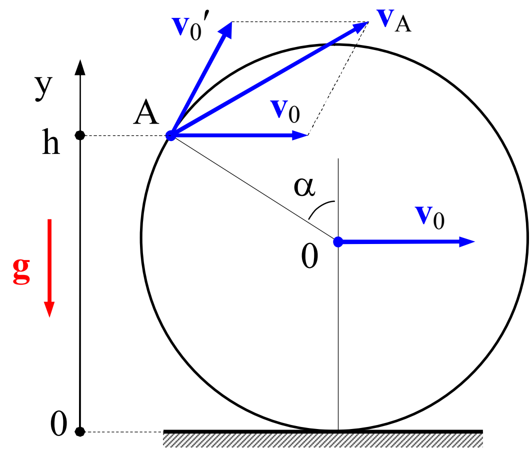
$$v = \frac{2R\omega}{\varphi} = \frac{2R\omega}{2\alpha} = \frac{R\omega}{\alpha} = \frac{0{,}5 \cdot 4}{0{,}01} = 200 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 200$ м/с.

5. В дождливую погоду велосипед равномерно катится по горизонтальной дороге со скоростью v_0. На какую максимальную высоту поднимаются капли воды, срывающиеся с обода колеса? Радиус колеса R. Ускорение свободного падения g.

Дано: <u>R; v_0; g.</u>

H_{max} - ?



Решение. Предположим, что колесо велосипеда катится без проскальзывания. В этом случае скорость движения велосипеда v_0 и скорость v_0' точек на ободе колеса относительно оси вращения численно совпадают, т.е. $v_0 = v_0'$ (см. рисунок). Обозначения: A – точка на ободе колеса, откуда срываются капли воды, 0A = R, α – угол между вертикалью и направлением на точку A от оси вращения колеса, h – высота точки A над поверхностью Земли. Скорость капли воды в точке A равна $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0' + \mathbf{v}_0$. Как видно из рисунка проекции скоростей $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_0'$ на вертикальную ось 0y равны, т.е. $(v_A)_y = (v_0')_y = v_0'\cdot\sin\alpha = v_0\cdot\sin\alpha$.

Тогда капля воды, срываясь с обода колеса в точке A, поднимется от точки A на высоту h_A, определяемую соотношением:

$$h_A = \frac{(v_A)_y^2}{2g} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

От поверхности Земли капля поднимется на высоту H, равную:

$$H = h_A + h = h_A + R(1+\cos\alpha) = \frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g} + R(1+\cos\alpha) = \frac{v_0^{\,2}\left(1-\cos^2\alpha\right)}{2g} + R(1+\cos\alpha) =$$

$$= R + \frac{v_0^{\,2}}{2g} + R\cos\alpha - \frac{v_0^{\,2}\cos^2\alpha}{2g}.$$

Высота H подъёма капель воды зависит от $\cos\alpha$, т.е. $H(\cos\alpha)$. Для нахождения максимальной высоты подъёма капель воды возьмём производную от функции $H(\cos\alpha)$ по $\cos\alpha$ и приравняв ее нулю найдём значение $\cos\alpha = (\cos\alpha)_{max}$, при котором H окажется максимальной:

$$H'_{\cos\alpha} = R - \frac{v_0^{\,2}\cos\alpha}{g} = 0 \quad \Rightarrow (\cos\alpha)_{max} = \frac{Rg}{v_0^{\,2}}.$$

$$H_{max} = H\Big|_{\cos\alpha = \frac{Rg}{v_0^{2}}} = \left(R + \frac{v_0^{\,2}}{2g} + R\cos\alpha - \frac{v_0^{\,2}\cos^2\alpha}{2g}\right)\Bigg|_{\cos\alpha = \frac{Rg}{v_0^{2}}} = \frac{1}{2v_0^{\,2}g}\left(v_0^{\,2} + gR\right)^2.$$

Ответ: $H_{max} = \dfrac{1}{2v_0^{\,2}g}\left(v_0^{\,2} + gR\right)^2.$

6. Космонавт массой $m_1 = 80$ кг находится на поверхности астероида, имеющего форму однородного шара радиуса $R = 1$ км, и держит в руках камень массой $m_2 = 4$ кг. С какой максимальной скоростью v_2 относительно астероида (в горизонтальном направлении) космонавт может бросить камень, не рискуя, что сам станет спутником астероида? Плотность астероида $\rho = 5$ г/см^3. Гравитационная постоянная равна $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

Дано: $\underline{m_1 = 80 \text{ кг}; R = 1\,000 \text{ м}; m_2 = 4 \text{ кг}; \rho = 5\,000 \text{ кг/м}^3; G = 6{,}67\cdot10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.}$

v_2–?

Решение. Первая космическая скорость для астероида равна:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}},$$

где $M = \rho\cdot V = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$ – масса астероида.

Итак,

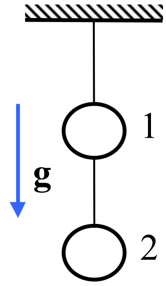
$$v_1 = \sqrt{\frac{G}{R}\cdot M} = \sqrt{\frac{G}{R}\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3} = 2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}.$$

Допустим, что космонавт после броска камня приобретает максимально допустимую скорость v_1. В этом случае, если космонавт массой m_1 бросит камень массой m_2 со скоростью v_2 относительно астероида, то по закону сохранения импульса системы «космонавт – камень» имеем: $m_1v_1 = m_2v_2$, откуда находим

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = \frac{m_1}{m_2}\cdot 2R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}} = \frac{80}{4}\cdot 2\cdot 1000\sqrt{\frac{\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5000}{3}} = 23{,}6 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_2 = 23{,}6$ м/с.

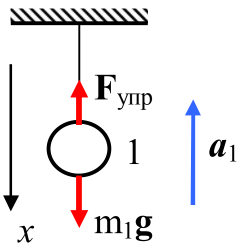
7. Если пережечь нить, связывающую грузы, висящие на резиновом шнуре, то верхний груз (1) придет в движение с ускорением a_1 = 5 м/с^2 (см. рисунок). Если грузы поменять местами и пережечь нить, то с каким ускорением a_2 придет в движение груз (2)? Ускорение силы тяжести g = 10 м/с^2.



Дано: $a_1 = 5$ м/с^2; $g = 10$ м/с^2.

a_2 – ?

Решение. Упругая резина под действием силы тяжести двух грузов растягивается на величину Δx, определяемую законом Гука $|\mathbf{F}| = k\cdot\Delta x = (m_1+m_2)g$. Когда нить, связывающую грузы (1) и (2) пережигают, то на верхний груз (1) действуют $\mathbf{F}_{упр}$ и сила тяжести $m_1\mathbf{g}$, и по второму закону Ньютона (см. рисунок):



$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{упр} + m_1\mathbf{g}.$$

Это уравнение в проекции на вертикальную ось $0x$ имеет вид:

$$-m_1a_1 = -k\cdot\Delta x + m_1g.$$

С учетом, что $k\cdot\Delta x = (m_1+m_2)g$, имеем

$$-m_1a_1 = -(m_1+m_2)g + m_1g = -\ m_2g,\ \ \text{т.е.}\ \ m_1a_1 = m_2g$$

и

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1}g.$$

Если поменять грузы (1) и (2) местами, то при тех же рассуждениях можно получить выражение для a_2:

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2}g.$$

Перемножая почленно полученные выражения для a_1 и a_2, имеем:

$$a_1 \cdot a_2 = \frac{m_2}{m_1} g \cdot \frac{m_1}{m_2} g = g^2,$$

откуда находим

$$a_2 = \frac{g^2}{a_1} = \frac{10^2}{5} = 20 \text{ м/с}^2.$$

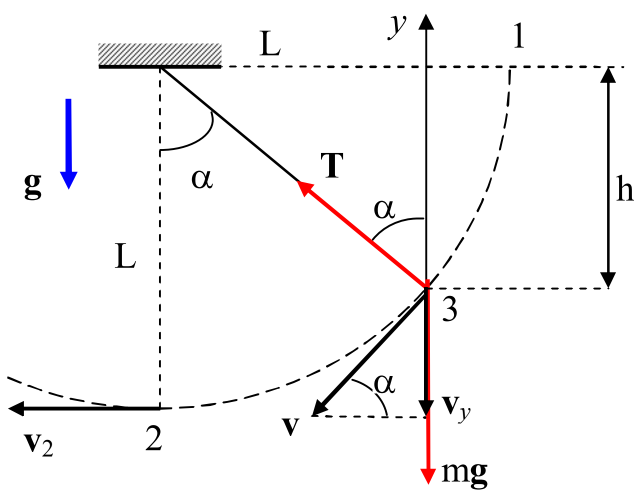
Ответ: $a_2 = 20$ м/с^2.

8. Шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити, отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Какой угол с вертикалью образует нить в тот момент, когда проекция скорости шарика на вертикальное направление наибольшая?

Дано: $\underline{\alpha_0 = 90^0;\ v_y = v_{y\,max}}$.

$\alpha - ?$

Решение. В начальный момент (положение 1 на рисунке) скорость шарика равна нулю. Значит, равна нулю и проекция скорости на вертикальную ось $0y$. В положении 2 вертикальная составляющая скорости снова равна нулю, так как вектор скорости $\mathbf{v}_2$ направлен горизонтально. Следовательно, по мере движения шарика из положения 1 в положение 2 вертикальная проекция скорости v_y сначала увеличивается, достигая максимального значения, а затем начинает уменьшаться. Возрастание вертикальной проекции скорости будет продолжаться до тех пор, пока не станет равной нулю вертикальная проекция равнодействующей приложенных к шарику



силы тяжести m**g** и силы натяжения нити **T**. В этот момент (положение 3 на рисунке) вертикальная проекция ускорения обратится в нуль, и второй закон Ньютона в проекциях на ось 0*y* запишется в виде:

$$T \cdot \cos\alpha - mg = 0,$$

где α – угол между нитью и вертикалью.

Натяжение нити T найдем, воспользовавшись тем, что шарик движется по дуге окружности радиуса L, где L – длина нити. Уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекции на ось, совпадающей с нитью, выглядит так:

$$T - mg \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{v^2}{L}.$$

Квадрат линейной скорости v^2 шарика найдем из закона сохранения энергии:

$$m \cdot \frac{v^2}{2} = mgh, \text{ где } h = L \cdot \cos\alpha \ \text{ (см. рисунок)},$$

откуда

$$v^2 = 2gL\cos\alpha.$$

Учитывая все записанные соотношения, получаем

$$3mg\cos^2\alpha - mg = 0, \qquad \text{и} \qquad 3\cos^2\alpha - 1 = 0,$$

откуда находим

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 55^0.$$

Эту задачу можно решить, используя математический прием. Как известно, в точках экстремума функции ее производная равна нулю. В произвольном положении шарика вертикальная проекция скорости равна:

$$v_y = v\cdot\sin\alpha = \sqrt{2gL\cdot\cos\alpha}\cdot\sin\alpha.$$

Приравняем нулю производную от этого выражения:

$$v_y' = \frac{\sqrt{gL}}{\sqrt{2\cos\alpha}}\left(-\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha\right) = \sqrt{\frac{gL}{2\cos\alpha}}\left(3\cos^2\alpha - 1\right) = 0.$$

Отсюда вытекает условие: $3\cos^2\alpha - 1 = 0$, совпадающее с найденным ранее.

Ответ: $\alpha = 55^0$.

9. Материальная точка массой m = 5 г совершает горизонтальные колебания с частотой ν = 0,5 Гц и амплитудой A = 3 см. Определите: 1) скорость v точки в момент времени, когда смещение x = 1,5 см; 2) максимальную силу F_m, действующую на точку; 3) полную энергию E колеблющейся точки.

Дано: $m = 5$ г $= 5\cdot10^{-3}$ кг; $A = 3$ см $= 3\cdot10^{-2}$ м; $\nu = 0{,}5$ Гц; $x(t)$.

$v(t)$ –? F_m –? E –?

Решение. Кинематическое уравнение гармонических колебаний запишем в виде

$$x = A\cdot\sin(\omega t+\varphi),$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия;

A – амплитуда;

$(\omega t+\varphi)$ – фаза колебания;

φ – начальная фаза;

ω – циклическая частота ($\omega = 2\pi\nu$);

t – время.

1) Формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения, $v = x' = A\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi)$. Исходя из условия, задачи скорость надо выразить через смещение. Для этого исключим время из двух записанных уравнений. Для этого исключим время из двух записанных уравнений. Возведя оба уравнения в квадрат, затем, разделив первое уравнение на A^2, второе – на $A^2\omega^2$ и, сложив их, получим:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{A^2\omega^2}=1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{A^2(2\pi\nu)^2}=1.$$

Решив это уравнение относительно v, найдем

$$v = \pm\, 2\pi\nu\sqrt{A^2-x^2} = \pm\, 2\pi\cdot 0{,}5\sqrt{3^2-1{,}5^2} = \pm\, 8{,}16 \text{ см/с}.$$

Знак ″плюс″ соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси абсцисс, знак ″минус″ – в противном случае.

2) Силу F, действующую на точку, найдем из второго закона Ньютона:

$$F = ma,$$

где a – ускорение точки,

которое определим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = v' = -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi) \qquad \text{или} \qquad a = -A4\pi^2\nu^2\sin(\omega t+\varphi),$$

откуда найдем максимальное значение силы

$$F_m = ma_m = m \cdot A \cdot 4\pi^2\nu^2 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 1{,}49 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} = 1{,}49\ \text{мН}.$$

3) Полная энергия колеблющейся точки представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени. В данной задаче проще всего найти полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения, так как в этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} m v_m^2 .$$

Максимальное значение скорости v_m определим, положив в формуле скорости $\cos(\omega t+\varphi) = 1$, тогда $v_m = 2\pi\nu A$. Итак, полная энергия

$$E = T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m(2\pi\nu A)^2 = \frac{1}{2}\ 5 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 0{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{-2})^2 = 22{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{Дж} = 22{,}2\ \text{мкДж}.$$

Ответ: $v = \pm\ 8{,}16$ см/с; $F_m = 1{,}49$ мН; E = 22,2 мкДж.

10. Найдите относительное изменение длины математического маятника, необходимое для того, чтобы его период колебаний на высоте h был равен периоду колебаний на уровне моря.

Дано: $\underline{h;\ R_0.}$

$\varepsilon - ?$

Решение. При перенесении маятника на более высокий уровень над Землей его период колебаний увеличится, так как ускорение свободного падения уменьшается по мере увеличения высоты. Следовательно, для того, чтобы период колебаний не изменился, длину маятника следует уменьшить.

Пусть математический маятник длиной L_0 на уровне моря колеблется с периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g_0}},$$

где $g_0 = G\dfrac{M}{R_0^2}$ – ускорение свободного падения на уровне моря;

M и R_0 – масса и радиус Земли;

G – гравитационная постоянная.

На высоте h маятник длиной L будет иметь период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad \text{где} \qquad g = G\frac{M}{(R_0 + h)^2}.$$

Согласно условию задачи $T = T_0$, поэтому

$$\frac{L_0}{g_0} = \frac{L}{g} \qquad \text{или} \qquad \frac{L_0 R_0^2}{GM} = \frac{L(R_0 + h)^2}{GM},$$

откуда

$$\frac{L}{L_0} = \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2}.$$

Относительное уменьшение длины маятника

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_0 - L}{L_0} = 1 - \frac{L}{L_0} = 1 - \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2} = 1 - \left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2.$$

Далее воспользуемся с известным из математики условием $(1+x)^n \approx 1 + nx$, при $x \ll 1$. Для случая, когда $h \ll R_0$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = 1 - \left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2 \approx 1 - \left(1 + (-2)\frac{h}{R_0}\right) = 2\frac{h}{R_0}.$$

Итак, при $h \ll R_0$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = 2\frac{h}{R_0}.$$

Ответ: $\varepsilon = 2\frac{h}{R_0}$.

11. Платформа в виде сплошного диска радиуса $R = 1{,}5$ м и массой $m_1 = 180$ кг вращается вокруг оси симметрии с частотой $\nu_0 = 10$ об/мин. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость v относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы? Человека принять за материальную точку.

Дано: <u>$R = 1{,}5$ м; $m_1 = 180$ кг; $\nu = 10$ об/мин $= (1/6)$ $с^{-1}$; $m_2 = 60$ кг.</u>

v–?

Решение. Так как на платформу не действуют внешние силы, соответственно, их момент можно считать равным нулю. В этом случае момент импульса системы «платформа – человек» остается неизменным:

$$L = J\omega = const,$$

где J – момент инерции системы «платформа + человек» относительно оси вращения;

ω – угловая скорость вращения платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальный момент времени $J = J_1+J_2$, в конечном состоянии $J' = J_1'+J_2'$. В итоге закон сохранения момента импульса примет вид:

$$(J_1+J_2)\cdot\omega = (J_1'+J_2')\cdot\omega',$$

где J_1 и J_1' - значения момента инерции платформы в начальном и конечном состоянии,

J_2 и J_2' - значения момента инерции человека в начальном и конечном состоянии.

На момент инерции платформы относительно оси вращения переход человека не влияет, и момент инерции платформы, имеющей форму диска, равен: $J_1 = J_1' = \frac{1}{2}m_1R^2$. Момент инерции человека, как материальной точки, в начальный момент, когда он находится в центре платформы, $J_2 = 0$; а в конечном состоянии, когда человек находится на краю платформы, $J_2' = m_2R^2$.

Записанные соотношения для моментов инерций подставим в уравнение, выражающее закон сохранения момента импульса, и учтем, что угловая скорость в начальный момент $\omega = 2\pi\nu$ и в конечный момент $\omega' = \frac{v}{R}$, где v – скорость человека относительно пола помещения:

$$(\frac{1}{2}m_1R^2+0)\cdot 2\pi\nu = (\frac{1}{2}m_1R^2+m_2R^2)\cdot\frac{v}{R},$$

откуда находим искомую скорость

$$v = \frac{2\pi\nu R m_1}{m_1 + 2m_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} = 1 \text{ м/с}.$$

Ответ: v = 1 м/с.

12. Тонкостенный стакан плавает в воде, погрузившись наполовину. Насколько изменится глубина погружения, если стакан поставить в воду вверх дном. Температура воздуха в стакане постоянна. Высота стакана H. Атмосферное давление P_0. Плотность воды ρ. Ускорение силы тяжести g.

Дано: <u>H; P_0; ρ; g.</u>

Δh –?

Решение. Сделаем рисунок, на котором изобразим положение стакана в обоих случаях. В позиции (а) стакан плавает, погрузившись на $\frac{H}{2}$, и на $\frac{H}{2}$ край стакана выступает над уровнем воды. В позиции (в) для перевернутого стакана: на h_1 дно стакана выступает над уровнем воды, h_2 – разница уровней воды в стакане и вне стакана.

1) Для изотермического процесса для воздуха в стакане применяем закон Бойля – Мариотта:

$$P_1V_1 = P_2V_2, \qquad \text{или} \qquad P_0HS = (P_0 + \rho g h_2)(h_1 + h_2)S,$$

где S – площадь поперечного сечения стакана.

2) Если записывать условия плавания стакана, то в обоих случаях сила тяжести стакана mg (m – масса стакана) уравновешивается выталкивающими силами (Архимеда). Поэтому в качестве второго уравнения записываем:

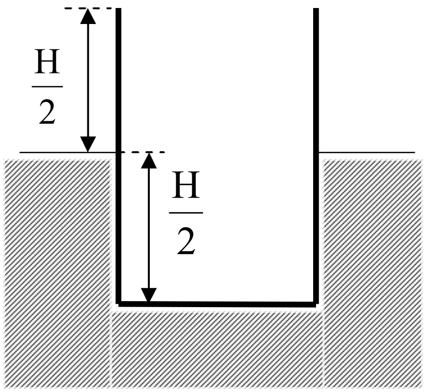
$$mg = F_{Apx1} = F_{Apx2}, \qquad \text{т.е.} \qquad F_{Apx1} = F_{Apx2},$$

или

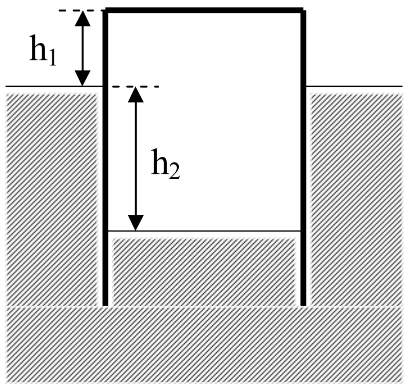
$$\rho g \frac{H}{2} S = \rho g h_2 S,$$

откуда находим

$$h_2 = \frac{H}{2}.$$



(а)



(в)

Подставляем это значение $h_2 = \frac{H}{2}$ в первое уравнение

$$P_0 HS = (P_0 + \rho g \frac{H}{2}) \cdot (h_1 + \frac{H}{2}) S,$$

откуда находим

$$h_1 = \frac{H}{2} \cdot \frac{2P_0 - \rho g H}{2P_0 + \rho g H}.$$

А приращение глубины погружения стакана равно (см. рисунок):

$$\Delta h = \frac{H}{2} - h_1 = \frac{H}{2} - \frac{H}{2} \cdot \frac{2P_0 - \rho g H}{2P_0 + \rho g H} = H\left(1 + \frac{2P_0}{\rho g H}\right)^{-1}.$$

Ответ: $\Delta h = H\left(1 + \frac{2P_0}{\rho g H}\right)^{-1}$.

13. Гелий из состояния с температурой T_1 = 200 К расширяется в процессе PV^2 = const (P – давление, V – объем газа) с постоянной теплоемкостью C. От газа отвели количество теплоты Q = 400 Дж, и конечный объем газа стал вдвое больше начального. Определите теплоемкость C.

Дано: T_1 = 200 К; PV^2 = const; Q = 400 Дж; V_2/V_1 = 2.

C –?

Решение. Запишем уравнение процесса и уравнение Клапейрона для гелия:

$$PV^2 = \text{const}, \qquad \frac{PV}{T} = \text{const}.$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, имеем:

$$VT = \text{const}.$$

Последнее уравнение для перехода гелия из состояния 1 в состояние 2 записывается так:

$$V_1T_1 = V_2T_2,$$

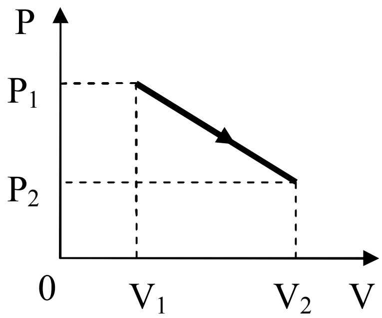
из которого находим температуру гелия в конечном состоянии

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2} \cdot T_1 = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100 \text{ К}.$$

Теплоемкость C по определению равна количеству теплоты, необходимому для изменения температуры системы (газа) на 1 К:

$$C = \frac{|Q|}{|T_2 - T_1|} = \frac{400}{200 - 100} = 4 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: C = 4 Дж/К.



14. С азотом произошел процесс, изображенный на рисунке в координатах P-V. Определите температуру газа T в этом процессе, когда его объем равен V = 1,1 л, если масса азота равна m = 0,56 г; P_1 = 100 кПа; V_1 = 0,5 л; P_2 = 40 кПа; V_2 = 1,5 л. Молярная масса азота μ = 28 г/моль. Универсальная газовая постоянная равна R = 8,31 Дж/(моль·К).

Дано: $P_1 = 100 \cdot 10^3$ Па; $V_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $P_2 = 40 \cdot 10^3$ Па; $V_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3; $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $V = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ м^3; R = 8,31 Дж/(моль·К).

T –?

Решение. Процесс, происходящий с газом (см. рисунок), можно выразить уравнением:

$$P = P_0 - \alpha V,$$

где P_0 – значение давления при нулевом объеме;

α – угловой коэффициент в зависимости P(V).

Запишем это уравнение процесса для состояний 1 и 2:

$$P_1 = P_0 - \alpha V_1, \qquad P_2 = P_0 - \alpha V_2.$$

Из этих уравнений выразим постоянные α и P_0:

$$\alpha = \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1}; \qquad P_0 = P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V_1.$$

Для промежуточного состояния запишем уравнение процесса и уравнение Клапейрона-Менделеева:

$$P = P_0 - \alpha V, \qquad PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Из этих уравнений с учетом выражений для α и P_0 найдем искомую температуру T:

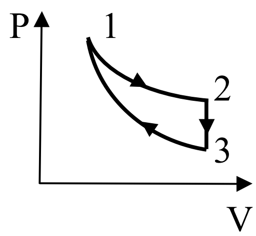
$$T = \frac{PV\mu}{mR} = \frac{V\mu}{mR} \cdot P = \frac{V\mu}{mR} \cdot (P_0 - \alpha V) = \frac{V\mu}{mR} \cdot (P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V_1 - \alpha V) =$$

$$= \frac{V\mu}{mR} \cdot (P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V_1 - \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V) = \frac{V\mu}{mR} \cdot (P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot (V_1 - V) =$$

$$= \frac{1{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0{,}56 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} \cdot \left(100 \cdot 10^3 + \frac{100 \cdot 10^3 - 40 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-3} - 0{,}5 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(0{,}5 \cdot 10^{-3} - 1{,}1 \cdot 10^{-3} \right) \right) = 424 \text{ К}.$$

Ответ: T = 424 К.

15. Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу (см. рисунок), состоящему из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1, равен η. Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT. Найдите работу, совершенную ν молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.



Дано: η; $T_1 - T_3 = \Delta T$; $T_1 = T_2$; $i = 3$; ν; R.

A_{12} –?

Решение. К каждому из трех процессов на участках 1-2, 2-3, 3-1 рассматриваемого цикла будем применять первый закон термодинамики – количество теплоты ΔQ, переданное системе, идет на изменение внутренней энергии ΔU системы и на совершение системой работы ΔA против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{i}{2}\nu R\Delta T + P\Delta V,$$

где i – число степеней свободы молекул газа;

ν – количество вещества;

R – газовая постоянная;

P – давление;

ΔT и ΔV – изменения температуры и объема в рассматриваемом элементарном процессе.

Участок 1-2 – изотерма, температуры в состояниях 1 и 2 одинаковы, т.е. $T_1 = T_2$. Поэтому на этом участке внутренняя энергия не меняется, т.е. $\Delta U_{12} = 0$. И работа A_{12} совершается за счет теплоты $Q_{12} = Q_1$, получаемой тепловой машиной от нагревателя:

$$A_{12} = Q_1.$$

Участок 2-3 – изохора, объемы в состояниях 2 и 3 одинаковы, т.е. $V_2 = V_3$. Поэтому на этом участке работа не совершается, т.е. $A_{23} = 0$. На участке 2-3 температура понижается, и убыль внутренней энергии $\Delta U_{23} = \frac{i}{2}\nu R\Delta T$ производится за счет передачи теплоты $Q_{23} = Q_2$ холодильнику:

$$Q_2 = \frac{i}{2}\nu R\Delta T.$$

Участок 3-1 – адиабата, на этом участке процесс происходит без теплообмена с окружающей средой:

$$Q_3 = 0.$$

Коэффициент полезного действия η тепловой машины по определению равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

В полученное уравнение для η вместо Q_1 и Q_2 подставим их выражения, записанные выше:

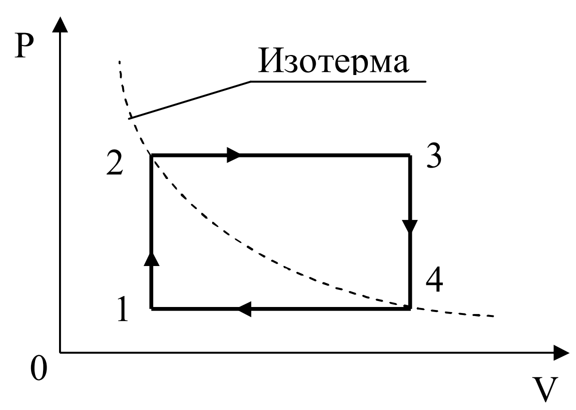
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{3}{2}\nu R\Delta T}{A_{12}},$$

откуда найдем искомую работу:

$$A_{12} = \frac{3\nu R\Delta T}{2(1-\eta)}.$$

Ответ: $A_{12} = \dfrac{3\nu R\Delta T}{2(1-\eta)}$.

16. Один моль идеального газа совершает замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (см. рисунок). Температура в точке 1 равна T_1, а в точке 3 равна T_3. Точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. Чему равна работа газа за цикл? Универсальная газовая постоянная равна R.



Дано: $R;\ T_1;\ T_3;\ T_4 = T_2;\ P_3 = P_2;\ P_4 = P_1;\ V_2 = V_1;\ V_3 = V_4;\ \nu = 1$ моль.

A –?

Решение. В каждой точке параметры состояния будем обозначать с соответствующими индексами. Например, в точке 4 с учетом условия задачи будем использовать следующие параметры для давления, объема, температуры: $4(P_4, V_4, T_4) = 4(P_1, V_4, T_2)$.

Используя уравнение Клапейрона

$$\frac{PV}{T} = \text{const},$$

запишем уравнения изопроцессов 1-2, 2-3, 3-4, 4-1.

Из уравнений изохор 1-2 и 3-4

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \qquad \frac{P_2}{T_3} = \frac{P_1}{T_2}$$

получаем выражение:

$$P_1 = P_2 \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}. \qquad (*)$$

Из уравнений изобар 2-3 и 4-1

$$\frac{V_1}{T_2} = \frac{V_4}{T_3}, \qquad \frac{V_4}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

получаем соотношения:

$$V_4 = V_1 \cdot \frac{T_3}{T_2}, \qquad T_2 = \sqrt{T_1 \cdot T_3}. \qquad (**)$$

Работа газа за цикл равна площади фигуры (в данном случае площади прямоугольника) на диаграмме в координатах P-V:

$$A = (P_2 - P_1)\cdot(V_4 - V_1).$$

Преобразуем записанное выражение для работы с учетом соотношений (*) и (**):

$$A = (P_2 - P_1)\cdot(V_4 - V_1) = P_2\cdot(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})\cdot V_1\cdot(\frac{T_3}{T_2} - 1) =$$

$$= P_2V_2\cdot(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})\cdot(\frac{T_3}{\sqrt{T_1T_3}} - 1).$$

Преобразуем полученное выражение для работы с учетом уравнения состояния в точке 2:

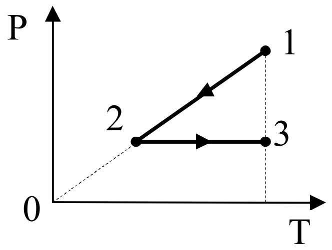
$$P_2V_2 = \nu RT_2, \qquad (\nu = 1 \text{ моль}).$$

Итак, имеем:

$$A = P_2V_2\cdot(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})\cdot(\frac{T_3}{\sqrt{T_1T_3}} - 1) = RT_2\cdot(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})\cdot(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1) =$$

$$= R\sqrt{T_1\cdot T_3}\cdot(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})\cdot(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1) = R\cdot\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2.$$

Ответ: $A = R\cdot\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2$.



17. 1 моль идеального одноатомного газа сначала охладили, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 К, увеличив объем газа в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 1-2?

Дано: ν = 1 моль; R = 8,31 Дж/(моль·К); $T_1 = T_3$ = 300 К; i = 3; $V_3/V_2 = 3$;

Q_{12} = ?

Решение: Будем полагать, что каждому состоянию (1, 2, 3) соответствует значение параметра состояния (P, V, T) с соответствующим индексом.

Так как процесс 2-3 изобарический (P = const), то

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_3 \cdot \frac{V_2}{V_3} = 300 \cdot \frac{1}{3} = 100 \text{ К}.$$

На участке 1-2 согласно первому началу термодинамики

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \Delta U_{12},$$

так как на этом участке процесс изохорный, и поэтому $A_{12} = 0$. Запишем известное соотношение для изменения внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1),$$

где i – степеней свободы молекул;

R – газовая постоянная.

После подстановки данных получаем следующий результат:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 8{,}31\cdot(100 - 300) = -2{,}5\cdot 10^3 \text{ Дж} = -2{,}5 \text{ кДж}.$$

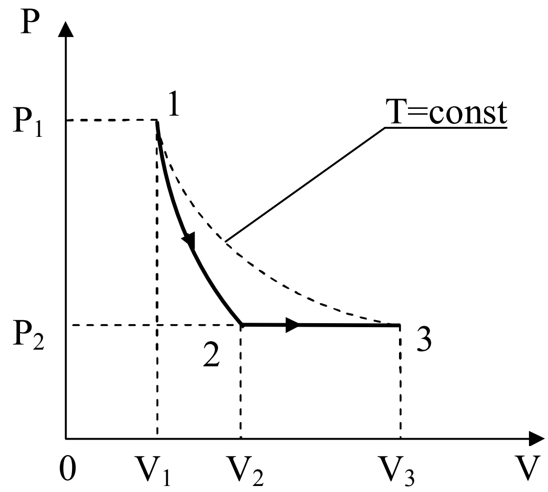
Знак ″–″ указывает на то, что на участке 1-2 газ отдает такое количество теплоты (что требуется найти согласно условию задачи).

Ответ: $Q_{12} = -2{,}5$ кДж.

18. Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно, а затем – изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 4,5 кДж. Чему равна работа газа за весь процесс?

Дано: $\underline{A_{12} = 4{,}5 \text{ кДж}; i = 3; T_1 = T_2;}$

$A_{123} = ?$



Решение: На рисунке 1-2 – адиабатический процесс, 2-3 – изобарический процесс, 1-3 – изотерма ($T_1 = T_3$). Согласно условию задачи работа адиабатического расширения равна A_{12}. Как известно, работа адиабатического расширения равна:

$$A_{12} = \nu C_V(T_1 - T_2),$$

где $C_V = \frac{i}{2}R$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме;

ν – количество вещества;

T_1 и T_2 – температуры в точках 1 и 2;

i – число степеней свободы молекул;

R – газовая постоянная.

Итак,

$$A_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_1 - T_2),$$

откуда выражаем

$$\nu R(T_1 - T_2) = \frac{2}{i}A_{12}.$$

Работа изобарического расширения на участке 2-3 равна

$$A_{23} = P_2(V_3 - V_2) = P_2V_3 - P_2V_2 = \nu RT_1 - \nu RT_2 = \nu R(T_1 - T_2) = \frac{2}{i}A_{12}.$$

Так как работа аддитивная величина, то работа газа за весь процесс равна алгебраической сумме работ на отдельных участках:

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = A_{12} + \frac{2}{i}A_{12} = A_{12}\left(1 + \frac{2}{i}\right) = 4{,}5\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 7{,}5 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A_{123} = 7{,}5$ кДж.

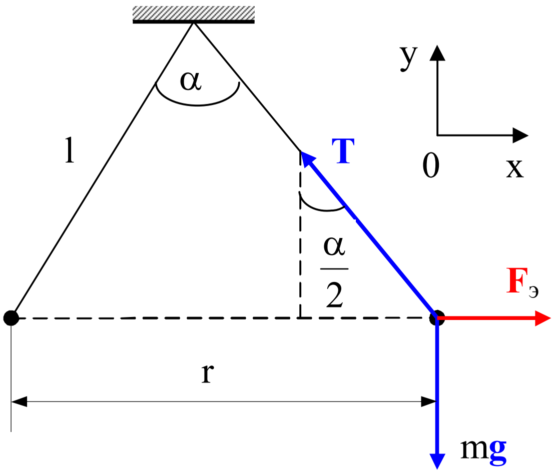
19. На шелковых нитях длиной $l = 50$ см подвешены в одной точке в воздухе два одинаково заряженных шарика массами $m = 0{,}8$ г каждый. Сколько избыточных электронов надо сообщить каждому шарику, чтобы нити подвеса шариков разошлись на угол $\alpha = 60^0$? Элементарный заряд $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с^2. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

Дано: $l = 0{,}5$ м; $m = 0{,}8\cdot10^{-3}$ кг; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл;

$g = 9{,}8$ м/с^2; $\varepsilon = 1$; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м; $\alpha = 60^0$.

N–?

Решение. На каждый шарик действуют силы: m**g** – сила тяжести, **T** – сила натяжения нити, $\mathbf{F}_э$ – сила электрического (кулоновского) отталкивания шариков (см. рисунок). Так как шарики находятся в равновесии, то условие равновесия любого из шариков записывается в виде:



$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_э = 0,$$

т.е. векторная сумма сил, действующих на шарик, равна нулю. Распишем это векторное уравнение в проекциях по осям координат 0x, 0y:

$$F_э - T\sin\frac{\alpha}{2} = 0; \qquad T\cos\frac{\alpha}{2} - mg = 0,$$

Или

$$T\sin\frac{\alpha}{2} = F_э; \qquad T\cos\frac{\alpha}{2} = mg.$$

Поделив почленно уравнения в последней системе, друг на друга, имеем:

$$\frac{F_э}{mg} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \text{или} \quad F_э = mg\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

В последнее уравнение подставим выражение для $F_э$, следующее из закона Кулона:

$$F_э = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}, \quad \text{где} \quad r = 2l\sin\frac{\alpha}{2},$$

т.е.

$$F_э = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$F_э = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = mg\,tg\frac{\alpha}{2}.$$

Заряд каждого шарика q складывается из зарядов избыточных электронов, так как создается их совокупностью, т.е. $q = Ne$, где N – число избыточных электронов. Подстановка выражения для q в предыдущее уравнение дает:

$$\frac{N^2 e^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = mg\,tg\frac{\alpha}{2},$$

откуда находим

$$N = \frac{4l}{e}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\pi\varepsilon\varepsilon_0 mgtg\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{4\cdot 0{,}5}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\sin 30^0\sqrt{\pi\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot tg30^0} = 2{,}21\cdot 10^{12}.$$

Ответ: $N = 2{,}21\cdot 10^{12}$.

20. Четыре конденсатора C_1 = 3 пФ, C_2 = 7 пФ, C_3 = 6 пФ и C_4 = 4 пФ соединены по схеме, приведенной на рисунке, и подключены к источнику напряжения с ЭДС $\mathcal{E}$ = 1 000 В. Определите показания вольтметра, подключенного между точками А и В схемы.

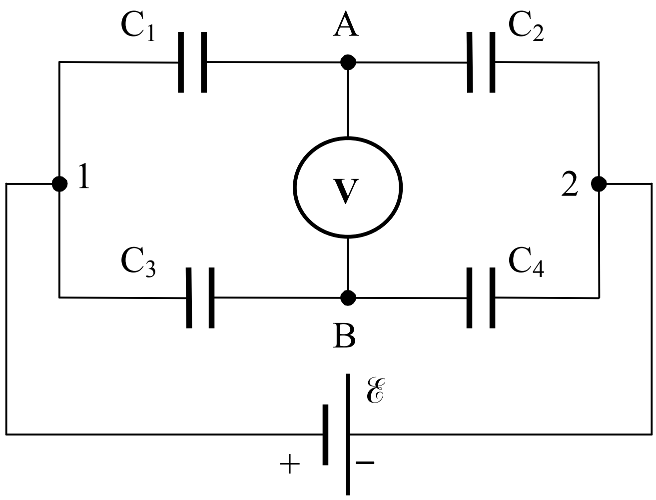
Дано: $\underline{C_1 = 3\text{ пФ}; C_2 = 7\text{ пФ}; C_3 = 6\text{ пФ}; C_4 = 4\text{ пФ}; \mathscr{E} = 1\,000\text{ В}}$.

U_V –?

Решение. Напряжение U, поданное на схему (между точками 1 и 2), равно ЭДС источника, т.е.

$$U = U_{12} = \mathscr{E} = 1000\text{ В}.$$

Рассмотрим участок цепи, состоящий из последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2, к которой приложено напряжение U_{12} =U. При последовательном соединении конденсаторов заряды их одинаковы и равны заряду системы из C_1 и C_2:



$$q_1 = q_2 = q_{12}.$$

Электроемкость C_{12} цепи из двух последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2 найдем из известного соотношения для емкости батареи конденсаторов при последовательном соединении:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \qquad \Rightarrow \qquad C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Теперь найдем заряд, ушедший из источника в систему из конденсаторов C_1 и C_2:

$$q_{12} = C_{12}U_{12} = C_{12}U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}U.$$

Определим напряжение U_1 на конденсаторе C_1:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_{12}}{C_1} = \frac{1}{C_1}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U = \frac{C_2}{C_1+C_2}U.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения для цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсаторов C_3 и C_4, можно найти напряжение на конденсаторе C_3:

$$U_3 = \frac{C_4}{C_3+C_4}U.$$

Напряжение U_3 есть разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_B$ (см. рисунок):

$$U_3 = \varphi_1 - \varphi_B,$$

и, соответственно,

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_A.$$

Вычитая почленно два последних уравнения, имеем:

$$U_3 - U_1 = \varphi_A - \varphi_B.$$

Но $(\varphi_A - \varphi_B)$ – есть разность потенциалов (напряжение) между точками A и B и будет равно показанию вольтметра, подключенного между этими точками:

$$U_V = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = U_3 - U_1 = \frac{C_4}{C_3+C_4}U - \frac{C_2}{C_1+C_2}U =$$

$$= U\left(\frac{C_4}{C_3+C_4} - \frac{C_2}{C_1+C_2}\right) = 1\,000\left(\frac{4}{6+4} - \frac{7}{3+7}\right) = -300 \text{ В}.$$

Знак ″–″ указывает на то, что $\varphi_A - \varphi_B < 0$, т.е. $\varphi_A < \varphi_B$.

Ответ: $U_V = -300$ В.

Теперь исследуем случай, когда показание вольтметра будет нулевое, т.е. когда

$$U_V = \varphi_A - \varphi_B = U\left(\frac{C_4}{C_3 + C_4} - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right) = 0.$$

Поскольку $U \neq 0$, то должно быть:

$$\frac{C_4}{C_3 + C_4} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0,$$

откуда находим

$$\frac{C_4}{C_3 + C_4} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\frac{C_3}{C_4} + 1} = \frac{1}{\frac{C_1}{C_2} + 1}.$$

Последнее равенство выполняется при выполнении условия:

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Эту пропорцию можно привести к виду

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}.$$

Таким образом, при выполнении следующих соотношений между емкостями приведенной схемы

$$\frac{C_1}{C_3}=\frac{C_2}{C_4}, \qquad \text{или} \qquad \frac{C_3}{C_4}=\frac{C_1}{C_2},$$

будет $\varphi_A - \varphi_B = 0$, т.е. $\varphi_A = \varphi_B$.

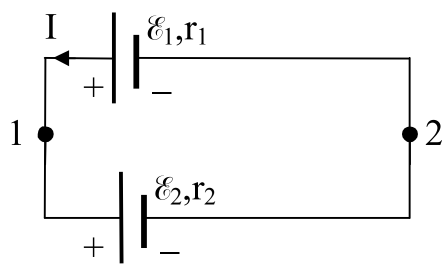
В этом случае:

- показания вольтметра, подключенного между точками A и B будут нулевыми, т.е. $U_V = \varphi_A - \varphi_B = 0$;

- подключение между точками A и B приведенной схемы конденсатора любой емкости (также любого резистора) или наличие между этими точками разрыва или перемычки (шунта) никак не повлияет на распределение зарядов и напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 и C_4;

- полученные результаты можно использовать при расчете подобных схем.

21. Два гальванических элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1$ = 2 В и $\mathcal{E}_2$ = 1,5 В и внутренними сопротивлениями r_1 = 0,6 Ом и r_2 = 0,4 Ом, соответственно, соединены параллельно (см. рисунок). Определите силу тока I в контуре и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2.



Дано: $\underline{\mathcal{E}_1 = 2\text{ В};\ \mathcal{E}_2 = 1{,}5\text{ В};\ r_1 = 0{,}6\text{ Ом};\ r_2 = 0{,}4\text{ Ом}}$.

I –? $\varphi_1 - \varphi_2$ –?

Решение: Согласно второму правилу Кирхгофа

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I(r_1 + r_2),$$

Откуда находим

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} = \frac{2-1{,}5}{0{,}6+0{,}4} = 0{,}5 \text{ А}.$$

Согласно закону Ома для неоднородного участка цепи

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{E}_1 - Ir_1 = 2 - 0{,}5\cdot 0{,}6 = 1{,}7 \text{ В},$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{E}_2 + Ir_2 = 1{,}5 + 0{,}5\cdot 0{,}4 = 1{,}7 \text{ В}.$$

Ответ: $I = 0{,}5$ А; $\varphi_1 - \varphi_2 = 1{,}7$ В.

22. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r = 0{,}08$ Ом при силе тока $I_1 = 4$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 8$ Вт. Какую мощность P_2 он отдает во внешнюю цепь при силе тока $I_2 = 6$ А?

Дано: $r = 0{,}08$ Ом; $I_1 = 4$ А; $P_1 = 8$ Вт; $I_2 = 6$ А.

P_2 –?

Решение: Обозначим через $\mathscr{E}$ – ЭДС источника тока (аккумулятора); R_1 и R_2 – сопротивление нагрузки в первом и во втором случаях, соответственно; I_1 и I_2 – сила тока в цепи в первом и во втором случаях, соответственно.

В первом случае мощность, отдаваемая аккумулятором во внешнюю цепь, равна

$$P_1 = I_1^2 R_1, \quad \text{где} \quad I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}.$$

Во втором случае сила тока изменилась из-за того, что сопротивление нагрузки изменилось и стало равным, например, R_2. Тогда мощность, отдаваемая во внешнюю цепь во втором случае, равна:

$$P_2 = I_2^2 R_2, \quad \text{где} \quad I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_2 + r}.$$

Решая систему из написанных четырех последних уравнений, находим:

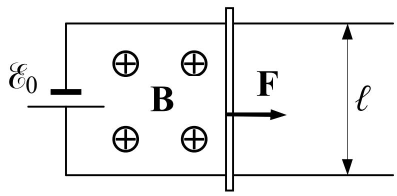
$$P_2 = I_2\left[\frac{P_1}{I_1} + (I_1 - I_2)r\right] = 6\left[\frac{8}{4} + (4-6)0{,}08\right] = 11{,}04 \text{ Вт.}$$

Ответ: $P_2 = 11{,}04$ Вт.

23. Источник с ЭДС $\mathscr{E}_0$ и нулевым внутренним сопротивлением подключён к двум параллельным проводящим шинам, по которым может скользить без трения перемычка длины ℓ. Магнитное поле с индукцией **B** перпендикулярно плоскости шин (см. рисунок). К перемычке приложена сила **F** перпендикулярно перемычке. Найдите мощность, развиваемую силой F при установившейся скорости движения перемычки. Сопротивление перемычки R.

Дано: $\underline{\mathscr{E}_0, F, R, B, \ell.}$

P –?



Решение: В замкнутом контуре, включающем источник тока с ЭДС $\mathscr{E}_0$ и перемычку, при движении перемычки длиной ℓ с установившейся скоростью v в поперечном магнитном поле с индукцией B индуцируется ЭДС индукции, равная

$$\mathscr{E} = B\ell v.$$

Согласно правилу Ленца ЭДС индукции $\mathscr{E}$ и ЭДС источника $\mathscr{E}_0$ включены встречно, и результирующая ЭДС в контуре будет равна их разности, т.е. $\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}$. Сила тока I в контуре и через перемычку согласно закону Ома будет равна

$$I = \frac{\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}_0 - B\ell v}{R}. \qquad (1)$$

В магнитном поле с индукцией B на перемычку длиной ℓ с током I действует сила Ампера F_A:

$$F_A = I\ell B,$$

направленная противоположно внешней силе **F** и равная ей по модулю при установившейся скорости v движения перемычки ($F_A = F$).

Из выражения $F_A = F = I\ell B$ находим силу тока:

$$I = \frac{F}{\ell B}. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) для силы тока I приравняем правые части уравнений

$$\frac{\mathscr{E}_0 - B\ell v}{R} = \frac{F}{\ell B},$$

откуда затем выразим скорость v:

$$v = \frac{1}{\ell B}\left(\mathscr{E}_0 - \frac{FR}{\ell B}\right).$$

Это равенство для скорости подставим в выражение для мощности P, равной произведению силы F на скорость v:

$$P = Fv = \frac{F}{\ell B}\left(\mathscr{E}_0 - \frac{FR}{\ell B}\right).$$

Ответ: $P = \frac{F}{\ell B}\left(\mathscr{E}_0 - \frac{FR}{\ell B}\right)$.

24. Провод из материала плотностью ρ и сечением S согнут в виде трёх сторон квадрата и прикреплён своими концами к горизонтальной оси, вокруг которой он может вращаться в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B (см. рисунок). На какой угол α от вертикали отклонится плоскость этого контура при прохождении по проводу тока I? Ускорение свободного падения равно g.

Дано: $\underline{\rho;\ S;\ g;\ B;\ I}$.

α –?

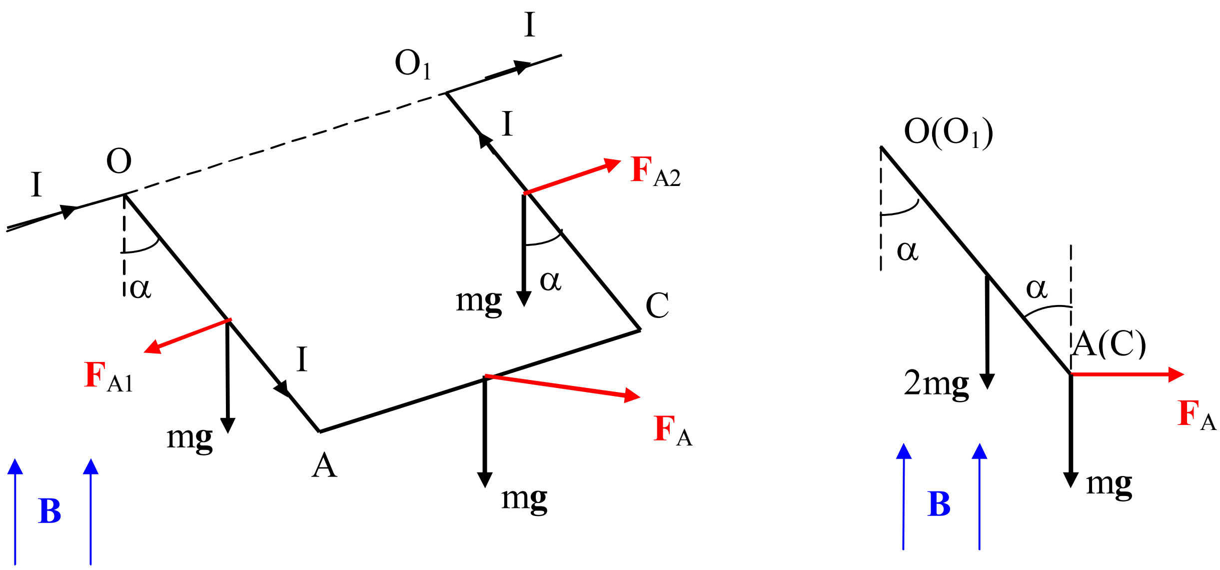
Решение: Обозначим силы, действующие на согнутый проводник:

- одинаковые силы тяжести $m\mathbf{g}$, приложенные к участкам OA, AC, CO_1 одинаковой длины, т.е. $OA = AC = CO_1 = l$;

- силу Ампера $\mathbf{F}_A$, действующую на горизонтальный участок AC;

- силы Ампера $\mathbf{F}_{A1}$ и $\mathbf{F}_{A2}$, действующие на участки OA и CO_1.

Направления сил $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_{A1}$ и $\mathbf{F}_{A2}$ определяем по правилу правого винта (правилу левой руки).



Так как контур находится в равновесии, то сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно оси вращения OO_1 равна нулю. Силы $\mathbf{F}_{A1}$ и $\mathbf{F}_{A2}$ параллельны оси OO_1 и их моменты относительно OO_1 равны нулю. Моменты сил реакции шарниров (на рисунке эти силы не показаны) относительно оси OO_1 также равны нулю. Для остальных сил уравнение моментов сил относительно оси OO_1 запишется так:

$$mgl\sin\alpha + 2mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F_A l\cos\alpha = 0.$$

Подставляя в это уравнение

$$m = \rho \cdot S \cdot l \quad \text{и} \quad F_A = I \cdot l \cdot B,$$

получаем

$$2\rho \cdot S \cdot l \cdot g \cdot l \cdot \sin\alpha = I \cdot l \cdot B \cdot l \cdot \cos\alpha,$$

откуда находим

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{IB}{2\rho Sg}.$$

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{I \cdot B}{2 \cdot \rho \cdot S \cdot g}$.

25. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, попадает в однородное магнитное поле и движется в нём по винтовой линии радиуса R и шагом h. Найдите значение магнитной индукции B. Масса электрона m, элементарный заряд равен e.

Дано: <u>e, m, h, R,U.</u>

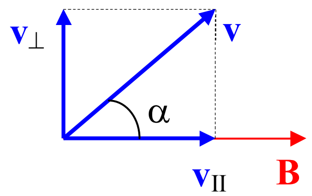
B – ?

Решение. Будем предполагать, что электрон до попадания в ускоряющее электрическое поле покоился. Тогда по закону сохранения энергии кинетическая энергия электрона $mv^2/2$ определяется ускоряющей разностью потенциалов U:

$$eU = mv^2/2,$$

откуда находим:

$$v^2 = \frac{2eU}{m}. \qquad (1)$$



Предположим, что электрон со скоростью **v** влетает в однородное магнитное поле индукции **B** под углом α к линиям индукции (см. рисунок). Разложим скорость **v** на составляющие вдоль поля $\mathbf{v}_{II}$ и перпендикулярно полю $\mathbf{v}_{\perp}$.

Запишем уравнения движения электрона в магнитном поле индукции B – магнитную составляющую силы Лоренца приравняем произведению массы электрона на центростремительное ускорение:

$$evB\sin\alpha = ev_{\perp}B = mv_{\perp}{}^2/R,$$

откуда выражаем

$$v_{\perp} = \frac{eBR}{m}. \qquad (2)$$

Теперь найдём период T вращения, время совершения одного оборота:

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = 2\pi R\frac{m}{eBR} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

За период вращения электрон пройдёт вдоль вектора **B** расстояние, равное шагу h винта:

$$h = v_{II}T = v_{II}\frac{2\pi m}{eB},$$

откуда находим

$$v_{II} = \frac{eBh}{2\pi m}. \qquad (3)$$

По теореме Пифагора находим (см. рисунок):

$$v_{\perp}^2 + v_{II}^2 = v^2. \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (4) выражения для отдельных слагаемых из (1), (2) и (3), получаем:

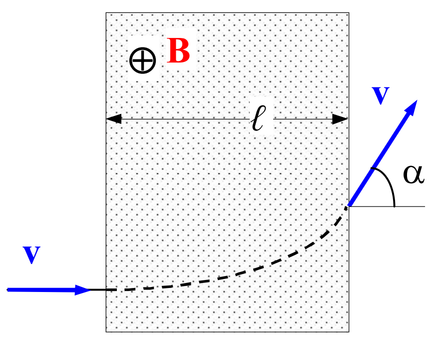
$$\left(\frac{eBR}{m}\right)^2 + \left(\frac{eBh}{2\pi m}\right)^2 = \frac{2eU}{m},$$

откуда находим

$$B = \sqrt{\frac{2mU}{e\left(R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right)}}.$$

Ответ: $B = \sqrt{\dfrac{2mU}{e\left(R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}\right)}}$.

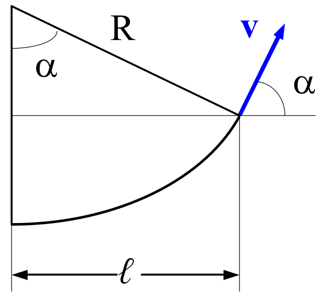
26. Частица массой $m = 6{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг с электрическим зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, ускоренная разностью потенциалов U = 10 кВ, «влетает по нормали в магнитный барьер» протяжённостью ℓ = 0,1 м поперёк линий индукции **B**. Если известна величина индукции однородного магнитного поля в «барьере» B = 30 мТл, найдите угол α, на который частица изменит направление своего движения (см. рисунок).



Дано: $m = 6{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг, $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, $U = 10^4$ В, $\ell = 0{,}1$ м, $B = 30 \cdot 10^{-3}$ Тл.

$\alpha = ?$

Решение. На рисунке область «магнитного барьера» заштрихована, вектор **B** направлен «от нас», перпендикулярно плоскости рисунка.



Находясь в «магнитном барьере» протяжённостью ℓ частица в однородном магнитном поле движется по дуге окружности радиуса R. Из рисунка видим, что можно написать очевидное соотношение:

$$\frac{\ell}{R} = \sin\alpha,$$

откуда находим

$$R = \frac{\ell}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

Скорость частицы находим из закона сохранения энергии. Кинетическая энергия частицы $mv^2/2$ определяется ускоряющей разностью потенциалов U (будем предполагать, что частица до попадания в ускоряющее электрическое поле покоилась):

$$eU = mv^2/2,$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}. \qquad (2)$$

Запишем уравнения движения частицы в магнитном поле индукции B – магнитную составляющую силы Лоренца приравняем произведению массы частицы на центростремительное ускорение:

$$qvB = mv^2/R,$$

откуда выражаем R с учётом выражения (2) для скорости v:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \qquad (3)$$

Левые части уравнений (1) и (3) одинаковы, приравняем правые их части и выразим искомый угол α:

$$\frac{\ell}{\sin\alpha} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$$

и

$$\alpha = \arcsin\left(B\ell\sqrt{\frac{q}{2mU}}\right).$$

Подстановка данных приводит к результату $\alpha = 8{,}4^0$.

Очевидно, что если радиус окружности будет равен ширине барьера, то частица, совершив полукруг, вылетит из области магнитного поля в обратном направлении.

Ответ: $\alpha = 8{,}4^0$.

27. Электрон (зарядом e и массой m) движется по окружности радиусом R в однородном магнитном поле с индукцией B. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряжённостью E. За какой промежуток времени τ кинетическая энергия электрона возрастёт в 2 раза?

Дано: $\underline{e, m, R, B, E, W/W_1 = 2.}$

$\tau = ?$

Решение. В отсутствие электрического поля электрон движется по окружности радиуса R, определяемого из уравнения его движения – магнитную составляющую силы Лоренца приравняем произведению массы электрона на центростремительное ускорение:

$$Ev_1B = mv_1^2/R,$$

откуда выражаем

$$v_1 = \frac{eBR}{m}. \qquad (1)$$

После возбуждения электрического поля напряжённости E вдоль линий индукции B электрон будет двигаться против (электрон отрицательно заряженная частица) направления полей с ускорением a, определяемым уравнением движения

$$ma = eE,$$

откуда

$$a = eE/m.$$

Скорость электрона вдоль направления полей спустя время τ будет равна

$$v_{II} = a\tau = eE\tau/m. \qquad (2)$$

Значение скорости v электрона в момент τ после возбуждения электрического поля будет равна

$$v^2 = v_1^2 + v_{II}^2. \qquad (3)$$

Кинетические энергии электрона до возбуждения и спустя время τ после возбуждения электрического поля согласно условию задачи отличаются в 2 раза:

$$\frac{W}{W_1} = 2 = \frac{mv^2/2}{mv_1{}^2/2} = \frac{v^2}{v_1{}^2},$$

откуда находим

$$v^2 = 2v_1{}^2. \qquad (4)$$

Сравнивая уравнения (3) и (4) с учётом соотношения (2), имеем:

$$v_1 = v_{II} = a\tau,$$

откуда с учётом выражения (1) находим

$$\tau = \frac{v_1}{a} = \frac{eBR}{m}\frac{m}{eE} = \frac{BR}{E}.$$

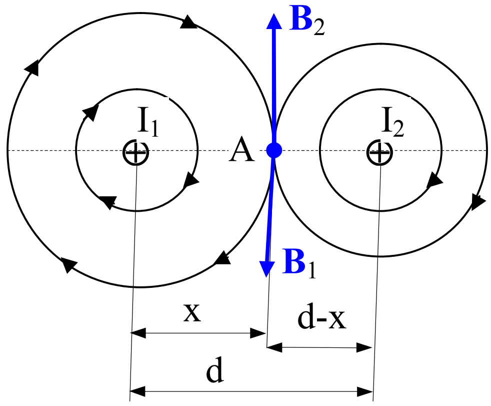
Ответ: $\tau = \dfrac{BR}{E}$.

28. По двум бесконечно длинным прямолинейным параллельным проводникам, находящимся в вакууме на расстоянии d друг от друга, текут в в одном направлении токи I_1 и I_2. Найти точку пространства, в которой результирующая магнитная индукция полей, создаваемых этими токами, равна нулю.

Дано: $\underline{I_1;\ I_2;\ d;\ \mu_0.}$

$x = ?$

Решение: Если на проводники с током смотреть в направлении токов I_1 и I_2, то картина выглядит так, как изображено на рисунке, токи текут перпендикулярно плоскости рисунка, от нас. Направление линий индукции прямого тока определяем по правилу «правого винта»: чтобы правый винт поступательно двигался в направлении протекания тока, шляпку винта необходимо вращать по часовой стрелке (линии индукции направлены в направлении вращения шляпки винта, т.е. по часовой стрелке). И линии индукции представляют собой концентрические окружности, так как значения индукции поля прямого тока одинаковы, поскольку индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током I в вакууме определяется выражением $\mu_0 \dfrac{I}{2\pi b}$, где b – расстояние от оси проводника до точки наблюдения, μ_0 – магнитная постоянная. Вектор индукции **B** в данной точке направлен по касательной к линиям индукции в этой точке. Используя принцип суперпозиции для магнитной индукции (индукция магнитного поля нескольких токов равна векторной сумме индукций отдельных токов, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$), найдём точку, где результирующая индукция равна нулю. Если $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 0$, то $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_2$, т.е. индукции полей двух токов в этой точке равны по модулю (т.е. $B_1 = B_2$) и противоположны по знаку.



Как видно из изображённых направлений линий индукций токов на рисунке, результирующая индукция может равняться нулю только на линии, соединяющей токи. Если искомую величину обозначить через x, – расстояние от первого тока, то равенство $B_1 = B_2$ приводит к соотношению

$$\mu_0 \frac{I_1}{2\pi x} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi(d - x)},$$

откуда получаем

$$\frac{I_1}{x} = \frac{I_2}{d - x}.$$

Из последнего выражения находим $x = \frac{I_1}{I_1 + I_2} d$.

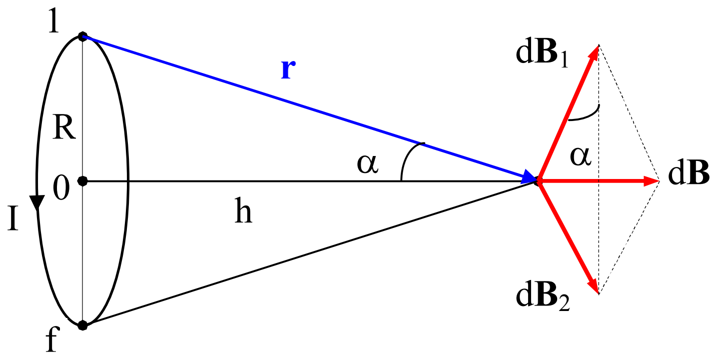
Ответ: $x = \frac{I_1}{I_1 + I_2} d$.

29. По кольцу радиуса R течёт ток I. Определите индукцию магнитного поля на его оси на расстоянии h от центра кольца.

Дано: <u>h; I; R; μ_0.</u>

B = ?

Решение: На рисунке плоскость кольца перпендикулярна плоскости рисунка, в точке 1 ток течёт на нас, т.е. элемент тока $I d\mathbf{l}_1$ направлен на нас, а в точке 2 – от нас. Элемент тока $I d\mathbf{l}_1$ от точки, находящейся на оси на расстоянии h от центра кольца, находится от этой точки на расстоянии r (угол между элементом тока $I d\mathbf{l}_1$ и радиус-вектором **r** прямой, т.е. равен $\pi/2$).



Согласно закону Био-Савара-Лапласа магнитная индукция

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot [d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1]}{4 \cdot \pi \cdot r^3},$$

создаваемая элементом тока $I d\mathbf{l}_1$, направлена перпендикулярно плоскости, в которой находятся эти два вектора (см. рисунок). А элемент тока, находящийся в точке 2, создаёт в этой же точке индукцию $d\mathbf{B}_2$. Из сказанного можем заключить, что результирующая индукция двух элементов тока, находящихся на противоположных концах диаметра кольца, будет направлена вдоль оси кольца, $d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_1 + d\mathbf{B}_2$. Отсюда следует, что для нахождения результирующей индукции **B**, направленной так же как и d**B** вдоль оси кольца, достаточно взять проекции всех элементарных индукций d$\mathbf{B}_1$ на ось, т.е. найти величину $dB_1 \cdot \sin\alpha$. Как видно из рисунка,

$$\sin\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

Согласно закону Био-Савара-Лапласа магнитная индукция

$$dB_1 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl_1 \cdot \sin(\pi/2)}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl_1}{4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

Для нахождения результирующей B_1 необходимо проинтегрировать последнее выражение по dl_1:

$$B_1 = \int dB_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \int_0^{2\pi R} dl_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} 2\pi R.$$

И искомая величина

$$B = B_1 \cdot \sin\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot 2\pi R \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot r^3} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Из выведенной формулы следует, что в частном случае при $h = 0$, т.е. в центре кругового тока, магнитная индукция равна $B = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$.

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot \left(R^2 + h^2\right)^{3/2}}$.

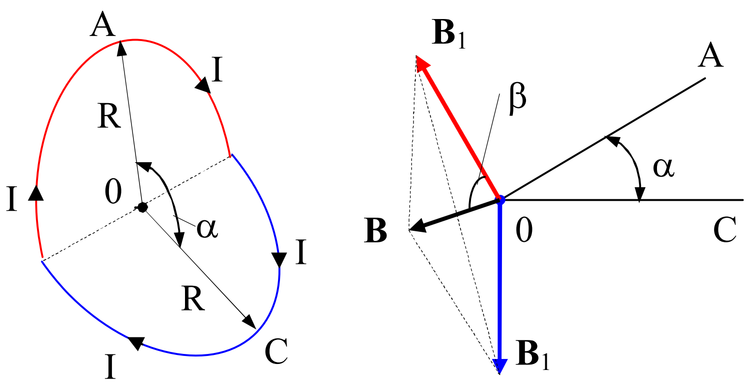
30. Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если его согнуть по диаметру под углом α? Ток в кольце не меняется.

Дано: $\underline{B_0;\ \alpha;\ I = const.}$

$B/B_0 = ?$

Решение: При решении предыдущей задачи получили, что индукция магнитного поля в центре кольца $B_0 = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$. Причём, если бы ток протекал только по полукольцу при сохранении тока I неизменным, индукция уменьшилась бы вдвое, так как суммарная величина элементов уменьшилась бы также вдвое. Итак, индукция магнитного поля полукольца с током равна $B_1 = B_0/2$.

На рисунке изобразим положение кольца с током, согнутого по диаметру, и направления индукций $\mathbf{B}_1$ полуколец, направленных нормально плоскостям полуколец. Складывая индукции полей полуколец, получаем индукцию **B** согнутого кольца. Из рисунка видно, что **B** является диагональ ромба, построенного на векторах $\mathbf{B_1}$, и что угол $\beta = \frac{1}{2}\left(360^0 - \left(90^0 + 90^0 + \alpha\right)\right) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$. Запишем известное тригонометрическое соотношение



$$\frac{B}{2} : B_1 = \cos\beta = \cos(90^0 - \frac{\alpha}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда получаем с учётом того, что $B_1 = B_0/2$

$$B = 2B_1{\cdot}\sin\frac{\alpha}{2} = 2{\cdot}\ (B_0/2){\cdot}\sin\frac{\alpha}{2} = B_0{\cdot}\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad \frac{B}{B_0} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{B}{B_0} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

7 Литература, рекомендуемая для изучения физики

1 **Трофимова, Т.И.** Курс физики / Т.И. Трофимова.–М.: Высшая школа, 2004.–544 с.

2 **Детлаф, А.А.** Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.–М.: Высшая школа, 2000.–718 с.

3 **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие для вузов в 5 кн. / И.В. Савельев.–М.: Астрель, АСТ, 2003.

Кн.1: Механика.–336 с.

Кн.2: Электричество и магнетизм.–336 с.

Кн.3: Молекулярная физика и термодинамика.–208 с.

4 **Трофимова, Т.И.** Сборник задач по курсу физики с решениями / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова.–М.: Высшая школа, 2003.–591 с.

Список использованных источников

1 **Иродов, И.Е.** Механика. Основные законы / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2003.–312 с.

2 **Иродов, И.Е.** Физика макросистем. Основные законы / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001.–208 с.

3 **Иродов, И.Е.** Электромагнетизм. Основные законы / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001.–352 с.

4 **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики: учебное пособие для вузов в 5 т. / Д.В. Сивухин.–М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ, 2003.

Т.1: Механика.–560 с.

Т.2: Термодинамика и молекулярная физика.–576 с.

Т.3: Электричество.–656 с.

5 **Стрелков, С.П.** Механика / С.П. Стрелков.–М.: Наука, 1975.–560 с.

6 **Кикоин, А.К.** Молекулярная физика / А.К. Кикоин, И.К.Кикоин.–М.: Наука, 1976.–480 с.

7 **Калашников, С.Г.** Электричество/С.Г. Калашников.–М.:Наука, 1977.–592 с.

8 **Матвеев, А. Н.** Молекулярная физика / А. Н. Матвеев.–М.: «Академия», 1981.–400 с.

9 **Алешкевич, В. А.** Механика. Университетский курс общей физики / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев.–М.: «Академия», 2004.–480 с.

Приложение А
(*справочное*)

Основные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг²
Молярный объём идеального газа при нормальных условиях	$V_{\mu} = 22{,}414\ \dfrac{\text{л}}{\text{моль}}$
Газовая постоянная	$R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)
Постоянная Фарадея	$F = 96\,500$ Кл/моль
Число Авогадро	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К$= 8{,}625 \cdot 10^{-5}$ эВ/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м $k = (4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 12{,}56 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с$= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ эВ·с $\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ $R = 1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрон-вольт	1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Нормальное атмосферное давление	760 мм рт. ст. = 101 325 Па
Первый Боровский радиус	$r_1 = 0{,}528 \cdot 10^{-10}$ м
Масса изотопа ${}_1H^1$	$m_н = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

Приложение В
(*справочное*)

Некоторые сведения из математики

1 Векторы

Скаляром называется физическая величина, характеризуемая только числовым значением. Векторы – это направленные отрезки прямых. Физические величины, которые характеризуются направлением в пространстве, могут быть представлены некими направленными отрезками, т.е. векторами. Такая их интерпретация очень наглядна и ею широко пользуются.

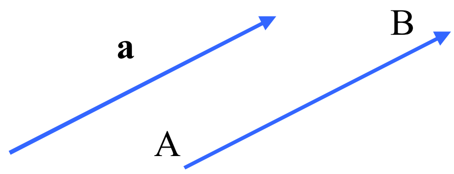


Рисунок В.1

Вектор обозначают символом $\overrightarrow{AB}$, где точки А и В обозначают начало и конец данного направленного отрезка, либо одной латинской буквой $\vec{a}$ или **a** (рисунок В.1). Начало вектора называют точкой его приложения. Для обозначения длины вектора используют символ модуля (абсолютной величины) или символ вектора без стрелки над ним. Так $|\overrightarrow{AB}| = AB$ и $|\mathbf{a}| = a$ обозначают длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и **a**. Векторы можно проектировать на любые прямые (в частности и на направленные), при этом, $a_\ell = a\cos\alpha$ (рисунок В.2а). Часто приходится проектировать векторы на оси координат x, y, z. Для вектора **a**, расположенного на плоскости x0y, проекции вектора **a** на оси 0x и 0y прямоугольной системы координат равны $a_x = a\cdot\cos\varphi$, $a_y = a\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между вектором **a** и осью 0x (см. рисунок В.2б). Для пространственно – ориентированного вектора проекции на оси координат можно выразить следующим образом (рисунок В.3): $a_x = a\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$; $a_y = a\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$; $a_z = a\cdot\cos\vartheta$. Очевидно, что тройка чисел a_x, a_y, a_z полностью определяют вектор **a**, так как по ним можно однозначно построить вектор **a**, причём $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Краткое обозначение вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) = \{a_x, a_y, a_z\}$. Если заданы координаты двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ может быть записан в виде $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

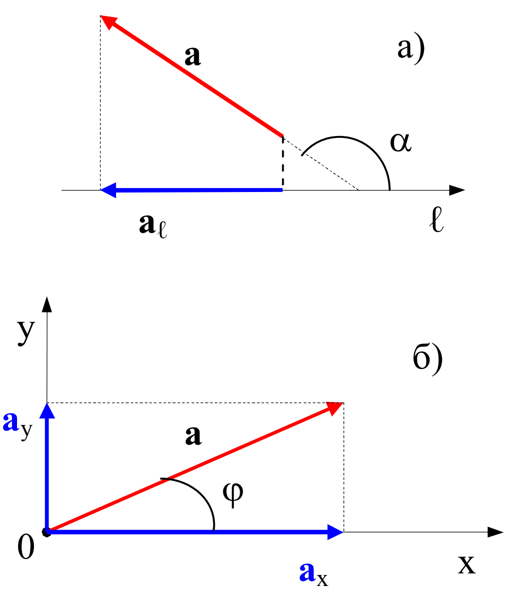


Рисунок В.2

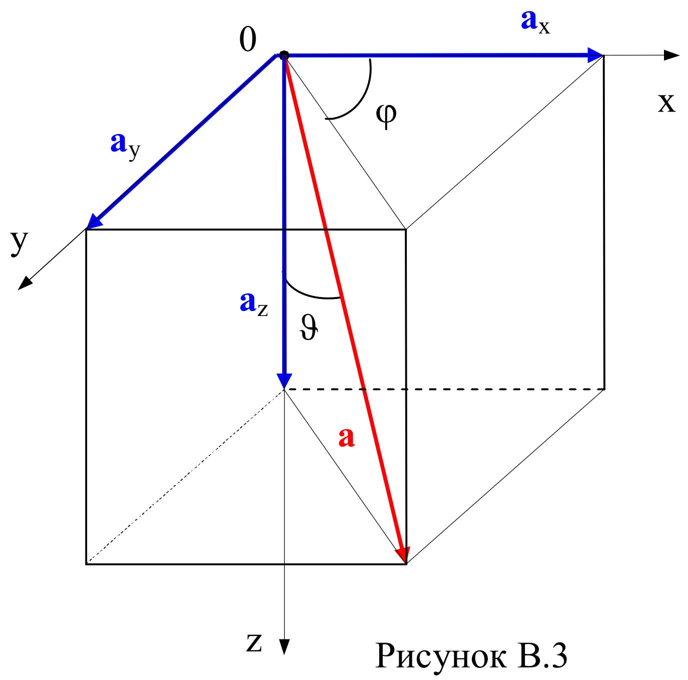


Рисунок В.3

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной, или на параллельных прямых.

Операции с векторами.

1) Умножение вектора **a** на скаляр (вещественное число) λ даёт вектор **c**, имеющий длину, равную $|\lambda|\cdot|\mathbf{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора **a** (**c** ↑↑ **a**) при $\lambda > 0$, и противоположное направление вектору **a** (**c** ↑↓ **a**) при $\lambda < 0$. Если $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$, то $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

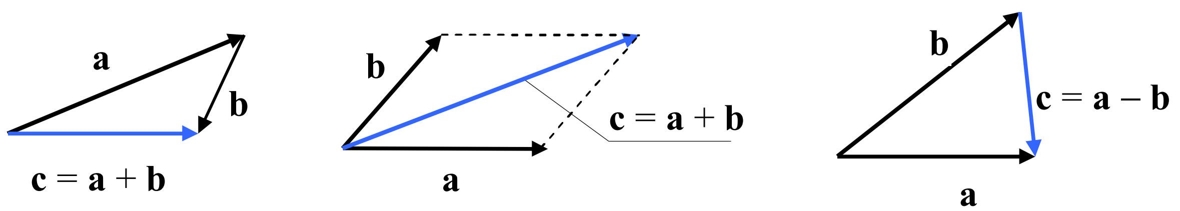


Рисунок В.4

2) Сложение, вычитание векторов. Векторы складываются по правилу треугольника или по правилу параллелограмма, вычитаются по правилу треугольника (см. рисунок В.4). Чтобы из вектора **a** вычесть вектор **b**, можно к вектору **a** прибавить вектор –**b**. Например, при сложении (вычитании) двух векторов имеем:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \mathbf{c}(c_x, c_y, c_z) = \mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) + \mathbf{b}(b_x, b_y, b_z) = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}.$$

Если число векторов больше двух, то их сумма может быть найдена по правилу замыкания ломаной до многоугольника: если приложить вектор $\mathbf{a}_2$ к концу вектора $\mathbf{a}_1$, вектор $\mathbf{a}_3$ к концу вектора $\mathbf{a}_2$,..., вектор $\mathbf{a}_n$ к концу вектора $\mathbf{a}_{n-1}$, то сумма

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n = \mathbf{c}$$

будет представлять вектор $\mathbf{c}$, идущий из начала вектора $\mathbf{a}_1$ к концу вектора $\mathbf{a}_n$ (см. рисунок В.5).

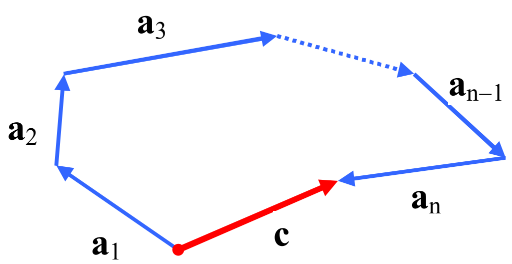


Рисунок В.5

Зная проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси 0x и 0y прямоугольной системы координат (см. рисунок В.2б), можно найти вектор $\mathbf{a}$, его модуль и угол между вектором и осью 0x:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \qquad \varphi = \mathrm{arctg}(a_y/a_x).$$

3) Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называют число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла α между ними (см. рисунок В.6):

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{b},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha = ab\cdot\cos\alpha.$$

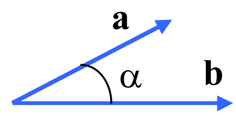


Рисунок В.6

Если два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определены своими проекциями на оси координат, т.е. $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$; $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих проекций на соответствующие оси координат:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

4) Векторным произведением векторов **a** и **b** называется вектор **c**, обозначаемый символом

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

с модулем, равным произведению длин векторов **a** и **b** на синус угла α между ними:

$$|\mathbf{c}| = c = ab\cdot\sin\alpha.$$

Вектор **c** перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы **a** и **b**, причём его направление связано с направлением векторов **a** и **b** правилом правого винта, т.е. если правый винт вращать от **a** к **b** в направлении кратчайшего поворота, то поступательное движение винта определяет направление вектора **c** (см. рисунок В.7). Поэтому $\mathbf{c} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\,[\mathbf{b},\mathbf{a}]$

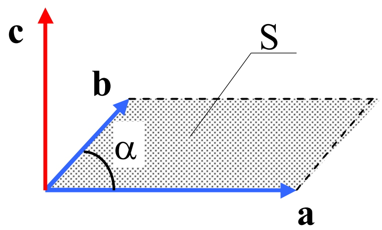


Рисунок В.7

Длина (или модуль) векторного произведения [**a**,**b**] равна площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах **a** и **b**. Если $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{c_x, c_y, c_z\}$, то составляющие (проекции) вектора **c** выражаются через составляющие (проекции) векторов $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ по правилу:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y;$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z;$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Смешанные векторные произведения записываются так:

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{b}\cdot[\mathbf{c},\mathbf{a}] = \mathbf{c}\cdot[\mathbf{a},\mathbf{b}]; \qquad [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

2 Производная

Если некоторая непрерывная функция y = f(x) определена на некотором интервале, то всякое изменение x на Δx приводит к тому, что f изменится на Δf. D этом случае выражение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется средней скоростью изменения функции на интервале значений аргументов от x до $x + \Delta x$. Данное отношение показывает, какое изменение Δf функции приходится на единичное изменение аргумента (т.е. как бы $\Delta x = 1$).

На интервале Δx функция f(x) может существенно менять свой ход (отличаться от хода линейной функции). Это значит, что на этом интервале скорость изменения функции будет меняться от места к месту. Но совершенно ясно, что всегда можно выбрать интервал Δx столь малым, что на нём ход функции f(x) практически будет неотличим от хода линейной функции. Такие интервалы значений аргументов будем называть элементарными (или малыми) и обозначать dx. Соответствующие изменения функции обозначают df и называют элементарными (или малыми). Такого рода малые величины dx, df. … называют ещё дифференциалами от величин x, f и т.д.

Величина $f' = \dfrac{df}{dx}$ называется первой производной функции y = f(x) по аргументу x, а ее смысл – ″мгновенная″ скорость изменения функции, т.е. по существу всё та же средняя скорость ее изменения, но на столь малом интервале dx, на котором f(x) не отличается существенно от хода линейной функции. Из сказанного ясно, что данную производную можно определить как предел отношения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'.$$

В приведённом примере для производной кроме y' можно использовать и другие обозначения:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'_x = f'_x.$$

Физический смысл производной. Производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

характеризует быстроту (скорость) изменения функции f(x) при изменении аргумента x. В частности, если y = f(x) представляет зависимость пути y от времени x, то в этом случае производная y' определяет мгновенную скорость в момент времени x. Если же, скажем, y = f(x) определяет величину заряда y, протекающего через поперечное сечение проводника в зависимости от времени x, то в этом случае производная $y' = f'(x)$ определяет силу тока в момент времени x.

Геометрический (графический) смысл производной. Из рисунка В.8 видно, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Отношение

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

называют угловым коэффициентом (см. рисунок В.9). Таким образом, по геометрическому смыслу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\frac{df}{dx}$ суть тангенсы угла наклона секущей и ″касательной″ к графику f(x) соответственно. Таким образом, производная от f(x) по x геометрически характеризует крутизну графика f(x) в каждой точке x, которая нас заинтересует. Ясно, что из $f' = \dfrac{df}{dx}$ следует $df = f'dx$.

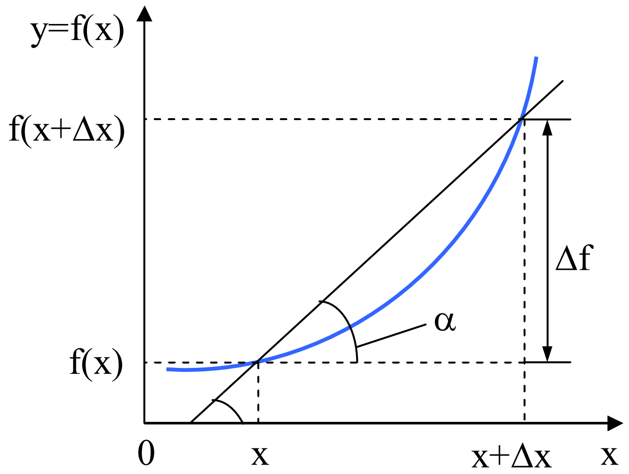


Рисунок В.8

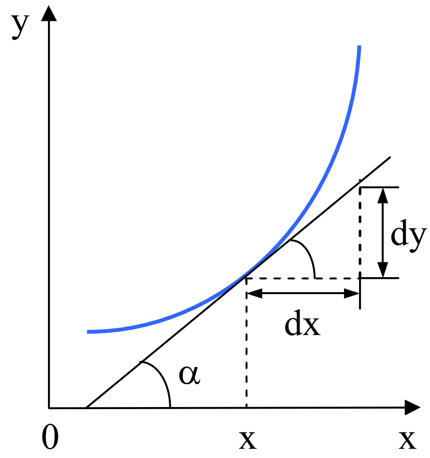


Рисунок В.9

Для сложной функции $f(x) = f\big(z(x)\big)$ производная по аргументу x равна

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Так, например, для f(x) = sinz, при z = kx, f(x) = sinkx, и

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}(\sin z)\cdot\frac{d}{dx}(kx) = \cos z\cdot k = \cos kx\cdot k = k\cdot\cos kx.$$

Производную от первой производной называют второй производной и обозначают

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = y''_{xx} = f''_{xx}.$$

В частности, если y = f(x) представляет зависимость пути y от времени x, то в этом случае вторая производная $y'' = f''(x)$ представляет собой ускорение точки в момент времени x.

Производные некоторых функций (C, A, k = const)

$C' = 0$ $\left(Ce^{x}\right)' = Ce^{x}$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = 1/\cos^2 x$	$\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$ $\left(Cx^{n}\right)' = Cnx^{n-1}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(ctgx)' = -1/\sin^2 x$	$(A\sin kx)' = Ak\cos kx$ $(A\cos kx)' = -Ak\sin kx$ $\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-(n+1)}$ $(a^{Cx})' = C\cdot a^{Cx}\cdot \ln a$ $y'_x = [f(z(x))]'_x = f'_z \cdot z'_x$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$ $(U\cdot V)' = U'V + UV'$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Пусть имеется некоторая функция f(x, y, z, t), где x, y, z, t – независимые переменные. Если менять какую-либо одну из переменных x, y, z или t при зафиксированных остальных переменных, то величины

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x.y, z, t)}{\Delta x}, \ldots, \frac{f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x.y, z, t)}{\Delta t} \qquad (*)$$

показывают, какова средняя скорость изменения f(x, y, z, t) на интервалах Δx, Δy, Δz, Δt, соответственно, т.е. показывают, насколько изменится f(x, y, z, t) при единичном изменении только одного из переменных x, y, z, t при зафиксированных остальных переменных. Если интервалы Δx, Δy, Δz, Δt столь малы, что на них ход функции f(x, y, z, t) не отличается существенно от хода линейной функции, то написанные соотношения (∗) называются частными производными от f(x, y, z, t) по x, y, z, t, соответственно:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x.y, z, t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \ldots$$

Они обозначаются символами $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$. Смысл частных производных тот же, что и у отношений (∗), т.е. они характеризуют быстроту изменения функции при изменении какого-либо одного из аргументов при постоянных значениях остальных аргументов. Для частных производных справедливы все свойства обычных производных. Конечно, вместо переменных x, y, z, t можно взять и другой набор переменных и в любом их количестве.

Если x, y, z являются функциями от t, то при изменении t от t до t + dt другие переменные x, y, z получат вполне определённые приращения dx, dy, dz. Величина

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \qquad (**)$$

называется полной производной от f по ее основному аргументу t и показывает, как быстро меняется f(x, y, z, t) с изменением ее основного аргумента t (при изменении которого меняются и остальные аргументы x, y, z). Возможен такой случай, когда какая-либо из переменных x, y, z или даже все они вместе не меняются при изменении t. Тогда соответствующие величины $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ или $\frac{\partial f}{\partial z}$ будут равны нулю, и равенство (**) становится «короче». При $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0$ оно принимает вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Возможен и такой случай, когда f не зависит от какой-либо из переменных x, y, z, t. Тогда соответствующая частная производная будет равна нулю и (**) опять «укоротится».

Отметим, что $\frac{\partial f}{\partial t}$ характеризует быстроту изменения f при x = const, y = const, z = const, т.е. при зафиксированной точке. Величина же $\frac{df}{dt}$ характеризует быстроту изменения f с учётом изменения x, y, z, т.е. действительно полную быстроту, в отличие от $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и т.д., где часть переменных зафиксирована, т.е. не меняется.

Отметим ещё один момент. Если имеется некоторая функция f(x, y, z, t), то величина

$$df = \frac{df}{dt}\cdot dt = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}dt =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz$$

называется полным дифференциалом от функции f. Слагаемые в правой части уравнения называются частными дифференциалами от f.

То, что сказано про производную и дифференциал скалярной функции f(x), вполне применимо и к векторной функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi)$, где φ – некоторый скаляр (см. п.1, п.2, п.3 данного пособия, например, **u** – радиус-вектор, φ – время). Это следует из того, что вместо функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi)$ мы можем всегда рассматривать $u_x(\varphi)$, $u_y(\varphi)$, $u_z(\varphi)$, а тогда при зафиксированных ортах **i**, **j**, **k** имеем:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(u_x\cdot\mathbf{i} + u_y\cdot\mathbf{j} + u_z\cdot\mathbf{k}).$$

3 Интеграл

Интегрированием называют математическую операцию, ″обратную″ дифференцированию (взятию производной). При интегрировании находят первообразную функцию – такую функцию, производная которой равна данной функции. Функция F(x) называется первообразной функцией для данной функции f(x), если функция F(x) дифференцируема и $F'(x) = f(x)$. Данная функция f(x) может иметь различные первообразные функции, отличающиеся друг от друга на постоянные слагаемые.

Поэтому совокупность всех первообразных функций для данной функции f(x) содержится в выражении F(x) + C, которое называют неопределённым интегралом от этой функции f(x) и обозначается символом:

$$\int f(x)dx,$$

где $\int$ – называется знаком интеграла;

f(x) – подынтегральной функцией;

f(x)dx – подынтегральным выражением.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C = const.

Неопределённые интегралы некоторых функций (A, C, k, a = const)

$\int 0 \cdot dx = C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int a dx = ax + C$	$\int AU(x)dx = A\int U(x)dx + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$,	$\int (U+V)dx = \int U dx + \int V dx$	$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$
где $n \neq -1$	$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$	$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$

Пусть в интервале (а, в) изменения аргумента x определена непрерывная функция f(x). Разобьём интервал (а, в) на элементарные отрезки Δx_1, Δx_2, ... Δx_n. Составим сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

где каждое слагаемое $f(x_i)\cdot\Delta x_i$ представляет собой площадь прямоугольника со сторонами $f(x_i)$ и Δx_i (см. рисунок В.10).

Выражение

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^в f(x)dx$$

называется определённым интегралом от этой функции f(x).

Геометрический смысл определённого интеграла (рисунок В.11)**:** $\int_a^в f(x)dx$ – определённый интеграл равен площади S криволинейной трапеции (площади фигуры под графиком функции f(x) при изменении аргумента x в интервале (a, в)).

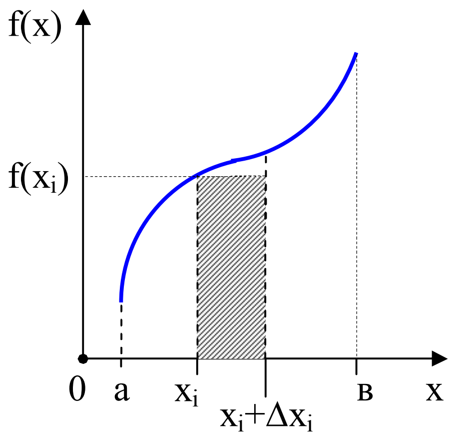


Рисунок В.10

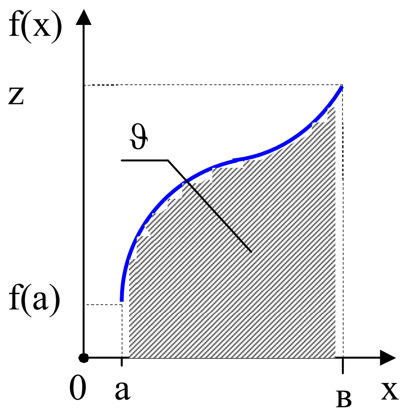


Рисунок В.11

Нужно отметить, что

$$\int_a^в f(x)dx = F(в) - F(a),$$

т.е. значение определённого интеграла от подынтегральной функции f(x) равно разности значений первообразной функции F(x) при значениях x = в и x = a, соответственно.

Например,

$$\int_{a}^{в} \cos x dx = \sin x\Big|_{a}^{в} = \sin в - \sin a.$$

Для определённых интегралов справедливы правила интегрирования, аналогичные соответствующим правилам для неопределённых интегралов.

Можно говорить и об интеграле от функции многих переменных, т.е. от функции f(x, y, z, t). При этом в интересующих нас случаях это интегралы типа

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left[f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz\right].$$

Можно показать, что если величина

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

есть полный дифференциал от некоторой функции F(x, y, z), т.е. если

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dF,$$

то значение интеграла

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dF$$

может быть выражено как разность функции F(x, y, z) на границах интегрирования, т.е.

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{f}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}dF = F(\mathbf{r}_2) - F(\mathbf{r}_1).$$

Принято говорить, что в данном случае результат интегрирования не зависит от пути интегрирования между точками 1 и 2.

Если же f такова, что

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \neq dF,$$

то результат интегрирования зависит от пути интегрирования. Это обычно (но не всегда!) означает, что f есть функция не только от x, y, z, но и от каких-то других переменных (например, от v_x, v_y, v_z, t и т.д).

Именно поэтому элементарная работа $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}$ не является полным дифференциалом, т.е. $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r} \neq dA$. Это значит, величина работы зависит от формы траектории (от «формы пути»). Исключение составляет случай, когда $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ или, что то же самое $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, а тогда $\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = d\Phi$ и тогда

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}d\Phi = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1).$$

Вместо функции $\Phi(\mathbf{r})$ удобно использовать функцию $U(\mathbf{r}) = -\Phi(\mathbf{r})$, где $U(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия.

К вычислению определённых интегралов сводятся задачи об измерении площадей, объёмов тел, длин дуг кривых, задачи определения координат центров тяжести, моментов инерции, пути тела по известной скорости движения, работы производимой силой и т.п.

Приложение Г
(*справочное*)

Основные формулы по физике

$v=\frac{S}{t}$ при равномерном движении скорость v равна отношению пути S ко времени t.

$v_{ср.}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$ $v_{ср.}$ – средняя скорость равна отношению пути ΔS к промежутку времени Δt, в течение которого этот путь был пройден.

$\mathbf{v}_{ср}=\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ $\mathbf{v}_{ср}$ – вектор средней скорости перемещения за время Δt, $\Delta\mathbf{r}$ – вектор перемещения.

$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}'_t$ **v** – вектор мгновенной скорости равен производной от перемещения по времени.

$v=\frac{dS}{dt}=S'_t$ v – модуль мгновенной скорости равен производной от пути по времени.

$\boldsymbol{a}_{ср}=\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ $\boldsymbol{a}_{ср}$ – вектор среднего ускорения равен отношению изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt, за которое это изменение произошло.

$\boldsymbol{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{v}'_t$ мгновенное ускорение равно производной от скорости по времени

$a_\tau=\frac{dv}{dt}=v'_t$ тангенциальное (касательное) ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории в данной точке.

$a_n=\frac{v^2}{R}$ нормальное (центростремительное) ускорение a_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории. R – радиус кривизны траектории, v – скорость. (при равномерном вращении по окружности a_n – центростремительное ускорение, R – радиус окружности).

$R = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}$ R – радиус кривизны в данной точке кривой, $\Delta\varphi$ – угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на элементе участка траектории ΔS.

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$ **a** – полное ускорение при криволинейном движении;

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ a_n, a_τ – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\mathrm{tg}\alpha = a_n/a_\tau$ α - угол между векторами полного ускорения и скорости.

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$ кинематическое уравнение равномерного движения со скоростью v_0 вдоль оси x, x_0 - начальная координата, t - время.

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$ кинематическое уравнение равнопеременного движения (a=const) вдоль оси x, v_0 - начальная скорость. Значения v_0 и a – положительны, если векторы $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{a}$ направлены в сторону положительной полуоси x, и отрицательны в противном случае.

$S = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$

$v = v_0 + a \cdot t$

S – путь и v – мгновенная скорость при равнопеременном движении, v_0 – начальная скорость, a – ускорение, t – время.

$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ кинематическое уравнение, связывающее путь S, пройденный телом за некоторое время, с начальной – v_0 и конечной – v скоростями на этом отрезке пути, с ускорением a.

$H = \frac{gt^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$;

$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}$;

$v = gt = \sqrt{2gH}$

свободное падение ($v_0 = 0$) тела с высоты H: t – время падения; g – ускорение свободного падения; v – скорость тела в момент достижения поверхности (Земли), h(t) – высота в момент времени t.

$y(t) = H - \frac{gt^2}{2}$; $x(t) = v_0 \cdot t$; $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$; $L = v_0 t_0$; $v_x = v_0$; $v_y = gt$; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	движение тела, брошенного горизонтально со скоростью v_0 с высоты H: $x_0 = 0$ и $y_0 = H$ – начальное положение тела (в момент броска); $x(t)$ и $y(t)$ – уравнения движения по осям; t_0 – время полета; L – дальность полета; v_x и v_y – составляющие скорости **v** тела по осям координат для любого момента времени t во время полета (до удара о поверхность).
$v_{ox} = v_0 \cdot \cos\alpha$; $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$; $x(t)=v_{ox} \cdot t$; $y(t)=v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$; $v_x(t)=v_{ox}$; $v_y(t) = v_{oy} - gt$; $H= \frac{{v_{0y}}^2}{2g}$; $t_0 = \frac{2v_{0y}}{g}$; $L = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$	движение тела, брошенного со скоростью v_0 под углом α к горизонту: $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ – начальное положение тела (в момент броска); v_{ox} и v_{oy} – проекции скорости $\mathbf{v}_0$ по осям; $x(t)$ и $y(t)$ – уравнения движения по осям; $v_x(t)$ и $v_y(t)$ – зависимость составляющих скорости по осям от времени t; H – высота подъема, t_0 – время полета; L – дальность полета.
$\nu=\frac{N}{t}$; $T=\frac{t}{N}$; $\nu=T^{-1}$; $T=\nu^{-1}$	при равномерном вращательном движении: ν – частота вращения, T – период вращения, N – число оборотов за время t.
$\omega=\frac{\varphi}{t}$; $N=\frac{\varphi}{2\pi}$; $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$	ω – угловая скорость при равномерном вращении: φ – угол поворота, N – число оборотов за время t; ν – частота вращения, T – период вращения.
$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_t'$	ω – угловая скорость равна производной угла поворота по времени.
$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega_t'$	ε – угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени.

$S=R\cdot\varphi$ — S – путь, пройденный материальной точкой при повороте на угол φ по дуге окружности радиуса R.

$v=\omega\cdot R=\dfrac{2\pi R}{T}=2\pi R\nu$ — связь между линейной и угловой скоростями при равномерном вращательном движении

$a_t=\varepsilon\cdot R;$

$a_n=\omega^2\cdot R=\dfrac{v^2}{R}=v\cdot\omega$ — a_n и a_t – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0\cdot t$ — кинематическое уравнение равномерного вращения, φ_0 – начальное угловое положение.

$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0\cdot t+\dfrac{\varepsilon\cdot t^2}{2}$ — кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε=const), ω_0 – начальная угловая скорость.

$\omega(t)=\omega_0+\varepsilon\cdot t$

$\varepsilon=\dfrac{\omega-\omega_0}{t}$ — ω – мгновенная угловая скорость при равнопеременном вращении в момент времени t, ω_0 – начальная угловая скорость, ε – угловое ускорение.

$\varphi=\dfrac{\omega^2-\omega_0{}^2}{2\varepsilon}$ — кинематическое уравнение, связывающее угол поворота φ с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями и с угловым ускорением ε.

$\rho=\dfrac{m}{V}$ — ρ – плотность тела, m – масса, V – объем тела.

$\mathbf{p}=m\cdot\mathbf{v}$ — **p** – импульс тела – векторная величина, равная произведению массы m тела на его скорость **v**.

$\mathbf{F}=m\boldsymbol{a}=m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt};\ \mathbf{F}=\dfrac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{p}'_t$ — второй закон Ньютона: m – масса тела, **F** – равнодействующая всех приложенных к телу сил, ***a*** – ускорение, **p** – импульс тела.

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$. принцип суперпозиции для силы – если на рассматриваемое тело действует несколько сил, то его движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил.

$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и противоположно направлены.

$F_{упр} = -k\Delta l$; $\sigma = \varepsilon \cdot E$; $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$; $\sigma = \dfrac{F}{S}$; $\Delta l = l - l_0$

закон Гука: сила упругости $F_{упр}$ пропорциональна удлинению тела (пружины) Δl и направлена в сторону, противоположную направлению перемещений частиц тела при деформации; k – коэффициент пропорциональности (жесткость пружины); σ – механическое напряжение; S – площадь поперечного сечения образца, к которому приложена сила F; E – модуль Юнга (упругости); ε – относительное удлинение; l_0 – начальная длина.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

закон всемирного тяготения: два тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между их центрами масс; G – гравитационная постоянная. В такой форме записи закон справедлив для взаимодействия материальных точек и однородных тел сферической формы.

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$
$$g(h) = g\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

g(h) – ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью планеты, M и R – масса и радиус планеты; g – ускорение свободного падения у поверхности планеты (без учета вращения планеты), т.е. $g = G\dfrac{M}{R^2}$.

$F_{тр.} = \mu \cdot N$ сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя $F_{тр.}$, пропорциональной силе нормального давления N (реакции опоры); μ – коэффициент трения.

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ P – сила тяжести, m – масса тела, g – ускорение свободного падения.

$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{gR}$ v_1 – первая космическая скорость: M и R – масса и радиус планеты, G – гравитационная постоянная, g – ускорение свободного падения на поверхности планеты.

$v = v_1\sqrt{\frac{R}{r}}$ местная первая космическая скорость движения по окружности радиусом r. Так как $r > R$, то $v < v_1$.

$T = 2\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}\left(\frac{R}{g}\right)^{1/2}$ период обращения спутника по орбите радиусом r; R – радиус планеты; $r > R$.

$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$ или $\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}$ частная форма третьего закона Кеплера – отношение квадратов периодов вращения двух спутников равно кубу отношения радиусов круговых орбит.

$E=\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{mgR^2}{2r}$. полная энергия E спутника на круговой орбите радиусом r равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$v_2 = v_1\sqrt{2} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$. v_2 – вторая космическая (или параболическая) скорость, v_1 – первая космическая скорость.

$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{u}\frac{dm}{dt}$ уравнение Мещерского (уравнение движения тела с переменной массой). **F** – геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету, **u** – скорость истечения газов относительно ракеты, dm/dt – масса сгоревшего топлива, которое выбрасывается из ракеты за единицу времени.

$v = v_0 - u\cdot\ln\frac{m}{m_0}$ формула Циолковского. m_0 – начальная масса ракеты, m – масса в конце ускорения, скорость газовой струи **u**. Скорость ракеты в начале и в конце ускорения – v_0 и v, соответственно.

$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\alpha$ — ΔA – элементарная работа равна скалярному произведению силы **F** на перемещение $\Delta\mathbf{r}$, α – угол между **F** и $\Delta\mathbf{r}$.

$P_{ср.} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$ — мощность равна работе, совершаемой в единицу времени: $P_{ср}$ - средняя мощность за время Δt.

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F\cdot v\cdot\cos\alpha$ — мгновенная мощность P равна скалярному произведению силы **F** на скорость **v**, с которой движется точка приложения силы, α – угол между **F** и **v**.

$E_К = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ — $E_К$ - кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v, p - импульс тела.

$A = E_{К2} - E_{К1}$ — работа равнодействующей силы равна изменению кинетической энергии тела (при условии постоянства потенциальной энергии).

$A = -\Delta E_П$ — работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии (при условии постоянства кинетической энергии).

$E_П = m\,g\cdot h$ — потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения: h - высота над поверхностью Земли (высота от нулевого уровня), g - ускорение свободного падения, m - масса тела.

$E_П = \frac{k\cdot(\Delta l)^2}{2}$ — потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины).

$E_П = -G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{R}$ — потенциальная энергия взаимодействия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии R друг от друга; G – гравитационная постоянная.

$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathrm{const}$ закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным (по величине и направлению) при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}\cdot\Delta t$; $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}\cdot\Delta t$ изменение импульса тела $\Delta\mathbf{p}$ за время Δt равно импульсу равнодействующей силы $\mathbf{F}\cdot\Delta t$.

$E=E_К + E_П$ полная механическая энергия материальной точки (тела) равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$E=E_К + E_П=\mathrm{const}$ закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел остается постоянной при любых движениях тел системы, если в системе не действуют диссипативные силы.

$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$;
$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$ законы сохранения импульса и энергии при центральном абсолютно упругом ударе двух тел (шаров).

$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u}$ закон сохранения импульса при центральном абсолютно неупругом ударе двух тел.

$\Delta E_К=Q=(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2$ изменение кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе (часть ее переходит в «тепловую» форму энергии).

$\eta=\frac{A_{пол}}{A_{затр}} = \frac{P_{пол}}{P_{затр}}$;
$\eta=\frac{A_{пол}}{A_{затр}}\cdot 100\,\% = \frac{P_{пол}}{P_{затр}}\cdot 100\%$ коэффициент полезного действия механизмов равен отношению полезной работы $A_{пол}$ (полезной мощности $P_{пол}$) к затраченной $A_{затр}$ (затраченной – $P_{затр}$).

$\frac{dE_п}{dx} = (E_п)_x{}' = 0$ условие равновесия - экстремальное значение потенциальной энергии (для случая одномерной задачи, когда $E_п$ зависит только от координаты x, т.е. когда $E_п = E_п(x)$).

$\frac{d^2E_п}{dx^2} = (E_п)_{xx}{}'' > 0$ условие устойчивого равновесия

$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$ момент силы **M** относительно неподвижной точки – физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора **r**, проведенного из этой точки в точку приложения силы, на эту силу **F**.

$M = r\cdot F\cdot \sin\alpha = F\cdot d$ M – модуль момента силы, α – угол между **r** и **F**, $d=R\cdot \sin\alpha$ – плечо силы равно кратчайшему расстоянию от оси вращения до линии действия силы.

$\sum\mathbf{F}_i = 0$ (первое) условие равновесия тела при отсутствии вращения: векторная сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.

$\sum\mathbf{M}_i = 0$ (второе) условие равновесия твердого тела с неподвижной осью вращения: алгебраическая сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю, причем моменты сил, вращающих в одну сторону, считают положительными, а в другую - отрицательными.

$\sum[\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{g}] = 0$ центр тяжести тела: сумма моментов сил тяжести всех частиц тела по отношению к оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю.

$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i g \mathbf{r}_i}{\sum m_i g}$; $x_c = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g}$; $y_c = \frac{\sum m_i g y_i}{\sum m_i g}$; центр тяжести тела: $\mathbf{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ – радиус-вектор, проведенный из начала координат в центр тяжести тела; x_c, y_c, z_c – координаты центра тяжести; x_i, y_i, z_i – координаты частиц тела, причем $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$; суммирование производится по всем частицам тела.

$$z_c=\frac{\sum m_i g z_i}{\sum m_i g}$$

$$\mathbf{r}_{цм}=\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i};$$

$\mathbf{r}_{цм}(x_{цм}, y_{цм}, z_{цм})$ - радиус-вектор центра масс системы материальных точек; m_i и $\mathbf{r}_i$ - масса и радиус-вектор i-ой материальной точки (если твердое тело, то суммирование производится по всем частицам тела).

$\mathbf{r}_c=\mathbf{r}_{цм}$ координаты центра масс и центра тяжести тела совпадают в случае, если размерами тела можно пренебречь в сравнении с размерами Земли (планеты).

$$m\frac{d\mathbf{v}_{цм}}{dt}=\mathbf{F}_{внеш}$$

теорема о движении центра масс: центр масс любой системы частиц, в том числе твердого тела, движется так, как двигалась бы материальная точка с массой равной массе системы, под действием всех приложенных к системе внешних сил.

$M = F{\cdot}d$ момент пары сил: d – плечо пары сил ($F_1=F_2=F$) – кратчайшее расстояние между линиями действия сил.

$$\frac{F}{mg}=\frac{l_1}{l_2}$$

правило рычага: во сколько раз плечо l_2 силы F больше плеча l_1 груза весом mg, тем меньше усилие F требуется, чтобы сдвинуть груз.

$\mathbf{L}=[\mathbf{r},\mathbf{p}]=[\mathbf{r},m\mathbf{v}]$

$L=r{\cdot}p{\cdot}\sin\alpha=p{\cdot}d$

L–момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки 0: **r** – радиус-вектор от точки 0 до материальной точки; **p**=m**v** – импульс материальной точки; α – угол между **r** и **p**; d – плечо вектора **p** относительно неподвижной точки 0.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}_{внеш}$$

производная по времени от момента импульса системы частиц (материальных точек) относительно произвольной точки выбранной системы отсчета равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно той же точки (полюса).

$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i =$ $= \text{const}$, если $\mathbf{M}_{\text{внеш}} = 0$ — закон сохранения момента импульса: если момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, то момент импульса системы относительно той же точки остается постоянным во времени.

$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ — момент инерции J системы (тела) относительно оси вращения равен сумме произведений масс материальных точек (частиц) системы (тела) на квадраты их расстояний до оси вращения.

$J = mR^2$; $J = \frac{1}{2}mR^2$. — моменты инерции полого тонкостенного цилиндра и сплошного цилиндра (или диска) радиуса R относительно оси симметрии.

$J = \frac{1}{4}mR^2$ — момент инерции бесконечно тонкого диска радиуса R относительно оси, проходящей через диаметр.

$J = \frac{1}{4}\ m(a^2+b^2)$ — момент инерции однородного эллипса с полуосями a и b относительно оси, перпендикулярной к плоскости эллипса.

$J = \frac{2}{5}mR^2$ — момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара.

$J = \frac{1}{12}mL^2$ — момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

$J = \frac{1}{3}mL^2$ — момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.

$J = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$ — момент инерции тонкой прямоугольной пластинки со сторонами a и b относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через его середину.

$J = \frac{2}{3}mR^2$ — момент инерции полого шара с тонкими стенками относительно оси, проходящей через центр шара.

$J = J_0 + ma^2$ — теорема Штейнера: момент инерции J относительно произвольной оси равен моменту инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы m тела на квадрат расстояния a между осями.

$T = T_{пост} + T_{вр} = \frac{1}{2}mv_{цм}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движения.

$\omega_{пр} = \frac{M}{L \cdot \sin\alpha} = \frac{mg\ell}{J\omega}$ $\omega_{пр}$ – угловая скорость прецессии волчка вокруг вертикальной оси, ℓ – расстояние от центра масс волчка до точки опоры, ω – угловая скорость вращения волчка, m и J – масса и момент инерции волчка.

$\frac{d}{dt}(J\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_{внеш}$ основное уравнение динамики вращательного движения, $\mathbf{M}_{внеш}$ – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения.

$J\varepsilon = M_{внеш}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}$ при вращении симметричного твердого тела вокруг неподвижной оси симметрии момент инерции J = const, **ε –** угловое ускорение.

$\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2\mathbf{R}$ центробежная сила инерции, вектор **R** направлен от оси вращения до места расположения тела.

$\mathbf{F}_K = 2m[\mathbf{v}',\boldsymbol{\omega}]$. сила Кориолиса или кориолисова сила инерции: $\mathbf{v}'$ – скорость частицы относительно вращающейся системы отсчета, ω – угловая скорость вращающейся системы.

$P = \frac{F}{S}$ давление равно отношению силы, перпендикулярной к поверхности тела, к величине площади поверхности S, на которую действует эта сила.

$P = \rho \cdot g \cdot h$ P – гидростатическое давление: ρ – плотность жидкости, h – высота столба жидкости, g – ускорение свободного падения.

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$ гидравлический пресс дает выигрыш в силе во столько раз, во сколько раз площадь ее большого поршня превосходит площадь маленького поршня, S_1 и S_2 – площади поперечного сечения поршней, l_1 и l_2 – перемещения поршней, F_1 и F_2 – силы, приложенные к поршням.

$F_A = \rho g V_п$ закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости или газа: ρ – плотность жидкости (газа), $V_п$ – объем погруженной в жидкость (газ) части тела, g – ускорение свободного падения.

$\rho v S = const$ закон постоянства потока массы: ρ – плотность жидкости.

$S \cdot v = const$ уравнение неразрывности (непрерывности) для несжимаемой (ρ = const) жидкости: произведение скорости течения v на поперечное сечение S трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

$V = S \cdot v \cdot t$ объем жидкости (газа) V, проходящий через сечение S струи (трубы) за время t.

$V = \frac{1}{\eta}\frac{\pi R^4}{8\ell}\Delta P t$ формула Пуазейля: V – объём жидкости, протекающей через трубу длиной ℓ и радиусом R при ламинарном движении за время t.

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ в сообщающихся сосудах высота столбиков жидкостей над уровнем раздела обратно пропорциональна плотностям жидкостей.

$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = const$ уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости: P – статическое давление, $\frac{1}{2}\rho v^2$ – динамическое давление, $\rho g h$ – гидростатическое давление, v – скорость течения жидкости в данном сечении.

$v=\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ формула Торричелли: v – скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде, h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости.

$F = \eta \cdot S \cdot \left|\frac{dv}{dz}\right|$ F – модуль силы внутреннего трения между двумя слоями площадью S, движущимися с различными скоростями: η – динамическая вязкость, $\left|\frac{dv}{dz}\right|$ – модуль градиента скорости течения газа (жидкости) в направлении, перпендикулярном к площадке S.

$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$ Re – числом Рейнольдса: η – коэффициент вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости, l – характерный для поперечного сечения размер, например, диаметр трубы.

$\nu = \eta/\rho$ ν – кинематическая вязкость.

$F = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v.$ формула Стокса: v – скорость шарика радиуса R в вязкой жидкости.

$\nu=\frac{m}{\mu}=\frac{N}{N_A}$ ν – количество вещества: μ – молярная масса, N_A – число Авогадро, N – число молекул в веществе (газе) массой m.

$m_0=\frac{m}{N}=\frac{\mu}{N_A}$ m_0 – масса одной молекулы.

$T=t+273$ T – температура по абсолютной шкале температур (шкале Кельвина), t – температура по шкале Цельсия.

$t=\frac{5}{9}\left(T_F-32\right)$ t – температура по шкале Цельсия, T_F – температура по шкале Фаренгейта.

$P \cdot V=const$ закон Бойля-Мариотта: для данной массы газа (m=const) при неизменности состава газа (молярная масса μ=const) при постоянной температуре (T=const) произведение давления газа P на его объем V есть величина постоянная.

$\chi=\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_T=-\frac{1}{P}$ χ – изотермический коэффициент сжимаемости определяется как относительное изменение объёма, вызывающее изменение давления на единицу.

$V=V_0\cdot(1+\alpha t)$

$V=V_0\cdot\alpha\cdot T$

$\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_2}$

закон Гей-Люссака: объем данной массы газа (m=const) при неизменности состава газа (молярная масса μ=const) при постоянном давлении (P=const) изменяется линейно с температурой, $\alpha=273^{-1}$ K^{-1} – термический коэффициент расширения, V_0 – объем при 0 ^{0}C.

$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_P=\frac{1}{T}$ α – коэффициент объёмного расширения газа при постоянном давлении.

$P=P_0\cdot(1+\beta t)$

$P=P_0\cdot\beta\cdot T$

$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$

закон Шарля: давление данной массы газа (m=const) при неизменности состава газа (молярная масса μ=const) при постоянном объеме (V=const) изменяется линейно с температурой, $\beta=273^{-1}$ K^{-1} – термический коэффициент давления, P_0 – давление при 0 ^{0}C.

$V_\mu=\frac{V}{\nu}=22{,}4\ \frac{\text{л}}{\text{моль}}$

закон Авогадро: моли любых идеальных газов при одинаковых условиях (одинаковых температуре и давлении) занимают одинаковые объемы, в частности, при нормальных условиях, – 22,4 л.

P=760 мм рт. ст. значения давления и температуры при нормальных условиях.

T = 0 ^{0}C

$P=\Sigma P_i$ закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений ее компонентов; P_i – парциальное давление i-ой компоненты равно давлению, которое создавала бы i-ая компонента смеси газов, если бы она одна занимала объем, равный объему смеси при той же температуре.

$\frac{P \cdot V}{T}$=const уравнение Клапейрона справедливо при неизменности состава и массы газа: P – давление, V – объем, T – абсолютная температура.

$P \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T$ уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа): m – масса газа, R – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса газа.

$R = k \cdot N_A$ R – универсальная газовая постоянная, k – постоянная Больцмана, N_A – число Авогадро.

$n = \frac{N}{V}$; $\rho = \frac{m}{V}$; n – концентрация молекул – число молекул в единице объема. ρ – плотность газа, m_0 – масса одной молекулы

$\rho = m_0 \cdot n$

$P = n \cdot k \cdot T$ зависимость давления P от концентрации молекул n и абсолютной температуры T; k – постоянная Больцмана.

$P = \frac{2}{3} n \cdot E_0$;

$E_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2$

основное уравнение кинетической теории идеальных газов: давление P идеального газа равно $\frac{2}{3}$ среднеквадратической кинетической энергии молекул, содержащихся в единице объема, m_0 – масса одной молекулы, n – концентрация молекул.

$E_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{3}{2} kT$ E_0 – среднеквадратическая кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа, m_0 – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, v – среднеквадратическая скорость.

$F(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ закон Максвелла распределения молекул по скоростям.

$$\bar{\bar{v}} = v_{кв} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}}$$

$\bar{\bar{v}}$ ($v_{кв}$) – среднеквадратическая скорость молекул идеального газа.

$$\bar{\bar{v}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

R – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса, T – абсолютная температура, P – давление, ρ – плотность газа, k – постоянная Больцмана, m_0 – масса молекулы, $\bar{\bar{v}}$ – среднеквадратическая скорость.

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}$$

$\bar{v}$ – средняя (среднеарифметическая) скорость.

$$\bar{v} = v_{ср} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8P}{\pi\rho}}$$

$\bar{v}$ – средняя арифметическая скорость молекул газа.

$$v_н = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

$v_н$ – наиболее вероятная скорость молекул газа.

$$\nu = 2\sqrt{2}\,\pi r^2 \bar{v} n^2$$

ν – число столкновений, происходящих за секунду в единице объёма газа, r – радиус молекулы.

$$\lambda = \frac{v_{ср}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

λ – средняя длина свободного пробега молекул газа равна среднему расстоянию между двумя последовательными столкновениями молекулы, Z – среднее число соударений молекулы за 1 с, d – эффективный диаметр молекулы, n – концентрация молекул, $v_{ср}$ – относительная средняя арифметическая скорость молекул.

$$I = -D\frac{dn}{dx}$$

закон диффузии Фика, I – диффузионный поток интересующего нас компонента в направлении оси 0x, D – коэффициент диффузии численно равен диффузионному потоку при градиенте концентрации, равном единице.

$D = \frac{1}{3}\lambda\bar{v}$ D – коэффициент диффузии при стационарной диффузии.

$D_{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_2}{\rho}\lambda_1\bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho}\lambda_2\bar{v}_2\right)$ D_{12} – коэффициент взаимной диффузии (диффузии одного газа в другой), ρ – плотность смеси.

$Q = -\text{æ}\frac{dT}{dx}$ закон Фурье: поток тепла (количество теплоты, протекающей через единицу площади в единицу времени) Q пропорционален градиенту температуры, æ – коэффициент теплопроводности.

$\text{æ} = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda c_V$ æ – коэффициент теплопроводности при стационарной теплопроводности.

$F = -\eta\frac{dv}{dx}$ закон Ньютона для силы внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости), F – сила, действующая на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа.

$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda$ η – коэффициент внутреннего трения, ρ – плотность газа.

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ν – кинематическая вязкость определяется как динамическая вязкость η, отнесённая к плотности ρ.

$\text{æ} = \eta c_V$; $D = \frac{\text{æ}}{\rho c_V}$ соотношения между коэффициентами переноса.

$P = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT}x}$ барометрическая формула устанавливает закон убывания давления с высотой.

$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$ формула Больцмана.

$E_{ср} = \frac{i}{2}kT$ $E_{ср}$ – средняя энергия молекулы, i – число степеней свободы молекул газа, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

$U = \frac{i}{2}\nu RT$ U – внутренняя энергия идеального газа, ν – количество вещества, R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

$Q = \Delta U + A$ первое начало термодинамики: количество теплоты Q, переданное системе, идет на изменение внутренней энергии ΔU системы и на совершение работы A против внешних сил.

$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}P\Delta V$ ΔU – изменение внутренней энергии при изменении абсолютной температуры на ΔT; ΔV – изменение объема при давлении P.

$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ C – теплоемкость численно равна количеству теплоты, необходимому для изменения температуры тела на 1 К.

$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}$ c – удельная теплоемкость равна теплоемкости единицы массы тела, m – масса тела.

$C_V = \frac{i}{2}R$ C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, i – число степеней свободы молекул газа, R – универсальная газовая постоянная.

$C_P = \frac{i+2}{2}R$ C_P – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.

$R = C_P - C_V$ уравнение Майера: универсальная газовая постоянная численно равна работе, которую 1 моль идеального газа совершает, изобарически расширяясь при нагревании на 1 К.

$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$ γ – постоянная (показатель) адиабаты.

$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\frac{dV}{dT}$ C – молярная теплоёмкость: выражение общее, пригодное для всех изотропных тел.

$A = P\Delta V$ A – работа, совершаемая газом при изменении его объема, P – давление газа, ΔV – изменение его объема.

$I = U + PV$ I – тепловая функция или энтальпия (теплосодержание).

$A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$ A – работа газа при изобарическом процессе.

$A = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln\frac{P_1}{P_2}$ A – работа газа при изотермическом процессе.

$A = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} C_V(T_1 - T_2)$ A – работа газа при адиабатическом процессе, γ – показатель адиабаты.

$PV^{\gamma} = const;$
$TV^{\gamma-1} = const;$
$T^{\gamma}P^{1-\gamma} = const$ уравнения адиабатического процесса (уравнение Пуассона), γ – показатель адиабаты.

$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ γ – показатель адиабаты, C_P и C_V – молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме, соответственно; i – число степеней свободы молекул газа.

$v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$ $v_{зв}$ – скорость звука в газе.

$L = L_0(1 + \alpha t)$
$\alpha = \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta t}$
$\Delta L = L - L_0$ линейное расширение твердых тел: L_0 – длина при температуре 0 ^{0}C, L – длина при температуре t ^{0}C, α – линейный коэффициент расширения равен относительному изменению длины при нагреве на 1 ^{0}C (1 K).

$V = V_0(1 + \beta t)$
$\beta = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$
$\Delta V = V - V_0$ объемное расширение твердых тел и жидкостей: V_0 – объем при 0 ^{0}C, V – объем при температуре t ^{0}C, β – объемный коэффициент расширения равен относительному изменению объема при нагреве на 1 ^{0}C (1 K).

$\beta=3\alpha$ соотношение между коэффициентами линейного (α) и объемного (β) расширения твердых тел.

$q=\dfrac{Q}{m}$ удельная теплота сгорания равна количеству теплоты, выделяющемуся при сгорании единицы массы топлива.

$\lambda=\dfrac{Q}{m}$ количество теплоты, необходимое для превращения единицы массы из твердого (жидкого) состояния в жидкое (твердое) при температуре плавления (кристаллизации), называют удельной теплотой плавления (кристаллизации) λ. Удельная теплота плавления равна удельной теплоте кристаллизации. Температура плавления равна температуре кристаллизации.

$r=\dfrac{Q}{m}$ количество теплоты, которое необходимо сообщить жидкости для испарения единицы ее массы при постоянной температуре (в частности, при температуре кипения), называют удельной теплотой парообразования r. С ростом температуры величина удельной теплоты парообразования уменьшается.

$\eta=\dfrac{A}{Q_1}=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}$ η – коэффициент полезного действия теплового двигателя: A – работа, совершенная за цикл, Q_1 – количество теплоты, полученное системой (от нагревателя), Q_2 – количество теплоты, отданное системой (холодильнику; окружающей среде).

$\eta=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}$

$\eta=\dfrac{T_1-T_2}{T_1}$

η – коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя (цикла Карно): T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника, соответственно; Q_1 – количество теплоты, полученное газом от нагревателя при изотермическом расширении; Q_2 – количество теплоты, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии.

$\xi_1 = \dfrac{Q_2}{A} = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$ ξ_1 – эффективность холодильной машины, работающей по циклу Карно.

$dS = \dfrac{dQ}{T}$ dS – приведённое количество теплоты равно отношению теплоты dQ, полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела.

$S = \int \dfrac{dQ}{T}$ энтропия S равна интегралу от приведённого количества теплоты.

$\Delta S = S(V, T) - S(V_0, T_0) =$
$= C_V \ln\dfrac{T}{T_0} + R\ln\dfrac{V}{V_0}$ приращение энтропии при переходе системы из одного состояния в другое (энтропия возрастает как с увеличением объёма газа, так и с увеличением температуры).

$dS = \left(\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}\right)dQ$ увеличение энтропии при теплопередаче: так как $T_1 > T_2$, то $dS > 0$.

$\Delta S = R\ln\dfrac{V}{V_1}$ рост энтропии при адиабатном расширении идеального газа в пустоту: так как $V > V_1$, то $\Delta S > 0$.

$\Delta S = R\left(\ln\dfrac{V}{V_1} + \ln\dfrac{V}{V_2}\right)$ рост энтропии при взаимной диффузии газов: так как и V_1 и V_2 меньше, чем V, то $\Delta S > 0$.

$S = k \cdot \ln\Omega$ формула Больцмана: S – энтропия, **Ω –** термодинамическая вероятность (статистический вес), k – постоянная Больцмана.

$F = U - TS$ F – свободная энергия системы равна внутренней энергии U за вычетом величины TS. TS – связанная энергия.

$\left(P + \dfrac{M^2}{\mu^2}\dfrac{a}{V^2}\right)\left(V - \dfrac{M}{\mu}b\right) = \dfrac{M}{\mu}RT$ уравнение Ван-дер-Ваальса: M – масса газа, μ – его молярная масса, V – объём, занимаемый газом, a и b – постоянные Ван-дер-

Ваальса.

$P_к = \dfrac{a}{27b^2}$, $V_к = 3b$, $T_к = \dfrac{8a}{27Rb}$ значения критических параметров, выраженные через константы a и b.

$\varphi = \dfrac{V}{V_к}$, $\pi = \dfrac{P}{P_к}$, $\tau = \dfrac{T}{T_к}$ приведённые параметры состояния – объём, давление и температура, измеренные в единицах критических параметров.

$\left(\pi + \dfrac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{3}\tau$ приведённое уравнение состояния – уравнение состояния, записанное в безразмерных переменных.

$V = 3b\varphi$, $P = \dfrac{a\pi}{27b^2}$, $T = \dfrac{8a\tau}{27Rb}$ для газа Ван-дер-Ваальса: выражения для объёма, давления и температуры через приведённые параметры состояния.

$\rho = \dfrac{m}{V}$ абсолютной влажностью ρ называют количество водяного пара в граммах, содержащегося в 1 м^3 воздуха при данной температуре.

$\varphi = \dfrac{\rho}{\rho_H}$ относительной влажностью φ называют отношение абсолютной влажности к тому количеству водяного пара, которое необходимо для насыщения 1 м^3 воздуха при той же температуре.

$\varphi = \dfrac{P}{P_H}$ относительной влажностью φ называют отношение парциального давления P водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению P_H насыщенного пара при той же температуре.

$\delta = \dfrac{F}{L}$ δ – коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины границы свободной поверхности жидкости.

$\delta = \dfrac{A}{\Delta S}$ δ – коэффициент поверхностного натяжения равен работе, необходимой для увеличения свободной поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу.

$\Delta P = \delta\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ уравнение (формула) Лапласа: ΔP – избыточное давление, обусловленное кривизной поверхности жидкости; r_1 и r_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости для данного элемента поверхности; δ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

$\Delta P = \frac{2\sigma}{r}$ избыточное давление в случае сферы: r – радиус сферы, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

$h = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{\rho g r_0}$ h – высота подъема жидкости в капиллярной трубке: ϑ – краевой угол, r_0 – радиус капилляра, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

$P = P_0 \pm \frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_0}{\rho}$ P – давление насыщенного пара над выпуклой (знак «+») (вогнутой, «–») поверхностью: ρ_0 – плотность насыщенного пара, σ и ρ – коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости, r – радиус кривизны вогнутого мениска в капилляре, P_0 – давление у поверхности жидкости в сосуде.

$\frac{dT}{dP} = \frac{T(V_2 - V_1)}{L}$ уравнение Клапейрона-Клаузиуса: dT и dP – изменения температуры плавления и давления, T – температура плавления (кристаллизации), V_1 и V_2 – молярные объемы жидкой и твёрдой фаз, L – молярная теплота плавления. Формула справедлива и для других фазовых переходов, например, для испарения и конденсации.

$\pi = \frac{\nu RT}{V}$ уравнение (закон) Вант-Гоффа: π –осмотическое давление, ν – количество вещества, V – объём раствора, R – газовая постоянная, T – температура.

$C_V=\left(\frac{dU}{dT}\right)_V=3R$ закон Дюлонга и Пти: атомная теплоёмкость (т.е. теплоёмкость грамм-атома) твёрдых тел есть величина постоянная, одинаковая для всех веществ и не зависящая от температуры.

$\Sigma q_i= \text{const}$ закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма зарядов в замкнутой системе (т.е. в системе, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной при любых процессах внутри этой системы.

$F=\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$

$F = k\,\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon r^2}$

закон Кулона: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами прямо пропорциональна абсолютным значениям зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость изотропной непрерывной среды нахождения зарядов, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\,\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$.

$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q}$ **E** – напряженность электростатического поля равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ E – напряженность электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него: ε_0 – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$ принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей: напряженность **E** результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ — $\mathbf{p}$ – электрический момент диполя так же, как и плечо диполя $\mathbf{l}$, направлен от отрицательного заряда к положительному.

$M = pE\cdot\sin\alpha$ — момент пары сил, действующей на диполь, α – угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$.

$\mathbf{M} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$.

$W = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} = -pE\cdot\cos\alpha$. — Потенциальная энергия диполя в электрическом поле (без учета энергии взаимодействия зарядов, образующих диполь), α – угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$.

$\sigma = \dfrac{Q}{S}$ — σ – поверхностная плотность заряда равна заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности несущего заряд тела.

$\rho = \dfrac{Q}{V}$ — ρ – объемная плотность заряда равна заряду, приходящемуся на единицу объема заряженного по объему тела.

$d\Phi = E_n\cdot dS = E\cdot dS\cdot\cos\alpha$ — $d\Phi$ – поток вектора напряженности через площадку dS. E_n – проекция вектора $\mathbf{E}$ на направление нормали $\mathbf{n}$, α – угол между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$.

$\Phi = \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS$ — Φ – поток вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую поверхность S.

$\oint_S E_n \cdot dS = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$. — теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную ε_0.

$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ — E – напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью: σ – поверхностная плотность заряда, ε_0 –

электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды нахождения плоскости.

$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$ E – напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, в пространстве между этими плоскостями.

$\oint\limits_L E_l \cdot dl = \oint\limits_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ циркуляция вектора **E** напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

$W_П=\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ $W_П$ – потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга.

$\varphi = \frac{W_п}{q_0}$ φ – потенциал электростатического поля равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку.

$A_{12}=W_{П1}-W_{П2}=$ $= q(\varphi_1 - \varphi_2)$. A_{12} – работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2

$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}$ φ – потенциал поля равен работе перемещения единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ φ – потенциал поля точечного заряда на расстоянии r от него.

$\varphi=\sum\varphi_i$ принцип суперпозиции для потенциала: потенциал поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности в данной точке.

$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}$ $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между двумя точками равна работе поля по перемещению единичного положительного

$U = \varphi_1 - \varphi_2$ заряда из начальной точки в конечную; U – напряжение.

$E_1 = -\frac{d\varphi}{dl}$

$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$ связь между напряженностью электростатического поля (являющейся его силовой характеристикой) и потенциалом – энергетической характеристикой поля.

$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\mathbf{P}_V = \frac{1}{\Delta V}\sum \mathbf{p_i}$ поляризованность определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика.

$\mathbf{P} = æ\varepsilon_0\mathbf{E}$ связь между векторами напряженности поля **E** и поляризованности **P** (в изотропных диэлектриках), æ – диэлектрическая восприимчивость.

$\varepsilon = 1 + æ$ связь между диэлектрической проницаемостью ε и диэлектрической восприимчивостью æ

$\varepsilon = \frac{E_0}{E}$ диэлектрическая проницаемость ε показывает во сколько раз электрическое поле ослабляется диэлектриком; E_0 – напряженность поля в вакууме, E – напряженность поля в диэлектрике.

$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ связь между векторами электрического смещения **D** и напряженностью электростатического поля **E** для электрически изотропной среды.

$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ закон преломления линий вектора электрического смещения **D** на границе раздела двух диэлектриков.

$\oint\limits_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_S D_n \cdot dS = \sum q_i$ теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике: поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

$E = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$

$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$

связь между напряженностью E и разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ для однородного электростатического поля: d – расстояние между точками поля, отсчитанное вдоль силовой линии (знак минус ″–″ в первом уравнении указывает на то, что вектор напряженности поля направлен в сторону убывания потенциала).

$E = \frac{U}{d}$ E – напряженность однородного электрического поля в пространстве между обкладками плоского конденсатора; U – напряжение и d – расстояние между обкладками.

$C = \frac{q}{\varphi}$ C – электроемкость уединенного проводника равна заряду, сообщение которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}$ C – электроемкость конденсатора равна отношению заряда q, накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов (напряжению) между его обкладками.

$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ C – электроемкость плоского конденсатора: S – площадь каждой из обкладок, d – расстояние между обкладками, ε – диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор между пластинами конденсатора.

$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$ C – электроемкость шара радиуса R.

$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{Rr}{R - r}$ C – электроемкость сферического конденсатора, R и r радиусы внешней и внутренней обкладок.

$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(R/r)}$ C – электроемкость цилиндрического конденсатора: радиусы двух коаксиальных цилиндров – R (внешнего) и r (внутреннего), L – длина цилиндров.

$C = \dfrac{\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(d/r)}$ С – электроемкость двухпроводной линии (двух параллельных цилиндрических проводов с радиусами r и расстоянием между осями проводов d (d>>r)), L – длина двухпроводной линии.

$C=\Sigma C_i$ С – электроемкость батареи конденсаторов при их параллельном соединении, C_i – электроемкость отдельного конденсатора.

$U=U_i$ напряжения на конденсаторах при их параллельном соединении одинаковы.

$q=\Sigma q_i$ q – общий заряд на батарее конденсаторов при их параллельном соединении, q_i – заряд на отдельном конденсаторе.

$\dfrac{1}{C}=\sum\dfrac{1}{C_i}$ С – электроемкость батареи конденсаторов при их последовательном соединении, C_i – электроемкость отдельного конденсатора.

$U=\Sigma U_i$ U – общее напряжение на батарее конденсаторов при их последовательном соединении, U_i – напряжение на отдельном конденсаторе.

$q=q_i$ заряды на конденсаторах при их последовательном соединении одинаковы.

$W = \dfrac{qU}{2} = \dfrac{CU^2}{2} = \dfrac{q^2}{2C}$ W – энергия заряженного конденсатора: q – заряд, U – напряжение (разность потенциалов), С – электроемкость конденсатора.

$w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{ED}{2}$ w – объемная плотность энергии электростатического поля (энергия единицы объема).

$F = \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}$ F – сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками плоского конденсатора.

$$\frac{mv_1^2}{2}+q\varphi_1=\frac{mv_2^2}{2}+q\varphi_2$$ закон сохранения энергии при движении заряженной частицы с зарядом q и массой m: v_1 и v_2 – скорости частицы в точках 1 и 2, φ_1 и φ_2 – потенциалы в точках 1 и 2, соответственно.

$I=\frac{q}{t}$; $I=\frac{dq}{dt}=q_t'$ сила тока I равна заряду, протекающему через поперечное сечение проводника в единицу времени.

$j=\frac{I}{S}$ плотность тока j равна силе тока, протекающего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

$\mathbf{j}=en\mathbf{v}_{ср}$ направление вектора плотности тока **j** совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов, n – концентрация носителей тока, $\mathbf{v}_{ср}$ – скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике (скорость дрейфа), e – заряд носителей тока.

$I=\frac{U}{R}$ закон Ома для (однородного) участка цепи: I – сила тока, U – напряжение на участке цепи равно разности потенциалов, т.е. $U=\varphi_1-\varphi_2$, R – сопротивление участка цепи.

$R=\frac{\rho l}{S}$ R – сопротивление однородного линейного проводника длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S, ρ – удельное электрическое сопротивление проводника.

$\sigma=\frac{1}{\rho}$ σ – удельная электрическая проводимость вещества, ρ – удельное электрическое сопротивление.

$\rho=\rho_0(1+\alpha t)$ зависимость удельного сопротивления ρ от температуры: ρ_0 – удельное сопротивление при 0 ^{0}C, α – температурный коэффици-

$\alpha=\frac{1}{R}\cdot\frac{\Delta R}{\Delta t}$ ент сопротивления равен относительному изменению сопротивления при нагреве на 1 ^{0}C (1 К).

$R=\Sigma R_i$ R – общее сопротивление цепи при последовательном соединении проводников, R_i – сопротивление i-го проводника.

$U=\Sigma U_i$ U – общее напряжение в цепи последовательно соединенных проводников; U_i – напряжение на сопротивлении R_i.

$I=I_i$ сила тока в цепи последовательно соединенных сопротивлений одинакова на всех проводниках.

$\frac{1}{R}=\sum\frac{1}{R_i}$ R – общее сопротивление цепи при параллельном соединении проводников, R_i – сопротивление i-го проводника.

$U=U_i$ напряжение при параллельном соединении проводников одинаково на всех сопротивлениях

$I=\Sigma I_i$ I – общая сила тока при параллельном соединении проводников; I_i – сила тока на сопротивлении R_i.

$U=\frac{A}{q}$ напряжение U равно работе электрического поля по перемещению единичного электрического заряда на данном участке цепи.

$\mathscr{E}=\frac{A_{стор}}{q}$ $\mathscr{E}$ – электродвижущая сила (ЭДС), действующая в цепи, равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

$I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}$ закон Ома для замкнутой (полной) цепи: сила тока I в замкнутой цепи прямо пропорциональна ЭДС источника и обратно пропорциональна сумме внешнего R и внутреннего r сопротивлений.

$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12}}{R}$ закон Ома для неоднородного участка цепи (участка цепи с источником тока): $(\varphi_1-\varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи, $\mathscr{E}_{12}$ – ЭДС источника (источников) тока, входящего в участок с сопротивлением R.

$U = IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}$ U – напряжение на неоднородном участке цепи не равно разности потенциалов, т.е. $U \neq (\varphi_1 - \varphi_2)$.

$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{E}}{\rho}$ закон Ома в дифференциальной форме: **j** – плотность тока, σ – удельная электропроводность, ρ – удельное сопротивление, E – напряженность электростатического поля.

$\Sigma I_к = 0$ первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$\sum I_k R_k = \sum \mathscr{E}_i$ второе правило Кирхгофа: для любого замкнутого контура разветвленной электрической цепи алгебраическая сумма произведений сил токов I_k на сопротивления R_k соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС $\mathscr{E}_i$ в этом контуре.

$I = \dfrac{n\mathscr{E}}{nr + R}$ закон Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении n одинаковых источников тока: n – число источников тока, r – внутреннее сопротивление каждого из источников, $\mathscr{E}$ – ЭДС отдельного источника, R – внешнее сопротивление цепи.

$I = \dfrac{\mathscr{E}}{\frac{r}{n} + R}$ закон Ома для замкнутой цепи при параллельном соединении n одинаковых источников тока.

$R_Ш = \dfrac{R_A}{n - 1}$ расчет сопротивления шунта $R_Ш$ для расширения верхнего предела измерения амперметра в $n = \dfrac{I}{I_0}$ раз, R_A – сопротивление амперметра.

$R_{доб} = R_V \cdot (n - 1)$ расчет добавочного сопротивления $R_{доб}$ для расширения верхнего предела измерения вольтметра в $n = \dfrac{U}{U_0}$ раз, R_V – сопротивление вольтметра.

$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$ A – работа постоянного тока: I – сила тока и U – напряжение на участке цепи с сопротивлением R, t – время.

$P=\frac{A}{t} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}$ P – мощность тока.

$Q= IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t$ закон Джоуля-Ленца: Q – количество теплоты, выделяющейся на участке цепи с сопротивлением R за время t.

$w=jE=\sigma E^2$ закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме: w – удельная тепловая мощность тока (количество теплоты, выделяющейся в единицу времени в единице объема), σ – удельная электропроводность, j – плотность тока, E – напряженность электростатического поля.

$m = kq$; $m = kIt$ первый закон Фарадея для электролиза: масса вещества m, выделившаяся на электроде, пропорциональна заряду q, прошедшему через электролит, I – сила постоянного тока, протекавшего за время t, k – электрохимический эквивалент вещества.

$k=\frac{1}{F}\frac{A}{n}$ второй закон Фарадея: электрохимический эквивалент k пропорционален химическому эквиваленту $\frac{A}{n}$, A – атомная (молярная) масса данного химического элемента, n – его валентность, F – постоянная Фарадея.

$v = b_{\pm}E$ v – скорость установившегося направленного движения ионов, E – напряженность поля, $b_{\pm}$ – подвижность ионов.

$j = nq\alpha(b_+ + b_-)$ закон Ома для электролитов: j – плотность тока, q – заряд ионов, n – концентрация молекул растворенного вещества в электролите, α - коэффициент диссоциации.

$j_H = Nqd$ j_H – плотность тока насыщения в газе: N – число пар ионов, возникающих в единице объема в единицу времени, d – расстояние между электродами, q – заряд ионов (в частном случае q = e = элементарному заряду).

$\eta = \frac{U}{\mathscr{E}} = \frac{R}{R + r}$ η – коэффициент полезного действия (КПД) источника тока: R – внешнее сопротивление, r – внутреннее сопротивление, $\mathscr{E}$ – ЭДС источника, U – напряжение на R.

$P_{max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}$ P_{max} – максимальная полезная мощность источника тока: $\mathscr{E}$ – ЭДС источника, r – внутреннее сопротивление источника. При этом внешнее сопротивление R = r.

$r^2 = R_1 \cdot R_2$ соотношение между внутренним сопротивлением r источника и внешними сопротивлениями R_1 и R_2, когда мощности, выделяемые на R_1 и R_2, одинаковы (R_1 и R_2 подключаются поочередно).

$\eta = 1 - \frac{P \cdot R}{U^2}$ η – КПД линии электропередачи: P – мощность, развиваемая источником при напряжении U на зажимах источника, R – сопротивление линии передачи (сопротивление проводов).

$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{4 \cdot \pi \cdot r^3}$

$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin\alpha}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$

закон Био-Савара-Лапласа: d**B** – магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины dl проводника с током I в вакууме, **r** – радиус-вектор от d**l** в точку наблюдения, α – угол между d**l** и **r**, μ_0 – магнитная постоянная.

$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3}$

$B = \frac{\mu_0 q v \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2}$

B – индукция магнитного поля свободно движущегося в вакууме заряда q с нерелятивистской скоростью **v**: **r** – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения; α – угол между векторами **v** и **r**.

$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$ B – индукция магнитного поля в центре кругового проводника, находящегося в вакууме: R – радиус витка, I – сила тока в проводнике.

$B=\mu_0\frac{I}{2\pi b}$ B – индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током I в вакууме, b – расстояние от оси проводника до точки наблюдения.

$B=\mu_0\frac{N}{l}I$ B – индукция магнитного поля внутри (длинного) соленоида, находящегося в вакууме: l – длина соленоида, N – число витков.

$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ B – индукция магнитного поля внутри тороида, находящегося в вакууме, N – число витков, r – расстояние от оси до средней линии тороида, I – сила тока, μ_0 – магнитная постоянная.

$\mathbf{B} = \sum\mathbf{B}_i$ принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей: **B** – магнитная индукция результирующего поля; $\mathbf{B}_i$ – магнитные индукции складываемых полей.

$\mathbf{F}_A = I[\Delta\mathbf{l},\mathbf{B}]$

$F_A = I\cdot\Delta l\cdot B\cdot\sin\alpha$

закон Ампера: $\mathbf{F}_A$ – сила Ампера, действующая на участок проводника длины Δl с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией B, α – угол между направлением отрезка $\Delta\mathbf{l}$ проводника с током и **B**, направление $\Delta\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока.

$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I_1I_2}{R}\cdot l$ сила взаимодействия двух прямых прямолинейных бесконечных параллельных проводников с токами I_1 и I_2: R – расстояние между проводниками; l – длина одного из проводников, на которую действует сила F; μ – магнитная проницаемость окружающей среды; μ_0 – магнитная постоянная.

$\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n}$ $\mathbf{P}_m$ – магнитный момент плоского контура с током I и площадью S:

$P_m = NIS$ **n** – единичный вектор нормали к поверхности рамки, N – число витков рамки.

$\mathbf{M} = [\mathbf{P}_m, \mathbf{B}]$

$M = P_m \cdot B \cdot \sin\alpha$

M – механический момент сил, действующий на плоский контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией **B**: $\mathbf{P}_m$ – магнитный момент рамки с током, α – угол между нормалью **n** к плоскости контура и вектором **B**.

$\mathbf{F}_л = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$

$F_л = qvB \cdot \sin\alpha$

сила Лоренца (ее магнитная составляющая): $\mathbf{F}_л$ – сила, действующая на электрический заряд q, движущийся в магнитном поле с индукцией **B** со скоростью **v**, α – угол между **v** и **B**.

$\mathbf{F}_л = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$;

$\mathbf{F}_л = \mathbf{F}_{эл} + \mathbf{F}_{магн}$

общее выражение для силы Лоренца $\mathbf{F}_л$ при наличии в пространстве электрического (с напряженностью **E**) и магнитного (с индукцией **B**) полей. $\mathbf{F}_л$ – складывается из электрической $\mathbf{F}_{эл}$ и магнитной $\mathbf{F}_{магн}$ составляющих (слагаемых).

$R = \frac{mv}{qB}$;

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$

R – радиус окружности и T – период обращения заряженной частицы с зарядом q и массой m, влетевшей со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B нормально к линиям индукции.

$R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$

$T = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}$

$h = vT\cos\alpha = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\alpha$

R – радиус окружности, T – период обращения и h – шаг спирали, по которой движется заряженная частица с зарядом q и массой m, влетевшая в однородное магнитное поле с индукцией B со скоростью **v**, составляющей угол α с линиями индукции, т.е. с вектором **B**.

$v = \frac{qB}{m}\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$

v=v(R,h) – выражение скорости v заряженной частицы через радиус окружности R и шаг спирали h.

$\Phi = BS \cdot \cos\alpha$ Φ – магнитный поток (поток магнитной индукции) через площад-

$\Phi = B_n \cdot S$ ку S: α – угол между вектором **B** и нормалью **n** к площадке, $B_n = B \cdot \cos\alpha$ – проекция вектора **B** на направление **n**.

$A = I \cdot \Delta\Phi$ работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ теорема Гаусса для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

$A_{12} = I\int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$ A_{12} – работа по перемещению проводника с током (при $I = \text{const}$) в магнитном поле; Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки в начальном и конечном положениях сквозь контур, прочерченный проводником.

$\mathcal{E} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\Phi'_t$

закон Фарадея (основной закон электромагнитной индукции): ЭДС индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

$\mathcal{E} = -N\dfrac{d\Phi}{dt} = -N\Phi'_t$ $\mathcal{E}$ – ЭДС индукции в рамке с числом витков N.

$\mathcal{E} = Blv = \varphi_1 - \varphi_2$ разность потенциалов (ЭДС индукции), возникающая на концах прямолинейного отрезка проводника длиной l при его движении в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной линиям индукции **B**, со скоростью **v**, перпендикулярной проводнику.

$q = \dfrac{\Delta\Phi}{R}$ q – величина заряда, протекающего в замкнутом контуре с сопротивлением R при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром, на $\Delta\Phi$.

$\Phi = L \cdot I$ Φ – магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью (коэффициентом самоиндукции) L.

$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ мгновенное значение силы тока в цепи, содержащей ЭДС $\mathscr{E}$, сопротивление R и индуктивность L, через время t после замыкания.

$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ мгновенное значение силы тока в цепи, содержащей ЭДС $\mathscr{E}$, сопротивление R и индуктивность L, через время t после размыкания: I_0 – сила тока в цепи при t = 0, t – время с момента размыкания цепи.

$\mathscr{E}_c = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ $\mathscr{E}_c$ – ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока в контуре, L – индуктивность контура.

$\mathscr{E}_c = -L\frac{dI}{dt} = -LI'_t$

$\mu = \frac{B}{B_0}$ μ – магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз индукция результирующего поля в магнетике больше индукции внешнего поля B_0 (поля, создаваемого намагничивающим током в вакууме).

$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ **B** – магнитная индукция в случае однородной изотропной среды, **H** – напряженность магнитного поля, μ_0 – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды; для вакуума μ=1.

$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V}\Sigma\mathbf{p}_a$ **J** – намагниченность равна магнитному моменту молекул единицы объема магнетика.

$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}$ намагниченность **J** прямо пропорциональна напряженности **H** поля, вызывающего намагничивание**,** χ – магнитная восприимчивость вещества.

$\mu = 1 + \chi$ связь между магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ.

$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B_l \cdot dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k$ закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора **B**): циркуляция вектора **B** по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ закон преломления линий вектора магнитной индукции **B** на границе раздела двух магнетиков.

$L = \mu\mu_0 N^2 \frac{S}{l}$

$L = \mu_0 n^2 V$

L – индуктивность длинного соленоида, μ_0 – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость, N – число витков и l – длина соленоида, S – его площадь поперечного сечения, n=N/l – число витков на единицу длины, V=S·L – объем соленоида.

$W=\frac{1}{2}LI^2$ W – энергия магнитного поля, создаваемого током I в замкнутом контуре с индуктивностью L.

$\omega=\frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}$ ω – объемная плотность энергии однородного магнитного поля (энергия магнитного поля в единице объема).

$k=\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}$ k – коэффициент трансформации трансформатора, N_2 и N_1 – число витков во вторичной и первичной обмотках, U_2 и U_1 – напряжения на обмотках в режиме холостого хода.

$\mathbf{J}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\mathbf{J}_{см}$ – плотность тока смещения

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}; \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \cdot dV;$$

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}; \qquad \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

полная система уравнений Максвелла в интегральной форме. Для изотропных сред, не содержащих сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, в случае достаточно слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени уравнения Максвелла дополняются уравнениями: $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$; $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$.

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho;$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \qquad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме (характеризующих поле в каждой точке пространства).

$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\alpha)$ кинематическое уравнение гармонических колебаний: x – смещение колеблющейся точки из положения равновесия, A – амплитуда, ω_0 – круговая (циклическая) частота, α – начальная фаза, t – время, $(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза колебаний.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$$

$$x''_{tt} + \omega_0^2 x = 0$$

дифференциальное уравнение гармонических колебаний; ω_0 – циклическая частота.

$$T=\frac{t}{N}=\nu^{-1};\ \nu=\frac{N}{t}$$

T – период колебаний равен времени совершения одного колебания; ν – частота колебаний; N – число полных колебаний за время t.

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0};\ \nu=\frac{\omega_0}{2\pi}$$

T и ν – период и частота гармонических колебаний, ω_0 – циклическая частота.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'_t = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

v – скорость колеблющейся точки.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'_t = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$$

a – ускорение колеблющейся точки.

$F = -m\omega_0^2 x$ F – упругая (квазиупругая) сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m, x – смещение колеблющейся точки из положения равновесия.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ T – период колебаний математического маятника, l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ T – период колебаний пружинного маятника: m – масса груза, подвешенного на пружине жесткостью k.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL_{ф}}}$ период колебаний физического маятника: m и J – масса и момент инерции маятника, $L_ф$ – расстояние от точки подвеса до центра масс.

$T = 2\ell\sqrt{\frac{m}{F}}$ T – период колебаний однородной струны: ℓ – длина струны. F – сила натяжения струны, m – масса единицы длины струны.

$F = ma = mx''$, $F = -kx$;

$mx'' = -kx$; $x'' + \frac{k}{m}x = 0$;

$x'' + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

второй закон Ньютона для гармонических колебаний пружинного маятника: m – масса груза, подвешенного на пружине с жесткостью k; $F = -k\cdot x$ - сила упругости; ω_0 – циклическая частота.

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$,

$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$.

амплитуда и фаза сложного колебания при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одной и той же частоты: $x = x_1 + x_2$;

$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$, $x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$.

$\nu = |\nu_1 - \nu_2|$ частота биений при сложении гармонических колебаний с частотами ν_1 и ν_2.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Амплитуда вынужденных колебаний при действии вынуждающей силы $F = F_0\cos\omega t$: $f_0 = F_0/m$, ω_0 – частота собственных колебаний при отсутствии затухания и вынуждающей силы.

$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0,$

$x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha),$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}}.$

дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение. ω_0 – собственная частота колебаний в отсутствии потерь энергии в системе, β – коэффициент затухания, T – условный период затухающих колебаний.

$\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T};$

$\lambda = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \dfrac{T}{\tau} = \dfrac{1}{N_e};$

$Q = 2\pi\dfrac{E(t)}{E(t) - E(t+T)};$

$Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$

λ – логарифмический декремент затухания равен натуральному логарифму от декремента затухания, N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз.

При слабом затухании добротность Q пропорциональна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии ΔE за один период колебаний T.

$W_К = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \alpha)$

кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания.

$W_П = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = \dfrac{1}{2}\,mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$

потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F.

$W = W_К + W_П = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2A^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания.

$v = \lambda\cdot\nu = \dfrac{\lambda}{T}$

связь между скоростью волны v, длиной волны λ, частотой ν, периодом T;

$V=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ V – скорость распространения звуковых (акустических) волн в упругой среде, E – модуль Юнга среды и ρ - ее плотность.

$\nu' = \dfrac{c \pm v}{c \mp v}\nu$ эффект Доплера: ν′ – частота, воспринимаемая наблюдателем, c – скорость распространения звука, v – скорость источника звука, ν – частота звука, посылаемого источником. Верхние знаки берутся при сближении источника и наблюдателя, нижние – при удалении.

$x(r,t)=A\cos\omega_0\left(t-\dfrac{r}{V}\right)= A\cos(\omega_0 t-kr);$

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{\omega_0}{v}$

уравнение плоской прямой (бегущей) волны, распространяющейся в среде без поглощения в сторону положительной полуоси r, k – волновое число.

$q'' + \dfrac{1}{LC}q = 0;$

$q'' + \omega_0^2 q = 0$

дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда q в контуре; L – индуктивность и C – емкость контура.

$q = q_0\cos(\omega_0 t+\alpha); \quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}};$

$I = \dfrac{dq}{dt} = q'_t = -q_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha);$

$I = I_0\cos(\omega_0 t+\alpha+\dfrac{\pi}{2}); \quad I_0 = q_0\omega_0;$

уравнения колебаний заряда q(t) и тока I(t) в LC – контуре; ω_0 – циклическая частота; q_0, I_0, U_0 – амплитудные значения заряда, силы тока и напряжения.

$q_0 = CU_0; \qquad \dfrac{1}{2}CU_0^2 = \dfrac{1}{2}LI_0^2;$ связь между амплитудными значениями силы тока и напряжения в контуре.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ T – период колебаний электрического контура (формула Томсона).

$q'' + \dfrac{R}{L}q' + \dfrac{1}{LC}q = 0,$ дифференциальное уравнение свободных затухающих

$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ колебаний в RLC-контуре: β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота контура.

$q(t) = q_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$, уравнение свободных затухающих колебаний (при $\beta < \omega_0$), q_0 и α – постоянные, определяемые из начальных условий, $A = q_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний, T – условный период затухающих колебаний.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$

$\lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$ λ – логарифмический декремент затухания, N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз, τ – время релаксации.

$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$ Q –добротность пропорциональна отношению энергии, запасенной в контуре, к ее изменению ΔW за период T.

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \lambda = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$ выражения для добротности Q и логарифмического декремента затухания λ при малом затухании ($\beta << \omega_0$).

$W = \frac{1}{2}CU^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$ полная электромагнитная энергия LC – контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей. она также равна максимальной энергии электрического или магнитного полей.

$\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu_0}; \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi};$ связь между скоростью распространения электромагнитной волны в вакууме *c* (скоростью света в вакууме), длиной волны λ_0, частотой ν_0, периодом T.

$\Phi = NBS\cos\alpha = NBS\cos\omega t$ Φ – магнитный поток через контур площадью S и числом витков N: ω – циклическая частота вращения рамки; α – угол поворота рамки (угол между индукцией **B** и нормалью **n**) в момент времени t; N – число витков.

$\mathscr{E}_i = -\Phi'_t = -\dfrac{d\Phi}{dt} = NBS\omega\sin\omega t$ — $\mathscr{E}_i$ – ЭДС индукции, возникающая при вращении рамки.

$\mathscr{E}_{max} = NBS\omega$ — значение максимальной (амплитудной) ЭДС во вращающейся рамке (при $\sin\omega t = 1$).

$X_L=\omega L$ — X_L – (реактивное) индуктивное сопротивление.

$X_C=\dfrac{1}{\omega C}$ — X_C – (реактивное) емкостное сопротивление.

$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$

$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$

Z – полное сопротивление (импеданс) цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L, конденсатор емкостью C. На концы цепи подается переменное напряжение $U=U_0\cos\omega t$.

$I_0=\dfrac{U_0}{Z}=\dfrac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$ — закон Ома для цепи переменного тока: I_0 и U_0 – амплитудные значения силы тока и напряжения в цепи переменного тока, Z – импеданс.

$U_{0R}=I_0R$

$U_{0L}=I_0X_L$

$U_{0C}=I_0X_C$

U_{0R}, U_{0L}, U_{0C} – амплитудные значения напряжений на активном сопротивлении, катушке индуктивности и конденсаторе, соответственно, в цепи переменного тока.

$U_R=I_0R\cdot\sin\omega t$

$U_C=I_0X_C\cdot\sin(\omega t-\pi/2)$

$U_L=I_0X_L\cdot\sin(\omega t+\pi/2)$

фазовые соотношения между напряжениями на активном сопротивлении U_R, катушке индуктивности U_L и конденсаторе U_C, соответственно, в цепи переменного тока.

$$tg\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

φ – сдвиг фаз между напряжением и силой тока в цепи, содержащей последовательно включенные R, L ,C.

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = U_0 Q\ ,$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

в случае резонанса напряжения на конденсаторе U_C и катушке индуктивности U_L противоположны по фазе и равны по амплитуде, Q – добротность колебательного контура.

$$P=\frac{1}{2}U_0 \cdot I_0 \cdot \cos\varphi = U_э \cdot I_э \cdot \cos\varphi;$$

$$U_э=\frac{U_0}{\sqrt{2}}\ ;\ I_э=\frac{I_0}{\sqrt{2}}\ ;\ \cos\varphi = \frac{R}{Z}\ ;$$

P – средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока: cosφ – коэффициент мощности, (φ – сдвиг фаз между U и I), U_0 и I_0 – амплитудные значения, $U_Э$ и $I_Э$ – действующие (эффективные) значения напряжения и силы переменного тока.