

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

О. Д. Юрк

**СБОРНИК  
ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ ЗАДАЧ  
ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ И  
МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ  
МЕХАНИКА**

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования инженерно-технических направлений подготовки

Оренбург  
2012

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3я 73

Ю 74

Научный редактор – доктор физ.-мат. наук, профессор Н. А. Манаков

Рецензент – доктор физ.-мат. наук, профессор О.Н. Каныгина

**Юрк, О.Д**

Ю 74

Сборник демонстрационных задач по физике с решениями и методическими указаниями. Механика: учебное пособие / О.Д. Юрк; Оренбургский гос.ун-т-Оренбург: ОГУ, 2012.– 121 с. ISBN

Пособие содержит около 200 вопросов и задач, результаты решений которых могут быть экспериментально проверены на занятиях с использованием простейших демонстрационных средств, имеющихся в кабинетах и лабораториях, или изготовленных собственными силами. В сборник вошли наиболее интересные вопросы и задачи из различных задачников, а также оригинальные экспериментальные примеры (отмеченные «звездочкой»), отражающие 40–летний опыт преподавания автором физики в ВУЗах. Значительное число задач снабжено методическими указаниями по постановке демонстрационного эксперимента. Ко всем вопросам и задачам даны подробные ответы и решения.

Данное учебное пособие, предназначено для преподавателей и студентов вузов, а также учащихся школ и лицеев.

Ю 1604010000

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3я 73

© Юрк О.Д., 2012

© ОГУ, 2012

ISBN

## Содержание

Введение .....	4
Глава 1 Кинематика.....	6
Глава 2 Динамика	15
Ответы, решения и методические указания.....	27
Глава 1 Кинематика.....	27
Глава 2 Динамика.....	65
Список использованных источников.....	120

## Введение

Физика – это не математика и не логика. Все наши теории и модели полезны лишь в том случае, если они предсказывают или подтверждают реальные события в реальном мире. Более того, понимание физики не приходит в результате только умственных упражнений. Нужно на живом опыте знакомиться с физическими явлениями. Однако, своеобразие условий, существующих в учебных аудиториях, и задач преподавания физики заставляет, к сожалению, зачастую идти по пути упрощений, использования моделей и демонстраций только основных наиболее ярких физических явлений. Чтобы устранить в какой-то мере этот недостаток, а также как-то обогатить демонстрационный эксперимент, в список упражнений, наряду с традиционными вычислительными задачами, должны включаться задачи – демонстрации, то есть такие задачи, результаты решений которых могут быть экспериментально продемонстрированы. Это не требует сложного оборудования. Достаточно иметь набор типовых приборов, имеющихся в любом физическом кабинете, или устройства, изготовленные с помощью подручных средств и материалов.

Демонстрационные задачи, включенные в данный сборник, требуют значительного методического опыта. Часто реальная демонстрационная установка несколько отличается от установки, описанной в задаче. Демонстратор должен уметь правильно показать ее работу, используя простейшие средства и приемы, четко демонстрируя главный результат. Чтобы помочь демонстраторам, особенно молодым, значительное число вопросов и задач в сборнике снабжены методическими указаниями, в которых даны рекомендации по постановке конкретного эксперимента. В сборник включены только те вопросы и задачи, которые при желании практически легко воспроизводятся в виде демонстрации. Большую помощь при этом может оказать учебное пособие О.Д. Юрк: Лекционные демонстрации по физике.

Сборник невелик по объему. В нем приводятся около 200 предлагаемых вопросов и задач, расположенных в традиционном порядке по разделам: механика, колебания и волны, электричество, оптика и физика атома. Выбор

задач осуществляется по нескольким признакам: вопросы и задачи должны быть необычными и интересными, сравнительно легко воспроизводимыми экспериментально, с ответами неожиданными и неочевидными, имеющими практическую направленность.

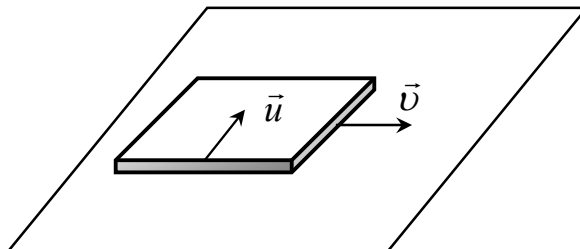
Значительная часть задач заимствована из многочисленных пособий. Однако, в некоторых из них мы заменили вопросы на новые, позволяющие традиционные задачи несколько оживить, создавая тем самым проблемную ситуацию, требующую экспериментальной проверки. Такой подход позволил значительно повысить интерес учащихся и студентов к отысканию правильных решений. Кроме указанных задач в сборник включены также и оригинальные задачи (отмеченные «звездочкой»).

Знакомство с методической литературой показало на почти полное отсутствие задач такого рода. Ряд авторов включают в свои пособия как качественные, так и количественные вопросы, связанные с экспериментом, однако этого количества явно недостаточно. Лучшими из них, по нашему мнению, являются «Сборник качественных задач по физике» М.Е. Тульчинского, «Задачи по физике» В.Г. Зубова и В.П. Шальнова, «Задачи по физике» под редакцией О.Я. Савченко, «Сборник задач по элементарной физике» Б.Б. Буховцева и ряда других.

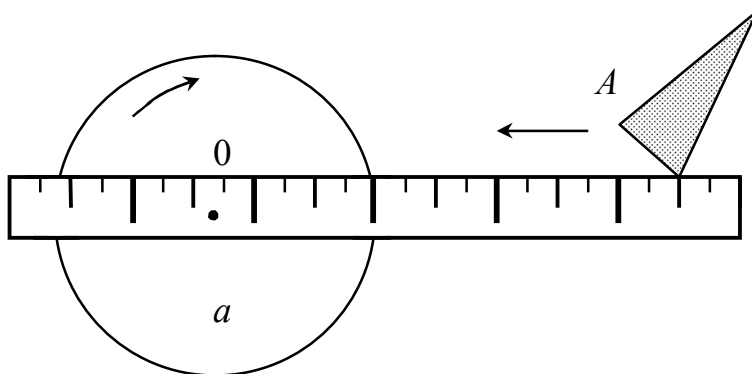
Мы далеки от мысли, что нам удалось полностью выполнить намеченную программу, поэтому не претендуем на признание нашего сборника как совершенного и законченного. Составлена фактически только первая его часть, остальные находятся в работе. Делается, таким образом, попытка обобщить опыт составления демонстрационных задач и создать новый специальный сборник, состоящий только из числа наиболее интересных демонстрационных задач по физике. Надеемся, что данный сборник будет полезен не только учителям-практикам, преподавателям и методистам, но и школьникам, студентам ВУЗов и ВТУЗов.

## Глава 1 Кинематика

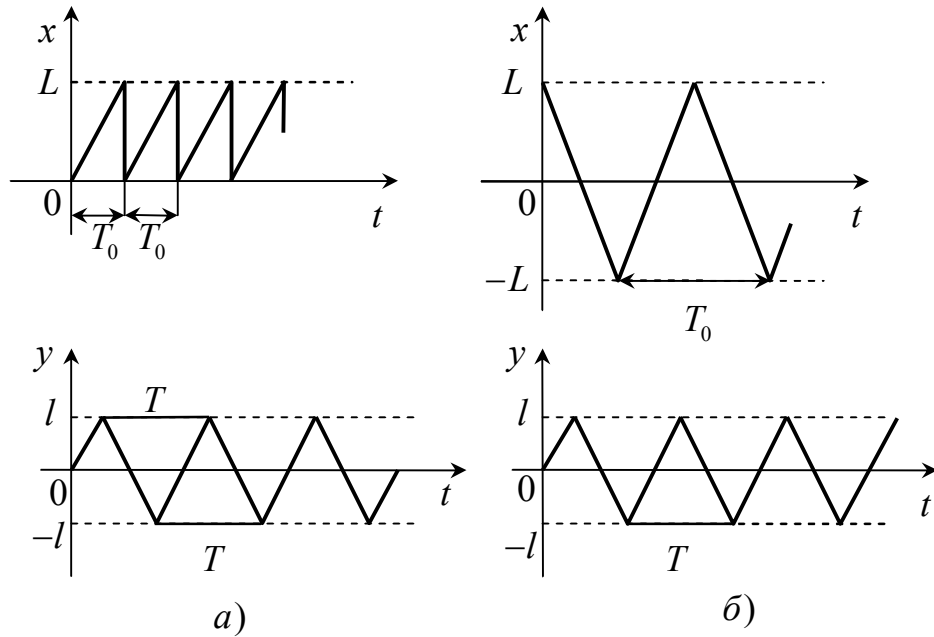
1.1 По поверхности стола движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$  черная доска. По доске движется кусок мела, пущенный по ней так, что в начальный момент скорость мела  $\vec{u}$  относительно стола перпендикулярна скорости доски. Какой формы след оставит мел при своем движении?



1.2\* Черный диск  $a$  с осью вращения, проходящей через центр диска  $O$  приставляется к классной доске. С осью диска связана неподвижная длинная линейка, вдоль которой перемещают рукой кусок мела  $A$ , оставляя след вначале на доске, а в конце на вращающемся диске. Укажите три различные системы отсчета, в которых одновременно при этом находится мел.



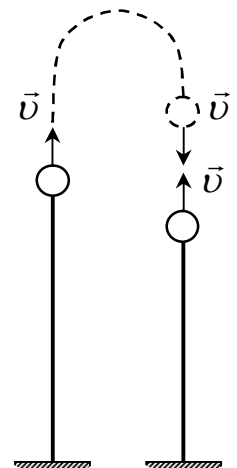
1.3 Движение луча по экрану осциллографа задается графиками зависимости координат  $X$  и  $Y$  от времени. Какую линию опишет луч на экране при  $T = T_0$ ,  $T = T_0 / 3$ ,  $T = 3T_0$ ? Почему в случае а) горизонтальные линии на экране почти не видны? При каком отношении  $T$  и  $T_0$  в случае б) линия на экране будет замкнутой?



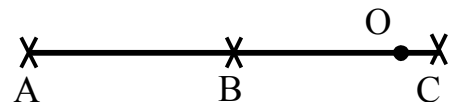
1.4 Вертикально вверх с интервалом времени  $\tau$  выброшены два шарика со скоростью  $v$  из одной и той же точки.

а) Через какое время после вылета второго шарика они столкнутся?

б) С каким интервалом нужно выбрасывать шарики, чтобы их столкновение произошло раньше (или позднее)?



1.5 Три микрофона, расположенные в точках А, В и С, зарегистрировали в моменты времени  $t_A$ ,  $t_B$  и  $t_C$  короткий звук, исходящий из точки О. В какой последовательности регистрировались импульсы на экране осциллографа? Каково расстояние ОА, если  $AB = BC = L$ ?



1.6\* С высоты  $h$  бросают одновременно два камня: один вертикально вверх со скоростью  $v_1$ , другой – вертикально вниз со скоростью  $v_2$ . Как нуж-

но бросить камни, чтобы промежуток времени  $\Delta t$ , отделяющий моменты их падения, был максимальным?

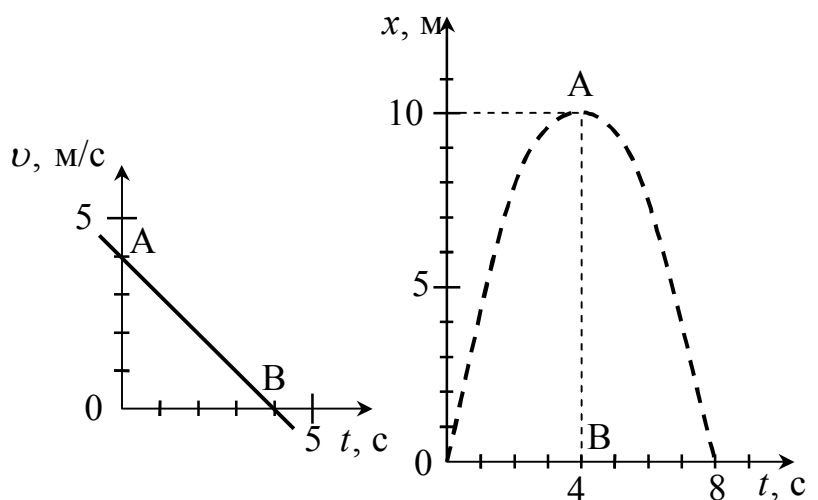
1.7 С некоторой высоты падают два камня. Вторым камень начал свое падение на 1 секунду позже первого. Как будет двигаться первый камень относительно второго?

1.8 С какой скоростью  $v_0$  нужно бросить вертикально вниз тело с высоты  $h$ , чтобы оно упало:

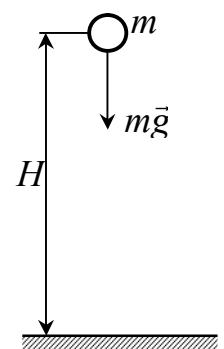
а) на  $\tau = 1$  с раньше, чем в случае свободного падения?

б) на  $\tau = 1$  с позже?

1.9 На рисунках изображены: график скорости первого автомобиля и график изменения координаты второго автомобиля (парабола) в зависимости от времени. Начало отсчета времени на обоих графиках совпадает. Какой автомобиль является отстающим?

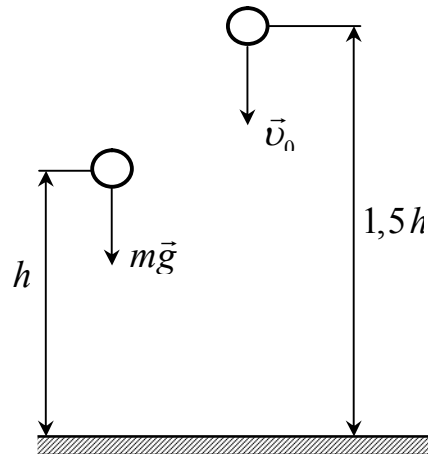


1.10 С высоты  $H$  на упругую горизонтальную поверхность свободно падает шарик (удар абсолютно упругий, временем соударения пренебрегаем). Начертите графики зависимостей скорости и координаты шарика от времени для данного вида движения.

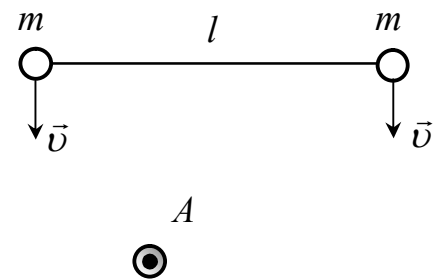




1.11 С высоты  $h$  падает тело без начальной скорости. Одновременно другое тело падает с высоты  $H = 1,5 h$  с некоторой начальной скоростью  $v_0$ . Какова должна быть эта скорость, чтобы оба тела достигли земли одновременно?



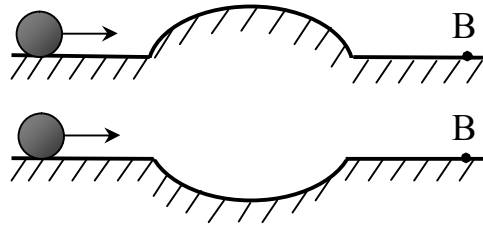
1.12\* Два одинаковых шарика, связанные нитью длиной  $l$ , падают с некоторой высоты. Одной третью своей длины она налетает на гвоздь  $A$  и начинает на него накручиваться с двух сторон. Какой из шариков будет после этого вращаться с бóльшей угловой скоростью и во сколько раз?



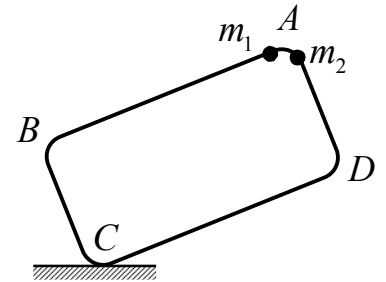
1.13\* Стальной шарик, упавший с высоты  $h$  на стальную плиту, отскакивает от нее с потерей 25% скорости. Сколько отскоков сделает шарик?

1.14\* По столу катится шарик, который дойдя до края стола, слегка задевает установленный там другой такой же шарик. Считая начало падения шариков одновременным, определите, какой из них упадет на пол раньше?

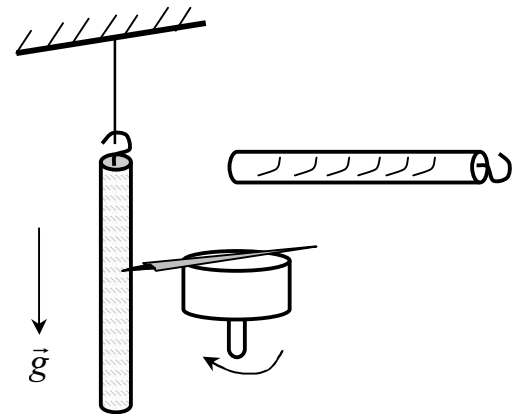
1.15 Два шарика начали одновременно и с одинаковой скоростью двигаться (смотри рисунок). Какой шарик быстрее достигнет точки  $B$ ? Трением пренебречь.



1.16 Прут согнут в виде прямоугольной рамки, по сторонам которой могут скользить без трения два небольших шарика ( $m_1 = m_2$ ). Какой из шариков соскользнет быстрее, если рамку установить наклонно? Каким будет угол наклона, когда оба шарика соскользнут одновременно?



1.17 а) Почему метки на свободно падающем вертикально бумажном цилиндре, наносимые вращающейся горизонтально кисточкой, наклонены к оси цилиндра? б) Определите ускорение свободного падения  $g$ , если расстояния между метками оказались равными 23, 40, 56, 74, 91, 110, 126 и 143 мм. Измерения показали, что число оборотов двигателя равно 1440 в минуту.

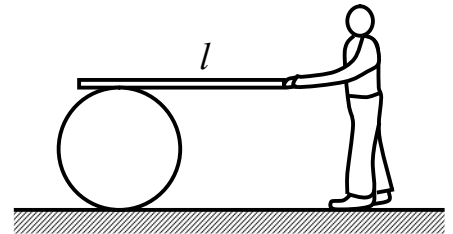


1.18\* Два шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) подброшены одновременно одной и той же рукой. Какое из тел упадет на землю раньше?

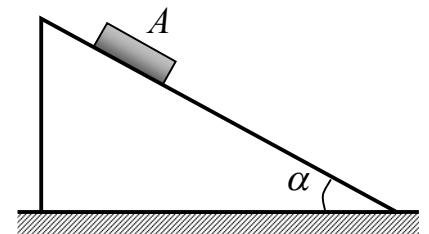
1.19 Какая предельная скорость приземления  $v$  парашютиста допустима, если человек, не имея парашюта, может безопасно прыгать с высоты  $h \leq 2$  м.

1.20 Велосипедное колесо катится без скольжения по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью  $v$ . Могут ли отдельные его точки иметь бóльшую линейную скорость вращения, чем скорость самого колеса?

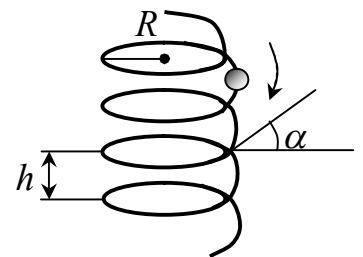
1.21 Человек держит один конец доски, а другой ее конец лежит на цилиндре. Доска расположена горизонтально. Затем человек двигает доску вперед, вследствие чего цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости (отсутствует также скольжение доски по цилиндру). Какое расстояние должен пройти человек, чтобы достичь цилиндра, если длина доски  $l$ .



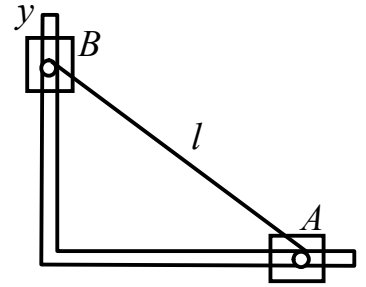
1.22 На клин, плоскость которого составляет угол  $\alpha$  с горизонтом, положено тело А. Как нужно двигать клин, чтобы тело А падало вертикально?



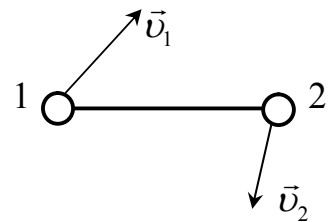
1.23 По тонкой проволочной спирали, образующей винтовую линию и стоящей вертикально, без начальной скорости и без трения скользит нанизанная на проволоку бусинка. Радиус спирали равен  $R$ , шаг винта  $h$ , число витков  $n$ . Каково время движения бусинки до конца проволоки? Как изменится это время, если спираль растянуть? Сжать? Какая бусинка будет двигаться быстрее: тяжелая или легкая?



1.24 Стальной прут согнут под прямым углом и на каждой его половине помещены одинаковые грузы, способные свободно скользить по пруту. Грузы шарнирно соединены между собой тонкой негнущейся проволокой длиной  $l$ . С какой скоростью будет двигаться горизонтальный груз, если вертикальный падает?



1.25\* Два небольших шарика 1 и 2, соединенные жестким стержнем, движутся. Могут ли скорости шариков быть такими, как на рисунке? Шарик и вектора скоростей лежат в плоскости рисунка.



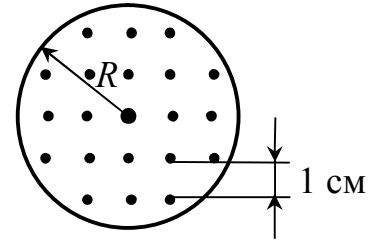
1.26 Ведро выставлено под дождь. Изменится ли скорость наполнения ведра водой, если подует ветер?

1.27 На улице идет дождь. В каком случае ведро, стоящее в кузове автомобиля, наполнится быстрее водой: когда автомобиль движется или когда он стоит?

1.28\* Шарик свободно падает с некоторой высоты на наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом. Найти такие высоты падения шарика, которым соответствовали бы всего две, три, четыре и так далее точек касания его с этой плоскостью (удар упругий).

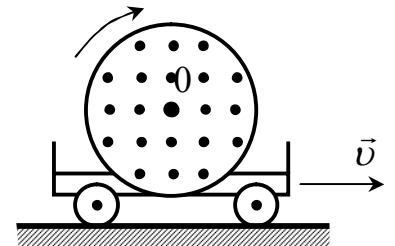
1.29\* Почему когда колесо катится, то часто бывает, что нижние спицы видны отчетливо, а верхние спицы как будто сливаются? Какими будут видны спицы у просто вращающегося колеса?

1.30\* Диск радиусом  $R$  с отверстиями, просверленными по окружностям на расстоянии  $s = 1$  см друг от друга, освещен сзади лампой. С какой частотой нужно вращать диск, чтобы увидеть сплошной светящийся круг на расстоянии  $R/2$  и более от центра диска?



1.31 На горизонтальной оси закреплен картонный диск, на котором нарисован небольшой черный кружок. Диск освещается светом стробоскопа и вращается с некоторой частотой. При какой частоте вспышек стробоскопа мы увидим: а) смещение кружка против (в направлении) вращения диска, б)  $n$  неподвижных изображений ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ )?

1.32 На тележке, движущейся горизонтально с постоянной скоростью, установлен вертикально диск с нанесенными на его поверхность черными кружками. Изменится ли положение мгновенной оси вращения диска, если тележку двигать с постоянной скоростью то в одну сторону, то в другую?



1.33 Оцените, сколько оборотов (кувырков) совершит автомобиль на полной скорости, срывающийся в километровую пропасть.

1.34 В ноль часов ноль минут часовая и минутная стрелки часов совпадают. Каково будет показание часов в момент, ближайший к нулю часам и нулю минутам, когда стрелки снова совпадут? Определите моменты последующих совпадений. Циферблат разделен на 12 часов.

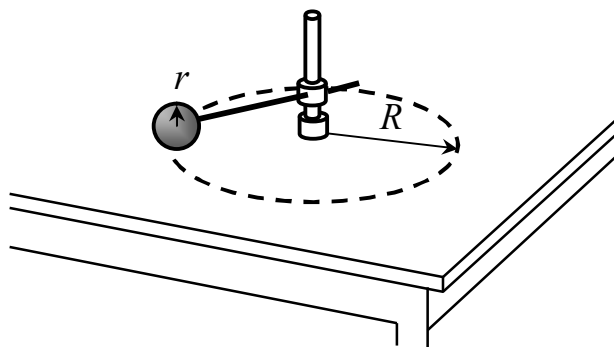
1.35 Часы каждые сутки отстают на 2 минуты. Чему равно угловое ускорение  $\beta$  минутной стрелки?

1.36\* Могут ли два космических корабля или два спутника Земли идти параллельным курсом?

1.37\* Обруч небольших размеров скатывается с наклонной плоскости без проскальзывания. Каково время скатывания обруча, если высота наклонной плоскости  $h$ , а длина -  $l$ ?

1.38\* С наклонной плоскости предыдущей задачи одновременно без проскальзывания начинают скатываться два обруча с массами  $m_1$  и  $m_2$ , причем  $m_1 > m_2$ . Какой из них скатится быстрее?

1.39 Шар радиусом  $r$  насажен на горизонтальную ось и катится по плоской поверхности со скоростью  $v$ , описывая окружность радиусом  $R$ . Какова полная угловая скорость шара и каков наклон ее вектора к горизонту?



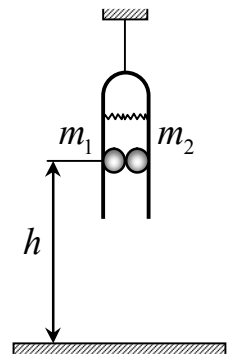
1.40 В каких случаях в движущемся поезде можно пользоваться уровнем (пузырек воздуха в трубке с жидкостью) для определения уклона железнодорожного пути?

1.41 Правильно ли покажут вес тела пружинные весы в движущемся вагоне?

1.42 Карманные часы положены на горизонтальную подставку, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Как изменится от этого ход часов?

## Глава 2 Динамика

2.1\* Два шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) падают с одной и той же высоты  $h$ . Какой шарик упадет быстрее? Почему?



2.2 Почему Земля сообщает всем телам при их падении одно и то же ускорение, не зависящее от их массы?

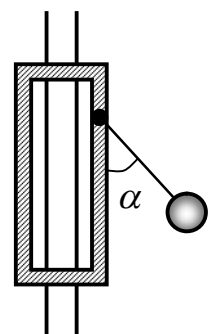
2.3 Какие капли дождя падают быстрее – крупные или мелкие? Почему (считать капли шарообразными)?

2.4 Два шара одинакового радиуса падают с одинаковой высоты. Один шар сплошной, а другой – полый. Какой из них упадет быстрее?

2.5 Шар бросают вертикально вверх. Какое время будет бóльшим: время, затраченное на поднятие шара вверх, или время его падения?

2.6\* Все тела падают всегда с одинаковым ускорением  $g$ . Будут ли они подниматься с таким же ускорением?

2.7 Легкий маятник, состоящий из стержня и небольшого диска, укреплен на деревянной рамке, которая может свободно падать вдоль направляющих проволок. Маятник отклонили на угол  $\alpha$  и отпустили. В момент, когда маятник проходил самое низкое положение, рамка начала свободно падать. Как при этом будет двигаться маятник? Трением и



сопротивлением пренебречь.

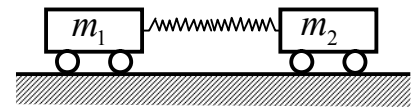
2.8 Можно ли поднять с Земли тело, приложив к нему силу, равную силе тяжести?

2.9 Есть ли на Земле место, где вес равен силе тяжести?

2.10 Почему бомба, мина и т.п. падают на Землю ударником (передней более заостренной частью) вниз?



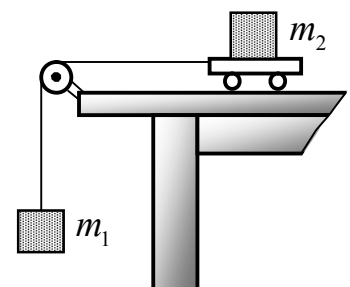
2.11 Тележки с массами  $m_1$  и  $m_2$  связаны сжатой пружиной. При разжимании пружины она действует на тележки со средней силой  $F$  в течение времени  $\tau$ . Показать, что после окончания действия силы пружины тележки будут двигаться горизонтально так, что их общий центр масс (центр тяжести) будет оставаться неподвижным (трением пренебречь).



2.12 Как относятся расстояния, которые пройдут тележки до полной остановки, когда пружина распрямится, если масса левой относительно к массе правой, как 1 : 3?



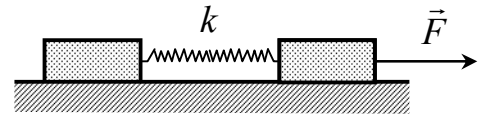
2.13 Для иллюстрации 2-го закона Ньютона иногда показывают опыт, изображенный на рисунке. Тележка  $m_2$  приводится в движение вначале грузом  $m_1$ , а затем грузом в  $n$  раз ( $n = 2$ ) бóльшим. а) Можно ли утверждать, что при отсутствии трения ускорение во втором случае долж-



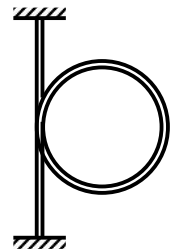


но быть в  $n$  раз больше, чем в первом? б) Каково отношение ускорений, если масса груза  $m_1 = 30$  г, масса тележки  $m_2 = 200$  г и коэффициент трения  $\mu = 0,1$ ? в) При каком  $\mu$  утверждение пункта а) соответствует истине?

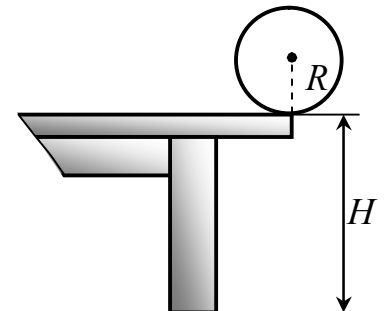
2.14 На гладком столе лежат два груза, соединенные пружиной. На правое тело начинает действовать горизонтальная сила  $\vec{F}$ . Какое при этом возникает движение?



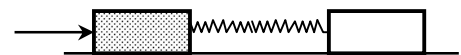
2.15 Однородная тяжелая веревка закреплена своими концами за плоскости и охватывает невесомый обруч. Определите, с каким ускорением он будет падать.



2.16 С края стола высоты  $H$  падает без проскальзывания кольцо радиуса  $R$ . На каком расстоянии от стола упадет это кольцо?



2.17 К концам пружины прикреплены два бруска, массы которых равны  $M$  и  $m$  ( $M > m$ ). Под действием двух равных сил  $F$ , приложенных к брускам, пружина сжата. Бруски покоятся на столе. Что произойдет, если силы  $F$  убрать? Коэффициент трения брусков о стол равен  $\mu$ .



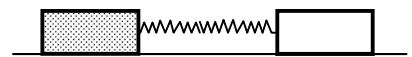
2.18 Деревянный брусок лежит на двух деревянных палочках. Одну из палочек начинают медленно двигать к центру масс бруска. Как при этом бу-

дет вести себя брусок? Каково будет при этом отношение коэффициентов трения покоя и скольжения дерева по дереву?

2.19 На доске стоит человек. Внезапно он приседает. Увеличится или уменьшится в этот момент прогиб доски?

2.20 На горизонтальной плоскости лежат два бруска массы  $M$  и  $m$ , соединенные ненапряженной пружиной.

Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость равен  $\mu$ .



2.21 Из точки  $A$  по различно наклоненным спицам одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки. На какой кривой будут находиться бусинки в момент времени  $t$ ?

2.22 Из точки  $A$  по различно наклоненным спицам одновременно начинают скользить без трения маленькие шарики. Какой шарик быстрее достигнет горизонтальной поверхности?

2.23 Из точек 1, 2, 3 и 4 на вертикальной прямой по наклонным спицам одновременно начинают скользить без трения небольшие шарики. Какой шарик быстрее достигнет точки  $O$ ?

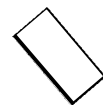
2.24 По наклонной плоскости из точки  $B$  в точку  $C$ , отстоящую от точки  $A$  на расстоянии  $l$ , соскальзывает без трения тело. При какой высоте  $h$  (или каком угле  $\alpha$ ) время соскальзывания минимально?

2.25 Каков должен быть угол наклонной плоскости, чтобы скользящее по ней тело двигалось равномерно?

2.26 Тело соскальзывает с горы за время  $t$ . За какое время это тело соскользнет с горы, размеры которой без изменения формы увеличены в четыре раза?

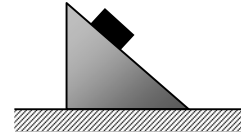
2.27 С наклонной плоскости без проскальзывания скатываются полый цилиндр, сплошной цилиндр и шар. Какое из этих тел быстрее достигнет нижней точки плоскости? Как будет зависеть результат от масс и диаметров указанных тел?

2.28 Небольшое тело, будучи положенным, на наклонную плоскость с углом наклона  $\alpha$  начинает по ней скользить. Как нужно двигать плоскость, чтобы тело не скользило по ней. Коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu$ .



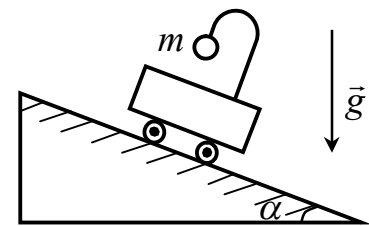
2.29 С наклонной плоскости длиной  $l$  и высотой  $h$  одновременно начинают скатываться два обруча с различными радиусами. Какой из них скатится быстрее?

2.30 Тяжелое тело соскальзывает без трения с трехгранной призмы, способной перемещаться по горизонтальной плоскости без трения. В первом случае призма закреплена неподвижно, во втором свободна. Будет ли скорость тела в конце соскальзывания с призмы одинакова в обоих случаях, если тело оба раза соскальзывает с одной и той же высоты?

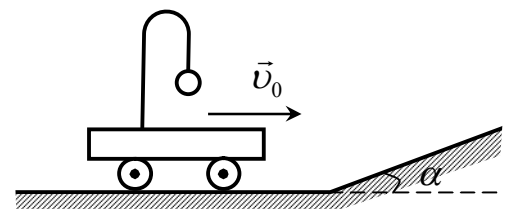


2.31 Определить направление скорости тела в предыдущей задаче.

2.32 Легкая тележка может скатываться без трения с наклонной плоскости. На тележке укреплен отвес (шарик массы  $m$  на нитке). Какое направление будет иметь нить отвеса при свободном скатывании тележки? До начала скатывания нить удерживалась в направлении, перпендикулярном к наклонной плоскости.

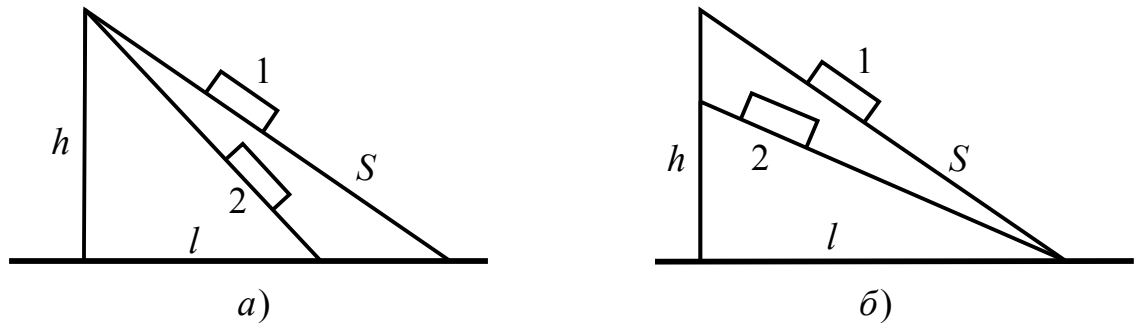


2.33 Небольшая тележка с подвешенным на нити шариком подъезжает со скоростью  $v_0$  к наклонной плоскости. В какую сторону от вертикали наклонится нить с шариком, когда тележка начнет въезжать на наклонную плоскость?



2.34 Сосуд с водой движется по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Каким будет угол наклона поверхности воды в сосуде?

2.35 Два тела соскальзывают без трения и без начальной скорости с наклонных плоскостей 1 и 2 в случаях (а) и (б). 1) Сравнить скорости тел  $v_1$  и  $v_2$  в конце соскальзывания. 2) Одинаковы ли времена соскальзывания  $t_1$  и  $t_2$ ?

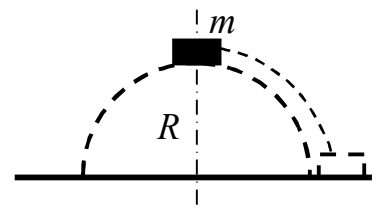


2.36 На горизонтальной доске лежат два бруска одинаковых размеров, но разных масс. Доску поднимают за один конец так, что она постепенно переходит из горизонтального положения в вертикальное. Какой из брусков начнет соскальзывать раньше?

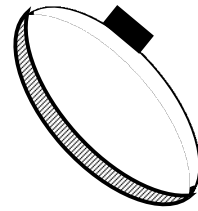
2.37 В стеклянную цилиндрическую трубку, расположенную вертикально, вдвинут снизу ерш для мытья пробирок. Что произойдет с ершом, если трубку слегка покачивать в вертикальной плоскости?

2.38 Однородному цилиндру сообщают начальный импульс, в результате чего он начинает катиться без скольжения вверх по наклонной плоскости со скоростью  $v$ . Плоскость образует угол  $\alpha$ . На какую высоту  $h$  поднимется цилиндр и сколько времени  $t$  он будет двигаться до остановки?

2.39 Тело, масса которого равна  $m$ , соскальзывает без трения с вершины полусферы радиуса  $R$ . На какой высоте тело оторвется от поверхности сферы?



2.40 Тело соскальзывает из точки  $A$  в точку  $B$  по двум искривленным наклонным поверхностям, проходящим через  $A$  и  $B$  один раз по выпуклой дуге, второй – по вогнутой. Обе дуги имеют одинаковую кривизну и коэффициент трения в обоих случаях один и тот же. В каком случае тело быстрее достигнет точки  $B$ ?



2.41 Под каким углом  $\alpha$  к горизонту легче всего тянуть веревку, волока тяжелый груз по горизонтальной плоскости. Как можно простейшим способом определить этот угол?

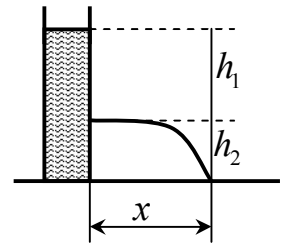
2.42 Под каким углом  $\alpha$  нужно тянуть канатом тяжелый ящик, чтобы с наименьшим усилием передвигать его волоком по горизонтальной поверхности?

2.43 С наклонной плоскости одновременно начинает соскальзывать брусок и скатываться без проскальзывания обруч (или цилиндр). При каком угле  $\alpha$  наклона плоскости оба тела будут двигаться, не обгоняя друг друга? Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu$ .

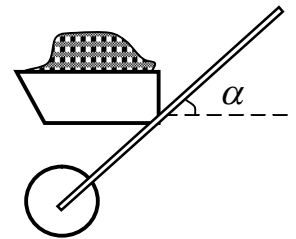
2.44 Тело с массой  $m$  соскальзывает с наклонной плоскости. Сколько времени затратит тело на спуск с наклонной плоскости, если ее длина  $l$ , угол наклона  $\alpha$  и коэффициент трения  $\mu$ . Начальная скорость тела равна нулю.

2.45 Какова зависимость наибольшей скорости скатывания шарика от пути при одном и том же угле наклона плоскости.

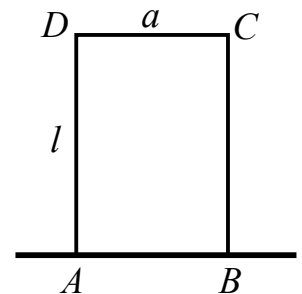
2.46 Какова дальность падения струи воды из нижнего отверстия цилиндра, предназначенного для демонстрации зависимости давления жидкости на стенки сосуда от высоты столба.



2.47 Человек передвигает с постоянной скоростью тачку. Один раз ее тянет за собой, другой раз толкает впереди себя. Ручки тачки в обоих случаях составляют один и тот же угол  $\alpha$  с горизонтом. В каком случае потребуется большее усилие?



2.48\* Ящик с массой  $m$  имеет ширину  $a$  и высоту  $l > a$ . Одинаковую ли надо совершить работу, чтобы повернуть ящик сначала на грань  $BC$ , а затем  $DC$ ?

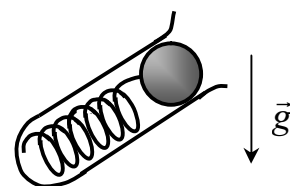


2.49\* Ящик в форме куба перемещают на некоторое расстояние  $L$ : один раз волоком, а другой кантованием (то есть опрокидыванием через ребро). Коэффициент трения о пол при скольжении равен  $\mu$ . Трением при кантовании можно пренебречь. В каком случае совершится большая работа?

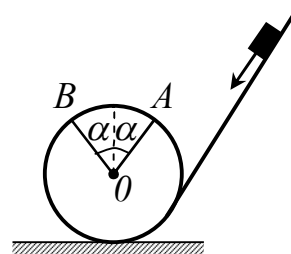
2.50\* Как лучше поднимать ящик на платформу: медленно (то есть с постоянной скоростью) или быстро (то есть с ускорением)?

2.51 Какому телу, движущемуся или покоящемуся, одна и та же сила за то же время сообщает большую энергию? Сила действует в направлении скорости.

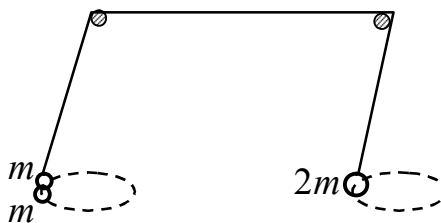
2.52 В массивную трубку вставлена пружина, которая в свободном состоянии занимает всю длину трубки. На пружину положен шарик, который сжимает ее примерно вдвое. В наклонном положении трубка начинает свободно падать. Что произойдет с шариком?



2.53 Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности, переходящей в мертвую петлю, с минимальной высоты, при которой оно не отрывается от поверхности петли. Какой симметричный вырез, характеризуемый углом  $\alpha < 90^\circ$ , можно сделать в петле, чтобы тело, проделав часть пути в воздухе, попало в точку  $B$  петли? Как будет двигаться тело, если угол  $\alpha$  будет больше или меньше найденного? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

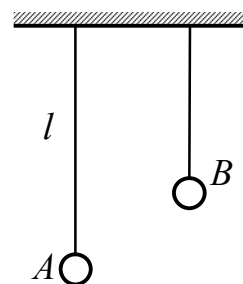


2.54 К концам нити, переброшенной через два гвоздя, прикреплены двигающиеся по окружностям грузы. Слева висят два груза массы  $m$  каждый, справа – один груз массы  $2m$ .



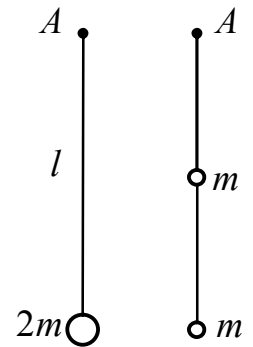
Будет ли система в равновесии?

2.55 Два шарика  $A$  и  $B$ , массы которых одинаковы и равны  $m$ , подвешены один на нерастяжимой нити, другой на резиновом шнуре. Оба шарика отклонены на угол  $90^\circ$  и отпущены. Когда шарики проходят положение равновесия, длина резинового шнура становится равной длине нити,  $l$ . Какой из шариков первым пройдет нижнюю точку?



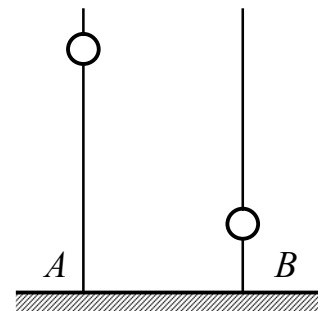


2.56 На невесомом стержне длиной  $l$  в одном случае укреплена на конце масса  $2m$ , в другом случае укреплены две равные массы  $m$  - одна на конце, другая посередине стержня. Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки закрепления  $A$ . В каком случае стержень нужно толкнуть сильнее, чтобы он отклонился до горизонтального положения?



2.57 Две палки, короткая и длинная, устанавливаются в вертикальное положение, а затем одновременно отпускаются без толчков. Какая из них упадет быстрее?

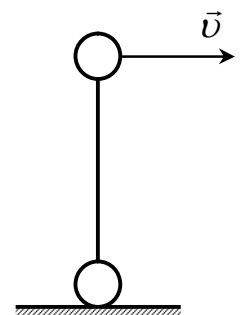
2.58 Какую из палок легче удерживать вертикально в равновесии на пальце – короткую или длинную?



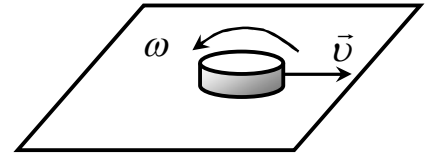
2.59 На легкий стержень насажен массивный шар. В каком случае стержень упадет быстрее: если его поставить вертикально на конец  $A$  или  $B$ ? Стоящий на столе конец стержня не проскальзывает.

2.60 На теннисный мяч с высоты  $h$  падает кирпич и подскакивает на некоторую высоту. На какую высоту подскочит мяч?

2.61 На гладкий горизонтальный стол поставили вертикально гантельку, состоящую из невесомого стержня с двумя одинаковыми маленькими шариками на концах. Верхнему шарика ударом сообщают скорость  $v$  в горизонтальном направлении. При какой минимальной длине гантельки  $l$  нижний шарик сразу оторвется от стола?



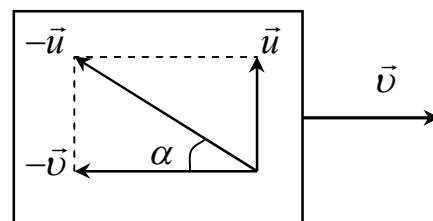
2.62 Однородной тонкой шайбе, лежащей на горизонтальном шероховатом льду, сообщают движение. В каком случае шайба пройдет бóльший путь до остановки, когда ей сообщают вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$  и поступательное со скоростью  $v$  или когда только поступательное со скоростью  $v$ ?



# Ответы, решения и методические указания

## Глава 1 Кинематика

1.1 В системе координат, движущейся относительно поверхности стола с той же скоростью  $\vec{v}$ , что и доска, мел имеет скорость  $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ . Так как сила трения направлена противоположно вектору  $\vec{u}'$ , то направление скорости мела меняться не будет. Будет изменяться лишь модуль скорости мела. Это означает, что мел прочер-



тит прямую линию, идущую под углом  $\alpha = \text{arctg} \frac{u}{v}$  к вектору  $-\vec{v}$ .

**Методические указания.** Для надежности результата скользящий мел можно заменить смоченным в меловом растворе шариком, скатывающимся на доску в заданном направлении со слегка наклонного желоба.

Движение доски осуществляют при помощи опускающегося груза, связанного с доской шнуром, перекинутым через блок.

1.2 Относительно неподвижной линейки мел движется прямолинейно, след мела на классной доске – прямая линия; относительно вращающегося диска мел движется по некоторой кривой, след на диске – спиралеобразная линия; относительно руки мел все время остается неподвижным. Таким образом, убеждаемся, что форма траектории является относительной и зависит от системы отсчета, относительно которой рассматривается данное движение.

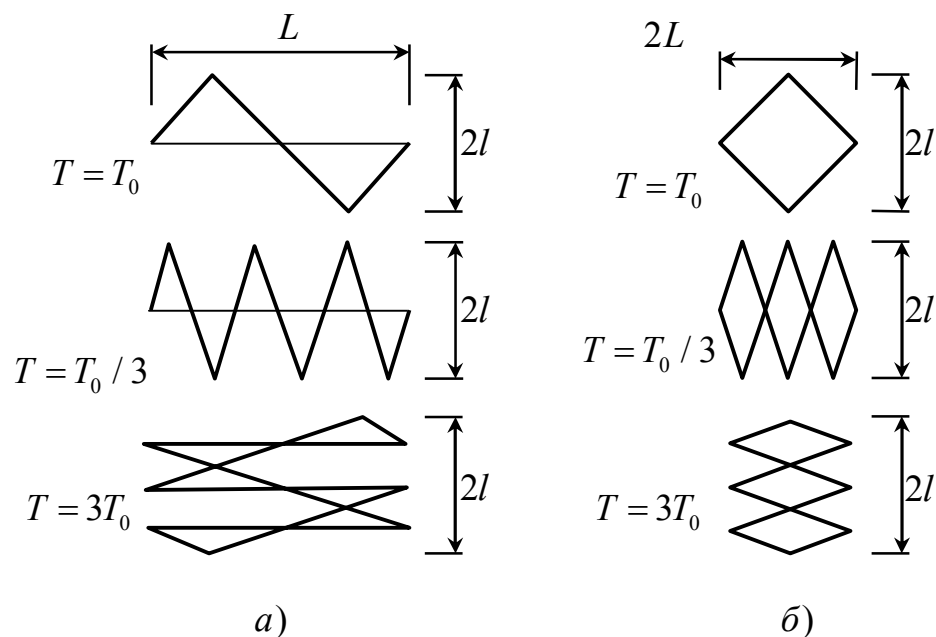
**Методические указания.** 1 Если у диска, соединенного с линейкой, имеется пружинный привод, то движение мела может быть не очень быстрым, а след мела на диске более четким.

2 Относительность траектории можно продемонстрировать иначе. Диск располагают горизонтально и по его радиусу направляют скатываю-

щийся с наклонного желоба смоченный в меловом растворе шарик: на неподвижном диске след шарика будет прямой, а на вращающемся – кривой линией.

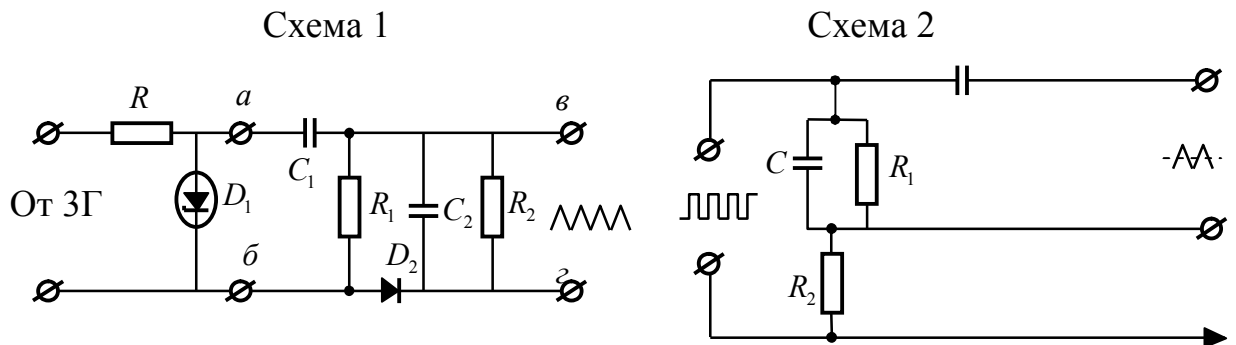
1.3 Смотри рисунки. а) Возвращение луча по X занимает очень малое время, соответственно на единицу длины попадает мало электронов. б) При

$$\frac{T}{T_0} = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n - \text{любые числа.}$$



**Методические указания.** Для демонстрации результатов сложения указанных колебаний необходимы генераторы соответствующих импульсов. В качестве источника пилообразного напряжения (случай а) берут либо напряжение развертки осциллографа (выход чаще всего находится на задней стенке), либо напряжение с выхода самодельного генератора – приставки к школьному звуковому генератору, собранному по схеме 1. Здесь напряжение звукового генератора (ЗГ) преобразуется из синусоидального в прямоугольное (выход а и б) с амплитудой до 10 В с помощью стабилитрона  $D_1$  и резистора  $R$ , а затем с помощью дифференциальной цепочки  $C_1R_1$  прямоугольные импульсы укорачиваются. Таким образом, конденсатор  $C_2$  быстро пе-

риодически заряжается, а потом медленно разряжается через резистор  $R_2$ . Разряду  $C_2$  через  $R_1$  препятствует диод  $D_2$ . пилообразное напряжение снимается с резистора  $R_2$  (зажимы  $в$  и  $г$ ). Номинальные значения элементов схемы следующие:  $R = 160 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ,  $C_1 = 0,1 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 1 \text{ мкФ}$ ,  $D_1$  - Д815Г,  $D_2$  - Д7Ж.



Для формирования треугольных импульсов (случаи  $а$  и  $б$ ) собирают приставку по схеме 2. В качестве источника прямоугольного напряжения для нее может быть использована либо заводская приставка – генератор ПГШ-1 к школьному осциллографу, либо преобразователь синусоидального напряжения в прямоугольное предыдущей схемы (выводы  $а$  и  $б$ ). Номинальные значения элементов схемы 2:  $R_1 = 150 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 5 \text{ кОм}$ ,  $C = 470 \text{ пФ}$ .

Во всех случаях напряжения необходимой формы, вырабатываемые описанными устройствами, подают на входы  $X$  и  $Y$  демонстрационного осциллографа, развертка горизонтального отклонения, у которого должна быть предварительно выключена.

1.4 Уравнение движения тела, брошенного вертикально вверх, позволяет найти координату движущегося тела для любого момента времени независимо от того, поднимается ли тело вверх или падает после подъема вниз. Поэтому:

для первого шарика

$$y = vt_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$

для второго

$$y = vt_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

По условию задачи  $y = h$ . Учитывая, что  $t_1 = t$ , а  $t_2 = t - \tau$ , решая составленную систему уравнений относительно  $t$ , получаем:

$$t = \frac{v}{g} + \frac{\tau}{2}$$

- время движения первого шарика до столкновения со вторым, который пущен позже на время  $\tau$ . Из этого решения видно, что соударение должно произойти лишь после того, как первый шарик начнет падать вниз ( $t > \frac{v}{g}$ , где  $\frac{v}{g}$  - время подъема).

а) Таким образом, шарики столкнутся через время  $t_2$ :

$$t_2 = t - \tau = \frac{v}{g} - \frac{\tau}{2}.$$

б) Минимальным временем встречи шариков будет время подъема первого

$$t_{\min} = \frac{v}{g} \text{ при } \tau = 0,$$

то есть при одновременном выбрасывании шариков.

Максимальным будет время:

$$t_{\max} = t + 2\frac{v}{g} \quad \text{при} \quad \tau = 2\frac{v}{g},$$

то есть с интервалом, равным полному времени движения первого шарика.

**Методические указания.** Здесь полезно продемонстрировать подбрасывание вверх двух теннисных шариков с различными интервалами времени. Полученные перед этим результаты решения становятся очевидными.

$$1.5 \quad t_C < t_C < t_A. \quad OA = L \frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_C)}.$$

Действительно, так как  $OA = vt_A$ ,  $OB = vt_B$ , а  $OA + OB = 2L$ , то

$$v(t_A + t_C) = 2L. \quad (1)$$

$$v(t_A - t_B) = L. \quad (2)$$

$$OA = L + vt_B. \quad (3)$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) совместно, получаем:

$$OA = \frac{L}{2(t_A - t_B)}(t_A + t_C) + \frac{L}{t_A - t_B}t_B = \frac{L(t_A + t_C) + 2Lt_B}{2(t_A - t_B)} = L \frac{t_A + t_C + 2t_B}{2(t_A - t_B)}.$$

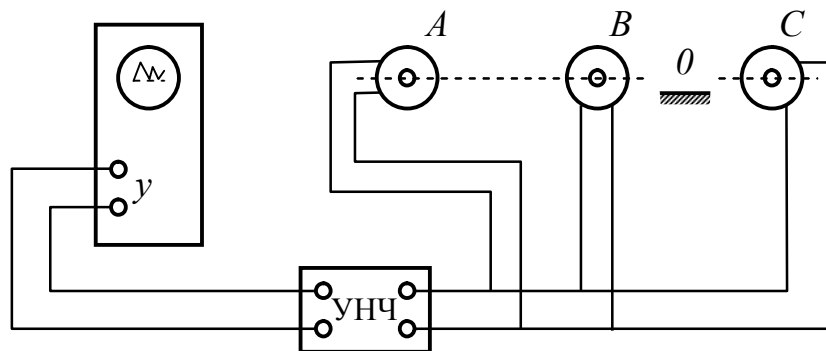
Далее, считая, что  $t_B + t_C = t_A - t_B$  и  $2t_B = t_A - t_C$ ,

то есть  $4t_B + 2t_C - 2t_A = 0$ , находим

$$OA = L \frac{t_A + t_C + 2t_B + 0}{2(t_A - t_B)} = L \frac{t_A + t_C + 2t_B + (2t_A - 4t_B - 2t_C - 2t_A + 4t_B + 2t_C)}{2(t_A - t_B)} =$$

$$= L \frac{3t_A - 3t_B - t_C + (4t_B + 2t_C - 2t_A)}{2(t_A - t_B)} = L \frac{3t_A - 2t_B - t_C}{2(t_A - t_B)}.$$

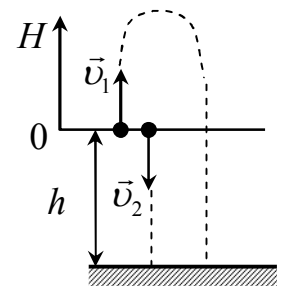
**Методические указания.** Для регистрации времени прохождения звука из точки 0 до точек А, В и С используют любой осциллограф, имеющий частоту развертки 100 - 1000 Гц. Чувствительные микрофоны через УНЧ подключают к вертикальному входу осциллографа как показано на рисунке. Микрофоны располагают на демонстрационном столе вдоль одной линии.



Между двумя микрофонами на той же линии располагают небольшую накопительную, по которой ударяют молотком. При соответствующей для данного опыта частоте развертки осциллографа наблюдают на экране отдельные импульсы, поступающие на вход осциллографа от трех микрофонов. Зная частоту развертки можно по осциллограмме определить время появления каждого импульса.

1.6 Направим координатную ось ОН вверх с началом ее в месте бросания камней. Тогда уравнение движения камней:

$$h_1 = h + v_1 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}, \quad h_2 = h - v_2 t_2 + \frac{gt_2^2}{2},$$



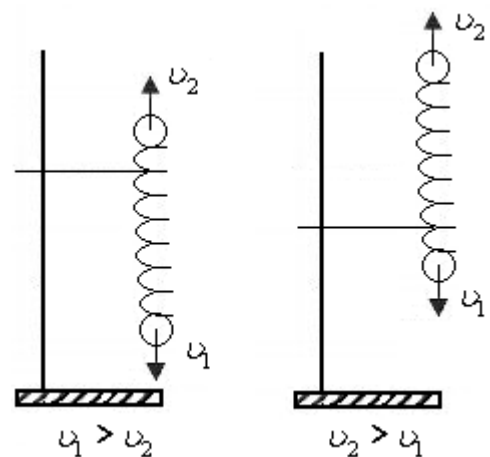


где  $t_1$  и  $t_2$  - времена падения на Землю первого и второго камней. Падению на Землю соответствуют координаты  $h_1 = h_2 = 0$ . Определив  $t_1$  и  $t_2$  из полученных квадратных уравнений, найдем:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{v_1 + v_2 + \sqrt{v_1^2 + 2gh} - \sqrt{v_2^2 + 2gh}}{g}.$$

Из приведенного решения следует, что максимальный промежуток времени  $\Delta t$  будет при  $v_1 = v_2 = v$ . Тогда  $\Delta t_{\max} = 2\frac{v}{g}$ .

**Методические указания.** Если сжатую и перевязанную ниткой пружину расположить на штативе в вертикальном положении, то два одинаковых шарика, «приклеенных» с помощью пластилина к ее концам, оттолкнутся от нее при пережати нитки, один вверх, а другой вниз с одинаковой силой, а значит с одинаковой скоростью (если пружина укреплена на штативе за свою середину). Остается только зафиксировать время падений шариков и определить  $\Delta t$ . Если же пружину закрепить на штативе не за середину, то более короткий ее конец будет отталкивать шарик с меньшей скоростью, а длинный – наоборот, с большей скоростью. Экспериментируя таким образом, можно проверить решение данной задачи.



1.7 Оба камня движутся относительно Земли равноускоренно с одинаковым ускорением  $g$ . Очевидно, один камень относительно другого движется равномерно, причем постоянная скорость первого камня по отношению ко

второму равна той скорости, которую первый камень приобрел за 1 с, то есть за время, прошедшее между начальными моментами движения обоих камней.

Можно провести и соответствующий расчет. Путь первого камня  $h_1 = \frac{gt^2}{2}$ , путь второго  $h_2 = \frac{g(t-1)^2}{2}$ . Расстояние между камнями растет со временем по закону:

$$\begin{aligned} h_1 - h_2 &= \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-1)^2}{2} = \frac{g[t^2 - (t-1)^2]}{2} = \frac{g(t^2 - t^2 + 2t - 1)}{2} = \frac{g(2t - 1)}{2} = \\ &= gt - \frac{g}{2} = g\left(t - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

то есть первый камень движется относительно второго равномерно с постоянной скоростью, численно равной  $g$ :

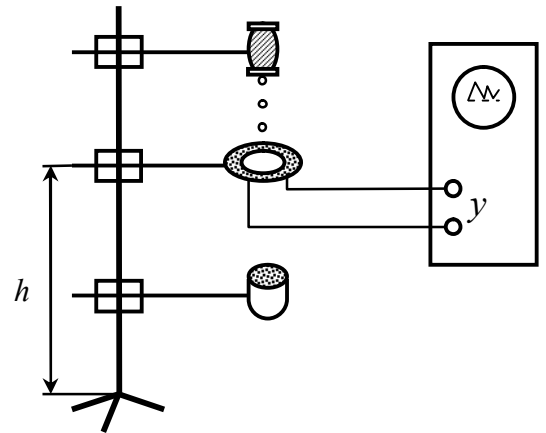
$$v = \frac{h_1 - h_2}{\left(t - \frac{1}{2}\right)} = g.$$

Действительно, знаем  $v = v_0 + gt$ . Если  $v_0 = 0$ , то  $v = gt$ . Если  $t = 1$  с, тогда  $v = g$ .

**Методические указания.** Если один камень относительно другого движется равномерно, значит промежуток времени, определяющий прохождение одной и той же точки пути будет возрастать прямо пропорционально расстоянию между различными точками, проходимыми камнями одновременно. Установление этого факта экспериментально может послужить подтверждением правильности приведенного решения.

Для проведения измерений собирают установку, состоящую из укрепленного на штативе устройства, позволяющего начать падать двум кусочкам

магнита (или намагниченным шарикам) друг за другом через очень короткий промежуток времени. На штативе на некоторой высоте устанавливают в горизонтальном положении проволочную (медь) плоскую катушку так, что магнитные кусочки пролетают через нее. Выводы от катушки подключаются к вертикальному входу осциллографа. При соответствующей частоте развертки на экране будут возникать раздельно два импульса, соответствующие моментам прохождения магнитных кусочков сквозь катушку. Располагая каждый раз катушку на различной высоте  $h$  убеждаются в том, что промежуток времени между двумя последовательными импульсами будет увеличиваться пропорционально уменьшению  $h$ .



$$1.8 \quad a) v_0 = \frac{g\tau(\sqrt{8g\tau} - g\tau)}{\sqrt{8g\tau} - g\tau}; \quad б) v_0 = \frac{g\tau(\sqrt{8g\tau} + g\tau)}{\sqrt{8g\tau} + 2g\tau}.$$

Знак “-“ означает, что в этом случае тело нужно бросать не вниз, а вверх.

Действительно:  $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  - время падения без начальной скорости.

а)  $(t_1 - \tau)$  - время падения с начальной скоростью  $v_0$ . Тогда

$$h = v_0(t_1 - \tau) + \frac{g(t_1 - \tau)^2}{2} \quad \text{или} \quad h = v_0 \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau \right) + \frac{g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau \right)^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{h - \frac{g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau \right)^2}{2}}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau} = \frac{2h - g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau \right)^2}{2 \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \tau \right)} = \frac{2h - (2h - \sqrt{8gh} \tau + g\tau^2)}{\left( \sqrt{\frac{8h}{g}} - 2\tau \right) \frac{g}{g}}.$$

Таким образом

$$v_0 = \frac{g\tau(\sqrt{8gh} - g\tau)}{\sqrt{8gh} - 2g\tau}.$$

б)  $(t_1 + \tau)$  - время падения с начальной скоростью  $v_0$ . Тогда

$$h = v_0(t_1 + \tau) + \frac{g(t_1 + \tau)^2}{2} \quad \text{или} \quad h = v_0 \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} + \tau \right) + \frac{g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} + \tau \right)^2}{2}.$$

$$v_0 = \frac{h - \frac{g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} + \tau \right)^2}{2}}{\sqrt{\frac{2h}{g}} + \tau} = \frac{2h - g \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} + \tau \right)^2}{2 \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} + \tau \right)} = \frac{2h - 2h - \sqrt{8gh} \tau - g\tau^2}{\frac{\sqrt{8gh} + 2g\tau}{g}}.$$

Таким образом

$$v_0 = -\frac{g\tau(\sqrt{8gh} + g\tau)}{\sqrt{8gh} + 2g\tau}.$$

**Методические указания.** Для экспериментальной проверки полученного результата необходимо телу, бросаемого вниз с высоты  $h$ , сообщить начальную скорость, равную расчетной скорости  $v_0$ . Это можно сделать, бросая тело вниз без начальной скорости с большей высоты  $(h + h_1)$ . В этом случае, к

началу падения с высоты  $h$  тело приобретет нужную скорость  $v_0$ . Предварительную высоту  $h_1$  заранее можно вычислить.

$$\text{Известно, что } v_0 = \sqrt{2gh_1}. \text{ Отсюда } \sqrt{h_1} = \frac{v_0}{\sqrt{2g}}.$$

Подставляя вместо  $v_0$  ее значение из пункта а), окончательно получаем

$$\sqrt{h_1} = \frac{\tau(\sqrt{8gh} - g\tau)}{4\sqrt{h} - \tau\sqrt{8g}}.$$

В итоге бросаемое тело с высоты  $(h + h_1)$  должно преодолеть высоту  $h$ , на  $\tau$  секунд раньше, чем при свободном падении с этой высоты. Измерения этого времени, например, электронным секундомером, и послужат косвенным подтверждением правильности определения  $v_0$ .

Учащимся предлагается самостоятельно предложить и количественно обосновать способ экспериментальной проверки решения пункта б).

1.9 Из первого графика видно, что начальная скорость первого автомобиля  $v_0 = 4$  м/с, а ускорение  $a = \frac{OA}{OB} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Следовательно, первый автомобиль до остановки пройдет путь  $s = v_0 t - \frac{at^2}{2} = 4 \cdot 4 - \frac{1 \cdot 16}{2} = 8$  м (или численно равный площади треугольника OAB).

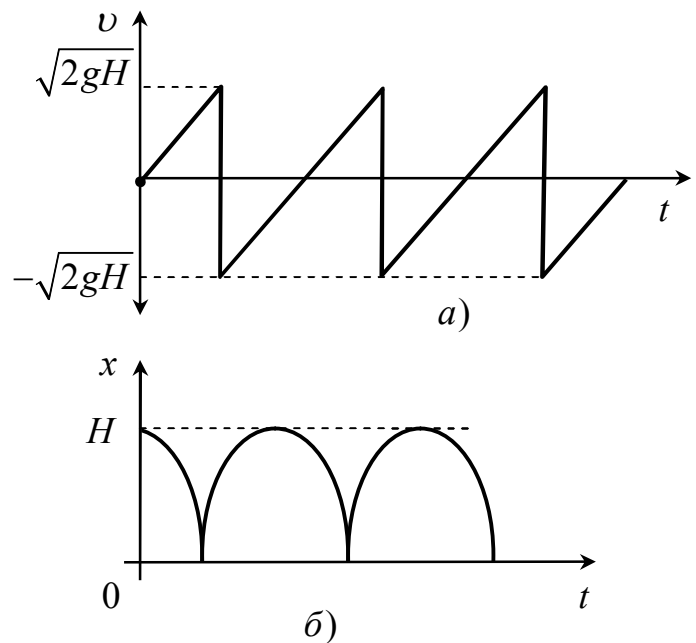
Второй график изображает также равнопеременное движение. Из него следует, что до остановки второй автомобиль проходит путь  $h = 10$  м за то же время (4 с). Следовательно, он движется быстрее. Таким образом, отстающим является первый автомобиль.

**Методические указания.** Для качественной экспериментальной проверки приведенного решения достаточно продемонстрировать параллельное

скатывание двух одинаковых шариков с двух разновысоких наклонных плоскостей. В этом случае шарики в начале своего горизонтального движения будут иметь различные начальные скорости и более медленным будет тот шарик, который пройдет до остановки меньшее расстояние.

1.10 Смотри рисунок. Наибольшая скорость, которую будет иметь шарик при соприкосновении с поверхностью:  $v_{\max} = \sqrt{2gH}$ .

При ударе скорость шарика мгновенно изменяет направление на противоположное, оставаясь неизменной по величине.



1.11 Обозначим время падения обоих тел буквой  $t$ . Тогда  $h = \frac{gt^2}{2}$  и  $H = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$  или  $H = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} t + h$ . Так как  $H = 1,5 h$ , то  $v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,5 h$ . Отсюда находим  $v_0 = \sqrt{0,125gh} \approx 1,1 \sqrt{h} \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$ .

**Методические указания.** Для проверки полученного результата второе тело должно начинать падать без начальной скорости с несколько бóльшей чем  $H$  высоты, так чтобы к моменту пролета высоты  $H$  оно уже имело расчетную скорость  $v_0$ , которую нетрудно рассчитать, зная что скорость в конце падения тела  $v_0 = \sqrt{2gh_1}$ , (здесь  $h_1$  - дополнительная к высоте  $H$  высота падения второго тела). Тогда

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{или} \quad h_1 = \frac{(1,1\sqrt{h})^2}{2g} \approx 0,062h.$$

Таким образом, если второе тело без начальной скорости заставить падать с высоты  $H + h_1 = 1,56h$ , то оба тела должны упасть одновременно. Это и есть правильное решение.

1.12 В момент касания нитью гвоздя шарики будут иметь одинаковую скорость  $v$ , которая из поступательной превратится в линейную скорость вращения после того, как шарики стали двигаться по окружности с радиусами соответственно  $R_1$  и  $R_2$  (здесь  $R_1 = \frac{1}{3}l$  и  $R_2 = \frac{2}{3}l$ ). Но  $v = \omega R$ , где  $\omega$  - угловая скорость. Поэтому  $v_1 = \omega_1 R_1$  и  $v_2 = \omega_2 R_2$ . Так как  $v_1 = v_2$ , то имеем  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$  или  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}l : \frac{1}{3}l = 2$ . Значит, первый шарик будет вращаться с бóльшей скоростью. Его скорость вращения в два раза больше скорости вращения второго шарика.

**Методические указания.** Правильность полученного результата проверяется путем экспериментального определения числа оборотов шариков: у первого их должно быть в два раза больше, чем у второго.

1.13 Скорость движения шарика, у плиты при первом падении на нее  $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ , время падения  $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ . Скорость в момент отскакивания  $v_2 = 0,75v_1 = 0,75\sqrt{2gh_1}$ . Из условия  $v = v_2 - gh_2 = 0$ , где  $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$ , и соответствующей подстановки, получаем:

$$0,75\sqrt{2gh_1} - g\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0.$$

Отсюда находим  $h_2$ :

$$0,75^2 h_1 = h_2,$$

то есть

$$h_2 = 0,562h_1.$$

Таким же образом находим  $h_3 = 0,316h_1$ ;  $h_4 = 0,177h_1$ ;  $h_5 = 0,099h_1$ ;  $h_6 = 0,055h_1$  и так далее.

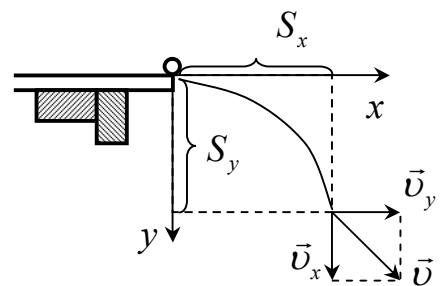
Высота  $h_8 \approx 0,017h_1$  является уже малой по сравнению с начальной высотой подъема шарика и ею можно пренебречь.

Таким образом, шарик сделает 6-7 сравнительно заметных отскоков.

1.14 Движение скатывающегося со стола шарика можно представить как сумму равномерного движения со скоростью  $v_0$  в горизонтальном направлении  $S_x$  и равноускоренного движения без начальной скорости в вертикальном направлении  $S_y$  с ускорением  $a = g$ , направленным вниз. Очевидно, оба этих движения будут одновременными. Так как  $S_y = H = \frac{gt^2}{2}$ , то  $t = \sqrt{\frac{2S_y}{g}}$

и будет временем движения. Оно, как видно из приведенного выражения, не зависит от начальной скорости  $v_0$ . Это свидетельствует о том, что шарики, из которых один падает вертикально, а другой по параболе, упадут на пол одновременно.

Наблюдаемый результат подтверждает выполнимость принципа независимости механического движения.

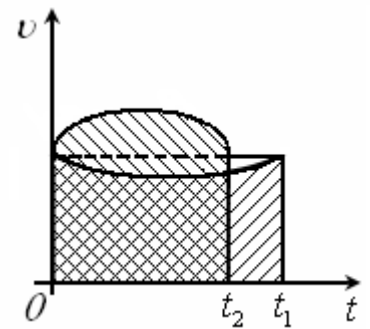




**Методические указания.** Для более точного контроля одновременности падения шариков необходимо на пол предварительно положить лист жезла. Удары падающих шариков в этом случае хорошо слышны. По ним судят о моментах их падения. Если шарики упадут одновременно, все услышат один удар.

Успех опыта зависит от одновременности отрыва шариков (покоящегося и движущегося) от стола. Поэтому желательно движение шарика по столу сделать с помощью какого-либо приспособления (например, желоба) направленным.

1.15 Строим примерные графики скорости движения шариков. Так как пути, пройденные шариками, равны (на графике пути численно равные площадям заштрихованных фигур), то, как видно из графика,  $t_2 < t_1$ . Значит, второй шарик быстрее достигнет точки  $B$ , хотя скорости обоих шариков в конце пути будут одинаковыми.



1.16 Быстрее скатится шарик  $m_2$ , так как  $DC$  он пройдет гораздо быстрее, чем шарик  $m_1$  пройдет  $AB$  (смотри рисунок далее).

Действительно. Пусть  $AB$  и  $DC$  образуют с горизонталью угол  $\alpha$ , а стороны  $BC$  и  $DA$  образуют с вертикалью угол  $\beta$ . Если шарик скатывается по сторонам  $AB + BC$ , то он тратит на это время  $t_1 + t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  - время, которое он тратит на скатывание по  $AB$  и  $BC$  соответственно. Ускорение при движении по  $AB$  равно  $g \sin \alpha$ . Поэтому для вычисления времени  $t_1$  имеем уравнение:

$$a = \frac{(g \sin \alpha) t_1^2}{2}.$$

Ускорение при движении по  $BC$  равно  $g \cos \beta$ . Следовательно, мы можем определить  $t_2$ , решая уравнение:

$$a = \sqrt{2a(g \sin \alpha)t_2} + \frac{(g \cos \beta)t_2^2}{2}.$$

Для второго случая, при скатывании шарика по сторонам  $AD + DC$  будем иметь такие же выражения с той лишь разницей, что ускорение  $g \sin \alpha$  и  $g \cos \beta$  нужно поменять местами. Поэтому для первого случая сумма двух времен равна

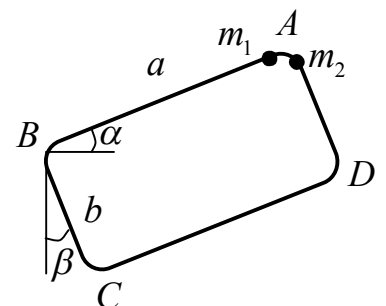
$$\sqrt{\frac{2a}{g \sin \alpha}} + \frac{-\sqrt{2ag \sin \alpha} + \sqrt{2ag \sin \alpha + 2ag \cos \beta}}{g \cos \beta},$$

а для второго случая та же сумма времен равна

$$\sqrt{\frac{2a}{g \cos \beta}} + \frac{-\sqrt{2ag \cos \beta} + \sqrt{2ag \cos \beta + 2ag \sin \alpha}}{g \sin \alpha}.$$

Так как  $g \sin \alpha$  меньше, чем  $g \cos \beta$  и  $a > b$ , то в первом случае сумма времен больше, чем во втором.

**Методические указания.** Устройство, используемое в задаче, изготавливается из стальной проволоки диаметром 1-2 мм и длиной 1,0-1,2 м. Перед тем, как спаять или сварить концы проволоки на нее нанизывают два просверленных заранее стальных шарика небольших размеров или такие же две бусинки. Пригодными могут быть так же две одинаковые пуговицы ок-



руглой формы. После пайки проволочному каркасу с шариками придают нужную форму.

1.17 а) В системе координат, связанной с горизонтально движущейся кисточкой, цилиндр имеет скорость  $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$ , где  $u$  - скорость падения цилиндра,  $v$  - линейная скорость кисточки. Исходя из принципа независимости двух движений и учитывая их взаимно перпендикулярные направления, можно заключить, что кисточка начертит прямую линию, идущую под углом к вектору  $\vec{v}$ .

б) Уравнение движения вертикально падающего цилиндра:

$$y = v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

Так как  $v_0 = 0$ , то  $y = \frac{gt^2}{2}$ .

Пусть в цилиндре имеются три метки:  $n$ -я,  $(n+1)$ -я и  $(n+2)$ -я. Расстояние между ними  $\Delta y_1$  и  $\Delta y_2$  соответственно. Если  $y_n$ ,  $y_{n+1}$  и  $y_{n+2}$  координаты меток относительно нулевой метки (цилиндр покоится), то

$$y_n = \frac{gt_n^2}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{g(t_n + T)^2}{2} \quad \text{и} \quad y_{n+2} = \frac{g(t_n + 2T)^2}{2},$$

где  $T$  - период вращения кисточки;

$t_n$  - момент времени, соответствующий появлению  $n$ -ой метки.

Тогда

$$\Delta y_1 = y_{n+1} - y_n = \frac{g}{2} \left[ (t_n + T)^2 - t_n^2 \right] = \frac{g}{2} (2t_n + T)T,$$

$$\Delta y_2 = y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{g}{2} \left[ (t_n + 2T)^2 - (t_n^2 + T) \right] = \frac{g}{2} (2t_n + 3T)T.$$

Отсюда:

$$\frac{2\Delta y_1}{gT} = 2t_n + T. \quad (1)$$

$$\frac{2\Delta y_2}{gT} = 2t_n + 3T. \quad (2)$$

Вычитая из (2) (1), получим:

$$2T = \frac{2\Delta y_2}{gT} - \frac{2\Delta y_1}{gT} = \frac{2}{gT} (\Delta y_2 - \Delta y_1).$$

Отсюда

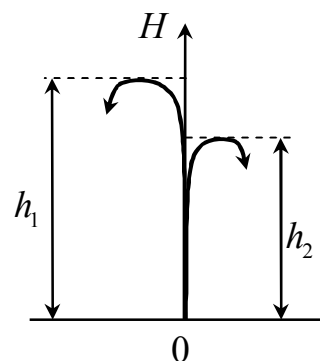
$$g = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{T^2},$$

то есть

$$g = \frac{\Delta y_{n+1} - \Delta y_n}{T^2}.$$

По данным эксперимента  $\Delta y_1 = 23$  мм,  $\Delta y_2 = 40$  мм,  $\Delta y_3 = 56$  мм и так далее. Находим среднее значение ускорения:  $\bar{g} = 981,2 \pm 6,2$  (см/с<sup>2</sup>).

1.18 Шарики упадут одновременно. Действительно, направим ось  $ОН$  с началом координат в месте бросания шариков вверх. Тогда уравнения движения шариков:



$$h_1 = v_1 t_1 + \frac{g t_1^2}{2} \text{ и}$$

$$h_2 = v_2 t_2 + \frac{g t_2^2}{2},$$

где  $t_1$  и  $t_2$  - время падения на Землю 1-го и 2-го шариков.

Падению на Землю соответствуют координаты  $h_1 = h_2 = 0$ . Определив,  $t_1$  и  $t_2$  из полученных квадратных уравнений найдем:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2(v_1 - v_2),$$

где  $v_1$  и  $v_2$  - начальные скорости бросания шариков.

Учитывая, что  $v_1 = v_2$ , получаем  $\Delta t = 0$ .

$$1.19 \quad v = \sqrt{2gh} \approx 6,3 \text{ м/с.}$$

**Методическое указание.** Полезно на занятиях измерить скорость снижения самодельного парашюта небольших размеров.

1.20 Рассмотрим движение точек колеса сначала относительно его центра, а затем, относительно неподвижного наблюдателя.

В первом случае за время полного оборота  $T$  колесо пройдет путь, равный длине окружности колеса, то есть  $S = 2\pi R$ , где  $R$  - радиус колеса.

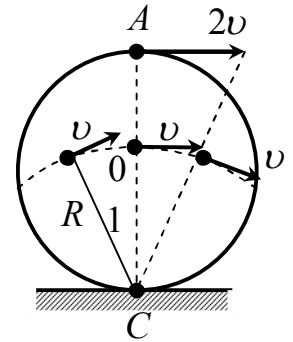
Следовательно, поступательная скорость любой точки колеса  $v_n = \frac{2\pi R}{T} = v$ .

С другой стороны, линейная скорость вращения относительно центра 0 любой из точек, лежащих на ободе колеса, равна  $v_n = \omega R$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения.

Так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , то  $v_n = \frac{2\pi R}{T} = v = v_n$ . Значит, на ободе коле-

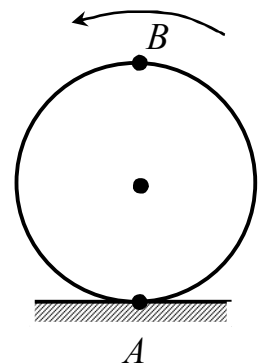
са нет точек, которые имели бы линейную скорость больше поступательной скорости колеса.

С точки зрения неподвижного наблюдателя мгновенные скорости точек диаметра  $AC$  катящегося колеса возрастают прямо пропорционально расстоянию от точки  $C$  (мгновенная ось). Точка  $C$  перемещается при движении колеса, все время, соприкасаясь с неподвижной плоскостью, это значит, в каждый момент времени ее скорость равна нулю. Центр колеса будет двигаться со скоростью, равной поступательной скорости всего колеса, а точка  $A$  - с удвоенной скоростью. Следовательно, в данный момент времени точки, находящиеся на расстоянии радиуса колеса от мгновенной оси, будут иметь ту же скорость по абсолютной величине, что и само колесо (скорость оси). У точек же, расположенных на больших чем  $R$  расстояниях, скорость будет больше скорости колеса.



**Методическое указание.** В этом легко убедиться, если рассматривать качение велосипедного колеса. Достаточно подобрать такую скорость, чтобы верхние спицы сливались в то время, когда у нижних спиц этого нет. Это доказывает, что верхние точки колеса имеют бóльшую скорость по сравнению со скоростью движения его нижних точек.

1.21 Когда цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости, то его образующая касающаяся плоскости, неподвижна в данный момент времени, а сам цилиндр вращается вокруг этой неподвижной прямой (на нашем рисунке точка  $A$ ). Очевидно, что в этом случае образующая, касающаяся доски, (у нас точка  $B$ ), движется вперед со скоростью, вдвое больше той, с которой движется ось цилиндра. Поэтому, когда человек, толкая доску, пройдет путь, равный длине доски, то цилиндр уйдет вперед на расстояние, равное половине длины



доски. Таким образом, чтобы дойти до цилиндра, человек должен пройти расстояние, равное  $2l$ .

**Методическое указание.** Эксперимент с доской и человеком может быть заменен экспериментом с длинной линейкой и небольшим цилиндром с диаметром 10-15 см. Цилиндр катят по столу и производят измерения.

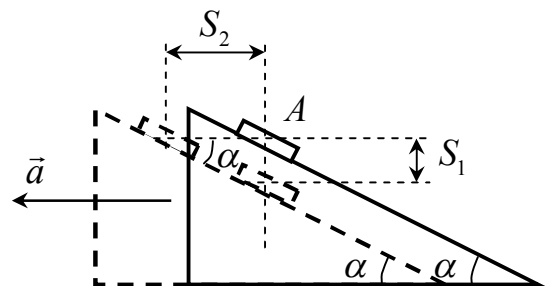
1.22 При свободном падении, за время  $t$  тело  $A$  пройдет по вертикали путь  $S_1 = \frac{gt^2}{2}$ . За это же время клин должен сместиться на расстояние

$S_2 = \frac{at^2}{2}$ . Если тело все время соприкасается с клином, то, как видно из рисунка,

$\frac{S_2}{S_1} = ctg\alpha$ , а ускорение, с которым нужно двигать клин, будет

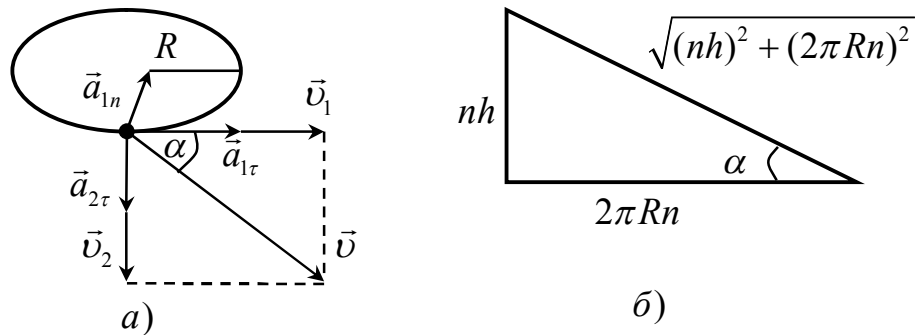
$a = g \cdot ctg\alpha$ . Если ускорение клина в горизонтальном положении будет больше  $g \cdot ctg\alpha$ , то тело оторвется от клина.

**Методическое указание.** Полученный результат можно качественно проверить, используя деревянный прямоугольный клин крупных размеров. Для этого клин с положенным на него деревянным брусом  $A$  двигают по столу с небольшим ускорением так, чтобы тело  $A$  медленно с него скатывалось. Затем, клин двигают так, чтобы тело оторвалось от клина. Измерив оба ускорения, заключаем, что значение искомого ускорения должно лежать между ними. Оно должно приблизительно быть равно  $g \cdot ctg\alpha$ .



1.23\* Движение бусинки можно рассматривать как два движения: по окружности в горизонтальной плоскости и падения по вертикали. Тогда  $v_1 = v \cos\alpha$  - горизонтальная составляющая, а  $v_2 = v \sin\alpha$  - вертикальная со-

ставляющая скорости,  $\alpha$  - угол, образованный винтовой линией с горизонтом.



Нормальная составляющая ускорения бусинки в горизонтальной плоскости:

$$a_{1n} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v_1^2 \cos^2 \alpha}{R}, \quad (1)$$

а  $a_{2n} = 0$ , так как движение по вертикали прямолинейное.

Для определения  $a_{1n}$  найдем  $v$  из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \cdot n.$$

Следовательно,  $v^2 = 2gh \cdot n$ . Тогда

$$a_{1n} = \frac{2ghn}{R} \cos^2 \alpha.$$

Косинус угла  $\alpha$  можно найти, мысленно развернув винтовую линию (она превратится в наклонную прямую линию):

$$\cos^2 \alpha = \frac{(2\pi Rn)^2}{(nh)^2 + (2\pi Rn)^2}.$$



Тогда

$$a_{1n} = \frac{2ghn}{R} \cdot \frac{(2\pi Rn)^2}{(nh)^2 + (2\pi Rn)^2} = \frac{8\pi^2 ghnR}{h^2 + 4\pi^2 R^2}. \quad (2)$$

Искомое время найдем, исходя из того, что время движения бусинки до конца проволоки будет соответствовать времени  $n$  ее оборотов:

$$a_{1n} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R = \frac{4\pi^2 n^2}{t^2} R. \quad (3)$$

Так как  $T = \frac{t}{n}$ , из (2) и (3) имеем:

$$\frac{8\pi^2 ghnR}{h^2 + 4\pi^2 R^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{t^2} R \quad \text{или} \quad \frac{2gh}{h^2 + 4\pi^2 R^2} = \frac{n}{t^2}.$$

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{n(h^2 + 4\pi^2 R^2)}{2gh}} \quad \text{или} \quad t = \sqrt{\frac{n}{2g} \left( h + \frac{4\pi^2 R^2}{h} \right)}.$$

Из полученного выражения следует, что с увеличением шага спирали (спираль растянута) время движения бусинки увеличивается. Оно будет увеличиваться и при увеличении радиуса витка, а также числа витков.

Так как в полученное для  $t$  выражение не вошла масса  $m$ , то время для бусинок разных масс будет одним и тем же.

1.24\* Закон движения вертикального груза  $y = \frac{gt^2}{2}$ , а закон движения горизонтального груза  $x = \sqrt{l^2 - y^2}$ . Так как начальная скорость падающего груза  $v_0$  равна нулю, то  $v = gt$ . Тогда

$$x = \sqrt{l^2 - \left(\frac{vt^2}{t \cdot 2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{v^2 t^4}{t^2 \cdot 4}}.$$

Из простых геометрических соображений следует

$$\frac{U}{y} = \frac{v}{x},$$

где  $y = \frac{gt^2}{2} = \frac{vt^2}{2 \cdot t} = \frac{vt}{2}$ .

Тогда

$$\frac{U}{\frac{vt}{2}} = \frac{v}{x} \quad \text{и} \quad \frac{2U}{vt} = \frac{v}{\sqrt{l^2 - \frac{v^2 t^2}{4}}} = \frac{2v}{\sqrt{4l^2 - v^2 t^2}}.$$

То есть

$$\frac{U}{vt} = \frac{v}{\sqrt{4l^2 - v^2 t^2}}.$$

Отсюда находим:

$$U = \frac{v^2 t}{\sqrt{4l^2 - v^2 t^2}} = \frac{g^2 t^2 \cdot t}{\sqrt{4l^2 - g^2 t^2 t^2}} = \frac{g^2 t^3}{\sqrt{4l^2 - g^2 t^4}} = \frac{gt}{\sqrt{\frac{4l^2}{g^2 t^4} - 1}}.$$

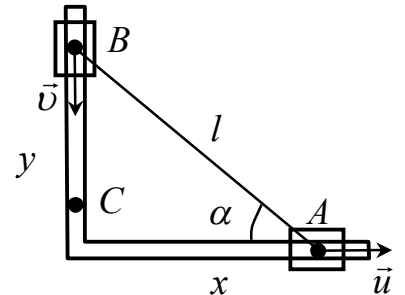
Окончательно

$$U = \frac{gt}{\sqrt{\frac{4l^2}{g^2 t^4} - 1}}$$

**Методическое указание.** Так как  $gt = v$ , а  $y = \frac{gt^2}{2}$ , то полученный результат можно преобразовать:

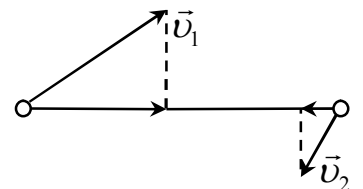
$$U = \frac{gt}{\sqrt{\frac{4l^2}{g^2 t^4} - 1}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{l^2}{y^2} - 1}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}} = \frac{v}{\operatorname{ctg} \alpha}, \text{ то есть } \frac{U}{v} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Представленный результат в таком виде можно в дальнейшем использовать для косвенной экспериментальной проверки решения данной задачи. Для этого на вертикальной половине прутка в точке  $C$ , отстоящей от точки  $B$  на известном расстоянии, устанавливают стопор и отмечают начальные положения грузов  $A$  и  $B$ . Затем груз  $B$  отпускают и измеряют время движения грузов до их остановки. Очевидно, отношение пройденных грузами путей будет равно  $\operatorname{tg} \alpha$ . Измерив, эти пути и их отношение, находят сначала тангенс угла, а затем и сам угол. Полученный результат проверяют с помощью транспорта.



1.25 Нет, не могут. Вследствие жесткости стержня, составляющие обеих скоростей в направлении стержня должны быть одинаковыми, так как в противном случае стержень должен был бы укорачиваться или удлиняться.

**Методическое указание.** Если стержень заменить тонкой длинной пружиной, прикрепив ее середину к какому-либо демонстрационному плоскому экрану и насадив на ее концы небольшие шарики, то потянув последние в за-



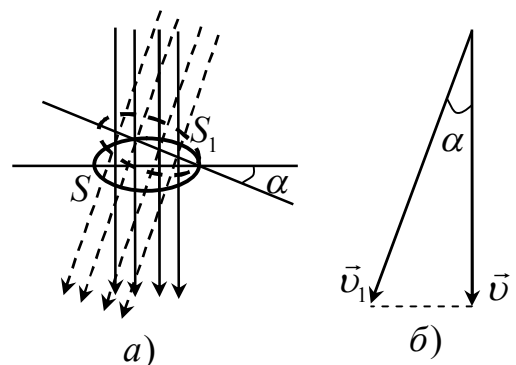
данных задачей направлениях (на экране отмеченных мелом) можно убедиться в том, что пружина начнет сжиматься и тем самым препятствовать движению шариков.

Здесь же можно подобрать такие направления движения шариков, при которых пружина не будет сжиматься или растягиваться. Именно в таких направлениях возможны движения шариков.

1.26 Скорость наполнения ведра водой (то есть масса жидкости, попадающая в ведро в единицу времени) не изменится, так как, хотя площадь сечения падающего дождя уменьшается ( $s_1 = s \cos \alpha$  рисунок *a*), скорость капель дождя не только изменит направление, но и соответственно возрастёт до

значения  $v_1 = \frac{v}{\cos \alpha}$  (рисунок *б*). Иначе

говоря, скорость наполнения ведра водой зависит только от вертикальной составляющей скорости капель, которую ветер не изменяет.



**Методическое указание.** Вывод из приведенного решения проверить не трудно. Для этого достаточно измерить время наполнения лабораторного стакана водой из душевого расщекателя, располагая стакан один раз вдоль потока, а другой – под некоторым (не слишком большим) углом.

1.27 Одинаково. Решение аналогичное решению предыдущей задачи.

1.28 Если оси координат направить так, как показано на рисунке *a*, то проекции ускорения и скорости на оси  $x$  и  $y$  будут соответственно равны  $a_x = g_x = g \sin \alpha$ ,  $a_y = g_y = -g \cos \alpha$ ,  $v_{0x} = v_0 \sin \alpha$ ,  $v_{0y} = v_0 \cos \alpha$  (зеркальное отражение). Скорость шарика в момент создания первого соударения с на-

клонной плоскостью будет равна  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Начальная скорость шарика после первого соударения равна  $v_0$  и образует с осью  $y$  угол  $\alpha$ .

Расстояние между точками первого и второго соударений шарика с плоскостью (рисунок б) равно:

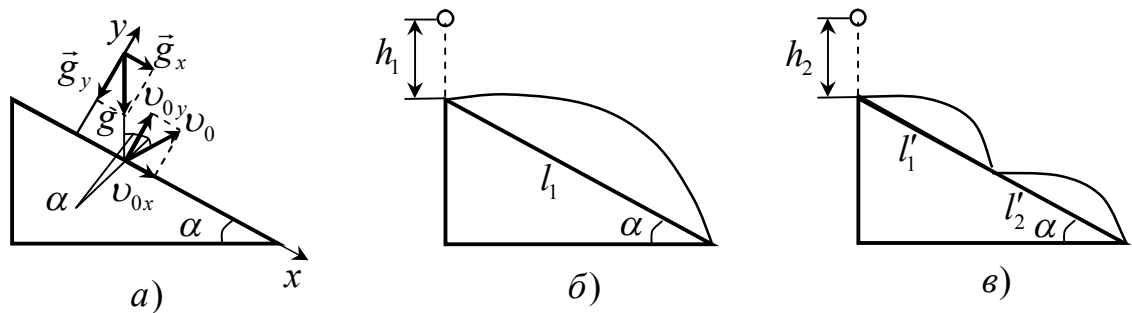
$$l_1 = v_{0x}t_1 + \frac{g_x t_1^2}{2},$$

или

$$l = (v_0 \sin \alpha)t_1 + \frac{(g \sin \alpha)t_1^2}{2},$$

где  $t_1$  - время полета.

Это время можно найти.



При полете шарика вверх скорость его под влиянием силы тяжести будет постепенно уменьшаться по закону  $v_y = v_{0y} - g_y t'$ . В верхней точке траектории эта вертикальная составляющая будет равна нулю. Следовательно,

$0 = v_{0y} - g_y t'$  и  $v_{0y} = g_y t'$ . Отсюда  $t' = \frac{v_{0y}}{g_y}$  - время подъема шарика после отскока от плоскости. Столько же времени будет продолжаться падение его на

плоскость. Поэтому время полета

$$t_1 = 2t' = \frac{2v_{0y}}{g_y} = \frac{2v_0 \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0}{g}.$$

Тогда

$$l_1 = (v_0 \sin \alpha) \frac{2v_0}{g} + \frac{(g \sin \alpha) \cdot 4 v_0^2}{2g^2} = 8h \sin \alpha,$$

так как  $v_0 = \sqrt{2gh}$ .

Скорость шарика в момент второго соударения определяется равенствами:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_x t_1 = v_0 \sin \alpha + (g \sin \alpha) t_1 = 3v_0 \sin \alpha$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_y t_1 = v_0 \cos \alpha - (g \cos \alpha) t_1 = -v_0 \cos \alpha.$$

Во второй точке касания  $v_{2x} = v_{1x}$  и  $v_{2y} = -v_{1y}$ . Расстояние между точками второго и третьего соударений равно

$$l_2 = (3v_0 \sin \alpha) t_2 + (g \sin \alpha) \frac{t_2^2}{2},$$

где  $t_2$  - время полета.

Так как начальная скорость вдоль оси  $y$  та же, что и при первом соударении, то  $t_2 = t_1$ . Поэтому

$$l_2 = 3v_0 \sin \alpha \frac{2v_0}{g} + (g \sin \alpha) \frac{4v_0^2}{2g^2} = \left( \frac{2gh}{g} \sin \alpha \right) \cdot 8 = 16h \sin \alpha.$$

Аналогично можно показать, что расстояние между следующими точками  $l_3 = 24h \sin \alpha$  и так далее.

Таким образом, для наблюдения двух точек касания шарика с наклонной плоскостью необходима высота падения шарика  $h_1 = \frac{l_1}{8 \sin \alpha}$ , где  $l_1$  в дан-

ном случае равна длине плоскости (смотри рисунок б). Чтобы наблюдать три точки касания с той же наклонной плоскостью, необходима высота  $h_2$ , которую можно определить, записывая выражение для  $l'_1$  и  $l'_2$  (рисунок в), соответствующие этой высоте:  $l'_1 = 8h_2 \sin \alpha$  и  $l'_2 = 16h_2 \sin \alpha$ . Очевидно, сумма этих расстояний должна равняться длине наклонной плоскости  $l_1$ . Тогда  $8h_2 \sin \alpha + 16h_2 \sin \alpha = 8h_1 \sin \alpha$ . Отсюда  $h_2 = \frac{h_1}{3}$ .

Аналогично находим  $h_3 = \frac{h_1}{6}$ ,  $h_4 = \frac{h_1}{10}$  и так далее для наблюдения

трех, четырех и так далее точек касания.

**Методическое указание.** Для проверки полученных результатов используют металлическую доску (плиту), длиной 1 м, установленную наклонно под углом  $\alpha \approx 14^\circ \div 15^\circ$ . Тогда начальная высота падения шарика на верхний край доски подбирается равной  $h_1 = 0,5 \text{ м} = 50 \text{ см}$ . Эту высоту измеряют вертикальной линейкой, на которой укрепляется подвижная электромагнитная прицепка со стальным шариком. В момент выключения электромагнита, шарик начинает падать вертикально с установленной высоты. Если высота будет равна 50 см, то точек касания шарика о плоскость будет две. Падение шарика с высоты 17 см дает три точки касания, с высоты 3 см – четыре и так далее.

1.29 Когда колесо катится, то оно в каждый момент времени поворачивается вокруг точки касания с Землей. Поэтому линейные скорости верхних спиц больше линейных скоростей нижних спиц, расположенных ближе к неподвижной в данный момент точке.

Если колесо просто вращается, оставаясь на месте, то неподвижных точек касания с Землей не будет и, следовательно, верхние и нижние спицы будут видны отчетливо (либо все сольются), так как их линейные скорости будут одинаковыми.

**Методическое указание.** Для наблюдения описанных эффектов можно воспользоваться большим велосипедным колесом. Достаточно пустить колесо по наклонной доске, имеющую высоту 2–3 см, чтобы колесо приобрело в конце скатывания с доски необходимую скорость (смотри решение задачи 2.27):

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{9,8 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 0,44 \text{ м/с} = 44 \text{ см/с}.$$

1.30 Мы увидим светящийся круг там, где освещенные отверстия успевают сменить друг друга за время, меньшее или равное  $1/16$  с (особенности нашего зрения). Так как отверстия отстоят друг от друга на расстоянии  $S = 1$  см, то, следовательно, их скорость должна быть равна  $v = \frac{S}{t} = 16 \text{ см/с}$ .

Таким образом, мы увидим сплошной светящийся круг там, где линейная скорость вращающегося диска равна  $16 \text{ см/с}$ . Из соотношения между линейной и угловой скоростями  $v = \omega r = 2\pi n r$  находим  $n \geq \frac{16}{2\pi r}$ . Так как  $r = \frac{R}{2}$ , то окончательно имеем  $n \geq \frac{16}{\pi R} \text{ с}^{-1}$ .

**Методическое указание.** О способе проверки частоты вращения диска смотри решение задачи 1.31.

1.31 Если частота вращения диска и частота вспышек света совпадают, то мы увидим неподвижное изображение черного кружка на диске, так как за время между двумя вспышками кружок успевает сделать полный оборот. По шкале стробоскопа определяем частоту вспышек, равную частоте вращения диска.

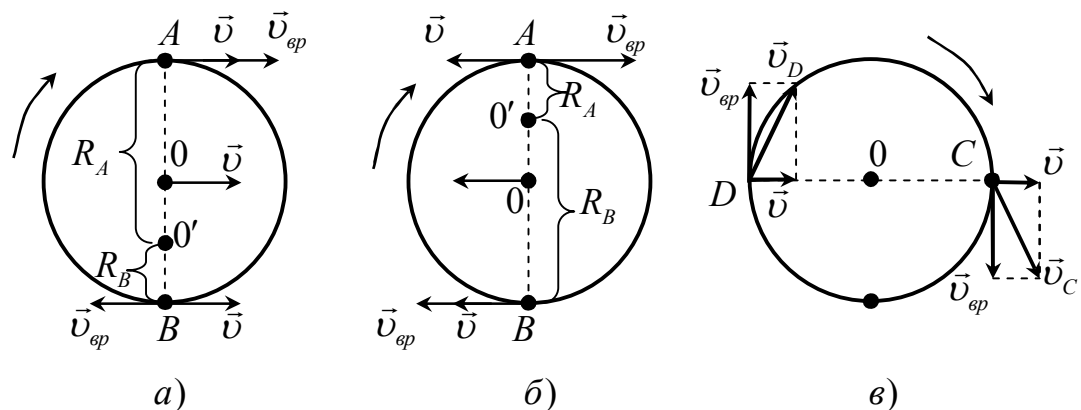
Если частота вспышек света не равна, но кратна частоте вращения диска, то мы увидим неподвижное изображение  $n$  кружков, где  $n$  - коэффициент кратности.



Если частота вспышек немного больше (меньше) частоты вращения диска, то видно изображение одного кружка, смещающегося против ( в направлении) вращения диска.

**Методическое указание.** Для проведения эксперимента используется вентилятор, питаемый переменным напряжением от регулируемого автотрансформатора (ЛАТР'а). При этом крыльчатка вентилятора снимается, а на его ось насаживается легкий картонный диск с черным кружком.

1.32 Да, изменится. Каждая точка диска участвует в двух движениях: прямолинейном движении со скоростью  $U$  и вращении с угловой скоростью  $\omega$  вокруг центра диска  $O$ . Линейная скорость вращательного движения краевых точек  $v_{\text{вр}} = \omega R$  (направлена вдоль касательной к диску).



Рассмотрим две диаметрально противоположные точки диска  $A$  и  $B$ , расположенные на расстоянии  $R$  от центра. Их скорости равны векторной сумме скоростей поступательного и вращательного движений, а значит для данного направления движения тележки:

$$v_A = v_{\text{вр}} + U, \quad \text{а} \quad v_B = v_{\text{вр}} - U.$$

Как видно из рисунка, результирующие скорости  $v_A$  и  $v_B$  направлены вдоль касательных в точках  $A$  и  $B$ , а значит их значения могут быть записаны:  $v_A = \omega R_A$  и  $v_B = \omega R_B$ . Но  $v_A > v_B$ . Следовательно  $R_A > R_B$ . Это означает, что при данном направлении движения тележки мгновенная ось вращения точек  $A$  и  $B$  будет располагаться ниже центра диска (рисунок *а*). Легко показать, что если тележка движется в противоположном направлении, то мгновенная ось вращения расположится выше центра диска (рисунок *б*).

Заметим, что боковое смещение мгновенной оси вращения происходить не будет, так как по касательным в точках  $C$  и  $D$  будут направлены только мгновенные вращательные скорости  $v_{ep}$  (рисунок *в*), которым будут соответствовать равные радиусы вращения для любого направления движения тележек.

1.33 За время перемещения  $t$  на длину кузова  $l$  центр тяжести машины наберет вертикальную скорость  $v_e \approx \frac{gl}{v}$  и угловую скорость  $\omega \approx v_e \frac{2}{l} = \frac{2g}{v}$ .

Тогда число оборотов автомобиля будет:  $n \approx \frac{t_{над}}{T} = t_{над} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{2Hg}}{\pi v} \approx 1,5$  при горизонтальной скорости  $v = 30 \text{ м/с} = 108 \text{ км/ч}$ .

**Методическое указание.** Правильность такой оценки подтверждают фрагменты из многочисленных кинофильмов, где демонстрируется полная картина падения автомобиля с большой высоты.

Для детского автомобиля, движущегося по столу высотой 1 м с горизонтальной скоростью 20 см/с, наши оценки дают  $n \approx 7$ . Это можно легко проверить.

1.34 За время  $t_1$  часовая и минутная стрелки поворачиваются на углы, соответственно  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{T_1}t_1$  и  $\varphi_2 = \frac{2\pi}{T_2}t_1$ , где  $T_1 = 12 \cdot 3600$  с и  $T_2 = 3600$  с - периоды обращения часовой и минутной стрелок.

За один час минутная стрелка делает полный оборот ( $2\pi$ ), а часовая – только его  $\frac{1}{12}$  часть  $\left(\frac{2\pi}{12}\right)$ . Таким образом, когда минутная стрелка начинает второй оборот, часовая стрелка имеет начальный угол  $\frac{2\pi}{12}$ . Далее стрелки движутся по законам:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{T_1}t_1 \text{ - часовая стрелка,} \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T_2}t_1 \text{ - минутная стрелка.} \quad (2)$$

Для совпадающих стрелок

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (3)$$

Решая совместно (1) и (2) с учетом (3), находим

$$t_1 = \frac{T_1 T_2}{12(T_1 - T_2)}.$$

После подстановки значений  $T_1$  и  $T_2$ , получим:  $t_1 \approx 327,27$  с = 5,45 мин.

Таким образом, в момент ближайшего совпадения стрелок часы покажут 1 ч 5 мин 27 с.

Чтобы найти следующее совпадение стрелок, нужно посчитать начальный угол поворота часовой стрелки равный  $2\frac{2\pi}{12}$  и составить соответствующие уравнения, аналогичные (1) и (2). После их решения получаем

$t_2 = \frac{2T_1T_2}{12(T_1 - T_2)}$  и так далее. Очевидно, для последующих  $n$  совпадений стрелок время будет определяться из выражения

$$t_n = \frac{nT_1T_2}{12(T_1 - T_2)} = n \cdot (1 \text{ ч } 5 \text{ мин } 27 \text{ с}).$$

Легко найти, что таких совпадений будет всего 11, не считая начального (нулевого).

**Методическое указание.** Для проверки результата пользуются моделью часов с крупным циферблатом или любыми наручными часами, спроецированными с помощью эпидиаскопа на большой экран, путем демонстрации плавного перевода стрелок.

1.35 Если отставание все время одно и то же, это значит линейное ускорение  $\vec{a}$  равно нулю. Но  $a = \beta R$ . Отсюда  $\beta = 0$ .

1.36 Нет, так как их траектории имеют один общий центр (фокус) вращения, а, значит, они пересекаются дважды и параллельными быть не могут.

1.37 Потенциальная энергия обруча на вершине наклонной плоскости  $mgh$  переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движений:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Заменяя  $\omega$  на  $\frac{v}{R}$ , получим (так как  $\omega = \frac{v}{R}$ ):

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2}.$$

Момент инерции обруча радиусом  $R$  составляет  $J = mR^2$ . Подставляя это значение в предыдущее выражение и сокращая на  $m$  получим:

$$gh = v^2 \quad \text{или} \quad v = \sqrt{gh}.$$

Здесь  $v$  - скорость в конце наклонной плоскости. Так как  $l = \frac{at^2}{2}$ , а ускорение

$a = \frac{v}{t}$ , то  $t = \frac{2l}{v}$ . Подставляя в это выражение найденное значение скорости,

окончательно получим

$$t = \frac{2l}{\sqrt{gh}}.$$

**Методическое указание.** Для проверки приведенного расчета необходимо взять желоб длиной 2 м и установить один его конец на высоте 10 см. На вершину полученного таким образом наклонного желоба поместить какой-либо обруч (например, деревянные пальцы) и, в момент пуска метронома, отсчитывающего секунды, отпустить обруч. Время скатывания для выбранных условий должно составлять:

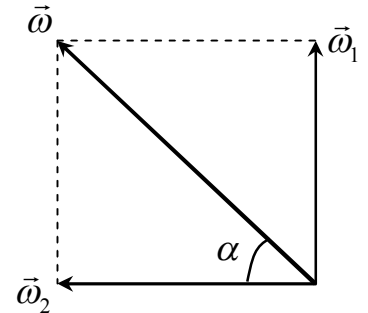
$$t = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{10 \cdot 0,1}} = 4 \text{ с.}$$

Это значит, обруч должен достигнуть горизонтали на четвертом ударе метронома.

1.38 Время скатывания обруча не зависит от его массы и радиуса (смотри решение предыдущей задачи). Поэтому оба обруча скатятся одновременно.

1.39 Крутящийся шар будет иметь две угловые скорости:  $\omega_1 = \frac{v}{R}$  - ско-

рость относительно вертикальной оси и  $\omega_2 = \frac{v}{r}$  - скорость относительно горизонтальной оси (смотри рисунок). Тогда результирующую угловую скорость шара найдем из выражения:



$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = v \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{(Rr)^2}}.$$

**Методическое указание.** Для проверки этого решения собирают установку, подобную той, которая показана на рисунке к задаче. Если  $R = 30$  см, то раскручивать установку нужно так, чтобы время ее одного оборота равнялось примерно трем секундам. Тогда скорость поступательного движения  $v$  шара будет равна 60 см/с. Если радиус шара 16 см, то расчетная угловая скорость шара при этих условиях окажется равной около  $4,2 \text{ с}^{-1}$ , что подтверждается прямым ее измерением.

Угол наклона вектора результирующей угловой скорости находят по найденному тангенсу этого угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{R}.$$

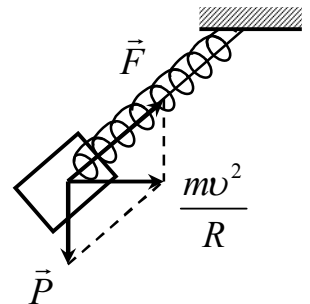
После подстановки получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,5 \quad \text{и} \quad \alpha = 28^\circ.$$

1.40 При измерении продольного уклона уровень будет давать правильные показания только при равномерном движении вагона.

При измерении поперечного уклона показания уровня будут правильными только на прямолинейных участках пути.

1.41 На груз, подвешенный на пружинных весах в вагоне, движущемся по закруглению, действуют две силы: сила веса  $P$  и сила натяжения пружины  $F$  (рисунок). Равнодействующая этих двух сил дает центростремительную силу  $m v^2 / R$ , направленную горизонтально. Непосредственно из рисунка следует, что



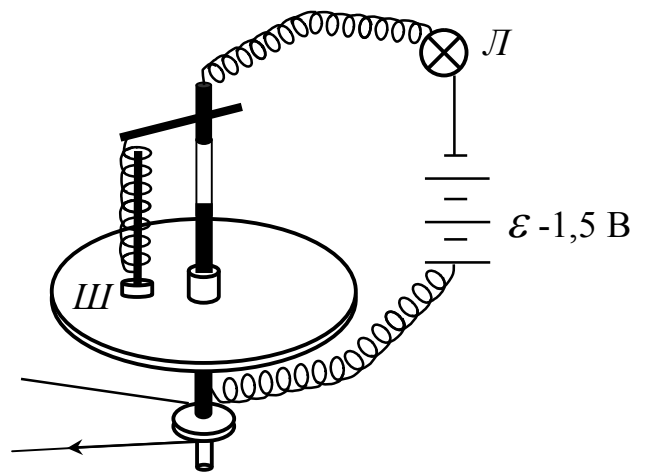
$$F^2 = P^2 + \left( \frac{m v^2}{R} \right)^2,$$

откуда

$$F = \sqrt{P^2 + \left( \frac{m v^2}{R} \right)^2}.$$

Ответ: Нет. Весы покажут бóльший вес.

**Методическое указание.** Для проверки полученного результата нужно на вращающейся платформе на электроизолированном штативе подвесить растянутую пружину, размещенную на металлической массивной штанге *Ш*, как показано на рисунке. Платформу плавно раскручивают до момента, когда штанга при растянутой пружине коснется метал-

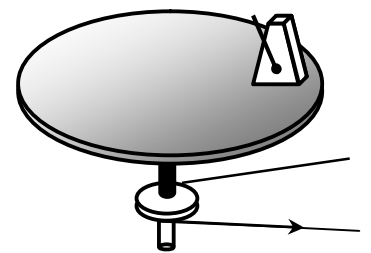


лической платформы и тем самым замкнет электрическую цепь, электрическая лампочка  $L$  вспыхнет.

1.42 Часы начнут спешить, так как пружина часов (один ее конец скреплен с корпусом, то есть с площадкой, а второй – с маятником часов) начнет закручиваться.

Поворот маятника в одну сторону вызывает поворот подставки и корпуса часов в другую сторону. Вследствие этого пружина будет закручиваться с обоих концов в противоположные стороны. Поэтому неподвижная точка пружины окажется где-то внутри пружины – между концом, прикрепленным к корпусу часов, и маятником. Иначе говоря, длина пружины как бы уменьшается, что ведет к уменьшению периода колебаний. Часы начнут спешить.

**Методическое указание.** Лучше всего на вращающуюся подставку класть карманный секундомер и его показания через 2-3 минуты вращения сравнивать с показаниями другого, например, электронного секундомера. Начало отсчета времени по двум секундомерам – подвижного и неподвижного, должно быть при этом одновременным.



Во вращающихся системах время течет по-разному. В этом можно убедиться, проделав другой опыт.

На вращающейся платформе размещают (укрепляют), как показано на рисунке, метроном. Плавно увеличивая скорость вращения платформы, на слух определяют изменение частоты колебания метронома. Учащимся предлагается самостоятельно найти объяснение наблюдаемому явлению.



## Глава 2 Динамика

2.1 Шарики упадут одновременно. Действительно, по второму закону Ньютона

$$m_i g = F,$$

где  $m_i$  - инертная масса, то есть величина, характеризующая способность тел приобретать то или иное ускорение под влиянием определенной силы.

С другой стороны, по закону всемирного тяготения

$$F = G \frac{m_g M_g}{R^2},$$

где  $G$  - гравитационная постоянная;

$M_g$  и  $m_g$  - гравитационные массы Земли и падающего тела.

Гравитационные массы определяют силу гравитационного притяжения.

Заранее не очевидно, что  $m_i = m_g$ . Однако, эквивалентность обеих масс в настоящее время можно считать доказанной, а это значит, что ускорение свободного падения одинаково для всех тел, так как при подстановке силы тяготения во второй закон Ньютона массы  $m_i$  и  $m_g$  можно сократить. В итоге получаем  $g = GM_g / R^2$ , откуда следует, что  $g$  не зависит от массы  $m_g$  любого падающего тела в отсутствии сопротивления воздуха.

Поскольку высота падения для обоих шариков одинакова из выражения  $h = gt^2 / 2$  получаем одинаковым и время их падения.

**Методическое указание.** Для демонстрации полученного результата необходимы небольших размеров металлические шарики с различными массами, а также металлический лист, о который должны одновременно ударяться падающие с некоторой высоты шарики. Перед тем шарики, как показано

на рисунке, зажимают подвесной пружиной, перетянутой нитью, которую потом пережигают.

2.2 Без учета сопротивления воздуха и с учетом такового смотри решения соответственно 2.1 и 2.3.

2.3 На падающую каплю действуют две силы: постоянная сила тяжести, ускоряющая движение капли, и сила сопротивления воздуха, замедляющая ее движение и растущая с ростом скорости капли. Сила сопротивления воздуха растет до тех пор, пока она не станет равной силе тяжести. Дальше прекращается изменение скорости, и падение капель происходит с постоянной скоростью.

При увеличении размеров капли сила тяжести увеличивается пропорционально объему, то есть пропорционально  $r^3$ . Поэтому при увеличении радиуса капли  $r$  сила тяжести увеличивается быстрее, чем сопротивление воздуха, а значит и постоянная скорость, с которой капля падает на Землю. Она растет по мере увеличения размеров капли.

**Методическое указание.** Продемонстрировать падение капель в воздухе можно, используя две пипетки с узким и широким выходными отверстиями. Пипетки проецируют на большой экран. Чтобы отрыв капель у пипеток происходил одновременно их нужно соединить общей резиновой трубкой.

2.4 Так как радиусы шаров одинаковы, то при одинаковой скорости они будут испытывать одинаковую силу сопротивления воздуха. Поскольку сила тяжести равна  $mg$ , согласно второму закону Ньютона можно записать для каждого шара:

$$\begin{aligned}m_1 a_1 &= m_1 g - f \\m_2 a_2 &= m_2 g - f.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения совместно, найдем:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2 - g}{a_1 - g} \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{g - a_2}{g - a_1}.$$

Так как  $m_1 > m_2$ , то  $(g - a_2) > (g - a_1)$ . Отсюда  $a_1 > a_2$ . Следовательно, сплошной шар упадет быстрее, чем полый.

2.5 В отсутствии сопротивления воздуха время падения будет равно времени подъема. Это можно продемонстрировать с помощью известной в школьном курсе физики трубки Ньютона, из которой откачен воздух. Если же принимать во внимание сопротивление воздуха, то ответ должен быть иным.

Для небольших скоростей силу сопротивления воздуха можно принять пропорциональной скорости. Как при подъеме, так и при падении шара эта сила направлена против движения, но в первом случае ее действие будет складываться с действием силы тяжести, а во втором – вычитаться. Замедление под действием обеих сил при подъеме окажется (по абсолютной величине) больше ускорения при падении, длина же пути шара вверх и вниз одинакова. Поэтому время, затраченное на подъем, будет меньше времени, затраченного на спуск. Это подтверждает соответствующий расчет.

Путь шара при подъеме

$$h = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2},$$

при падении

$$h = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

где  $t_1$  - время подъема шара с ускорением  $a_1$ ;

$t_2$  - время падения его с ускорением  $a_2$ ;

$v_0$  - начальная скорость.

$$v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_2 t_2^2}{2} \quad \text{или} \quad 2v_0 t_1 = a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 = \text{const}.$$

Отсюда следует

$$\frac{a_1}{a_2} \approx \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Но,  $a_1 > a_2$  и, следовательно,  $\frac{t_2^2}{t_1^2} > 1$ .

Это означает, что  $t_2 > t_1$ , то есть время подъема меньше времени падения.

**Методическое указание.** Проверку полученного результата лучше всего проводить с небольшим мячом в помещении с высоким потолком. Время подъема и падения мяча отсчитывают коллективно по ударам метронома.

## 2.6 Согласно второму закону Ньютона уравнение подъема тела

$$mg + F = ma,$$

где  $a$  - ускорение движения тела вверх ( $a < 0$ ).

Если сила сопротивления воздуха  $F$  мала, то есть  $F \approx 0$ , то  $mg = ma$  и  $g = a$  (по абсолютной величине).

Таким образом, ускорение «свободного подъема» тел тоже  $g$ . В действительности из-за сопротивления воздуха оно несколько больше  $g$ .

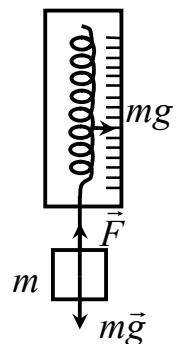
2.7 Сила тяжести сообщает одинаковое ускорение маятнику и раме. Никаких деформаций за счет тяготения при свободном падении в системе не возникает. Поэтому относительно рамки маятник будет двигаться так, как ес-

ли бы тяготения не было. Он будет колебаться с постоянной частотой до тех пор, пока длится падение рамки.

**Методическое указание.** Опыт можно упростить, заменив рамку небольшим шаром, на котором укрепляется небольшой маятник. Главное, шар должен начать падать именно в момент прохождения маятником нижней точки.

2.8 Нет. Чтобы тело двигалось вверх, надо сообщить ему ускорение. Поэтому вначале действующая на тело сила должна быть больше силы тяжести.

**Методическое указание.** При движении тела с массой  $m$  вверх пружинный динамометр должен показывать больше чем  $mg$ . Поэтому необходимо предварительно отметить положение стрелки динамометра, соответствующее величине  $mg$ .



2.9 На полосе, где центростремительное ускорение равно нулю.

2.10 Встречный поток воздуха повертывает движущееся тело так, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление движению.

**Методическое указание.** Демонстрируют падение дротика. Обращают внимание на его устойчивое положение при падении, что в большей мере обеспечивается влиянием стабилизатора (хвостовой частью).

2.11 Общий центр масс тележек перед началом движения будет лежать на прямой  $OO$ . По определению центра масс расстояние тележек  $L_1$  и  $L_2$  до их общего центра масс в любой момент времени  $t$  должны относиться обратно пропорционально их массам, то есть

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Пути, пройденные телами за время  $t$ , будут:

$$S_1 = v_1 t \quad \text{и} \quad S_2 = v_2 t.$$

Отсюда

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Скорости, полученные тележками за счет действия сжатой пружины, будут по второму закону Ньютона равны соответственно:

$$v_1 = \frac{F \cdot t}{m_1} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{F \cdot t}{m_2}.$$

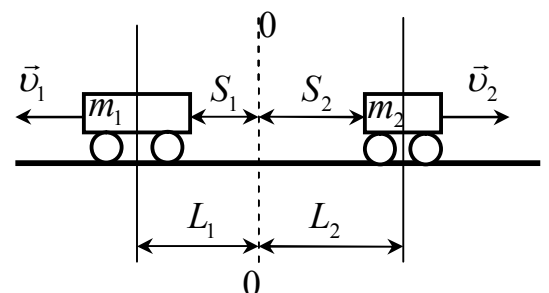
Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{Ft}{m_1} \cdot \frac{m_2}{Ft} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{L_1}{L_2},$$

то есть расстояния тележек от прямой  $00$  ( $S_1$  и  $S_2$ ) удовлетворяют тому же соотношению, что и расстояния до центра тяжести. Центр тяжести тележек непосредственно получается также и из закона сохранения импульса, который дает для нашего случая:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

**Методическое указание.** Берут две одинаковые тележки и устанавливают их на гладком столе. Сжатую пружину, связывающую тележки, перетягивают ниткой. На пружине



отмечают красной лентой ту ее точку, которая пропорционально делит длину пружины на  $L_1$  и  $L_2$ , которые определяют заранее из соотношения

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Перед тем как пережечь нитку, против ленты устанавливают неподвижный штатив. Во время движения тележек лента должна оставаться неподвижной. Это и будет подтверждением справедливости полученного в задаче результата.

2.12 Ввиду кратковременности действия пружины внешние горизонтальные силы (силы трения) не могут за короткое время заметно изменить общий импульс системы. До распрямления пружины и сразу после этого он остается равным нулю.

Следовательно,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}. \quad (1)$$

Так как тележки, в конце концов останавливаются, их начальные кинетические энергии тратятся на работу против сил трения:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = km_1 g S_1, \quad \frac{m_2 v_2^2}{2} = km_2 g S_2.$$

Разделим одно на другое:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим окончательно

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2} = g.$$

Таким образом, левая тележка пройдет расстояние в 9 раз больше, чем правая.

**Методическое указание.** Для успешного проведения эксперимента (смотри рисунок) необходим длинный стол, с гладкой поверхностью. Пружина должна быть прямой и сильной.

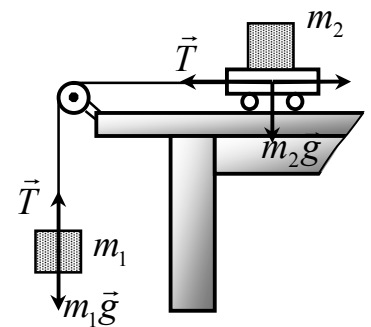
2.13 Ответ:

а) Нет.

б) Составим уравнение движения для обоих грузов:

$$T - F_{\text{тр}} = m_2 a_1$$

$$m_1 g - T = m_1 a_1.$$



Решая эти уравнения совместно, получаем:

$$a_1 = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g.$$

После увеличения первого груза имеем

$$a_2 = \frac{nm_1 - \mu m_2}{nm_1 + m_2} g.$$

Отсюда

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(nm_1 - \mu m_2)(m_1 + m_2)}{(nm_1 + m_2)(m_1 - \mu m_2)} = 3,54.$$

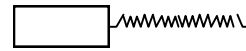


в) Положим в полученном выражении  $\frac{a_2}{a_1} = n$  и выразим  $\mu$ . Тогда

$$\mu = \frac{nm_1^2}{m_2[m_1(1+n) + m_2]}.$$

Если  $n = 3$ , то  $\mu = 0,03$ .

2.14 Из-за трения в пружине возникает колебательное движение, которое потом постепенно затухает.



2.15 Согласно второму закону Ньютона составляем уравнение движения обруча

$$mg - N = ma,$$

где  $N$  - сила реакции на плоскости со стороны каната.

Замечаем, что

$$mg = 2N.$$

Или

$$N = \frac{mg}{2}.$$

После подстановки в основное уравнение получаем:

$$mg - \frac{mg}{2} = ma.$$

Отсюда

$$g\left(1 - \frac{1}{2}\right) = a$$

и, окончательно,

$$a = \frac{g}{2}.$$

**Методическое указание.** С одной и той же высоты одновременно падают два одинаковых по размерам канатных кольца, одно из которых своими концами закрепляется за плоскости. Наблюдают, что свободно падающее кольцо достигает пола приблизительно в два раза быстрее по сравнению со связанным кольцом. Следовательно, последнее падает с меньшим ускорением, что и требовалось проверить.

В качестве образующих для канатных петель обручей можно взять легкие одинаковые деревянные палочки.

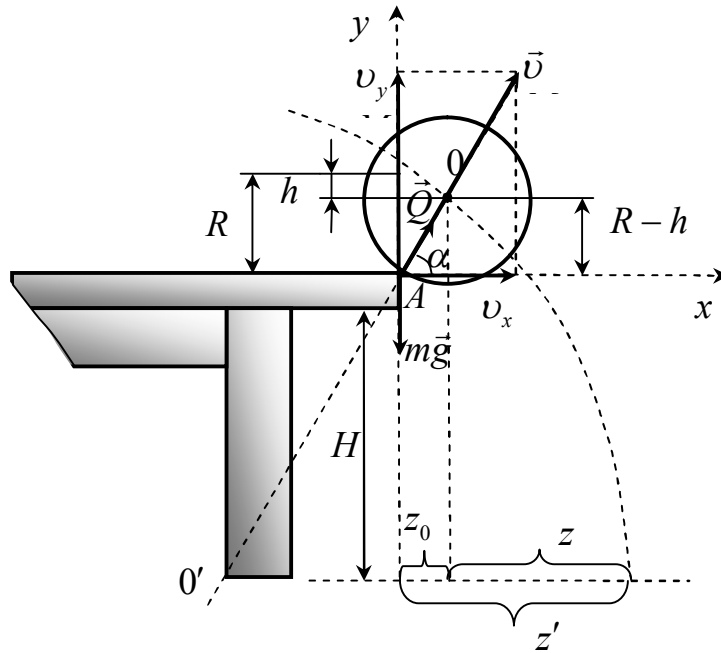
2.16 Если на кольцо действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции  $\vec{Q}$ , то уравнение движения кольца запишется в виде:

$$m\vec{g} + \vec{Q} = m\vec{a}_n, \quad (1)$$

где  $a_n = \frac{v^2}{R}$  - модуль нормального ускорения.

Проецируя это уравнение на направление вдоль радиуса кольца  $OA$ , получим:

$$mg \sin \alpha - Q = m \frac{v^2}{R}.$$



В момент отрыва кольца от опоры, оно перестает на нее давить и, согласно третьему закону Ньютона, сила реакции опоры станет равной нулю, то есть  $Q = 0$ . Тогда

$$g \sin \alpha = \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

и

$$\sin \alpha = \frac{R-h}{R}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  - угол, который радиус  $R$  образует с горизонтальной плоскостью стола в момент, когда сила реакции опоры обращается в ноль.

Если кольцо падает без проскальзывания, то справедливо следующее выражение:

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2} = mv^2, \quad (4)$$

где  $J = (mR^2 + mR^2) = 2mR^2$  - момент инерции тонкостенного кольца, записанный по формуле Штейнера;

$\omega = \frac{v}{R}$  - угловая скорость кольца.

Из (4) находим  $v^2 = gh$  и подставляем в (2) и (3)

$$1 - \frac{h}{R} = \frac{h}{R}.$$

Отсюда получаем  $h = \frac{R}{2}$  и  $\frac{h}{R} = \frac{1}{2}$ . Тогда  $\sin \alpha = 1 - \frac{h}{R} = \frac{1}{2}$ , а  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Итак, кольцо оторвется от стола, когда его скорость станет

$$v = \sqrt{(R-h)g} = \sqrt{\frac{Rg}{2}}. \quad (5)$$

Проекции этой скорости на оси  $y$  и  $x$  в этот момент запишутся:

$$v_x = v \cos \alpha = \frac{v\sqrt{3}}{2}, \quad v_y = v \sin \alpha = \frac{v}{2}.$$

Высота падения кольца

$$H - h = H - \frac{R}{2} = v_y t + \frac{gt^2}{2},$$

где  $t = \frac{Z}{v_x} = \frac{2Z}{v}$ ;

$Z$  - горизонтальное расстояние, пройденное падающим кольцом за время от момента отрыва, до места падения.

Получаем:

$$H - \frac{R}{2} = \frac{v\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2Z}{v} + \frac{g}{2} \cdot \frac{4Z^2}{gR} \cdot 2 = \sqrt{3} \cdot Z + \frac{4Z^2}{R}.$$

Таким образом, имеем квадратное уравнение

$$\frac{4Z^2}{R} + \sqrt{3} \cdot Z + \frac{R}{2} - H = 0 \quad (6)$$

и его решение.

$$Z = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - \frac{16}{R} \left( \frac{R}{2} - H \right)}}{\frac{8}{R}} = \frac{8}{R} \left( -\sqrt{3} + \sqrt{16 \frac{H}{R} - 5} \right).$$

Горизонтальное расстояние, пройденное кольцом до отрыва, находим

$$Z_0 = R \cos \alpha = R \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{8} 4.$$

Окончательно, расстояние от стола до точки падения находим из выражения

$$Z' = Z + Z_0 = \frac{R}{8} \left( -\sqrt{3} + \sqrt{16 \frac{H}{R} - 5} \right) + \frac{R\sqrt{3}}{8} 4 = \frac{R}{8} \left( 3\sqrt{3} + \sqrt{16 \frac{H}{R} - 5} \right).$$

**Методическое указание.** Перед демонстрацией падения кольца со стола необходимо определить на полу начало отсчета искомого расстояния. Это лучше всего сделать по отвесу. Затем, выкупанное в меловом растворе кольцо устанавливают на краю стола так, чтобы его воображаемый центр лежал на вертикальной линии касающейся края стола. Кольцо отпускают без толчков и отмечают на полу точку падения. Измерив линейкой, расстояние между метками на полу, сравнивают его с расчетом  $Z'$ .

Так при  $H = 1$  м и  $R = 0,04$  м получаем  $Z' = 0,12$  м, а при  $H = 1$  м и  $R = 0,08$  м получаем  $Z' = 20$  см = 0,2 м.

2.17 1) Если  $F \leq \mu mg$ , то бруски не будут двигаться.

2) Если  $\mu Mg \geq F > \mu mg$ , то будет двигаться меньший брусок.

3) Если  $F > \mu Mg$ , то бруски будут двигаться в разные стороны.

(Предполагается, что пока действовали силы, трение отсутствовало).

**Методическое указание.** Перед экспериментальной проверкой результата необходимо заранее измерить коэффициент трения брусков о стол, проградуировать пружину на сжатие и измерить массы брусков.

В первом случае к одному из брусков прикрепляют пружинный динамометр и тянут его так, чтобы при перемещении бруска по столу показания динамометра не изменялись. Коэффициент трения находят из выражения

$$\mu = F / mg,$$

где  $F$  - показания динамометра ( $H$ );

$m$  - масса бруска (кг).

Во втором случае пружину снабжают легкой шкалой и заметной стрелкой. Сжимая пружину под действием известных грузов (из набора грузов по механике) находят зависимость сжатия пружины от прикладываемой силы, после чего наносят полученные значения сил на шкалу.

Во время демонстрации явления, указанного в задаче, учащиеся фиксируют показания измерительного устройства, определяя тем самым, в каком соотношении находятся силы, сжимающие пружину (то есть действующие на бруски) и силы тяжести брусков, умноженные на коэффициент трения.

2.18 При медленном движении одной из палочек будет попеременно происходить скольжение бруска: сначала по одной палочке, затем по другой (из-за неравномерного распределения давления бруска на палочки и различных значений трения между бруском и палочками). В момент, когда сколь-

жение бруска по одной палочке сменяется его скольжением по другой, имеет место равенство

$$F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = 0$$

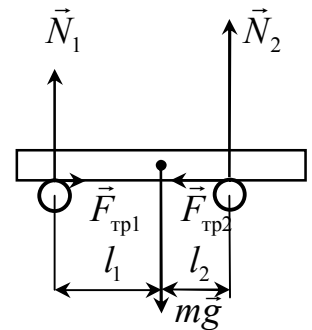
или

$$\mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Силы нормального давления  $N_1$  и  $N_2$  можно определить, применяя условия равновесия бруска на опорах (относительно точки касания бруска первой палочки):



$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$N_1 \cdot 0 + mgl_1 - N_2(l_1 + l_2) = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = \frac{mgl_2}{l_1 + l_2}, \quad N_2 = \frac{mgl_1}{l_1 + l_2}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Следовательно, для искомого отношения коэффициентов трения покоя и скольжения получаем:

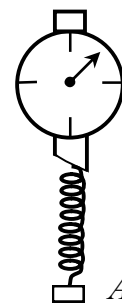
$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

**Методическое указание.** Продемонстрировать описанное движение бруска сможет каждый учащийся, положив длинную деревянную линейку на два вытянутых горизонтально указательных пальца, расположенных у ее концов. При медленном сближении пальцев линейка будет перемещаться одним из них до тех пор, пока центр тяжести ее не окажется посередине между пальцами, а затем линейка под действием другого пальца начнет перемещаться в противоположном направлении и так далее.

2.19 Прогиб доски при приседании уменьшается, так как ускорение центра массы человека направлено вниз (действие человека на доску будет меньше  $mg$ ).

С другой стороны, в момент приседания человек движется вниз, а так как внутренние силы системы не могут изменить её полный импульс, то доска, соединённая с подошвой ног человека получает импульс противоположного направления. Прогиб доски уменьшается.

**Методическое указание.** Опыт с доской можно заменить настольной демонстрацией. Для этого на небольшой лёгкой платформе  $A$ , подвешенной на конец пружины стрелочного динамометра, закрепляется другая растянутая пружина  $B$ . В тот момент, когда пережигается нитка, удерживающая эту пружину в растянутом положении, последняя сжимается и динамометр показывает облегчение платформы.



2.20 Если брусок массы  $m_2$  остаётся неподвижным при смещении на  $x$  бруска массой  $m_1$ , то сила  $F$  совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии что в конечный момент скорость бруска массой  $m_1$  обращается в нуль):

$$F \cdot x = \frac{kx^2}{2} + \mu m_1 gx,$$



то есть

$$F = \frac{kx}{2} + \mu m_1 \cdot g,$$

где  $k$  - жесткость пружины.

Уравнение движения второго бруска:

$$kx - \mu m_2 g = m_2 a_2.$$

Брусок массой  $m_2$  сдвинется при условии  $a_2 > 0$ , то есть при условии  $kx > \mu m_2 g$ . Минимальное значение  $F_{\min}$  получим, если положим  $kx = \mu m_2 g$ .

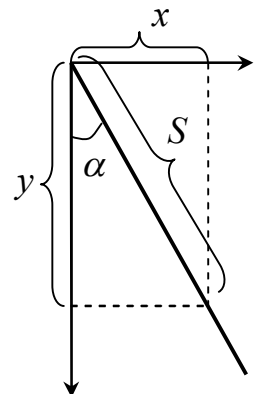
Таким образом

$$F_{\min} = \mu g \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right).$$

**Методическое указание.** Необходимо приготовить два различных деревянных бруска и для них предварительно измерить силу трения о плоскость демонстрационного стола. Связывающая бруски пружина с известным коэффициентом жёсткости должна быть лёгкой и легко сжимаемой. Силу, прикладываемую к первому бруску, измеряют с помощью демонстрационного динамометра. (Об измерении силы трения и жесткости пружины смотри задачу 2.17).

2.21 Рассмотрим спицу, составляющую произвольный угол  $\alpha$  с вертикалью. Путь, пройденный бусинкой  $S = \frac{at^2}{2}$ , где  $a = g \cos \alpha$ . Координаты бусинки:

$$x = s \sin \alpha, \quad y = s \cos \alpha.$$



Отсюда

$$x^2 + y^2 = s^2 = \left(\frac{at^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 \cdot \cos^2 \alpha = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{y^2}{s^2},$$

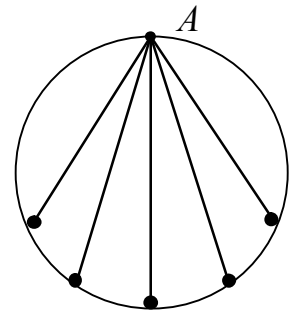
или

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 y^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \frac{gt^2}{2} y.$$

Обозначим  $\frac{gt^2}{4} = R$ . Тогда  $x^2 + y^2 = 2Ry$  - уравнение окружности с радиусом  $R$ . Таким образом, бусинки будут находиться на окружности диаметра

$$D = 2R = \frac{gt^2}{2} \text{ с верхней точкой } A.$$

**Методическое указание.** Для демонстрации этого явления можно приспособить круглые вышивальные пяльцы, натянув на них рыболовную леску 0,5мм с нанизанными на неё небольшими бусинками или пуговицами (смотри рисунок). Бусинки, начиная двигаться по лескам из точки А, достигнут края пяльцев одновременно, что будет свидетельствовать о расположении бусинок в этот момент по окружности.



2.22 Шарик вдоль спиц будут двигаться под действием составляющей силы тяжести  $F = mg \cos \alpha$  и, следовательно, с ускорением  $a = g \cos \alpha$ . Длина спицы равна:

$$S = \frac{h}{\cos \alpha}.$$

Время движения шарика равно  $t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$ .

Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{g \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Таким образом, чем больше угол  $\alpha$ , тем больше время движения шариков. Очевидно, минимальное время будет при  $\alpha = 0$ , то есть

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Оно будет соответствовать движению шарика по вертикальной спице.

Имеет ли функция  $t(\alpha)$  экстремальный характер? Приравняем производную  $\frac{dt}{d\alpha}$  к нулю:

водную  $\frac{dt}{d\alpha}$  к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\alpha} &= A \frac{d(\operatorname{sc} \alpha)}{d\alpha} = A \frac{(tg \alpha \cdot \operatorname{sc} \alpha)}{d\alpha} = \\ &= A \frac{\left( \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)}{d\alpha} = 0, \end{aligned}$$

где  $A = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  и  $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0$ . Находим корень полученного уравнения:

$\sin \alpha = 0$  и  $\alpha = 0$  Находим вторую производную:

$$\frac{d^2 t}{d\alpha^2} = A \frac{d\left(\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)}{d\alpha} = A \frac{\cos^2 \alpha (\sin \alpha)' - \sin \alpha (\cos^2 \alpha)'}{\cos^4 \alpha} =$$

$$= A \frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^4 \alpha}.$$

Так как  $(\sin \alpha)' = \cos \alpha$ , можно записать:

$$\begin{aligned} (\cos^2 \alpha)' &= \cos \alpha \cdot (\cos \alpha)' + (\cos \alpha)' \cdot \cos \alpha = \\ &= \cos \alpha (-\sin \alpha) + (-\sin \alpha) \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d^2 t}{d\alpha^2} = A \frac{\cos^3 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^4 \alpha} = A \left( \frac{1}{\cos \alpha} + 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} \right).$$

Подставим в это уравнение найденный корень  $\alpha = 0$ .

$$\frac{dt^2}{d\alpha^2} = A = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Так как  $\frac{dt^2}{d\alpha^2} > 0$ , то  $t(\alpha)$  при  $\alpha_i$  имеет минимум. Таким углом является

$\alpha_i = 0$  и  $t_{\min} = A = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , то есть по вертикали шарик достигнет быстрее

горизонтальной поверхности.

Если бы было  $\frac{dt^2}{d\alpha^2} < 0$ , у функции был бы максимум. Его нет.

**Методическое указание.** Успех демонстрации полученного результата заметно зависит от жёсткости прямоугольной стойки и спиц, установленных на ней. Небольшие и одинаковые шарики должны скользить по спицам

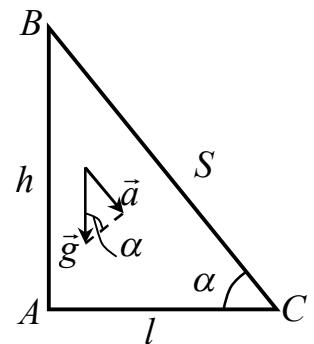
без трения. Для одновременного пуска можно воспользоваться электромагнитной защёлкой, установленной в точке  $A$ . В качестве такой защёлки используется электромагнит от старого электромагнитного наушника или какой либо другой небольшой электромагнит. Защёлку через ключ подключают к источнику постоянного тока с напряжением 6 – 12 В. На горизонтальную поверхность кладут жестяной лист, позволяющий на слух определить последовательность попадания на него шариков.

2.23 Шарик 2 так как для него угол  $\alpha = 45^\circ$  ( $h=l$ ) и  $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ .

Смотри решение задачи 2.24.

2.24 Время движения вдоль прямой  $BC$  определяется длиной  $S$  участка  $BC$  и ускорением  $a$ . Из рисунка видно, что

$$S = \sqrt{l^2 + h^2}; \quad a = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}}g.$$



Поскольку  $S = \frac{at^2}{2}$ , можно записать:  $\sqrt{l^2 + h^2} = \frac{g}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} t^2$ .

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{(l^2 + h^2)^2}{h}}.$$

Приравнивая к нулю производную (условие экстремума) получим:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{h^2 - l^2}{\sqrt{2gh^2(l^2 + h^2)}} = 0.$$

Отсюда  $h = l$ .

Тот же результат получим, выражая  $S$  и  $a$  через угол  $\alpha$ :

$$S = \frac{l}{\cos \alpha}; \quad a = g \sin \alpha \quad \text{и} \quad t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{l}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}.$$

Приравнивая к нулю производную  $\frac{dt}{d\alpha}$ , найдём  $\alpha = 45^\circ$ .

**Методическое указание.** Результаты решения задач 2.23. и 2.24. можно проверить на установке со спицами или на наклонной плоскости с переменным углом наклона. Чтобы не измерять время движения каждого тела рекомендуется демонстрировать их движение одновременно. При этом среди разно наклонных спиц и плоскостей одна должна быть обязательно наклонена под углом  $45^\circ$ .

2.25 Тело по наклонной плоскости будет скользить под действием составляющей силы тяжести  $F = mg \sin \alpha$  и, следовательно, с ускорением  $a$ .

Уравнение движения

$$mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha = ma,$$

где  $\mu$  - коэффициент трения.

Но так как по условию задачи тело движется равномерно, то  $a = 0$ . Тогда  $mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha = 0$ . Отсюда находим

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, если  $\alpha = \operatorname{arctg} \mu$ , то тело будет скользить по наклонной плоскости равномерно.

**Методическое указание.** Перед демонстрацией движения деревянного бруска по наклонной плоскости необходимо подобрать угол наклона, равный  $\operatorname{arctg} \mu$ . Коэффициент трения предварительно нужно измерить (смотри методические указания к задаче 2.17.) или воспользоваться справочными данными для дерева.

### 2.26. Время движения скользящего тела по наклонной плоскости

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{(l^2 + h^2)}{h}},$$

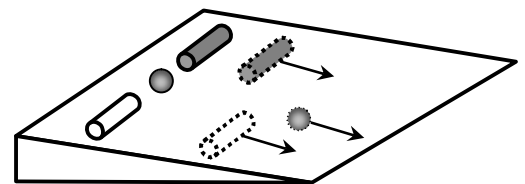
(смотри решение задачи 2.24.), где  $l$  и  $h$  длина основания горы и её высота. В новом условии эти величины равны соответственно  $4l$  и  $4h$ . Тогда

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{(16l^2 + 16h^2)}{4h}} = 2\sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{(l^2 + h^2)}{h}} = 2t.$$

Таким образом  $\tau = 2t$

**Методическое указание.** Смотри указания к задаче 2.24.

**2.27 Первое решение.** Потенциальная энергия твердого тела на вершине наклонной плоскости  $mgh$  переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движений



$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I$  - момент инерции тела;

$$\omega = \frac{v}{R} \text{ - круговая частота;}$$

$v$  - линейная скорость материальных точек на ободу вращательного тела, которая в нашем случае равна скорости поступательного движения его центра масс;

$R$  - радиус вращения.

Тогда для любого тела

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2}.$$

Так как момент инерции для полного цилиндра  $I = mR^2$  для сплошного цилиндра  $I = \frac{1}{2}mR^2$  и для шара  $I = \frac{2}{5}mR^2$ , то для каждого из этих тел можно записать:

$$\text{для полого цилиндра } mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2v^2}{2R^2} = mv^2; gh = v^2,$$

$$\text{для сплошного цилиндра } mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2v^2}{2 \cdot 2R^2} = \frac{3}{4}mv^2; gh = 0,75v^2,$$

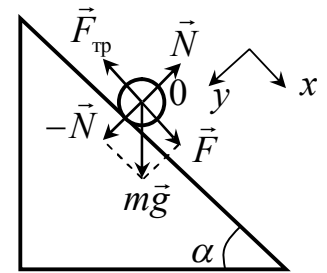
$$\text{для шара } mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2 \cdot v^2}{5 \cdot 2R^2} = \frac{7}{10}mv^2; gh = 0,70v^2.$$

Так как левые части полученных выражений равны, то конечная скорость у шара больше, чем у других тел, а так как движение ускоренное, то он и достигнет конечной точки быстрее. За шаром последует сплошной цилиндр, последний придёт полый цилиндр.



**Второе решение.** Учтем, что скатывающиеся по наклонной плоскости твердые тела совершают два движения: поступательное и вращательное. Составим для них уравнения движения.

Поступательное движение (смотри рисунок):



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.пок.}} \quad (1)$$

Представим это уравнение в скалярной форме:

$$\text{ось } OX: \quad ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр.пок.}} \quad (2)$$

$$\text{ось } OY: \quad 0 = mg \cos \alpha - N \quad (3)$$

Вращение относительно точки 0:

$$I\varepsilon = F_{\text{тр.пок.}} \cdot R \quad (4)$$

Для шара:

$$\frac{2}{5}mR^2\varepsilon = F_{\text{тр.пок.}} \cdot R,$$

где  $\varepsilon$  - угловое ускорение или

$$\frac{2}{5}ma = F_{\text{тр.пок.}} \quad (5)$$

так как  $\varepsilon R = a_\tau = a$  (если нет проскальзывания).

После подстановки (5) в (2) получаем

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{2}{5}ma$$

или

$$\frac{7}{5}a = g \sin \alpha .$$

Таким образом  $a_{\text{шара}} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$  .

Используя таким образом значения моментов инерции сплошного цилиндра  $\frac{1}{2}mR^2$  и полого цилиндра  $mR^2$  , получим

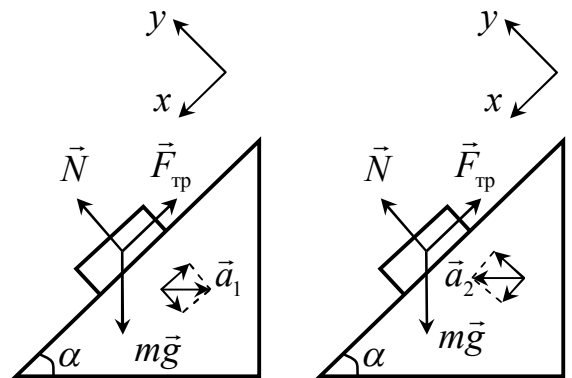
$$a_{\text{спл.}} = \frac{2}{3}g \sin \alpha \quad \text{и} \quad a_{\text{пол.}} = \frac{1}{2}g \sin \alpha .$$

Найденные ускорения относятся как  $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{15}{21} : \frac{14}{21} : \frac{10,5}{21}$  .

Отсюда видим, что  $a_{\text{ш}} > a_{\text{спл}} > a_{\text{пол}}$  . Следовательно, первым скатится шар, а последним – полый цилиндр.

**Методическое указание.** На наклонную плоскость, представляющую собой лист фанеры с приподнятым на 15-20 см краем, кладут два цилиндра и шар. Один цилиндр (например, деревянный) сплошной, второй (отрезок металлической трубы) - полый. Шар может быть как деревянный, так и металлический (или костяной). Пустив цилиндры и шар скатываться с наклонной плоскости одновременно, наблюдают более быстрое скатывание шара, затем сплошного цилиндра и, в конце, полого цилиндра. Это подтверждает результаты решений. Опыт повторяют несколько раз. В полученных выражениях для скорости и ускорений отсутствуют массы и радиусы тел, так что время скатывания от этих величин не зависит

2.28 На тело действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , реакция опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Чтобы тело не скользило на плоскости равнодействующая всех сил должна равняться нулю. Это возможно, если  $\mu = \text{tg}\alpha$  (смотри 2.25). При  $\mu < \text{tg}\alpha$  тело начнет двигаться. Чтобы устранить это движение необходимо двигать наклонную плоскость в горизонтальном направлении с ускорением  $a_1$ . Тогда перемещение тела с ускорением  $a_1$  можно рассматривать как состоящее из двух: движения относительно наклонной плоскости с ускорением  $\vec{a}_0$  (оно по условию задачи равно нулю) и движения либо в противоположном направлении с минимальным ускорением, либо в ту же сторону, но с максимальным ускорением.



Выбрав оси координат вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней, получим:

$$mg \sin \alpha - \mu N = ma_1 \cos \alpha \quad \text{и} \quad N - mg \cos \alpha = ma_1 \sin \alpha$$

в первом случае, откуда

$$a_1 = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha},$$

или же

$$mg \sin \alpha + \mu N = ma_2 \cos \alpha \quad \text{и} \quad N - mg \cos \alpha = ma_2 \sin \alpha$$

во втором случае, откуда

$$a_2 = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

**Методическое указание.** Полученный результат проверяют качественно, двигая деревянный клин в горизонтальном направлении. Учащиеся убеждаются в том: клин нужно двигать заметно быстрее в направлении скольжения тела и, наоборот, медленнее в противоположном направлении.

2.29 При скатывании обруча по наклонной плоскости его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию его поступательного и вращательного движений (смотри 2.27). Таким образом

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I = mR^2$  - момент инерции обруча.

Так как  $\omega = \frac{v}{R}$ , где  $R$  радиус обруча, то приведённое уравнение можно написать так:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad \text{или} \quad gh = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = v^2,$$

то есть  $v^2 = gh$ . Так как начальная скорость обруча  $v_0 = 0$ , то  $l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}$ .

Отсюда

$$t = \frac{2l}{v} = \frac{2l}{\sqrt{gh}}.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$t = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{9,8 \cdot 0,1}} \approx \sqrt{16} = 4 \text{ с.}$$

**Методическое указание.** Для проверки полученного результата строят наклонную плоскость указанных размеров и с помощью секундомера (или метронома) измеряют время скатывания по ней любого небольшого обруча.

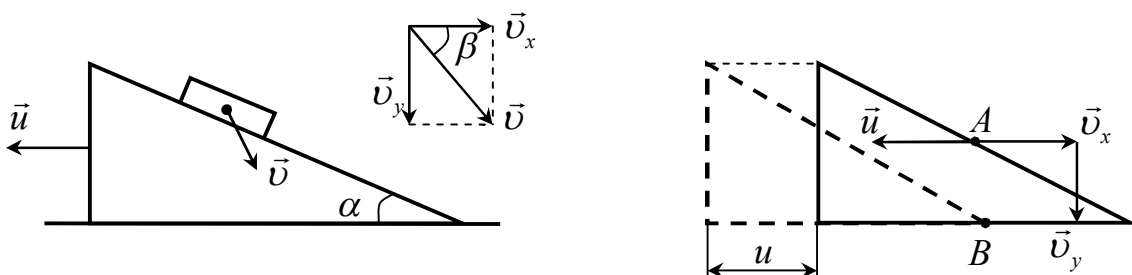
Чтобы повысить интерес к задаче, её нужно сформулировать иначе. Из полученного ранее расчёта видно, что результат не зависит ни от массы обруча, ни от его радиуса. Поэтому вопрос о том, какой из обручей, большой или маленький, быстрее скатится с одной и той же плоскости, будет в этой задаче более интересным.

2.30 Во втором случае скорость тела будет меньше, так как запас потенциальной энергии, которым обладает тело, находясь на высоте  $h$ , расходуется в первом случае только на сообщение кинетической энергии телу, а во втором - на сообщение кинетической энергии телу и призме одновременно.

**Методическое указание.** Оценить скорость в конце соскальзывания тела можно по расстоянию, пройденному телом на горизонтальной поверхности после призмы до полной остановки: чем больше скорость, тем большее расстояние пройдёт тело.

2.31 Обозначим через  $u$  скорость перемещения призмы, через  $v_x$  и  $v_y$  - горизонтальную и вертикальную составляющие скорости тела относительно Земли, через  $\beta$  - угол между направлением движения тела и горизонтом, причём очевидно, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x}. \quad (1)$$



Так как на призму в вертикальном направлении помимо тела действует сила реакции опоры, то при рассмотрении поведения системы тело - призма закон сохранения импульса можно применять только к горизонтальным составляющим скорости тела и призмы. Очевидно, что скорость  $u$  и  $v_x$  будут связаны соотношением

$$M \cdot u = mv_x. \quad (2)$$

Допустим, что в некоторый момент времени тело находится в точке  $A$  призмы. В течение первой секунды после этого призма переместится влево на  $u$  см, тело по горизонтали переместится вправо на  $v_x$  см и по вертикали на  $v_y$  см. Величины всех этих перемещений должны быть таковы, что после них тело оказалось снова на призме в некоторой точке  $B$ . Следовательно, скорости  $u$ ,  $v_x$  и  $v_y$  должны удовлетворить не только требованиям законов сохранения энергии и импульса, но и соотношению

$$\frac{v_y}{u + v_x} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Это соотношение является выражением того условия, что тело при движении находится всё время на призме.

Из (2) находим:  $u = \frac{m}{M} v_x$ .

Подставляя  $u$  в (3) и используя (1), получим:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{m + M}{M} \operatorname{tg} \alpha.$$

Как и следовало ожидать

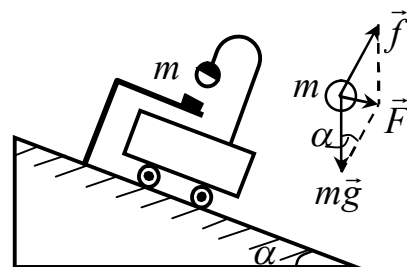
$$\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad \beta > \alpha .$$

Скорость в случае спуска по подвижной призме направлена под бóльшим углом к горизонту, чем при спуске с неподвижной призмы. Пользуясь законом сохранения энергии и зная высоту начального положения тела, можно вычислить величины скорости  $u$  и  $v$  .

2.32 Тележка будет скатываться с ускорением  $a = g \sin \alpha$  . Для того, чтобы отвес имел такое же ускорение, необходимо чтобы равнодействующая сил тяжести и натяжения нити, приложенных к шарикю, была направлена параллельно наклонной плоскости и равна  $F = ma = mg \sin \alpha$  . А это возможно только тогда, когда нить перпендикулярна к наклонной плоскости.

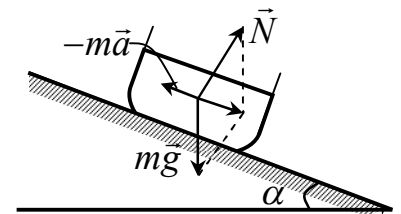
**Методическое указание.** Этот удивительный результат можно продемонстрировать на установке, состоящей из наклонной плоскости (например, из школьного набора по механике) и лёгкой тележки с укрепленной на ней отвесом. Шарик, висящий на прочной нити, должен быть стальным. Это позволит придать ему нужное начальное положение с помощью небольшого магнита.

Тележку с отвесом располагают на наклонной плоскости так, чтобы шарик  $m$  на подвесе оказался над небольшим магнитом, расположенным на Г - образной подставке, установленной на наклонной плоскости. Нить отвеса при этом должна быть перпендикулярна наклонной плоскости. Тележка удерживается в нужном положении с помощью другой нити, за которую она привязывается к неподвижной магнитной подставке. После пережигания нити тележка начинает ускоренно скатываться с наклонной плоскости и учащиеся наблюдают, что нить подвеса остаётся перпендикулярной к плоскости за всё время скатывания.



2.33 При въезде на наклонную плоскость тележка приобретёт ускорение  $\vec{a}$ , направленное в сторону, противоположную её движению. Точка подвеса, двигаясь замедленно, отстанет от шарика. Ускорение шарика, станет равным ускорению тележки в тот момент, когда нить, удерживающая шарик, будет направлена по нормали к наклонной плоскости (смотри решение предыдущей задачи). Таким образом, шарик отклоняется вперёд и будет висеть перпендикулярно наклонной плоскости.

2.34 Поверхность воды установится параллельно наклонной плоскости. Действительно, выберем систему отсчёта, связанную с движущимся сосудом (неинерционная система). В этом случае на любой элемент жидкости



действию действуют силы  $m\vec{g}$ ,  $\vec{N}$  и сила инерции  $-m\vec{a} = mg \sin \alpha$ , направленная в сторону, противоположную движению сосуда. Равнодействующая этих сил должна равняться нулю (так как жидкость неподвижна относительно сосуда). Это возможно, когда сила  $\vec{N}$  перпендикулярна наклонной плоскости. Поверхность же жидкости параллельна ей.

**Методическое указание.** Демонстрация решений этой, а так же и предыдущей задачи, осуществляется на установке, подобной той, что описана в методическом указании к задаче 2.32. Добавим только, что закрытый сосуд с прозрачными стенками и широким дном с подкрашенной жидкостью лучше установить на невысокую тележку, скатывающуюся с наклонной плоскости. Следить за уровнем воды удобнее в теневой проекции. Для её осуществления можно использовать школьный осветитель, предназначенный для этих целей.

2.35 **Случай а).** 1 Поскольку высота плоскостей одинакова, скорости  $v_1$  и  $v_2$  будут равными. 2 Время соскальзывания зависит от угла наклона плоскостей:



$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{1}{\cos \beta},$$

где  $\beta$  - угол между вертикалью и наклонной плоскостью (смотри решение задачи 2.22).

Отсюда

$$t_1 > t_2.$$

**Случай б).** 1 Так как высота наклонной плоскости 1 больше высоты 2, то скорость  $t_1 > t_2$ . 2 Время движения тел по наклонным плоскостям без трения

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{(l^2 + h^2)}{h}}$$

(смотри решение задачи 2.24) имеет экстремальный характер:  $t = t_{\min}$  при угле наклона плоскости  $45^\circ$ . Поэтому в данном случае  $t_1 < t_2$ .

**Методическое указание.** Для экспериментальной проверки этого решения можно воспользоваться указаниями в задачах 2.24 и 2.30.

2.36 На тело, находящееся на наклонной плоскости действуют: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения покоя (ее направление определяется направлением будущего движения). До тех пор, пока модуль результирующей двух сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$  (она направлена вдоль наклонной плоскости и ее часто называют скатывающей силой  $\vec{F}_{ск}$ ) не превзойдет значения  $\mu N$  ( $\mu$  - коэффициент трения скольжения), скольжения не будет – сила  $\vec{F}_{ск}$  уравновешивается силой трения покоя. При достижении силой  $\vec{F}_{ск}$  значения  $\mu N$

возникает скольжение, и сила трения покоя переходит в силу трения скольжения. Из уравнения движения (смотри решение 2.24 и 2.25) имеем

$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = a .$$

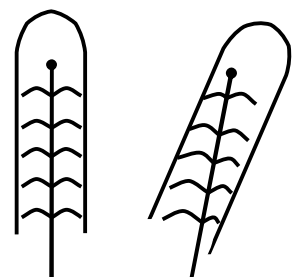
Если  $\sin \alpha = \mu \cos \alpha$ , то  $a = 0$  - тело покоится. Тело начнет скользить при  $\sin \alpha \geq \mu \cos \alpha$ , то есть  $\operatorname{tg} \alpha \geq \mu$  (так как ускорение  $a \geq 0$  и не может быть отрицательным). Отсюда получаем  $\alpha \geq \operatorname{arctg} \mu$ .

Таким образом, раньше начнет скользить тот брусок, у которого коэффициент трения  $\mu$  меньше.

**Примечание.** Во многих задачах считают коэффициент трения скольжения величиной постоянной, хотя он незначительно зависит от  $\vec{N}$  и скорости скольжения одного тела по другому. Если не принимать во внимание второй фактор, то в нашем случае окончательный результат будет определяться не только сравнительно численным значением коэффициента трения  $\mu$ , но и качеством контакта между соприкасающимися поверхностями. Так при упругом контакте коэффициент трения уменьшается при увеличении нагрузки  $\vec{N}$  (зависящей от массы тела), а при пластическом контакте – почти не изменяется (очень слабо растёт).

**Методическое указание.** Для проведения проверочного эксперимента необходимо подобрать бруски с заметно отличающимися коэффициентами трения. Коэффициенты трения различных тел определяют заранее каким-либо из известных способов (смотри, например, методические указания к задаче 2.17).

2.37 У ерша щетинки изогнуты как показано на рисунке. При наклоне трубки давление щетинок на стенку трубки с одной стороны ослабевают и при не-



котором наклоне щетинки начинают скользить вверх по трубке до тех пор, пока из-за изменения кривизны щетинок сила давления на стенку, а, следовательно, и сила трения скольжения не возрастает настолько, что щетинка остановится. При выпрямлении трубки обратного скольжения не произойдет, так как сила трения покоя больше силы трения скольжения. Таким образом, ерш будет шагами продвигаться вверх по трубке, «раскланиваясь» в ней за счет сил трения покоя и проскальзывая за счет уменьшения трения при скольжении.

2.38 При качении цилиндра вверх по наклонной плоскости его энергия поступательного и вращательного движений переходит в потенциальную. Таким образом

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = mgh,$$

где  $m$  и  $J$  - масса и момент инерции цилиндра с радиусом  $R$ .

Так как  $\omega = \frac{v}{R}$  и  $J = \frac{1}{2}mR^2$ , то приведенное уравнение можно записать:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{4} = \frac{3}{4}mv_0^2 \quad \text{или} \quad gh = \frac{3}{4}v_0^2.$$

Отсюда находим  $h = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0^2}{g}$ . Таким образом высота подъема цилиндра  $h$  не зависит от массы и радиуса цилиндра и определяется только его начальной скоростью.

Найдем теперь время подъема. Из кинематики знаем, что длина наклонной плоскости и ускорение определяются так:

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad a = \frac{v - v_0}{t} = -\frac{v_0}{t},$$

так как  $v = 0$  - конечная скорость.

Перепишем предыдущее уравнение:

$$l = v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2t} = v_0 t - \frac{v_0 t}{2} = \frac{v_0 t}{2}.$$

Далее:  $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ , но так как  $h = \frac{3v_0^2}{4g}$ , то  $\frac{3v_0^2}{4g} = l \sin \alpha$ .

Подставим сюда  $l = \frac{v_0 t}{2}$ , получим  $\frac{3v_0^2}{4g} = \frac{t}{2} \sin \alpha$ .

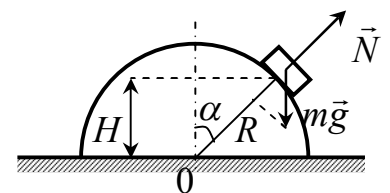
Отсюда

$$t = \frac{3v_0}{2g \sin \alpha}.$$

**Методическое указание.** Проверку полученных решений можно осуществить, используя то обстоятельство, что начальная скорость цилиндра при подъеме по наклонной плоскости на высоту  $h$  равна конечной скорости его при спуске с той же высоты. Тогда  $v_0$  можно найти, пуская цилиндр с той же высоты и измеряя путь  $S$ , пройденный цилиндром по горизонтальной поверхности после наклонной плоскости и время  $t$  этого движения:  $v_0 = 2S / t$ .

Для проверки времени подъема кроме  $v_0$  нужно измерить еще угол наклонной плоскости  $\alpha$ .

2.39 При соскальзывании тело сначала будет двигаться по дуге окружности с ускорением  $a_n = \frac{v_1^2}{R}$  до тех пор, пока действующая на него сила реакции опоры не обратится в ноль. Дальнейшее движение тела после отрыва от поверхности сферы будет происходить по



параболе, так как на него будет действовать только сила тяжести. Найдем высоту отрыва. Для этого запишем уравнение движения тела в проекциях на направление к центру окружности

$$mg \cos \alpha - N = ma_n = m \frac{v_1^2}{R}.$$

В момент отрыва  $N = 0$ , тогда

$$mg \cos \alpha = m \frac{v_1^2}{R} \quad \text{или} \quad \cos \alpha = \frac{v_1^2}{gR}.$$

Из рисунка видно, что  $\cos \alpha = \frac{H}{R}$ . Значит

$$H = R \cos \alpha = R \frac{v_1^2}{gR} = \frac{v_1^2}{g}. \quad (1)$$

Входящую в полученное выражение скорость тела  $v_1$  можно выразить через угол  $\alpha$  с помощью закона сохранения энергии

$$mgR(1 - \cos \alpha) = m \frac{v_1^2}{2} \quad \text{и} \quad v_1^2 = 2gR(1 - \cos \alpha) = 2gR \left(1 - \frac{H}{R}\right). \quad (2)$$

Подставим (2) в (1)

$$H = \frac{2gR \left(1 - \frac{H}{R}\right)}{g} = 2(R - H).$$

Отсюда

$$H = \frac{2}{3}R.$$

Таким образом, тело оторвется на высоте  $2R/3$ , если начнет скользить без начальной скорости.

Нетрудно показать, что если тело имеет начальную скорость  $v_0$ , то высота отрыва будет определяться из выражения

$$H = \frac{1}{3g} v_0^2 + \frac{2}{3} R.$$

**Методическое указание.** Обычный школьный глобус диаметром 30-35 см покрывают черной краской. Затем, на его вершину кладут небольшой груз, смоченный в меловом растворе. Слегка подтолкнув груз, наблюдают его скольжение и его отрыв от сферической поверхности глобуса. Измерив меловой след  $l$  соскальзывающего груза, по формуле

$$H = R \cos \alpha = R \cos \left( \frac{l}{0,017R} \right)$$

определяют  $H$  - высоту отрыва.

Измерив массу груза, убеждаются, что найденная при решении задачи высота  $H$  не зависит от массы груза.

2.40 При движении по выпуклой дуге. Действительно, в этом случае давление тела на поверхность в каждой точке меньше, чем давление на поверхность в точке, находящейся на таком же расстоянии от точки  $A$  в случае движения тела по вогнутой дуге. Это означает, что сила трения, действующая на тело в каждой точке, а, следовательно, и работа против сил трения на всем пути меньше, чем при движении по вогнутой дуге и тело в точке  $B$  имеет в этом случае бóльшую скорость, а значит, оно быстрее окажется в этой точке.

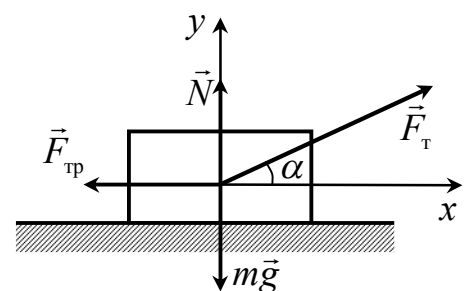
**Иначе.** На путях 1 и 2 силы трения неодинаковы, так как неодинаковы силы давления. Действительно, на пути 1 центростремительное ускорение

направлено вниз, а на пути 2 – вверх, то есть на пути 2 сила реакции везде больше нормальной составляющей силы тяжести, а на пути 1 – везде меньше. Нормальные составляющие силы тяжести изменяются на двух путях в одинаковых пределах, но в обратном порядке. Поэтому сила реакции на пути 1 в среднем меньше, чем на пути 2. Сила трения на пути 1 меньше, чем на пути 2, то есть работа против сил трения будет меньше на пути 1. Таким образом, в точке  $B$  тело обладает бóльшей кинетической энергией, а значит и бóльшей скоростью, если оно двигалось по пути 1, а не 2.

**Методическое указание.** Из гладкой проволоки диаметром 2-3 мм сворачивают кольцо, предварительно разместив на нем две бусинки (пуговицы или шарики). Затем кольцо слегка сплющивают, получая, таким образом выпуклую и вогнутую дуги с расположенными на них бусинками. Расположив, проволочную конструкцию в вертикальной плоскости наблюдают, движение на ней бусинок.

2.41 Нужно определить угол наклонной плоскости, с которой груз сам начнет соскальзывать. Этот угол равен углу  $\alpha$ . Далее смотри решение 2.42.

2.42 Для равномерного перемещения груза нужно меньше усилия, чем для ускоренного перемещения. Тогда, согласно второму закону Ньютона, равнодействующая всех сил равна нулю. Составим уравнения движения относительно осей  $x$  и  $y$ .



$$\text{Ось } y: \quad F_T \sin \alpha + N - mg = 0 \quad (1)$$

$$\text{ось } x: \quad F_T \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad (2)$$

где

$$F_{\text{тр}} = \mu N \quad (3)$$

Решая уравнения (1), (2) и (3) совместно, получим

$$F_{\text{т}} = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Числитель не зависит от  $\alpha$ , поэтому сила  $F_{\text{т}}$  будет наименьшей, если знаменатель будет максимален. Обозначим знаменатель  $f(\alpha)$ , то есть

$$\cos \alpha + \mu \sin \alpha = f(\alpha), \quad (4)$$

а величину  $\mu$  через  $\text{tg} \varphi$ , то есть

$$\mu = \text{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Тогда (4) примет вид  $f(\alpha) = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$ , откуда видно, что  $f(\alpha) = \text{max}$  при

$\alpha = \varphi = \text{arctg} \mu$ . Под таким углом и надо тянуть ящик.

**Методическое указание.** Для проверки полученного результата поступают или так как указано в решении задачи 2.41 или из полученного выражения в решении этой задачи сначала вычисляют необходимый угол  $\alpha$ , а затем для этого угла определяют при помощи пружинного динамометра силу тяги  $F_{\text{т}}$ . Она должна быть наименьшей из всех возможных сил (во втором случае предварительно определяют коэффициент трения  $\mu$ ). (Смотри 2.17).

2.43 Ускорение  $a_1$  бруска соскальзывающего с наклонной плоскости, определяем (смотри решение 2.36) с помощью второго закона Ньютона:



$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Движение обруча сложнее. Во-первых, каждая его точка движется вниз по наклонной плоскости с ускорением  $a_2$  и, кроме того, вращается вокруг оси обруча. Так как обруч скатывается без проскальзывания, скорость его поступательного движения  $v_{II}$  и линейная скорость вращения вокруг оси  $v_г$  в каждый момент равны между собой. Действительно, представим себе, что обруч совершил один полный оборот. Тогда его центр масс пройдет вдоль наклонной плоскости пути  $2\pi R$ , а любая точка обруча повернется вокруг центра масс на угол  $2\pi$ , то есть пройдет вдоль обруча путь  $2\pi R$ . Эти пути равны и проходятся за одинаковое время, поэтому  $v_{II} = v_г = v$ . Из закона сохранения энергии  $mgh = mv_{II}^2 / 2 + mv_г^2 / 2 = mv^2$  (работа против сил трения не совершается, так как скорость нижней точки равна нулю). Из кинематики следует, что  $h = \frac{a_2 t^2}{2} \sin \alpha$  и  $v = a_2 t$ . Из этих соотношений находим

$a_2 = \frac{g}{2} \sin^2 \alpha$ . Тела не будут обгонять друг друга, если  $a_1 = a_2$ ; отсюда  $\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$  и, окончательно,  $\alpha = \operatorname{arctg} 2\mu$ .

**Методическое указание.** Для демонстрации полученного результата необходима наклонная плоскость с переменной высотой. Коэффициент трения определяется заранее.

2.44 Сила давления груза на плоскость  $N = mg \cos \alpha$ ; сила трения  $F_{тр} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ ; слагающая силы тяжести, действующая вдоль наклонной плоскости,  $F = mg \sin \alpha$ . Согласно второму закону Ньютона имеем:

$$(F - F_{тр}) \cdot t = mv, \quad (1)$$

где  $v$  - скорость тела в конце спуска;

$t$  - время спуска.

Так как начальная скорость равна нулю, то  $l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}$ ; отсюда  $v = \frac{2l}{t}$ . Подставляя найденное значение  $v$  в (1), найдем:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}.$$

**Методическое указание.** О демонстрации полученного результата смотри указания к задачам 2.24 и 2.25.

2.45 Используют желоб длиной 2-2,5 м, метровую линейку, металлический шарик, метроном или секундомер, штатив с лапками.

Наиболее простой вариант нахождения максимальной скорости при заданном пути – это использование формулы средней скорости при равноускоренном движении материальной точки с нулевой начальной скоростью:

$$v_{\max} = \frac{2S}{t}.$$

Выбирая разное время движения, а значит, и разные пути получают отношение

$$\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}.$$

2.46 Дальность падения  $X$  струи воды определяется по формуле

$$X = vt, \quad (1)$$

где  $v$  - модуль горизонтальной составляющей скорости воды в струе,  $t$  - время движения частиц воды от отверстия до падения. Одновременно  $v$  - скорость вылета частиц из сосуда.

Используя формулу  $h_2 = \frac{gt^2}{2}$ , имеем:

$$t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}. \quad (2)$$

По закону сохранения полной механической энергии

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), находим

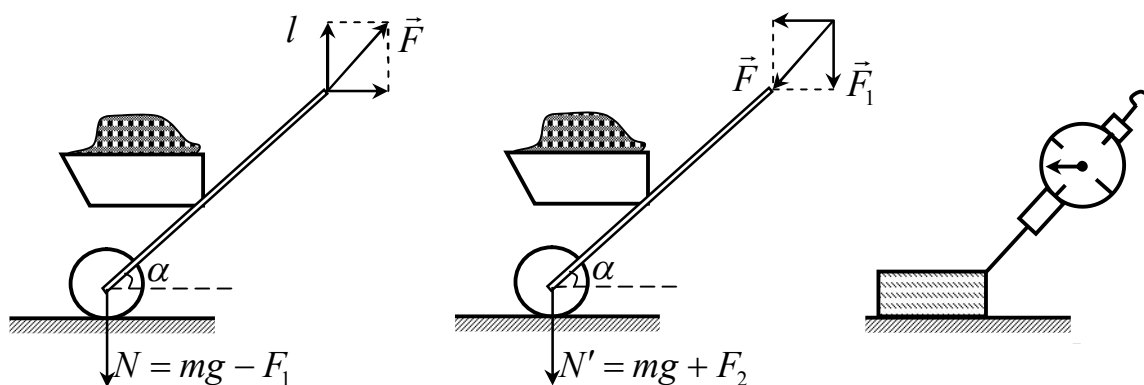
$$X = 2\sqrt{h_1 h_2}.$$

**Методическое указание.** На боковой поверхности длинного вертикального сосуда (например, 1,5 – литровой бутылке) делается, на разных высотах друг под другом два небольших отверстия которые закрывают пробками. Сосуд заполняют до верха водой, а затем открывают отверстия, отмечая удаленности струй. Самой длинной струей, будет нижняя струя. Чтобы это было так, необходимо сосуд с водой поднять над столом на некоторую высоту.

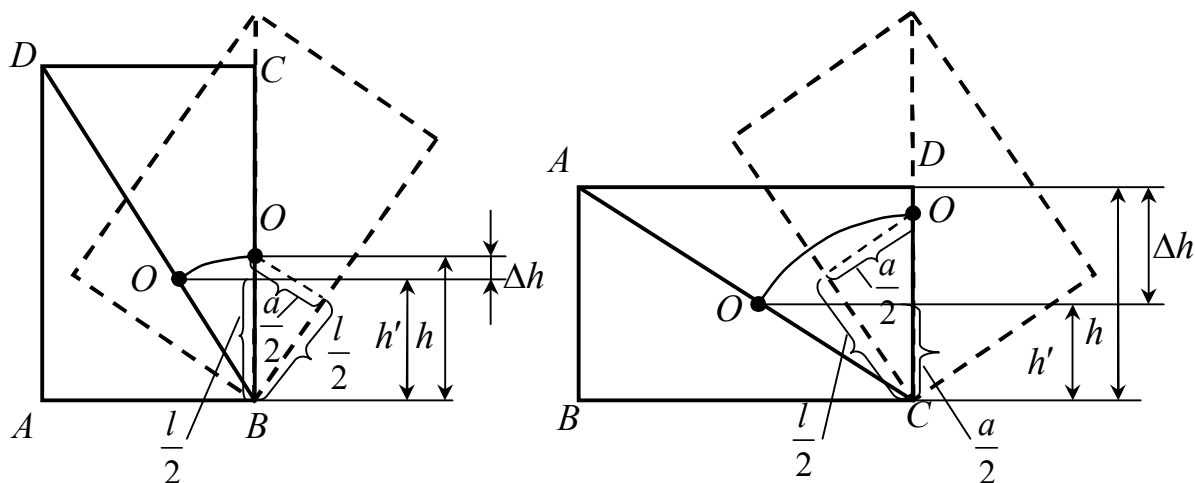
2.47 Сила нормального давления точки на почву в первом случае будет  $N = mg - F \sin \alpha$ , во втором  $N' = mg + F \sin \alpha$ , где  $F$  - сила действия человека.

Так как  $N < N'$ , то во втором случае человеку нужно будет преодолеть бóльшую силу трения  $f = kN'$ , а значит приложить бóльшее усилие.

**Методическое указание.** Проверочный опыт ставят с деревянным бруском, который перемещают по демонстрационному столу с помощью пружинного диаметра со средним нулем. Динамометр жестко скрепляют с бруском, расположив его под некоторым углом к горизонту. Толкая динамометром брусок вперед, получают бóльшие показания динамометра по сравнению с его показаниями при движении бруска назад.



2.48\* Чтобы повернуть ящик на любую грань, надо повернуть ящик так, чтобы его диагональная плоскость стала вертикальной; при этом центр масс ящика поднимается, а дальше ящик упадет под действием силы тяжести.



Таким образом, нужно совершить работу по подъему центра масс ящика на высоту  $\Delta h$ . Эта высота при повороте на грань  $BC$  равна

$\Delta h = h - h' = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{a^2}{4}} - \frac{l}{2}$ , на  $\Delta h = h - h' = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{4}} - \frac{a}{2}$ . Тогда работа в первом случае:  $A = \frac{mg}{2} \left( \sqrt{l^2 + a^2} - \frac{l}{2} \right)$ , а во втором  $A = \frac{mg}{2} \left( \sqrt{a^2 + l^2} - \frac{a}{2} \right)$ . Так как

$a < l$ , то работа во втором случае больше. Значит, при повороте ящика на грань  $DC$  нужно совершать бóльшую работу.

2.49\* При волочении работа  $A_1 = \mu mgL$ , где  $m$  - масса ящика. При кантовании ящик приходится опрокидывать  $n = \frac{L}{a}$  раз ( $a$  - ребро ящика). Работа при одном опрокидывании равна

$$A_1 = mg / 2 \sqrt{2a^2} - a = mga \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) = 0,207mga.$$

Смотри решение 2.48. При  $n$  опрокидываниях работа равна  $A_2 = 0,207mgL$ .

Тогда  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{0,207}{\mu}$ . Отсюда следует: если  $\mu = 0,207$ , то  $A_1 = A_2$ . Если же

$\mu > 0,207$ , то  $A_1 > A_2$ , а при  $\mu < 0,207$ , то  $A_1 < A_2$ , то есть при большом трении выгоднее ящик кантовать.

**Методическое указание.** Опыт проделывают дважды: сначала волокут и опрокидывают тяжелый куб по гладкой поверхности, например, по стеклу ( $\mu < 0,207$ ) (здесь кантовать тяжелее), а затем по шероховатому столу  $\mu > 0,207$  (здесь тащить тяжелее).

2.50 Если при подъеме груза  $m$  на высоту  $h$  скорость изменяется, то работа будет затрачиваться не только на увеличение потенциальной энергии

груза, но и на сообщение ему положительного или отрицательного ускорения  $a$ :

$$A = mgh + mah,$$

где  $a = \frac{dv}{dt}$ .

Следовательно, если подъем груза неравномерен, то работа будет зависеть от изменения скорости подъема. Таким образом, поднимать ящик на платформу легче с постоянной скоростью, то есть медленно.

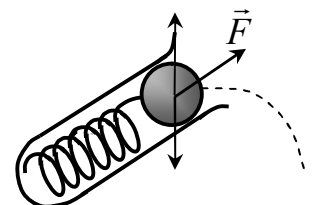
**Методическое указание.** Результаты решения этой задачи как и задачи 2.48 проверяются жизненным опытом.

2.51  $E = E_0 + Ftv_0$ , где  $E_0$  - кинетическая энергия, сообщенная покоящемуся телу;  $E$  - кинетическая энергия, сообщенная движущемуся телу;  $v_0$  - начальная скорость тела.

Так как  $v_0 > 0$ , то  $E > E_0$ . Значит движущемуся телу сила сообщает бóльшую энергию.

**Методическое указание.** В полученном результате легко убедиться, проделав следующий опыт. С наклонного желоба с одной и той же высоты скатывается стальной шарик. Двигаясь после желоба по столу, шарик сталкивается с другим таким же шариком, находящимся на столе. О приобретенной в результате столкновения кинетической энергии вторым шариком судят по расстоянию, пройденному им до полной остановки. В итоге обнаруживаем, что это расстояние гораздо больше в случае, когда столкновение происходит с движущимся шариком, а не покоящемся.

2.52 Пока трубка неподвижна, шарик лежит в трубке, и сила давления шарика на пружину уравновешена упругой силой  $F$  сжатой пружины. Когда трубка начинает свободно па-



дать, шарик сначала падает с меньшим ускорением, чем трубка (из-за его бóльшей инертности), и отстает от нее – пружина распрямляется. Под действием упругой силы пружины шарик не только отстает от трубки в своем движении в вертикальном направлении, но и приобретает скорость в горизонтальном направлении. Поэтому шарик появляется у отверстия трубки, имея некоторую горизонтальную скорость, а дальше, как и всякое тело, брошенное с горизонтальной начальной скоростью, шарик будет падать по параболе.

2.53 Пусть выреза нет. Тогда в точке  $C$

$$mg = \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

По закону сохранения энергии

$$mgh = mg2R + \frac{mv^2}{R}. \quad (2)$$

---

Из (1) и (2) получаем  $h = \frac{5}{2}R$ . Скорость в точке  $A$  определяется из закона сохранения энергии

$$mg \frac{5}{2}R = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(1 + \cos \alpha). \quad (3)$$

Тело, брошенное под углом  $\alpha$  к горизонту, пролетит по горизонтали расстояние

$$AB = \frac{v_A^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (4)$$

С другой стороны

$$AB = 2R \sin \alpha. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует:  $v_A^2 = \frac{Rg}{\cos \alpha}$ . Подставляя это значение в (3), получаем

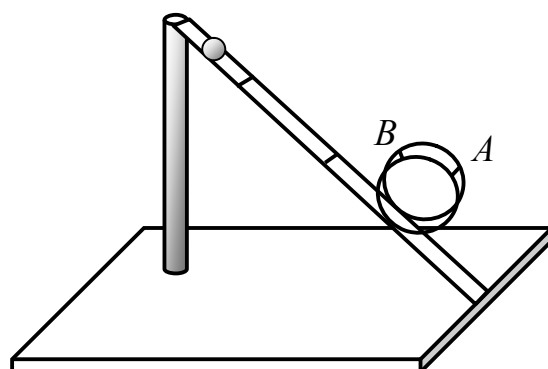
$$mg \frac{5}{2} R = \frac{mgR}{2 \cos \alpha} + mgR + mgR \cos \alpha. \text{ Отсюда } \cos \alpha = \frac{(3 \pm 1)}{4} \text{ и, следовательно,}$$

$\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$ . Нетрудно убедиться, что, если  $\alpha > 60^\circ$ , тело падает внутрь петли; если  $\alpha < 60^\circ$ , тело вылетит наружу.

**Методическое указание.** Для демонстрации этого явления используют типовой прибор «Мертвая петля» из школьного набора. Прибор позволяет демонстрировать движение теннисного шарика по окружности в вертикальной плоскости.

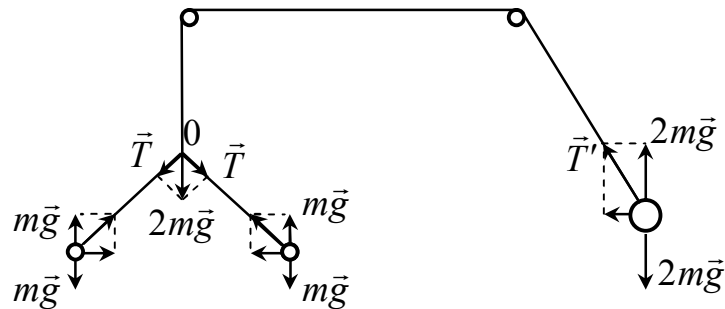
По наклонным рельсам, переходящим в петлю, скатывается шарик. Когда шарик начинает двигаться с наивысшей точки наклонных рельсов, он устойчиво описывает петлю, даже тогда, когда удаляется верхняя ее часть  $AB$ .

Можно подобрать такую высоту наклона рельсов, когда шарик, достигнув точки  $A$ , оторвется от петли. Остается только измерить угол  $\alpha$ , который опирается на сегмент  $AB$ . По полученным результатам измерений проверяется выполнимость уравнения (5), то есть правильность решения задачи.





2.54 Рассмотрим силы, действующие на нить, перекинутую через левый гвоздь. Вертикальные составляющие сил натяжения  $T$ , действующих на тела, равны  $mg$ , если нить закреплена на гвозде. На узел (точку 0) по третьему закону Ньютона действуют те же силы  $T$ . Их сумма направлена вертикально вниз и равна  $2mg$ . В случае одного вращающегося тела вертикальная составляющая натяжения нити  $T'$  равна  $2mg$  (если тело не опускается вниз). Но само натяжение нити  $T' > 2mg$  (смотри рисунок). Следовательно, наша система не будет в равновесии. Правый груз перетянет. Это можно легко проверить, используя два штатива, через которые перекинута нить, к концам которой привязаны указанные в условиях задачи грузы.



2.55 Потенциальная энергия обоих шариков в начальный момент одинакова и равна  $mg l$ . Эта энергия в случае нерастяжимой нити расходуется только на сообщение кинетической энергии шарика. Скорость движения шарика при прохождении положения равновесия в этом случае определяется на основе закона сохранения энергии из соотношения

$$mg l = \frac{mv_1^2}{2}, \text{ то есть } v_1 = \sqrt{2gl}.$$

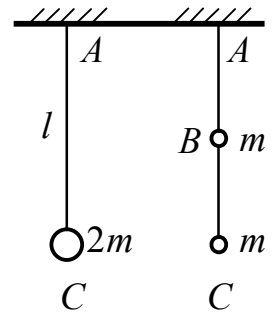
Для шарика, подвешенного на резиновом шнуре, потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию только частично, другая часть ее переходит в потенциальную энергию деформации резинового шнура.

Поэтому  $\frac{mv_2^2}{2} < mgl$  и  $v_2 < v_1$ , то есть шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, пройдет нижнюю точку первым.

**Методическое указание.** Перед демонстрацией этого явления заранее подбирают такую длину резинового шнура, чтобы при прохождении шариком  $B$  положения равновесия шнур растягивался до длины  $l$ .

2.56 Толкнуть сильнее – это значит сообщить концу стержня  $C$  бóльшую скорость. Определим ее.

В первом случае закон сохранения энергии дает:



$$\frac{2mv_1^2}{2} = 2mgl; \quad v_1^2 = 2gl \quad \text{и} \quad v_1 = 1,41\sqrt{gl}.$$

Во втором случае начальный запас энергии у массы  $C$  будет  $\frac{mv_2^2}{2}$ , а у мас-

сы  $B$  -  $\frac{m}{2}\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 + mg\frac{l}{2}$ .

Из закона сохранения энергии следует:

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_2^2}{8} + mg\frac{l}{2} = 2ml.$$

Отсюда

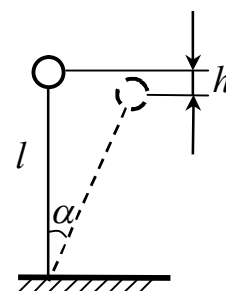
$$v_2^2 = \frac{12}{5}gl, \quad v_2^2 = 2,4gl, \quad v_2 \approx 1,55\sqrt{gl}.$$

Таким образом, стержень толкнуть сильнее нужно во втором случае.

2.57\* Длинная палка будет отклоняться медленнее, чем короткая, так как ее центр тяжести лежит выше.

Пусть палка повернулась на угол  $\alpha$ . Центр тяжести палки опустился при этом на высоту

$$h = l(1 - \cos \alpha),$$



где  $l$  - длина палки.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha).$$

Отсюда получаем:

$$\omega = \frac{v}{l} = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \alpha)}{l}},$$

то есть угловая скорость  $\omega$  палки обратно пропорциональна корню квадратному из длины палки. Значит, длинная палка будет падать дольше, чем короткая.

**Методическое указание.** Смотри проверку решения задачи 2.59.

2.58 Для того чтобы палка удерживалась в равновесии, нужно в случае ее отклонения от положения равновесия, то есть поворота на некоторый угол, успеть подвинуть палец так, чтобы она вновь оказалась в положение равновесия. Длинная палка будет отклоняться медленнее, чем короткая, так как ее

центр тяжести лежит выше (смотри решение 2.57). Следовательно, длинную палку легче удерживать в вертикальном положении.

2.59 Рассмотрим промежуточное положение стержня, когда он отклонился от вертикали на угол  $\alpha$ . По закону сохранения энергии

$$MgR = MgR \cos \alpha + \frac{M\omega^2 R}{2},$$

где  $M$  - масса шара;

$R$  - расстояние от длинного конца стержня до центра тяжести шара.

Отсюда угловая скорость  $\omega$  выражается следующим образом:

$$\omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

При данном  $\alpha$  она тем меньше, чем больше корень квадратный из  $R$ . Следовательно, стержень упадет скорее, если он поставлен на конец  $B$ . (Смотри аналогичное решение 2.57).

**Методическое указание.** Разницу во времени легче обнаружить, наблюдая падения двух одинаковых стержней с шарами, поставленных в положения  $A$  и  $B$ . Для звукового определения на место падения кладут жестяной лист.

2.60 В тот момент, когда кирпич отрывается от мяча, скорость кирпича равна скорости верхней точки мяча. Обозначим эту скорость через  $v$ . Далее кирпич движется свободно и, применив к нему закон сохранения энергии, запишем:

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh,$$

где  $h$  - высота подъема кирпича.

Найдем скорость:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Скорость нижней точки мяча в тот момент, когда кирпич отрывается от него, равна нулю. Поэтому ясно, что скорость центра мяча равна  $\frac{v}{2}$ . Записав для мяча закон сохранения энергии

$$\frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = mgh_1,$$

где  $h_1$  - высота подъема мяча, найдем:

$$h_1 = \frac{v^2}{8g} = \frac{h}{4}.$$

**Методическое указание.** В демонстрации кирпич можно заменить массивным деревянным бруском. Высоту подъема мяча определяют с помощью вертикальной демонстрационной линейки, на которой отмечают положение теневого изображения подпрыгнувшего мяча.

2.61 После того как верхнему шарiku сообщили горизонтальную скорость  $\vec{v}$ , шарики будут двигаться вокруг центра масс системы, который в свою очередь будет двигаться поступательно со скоростью  $\frac{\vec{v}}{2}$ . Если нижний

шарик сразу же отрывается от стола, то на систему в целом действует только одна сила – сила тяжести. Она сообщает системе, а значит, и нижнему шарiku ускорение  $\vec{g}$ . Поэтому, чтобы шарик оторвался от стола, необходимо, чтобы его центростремительное ускорение было больше  $\vec{g}$ .

В системе координат, движущейся со скоростью центра масс, скорости обоих шариков по модулю равны  $\frac{v}{2}$ , а центростремительное ускорение равно

$$a_{\text{ц}} = \frac{(v/2)^2}{l/2} = \frac{v^2}{2l}.$$

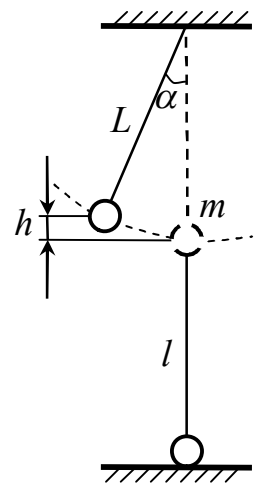
Шарик оторвется от стола, если  $\frac{v^2}{2l} \geq g$ , то есть при  $l \leq \frac{v^2}{2g}$ .

**Методическое указание.** Полученный результат можно проверить, если известна горизонтальная скорость  $v$ . Для ее задания воспользуемся простейшим маятником, состоящим из нити с длиной  $L$  и привязанным к нему шариком массой  $M$ . Данный маятник устанавливают так, чтобы при прохождении им нижней точки он горизонтально ударял по верхнему шарiku вертикально стоящей гантели. В начальный момент ударяющий шарик маятника находится на высоте  $h = L(1 - \cos \alpha)$  от нижней точки. Из закона сохранения энергии следует, что его скорость  $v_0$  в момент столкновения с гантелькой такова, что

$$\frac{Mv_0^2}{2} = MgL(1 - \cos \alpha).$$

Откуда

$$v_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}.$$



Далее, из закона сохранения импульса для упругого удара, имеем  $Mv_0 = mv$ , где  $m$  - масса верхнего шарика гантельки. Отсюда находим сообщаемую ему горизонтальную скорость

$$v = \frac{M}{m} v_0.$$

Окончательное проверочное уравнение

$$l \leq \left( \frac{M}{m} \right)^2 \cdot \frac{v_0}{2g}.$$

Для изменения длины стержня один из шариков гантельки должен быть подвижным.

2.62 Так как шайба находится на шероховатой поверхности, то очевидно, что в горизонтальной плоскости на шайбу действует только сила трения, которая складывается из сил трения, действующих на различные участки поверхности шайбы. Так как направления скоростей различных участков вращающейся шайбы различны, то различны и силы трения, действующие на эти участки. Результирующая же сила трения, действующая на всю шайбу, направлена противоположно скорости  $v$  и, следовательно, может изменить модуль скорости центра шайбы (но не направление этой скорости).

Если в начальный момент угловая скорость вращения шайбы равна нулю ( $\omega = 0$ ), то силы трения, действующие на все участки поверхности шайбы, направлены одинаково, то есть против скорости  $v$ . Поэтому результирующая сила трения, равная их сумме, по модулю больше, чем в предыдущем случае; большим будет и модуль ускорения.

Следовательно, при  $\omega = 0$  путь, проходимый шайбой до ее остановки, меньше, чем при  $\omega \neq 0$ .

## Список использованных источников

- 1 Рымкевич, П.А. Курс физики /П.А. Рымкевич. - М.: Высш.шк., 1975. - 463 с.
- 2 Бастанов, В.Г. 300 практических советов / В.Г. Бастанов - М.: Моск. Рабочий, 1986. - 220 с.
- 3 Тульчинский, М.Е. Сборник качественных задач по физике /М.Е.Тульчинский - М.: Учпедгиз, 1961. – 240 с.
- 4 Сахаров, Д.И. Сборник задач по физике /Д.И. Сахаров - М.: Просвещение, 1973. - 288 с.
- 5 Сена, Л.А. Сборник вопросов и задач по физике /Л.А. Сена - М.: Высш. Шк. 1986. – 240 с.
- 6 Зубов, В.Г. Задачи по физике / В.Г. Зубов, В.П. Шальнов – М.: Наука, 1972. – 272 с.
- 7 Козел, С.М. Сборник задач по физике /С.М. Козел, Э.И. Рашба, С.А. Славитинский – М.: Наука, 1987. – 304 с.
- 8 Слободецкий, И.Ш. Всесоюзные олимпиады по физике / И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов – М.: Просвещение, 1982. – 256 с.
- 9 Балаш, В.А. Задачи по физике и методы их решения /В.А. Балаш – М.:Просвещение, 1983. – 432 с.
- 10 Меледин, Г.В. Физика в задачах /Г.В. Меледин – М.: Наука, 1989. – 272 с.
- 11 Зибер, В.А. Задачи – опыты по физике / В.А. Зибер – М.: Учпедгиз, 1953. – 188 с.
- 12 Лернер, Г.И. Физика – уроки репетитора / Г.И. Лернер – М.: Новая школа, 1995. – 272 с.
- 13 Воробьева, И.И. Задачи по физике / И.И. Воробьева, П.И. Зубков, Г.А. Кутузова, О.Я Савченко – М.: Наука, 1981. – 432 с.



- 14 Бабаджан, Е.И. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике / Е.И. Бабаджан [и др.]. – М.: Просвещение, 1990. – 270 с.
- 15 Варикаш, В.М. Избранные задачи по элементарной физике /В.М. Варикаш, В.М. Цедик – Минск, 1972. – 185 с.
- 16 Гурский, И.П. Элементарная физика с примерами решения задач /И.П. Гурский – М.: Наука. 1984. – 180 с.
- 17 Светозаров, В.В. Сборник задач по физике /В.В. Светозаров [и др.]. – М.: МИФИ, 1985. – 92 с.
- 18 Сезонов, Ю.И. Сборник задач по физике / Ю.И. Сезонов – М.: Высш.шк., 1989. – 144 с.
- 19 Бутырский, Г.А. Экспериментальные задачи по физике /Г.А. Бутырский, Г.А. Сауров – М.: Просвещение, 200. – 102 с.
- 20 Юрк, О.Д. Методические указания по физике к лекционным демонстрациям. Механика / О.Д.Юрк, Р.И. Кононова – Оренбург: ОГУ, 1996. – 36 с.
- 21 Юрк, О.Д. Лекционные демонстрации по физике /О.Д. Юрк - Оренбург: ИП Осиночкин Я.В., 2011. – 298 с.