Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической и общей электротехники

Н.И Доброжанова, А.Т Раимова

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть I

Рекомендовано Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования, по направлению подготовки 140400.62 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2013

УДК 621.3.011(076.5)
ББК 31.211Я7
Д

Рецензент – доцент, кандидат технических наук С.И. Бравичев

Доброжанова, Н.И.

Д Расчет переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами: практикум по теоретическим основам электротехники: Н.И Доброжанова., А.Т Раимова.; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2013. – ч 1.54с.

Практикум по теоретическим основам электротехники предназначен для студентов «Электроэнергетического» факультета для практического решения задач по разделу «Переходные процессы» курса «Теоретические основы электротехники».

Практикум по теоретическим основам электротехники нужен для специальных предметов, такие как «Переходные процессы в системах электроснабжения», «Электрические сети». По направлению подготовки 140400.62. Электроэнергетика и электротехника. Профили подготовки: электроснабжение, электрические станции, электромеханика, электропривод и автоматика.

В данном практикуме изложены основные теоретические сведения, примеры решений типовых задач, задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы.

УДК 621.3.011(076.5)
ББК 31.211Я7

Содержание

Введение

Физическое действие электрического тока проявляется в нагреве и механическом воздействии на токоведущие элементы электротехнического устройства. В конечном итоге это влияет на долговечность и надежность его работы.

Перегрев токоведущих элементов устройства в первую очередь вызывает интенсивный износ изоляции, что в конечном счете, приводит к короткому замыканию сопровождаемому, как правило, электрической дугой. Превышение механических усилий своего допустимого значения приводит к разрушению устройства, затем – к короткому замыканию. Поэтому первым этапом расчета электротехнического устройства, ставится задача определения величин токов в элементах устройства.

В установившемся режиме напряжения и токи на всех участках электрической цепи остаются неизменными в течение сколь угодно большого промежутка времени. В понятия неизменных напряжений и токов в данном случае включаются не только постоянные, но и синусоидальные напряжения и токи с постоянными амплитудой и частотой.

По условиям эксплуатации и характеру работы электроустановок, или по другим (в том числе случайным) причинам изменяются режимы в электрических цепях.

Для перехода от одного установившегося режима к другому требуется некоторый переходный период, в течение которого изменяются величины токов и напряжений в электрической цепи. С большей или меньшей скоростью эти величины приходят в соответствие с условиями нового режима. Во время переходного процесса могут возникать сверхтоки и перенапряжения. В теоретических основах электротехники студенты изучают основные законы коммутации и методы расчета переходных процессов, который является одним из основных для специальных предметов, такие как «Электрические сети», «Переходные процессы в системах электроснабжения», «Релейная защита».

В данном практикуме по теоретическим основам электротехники рассмотрены примеры расчета переходных процессов, а также задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для глубокой самостоятельной проработки и самоконтроля усвоения курса ТОЭ. Материал подобран и расположен таким образом, что позволяет студентам эффективно и с минимальными затратами времени усвоить все вопросы, рассматриваемых на лекциях и лабораторно-практических занятиях.

1 Анализ переходных процессов в линейных электрических цепях

1.1 Возникновение переходных процессов

Переходный или неустановившийся процесс в электрической цепи – это процесс перехода из одного установившегося состояния в другое.

Причинами возникновения переходных процессов является – включения, переключения цепи, то есть любая коммутация (или изменение параметров).

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, представленную на рисунке 1.1.

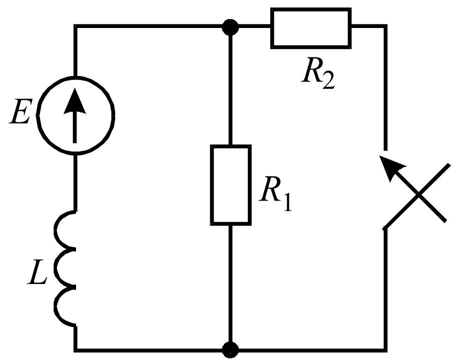

Рисунок 1.1 – Электрическая цепь

Представим график изменения тока в цепи как функцию времени, как показано на рисунке 1.2.

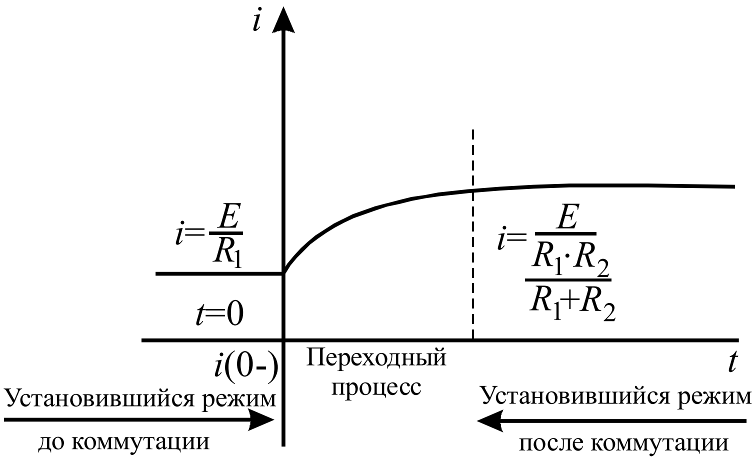

Рисунок 1.2 – График изменения тока

Пусть замыкание ключа произошло в момент времени t=0.

Отрезок времени $0 \le t \le t_{п.п}$ это и есть переходный процесс.

Кривая тока при переходном процессе зависит от вида цепи в нашем случае это экспонента.

Вводят понятия:

– время до коммутации $t\ (0_{-})$;

– время после коммутации $t(0_{+})$;

– время момента коммутации $t(0)$.

Для расчета переходного процесса могут быть использованы законы Кирхгофа. Формулировка законов не меняется, только в уравнения входят падения напряжений на элементах в дифференциальной форме записи:

– напряжение на активном элементе – $u_R = R \cdot i$;

– напряжение на индуктивном элементе – $u_L = L \cdot \dfrac{di}{dt}$;

– напряжение на емкостном элементе – $u_C = \dfrac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$.

В этом случае переходные процессы рассчитываются по законам Кирхгофа в дифференциальной форме. При расчете электрических цепей используют различные методы расчета. Одним из основных является классический метод расчета.

1.2 Классический метод расчета

Суть метода заключается в следующем:

1. Для электрической цепи на основании уравнений Кирхгофа или методов из них вытекающих составляется система дифференциальных уравнений относительно мгновенных значений токов и напряжений в послекоммутационный период (замкнули ключ).

2. Систему уравнений сводят к одному уравнению, для этого все неизвестные величины в системе выражаются через искомую величину тока или напряжения.

В результате получаем обыкновенное линейное неоднородное уравнение n – ого порядка:

$$a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = F(x) \qquad (1.1)$$

где $a_n, a_{n-1} \ldots a_1, a_0$ – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров электрической цепи;

$F(t)$ – функции времени, зависящие от параметров источников.

Полное решение дифференциального уравнения получается в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения:

$$x(t) = x_{част}(t) + x_{общ}(t). \qquad (1.2)$$

В электротехнике частное решение – это принужденная составляющая $x_{пр}(t)$, а общее решение – это свободная составляющая $x_{св}(t)$.

$$x(t) = x_{пр}(t) + x_{св}(t). \qquad (1.3)$$

Например, для тока:

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t). \qquad (1.4)$$

Принужденная составляющая – это решение представляющее собой расчет установившегося режима после коммутации, то есть режим определяется источником цепи и поэтому цепь может быть рассчитана любым методом.

Общее решение однородного уравнения – это свободная составляющая.

Чтобы найти общее решение однородного уравнения или рассчитать свободную составляющую тока или напряжения необходимо:

а) составить характеристическое уравнение – алгебраическое уравнение, служащее для решения дифференциального уравнения, например составим характеристическое уравнение для выражения (1.1).

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots a_1 \cdot p^1 + a_0 = 0. \qquad (1.5)$$

б) найти корни характеристического уравнения.

1) Корни вещественные и разные ($p_1, p_2 ... p_n$).

в) выразить свободную составляющую, вид которой формулируется в зависимости от найденных корней характеристического уравнения следующим образом:

$$x_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \ldots A_n \cdot e^{p_n \cdot t}. \qquad (1.6)$$

где $A_1, A_2 \ldots A_n$ – постоянные интегрирования.

2) В составе корней вещественные и кратные.

p_1 – кратностью m_1

p_2 – кратностью m_2

p_k – кратностью m_k

Вид свободной составляющей:

$$x_{св}(t) = \left(A_1 + A_2 \cdot t + \ldots A_n \cdot t^{m_k - 1}\right) \cdot e^{p_k^{-t}} \qquad (1.7)$$

3) Корни комплексно – сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_{св}.$$

$$x_{св}(t) = \left(A_1 \cdot \sin \omega \cdot t + A_2 \cdot \cos \omega_{св} \cdot t\right) \cdot e^{-\delta \cdot t} = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin\left(\omega_{св} \cdot t + \gamma\right). \qquad (1.8)$$

где $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$,

$$\gamma = arctg\frac{A_2}{A_1}.$$

Таким образом, получается, что искомая величина тока или напряжения может быть описана следующей функцией:

$$x(t) = x_{пр}(t) + x_{св}(t) = x(t, A_1, A_2 \ldots A_n). \qquad (1.9)$$

Данная функция, содержит временной параметр t и постоянные интегрирования : $A_1.....,A_n$.

3) определение постоянных интегрирования.

Для определения n постоянных интегрирования необходимо иметь n уравнений. Эти уравнения получаем (n-1) раз, дифференцируя искомую функцию $x(t)$. Полученная система уравнения записывается для момента времени t=0.

$$\begin{cases} x(0) = f_1(A_1, A_2 \ldots A_n) \\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = f_2(A_1, A_2 \ldots A_n) \\ \ldots \\ \left.\frac{dx^{n-1}}{dt}\right|_{t=0} = f_n(A_1, A_2 \ldots A_n) \end{cases} \qquad (1.10)$$

где $x(0), \left.\frac{dx}{xt}\right|_{t=0}, \left.\frac{d^{n-1}x}{dt}\right|_{t=0}$ – начальные условия.

Если определить начальные условия, следовательно, можно будет определить и постоянные интегрирования.

Как же определить начальные условия?

Начальные условия определяются законами коммутации.

Под начальными условиями понимают значения переходных или свободных токов и напряжений в начальный момент после коммутации.

Физически переходные процессы представляют собой процесс перехода от одного энергетического состояния к другому. Каждому установившемуся режиму соответствует определенный запас магнитной или электрической энергии в цепи.

При изменении установившегося режима должен измениться запас магнитной или электрической энергии, а так как запасенная в цепи энергия не может измениться мгновенно, то возникает переходной процесс. Длительность переходного процесса определяется конфигурацией цепи и ее параметрами.

Обычно в энергетических цепях переходные процессы длятся десятые, сотые, миллиардные доли секунд, редко достигают десятки секунд, но во время переходного процесса на отдельных участках цепи возникают большие напряжения и токи (сверхтоки, перенапряжения) которые могут привести к повреждению электрооборудования. Поэтому расчет переходных процессов имеет большое практическое значение.

В данном практикуме рассмотрим переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами. Для цепей с сосредоточенными параметрами существует два закона коммутации, которые используются при расчете переходных процессов. Так как магнитная энергия $W_M = \frac{\psi_{i_L}}{2} = \frac{Li^2_{L(0)}}{2}$ в катушке $\psi(0+) = \psi(0) = \psi(0-)$ мгновенно, скачком изменится не может, то можно сформулировать первый закон коммутации, он относится к ветвям с индуктивностью.

Первый закон коммутации

В любой ветви с индуктивностью ток и магнитный поток в момент коммутации сохраняет те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией и дальше начинают изменяться именно с этих значений:

$$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+) \qquad (1.11)$$

Второй закон коммутации

В любой ветви напряжения и заряд на емкости сохраняют в момент коммутации те значения, которые они имели непосредственно перед коммутацией и в дальнейшем изменяются начиная именно с этих значений:

$$W_Э = \frac{gU_C}{2} = \frac{cU_C^2}{2}$$

$$U_C(0-) = U_C(0) = U_C(0+) \qquad (1.12)$$

Начальные условия определяемые законами коммутации называются независимыми начальными условиями.

Все остальные начальные условия являются зависимыми и определяются из системы уравнений составленных по уравнениям Кирхгофа, с учетом найденных ранее независимых начальных условий.

Определение начальных условий начинают с независимых.

1.3 Определение начальных условий

Рассмотрим схему приведенную на рисунке 1.3.

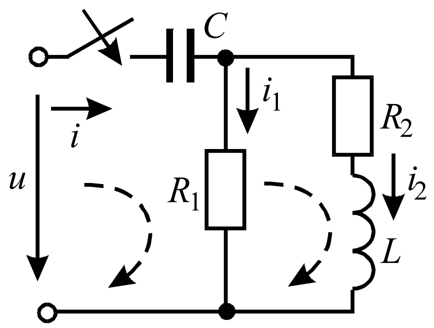

Рисунок 1.3 – Схема электрической цепи

Для заданной схемы необходимо определить начальные условия:

$$i(0),\ i_1(0),\ i_2(0),\ \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0},\ \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0},\ \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}.$$

Алгоритм решения поставленной задачи имеет следующий вид:

1. Определяют независимые начальные условия.

2. Записывают законы коммутации, из которых определяют независимые начальные условия.

3. Составляют систему уравнений по законам Кирхгофа для момента времени t=0 и из нее находят зависимые начальные условия с учетом найденных ранее по законам коммутации (1.1), (1.12) независимых начальных условий.

Независимыми начальными условиями для данной схемы является изменение тока на катушке индуктивности $i_L(0)$, и изменение напряжения на емкостном элементе $u_C(0)$.

Законы коммутации:

$$i_2(0_-) = i_2(0) = i_2(0_+) = 0.$$
$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+) = 0.$$

4. После определения независимых начальных условий находят зависимые начальные условия из законов Кирхгофа.

Система уравнений по законам Кирхгофа в дифференциальной форме записи будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} i(0) = i_1(0) + \underbrace{i_2(0)}_{=0} \\ \underbrace{u_C(0)}_{=0} + i_1(0) \cdot R_1 = U \\ \underbrace{i_2(0) \cdot R_2}_{=0} + L \cdot \left.\dfrac{di_2}{dt}\right|_{t=0} - i_1(0) \cdot R_1 = 0 \end{cases} \qquad (1.13)$$

Из второго уравнения системы (1.13) находим $i_1(0)$:

$$i_1(0) = \frac{U}{R_1}.$$

Из первого уравнения системы (1.13) определяем ток в неразветвленной части схемы:

$$i(0) = i_1(0) = \frac{U}{R_1}.$$

Из третьего уравнения системы (1.13) определяем производную при t=0:

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_1(0) \cdot R_1}{L} = \frac{U}{L}.$$

Продифференцируем уравнение два в системе (1.13) и определим производную при t=0:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} + R_1 \cdot \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Так как

$$i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i(0)}{C} = \frac{U}{C \cdot R_1}.$$

$$\frac{U}{CR_1} + R_1\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{U}{C \cdot R_1^2}.$$

Продифференцируем первое уравнение в системе (1.13) и определим производную при t=0:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0}.$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} + \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}.$$

Выразим

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{U}{C \cdot R_1^2} + \frac{U}{L}.$$

Таким образом, все начальные условия найдены.

1.4 Пример расчета переходного процесса классическим методом в цепи с последовательным соединением *R*, *L*.

Рассмотрим расчет переходного процесса классическим методом на примере электрической цепи R, L – типа, на постоянном и переменном напряжении. Схема электрической цепи приведена на рисунке 1.4.

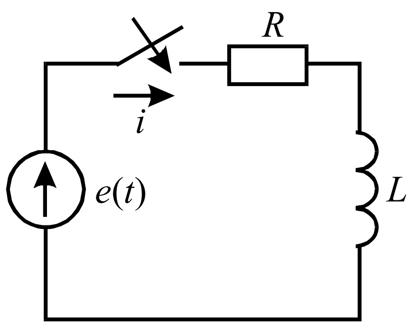

Рисунок 1.4 – Электрическая цепь R, L – типа

Даны параметры цепи и приложенное напряжение.

Необходимо найти ток $i(t)$=?

Переходный ток складывается из суммы принужденной и свободной составляющей:

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t)$$
$$e(t) = E = const,\ B$$

Сначала рассчитаем принужденную составляющую, которая рассчитывается после коммутации. Данные расчета приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Расчет принужденной составляющей тока

При подаче на вход постоянного напряжения	При подаче на вход переменного напряжения
$e(t) = E$ $E = const$, В $i_{пр}(t) = \dfrac{E}{R}$	$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$, В $\dot{E}_m = E_m \cdot e^{j\psi}$ В. $i_{пр}(t) = \dfrac{\dot{E}_m}{\underline{z}}$. $\underline{z} = R + j \cdot \omega \cdot L = z \cdot e^{j \cdot \varphi}$ Ом. $z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$; $\psi = arctg\dfrac{\omega \cdot L}{R}$. $\dot{I}_m = \dfrac{\dot{E}_m \cdot e^{j \cdot \psi}}{z \cdot e^{j \cdot \varphi}} = I_m \cdot e^{j \cdot (\psi - \varphi)}$ А. $i_{пр}(t) = \dfrac{E_m}{z} \cdot \sin(\omega \cdot t + (\psi - \varphi))$ А.

Вид свободной составляющей не зависит от того постоянное или переменное напряжение подается на вход.

Для составления характеристического уравнения необходимо записать второй закон Кирхгофа для рассматриваемой электрической цепи:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = e(t)$$ – неоднородное уравнение.

Однородное уравнение – правая часть заменяется нулем.

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = 0 .$$

Дифференциальное уравнение решается заменой дифференцирования переменной p:

$$R + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} .$$

Один корень, следовательно, свободная составляющая записывается в виде:

$$i_{св}(t) = A \cdot e^{p \cdot t} \qquad (1.14)$$

Подставляя значение p в уравнение (1.14) получим:

$$i_{св}(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} .$$

Постоянные интегрирования будут разные для постоянного и переменного тока. Данные расчета приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Расчет переходного тока

Для постоянного тока	Для переменного тока
$i(t)=i(t)_{пр}+i(t)_{св}$. $i(t)=\frac{E}{R}+A\cdot e^{-\frac{R_1}{L}t}$. При $t=0$ $i(0)=0$. До коммутации цепь разомкнута $\Rightarrow$ $i=0$ $0=\frac{E}{R}+A\Rightarrow A=-\frac{E}{R}$. Ток выражается: $i(t)=\underbrace{\frac{E}{R}}_{i_{пр}}\underbrace{-\frac{E}{R}\cdot e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t}}_{i_{св}}$	$i(t)=i(t)_{пр}+i(t)_{св}$. $i(t)=\frac{E_m}{z}\cdot\sin(\omega\cdot t+(\psi-\varphi))+A\cdot e^{-\frac{R_1}{L}\cdot t}$. При $t=0$ $i(t)=0$. До коммутации цепь разомкнута $\Rightarrow$ $i(0_-)=i(0)=i(0_+)=0$ $0=\frac{E_m}{z}\cdot\sin(\psi-\varphi)+A$. $A=-\frac{E_m}{z}\cdot\sin(\psi-\varphi)$. $i(t)=\underbrace{\frac{E_m}{z}\cdot\sin(\omega\cdot t+(\psi-\varphi))}_{i_{пр}}-$ $\underbrace{-\frac{E_m}{z}\cdot\sin(\psi-\varphi)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}}_{i_{св}}$

1.5 Пример расчета переходного процесса в цепи последовательного соединения *R*, *L*, *C*.

Рассмотрим расчет переходного процесса классическим методом на примере электрической цепи R, L, C – типа. Схема электрической цепи приведена на рисунке 1.5.

Даны параметры цепи R, L, C и приложенное постоянное напряжение $e(t)=E=const$ В. Определить переходный ток.

Переходный ток записывается в виде:

$$i(t)=i(t)_{пр}+i(t)_{св}.$$

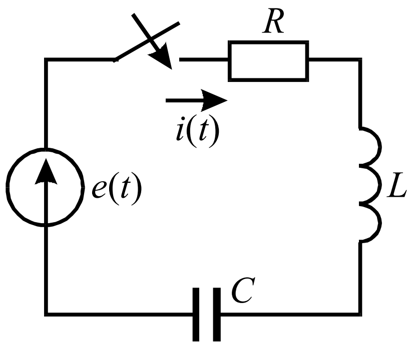

Рисунок 1.5 – Электрическая цепь *R*, *L*, *C* – типа

В данной задаче принужденная составляющая тока равна нулю: $i(t)_{np} = 0$.

Необходимо определить только свободную составляющую.

Для определения свободной составляющей записываем второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме для схемы на рисунке 1.5.

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = E.$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = 0.$$

и учтем $i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i$

Получим:

$$R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{c} = 0.$$

Разделим все члены уравнения на *L*:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C \cdot L} \cdot i = 0$$

Заменим дифференцирование *p* и получим квадратное уравнение:

$$p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{C \cdot L} = 0.$$

Корни квадратного уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{C \cdot L}}.$$

В зависимости от параметров схемы могут возникнуть три режима: апериодический, пограничный и колебательный.

$$\frac{R^2}{4 \cdot L^2} \rangle \frac{1}{C \cdot L} \Rightarrow R^2 \rangle \frac{4 \cdot L^2}{C \cdot L} \Rightarrow R \rangle 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Апериодический переходный процесс

Апериодический переходный процесс возникает, если $R \rangle 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$, два корня, корни вещественные и разные.

Введем обозначения:

$$\delta = \frac{R}{2 \cdot L},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C \cdot L}}.$$

Тогда корни приобретут вид:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Так как принужденная составляющая тока равна нулю то:

$$i(t) = i(t)_{св}.$$

При вещественных разных корнях свободная составляющая записывается в виде:

$$i_{св}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}.$$

Запишем это уравнение в системе с продифференцированным уравнением:

$$\begin{cases} i(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \\ \dfrac{di}{dt} = p_1 \cdot A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + p_2 \cdot A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \end{cases}.$$

При t=0:

$$\begin{cases} i(0) = A_1 + A_2 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 \end{cases} \tag{1.15}$$

Чтобы определить начальные условия нужно выделить независимые начальные условия и зависимые:

Независимые начальные условия определяем из законов коммутации:

$i(0_-) = i(0) = i(0_+) = 0$ – ток на катушке индуктивности скачком измениться не может.

$U_C(0_-) = U_C(0) = U_C(0_+) = 0$ – напряжение на емкости скачком измениться не может.

Зависимым начальным условием является: $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}$.

Зависимые начальные условия находятся из законов Кирхгофа.

$$R \cdot \underbrace{i(0)}_{0} + L \cdot \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} + \underbrace{u_C(0)}_{0} = E.$$

Выразим $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}$, $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}$.

Подставляем найденные независимые и зависимые условия в систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ \frac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим постоянные интегрирования:

$$A_1 = \frac{E}{L \cdot (p_1 - p_2)}; \; A_2 = -\frac{E}{L \cdot (p_1 - p_2)}. \tag{1.16}$$

Учитывая, что

$$p_1 - p_2 = 2 \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{1.17}$$

Подставляя (1.17) в выражения (1.16), получим:

$$A_1 = \frac{E}{2 \cdot L \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^2\right)}; \; A_2 = -\frac{E}{2 \cdot L \cdot \left(\delta^2 - \omega_0^2\right)}.$$

Подставляя полученные постоянные интегрирования в уравнение для свободной составляющей тока, получим переходный ток:

$$i(t)=\frac{E}{L\cdot\left(p_1-p_2\right)}\cdot\left(e^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)\cdot t}-e^{\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)\cdot t}\right)\ \text{А}.$$

Такой переходный процесс называется апериодическим.

Пограничный переходный процесс

Пограничный переходный процесс возникает, если $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Корни квадратного уравнения:

$$p_{1,2}=-\frac{R}{2\cdot L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4\cdot L^2}-\frac{1}{C\cdot L}}.$$

Если дискриминант равен нулю, *Д*=0, тогда корни: $p_1=-\delta,\ p_2=-\delta$.

Два корня одинаковые, и кратные.

$\frac{R^2}{4\cdot L^2}=\frac{1}{C\cdot L}\Rightarrow R^2=\frac{4\cdot L^2}{C\cdot L}\Rightarrow R=2\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$ – критическое скольжение.

Вид свободной составляющей:

$$i_{св}(0)=\left(A_1+A_2\cdot t\right)\cdot e^{-\delta\cdot t}.$$

Необходимо определить постоянные интегрирования A_1 и A_2.

$$\begin{cases} i(t)=\left(A_1+A_2\cdot t\right)\cdot e^{-\delta\cdot t} \\ \frac{di}{dt}=A_2\cdot e^{-\delta\cdot t}-\delta\cdot\left(A_1+A_2\cdot t\right)\cdot e^{-\delta\cdot t} \end{cases}.$$

При t=0:

$$\begin{cases} i(0) = A_1 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = A_2 - \delta \cdot A_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

Независимые начальные условия: $i(0)=0$ – первый закон коммутации, $U_C(0) = 0$ – второй закон коммутации.

Зависимые начальные условия:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}.$$

Подставляем эти условия в систему уравнений (1.18) и находим постоянные интегрирования:

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = \dfrac{E}{L} \end{cases}.$$

Тогда переходный ток запишется в виде:

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\delta \cdot t}.$$

Пограничный переходный процесс это процесс на границе между апериодическим и колебательным процессами.

Колебательный переходный процесс

Колебательный переходный процесс, возникает, если корни характеристического уравнения комплексные и сопряженные:

$$p^2 + \frac{R}{L} \cdot p + \frac{1}{C \cdot L} = 0\,.$$

Корни квадратного уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{C \cdot L}}.$$

Если дискриминант меньше нуля, тогда:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_{св}\,.$$

Ток имеет только свободную составляющую: $i(t)=i_{св}(t)$.

Вид свободной составляющей:

$$i_{св}(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + \gamma).$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} i(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + \gamma) \\ \dfrac{di}{dt} = -\delta \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_{св} \cdot t + \gamma) + \omega_{св} \cdot A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_{св} \cdot t + \gamma) \end{cases}$$

При t=0:

$$\begin{cases} 0 = A \cdot \sin\gamma \\ \dfrac{E}{L} = -\delta \cdot A \cdot \sin\gamma + \omega_{св} \cdot A \cdot \cos\gamma \end{cases} \tag{1.19}$$

Из первого уравнения системы (1.19) $\sin\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$.

Из второго уравнения системы (1.19) после подстановки получим:

$$A = \frac{E}{\omega_{св} \cdot L}.$$

Тогда переходной ток запишется в виде:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_{св} \cdot L} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin \omega_{св} \cdot t.$$

Такой переходный процесс называется колебательным.

2 Примеры расчета задач классическим методом

2.1 В заданной цепи (рисунок 2.1) определить все переходные токи и переходное напряжение на индуктивности после коммутации, если известно: r_0=25 Ом; r_1=10 Ом; r_2=r_3=30 Ом; L=1 Гн; U=100 В.

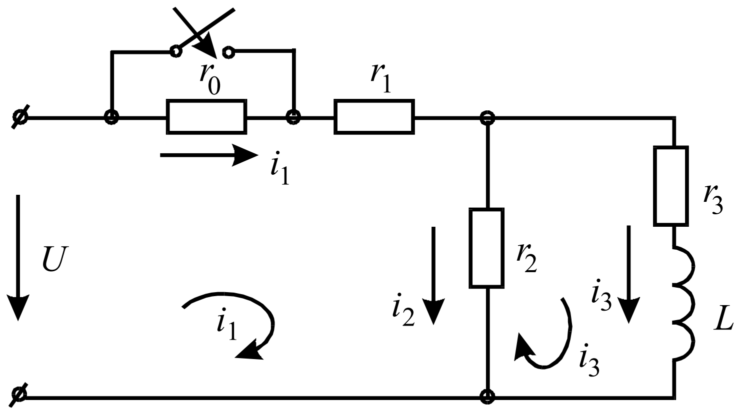

Рисунок 2.1

Решение. Переходный ток $i = i_{пр} + i_{св}$.

Принужденные токи и напряжение на индуктивности после коммуникации:

$$i_{1пр} = \frac{U}{r_1 + \dfrac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{100}{10 + \dfrac{30 \cdot 30}{30 + 30}} = 4\ A;$$

$$i_{2пр} = i_{3пр} = 2\ A \qquad U_L = 0.$$

Свободные токи и напряжение на индуктивности. По методу контурных токов для свободных токов имеем:

$$\begin{cases} (r_1 + r_2)i_{1св} - r_2 i_{3св} = 0 \\ -r_2 i_{1св} + (r_2 + r_3)i_{3св} + L\dfrac{di_{3св}}{dt} = 0. \end{cases}$$

Алгебраизированные уравнения:

$$\begin{cases}(r_1 + r_2)i_{1св} - r_2 i_{3св} = 0 \\ -r_2 i_{1св} + (r_2 + r_3 + L_p)i_{3св} = 0.\end{cases}$$

Характеристические уравнения:

$$\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 + L_p \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или}$$

$$\begin{vmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 60 + 1p \end{vmatrix} = 0;\ 2400 + 40p - 900 = 0.$$

или 1500+40p=0. Откуда $p = \frac{1500}{40} = -37{,}5\ \frac{1}{C}$.

Если в цепи одна индуктивность, то корень характеристического уравнения удобно определить по формуле:

$$p = \frac{r + r_{bx}}{L} = -\frac{30 + \frac{10 \cdot 30}{10 + 30}}{1} = -37{,}5\ \frac{1}{C}.$$

где r – сопротивление в ветви с индуктивностью,

r_{bx} – входное сопротивление схемы относительно зажимов ветви с индуктивностью.

Общие уравнения для свободных токов:

$$i_{1св} = A_1 e^{-37{,}5t};\ i_{2св} = A_2 e^{-37{,}5t};\ i_{3св} = A_{3св} e^{-37{,}5t}$$

При $t=0$ имеем $A_1 = i_{1св(0)}$; $A_2 = i_{2св(0)}$; $A_3 = i_{3св(0)}$.

Независимые начальные условия:

По первому закону коммутации имеем:

$$i_2(0) = i_3(0) = \frac{1}{2}\frac{U}{\left(r_0 + r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_2 + r_3}\right)} = \frac{1}{2}\frac{100}{25 + 10 + \dfrac{30 \cdot 30}{30 + 30}} = 1\ A.$$

Следовательно, $i_{3св}(0) = i_3(0) - i_{3пр}(0) = 1 - 2$ то есть $A_3 = -1$ А.

Зависимые начальные условия. На основании 1 и 2 – го законов Кирхгофа для начального момента (t=0) имеем:

$$\begin{cases} r_1 i_{1св}(0) + r_2 i_{2св}(0) = 0; \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0; \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} 10 i_{1св}(0) + 30 i_{2св}(0) = 0; \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) + 1 = 0. \end{cases}$$

Откуда: $i_{2св}(0) = 0{,}25$ А и $i_{1св}(0) = -0{,}75$ А;
$A_1 = -0{,}75$ А и $A_2 = 0{,}25$ А.

Свободные токи и напряжение на индуктивности:

$$i_{1св} = -0{,}75e^{-37{,}5t}\ \text{А};\ i_{2св} = 0{,}25e^{-37{,}5t}\ \text{А};\ i_{3св} = -e^{-37{,}5t}\ \text{А};$$

$$U_{Lсв} = L\frac{di_{3св}}{dt} = 37{,}5e^{-37{,}5t}\ \text{В}.$$

Переходные токи и напряжения на индуктивности:

$$i_1 = (4 - 0{,}75e^{-37{,}5t})\ \text{А};\ i_2 = (2 + 0{,}25e^{-37{,}5t})\ \text{А};\ i_3 = (2 - e^{-37{,}5t})\ \text{А};$$

$$U_L = 37{,}5e^{-37{,}5t}\ \text{В}.$$

2.2 В заданной схеме (рисунок 2.2), параметры которой r_1=200 Ом; r_3=200 Ом; C_2=25 мкФ и приложенное напряжение $U = \sqrt{2}\cdot 311\sin(200t - 18^0 25')$. Определить переходные токи и переходное напряжение на емкости после коммутации.

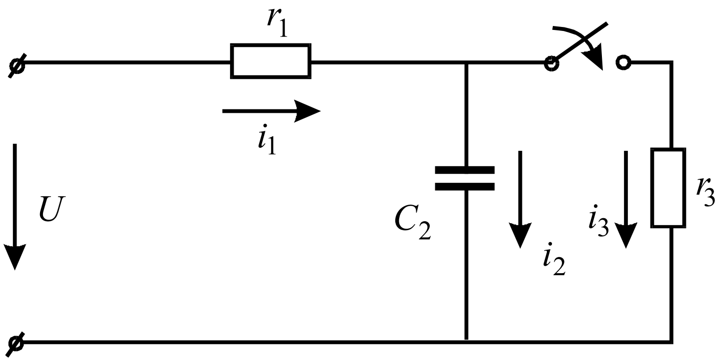

Рисунок 2.2

Решение. Принужденные токи и напряжение на емкости после коммутации:

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_m}{Z_1 + \frac{Z_2\cdot Z_3}{Z_2+Z_3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 311 e^{-j18^0 25'}}{200 + \frac{-j200\cdot 200}{200-j200}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 311 e^{-j18^0 25'}}{311 e^{-j18^0 25'}} = \sqrt{2}\ A \qquad i_{1np} = \sqrt{2}\sin 200t \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{2m} = \dot{I}_{1m}\frac{Z_3}{Z_2+Z_3} = \sqrt{2}\frac{200}{200 - j200} = e^{j45^0} \text{ А}$$

$$i_{2np} = \sin(200t + 45^0)\ A;$$

$$\dot{I}_{3m} = \dot{I}_{1m}\frac{Z_2}{Z_2+Z_3} = \sqrt{2}\frac{-j200}{200 - j200} = e^{-j45^0} \text{ А}$$

$$i_{3np} = \sin(200t - 45^0)\ A;$$

$$\dot{U}_{cm} = \dot{I}_{2m}Z_2 = e^{j45^0}(-j200) = 200e^{-j45^0} \text{ В}$$

$$U_{cm} = 200\sin(200t - 45^0) \text{ В.}$$

Свободные токи и напряжение на емкости. По методу контурных токов имеем:

$$\begin{cases} (r_1 + r_3)i_{1св} - r_3 i_{2св} = 0 \\ \dfrac{1}{C_2}\int i_{2св}dt + r_3 i_{2св} - r_3 i_{1св} = 0 \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} (r_1 + r_3)i_{1св} - r_3 i_{2св} = 0 \\ -r_3 i_{1св} + \left(r_3 + \dfrac{1}{pc_2}\right)i_{2св} = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & -r_3 \\ -r_3 & r_3 + \frac{1}{pc_2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или} \quad \begin{vmatrix} 400 & -200 \\ -200 & 200 + \frac{40000}{p} \end{vmatrix} = 0$$

$$80000 + \frac{16000000}{p} - 40000 = 0$$

$$4p + 1600 = 0 \quad p = -\frac{1600}{4} = -400\frac{1}{C}.$$

Если в цепи одна емкость, то корень характеристического уравнения удобно определять по формуле:

$$p = -\frac{1}{(r + r_{bx})C} = -\frac{10^6}{\frac{200 \cdot 200}{200+200}} = -400\frac{1}{C}.$$

где r – сопротивление в ветви с емкостью;

r_{bx} – входное сопротивление схемы относительно зажимов ветви с емкостью.

Общие выражения для свободного тока:

$$i_{1св} = A_1 e^{-400t}; \; i_{2св} = A_2 e^{-400t}; i_{3св} = A_3 e^{-400t}.$$

При t=0 имеем:

$$A_1 = i_{1св}(0);\ A_2 = i_{2св}(0);\ A_3 = i_{3св}(0).$$

Независимые начальные условия. По второму закону коммутации имеем:

$$U_c(0) = U_c(-0)$$
$$U_{cm} = \frac{U_m}{Z_1 + Z_2} Z_2 = \frac{\sqrt{2}311e^{-j18^0 25'}}{200 - j200} 200e^{-j90^0} = 311e^{-j63^0 25'} \text{ В;}$$
$$U_c(0) = U_c(-0) = 311\sin(-63^0 25') = -218 \text{ В;}$$
$$U_{ccв}(0) = U_c(0) - U_{cпр}(0) = --218 - 200\sin(-45^0) = -137 \text{ В.}$$

Зависимые начальные условия:

$$\begin{cases} r_1 i_{1св}(0) + r_3 i_{3св}(0) = 0 \\ U_{ccв}(0) - r_3 i_{3св}(0) = 0 \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} 200 i_{1св}(0) + 200 i_{3св}(0) = 0 \\ -137 - 200 i_{3св}(0) = 0 \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0 \end{cases}$$

$$i_{3св}(0) = -\frac{137}{200} = -0{,}685 \text{ А.}$$

$$A_3 = -0{,}685 \text{ А}$$
$$i_{1св}(0) = -i_{3св}(0) = 0{,}685 \text{ А}$$

$$A_1 = 0{,}685 \text{ А}$$
$$i_{2св}(0) = i_{1св}(0) - i_{3св}(0) = 1{,}37 \text{ А}$$
$$A_2 = 1{,}37 \text{ А}$$

Свободные токи и напряжения на емкости:

$$i_{1св} = 0{,}685e^{-400t};\ i_{2св} = 1{,}37e^{-400t}; i_{3св} = -0{,}685^{-400t};$$

$$U_{ссв} = \frac{1}{C_2}\int i_{2св}dt = 40000\frac{1{,}37}{-400}e^{-400t} = -137e^{-400t}\ \text{В}.$$

Переходные токи и напряжение на емкости:

$$i_1 = \left[\sqrt{2}\sin 200t + 0{,}685e^{-400t}\right]\text{А};$$
$$i_2 = \left[\sin\left(200t + 45^0\right) + 1{,}37e^{-400t}\right]\text{А};$$
$$i_3 = \left[\sin\left(200t - 45^0\right) - 0{,}685e^{-400t}\right]\text{А};$$
$$U_c = \left[200\sin\left(200t - 45^0\right) - 137e^{-400t}\right]\text{В}.$$

2.3 В заданной цепи (рисунок 2.3) параметры которой $r_1 = r_2 = r_3 = 20$ Ом, $C = 10^4$ мкФ и приложенное напряжение U=120 В, определить переходные токи и переходное напряжение на емкости после коммутации.

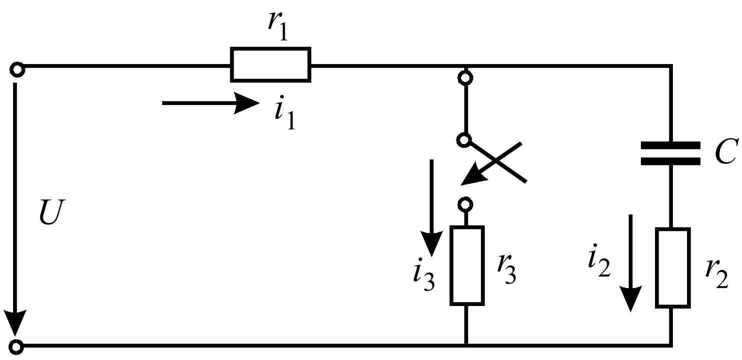

Рисунок 2.3

Решение. Принужденные токи и напряжение на емкости после коммутации:

$$i_{1пр} = i_{3пр} = \frac{U}{r_1 + r_3} = \frac{120}{40} = 3\ (\text{А})$$

$$i_{2пр} = 0,\ U_{Cпр} = r_3 \cdot i_{3пр} = 20 \cdot 3 = 60\ (\text{В})$$

Корень характеристического уравнения:

$$P = -\frac{1}{(r + r_{вх}) \cdot c} = -\frac{10^6}{\left(20 + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20}\right) \cdot 10^4} = -3{,}3\left(\frac{1}{C}\right)$$

Свободные токи и напряжения на емкости:

$$i_{1св} = A_1 e^{-3{,}3t},$$
$$i_{2св} = A_2 e^{-3{,}3t},$$
$$i_{3св} = A_3 e^{-3{,}3t}$$

При $t = 0 : A_1 = i_{1c}св(0),\ A_2 = i_2 св(0),\ A_3 = i_3 св(0).$

Независимые начальные условия:

$$U_c(0) = U_c(-0) = U = 120 \text{ В}$$
$$U_{сcв}(0) = U_c(0) - U_{cпр}(0) = 120 - 60 = 60 \text{ (В)}$$

Зависимые начальные условия определяем из уравнений составленных по законам Кирхгофа для схемы рисунок 2.3:

$$\begin{cases} r_1 i_{1св}(0) + r_3 i_{3св}(0) = 0 \\ U_{ссв}(0) + r_2 i_{2св}(0) - r_3 i_{3св}(0) = 0 \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0. \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} 20 i_{1св}(0) + 20 i_{3св}(0) = 0 \\ 20 i_{2св}(0) + 20 i_{3св}(0) = -60 \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, определим свободные токи:

$$i_{1св}(0)=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & 20\\ -60 & 20 & -20\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}20 & 0 & 20\\ 0 & 20 & -20\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{1200}{-400-400-400}=-1\ (A)\ A_1=-1\text{ А}$$

$$i_{2св}(0)=\frac{\begin{vmatrix}20 & 0 & 20\\ 0 & -60 & -20\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}20 & 0 & 20\\ 0 & 20 & -20\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{1200+1200}{-400-400-400}=-2\ (A)\ A_2=-2\text{ А}$$

$$i_{3св}(0)=\frac{\begin{vmatrix}20 & 0 & 0\\ 0 & 20 & -60\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}20 & 0 & 20\\ 0 & 20 & -20\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-1200}{-400-400-400}=1\ (A)\ A_3=1\text{ А.}$$

$$i_{1св}=-e^{-3{,}3t};$$
$$i_{2св}=-2e^{-3{,}3t};$$
$$i_{3св}=e^{-3{,}3t};$$
$$U_{ccв}=U_{ccв}(0)e^{-3{,}3t}=60e^{-3{,}3t}\ \text{(В).}$$

Переходные токи и напряжение на емкости:

$$i_1=\left(3-e^{-3{,}3t}\right)\text{(А);}$$
$$i_2=-2e^{-3{,}3t}\ \text{(А);}$$

$$i_3 = (3 + e^{-3,3t})(\text{А});$$
$$U_c = \left(60 + 60e^{3,3t}\right)(\text{В}).$$

2.4 В заданной цепи (рисунок 2.4) параметры которой $r_0 = 30$ Ом, $r_1 = 43$ Ом, r_2=200 Ом, L_2=1 Гн и приложенное напряжение $u = \sqrt{2} \cdot 200\sin(200t + 30^0)$ определить переходные токи и напряжение на индуктивности после коммутации.

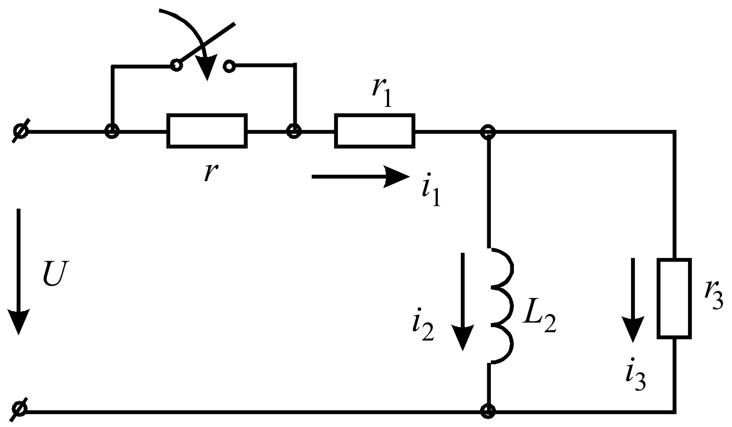

Рисунок 2.4

Решение. Принужденные токи и напряжение на индуктивности после коммутации.

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_m}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 200e^{j30^0}}{43 + \frac{j200 \cdot 200}{200 + j200}} = \frac{\sqrt{2}200e^{j30^0}}{174e^{j35^0}} = \sqrt{2} \cdot 1{,}15e^{-j5^0} \text{ А};$$

$$i_{1np} = \sqrt{2} \cdot 1{,}15\sin(200t - 5^0) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{2np} = \dot{I}_{1m}\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \sqrt{2} \cdot 1{,}15e^{-j5^0}\frac{200}{200 + j200} = 1{,}15e^{-j50^0} \text{ А};$$

$$i_{2np} = 1{,}15\sin(200t - 50^0) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{3np} = \dot{I}_{1m}\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \sqrt{2} \cdot 1{,}15e^{-j5^0}\frac{j200}{200 + j200} = 1{,}15e^{-j40^0} \text{ А};$$

$$i_3 = 1{,}15\sin(200t + 40^0) \text{ А};$$

$$\dot{U}_{Lm} = Z_2\dot{I}_{2m} = j200 \cdot 1{,}15e^{-j50^0} = 230e^{j40^0} \text{ В};$$

$$U_{Lm} = 230\sin(200t + 40^0) \text{ В}.$$

Свободные токи и напряжение на индуктивности:

$$P = -\frac{r + r_{bx}}{L} = -\frac{\frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 + r_3}}{L} = -\frac{\frac{200 \cdot 43}{200+43}}{1} = -35{,}4\ \frac{1}{C}$$

$$i_{1св} = A_1 e^{-35{,}4t};\ i_{2св} = A_2 e^{-35{,}4t};\ i_{3св} = A_3 e^{-35{,}4t}$$

При $t = 0;\ A_1 = i_{1св}(0)\ \ A_2 = i_{2св}(0)\ \ A_3 = i_{3св}(0)$.

Независимые начальные условия: $i_2(0) = i_2(-0)$.

Определяем ток $\dot{I}_{1m};\dot{I}_{2m}$ до коммутации:

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{U}_m}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 200 e^{j30^0}}{30 + 43 + \frac{j200 \cdot 200}{j200 + 200}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 200 e^{j30^0}}{73 + 100 + j100} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot 200 e^{j30^0}}{200 e^{j30^0}} = \sqrt{2}\ \text{А}.$$

$$\dot{I}_{2m} = \dot{I}_{1m} \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \sqrt{2} \frac{200}{200 + j200} = e^{-j45^0}\ \ \text{А}$$

$$i_2 = \sin(200t - 45^0)\ \ \text{А}$$

$$i_2(0) = i_2(-0) = \sin(-45^0) = -0{,}707\ \text{А}.$$

Свободная составляющая тока $i_{св}(0)$ определяется по первому закону коммутации:

$$i_{2св}(0) = i_2(0) - i_{2пр}(0) = -0{,}707 - 1{,}15 \sin(-50^0) =$$

$$= -0{,}707 + 0{,}881 = 0{,}174\ \text{А}$$

$$A_2 = 0{,}174\ \text{А}.$$

Зависимые начальные условия:

$$\begin{cases} r_1 i_{1св}(0) + r_3 i_{3св}(0) = 0 \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} 43 i_{1св}(0) + 200 i_{3св}(0) = 0 \\ i_{1св}(0) - 0{,}174 - i_{3св}(0) = 0 \end{cases}$$

$$i_{1св}(0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 200 \\ 0{,}174 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 43 & 200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-200 \cdot 0{,}174}{-43 - 200} = 0{,}143 \text{ А}; \quad A_1 = 0{,}143 \text{ А}.$$

$$i_{2св}(0) = \frac{\begin{vmatrix} 43 & 0 \\ 1 & 0{,}174 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 43 & 200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{43 \cdot 0{,}174}{-43 - 200} = -0{,}031 \text{ А} \quad A_3 = -0{,}031 \text{ А}.$$

$$i_{1св} = 0{,}143 e^{-35{,}4t} \text{ А};$$

$$i_{2св} = 0{,}174 e^{-35{,}4t} \text{ А};$$

$$i_{3св} = -0{,}031 e^{-35{,}4t} \text{ А};$$

$$U_{Lсв} = L \frac{di_{2cb}}{dt} = 1 \cdot 0{,}174(-35{,}4) e^{-35{,}4t} = -6{,}16 e^{-35{,}4t} \text{ В}.$$

Переходные токи и напряжение на индуктивности:

$$i_1 = \left[\sqrt{2} \cdot 1{,}15 \sin\left(200t - 5^0\right) + 0{,}143 e^{-35{,}4t}\right] \text{А};$$

$$i_2 = \left[1{,}15 \sin\left(200t - 50^0\right) + 0{,}174 e^{-35{,}4t}\right] \text{А};$$

$$i_3 = \left[1{,}15 \sin\left(200t + 40^0\right) - 0{,}031 e^{-35{,}4t}\right] \text{А};$$

$$U_L = \left[230 \sin\left(200t + 40^0\right) - 6{,}16 e^{-35{,}4t}\right] \text{В};$$

2.5 В заданной схеме (рисунок 2.5) параметры которой: r_1=10 Ом; r_2=2,0 Ом; r_3=3 Ом; L_1=0,1 гн; C_3=100 мкф и приложенное напряжение U=120 В включается ветвь с емкостью. Определить независимые и зависимые начальные условия необходимые для вычисления постоянных интегрирования в выражениях для переходных токов. До замыкания рубильника емкость была заряжена до напряжения U_{c3}=120 В.

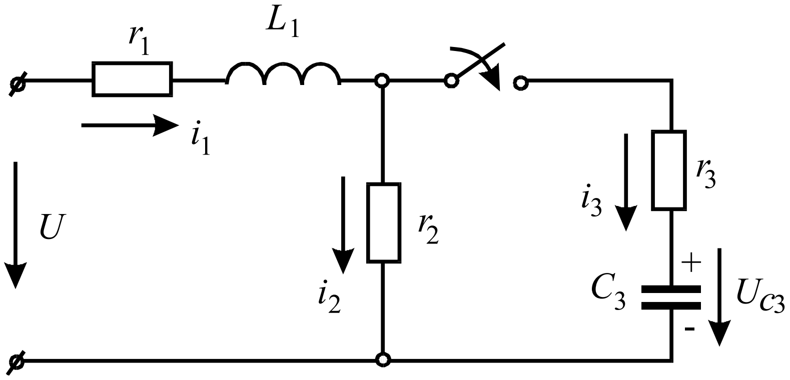

Рисунок 2.5

Решение. После замыкания рубильника при t=0 имеем:

а) независимые начальные условия. По закону коммутации, ток до коммутации:

$$i_1(0) = i_1(-0) = \frac{U}{r_1 + r_2} = \frac{120}{12} = 10\,\text{А};$$
$$i_{1св}(0) = i_1(0) - i_{1пр}(0).$$

В принужденном режиме после коммутации: $i_{1пр} = \dfrac{U}{r_1 + r_2} = 10\,\text{А}..$

Следовательно $i_{1св}(0) = 10 - 10 = 0$.

По второму закону коммутации:

$$U_{C_3}(0) = U_{C_3}(-0) = 120 \text{ В};$$
$$U_{C_{3св}}(0) = U_{C_3}(0) - U_{C_{3пр}}(0).$$

В принужденном режиме: $U_{C_{3пр}} = r_2 \cdot i_{2пр} = 2 \cdot 10 = 20$ В.

Следовательно: $U_{C_{3св}}(0) = 120 - 20 = 100$ В.

б) Зависимые начальные условия. Для свободных токов на основании 1 и 2 законов Кирхгофа имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} r_1 i_{1св} + L_1 \dfrac{di_{1св}}{dt} + r_3 i_{2св} = 0 \\ r_3 i_{3св} + \dfrac{1}{C_3}\displaystyle\int i_{3св} dt - r_2 i_{2св} = 0 \\ i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0 \end{cases}$$

При t=0 будем иметь:

$$\begin{cases} r_1 i_{1св} + L\left[\dfrac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0} + r_2 i_{2св}(0) = 0 \\ r_3 i_{3св}(0) + U_{C_{3св}}(0) - r_2 i_{2св}(0) = 0 \\ i_{1св}(0) - i_{2св}(0) - i_{3св}(0) = 0 \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнения находим:

$$i_{2св}(0) = \frac{\begin{vmatrix} r_3 & -U_{C_{св}}(0) \\ 1 & i_{1св}(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3 & -r_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_3 i_{1св}(0) + U_{c3св}(0)}{r_3 + r_2} = \frac{+100 + 3 \cdot 0}{3 + 2} = 20 \text{ А}.$$

$$i_{3св}(0)=\frac{\begin{vmatrix}-\dot U_{C_{св}}(0) & -r_2\\ i_{1св}(0) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}r_3 & -r_2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-u_{ссв}(0)+r_2 i_{1св}(0)}{r_3+r_2}=\frac{-100+2\cdot 0}{3+2}=-20 \text{ A.}$$

Из первого уравнения:

$$\left[\frac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0}=\frac{-r_1 i_{1св}(0)-r_2 i_{2св}(0)}{L_1}=\frac{-10\cdot 0-2\cdot 20}{0{,}1}=-400 \text{ A/c.}$$

Для определения начальных значений производных от второго и третьего токов продифференцируем второе и третье уравнение исходной системы и рассмотрим полученные уравнения при t=0.

Имеем:

$$\begin{cases} r_3\left[\dfrac{di_{3св}}{dt}\right]_{t=0}+\dfrac{i_{3св}(0)}{C_3}-r_2\left[\dfrac{di_{2св}}{dt}\right]_{t=0}=0\\ \left[\dfrac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0}-\left[\dfrac{di_{2св}}{dt}\right]_{t=0}-\left[\dfrac{di_{3св}}{dt}\right]_{t=0}=0. \end{cases}$$

откуда

$$\left[\frac{di_{2св}}{dt}\right]_{t=0}=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{i_{3св}(0)}{C_3} & r_3\\ -\left[\frac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0} & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-r_2 & r_3\\ -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{\frac{-i_{3св}(0)}{C_3}-r_3\left[\frac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0}}{r_2+r_3}=$$

$$=\frac{\frac{-20}{100}\cdot 10^6-3\cdot 400}{2+3}=\frac{-200000-1200}{5}=-40240 \text{ A/c}$$

$$\left[\frac{di_{3св}}{dt}\right]_{t=0}=\frac{\begin{vmatrix}-r_2 & -i_{3св}(0)\\ -1 & -\left[\frac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-r_2 & r_3\\ -1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-r_2\left[\frac{di_{1св}}{dt}\right]_{t=0}+\frac{i_{3св}(0)}{C_3}}{-r_3-r_3}=$$

$$=\frac{-2\cdot 400+\frac{20}{100}\cdot 10^6}{5}=\frac{200000-800}{5}=39840 \text{ А/с.}$$

2.6 Найти начальные значения переходных, принужденных и свободных токов после включения схемы (рисунок 2.6) на постоянное напряжение U=30 В, если известно: r_0=10 Ом; r_1=1 Ом; r_3=4 Ом; C=1 мкФ; L=10 мГн.

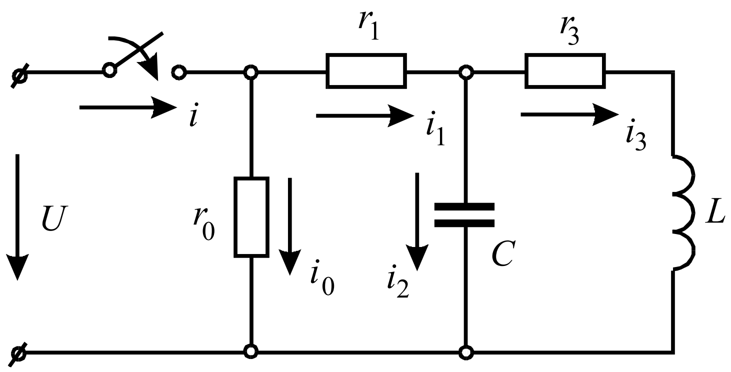

Рисунок 2.6

Решение. В начальный момент после включения цепи емкость представляет собой соединение с сопротивлением равным нулю, а индуктивность – бесконечно большое сопротивление. Учитывая это, по схеме можно найти начальные значения переходных токов:

$$i_0(0)=\frac{U}{r_0}=\frac{30}{10}=3 \text{ А}; \; i_1(0)=i_2(0)=\frac{U}{r_1}=\frac{30}{1}=30 \text{ А};$$

$$i(0)=i_0(0)+i_1(0)=3+30=33 \text{ А} \qquad i_3(0)=0$$

$$i_{0пр}(0)=i_{0пр}=\frac{U}{r_0}=\frac{30}{10}=3\ \text{А};$$

$$i_{1пр}(0)=i_{1пр}=i_{3пр}(0)=i_{3пр}=\frac{U}{r_1+r_3}=\frac{30}{1+4}=6\ \text{А}.$$

Принужденные токи по схеме (емкость, бесконечно большое сопротивление, а индуктивность – не имеет сопротивления):

$$i_{2пр}(0)=i_{2пр}=0;$$
$$i_{пр}(0)=i_{пр}=i_{0пр}+i_{1пр}=3+6=9\ \text{А}.$$

Свободные токи:

$$i_{св}(0)=i_{пр}(0)=33-9=24\ \text{А};$$
$$i_{0св}(0)=i_0(0)-i_{0пр}(0)=3-3=0;$$
$$i_{1св}(0)=i_1(0)-i_{пр}(0)=30-6=24\ \text{А};$$
$$i_{2св}(0)=i_2(0)-i_{2пр}(0)=30-0=30\ \text{А};$$
$$i_{3св}(0)=i_3(0)-i_{3пр}(0)=0-6=-6\ \text{А}.$$

2.7 Цепи (рисунок 2.7) параметры которой: r_1=2 Ом; r_4=3 Ом; L_2=0,5 Гн; L_5=1 Гн; C_3=100 мкФ включается на постоянное напряжение U=100 В. Найти начальные значения свободных токов и напряжений.

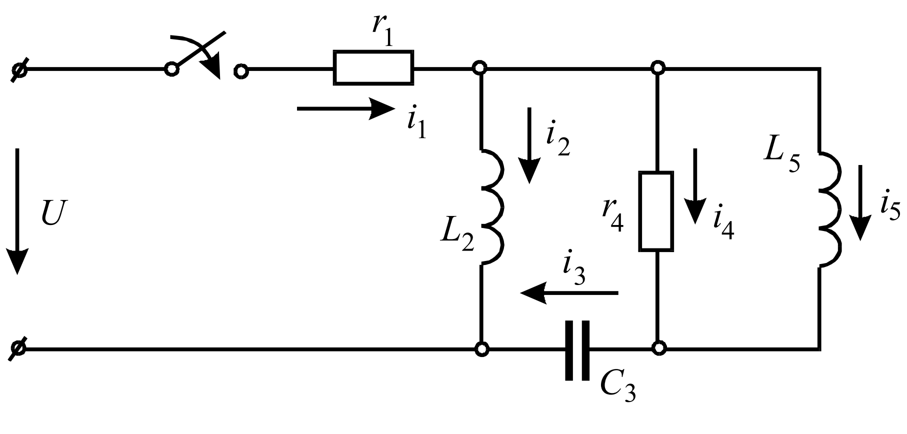

Рисунок 2.7

Решение. В начальный момент после включения цепи емкость представляет собой соединение с сопротивлением равным нулю, а индуктивность – бесконечно большое сопротивление. Учитывая это, по схеме можно найти начальные значения переходных токов и напряжений:

$$i_1(0) = i_4(0) = i_3(0) = \frac{U}{r_1 + r_4} = \frac{100}{2+3} = 20 \text{ А};$$
$$i_2(0) = i_5(0) = 0;\ U_1(0) = r_1 i_1(0) = 2 \cdot 20 = 40 \text{ В};$$
$$U_4(0) = r_4 i_4(0) = 3 \cdot 20 = 60 \text{ В};$$
$$U_3(0) = 0;$$
$$U_2(0) = U_5(0) = 60 \text{ В}.$$

Принужденные токи и напряжения (емкость бесконечно большое сопротивление, а индуктивность не имеет сопротивления).

$$i_{1пр}(0) = i_{2пр}(0) = i_{1пр} = i_{2пр} = \frac{U}{r_1} = \frac{100}{2} = 50 \text{ А};$$
$$U_{1пр}(0) = U_{1пр} = U = 100 \text{ В};$$
$$U_{2пр}(0) = U_{L2пр} = 0.$$

Все остальные принужденные токи и напряжения равны нулю. Свободные токи и напряжения:

$$i_{1св}(0) = i_1(0) - i_{1пр}(0) = 20 - 50 = -30 \text{ А};$$
$$i_{2св}(0) = i_2(0) - i_{2пр}(0) = 0 - 50 = -50 \text{ А};$$
$$i_{3св}(0) = i_3(0) - i_{3пр}(0) = 20 - 0 = 20 \text{ А};$$
$$i_{4св}(0) = i_4(0) - i_{4пр}(0) = 20 - 0 = 20 \text{ А};$$
$$i_{5св}(0) = i_5(0) - i_{5пр}(0) = 0 - 0 = 0\ .$$

$$U_{1св}(0) = U_1(0) - U_{1пр}(0) = 40 - 100 = -60 \text{ В};$$
$$U_{2св}(0) = U_2(0) - U_{2пр}(0) = 60 - 0 = 60 \text{ В};$$
$$U_{3св}(0) = U_3(0) - U_{3пр}(0) = 0 - 0 = 0;$$
$$U_{4св}(0) = U_4(0) - U_{4пр}(0) = 60 - 0 = 60 \text{ В};$$
$$U_{5св}(0) = U_5(0) - U_{5пр}(0) = 60 - 0 = 60 \text{ В}.$$

2.8. В заданных схемах (рисунок 2.8) «а», «б». Определить начальные значения переходных токов и токи в принужденном режиме после включения их на зажимы постоянной ЭДС E=300 В и построить качественно кривые изменения токов в переходном режиме. Величины сопротивлений указаны на схемах.

Решение. Для схемы «а» имеем:

$$i_1(0) = i_3(0) = \frac{300}{30} = 10 \text{ А};$$
$$i_2(0) = 0$$
$$i_{1пр} = \frac{300}{10 + \frac{20 \cdot 20}{20+20}} = 15 \text{ А};$$
$$i_{2пр} = i_{3пр} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ А}.$$

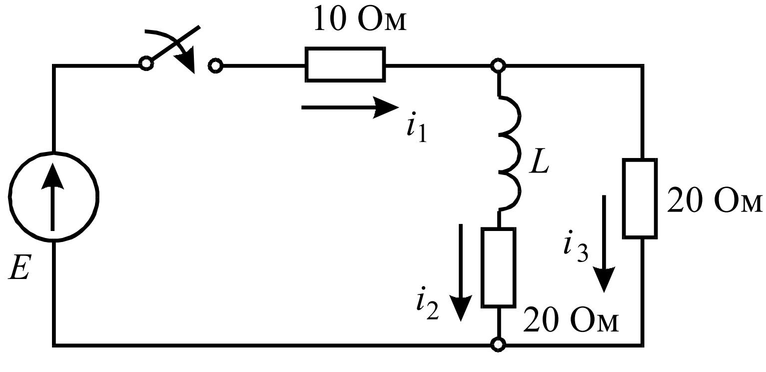

Рисунок 2.8,а

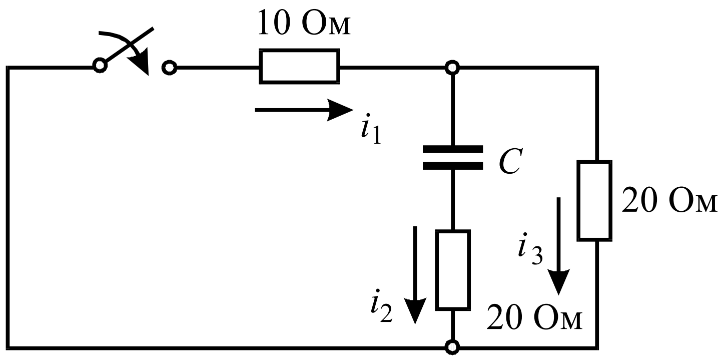

Рисунок 2.8,б

График изменения токов для схемы «а» представлен на рисунке 2.9,а.

Для схемы «б» имеем:

$$i_1(0) = \frac{300}{10 + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20}} = 15 \text{ А};$$

$$i_2(0) = i_3(0) = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ А};$$

$$i_{np} = i_{3np} = \frac{300}{30} = 10 \text{ А}.$$

График изменения токов для схемы «б» представлен на рисунке 2.9,б.

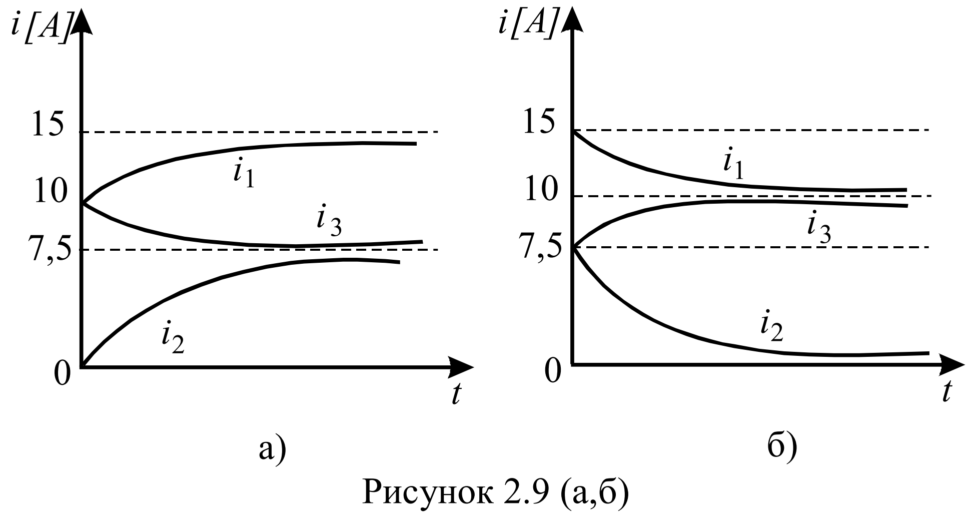

Рисунок 2.9 (а,б)

3 Задачи для самостоятельного решения

3.1 В цепи представленной на рисунке 3.1 определить значение напряжения $u_{L1}(0)$ цепи в момент коммуникации, если U=160 В; $r_1 = 8$ Ом; $r_2 = 3$ Ом; $r_3 = 6$ Ом.

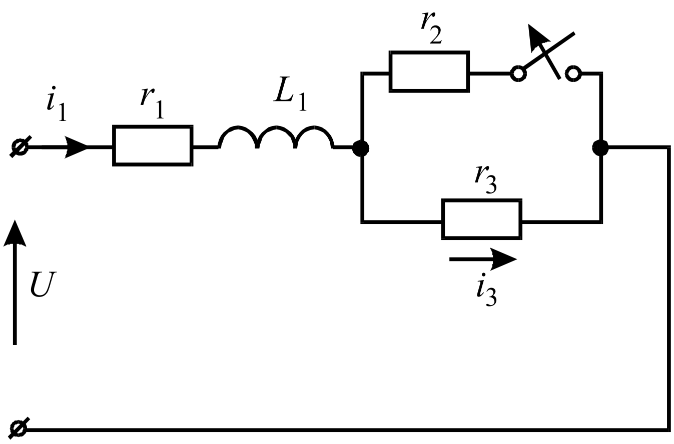

Рисунок 3.1

3.2 В цепи представленной на рисунке 3.2 определить значение напряжения на индуктивности $u_L(0)$ в момент коммутации, если I=1 А; $r_0 = r_2 = 2$ Ом; $r_1 = 8$ Ом; $r_3 = 90$ Ом.

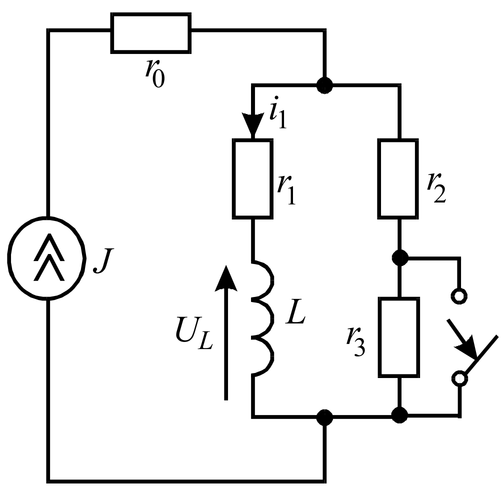

Рисунок 3.2

3.3 В цепи представленной на рисунке 3.3 определить значение тока $i_2(0)$ в цепи в момент коммутации, если U=80 В; $r_1 = 2$ Ом; $r_2 = 8$ Ом; $r_3 = 6$ Ом.

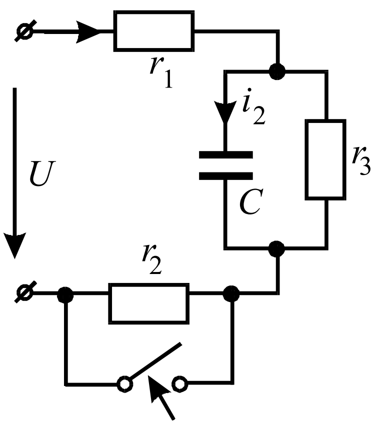

Рисунок 3.3

3.4. В цепи представленной на рисунке 3.4 определить значение тока $i_2(0)$ в цепи в момент коммутации, если I=10 А; $r = 10$ Ом.

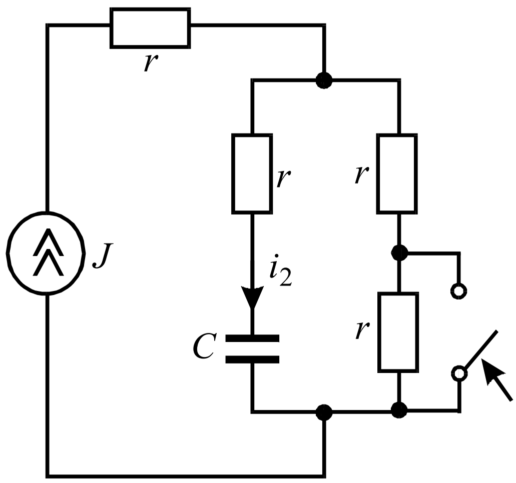

Рисунок 3.4

3.5 В цепи представленной на рисунке 3.5 определить значение тока $i_2(0)$ в цепи в момент коммутации, если U=150 В; $r_1 = 10$ Ом; $r_2 = 5$ Ом; $r_3 = 5$ Ом.

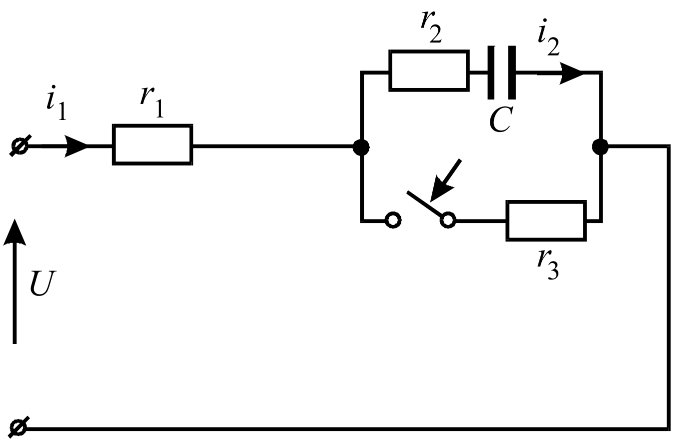

Рисунок 3.5

3.6 В цепи представленной на рисунке 3.6 определить значение тока $i_2(0)$ в цепи в момент коммутации, если $u = 200 \cdot \sin\left(\omega t + 45^0\right)$ В; $r = 10$ Ом; C=319 мкФ; f=50 Гц.

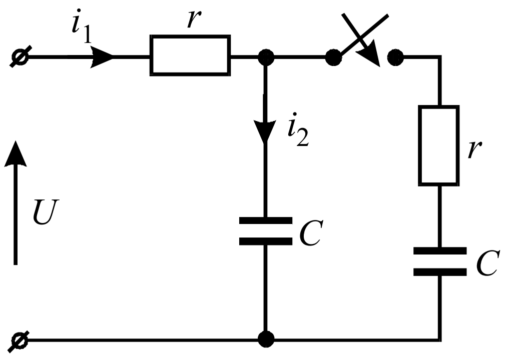

Рисунок 3.6

3.7. В цепи представленной на рисунке к задаче 3.6, определить значение тока $i_1(0)$ в момент коммутации, если $u = 200 \cdot \sin\left(\omega t + 45^0\right)$ В; $r = 10$ Ом; C=319 мкФ; f=50 Гц.

3.8. В цепи представленной на рисунке 3.7 определить значение напряжения на индуктивности $u_L(0)$ в момент коммутации, если $u = 200 \cdot \sin\left(314t + 45^0\right)$ В; $r = 10$ Ом; C=319 мкФ; L=63,6 мГ.

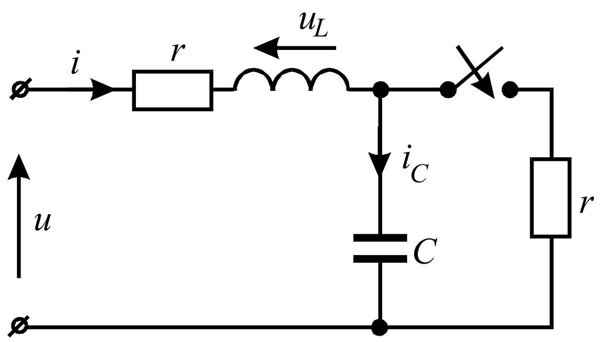

Рисунок 3.7

3.9 В цепи, представленной на рисунке к задаче 3.7, определить значение тока $i_C(0)$ в момент коммутации, если $u = 200 \cdot \sin\left(314t + 45^0\right)$ В; $r = 10$ Ом; C=319 мкФ; L=63,6 мГ.

3.10 В цепи представленной на рисунке 3.8 определить значение тока $i_3(0)$ в цепи в момент коммутации, если $u = 141 \cdot \sin\left(314t + 45^0\right)$ В; $r_1 = 2$ Ом; $r_2 = 4$ Ом; $r_3 = 2$ Ом; L=19,1 мГ; C=300 мкФ.

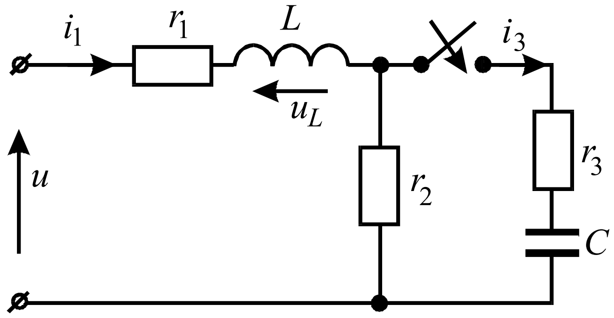

Рисунок 3.8

3.11 В цепи, представленной на рисунке к задаче 3.8, определить напряжение на индуктивности $u_L(0)$ в момент коммутации, если $u = 141 \cdot \sin\left(314t + 45^0\right)$ В; $r_1 = 2$ Ом; $r_2 = 4$ Ом; L=19,1 мГ.

3.12. В цепи представленной на рисунке 3.9 определить значение тока $i_3(0)$ в цепи в момент коммутации, если $u = 100 \cdot \sin\left(314t + 90^0\right)$ В; $r_1 = 4$ Ом; $r_2 = 8$ Ом; L=51 мГ.

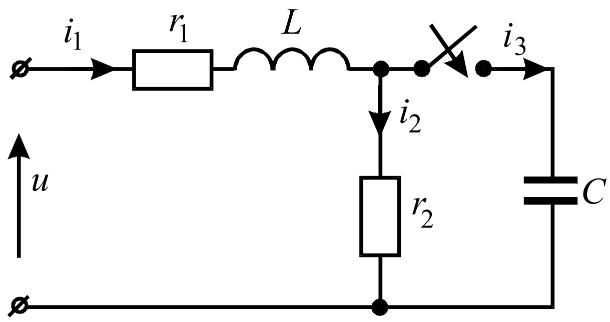

Рисунок 3.9

3.13 В цепи, представленной на рисунке к задаче 3.9, определить значение тока $i_2(0)$ в момент коммутации, если $u = 100 \cdot \sin\left(314t + 90^0\right)$ В; $r_1 = 4$ Ом; $r_2 = 8$ Ом; L=51 мГ; C=300 мкФ; f=50 Гц.

4 Ответы

1. $U_{L1}(0) = -64$ В.

2. $U_L(0) = 72$ В.

3. $i_2(0) = -8$ А.

4. $i_2(0) = -5$ А.

5. $i_2(0) = -12$ А.

6. $i_2(0) = 14{,}1$ А.

7. $i_1(0) = 14{,}1$ А.

8. $U_L(0) = 282$ В.

9. $i_C(0) = -14{,}1$ А.

10. $i_3(0) = 0$.

11. $U_L(0) = 100$ В.

12. $i_3(0) = 3$ А.

13. $i_2(0) = 7{,}1$ А.

5 Контрольные вопросы

1. Что такое переходной процесс?

2. Что называется коммутацией?

3. В чем заключаются причины возникновения переходных процессов?

4. Как читаются законы коммутации?

5. Что понимают под начальными значениями?

6. Чем обусловлены свободный и принужденный режимы?

7. Какие начальные условия называются зависимыми и независимыми?

8. Что называется коэффициентом затухания и постоянной времени переходного процесса?

9. Как определяются независимые и зависимые начальные условия?

10. Чем опасны переходные процессы?

11. В чем заключается сущность классического метода расчета переходных процессов?

12. Какие виды корней может иметь характеристическое уравнение второй степени?

13. Какой характер переходного процесса соответствует каждой паре корней характеристического уравнения второй степени?

14. Какие вы знаете способы составления характеристического уравнения?

15. Чем определяется число корней характеристического уравнения?

Список использованных источников

1 Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: учебник для вузов/ Л. А Бессонов -М.: Высш. шк., 2001. - 316 с.

2 Теоретические основы электротехники. В 3 т. Т. 1.:учебник для вузов/ К. С. Демирчян, Л. Р.Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин - СПб.: Питер, 2003. - 463 с.

3 Зевеке, Г. В. Основы теории цепей: учебник для вузов/ Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В.Нетушил, С. В. Страхов. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.

4 Татур, Т.А. Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях: учебное пособие для вузов/ Т.А.Татур, В.Е.Татур – М.: Высшая школа, 2001.- 407 с.

5 Касаткин, А.С. Электротехника: учеб. пособие для неэлектротехн. вузов / А. С. Касаткин, М. В. Немцов.- 4-е изд., перераб. - М. : Энергоатомиздат, 1983. - 440 с.: ил. - (Профтехобразование. Энергетика)..

6 Методические указания к лабораторным работам по разделу «Теоретические основы электротехники» / О.В. Баранник, В.Г. Денисов, Н.И. Доброжанова, М.О. Осипов, В.Д. Шевеленко. – Оренбург: ОрПтИ, 1979. – 100 с.