

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Н.А. Морозов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по инженерно-техническим направлениям подготовки

Оренбург
2012

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7
М 80

Рецензенты – кандидат технических наук, доцент С.Н. Горелов
кандидат технических наук, доцент Л.И. Кудина

М 80 **Морозов, Н.А.**
Определение кинематических характеристик механических систем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии: методические указания / Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2012. - 20 с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки бакалавров. В методических указаниях рассмотрена методика определения кинематических характеристик механической системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии. Представлен пример выполнения лабораторной работы.

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7

© Морозов Н.А., 2012
© ОГУ, 2012

Содержание

Введение.....	4
1 Краткие теоретические сведения.....	5
2 Задание для лабораторной работы.....	9
3 Пример выполнения лабораторной работы	13
4 Оформление отчета по лабораторной работе.....	19
Список использованных источников.....	20

Введение

В инженерной деятельности возникает необходимость решать задачи, связанные с движением механических систем. Несмотря на большое количество различных компьютерных программ для моделирования движения различных механических систем, применение аналитических методов решения дифференциальных уравнений движения механических систем широко используется в настоящий момент при решении практических задач. Это обусловлено огромным разнообразием механических систем и условий их движения. Поэтому получение компетенций, связанных с умением использовать общие теоремы динамики, и в частности, теорему об изменении кинетической энергии механической системы, является неотъемлемой частью образовательного процесса бакалавров в области техники и технологии.

В данных методических указаниях рассмотрена методика использования теоремы об изменении кинетической энергии для определения кинематических характеристик механических систем. Методические указания содержат многовариантное задание на лабораторную работу, при выполнении которой необходимо будет воспользоваться системой MathCAD.

Представлен пример выполнения лабораторной работы, в котором определена зависимость скорости одного из грузов механической системы от перемещения данного груза, построен график данной зависимости, определено ускорение этого груза.

1 Краткие теоретические сведения

Для исследования кинематических характеристик механической системы применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной (1) и второй дифференциальной (2) форме:

$$T_k - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{z=1}^l A_z^i, \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{z=1}^l N_z^i, \quad (2)$$

где T_k , T_0 и T – кинетическая энергия системы в конечном, начальном и произвольном положениях соответственно, Дж;

A_k^e - работа k -ой внешней силы, Дж;

A_z^i - работа z -ой внутренней силы, Дж;

N_k^e - мощность k -ой внешней силы, Вт;

N_z^i - мощность z -ой внутренней силы, Вт;

n – количество внешних сил, действующих на систему;

l – количество внутренних сил, действующих на систему;

t – время, с.

Если в какой-то момент времени система находится в покое, то кинетическая энергия системы в данный момент будет равна нулю.

Кинетическая энергия механической системы в произвольном положении равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = \sum_{j=1}^s T_j, \quad (3)$$

где T_j - кинетическая энергия j -го тела механической системы, Дж;

s – количество тел, образующих систему.

Таким образом, для нахождения кинетической энергии механической системы в произвольном положении необходимо определить для данного момента времени кинетическую энергию каждого тела, входящего в систему. Кинетические энергии тел системы выражаются через инерционные и кинематические характеристики тел и в зависимости от вида движения, совершаемого телом, определяются по формуле (4) для поступательного движения и по формуле (5) – для вращательного:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}, \quad (4)$$

$$T = \frac{I_x \cdot \omega^2}{2}, \quad (5)$$

где m – масса тела, кг;

I_x - момент инерции тела относительно оси вращения, кг·м²;

v - скорость тела, м/с;

ω - угловая скорость вращения тела, рад/с.

Осевые моменты инерции тел ступенчатой формы выражаются через радиус инерции относительно соответствующей оси (например, момент инерции тела относительно оси x (I_x) выражается через радиус инерции относительно оси x (i_x)):

$$I_x = m \cdot i_x^2. \quad (6)$$

Если масса тела равномерно распределена по его ободу (кольцо, тонкостенный диск или цилиндр), осевой момент инерции определяется по формуле:

$$I_x = m \cdot R^2, \quad (7)$$

где R – радиус тела, м.

В том случае, если имеем однородный диск или цилиндр, осевой момент инерции равен:

$$I_x = \frac{m \cdot R^2}{2}. \quad (8)$$

Работы сил определяются по формуле:

$$A = \int dA, \quad (9)$$

где dA - элементарная работа силы, Дж.

Элементарная работа силы F в естественной форме имеет вид:

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha, \quad (10)$$

где dS - элементарное перемещение точки приложения силы, м;

α - угол между вектором силы и касательной к траектории точки приложения силы, рад.

Работу силу тяжести тела можно вычислить, используя формулу:

$$A(m\bar{g}) = \pm mg \cdot h_c, \quad (11)$$

где h_C - высота на которую поднялся (опустился) центр тяжести тела, м.

В данной формуле знак «+» берется, если центр тяжести тела опускается, знак «-» - если он поднимается.

Мощность силы F выражается формулой:

$$N = \frac{dA}{dt} = F \cdot v \cdot \cos\alpha, \quad (12)$$

где v - скорость точки приложения силы, м/с.

Если механическая система является неизменяемой, то есть расстояние между двумя любыми точками системы остается постоянным в течение времени движения системы, то для таких систем суммы работ и мощностей внутренних сил будут равны нулю, и уравнения (1) и (2) примут вид:

$$T_k - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e, \quad (13)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e. \quad (14)$$

2 Задание для лабораторной работы

Цель работы: научиться определять кинематические характеристики механических систем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Задание для лабораторной работы выбирается в соответствии с номером варианта, выданного преподавателем. Номер варианта выдается в виде трехзначного числа. Последняя цифра числа соответствует номеру схемы механической системы (схемы к задачам представлены на рисунке 1). Необходимые для решения задачи исходные данные выбираются в соответствии с первой и второй цифрами номера варианта по таблицам 1 и 2.

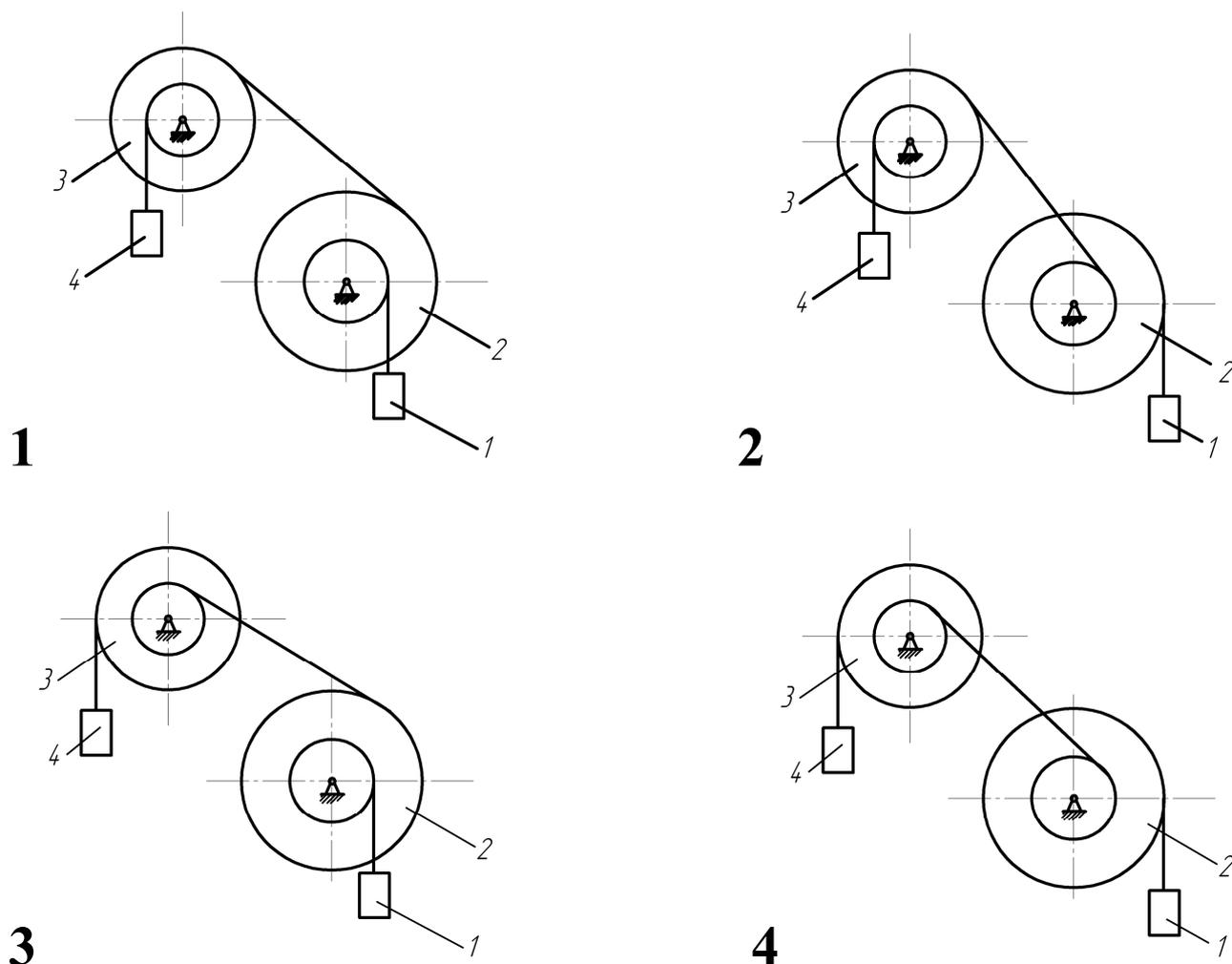


Рисунок 1 – Схемы механических систем

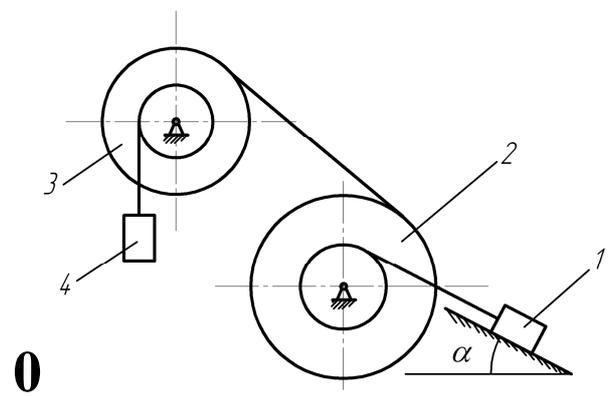
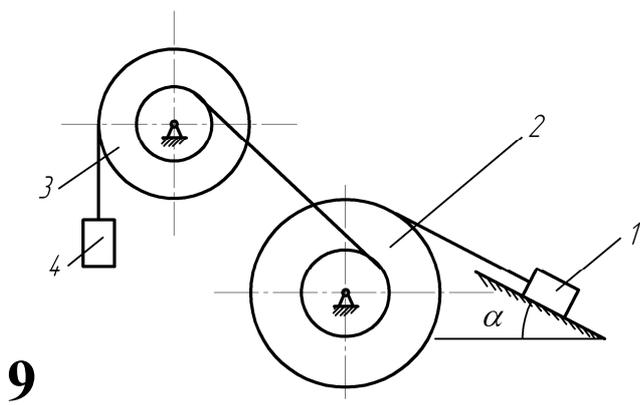
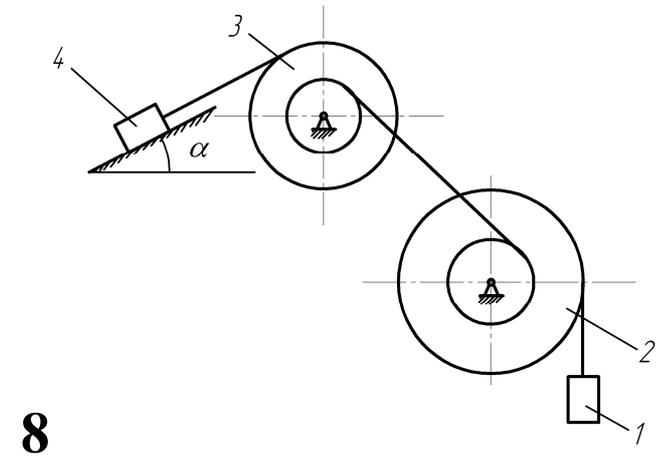
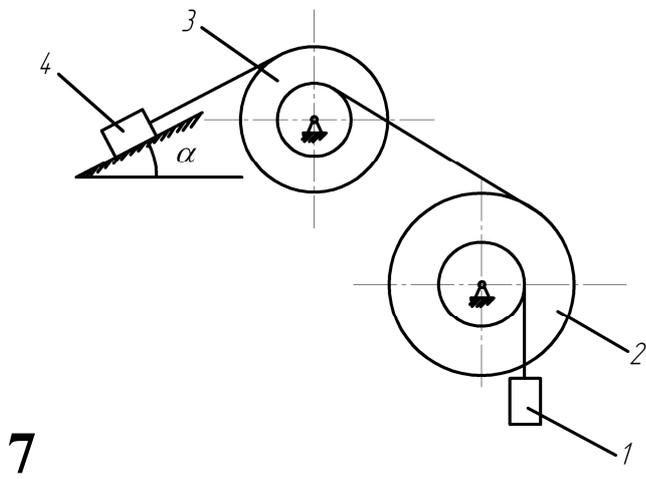
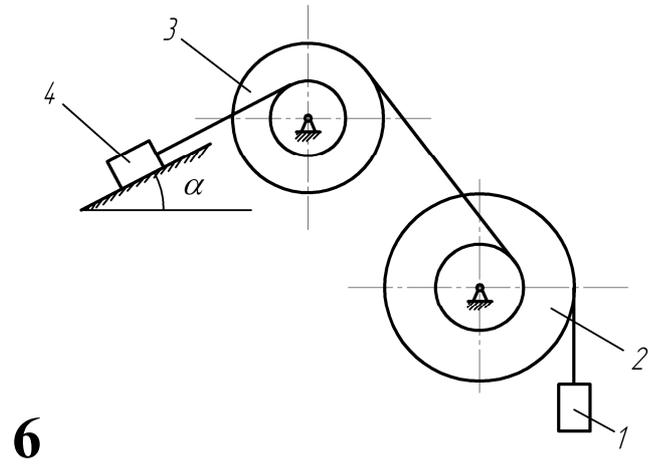
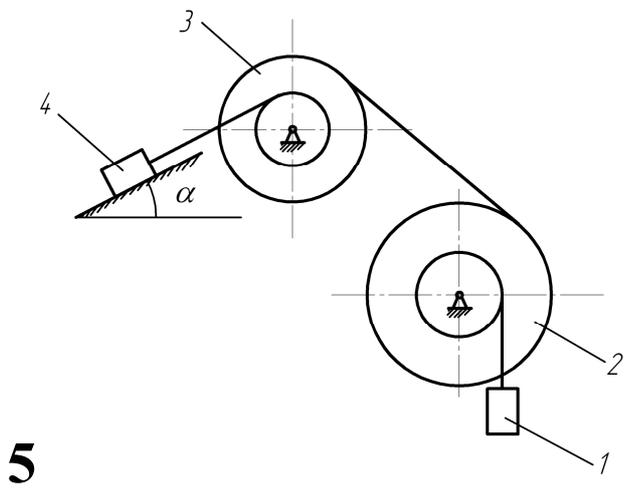


Рисунок 1, лист 2

Механическая система, состоящая из двух грузов (1 и 4) и двух блоков (2 и 3), связанных невесомыми нитями, начинает двигаться из состояния покоя под действием сил тяжести. Массы тел соответственно равны m_1 , m_2 , m_3 и m_4 . Блоки имеют ступенчатую форму, радиусы инерции блоков равны i_2 и i_3 , радиусы ступеней - R_2 , R_3 , r_2 и r_3 . На схемах 5,6,7,8,9,0 один из грузов движется по гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Сопротивлением подшипников вращению блоков пренебречь.

Для заданной механической системы определить зависимость между скоростью груза 1 и его перемещением, а также ускорение груза 1.

С помощью системы MathCAD построить график зависимости скорости груза 1 от его перемещения.

Таблица 1 – Исходные данные, соответствующие первой цифре варианта

Параметр	Первая цифра варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°	30°	45°	60°	30°
$\frac{i_2}{r_2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
$\frac{i_3}{r_3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{R_2}{r_2}$	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
$\frac{R_3}{r_3}$	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3

Таблица 2 – Исходные данные, соответствующие второй цифре варианта

Параметр	Вторая цифра варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
m_1	19 <i>m</i>	26 <i>m</i>	21 <i>m</i>	13 <i>m</i>	12 <i>m</i>	24 <i>m</i>	20 <i>m</i>	17 <i>m</i>	23 <i>m</i>	19 <i>m</i>
m_2	7 <i>m</i>	3 <i>m</i>	4 <i>m</i>	18 <i>m</i>	9 <i>m</i>	22 <i>m</i>	15 <i>m</i>	5 <i>m</i>	<i>m</i>	9 <i>m</i>
m_3	11 <i>m</i>	17 <i>m</i>	8 <i>m</i>	15 <i>m</i>	4 <i>m</i>	2 <i>m</i>	3 <i>m</i>	18 <i>m</i>	9 <i>m</i>	8 <i>m</i>
m_4	0,7 <i>m</i>	<i>m</i>	0,8 <i>m</i>	0,6 <i>m</i>	0,5 <i>m</i>	0,9 <i>m</i>	<i>m</i>	0,7 <i>m</i>	0,8 <i>m</i>	0,9 <i>m</i>

3 Пример выполнения лабораторной работы

Механическая система, состоящая из двух грузов (1 и 4) и двух блоков (2 и 3), связанных невесомыми нитями, начинает двигаться из состояния покоя под действием сил тяжести (рисунок 2). Массы тел соответственно равны $m_1 = 22m$, $m_2 = 6m$, $m_3 = 14m$ и $m_4 = m$. Блоки имеют ступенчатую форму, радиусы инерции блоков равны i_2 и i_3 , малые и большие радиусы ступеней - R_2 , R_3 , r_2 и r_3 , причем $i_2 / r_2 = \sqrt{3}$, $i_3 / r_3 = \sqrt{2}$, $R_2 / r_2 = 2$, $R_3 / r_3 = 3$. Грузы движутся по гладким наклонным плоскостям, расположенной под углами $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ к горизонту. Сопротивлением подшипников вращению блоков пренебречь.

Для заданной механической системы определить зависимость между скоростью груза 1 и его перемещением, а также ускорение груза 1. С помощью системы MathCAD построить график зависимости скорости груза 1 от его перемещения.

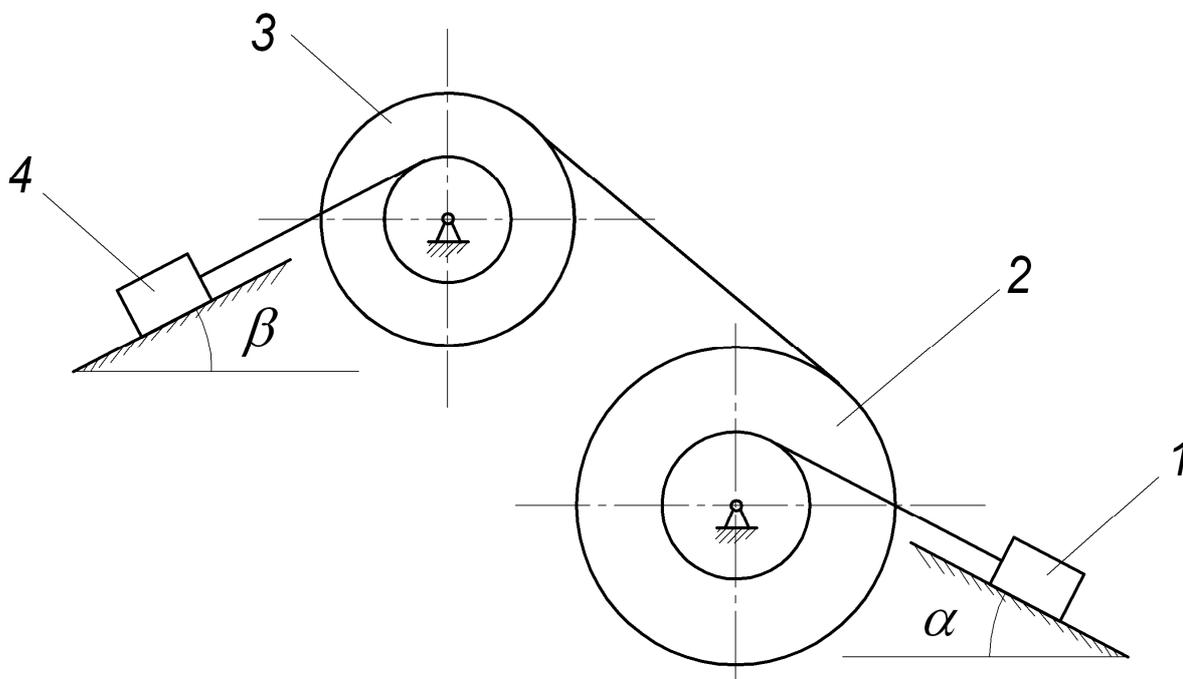


Рисунок 2 – Механическая система

Дано: $m_1 = 22m$, $m_2 = 6m$, $m_3 = 14m$, $m_4 = m$, $i_2 / r_2 = \sqrt{3}$,
 $i_3 / r_3 = \sqrt{2}$, $R_2 / r_2 = 2$, $R_3 / r_3 = 3$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Найти: $v_1 = f(S_1)$, a_1

Решение:

1 Изобразим механическую систему в произвольном положении, покажем скорости и угловые скорости тел, выразим скорости и угловые скорости тел через скорость груза 1 (рисунок 3).

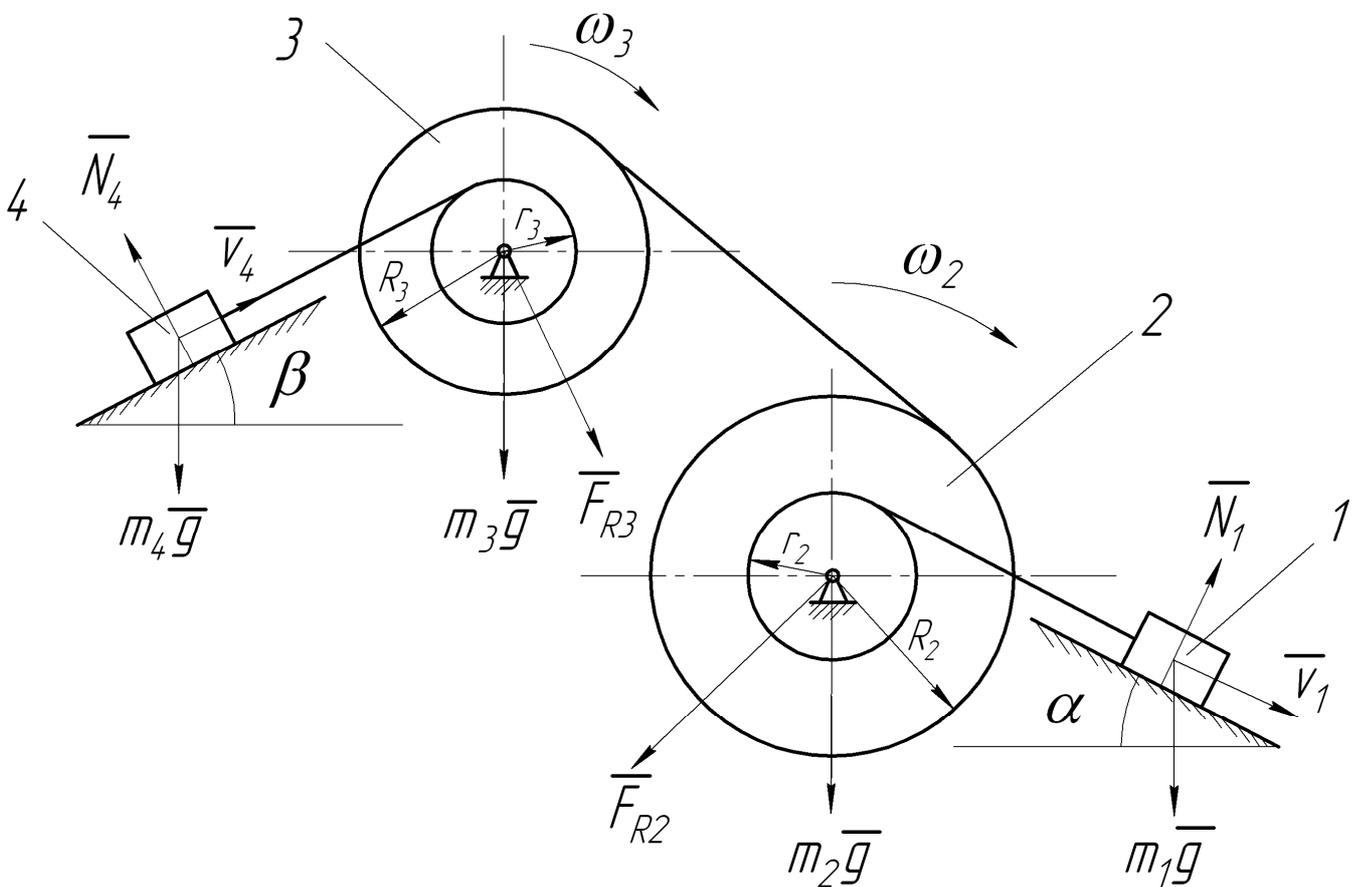


Рисунок 3 – Механическая система в произвольном положении

Угловая скорость блока 2:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}. \quad (15)$$

Угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{v_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} = \frac{2v_1}{R_3}. \quad (16)$$

Скорость груза 4:

$$v_4 = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{2v_1 \cdot r_3}{R_3} = \frac{2v_1}{3}. \quad (17)$$

2 Используя исходные данные, полученные кинематические зависимости и формулы (3), (4), (5) и (6), выразим кинетическую энергию механической системы через скорость груза 1:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot i_2^2}{2} \left(\frac{v_1}{r_2} \right)^2 = \frac{3m_2 \cdot v_1^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \left(\frac{2v_1}{R_3} \right)^2 = \frac{2m_3 \cdot i_3^2 \cdot v_1^2}{(3r_3)^2} = \frac{4m_3 \cdot v_1^2}{9},$$

$$T_4 = \frac{m_4 \cdot v_4^2}{2} = \frac{m_4}{2} \left(\frac{2v_1}{3} \right)^2 = \frac{2m_4 \cdot v_1^2}{9},$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = v_1^2 \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m_2}{2} + \frac{4m_3}{9} + \frac{2m_4}{9} \right),$$

$$T = v_1^2 \left(\frac{22m}{2} + \frac{3 \cdot 6m}{2} + \frac{4 \cdot 14m}{9} + \frac{2m}{9} \right) = m \cdot v_1^2 \left(11 + 9 + \frac{56}{9} + \frac{2}{9} \right) = 26,44m \cdot v_1^2.$$

3 Тела входящие в систему являются абсолютно твердыми, нити - нерастяжимыми, следовательно, данная механическая система является неизменяемой. Покажем внешние силы, действующие на систему (рисунок 3). Активные силы: $m_1 \bar{g}$, $m_2 \bar{g}$, $m_3 \bar{g}$, $m_4 \bar{g}$. Пассивные силы: нормальные реакции опор \bar{N}_1 и \bar{N}_4 , реакции неподвижных цилиндрических шарниров \bar{F}_{R2} и \bar{F}_{R3} . Используя формулы (9), (10) и (11), определим сумму работ внешних сил, выразив ее через перемещение груза 1.

$$A(m_1 \bar{g}) = m_1 g \cdot h_1 = m_1 g \cdot S_1 \cdot \sin \alpha,$$

$$A(m_4 \bar{g}) = -m_4 g \cdot h_4 = -m_4 g \cdot S_4 \cdot \sin \beta.$$

Найдем зависимость между перемещениями грузов:

$$v_4 = \frac{2v_1}{3} \rightarrow \frac{dS_4}{dt} = \frac{2dS_1}{3dt} \rightarrow \int dS_4 = \int \frac{2dS_1}{3} \rightarrow S_4 = \frac{2S_1}{3}.$$

Следовательно:

$$A(m_4 \bar{g}) = -m_4 g \cdot \frac{2}{3} S_1 \cdot \sin \beta.$$

Работы остальных внешних сил равны нулю, так как силы $\bar{m}_2 \bar{g}$, $\bar{m}_3 \bar{g}$, \bar{F}_{R2} и \bar{F}_{R3} приложены в неподвижных точках, а силы \bar{N}_1 и \bar{N}_4 перпендикулярны перемещениям точек своего приложения. Сумма работ внешних сил:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = m_1 g \cdot S_1 \cdot \sin \alpha - m_4 g \cdot \frac{2}{3} S_1 \cdot \sin \beta = g S_1 (m_1 \cdot \sin \alpha - m_4 \cdot \frac{2}{3} \sin \beta),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^e &= g S_1 (22m \cdot \sin \alpha - m \cdot \frac{2}{3} \sin \beta) = g S_1 \cdot m (22 \cdot 0,5 - \frac{2}{3} 0,866) = \\ &= 10,42 g S_1 \cdot m. \end{aligned}$$

4 Применяв интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем (формула (13)), получим зависимость скорости груза 1 от его перемещения:

$$26,44m \cdot v_1^2 = 10,42gS_1 \cdot m,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10,42gS_1}{26,44}} = \sqrt{\frac{10,42 \cdot 9,81 \cdot S_1}{26,44}} = 1,97\sqrt{S_1}.$$

5 Для определения ускорения груза 1 воспользуемся дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем (формула (14)).

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d(26,44m \cdot v_1^2)}{dt} = 26,44m \cdot 2v_1 \cdot a_1 = 52,88m \cdot v_1 \cdot a_1,$$

$$\sum_{k=1}^n N_k^e = \frac{d(10,42gS_1 \cdot m)}{dt} = 10,42g \cdot v_1 \cdot m,$$

$$52,88m \cdot v_1 \cdot a_1 = 10,42g \cdot v_1 \cdot m,$$

$$a_1 = \frac{10,13g}{52,88} = \frac{10,42 \cdot 9,81}{52,88} = 1,93 \text{ м/с.}$$

6 С помощью системы MathCAD построим график зависимости между скоростью груза 1 и его перемещением (рисунок 4)

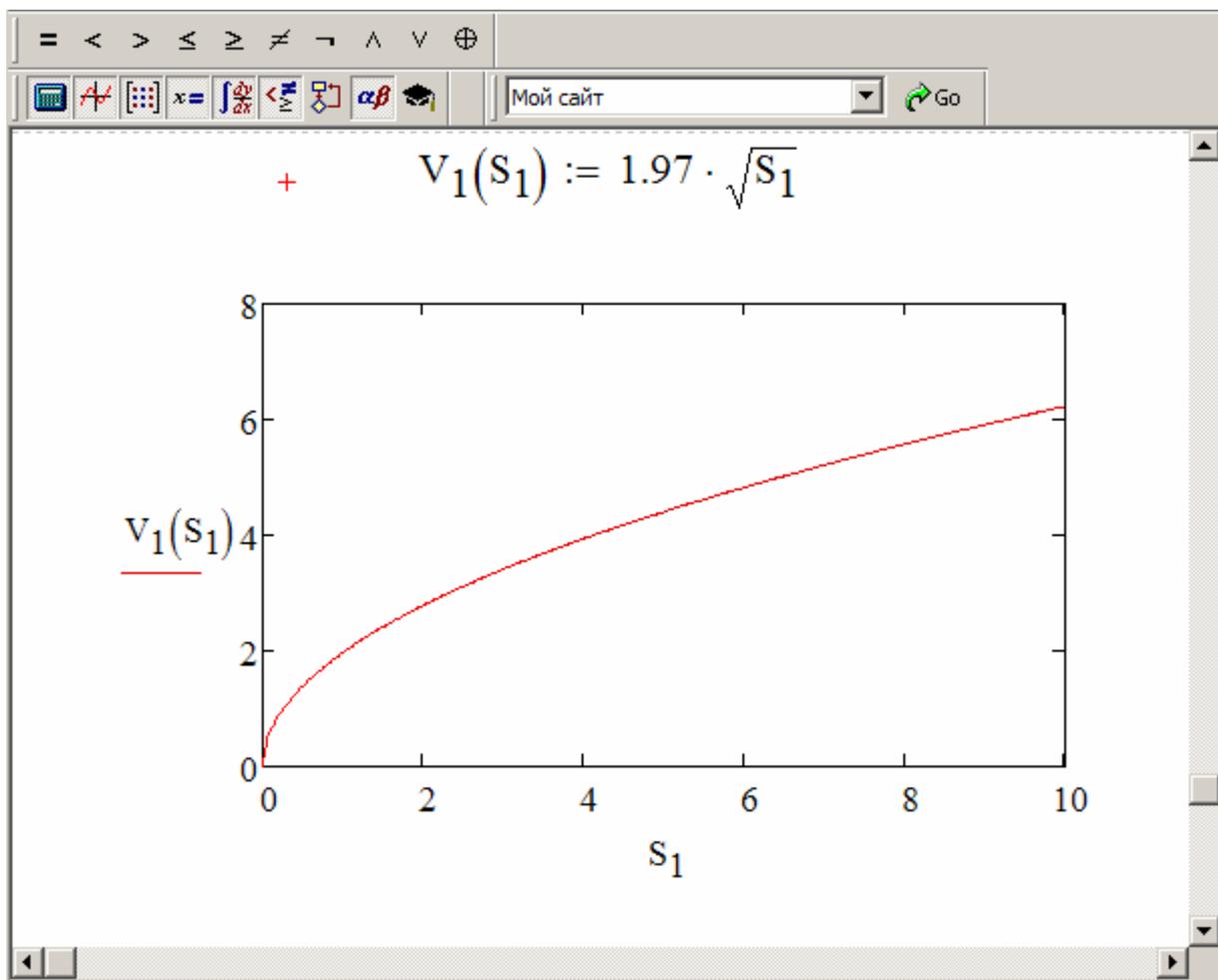


Рисунок 4 – График изменения скорости груза 1

4 Оформление отчета по лабораторной работе

Отчет по лабораторной работе должен оформляться в соответствии с требованиями СТО 02069024.101-2010 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Отчет обязательно должен содержать:

- исходные данные задания,
- расчетную схему с указанием всех действующих на механическую систему внешних сил, а также направлений скоростей и угловых скоростей тел системы,
- кинематический анализ движения системы,
- выражения для определения кинетических энергий тел и системы в целом,
- выражения для определения внешних сил,
- выражение для определения суммы мощностей внешних сил,
- искомую зависимость между скоростью груза 1 и его перемещением, а также график изменения скорости, построенный в системе MathCAD,
- полученное значение ускорения груза 1.

Список использованных источников

- 1 Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник для вузов. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова – 11-е изд., стер. – СПб: Лань, 2004. – 768 с.
- 2 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов. / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 10-е изд., стер. - М.: Интеграл-пресс, 2003. - 384 с.
- 3 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М. Тарг - 14-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003 - 416с.
- 4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов в 3-х томах. Т.2. Динамика. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640с.
- 5 Дьяконов, В. Mathcad 2000: учебный курс. / В. Дьяконов – СПб: Питер, 2000. – 592 с.: ил.