Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

М.А. Незнамова

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование

Оренбург
2013

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7
Н 44

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Незнамова, М.А.
Н 44 Основные методы нахождения пределов: методические указания / М.А. Незнамова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 24 с.
ISBN

В данной работе изложены основные методы нахождения пределов числовых последовательностей и функций одной переменной.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100.62 Педагогическое образование

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7

ISBN

Содержание

Введение

Предлагаемые методические указания предназначены студентам очной формы обучения направления 050100.62 Педагогическое образование в качестве дополнения к задачникам по математическому анализу [1-4], рекомендуемым рабочей программой по данной дисциплине.

Раздел математики, в котором рассматривается тема «Пределы» изучается студентами направления 050100.62 Педагогическое образование в 1 семестре.

Несмотря на наличие большого количества прекрасно зарекомендовавших на протяжении десятилетий задачников по математическому анализу и высшей математике [1-9], написание данных методических указаний все же представляется целесообразным в силу следующих причин:

1) изменение количества учебных часов и структуры их распределения между аудиторной нагрузкой и самостоятельной работой;

2) важность соответствия методических материалов рабочей программе.

Следует отметить, что рассматриваемые методические указания можно использовать студентами и других направлений и специальностей с аналогичной трудоемкостью изучения математического анализа.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Павленко А.Н. за ряд ценных предложений, рекомендаций и уточнений.

1 Отсутствие неопределенностей

1.1 Использование теорем о пределах арифметических действий

Для пределов последовательностей верны следующие свойства:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$.

2. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, то тогда верны равенства:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} Cx_n = C\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если при всех $n \in N$ выполняется $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$;

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{\,y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ одновременно не равны 0.

Для пределов функций верны следующие свойства:

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

2. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то тогда верны равенства:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x)\neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ одновременно не равны 0.

Замечание. Свойства 1) - 5) верны также и в случае, когда a является одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x\right).$$

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=$$

►Для нахождения пределов

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x},\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x$$

удобно воспользоваться графиками функций $y=\dfrac{1}{x}$ и $y=\operatorname{arctg}x$ (рисунки 1, 2).

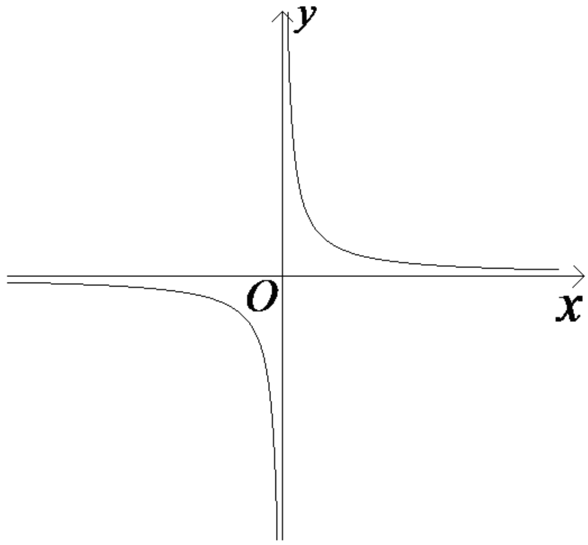

Рисунок 1

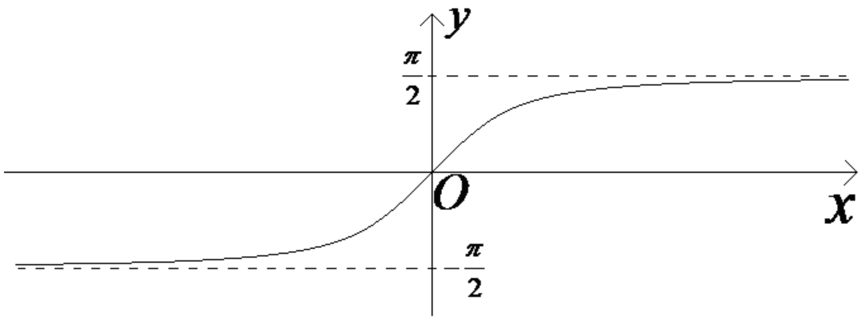

Рисунок 2

◄

$$=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

1.2 Пределы элементарных функций, если предельное значение независимой переменной принадлежит области определения функции, стоящей под знаком предела

Определение. Элементарной функцией будем называть функцию, заданную конечной формулой, состоящей из:

1) переменной x;

2) чисел;

3) знаков арифметических действий;

4) степеней с целыми и рациональными показателями;

5) корней;

6) функций: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$, $\ln x$, $\log_a x$, e^x, a^x.

Так как все элементарные функции непрерывны на всей своей области определения, то в данном случае достаточно подставить предельное значение независимой переменной в элементарную функцию, стоящую под знаком предела.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-\frac{x}{x+1}\right).$$

Решение.

В данном случае под знаком предела находится элементарная функция

$$f(x)=\sqrt{x+3}-\frac{x}{x+1},$$

а предельное значение $x=1$ принадлежит области определения функции. Для нахождения предела подставим $x=1$ в функцию

$$f(x)=\sqrt{x+3}-\frac{x}{x+1}.$$

Тогда получим

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-\frac{x}{x+1}\right)=\sqrt{1+3}-\frac{1}{1+1}=1{,}5.$$

1.3 Использование свойств бесконечно малых и бесконечно больших

В дальнейшем будем использовать обозначения:

1) 0 - бесконечно малая величина;

2) ∞ - бесконечно большая величина;

3) $\mathit{огр}$ - ограниченная величина;

4) $\left|\mathit{огр}\underline{\downarrow}\right|$ - величина, ограниченная по модулю снизу положительным числом.

Для бесконечно малых и бесконечно больших справедливы следующие утверждения.

1) $0\pm 0=0$; 2) $0\cdot \mathit{огр}=0$;

3) $0\cdot 0=0$; 4) $\dfrac{\mathit{огр}}{\infty}=0$;

5) $\dfrac{\left|\mathit{огр}\underline{\downarrow}\right|}{0}=\infty$; 6) $\dfrac{\infty}{\mathit{огр}}=\infty$;

7) $\infty\cdot\left|\mathit{огр}\underline{\downarrow}\right|=\infty$; 8) $\infty\cdot\infty=\infty$;

9) $+\infty+(+\infty)=+\infty$; 10) $-\infty+(-\infty)=-\infty$;

11) $+\infty-(-\infty)=+\infty$;   12) $-\infty-(+\infty)=-\infty$;

13) $\infty \pm огр=\infty$.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\operatorname{arctg}2n.$$

Решение. Величина $\frac{3}{n^2}$ представляет собой отношение ограниченной величины и бесконечно большой, поэтому $\frac{3}{n^2}$ - бесконечно малая. Так как $\operatorname{arctg}2n$ - ограниченная величина (рисунок 2), то и $\frac{3}{n^2}\operatorname{arctg}2n$ - бесконечно малая. Получили, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\operatorname{arctg}2n=0.$$

Кратко данное решение можно записать в символическом виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\operatorname{arctg}2n=\left[\frac{огр}{\infty}\cdot огр\right]=[0\cdot огр]=0.$$

2 Раскрытие неопределенности вида 0/0

2.1 Функция, стоящая под знаком предела является дробью, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пусть при $x = a$ многочлены, находящиеся в числителе и знаменателе, равны 0. В этом случае в числителе и знаменателе можно выделить множители $(x-a)$. Для этого удобно использовать схему Горнера или деление «углом».

При стремлении $x \to a$ подразумевается, что переменная x приближается к a, всегда оставаясь неравной a. Таким образом, при $x \to a$ будет выполняться неравенство $x - a \neq 0$, поэтому числитель и знаменатель можно будет сократить на общий множитель $(x-a)$.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

►Так как при $x = 1$ числитель и знаменатель обращаются в ноль, то будем делить их на $(x-1)$ до тех пор, пока деление возможно без остатка. Разделим многочлен x^3+x^2-5x+3 на двучлен $x-1$, используя схему Горнера.

	1	1	-5	3
1	1	2	-3	0
1	1	3	0	

Получили: $x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3)$.

Разделим многочлен x^3-4x^2+5x-2 на двучлен $x-1$, используя схему Горнера.

Получили:

	1	-4	5	-2
1	1	-3	2	0
1	1	-2	0	

$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$.

Теперь в числителе и знаменателе запишем полученные разложения на множители.◄

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-2}=\frac{1+3}{1-2}=-4.$$

2.2 В числителе и знаменателе находятся выражения с корнями

С помощью замены можно попытаться избавиться от корней.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

►Введем замену $x=t^{12}$. Так как $x\to 1$, то и $t\to 1$.◄

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t^6-t^4}{t^4-t^3}=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t}{t-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

►Выделим из числителя множитель $(t-1)$.◄

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t\left(t^2-1\right)}{t-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 1} \frac{t(t-1)(t+1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} t(t+1) = 1(1+1) = 2\,.$$

Иногда бывает полезно умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(1+x)-(1-x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} = \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2} = 1\,.$$

2.3 Использование эквивалентных бесконечно малых

При $\alpha \to 0$ имеем

$$\sin\alpha \sim \alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha,\ \arcsin\alpha \sim \alpha,\ \mathrm{arctg}\,\alpha \sim \alpha,\ \left(e^{\alpha}-1\right) \sim \alpha,\ \ln(1+\alpha) \sim \alpha,$$

$$\log_c(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln c},\ \left(c^{\alpha}-1\right) \sim \alpha \cdot \ln c,\ (1-\cos\alpha) \sim \frac{\alpha^2}{2},\ \left((1+\alpha)^c-1\right) \sim c\alpha\,.$$

Если бесконечно малая является делимым, делителем или сомножителем, то ее можно заменить на эквивалентную бесконечно малую.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1+x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

►Используем эквивалентность бесконечно малых: $\sin\alpha\sim\alpha$ и $\left((1+\alpha)^c-1\right)\sim c\alpha$. Тогда $\sin 3x\sim 3x$ и $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sim\frac{1}{2}x$, и можно заменить $\sin 3x$ на $3x$, а $\sqrt{1+x}-1$ на $\frac{1}{2}x$.◄

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}6=6.$$

3 Раскрытие неопределенности вида ∞/∞

3.1 числитель и знаменатель являются многочленами

В данном случае числитель и знаменатель дроби следует разделить на наибольшую степень.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2-3n+3}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{2n^2-3n+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

►Разделим числитель и знаменатель на наибольшую степень (n^2).◄

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{1+0-0}{2-0+0}=\frac{1}{2}.$$

3.2 В числителе и знаменателе есть корни и дробные степени

В данном случае следует вынести из каждого множителя числителя и знаменателя такую степень переменной, чтобы полученное выражение стремилось к ненулевому конечному числу. После этого разделим числитель и знаменатель на наибольшую из полученных степеней.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x\sqrt{x^3+1}+\sqrt[4]{3x+2}}{\sqrt[3]{\left(2x^2-5\right)\left(x+4\right)}}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x\sqrt{x^3+1}+\sqrt[4]{3x+2}}{\sqrt[3]{\left(2x^2-5\right)\left(x+4\right)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot x^{3/2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+x^{1/4}\cdot\sqrt[4]{3+\frac{2}{x}}}{x^{2/3}\cdot\sqrt[3]{\left(2-\frac{5}{x^2}\right)\cdot x\cdot\left(1+\frac{4}{x}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{5/2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+x^{1/4}\cdot\sqrt[4]{3+\frac{2}{x}}}{x^{5/3}\cdot\sqrt[3]{\left(2-\frac{5}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{x}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\frac{1}{x^{9/4}}\cdot\sqrt[4]{3+\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x^{5/6}}\cdot\sqrt[3]{\left(2-\frac{5}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{x}\right)}}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{1+0}+0\cdot\sqrt[4]{3+0}}{0\cdot\sqrt[3]{2-0}\cdot(1+0)}\right]=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty\,.$$

3.3 Использование различный рост бесконечно больших

Определение. Будем говорить, что бесконечно большая $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем бесконечно большая $g(x)$, если

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to\infty\,.$$

Обозначение этого факта: $f(x)>>g(x)$.

При $n\to\infty$ выполняется

$$\log_a n<<n^p<<a^n<<n!<<n^n\,.$$

Здесь $a>1, p>0$.

1. Если числитель - бесконечно большая, имеющая более высокий порядок роста, чем знаменатель, то предел равен ∞.

2. Если знаменатель - бесконечно большая, имеющая более высокий порядок роста, чем числитель, то предел равен 0.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Решение.

Используя, что $\ln n << n$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0.$$

Если в числителе или в знаменателе имеется сумма бесконечно больших, то числитель и знаменатель следует разделить на бесконечно большую, имеющую самый большой рост.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+4n^3}{5^n}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!+4n^3}{5^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

►Используя, что $n^3 << 5^n << n!$, разделим числитель и знаменатель на $n!$◄

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4\cdot\dfrac{n^3}{n!}}{\dfrac{5^n}{n!}}=\left[\frac{1+4\cdot 0}{0}\right]=\infty.$$

4 Раскрытие неопределенности вида $0 \cdot \infty$

4.1 Использование эквивалентных бесконечно малых

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \sin\frac{1}{2x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \sin\frac{1}{2x} = [\infty \cdot 0] =$$

►Используем эквивалентность бесконечно малых: $\sin\alpha \sim \alpha$. Тогда $\sin\frac{1}{2x} \sim \frac{1}{2x}$, и можно заменить $\sin\frac{1}{2x}$ на $\frac{1}{2x}$.◄

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \cdot \frac{1}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x(x-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

►Разделим числитель и знаменатель на наибольшую степень (x^2).◄

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2(1-\frac{1}{x})} = \frac{1+0}{2(1-0)} = \frac{1}{2}.$$

4.2 Один из множителей является разностью двух корней

В данном случае следует использовать умножение на сопряженное выражение.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{2}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}=1.$$

4.3 Сведение неопределенности $0\cdot\infty$ к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

Неопределенность $0\cdot\infty$ раскрывается в общем случае сведением к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

1) $f(x)\cdot g(x)=[0\cdot\infty]=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$;

2) $f(x)\cdot g(x)=[0\cdot\infty]=\dfrac{1/f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

После этого предполагается применение правила Лопиталя, которое будет изучаться в разделе «Дифференциальное исчисление для функций одной переменной».

5 Раскрытие неопределенности вида $\infty - \infty$

5.1 Под знаком предела находится разность двух дробей

В данном случае следует привести дроби к общему знаменателю.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x-2}\right).$$

Решение.

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x-2}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x-1)(x+2)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1}\frac{(x+2)-(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \lim_{x \to 1}\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty.$$

5.2 Под знаком предела находится разность двух корней или корня и другого выражения

В данном случае неопределенность удается раскрыть, используя умножение на сопряженное выражение.

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right).$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-n}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n\right)-\left(n^2-n\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1.$$

5.3 Сведение неопределенности $\infty-\infty$ к неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Преобразуем исходное выражение по схеме:

$$f(x)-g(x)=[\infty-\infty]=\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

После этого предполагается применение правила Лопиталя, которое будет изучаться в разделе «Дифференциальное исчисление для функций одной переменной».

6 Раскрытие неопределенности вида 1^{∞}

В данном случае целесообразно применить формулу

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left[1^{\infty}\right]=\exp\left(\lim_{x\to a}\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right).$$

Задача. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1}=\left[1^{\infty}\right]=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)(n+1)\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-2n+1}{2n-1}(n+1)\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{2n-1}\right)=$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2-\frac{1}{n}}\right)=\exp\left(\frac{2(1+0)}{2-0}\right)=e^{1}=e.$$

Список использованных источников

1 Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учебное пособие для вузов. Том 1/ Л.Д. Кудрявцев.- М: Физ.мат.лит, 2003.

2 Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математиче-скому анализу: пособие для университетов, пед.вузов: В 2 ч./ Под ред. В.А.Садовничего. – 3-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2001.

3 Демидович Б.В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 2007.

4 Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : в 2 ч.: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: Оникс 21 век. Мир и образование, 2006.

5 Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов / Г.Н. Берман, 20-е изд. – М.: 1985. – 384 с.

6 Каплан, И.А. Практические занятия по высшей математике / И.А. Каплан, 3-изд. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 1967. – 946 с.

7 Марон, И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И.А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 400 с.

8 Бугров, Я.С. Высшая математика. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский, 3-изд, испр. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 1997. – 352.

9 Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.