

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Ю.Л. Власов, Л.И. Кудина

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 151600.62 Прикладная механика

Оренбург
2012

УДК 531.18
ББК 22.21я73
В58

Рецензент – доцент, кандидат технических наук С.Н. Горелов

Власов, Ю.Л.

В58 Свободные колебания системы с одной степенью свободы: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Аналитическая динамика и теория колебаний»/ Ю. Л. Власов; Л. И. Кудина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. - 34 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения о свободных колебаниях механических систем с одной степенью свободы, варианты заданий для лабораторной работы и пример ее выполнения.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 151600.62 Прикладная механика, при выполнении лабораторной работы по дисциплине «Аналитическая динамика и теория колебаний». Будут полезны для самостоятельной работы студентов транспортных, энергетических и машиностроительных направлений подготовки всех форм обучения при изучении таких дисциплин, как «Теоретическая механика», «Механика твердых тел», «Прикладные задачи динамики твердого тела», а также специальных курсов, посвященных изучению теории колебаний механических систем.

УДК 531.18
ББК 22.21я73

© Власов Ю.Л.,
Кудина Л.И., 2012
© ОГУ, 2012

Содержание

1 Краткие теоретические сведения.....	4
1.1 Малые колебания системы около положения устойчивого равновесия	4
1.2 Основные свойства свободных колебаний системы с одной степенью свободы	10
1.3 Геометрическая интерпретация движения системы на фазовой плоскости	11
1.4 Общие рекомендации по решению задач	13
2 Вопросы для самоконтроля	14
3 Лабораторная работа. Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы.....	16
3.1 Содержание лабораторной работы	16
3.3 Общие рекомендации по оформлению отчета по лабораторной работе....	33
4 Литература, рекомендуемая для изучения темы	34

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Малые колебания системы около положения устойчивого равновесия

Рассмотрим консервативную механическую систему материальных точек с голономными стационарными связями, имеющую одну степень свободы. Предположим, что система находится в положении устойчивого равновесия. Выведем систему из этого положения, сообщив ее точкам малые начальные возмущения (малые отклонения от положения равновесия и скорости). Вследствие устойчивости положения равновесия при дальнейшем движении системы отклонения и скорости всех ее точек будут также малы по модулю, т.е. система будет совершать движение вблизи этого положения равновесия.

Так как система имеет одну степень свободы, то ее положение можно однозначно определить заданием одной обобщенной координаты q , которую будем отсчитывать от положения устойчивого равновесия.

Составим дифференциальное уравнение дальнейшего движения системы в форме дифференциальных уравнений Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (1.1)$$

где T – кинетическая энергия системы;

Q – обобщенная сила, соответствующая выбранной обобщенной координате q .

Так как на систему действуют только потенциальные силы, то обобщенная сила Q , соответствующая выбранной обобщенной координате q , определяется соотношением:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (1.2)$$

где Π – потенциальная энергия системы.

С учетом (1.2) уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}. \quad (1.3)$$

Так как обобщенная координата q и обобщенная скорость \dot{q} являются малыми величинами, то в уравнении (1.3) можно ограничиться членами не выше второго порядка малости [1].

С указанной степенью точности приближенное выражение для кинетической энергии имеет вид [2]:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (1.4)$$

где a – обобщенный коэффициент инерции, характеризующий инертность механической системы.

Выражение (1.4) показывает, что **кинетическая энергия механической системы с одной степенью свободы является квадратичной формой обобщенной скорости.**

Потенциальная энергия механической системы с одной степенью свободы с точностью до величин второго порядка малости определяется выражением [2]:

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (1.5)$$

где c – обобщенный коэффициент жесткости, характеризующий упругие свойства механической системы.

Выражение (1.5) показывает, что *потенциальная энергия механической системы с одной степенью свободы является квадратичной формой обобщенной координаты.*

Заметим, что значения и размерность обобщенных коэффициентов упругости и жесткости зависят от выбранной обобщенной координаты.

Подставляя (1.4), (1.5) в уравнение (1.3) и учитывая, что коэффициенты квадратичных форм a и c постоянны, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq, \quad (1.6)$$

$$a\ddot{q} = -cq, \quad (1.7)$$

$$a\ddot{q} + cq = 0, \quad (1.8)$$

$$\ddot{q} + \frac{c}{a}q = 0. \quad (1.9)$$

Введем обозначение

$$\frac{c}{a} = k^2, \quad (1.10)$$

где k – положительное вещественное число.

С учетом принятого обозначения (1.10) уравнение (1.9) примет вид:

$$\ddot{q} + k^2q = 0. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний системы с одной степенью свободы.*

Отметим, что данное уравнение совпадает по форме с дифференциальным уравнением прямолинейных колебаний материальной точки при действии линейной

восстанавливающей силы [1].

Общее решение дифференциального уравнения (1.11) имеет вид:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.12)$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий движения.

Продифференцировав (1.12) по времени, получим закон изменения обобщенной скорости:

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (1.13)$$

Запишем начальные условия движения системы при $t_0=0$:

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \quad (1.14)$$

где q_0 и \dot{q}_0 - начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости соответственно.

Подставляя начальные условия (1.14) в (1.12) и (1.13), получим:

$$q_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1, \quad (1.15)$$

$$\dot{q}_0 = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0 = C_2 k. \quad (1.16)$$

Откуда

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}. \quad (1.17)$$

С учетом найденных значений постоянных интегрирования общее решение (1.12) примет вид:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt. \quad (1.18)$$

Представим общее решение (1.12) в ином виде. Для этого в (1.12) положим, что

$$C_1 = A \sin \beta, \quad C_2 = A \cos \beta, \quad (1.19)$$

где A и β – произвольные постоянные.

Подставляя (1.19) в общее решение (1.12), получим:

$$q = A \sin \beta \cos kt + A \cos \beta \sin kt, \quad (1.20)$$

или

$$q = A \sin(kt + \beta). \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) называют общим решением дифференциального уравнения (1.11) в *амплитудной форме*.

Продифференцировав (1.21) по времени, получим закон изменения обобщенной скорости в виде:

$$\dot{q} = Ak \cos(kt + \beta). \quad (1.22)$$

Подставляя начальные условия движения (1.14) в (1.21) и (1.22), найдем значения постоянных A и β :

$$q_0 = A \sin \beta, \quad \dot{q}_0 = Ak \cos \beta, \quad (1.23)$$

откуда

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (1.24)$$

Положительная величина A называется **амплитудой** колебаний и определяет максимальное отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению $q=0$. Безразмерная величина β называется **начальной фазой** колебаний.

Соотношения (1.24) показывают, что амплитуда и начальная фаза свободных колебаний определяются не только инерционными и упругими свойствами системы, но и начальными условиями движения.

Величина k называется **циклической** (круговой) **частотой** колебаний и определяется в соответствии с (1.10):

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (1.25)$$

Период свободных колебаний системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}. \quad (1.26)$$

Частота и период свободных колебаний зависят только от инерционных и упругих свойств системы.

Отметим особо, что выбор обобщенной координаты не отражается на значениях частоты и периода свободных колебаний, которые являются основными физическими характеристиками системы.

График свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы показан на рисунке 1.

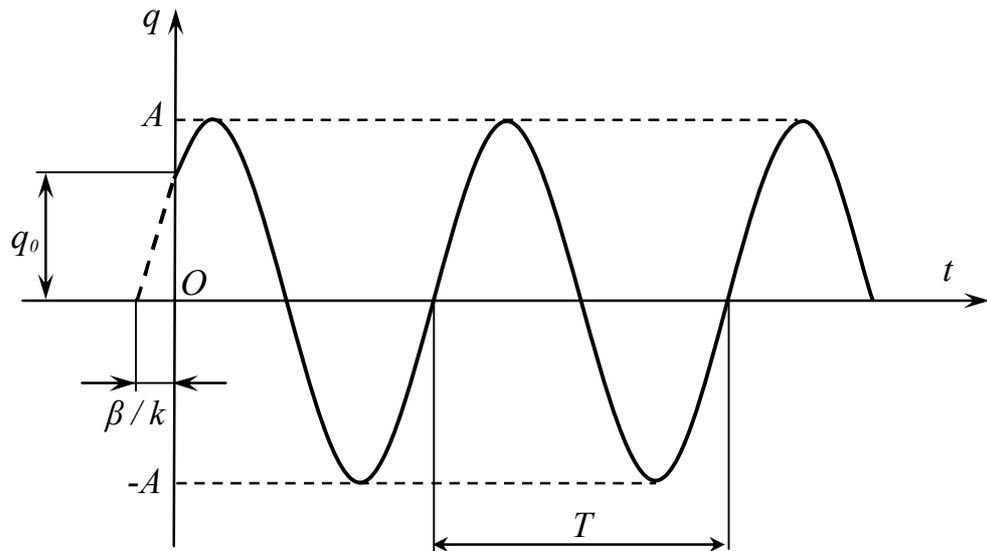


Рисунок 1 – График свободных колебаний системы с одной степенью свободы

1.2 Основные свойства свободных колебаний системы с одной степенью свободы

Соотношения (1.21), (1.24) – (1.26) позволяют сформулировать основные свойства свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы:

1 Свободные колебания системы представляют собой *гармонические колебания*.

2 Частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий движения, а определяются только инерционными и упругими свойствами системы (*свойство изохронности*).

3 Амплитуды колебаний точек системы, а также начальная фаза колебаний зависят от начальных условий движения.

4 Все точки системы находятся всегда в одной фазе, т.е. эти точки одновременно проходят через свои равновесные положения. Координаты всех точек системы одновременно достигают своих максимальных значений [2].

Перечисленные свойства свободных колебаний вытекают из приближенного линейного дифференциального уравнения (1.11). Это уравнение тем точнее описывает истинное движение системы, чем меньше амплитуды колебаний.

1.3 Геометрическая интерпретация движения системы на фазовой плоскости

При определении состояния механической системы совокупность всех ее обобщенных координат и обобщенных скоростей $(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$ принято называть **фазой системы**, а сами эти величины – **фазовыми координатами** системы. В случае системы с одной степенью свободы имеется две фазовые координаты (q, \dot{q}) . Тогда состояние механической системы в каждый момент времени t удобно представить на **фазовой плоскости**, откладывая по оси абсцисс обобщенную координату q , а по оси ординат – обобщенную скорость \dot{q} (рисунок 2).

Точка M , определяемая координатами $(x = q, y = \dot{q})$, называется **изображающей точкой**.

При движении системы точка M движется в фазовой плоскости, описывая некоторую кривую, называемую **фазовой траекторией**. Совокупность фазовых траекторий, построенных для различных начальных условий движения системы, называется **фазовой диаграммой**, или **фазовым портретом** механической системы.

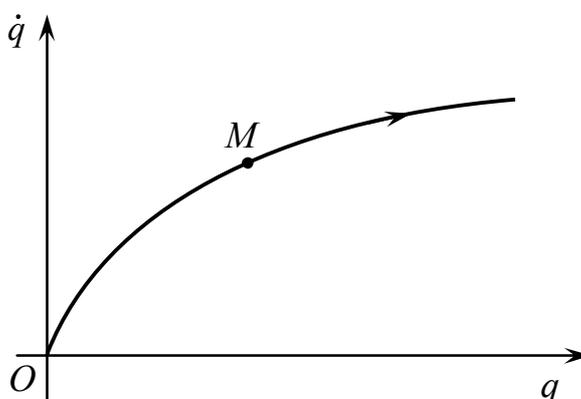


Рисунок 2 –Фазовая траектория системы при равноускоренном движении

Найдем уравнение фазовой траектории системы с одной степенью свободы при малых свободных колебаниях. Для этого исключим из уравнений (1.21) и (1.22) время t :

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 = \sin^2(kt + \beta), \quad \left(\frac{\dot{q}}{Ak}\right)^2 = \cos^2(kt + \beta). \quad (1.27)$$

Отсюда,

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}}{Ak}\right)^2 = 1. \quad (1.28)$$

Следовательно, фазовой траекторией является эллипс (рисунок 3), а фазовый портрет системы представляет собой непрерывную последовательность concentрически подобных эллипсов. Начало координат представляет собой особую точку типа *центр*, соответствующую положению устойчивого равновесия системы.

Можно доказать, что площадь фигуры, охватываемой фазовой траекторией в виде эллипса, пропорциональна полной механической энергии системы $E = T + \Pi$.

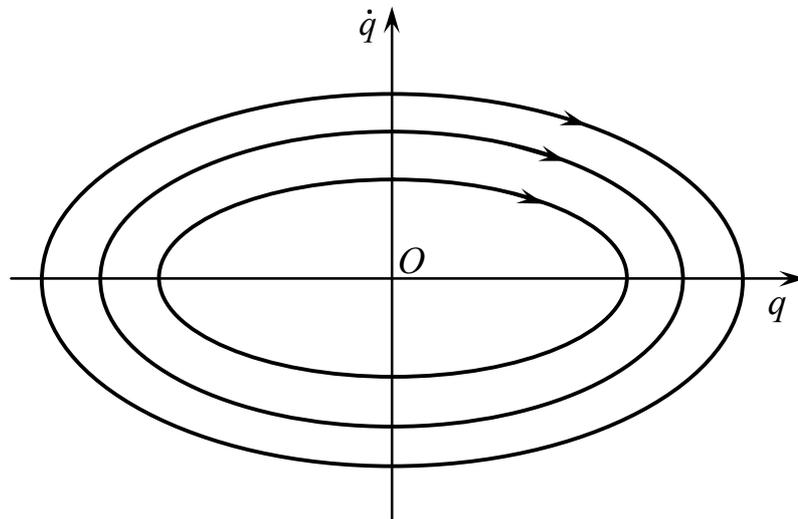


Рисунок 3 – Фазовый портрет свободных колебаний системы с одной степенью свободы

Метод фазовой плоскости позволяет наглядно представить совокупность возможных движений механической системы при различных начальных условиях и широко используется в теории колебаний, теории автоматического управления, электротехнике и т.д. для качественного анализа поведения различных динамических систем.

1.4 Общие рекомендации по решению задач

При решении задач о малых свободных колебаниях механической системы с одной степенью свободы рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

- 1 Выбрать обобщенную координату q .
- 2 Выяснить физический смысл обобщенной скорости \dot{q} .
- 3 Составить выражение для кинетической энергии системы T как функции обобщенной скорости \dot{q} и, представив кинетическую энергию в виде (1.4), найти обобщенный коэффициент инерции a .
- 4 Составить выражение для потенциальной энергии системы Π как работы потенциальных сил системы при возвращении системы из некоторого отклоненного состояния в равновесное, принятое за нулевое, начальное.
- 5 Представив потенциальную энергию как функцию обобщенной скорости (1.5), найти обобщенный коэффициент жесткости c .
- 6 Подставив полученные выражения T и Π в уравнение Лагранжа II рода (1.3), составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы.
- 7 Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение движения системы.
- 8 Записать начальные условия движения и определить постоянные интегрирования.
- 9 С учетом найденных значений постоянных интегрирования записать закон движения системы и определить остальные искомые величины.

2 Вопросы для самоконтроля

1 Какие параметры являются основными физическими характеристиками свободных колебаний механической системы?

2 Какой вид имеет выражение для кинетической энергии системы с одной степенью свободы в обобщенных координатах? потенциальной энергии системы с одной степенью свободы в обобщенных координатах?

3 Что характеризует обобщенный коэффициент инерции? обобщенный коэффициент жесткости?

4 Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы?

5 Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний системы с одной степенью свободы?

6 Как записывается уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы в амплитудной форме?

7 Какая величина называется амплитудой свободных колебаний системы? начальной фазой колебаний?

8 Как определяется циклическая (круговая) частота свободных колебаний системы? период свободных колебаний системы?

9 От чего зависит амплитуда и начальная фаза колебаний?

10 Перечислите основные свойства малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы.

11 Что называется фазовыми координатами системы?

12 Что называется фазовой траекторией системы?

13 Что называется фазовой диаграммой или фазовым портретом системы?

14 Какой вид имеет фазовая диаграмма свободных колебаний системы с одной степенью свободы? фазовый портрет свободных колебаний?

15 Уравнение движения системы в обобщенных координатах имеет вид $q = 5 \cos\left(12t + \frac{\pi}{3}\right)$. Чему равен период свободных колебаний системы?

16 Уравнение движения системы в обобщенных координатах имеет вид $q = 4 \cos 14t + 3 \sin 14t$. Чему равна амплитуда и начальная фаза свободных колебаний системы?

17 Определить частоту свободных колебаний механической системы, если дифференциальное уравнение движения этой системы имеет вид $2\ddot{q} + 162q = 0$, где q - обобщенная координата.

18 Определить амплитуду малых колебаний механической системы, описываемых дифференциальным уравнением $\ddot{q} + 16q = 0$, где q - обобщенная координата, м. Начальное смещение $q_0 = 0,01$ м, начальная скорость $\dot{q}_0 = 0,2$ м/с.

19 Определить частоту свободных колебаний однородного диска (рисунок 4), если его масса $m = 3$ кг, а коэффициент жесткости пружины $c = 100$ Н/м.

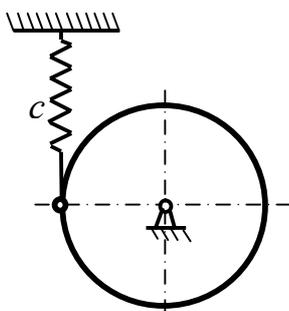


Рисунок 4

20 Определить момент инерции твердого тела, изображенного на рисунке 5, относительно его оси вращения x , если период малых колебаний тела равен $T = 8\pi$ с, расстояние $l = 2$ м, а коэффициент жесткости пружины $c = 40$ Н/м.

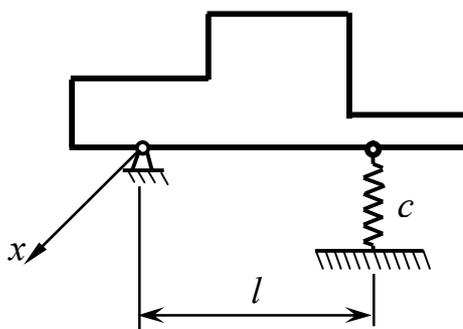


Рисунок 5

3 Лабораторная работа. Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

Цель работы:

Исследовать характер и определить основные параметры малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия.

3.1 Содержание лабораторной работы

Для механической системы с принятыми в соответствии с вариантом схемой и исходными данными требуется:

- 1) составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний заданной системы, пренебрегая силами сопротивлений, массами пружин и нитей;
- 2) получить аналитически уравнение движения груза l в виде $y=y(t)$, приняв за начало отсчета положение груза l при статической деформации пружин;
- 3) определить циклическую частоту и период малых свободных колебаний системы;
- 4) получить численное решение составленного дифференциального уравнения движения системы при заданных начальных условиях движения;
- 5) построить графики полученных решений дифференциального уравнения движения;
- 6) построить фазовую диаграмму системы при заданных начальных условиях движения;
- 7) проанализировать и сравнить полученные результаты.

Схемы механических систем показаны на рисунках 6 и 7. Необходимые для решения исходные данные приведены в таблице 1.

В таблице 1 приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел 1, 2 и 3 соответственно; c_1 и c_2 – коэффициенты жесткости пружин; y_0 – начальное отклонение груза 1 от положения равновесия, соответствующего статической деформации пружины; V_0 – начальная скорость груза 1.

Механические системы на рисунках 6 – 7 показаны в положении покоя (при статической деформации пружин). Для всех вариантов принять $R = 1$ м. Радиус инерции ступенчатого блока $i_x = R$, остальные блоки считать сплошными однородными дисками, стержни – однородными.

Исходные данные для выполнения работы выбираются студентом в соответствии с двузначным вариантом. **Номер условия** в таблице 1 соответствует **первой** цифре варианта, **номер схемы** на рисунках 6 – 7 соответствует **последней** цифре варианта. Например, при варианте 47 исходные данные принимаются по строке 4 таблицы 1, по рисункам 6 – 7 выбирается схема 7.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер условия	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	$b, \text{ см}$	$\gamma, \text{ рад}$	$y_0, \text{ см}$	$V_0, \text{ м/с}$
	кг			Н/м					
0	3,0	7,0	4,0	1000	4000	10	$\pi/3$	6,0	1,0
1	4,5	5,2	1,0	800	1500	15	$\pi/6$	4,0	0,5
2	5,0	6,3	3,5	1500	2700	35	$2\pi/3$	3,0	0,3
3	2,0	8,4	6,0	1200	3000	65	$\pi/4$	5,0	0,4
4	2,5	3,5	1,5	600	1300	30	$\pi/2$	8,0	0,15
5	1,7	3,0	2,0	3000	2200	20	$5\pi/6$	0,5	0,25
6	4,5	9,0	7,2	4500	1500	40	$3\pi/4$	1,0	0,8
7	1,0	2,0	4,0	1600	3000	50	0	2,0	0,45
8	3,8	5,0	3,2	2500	5000	55	π	2,5	0,6
9	0,5	1,5	3,0	900	1400	45	$\pi/12$	0,8	0,2

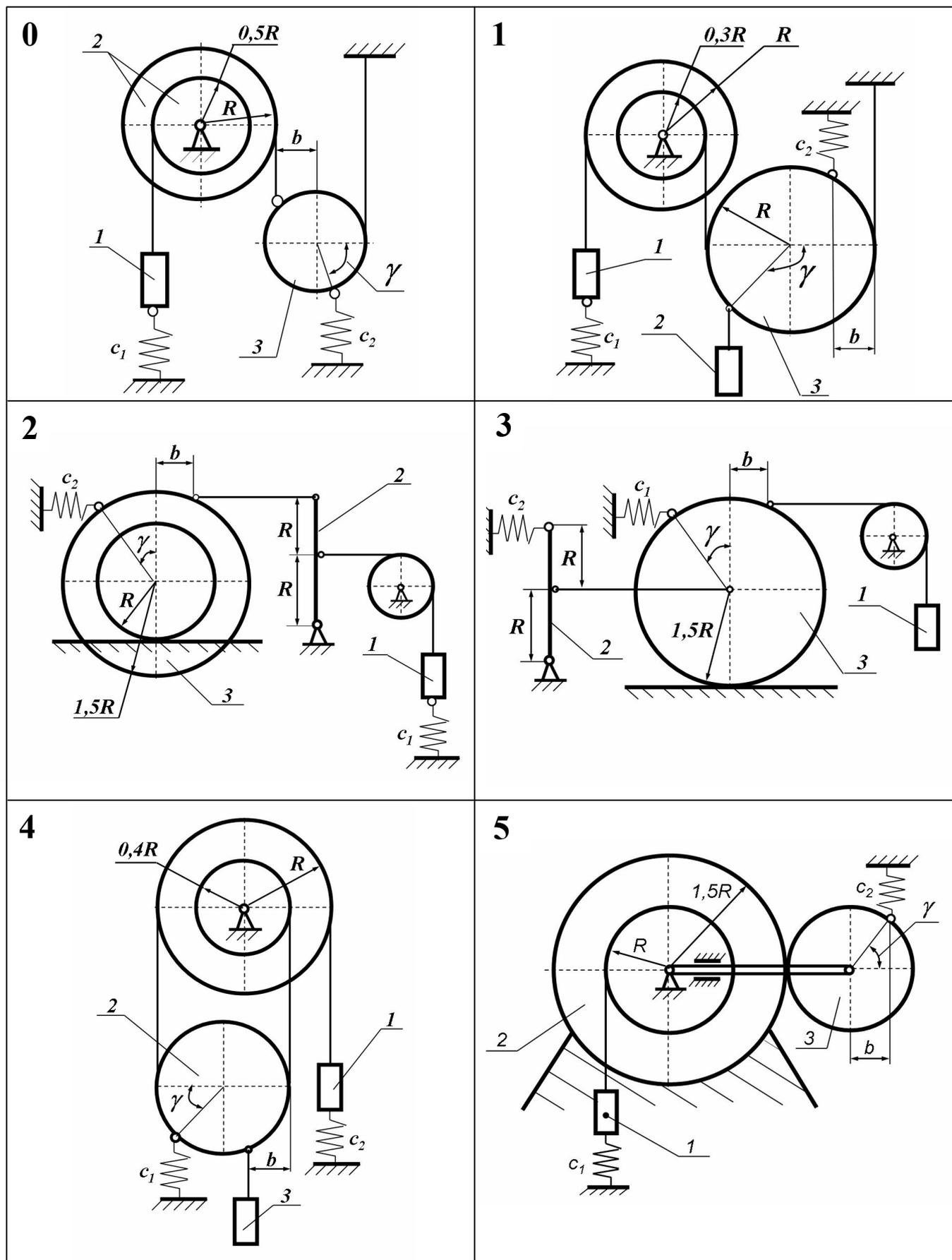


Рисунок 6

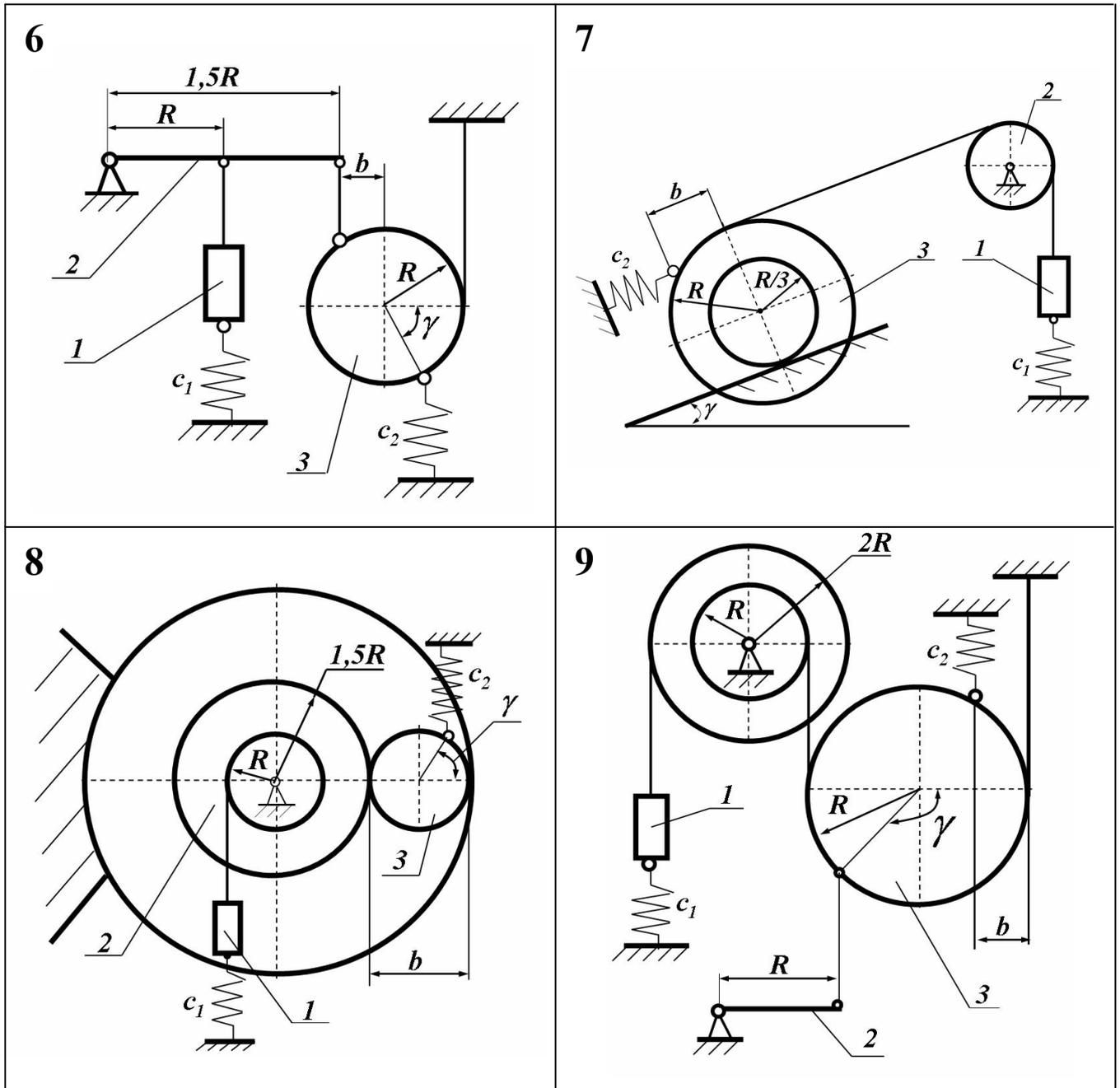


Рисунок 7

3.2 Пример выполнения лабораторной работы

Дано: $m_1 = 2 \text{ кг}$; $m_2 = 4 \text{ кг}$; $m_3 = 6 \text{ кг}$; $c_1 = 2000 \text{ Н/м}$; $c_2 = 4000 \text{ Н/м}$; $b = 0,3 \text{ м}$;
 $R = 0,5 \text{ м}$; $y_0 = 0,03 \text{ м}$; $V_0 = 0,2 \text{ м/с}$.

Для заданной механической системы (рисунок 8) требуется:

- 1) составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы в обобщенных координатах, пренебрегая силами сопротивлений, массами пружин и нитей;
- 2) получить аналитически уравнение движения груза I в виде $y=y(t)$, приняв за начало отсчета положение груза I при статической деформации пружин;
- 3) определить циклическую частоту и период малых свободных колебаний системы;
- 4) получить численное решение составленного дифференциального уравнения движения системы при заданных начальных условиях движения;
- 5) построить графики полученных решений дифференциального уравнения движения;
- 6) построить фазовую диаграмму системы при заданных начальных условиях движения;
- 7) проанализировать и сравнить полученные результаты.

Решение.

Примем за обобщенную координату, характеризующую положение системы в произвольный момент времени, вертикальное отклонение груза I от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины (рисунок 8):

$$q = y. \quad (4.1)$$

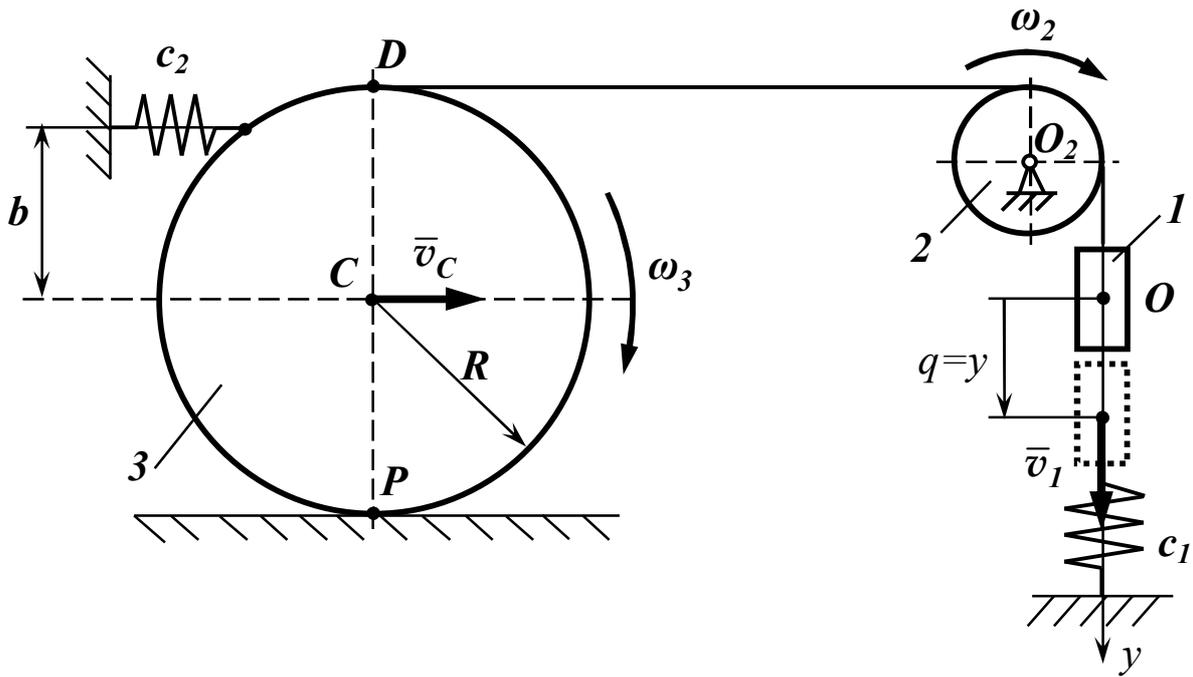


Рисунок 8

Тогда, обобщенная скорость

$$\dot{q} = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_1, \quad (4.2)$$

где v_1 – скорость поступательного движения груза l .

Уравнение Лагранжа II рода (1.3) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}. \quad (4.3)$$

Кинетическую энергию системы T вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y и обобщенной скорости \dot{y} , а потенциальную энергию Π – с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y .

Выразим угловые скорости тел 2, 3 и скорость центра масс тела 3 через обобщенную скорость $v_1 = \dot{y}$:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{\dot{y}}{R_2}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{DP} = \frac{\dot{y}}{2R}; \quad v_C = \omega_3 \cdot CP = \frac{\dot{y}}{2}. \quad (4.4)$$

Найдем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (4.5)$$

Кинетическая энергия тела 1, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2}. \quad (4.6)$$

Кинетическая энергия тела 2, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T_2 = \frac{J_{O_2} \omega_2^2}{2}, \quad (4.7)$$

где момент инерции однородного диска 2 относительно оси вращения

$$J_{O_2} = \frac{m_2 R_2^2}{2}. \quad (4.8)$$

Тогда,

$$T_2 = \frac{\frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{y}}{R_2} \right)^2}{2} = \frac{m_2 \dot{y}^2}{4}. \quad (4.9)$$

Кинетическая энергия тела 3, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_3^2}{2}. \quad (4.10)$$

Момент инерции однородного диска 3 относительно центральной оси:

$$J_C = \frac{m_3 R^2}{2}. \quad (4.11)$$

Тогда,

$$T_3 = \frac{m_3 \left(\frac{\dot{y}}{2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{m_3 R^2}{2} \left(\frac{\dot{y}}{2R}\right)^2}{2} = \frac{3m_3 \dot{y}^2}{16}. \quad (4.12)$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой механической системы

$$T = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{y}^2}{4} + \frac{3m_3 \dot{y}^2}{16} = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{8} \right) \dot{y}^2, \quad (4.13)$$

или

$$T = \frac{1}{2} a \dot{y}^2. \quad (4.14)$$

Сопоставляя выражения (4.13) и (4.14), получим, что обобщенный коэффициент инерции равен

$$a = m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3m_3}{8} = 6,25 \text{ кг}. \quad (4.15)$$

Найдем потенциальную энергию системы Π как работу сил тяжести системы и сил упругости пружин при перемещении системы из отклоненного положения, когда груз I имеет координату y , в начальное положение, которым считаем положение покоя системы (рисунок 9):

$$\Pi = \Pi_{mg} + \Pi_c. \quad (4.16)$$

Потенциальная энергия сил тяжести при указанном перемещении:

$$\Pi_{mg} = -m_1 g y. \quad (4.17)$$

Потенциальная энергия деформированных пружин:

$$\Pi_c = \Pi_{c1} + \Pi_{c2}. \quad (4.18)$$

В состоянии покоя пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 деформированы соответственно на величины f_{cm1} и f_{cm2} .

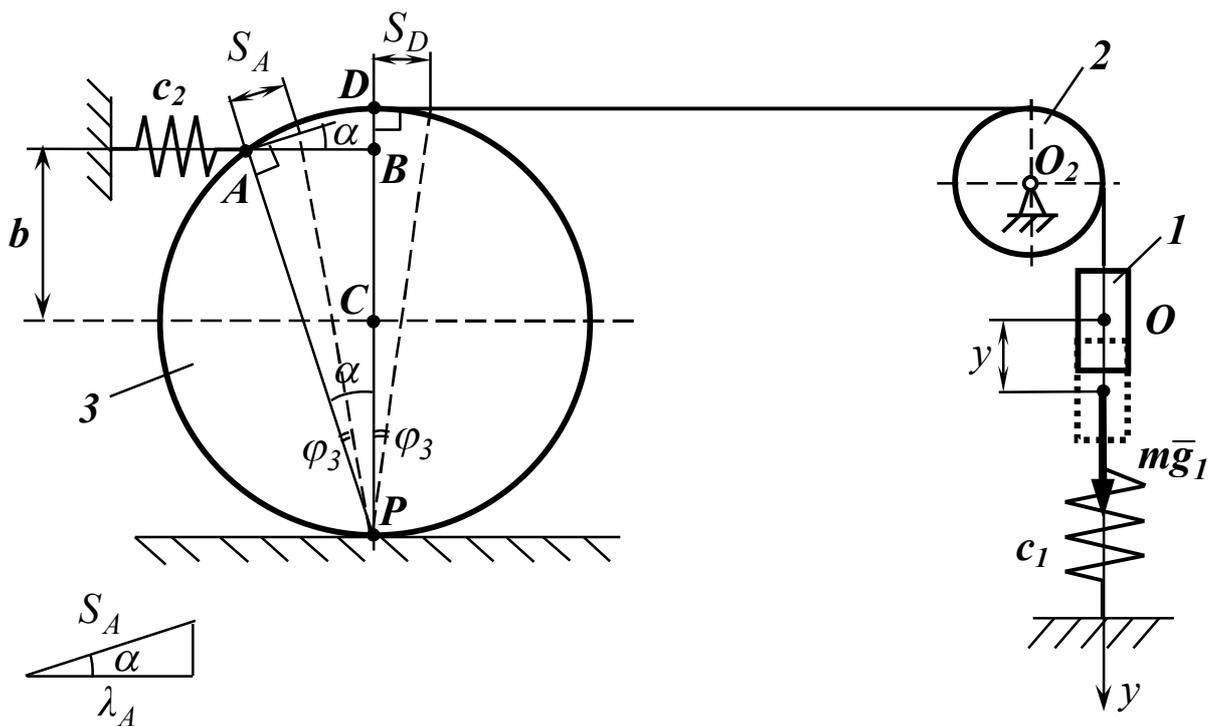


Рисунок 9

Тогда, потенциальная энергия деформированной пружины с коэффициентом жесткости c_1 :

$$\Pi_{c_1} = \frac{c_1}{2} \left[(y + f_{cm1})^2 - f_{cm1}^2 \right] = \frac{c_1 y^2}{2} + c_1 f_{cm1} y. \quad (4.19)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины с коэффициентом жесткости c_2 :

$$\Pi_{c_2} = \frac{c_2}{2} \left[(\lambda_A + f_{cm2})^2 - f_{cm2}^2 \right] = \frac{c_2 \lambda_A^2}{2} + c_2 f_{cm2} \lambda_A, \quad (4.20)$$

где λ_A – удлинение пружины, прикрепленной к телу 3 в точке A .

Удлинение пружины λ_A находим как проекцию перемещения точки прикрепления пружины S_A , вызванное поворотом тела 3 на угол φ_3 , на направление пружины (рисунок 9):

$$\lambda_A = S_A \cos \alpha, \quad (4.21)$$

С точностью до величин первого порядка малости относительно обобщенной координаты y , имеем

$$\varphi_3 = \frac{S_D}{DP} = \frac{y}{2R}; \quad S_A = \varphi_3 \cdot AP = \frac{y}{2R} \cdot AP. \quad (4.22)$$

Тогда, подставляя (4.22) в (4.21), получим:

$$\lambda_A = S_A \cos \alpha = \frac{y}{2R} \cdot AP \cdot \cos \alpha = \frac{y}{2R} \cdot BP = \frac{y}{2R} \cdot (R + b) = \frac{y}{2} \cdot \left(1 + \frac{b}{R} \right). \quad (4.23)$$

Таким образом,

$$\Pi_{c_2} = \frac{c_2}{8} \left(1 + \frac{b}{R} \right)^2 y^2 + \frac{c_2 f_{cm2}}{2} \left(1 + \frac{b}{R} \right) y. \quad (4.24)$$

С учетом (4.17), (4.19) и (4.24) потенциальная энергия системы

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_1 g y + \frac{c_1}{2} y^2 + c_1 f_{cm1} y + \frac{c_2}{8} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^2 y^2 + \frac{c_2 f_{cm2}}{2} \left(1 + \frac{b}{R}\right) y; \\ \Pi &= \left[-m_1 g + c_1 f_{cm1} + \frac{1}{2} c_2 f_{cm2} \left(1 + \frac{b}{R}\right) \right] y + \left[\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{8} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^2 \right] y^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Так как в положении равновесия, соответствующем статической деформации пружин, обобщенная сила (1.2) равна нулю, то

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (4.26)$$

Из (4.25) получим

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_{y=0} = -m_1 g + c_1 f_{cm1} + \frac{1}{2} c_2 f_{cm2} \left(1 + \frac{b}{R}\right) = 0. \quad (4.27)$$

С учетом (4.27) потенциальная энергия системы (4.25) примет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[c_1 + \frac{c_2}{4} \left(1 + \frac{b}{R}\right)^2 \right] y^2, \quad (4.28)$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2} c y^2. \quad (4.29)$$

Сопоставляя выражения (4.28) и (4.29) получим, что обобщенный коэффициент жесткости равен:

$$c = c_1 + \frac{c_2}{4} \left(1 + \frac{b}{R} \right)^2 = 2000 + \frac{4000}{4} \left(1 + \frac{0,3}{0,5} \right)^2 = 4560 \text{ Н / м.} \quad (4.30)$$

Подставляя (4.14) , (4.29) в уравнение (1.3) и учитывая, что коэффициенты квадратичных форм a и c постоянны, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq,$$

$$a\ddot{q} = -cq,$$

$$a\ddot{q} + cq = 0,$$

$$\ddot{q} + \frac{c}{a}q = 0,$$

или

$$\ddot{q} + k^2q = 0, \quad (4.31)$$

где циклическая частота свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{4560}{6,25}} = 27 \text{ рад / с.} \quad (4.32)$$

Период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{27} = 0,23 \text{ с.} \quad (4.33)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения движения (4.31) имеет вид (1.12):

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (4.34)$$

Продифференцируем (4.33) по времени

$$\dot{y} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (4.35)$$

Начальные условия движения при $t_0=0$:

$$y_0 = 0,03 \text{ м}, \quad \dot{y}_0 = v_0 = 0,2 \text{ м/с}. \quad (4.36)$$

Подставляя начальные условия движения (4.35) в (4.33) и (4.34), получим:

$$y_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1, \quad (4.37)$$

$$\dot{y}_0 = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0 = C_2 k. \quad (4.38)$$

Откуда

$$\begin{aligned} C_1 &= y_0 = 0,03 \text{ м}, \\ C_2 &= \frac{\dot{y}_0}{k} = \frac{v_0}{k} = \frac{0,2}{27} = 0,0074 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

С учетом найденных значений (4.32), (4.39) уравнение движения груза I (4.34) примет вид:

$$y = 0,03 \cos 27t + 0,0074 \sin 27t \text{ (м)}. \quad (4.40)$$

Представим (4.40) в амплитудной форме (1.21). С учетом (1.24) амплитуда A и начальная фаза колебаний β :

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{k}\right)^2} = \sqrt{(0,03)^2 + (0,0074)^2} = 0,031 \text{ м}; \quad (4.41)$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{ky_0}{\dot{y}_0}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{27 \cdot 0,03}{0,2}\right) = 1,329.$$

Окончательно

$$y = 0,031 \sin(27t + 1,329) \quad (\text{м}). \quad (4.42)$$

Построим графики полученных решений (4.40), (4.42), воспользовавшись возможностями Mathcad. Подробные сведения о построении двумерных графиков и их форматировании содержатся в [6, 7].

Ниже приводятся тексты программ для определения основных характеристик свободных колебаний и решения дифференциального уравнения движения рассматриваемой системы (4.31). Необходимые пояснения к тексту программы выделены жирным курсивом.

Исходные данные :

$$\begin{aligned} m1 &:= 2 & m2 &:= 4 & m3 &:= 6 \\ c1 &:= 2000 & c2 &:= 4000 \\ b &:= 0.3 & R &:= 0.5 \\ y0 &:= 0.03 & v0 &:= 0.2 \end{aligned}$$

Вычисление обобщенных коэффициентов инерции и жесткости :

$$\begin{aligned} a &:= m1 + \frac{m2}{2} + 3 \cdot \frac{m3}{8} \\ c_{\text{м}} &:= c1 + \frac{c2}{4} \cdot \left(1 + \frac{b}{R}\right)^2 \end{aligned}$$

Частота свободных колебаний:

$$k := \sqrt{\frac{c}{a}} \quad k = 27.011$$

Определение постоянных интегрирования:

$$C1 := y0 \quad C2 := \frac{v0}{k}$$

$$C1 = 0.03 \quad C2 = 7.404 \times 10^{-3}$$

Вычисление амплитуды и начальной фазы колебаний:

$$A := \sqrt{C1^2 + C2^2} \quad A = 0.031$$

$$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{C1}{C2}\right) \quad \beta = 1.329$$

$$y(t) := C1 \cdot \cos(k \cdot t) + C2 \cdot \sin(k \cdot t)$$

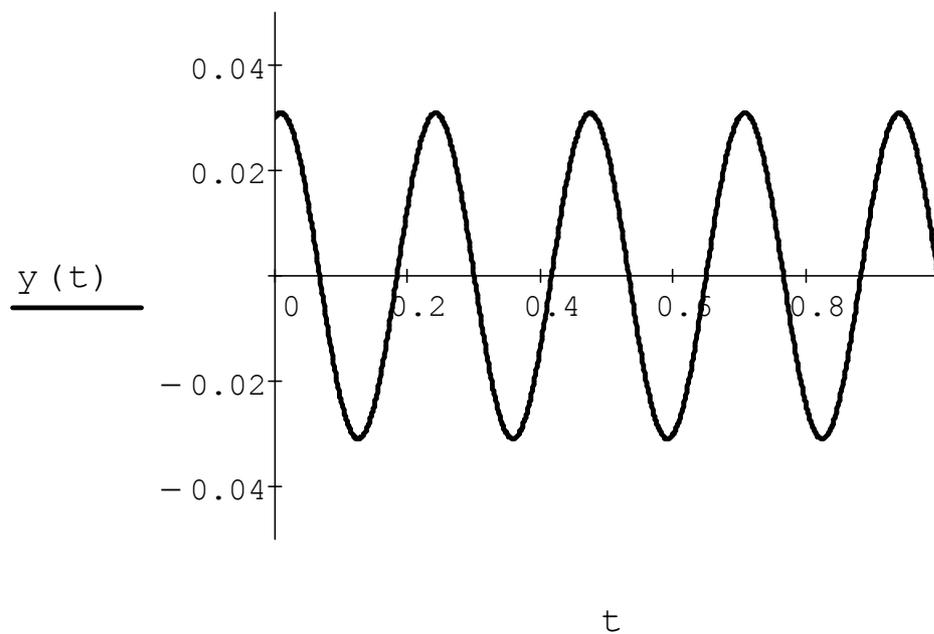


Рисунок 10 – Аналитическое решение (4.40)

$$Y(t) := A \cdot \sin(k \cdot t + \beta)$$

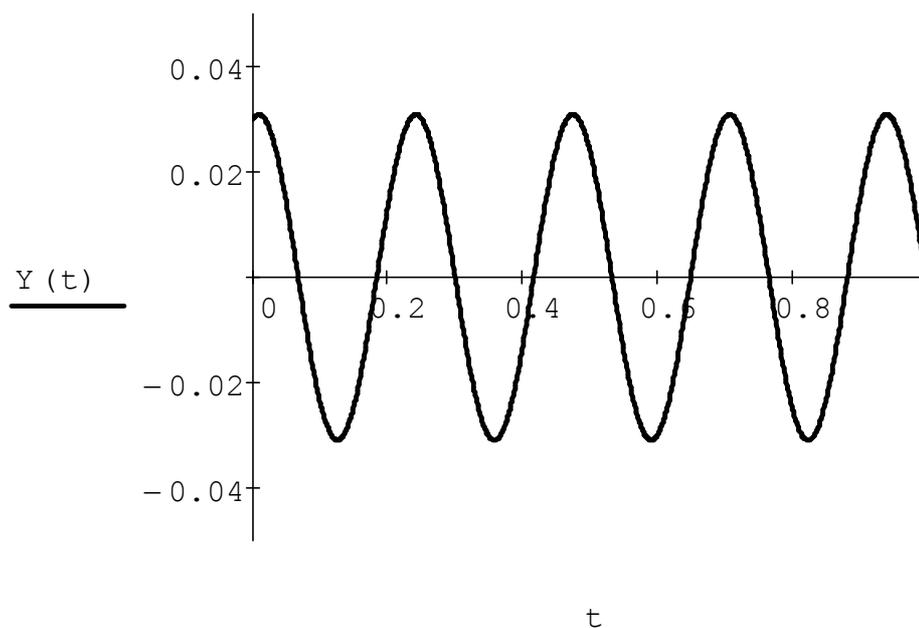


Рисунок 11 – Аналитическое решение (4.42)

Решим теперь полученное дифференциальное уравнение движения (4.31) в Mathcad с помощью программного блока **Given**, реализующего численный метод Рунге – Кутты.

Given

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) + k^2 \cdot z(t) = 0$$

$$z(0) = y_0$$

$$z'(0) = v_0$$

$$z := \text{Odesolve}(t, 10, 1000)$$

Символ производной при задании начальных условий вводится в виде штриха комбинацией клавиш <Ctrl> + <=>. Аргументами встроенной функции $\text{Odesolve}(t, t_k, \text{step})$ являются имя переменной t , значение правой границы интервала интегрирования

$[t_0, t_k]$, количество шагов интегрирования на данном интервале. Параметр «step» является необязательным и может быть опущен.

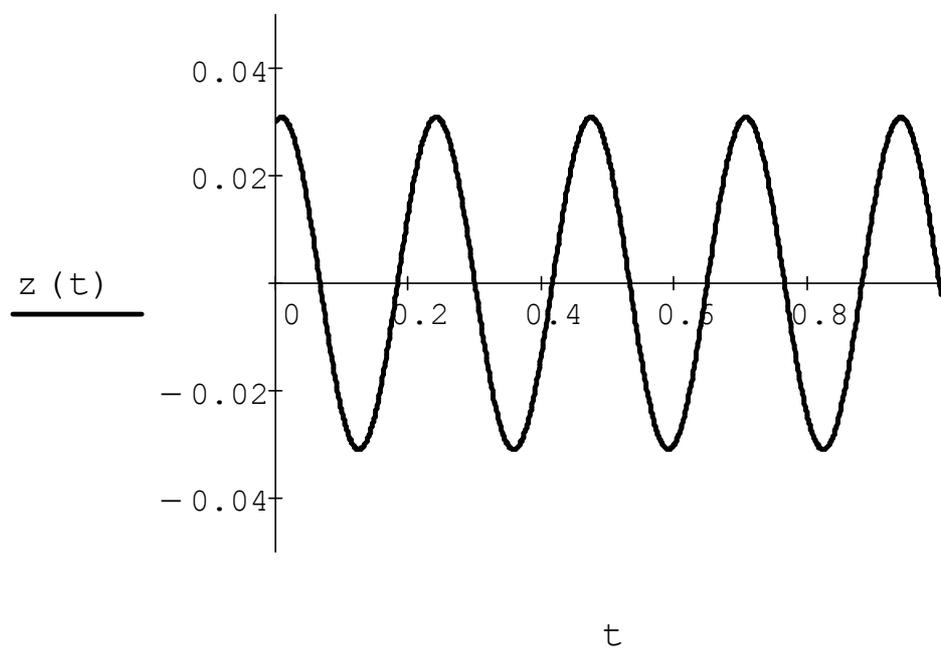


Рисунок 12 – Результаты численного интегрирования (4.31)

Как следует из сравнения графиков, представленных на рисунках 4.3, 4.4 и 4.5, все полученные решения дифференциального уравнения (4.31) совпадают.

На рисунке 4.6 показана фазовая диаграмма заданной механической системы с одной степенью свободы при заданных начальных условиях движения.

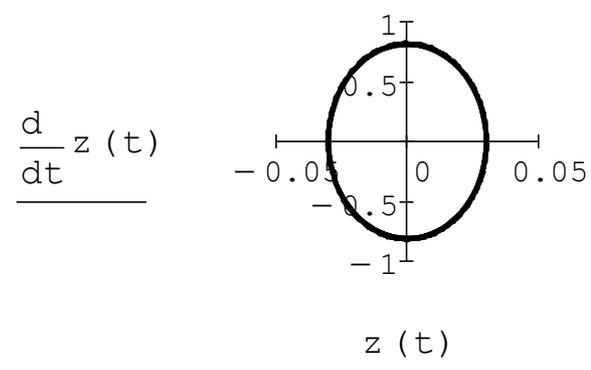


Рисунок 13 – Фазовая диаграмма заданной механической системы

Представленные на рисунках 10 – 13 результаты вычислений позволяют сделать следующие выводы:

- малые свободные колебаний системы с одной степенью свободы являются гармоническими;
- фазовая диаграмма движения системы при заданных начальных условиях представляет собой эллипс с центром в начале координат, что свидетельствует о наличии незатухающих колебаний системы около положения устойчивого равновесия.

3.3 Общие рекомендации по оформлению отчета по лабораторной работе

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями СТО 02069024.101 – 2010 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Отчет обязательно должен содержать:

- исходные данные задания;
- схему механической системы с указанием всех используемых в решении размеров, величин и обозначений;
- подробное аналитическое решение составленного дифференциального уравнения свободных колебаний системы со всеми необходимыми пояснениями;
- численное решение составленного дифференциального уравнения движения в Mathcad;
- построенные в Mathcad графики аналитического и численного решений;
- фазовую диаграмму малых колебаний системы при заданных начальных условиях;
- вывод.

4 Литература, рекомендуемая для изучения темы

1 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.

2 Яблонский, А.А. Курс теории колебаний : учеб. пособие для вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 336 с.

3 Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 320 с.

4 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для втузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон; под ред. А.А. Яблонского. - 16-е изд., стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 384 с.

5 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов. - В 3 т. - Т.3. Специальные главы механики / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука. 1973. – 488 с.

6 Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ, 2005. – 752 с.

7 Доев, В.С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad.: учебное пособие. / В.С. Доев, Ф.А. Доронин. – СПб.: Лань, 2010. – 592 с.