Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

М.А. Незнамова

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 230400.62 – Информационные системы и технологии

Оренбург
2013

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7
Н 44

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Незнамова, М.А.
Н 44 Некоторые сведения о метрических пространствах: методические указания/ М.А. Незнамова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 37 с.
ISBN

В данной работе рассматривается теорема Банаха о сжимающем операторе и ее приложения.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 230400.62 – Информационные системы и технологии

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7

ISBN

Содержание

Введение

Предлагаемые методические указания предназначены студентам очной формы обучения направления 230400.62 – Информационные системы и технологии для обеспечения самостоятельной работы студентов при выполнении курсовых работ, РГЗ и дипломного проектирования, для обоснования применения математических методов при исследовании и решении алгебраических уравнений, их систем, а также дифференциальных и интегральных уравнений.

Несмотря на наличие большого количества прекрасно зарекомендовавших на протяжении десятилетий учебников по функциональному анализу [1-6], написание данных методических указаний все же представляется целесообразным в силу следующих причин:

1) довольно сложным изложением данного материала в типовых учебниках;

2) изменение количества учебных часов и структуры их распределения между аудиторной нагрузкой и самостоятельной работой;

Следует отметить, что рассматриваемые методические указания можно использовать студентами и других направлений и специальностей с аналогичной трудоемкостью изучения математического анализа.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Павленко А.Н. за ряд ценных предложений, рекомендаций и уточнений.

1 Метрические пространства. Теорема Банаха

1.1 Понятие метрического пространства

Определение. Метрическим пространством (M,ρ) будем называть непустое множество произвольной природы M, если каждой паре элементов $x, y \in M$ поставлено в соответствие действительное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее аксиомам:

1) $\forall x, y \in M$ выполняется $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\forall x, y \in M$ выполняется $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметричности);

3) $\forall x, y, z \in M$ выполняется $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Элементы множества M будем называть точками метрического пространства, а величину $\rho(x, y)$ - расстоянием между точками x и y.

Аксиомы определения метрического пространства выражают часть свойств обычного расстояния между двумя точками на плоскости (в пространстве).

Задача. Доказать, что в метрическом пространстве (M,ρ) для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ выполняется неравенство

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n). \qquad (1)$$

Решение.

Рассмотрим

$$\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \geq$$

►Из аксиомы треугольника определения метрического пространства следует неравенство

$$\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) \geq \rho(x_1, x_3).◄$$

$$\geq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_4) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \geq$$

►Из аксиомы треугольника определения метрического пространства следует неравенство

$$\rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_4) \geq \rho(x_1, x_4).◄$$

$$\geq \rho(x_1, x_4) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \geq$$

►Применив аксиому треугольника всего $n-1$ раз, получим◄

$$\geq \rho(x_1, x_n).$$

Неравенство (1) доказано.

Рассмотрим примеры метрических пространств.

1. Множество действительных чисел R с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

2. Множество векторов (или точек при смене обозначений) n-мерного пространства R^n, где расстояние между векторами $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определяется одной из формул:

1) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;

2) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

3) $\rho(\bar{x},\bar{y})=\max_i |x_i-y_i|$.

3. Множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ с расстоянием между функциями $x=x(t)$ и $y=y(t)$

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

Данное метрическое пространство имеет специальное обозначение $C[a,b]$.

В качестве примера покажем, что $C[a,b]$ действительно является метрическим пространством.

Выполнимость первой и второй аксиом очевидна. Докажем, что выполняется третья аксиома

Для этого рассмотрим при $t\in[a,b]$ величину

$$|x(t)-z(t)|=|(x(t)-y(t))-(z(t)-y(t))|\le|x(t)-y(t)|+|z(t)-y(t)|=$$

$$=|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in[a,b]}|y(t)-z(t)|=$$

$$=\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Таким образом, мы показали, что для всех $t\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|x(t)-z(t)|\le\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Отсюда следует, что

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|\le \rho(x,y)+\rho(y,z),\ \rho(x,z)\le \rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Так как выполняются все три аксиомы определения метрического пространства, то $C[a,b]$ действительно является метрическим пространством.

1.2 Пределы последовательностей в метрических пространствах

Определение. Последовательностью $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M,ρ) будем называть бесконечное множество пронумерованных точек этого пространства:

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...$$

Перед введением понятия предела последовательности в метрическом пространстве напомним определение предела числовой последовательности.

Определение. Будем говорить, что числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел равный числу a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$ члена последовательности, что для всех номеров $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Величину $|x_n - a|$ можно интерпретировать как расстояние между точками x_n и a на числовой прямой. Тогда данное определение легко обобщается на случай произвольного метрического пространства.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M,ρ) имеет предел $a \in M$ (стремится к точке $a \in M$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$ члена последовательности, что для всех номеров $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_n,a) < \varepsilon$.

Обозначения:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ - последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a;

2) $\{x_n\} \to a$ - последовательность $\{x_n\}$ стремится к a.

Как и в случае числовых последовательностей верны следующие теоремы.

Теорема 1. Если последовательность в метрическом пространстве имеет предел, то он единственен.

Теорема 2. Если последовательность в метрическом пространстве имеет предел, то тот же предел имеет и любая ее подпоследовательность.

В произвольном метрическом пространстве можно ввести понятие фундаментальной последовательности с помощью обобщения понятия фундаментальной числовой последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M,ρ) называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$ члена последовательности, что для всех номеров $m,n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Приведенному определению эквивалентно следующее определение.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M,ρ) называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$ члена последовательности, что для всех номеров $n > n_0(\varepsilon)$ и любого натурального p выполняется неравенство $\rho(x_n,x_{n+p}) < \varepsilon$.

Другими словами, последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной в метрическом пространстве (M,ρ), если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x_{n+p}) = 0.$$

Как известно, для того, чтобы числовая последовательность имела предел необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной. Для случая произвольного метрического пространства из фундаментальности последовательности не следует существование у нее предела. В качестве примера рассмотрим метрическое пространство, образованное множеством рациональных чисел Q и расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Пусть имеется последовательность рациональных чисел вида:

$x_1 = 3{,}1$;

$x_2 = 3{,}14$;

$x_3 = 3{,}141$;

$x_4 = 3{,}1415$;

$x_5 = 3{,}14159$;

$x_6 = 3{,}141592$;

$x_7 = 3{,}1415926$;

....

Здесь x_n - число, полученное их числа π, отбрасыванием всех цифр после запятой, начиная с $n+1$ цифры.

Данная последовательность является фундаментальной, но она не имеет предела в данном метрическом пространстве, так как $\pi \notin Q$.

В произвольном метрическом пространстве верна следующая теорема.

Теорема 3. Если последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M, ρ) имеет предел, то она является фундаментальной.

Доказательство.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M, ρ) имеет предел a. Тогда из определения предела последовательности в метрическом пространстве следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$ члена последовательности, что для всех номеров $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

При $m, n > n_0(\varepsilon)$ имеем

$$\rho(x_m, x_n) \le$$

►По аксиоме треугольника имеем◄

$$\le \rho(x_m, a) + \rho(a, x_n) =$$

►По аксиоме симметричности имеем◄

$$= \rho(x_m, a) + \rho(x_n, a) <$$

►Так как $m, n > n_0(\varepsilon)$, то тогда◄

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$ члена последовательности, что для всех номеров $m, n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (M, ρ) является фундаментальной.

Теорема доказана.

Определение. Метрическое пространство называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Метрические пространства 1-4 являются полными, а метрическое пространство, образованное множеством рациональных чисел Q и расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ полным не является.

1.3 Сжимающие операторы

Определение. Соответствие, при котором каждому элементу x из множества произвольной природы D отвечает единственный элемент y из множества произвольной природы Y, будем называть оператором.

Обозначать операторы будем большими латинскими буквами:

$$y = Ax \text{ или } y = A(x).$$

Множество D будем называть областью определения оператора, а множество

$$E = \{y = Ax \mid x \in D\}.$$

будем называть его областью значений.

Если $D, E \subset R$, то оператор будет являться действительной функцией одной действительной переменной. Таким образом, понятие оператора является обобщением понятия функции на случай, когда области определения и значения могут быть множествами произвольной природы.

Если $E \subset R$, то такой оператор будем называть функционалом.

Рассмотрим некоторые примеры операторов.

1. Любая действительная функция n действительных переменных является оператором (и функционалом). Здесь: $D \subset R^n$, а $E \subset R$.

2. Производная является оператором. В данном случае в качестве его области определения можно взять множество всех непрерывно дифференцируемых функций. Тогда его областью значений будет множество непрерывных функций.

В дальнейшем важную роль будет играть понятие сжимающего оператора.

Определение. Оператор A, отображающий метрическое пространство (X,ρ_1) в метрическое пространство (Y,ρ_2) будем называть сжимающим оператором, если существует такое число $\alpha \in (0,1)$, для всех $x_1, x_2 \in X$ верно неравенство

$$\rho_2(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho_1(x_1, x_2).$$

Рассмотрим примеры сжимающих операторов.

1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем производную $f'(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$|f'(x)| \le \alpha < 1.$$

Тогда она в метрическом пространстве, образованным множеством действительных чисел, принадлежащих отрезку $[a,b]$, и расстоянием между ними $\rho(x,y) = |x-y|$ является сжимающим оператором.

Действительно, пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$. Тогда получим

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_1) - f(x_2)| =$$

►Применим теорему Лагранжа. Здесь $c \in (x_1, x_2)$.◄

$$= |f'(c)(x_1 - x_2)| \le \alpha\rho(x_1, x_2).$$

2. Рассмотрим метрическое пространство R^n, образованное множеством n-мерных векторов и расстоянием между векторами $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, определяемым формулой

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Пусть в нем задан оператор A, определяемый равенствами

$$y_i = b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Если выполняется условие

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1 \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

то данный оператор в данном метрическом пространстве будет сжимающим.

Докажем это. Пусть имеются произвольные n-мерные вектора $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$.

Рассмотрим

$$\rho(A\overline{u}, A\overline{v}) = \max_i \left| \left(b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} u_j \right) - \left(b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} v_j \right) \right| =$$

$$= \max_i \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} u_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} v_j \right| = \max_i \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \left(u_j - v_j \right) \right| \le$$

$$\le \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| \left| u_j - v_j \right| \le \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| \max_j \left| u_j - v_j \right| =$$

$$= \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \rho(\overline{u}, \overline{v}) = \rho(\overline{u}, \overline{v}) \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Отсюда следует, что оператор A будет сжимающим, если

$$\max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1.$$

Последнее влечет

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1 \ \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Рассмотрим метрическое пространство (M, ρ), образованное множеством функций $y(x)$, непрерывных на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и удовлетворяющих на этом отрезке неравенству

$$y_0 - \varepsilon \leq y(x) \leq y_0 + \varepsilon, \tag{2}$$

и расстоянием

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пусть в этом пространстве задан оператор

$$Ay(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

удовлетворяющий требованиям:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$;

2) функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то есть существует такое число $L>0$, что при всех $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ и при всех $y_1,y_2\in[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ выполняется неравенство

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|;$$

3) выполняется неравенство

$$N\delta\le\varepsilon,$$

где

$$N=\max_{\substack{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\\ y\in[y_0+\varepsilon,y_0+\varepsilon]}}|f(x,y)|;$$

4) выполняется неравенство

$$L\delta<1.$$

Тогда оператор A отображает данное метрическое пространство в себя и является сжимающим.

Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что если $y(x)\in M$, то и $Ay(x)\in M$.

Из свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом следует непрерывность функции $Ay(x)$.

Покажем, что функция $Ay(x)$ будет на отрезке $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ удовлетворять неравенству (2).

Для этого рассмотрим

$$|Ay(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(\tau,y(\tau))d\tau\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(\tau,y(\tau))|d\tau\right|\le$$

$$\le \max_{\substack{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\\ y\in[y_0+\varepsilon,y_0+\varepsilon]}} |f(x,y)| \left|\int_{x_0}^{x} d\tau\right| = N|x-x_0| \le N\delta \le \varepsilon .$$

Так как

$$|Ay(x)-y_0| \le \varepsilon ,$$

то функция $Ay(x)$ на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ удовлетворяет неравенству (2).

Таким образом, оператор A отображает данное метрическое пространство в себя.

Покажем, что оператор A является сжимающим.

Пусть $y_1(x), y_2(x) \in M$. Рассмотрим

$$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} \left| \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_1(\tau))d\tau \right) - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_2(\tau))d\tau \right) \right| =$$

$$= \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_2(\tau))d\tau \right| =$$

$$= \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))\right)d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} \left| \int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau \right| \le$$

►Используем условие Липшица.◄

$$\le \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} \left| \int_{x_0}^{x} L|y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\left|\int_{x_0}^{x} L \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}|y_1(\tau)-y_2(\tau)|d\tau\right| =$$

$$= \max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\left|\int_{x_0}^{x} L\rho(y_1,y_2)d\tau\right| = L\rho(y_1,y_2)\max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}\left|\int_{x_0}^{x} d\tau\right| =$$

$$= L\rho(y_1,y_2)\max_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]}|x-x_0| = L\delta\rho(y_1,y_2).$$

Так как $L\delta < 1$, то оператор A является сжимающим.

4. Рассмотрим в метрическом пространстве $C[a,b]$ $(a < b)$ оператор

$$Ay(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt,$$

удовлетворяющий требованиям:

1) функция $K(x,y)$ непрерывна в квадрате $x \in [a,b]$, $y \in [a,b]$;

2) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

3) выполняется неравенство

$$|\lambda| < \frac{1}{N(b-a)},$$

где

$$N = \max_{\substack{x\in[a,b]\\ y\in[a,b]}}|K(x,y)|.$$

Тогда оператор A отображает метрическое пространство $C[a,b]$ в себя и является сжимающим.

Из свойств определенного интеграла с параметром следует, что данный оператор отображает непрерывную функцию на непрерывную функцию, то есть $A : C[a,b] \to C[a,b]$.

Покажем, что оператор A является сжимающим.

Пусть $y_1(x), y_2(x) \in C[a,b]$. Рассмотрим

$$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max_{x\in[a,b]}\left|\left(f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)y_1(t)dt\right) - \left(f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)y_2(t)dt\right)\right| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]}\left|\lambda\int_a^b K(x,t)y_1(t)dt - \lambda\int_a^b K(x,t)y_2(t)dt\right| =$$

$$= |\lambda| \max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^b K(x,t)(y_1(t) - y_2(t))dt\right| \le |\lambda| \max_{x\in[a,b]}\int_a^b |K(x,t)||y_1(t) - y_2(t)|dt \le$$

$$\le |\lambda| \max_{x\in[a,b]}\int_a^b \max_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[a,b]}}|K(x,t)| \max_{t\in[a,b]}|y_1(t) - y_2(t)|dt = |\lambda| \max_{x\in[a,b]}\int_a^b N\rho(y_1, y_2)dt =$$

$$= |\lambda|N\rho(y_1, y_2)\int_a^b dt = |\lambda|N\rho(y_1, y_2)(b-a) = |\lambda|N(b-a)\rho(y_1, y_2).$$

Отсюда следует, что при

$$|\lambda| < \frac{1}{N(b-a)}$$

данный оператор является сжимающим.

1.4 Теорема Банаха о сжимающем операторе

Теорема 4. Пусть сжимающий оператор A отображает полное метрическое пространство (M,ρ) в себя, тогда операторное уравнение

$$x = Ax \tag{3}$$

имеет в этом пространстве единственное решение.

Доказательство.

1. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in M$ и рассмотрим последовательность

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ \ldots,\ x_{n+1} = Ax_n,\ \ldots$$

2. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в метрическом пространстве (M,ρ).

Так как оператор A является сжимающим оператором, то будем иметь:

1) $\rho(x_1,x_2)=\rho(Ax_0,Ax_1)\le\alpha\rho(x_0,x_1)$;

2) $\rho(x_2,x_3)=\rho(Ax_1,Ax_2)\le\alpha\rho(x_1,x_0)\le\alpha^2\rho(x_0,x_1)$;

3) $\rho(x_3,x_4)=\rho(Ax_2,Ax_3)\le\alpha\rho(x_2,x_3)\le\alpha^3\rho(x_0,x_1)$;

....

n) $\rho(x_n,x_{n+1})=\rho(Ax_{n-1},Ax_n)\le\alpha\rho(x_{n-1},x_n)\le\alpha^n\rho(x_0,x_1)$; (4)

....

Для доказательства фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ рассмотрим

$$\rho(x_n,x_{n+p})\le$$

►Используем неравенство (1).◄

$$\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \rho(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$

►Применив неравенство (4), получим◄

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) + \alpha^{n+1}\rho(x_0, x_1) + \alpha^{n+2}\rho(x_0, x_1) + \ldots + \alpha^{n+p-1}\rho(x_0, x_1) =$$

$$= \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots + \alpha^{n+p-1}\right)\rho(x_0, x_1) =$$

►Используем формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$◄

$$= \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в метрическом пространстве (M, ρ).

3. Так как последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в полном метрическом пространстве (M, ρ), то она в этом метрическом пространстве имеет предел, для которого введем обозначение x_*.

4. Докажем, что x_* является решением уравнения (3).

Для этого рассмотрим

$$\rho(x_*, Ax_*) \leq$$

►Используем неравенство (1).◄

$$\leq \rho(x_*, x_n) + \rho(x_n, Ax_*) =$$

$$= \rho(x_*, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_*) \leq$$

►Используем, что оператор A является сжимающим.◄

$$\leq \rho(x_*, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_*) \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{, так как } \{x_n\} \to x_*.$$

Так как $\rho(x_*, Ax_*) \to 0$ при $n \to \infty$, а $\rho(x_*, Ax_*)$ - число, не зависящее от n, то тогда $\rho(x_*, Ax_*) = 0$. Отсюда, по второй аксиоме определения метрического пространства имеем $x_* = Ax_*$.

Таким образом, x_* является решением уравнения (3).

5. Покажем, что x_* - единственное решение уравнения (3).

Предположим противное, то есть что существует x^* - другое решение уравнения (3).

Рассмотрим

$$\rho(x_*, x^*) =$$

►Так как x_*, x^* являются решениями уравнения (3), то тогда $x_* = Ax_*$, $x^* = Ax^*$.◄

$$= \rho(Ax_*, Ax^*) \leq$$

►Используем, что оператор A является сжимающим.◄

$$\leq \alpha\rho(x_*, x^*).$$

Из неравенств

$$\rho(x_*, x^*) \leq \alpha\rho(x_*, x^*),\ 0 < \alpha < 1,\ \rho(x_*, x^*) \geq 0$$

следует, что

$$\rho(x_*, x^*) = 0 .$$

Отсюда следует, что $x_* = x^*$.

Таким образом, получили противоречие с первоначальным предположением, что уравнение (3) имеет два различных решения.

Единственность решения доказана.

Теорема доказана.

Замечание. Доказательство данной теоремы содержит и метод решения уравнения (3). Достаточно взять любой элемент $x_0 \in M$ и последовательно находить

$$x_1 = Ax_0 ,\ x_2 = Ax_1 ,\ \ldots,\ x_{n+1} = Ax_n ,\ \ldots$$

Когда с нужной точностью получим $x_n \approx x_{n-1}$, то процесс нахождения новых приближений (итераций) можно прекратить и считать, что $x_* = x_n$.

Можно получить и априорную оценку необходимого количества приближений. Для этого достаточно в неравенстве

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1)$$

перейти к пределу при $p \to \infty$.

Тогда получим неравенство, оценивающее точность n-го приближения

$$\rho(x_n, x_*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1). \qquad (5)$$

2 Приложения теоремы Банаха

2.1 Алгебраические уравнения

Теорема 5. Пусть дано уравнение

$$x = f(x). \tag{6}$$

В котором функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям:

1) функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и отображает его в себя;

2) на отрезке $[a,b]$ существует производная $f'(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f'(x)| \le \alpha < 1.$$

Тогда уравнение (6) на отрезке $[a,b]$ имеет единственный корень x_*, который можно найти методом последовательных приближений:

1) x_0 - любая точка отрезка $[a,b]$ (целесообразнее взять его середину или предполагаемое из каких-либо соображений значение корня);

2) $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.

Доказательство.

Рассмотрим полное метрическое пространство, образованное множеством действительных чисел, принадлежащих отрезку $[a,b]$, и расстоянием между ними

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Из первого условия теоремы следует, что функция $f(x)$ отображает это полное метрическое пространство в себя, а из второго условия теоремы имеем, что она в этом метрическом пространстве является сжимающим оператором (см. п. 1.3).

Так как выполняются все условия теоремы 4, то тогда уравнение (6) имеет на отрезке $[a,b]$ единственный корень.

Теорема доказана.

Задача. Найти корень уравнения

$$x = 0{,}4\cos x,$$

принадлежащий отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ с точностью $\Delta = 10^{-3}$.

Решение.

1. Проверим выполнимость условий доказанной теоремы.

Функция $f(x) = 0{,}4\cos x$ определена на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и отображает его в отрезок $[0; 0{,}4]$. Отсюда следует, что она отображает отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ в себя.

Производная $f'(x) = -0{,}4\sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ удовлетворяет неравенству

$$|f'(x)| \le 0{,}4 .$$

Таким образом, все условия данной теоремы выполняются.

2. В качестве начального приближения можно взять любую точку отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Положим $x_0 = 0{,}7$.

Найдем первое приближение

$$x_1 = f(x_0) = 0{,}4\cos 0{,}7 \approx 0{,}3059 .$$

Оценим необходимое количество итераций по формуле (5). Получим

$$|x_n - x_*| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_0 - x_1| < \Delta,\ \frac{0{,}4^n}{1-0{,}4}|0{,}7 - 0{,}3059| < 10^{-3},$$

$$0{,}4^n < \frac{(1-0{,}4)\cdot 10^{-3}}{|0{,}7-0{,}3059|},\ 0{,}4^n < 0{,}001522...$$

Прологарифмируем последнее неравенство.

$$n \ln 0{,}4 < \ln 0{,}001522...$$

Разделив неравенство на $\ln 0{,}4$ (так как $\ln 0{,}4 < 0$, то знак неравенства меняется на противоположный), будем иметь

$$n > \frac{\ln 0{,}001522...}{\ln 0{,}4},\ n > 7{,}08...$$

Так как первое натуральное число, удовлетворяющее полученному неравенству, равно 8, то тогда для нахождения корня с нужной точностью требуется 8 итераций.

Выполнив их, получим:

$x_2 \approx 0{,}3814$; $x_3 \approx 0{,}3713$; $x_4 \approx 0{,}3727$; $x_5 \approx 0{,}3725$;

$x_6 \approx 0{,}3726$; $x_7 \approx 0{,}3726$; $x_8 \approx 0{,}3726$.

Тогда корень данного уравнения

$$x_* = 0{,}373 \pm 0{,}001.$$

Замечание. При решении данной задачи можно заметить, что уже приближение x_4 имеет необходимую точность. Оценка точности итераций с помощью неравенства (5) является довольно грубой. Практически удобнее использовать другие оценки, приводимые в курсах численных методов или вообще не использовать оценивание числа итераций, а проводить процесс их нахождения до тех пор, пока получаемые значения не будут примерно равны с заданной точностью.

2.2 Системы линейных уравнений

Теорема 6. Пусть дана система линейных уравнений вида

$$x_i = b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{7}$$

удовлетворяющая требованию

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Тогда данная система будет иметь единственное решение, которое можно будет найти методом последовательных приближений:

1) начальное приближение - любой вектор из R^n, предпочтительнее взять $\bar{x}_0 = (b_1, b_2, ..., b_n)$;

2) $x_i^{(k+1)} = b_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \quad (i = 1, 2, ..., n) \quad (k = 0, 1, 2, ...)$.

Доказательство.

Рассмотрим полное метрическое пространство, образованное множеством векторов n-мерного пространства R^n и расстоянием между векторами $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, определяемым формулой

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Из условия теоремы следует, что оператор, заданный равенствами (7) будет являться сжимающим (см. п. 1.3) тогда из теоремы 4 следует, что данная система будет иметь единственное решение, которое можно будет найти методом последовательных приближений.

Теорема доказана.

Задача. Найти решение данной системы линейных уравнений с точностью $\Delta = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 5{,}03x_1 + 0{,}61x_2 - 0{,}75x_3 = 7{,}26; \\ 0{,}54x_1 - 7{,}36x_2 + 0{,}43x_3 = 9{,}74; \\ -0{,}36x_1 + 0{,}49x_2 + 8{,}11x_3 = 6{,}93. \end{cases}$$

Решение.

1. Приведем данную систему к виду (7).

$$\begin{cases} 5{,}03x_1 = -0{,}61x_2 + 0{,}75x_3 + 7{,}26; \\ -7{,}36x_2 = -0{,}54x_1 - 0{,}43x_3 + 9{,}74; \\ 8{,}11x_3 = 0{,}36x_1 - 0{,}49x_2 + 6{,}93. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4433 - 0{,}1213x_2 + 0{,}1491x_3; \\ x_2 = -1{,}3234 + 0{,}0734x_1 + 0{,}0584x_3; \\ x_3 = 0{,}8545 + 0{,}0444x_1 - 0{,}0604x_2. \end{cases} \qquad (8)$$

Так как верны неравенства

$$|-0{,}1213| + |0{,}1491| < 1,\ |0{,}0734| + |0{,}0584| < 1,\ |0{,}0444| + |-0{,}0604| < 1,$$

то выполняется условие теоремы. Отсюда следует, что данная система имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

2. В качестве начального приближения можно взять любой вектор из R^3. Так как все коэффициенты, стоящие в правой части системы (8) малы по модулю, то можно предположить, что решения системы мало отличаются от свободных членов, поэтому в качестве начального приближения возьмем

$x_1^{(0)} = 1{,}4433;$

$x_2^{(0)} = -1{,}3234;$

$x_3^{(0)} = 0{,}8545.$

Последующие приближения будем находить с помощью равенств (8). Как только значения последующего приближения от значений предыдущего приближения будут отличаться на величину, по модулю меньшую чем $\Delta = 10^{-3}$, то прекратим процесс их вычисления. Для удобства полученными данными заполним таблицу 1. Кроме того, в таблицу будем вносить модули разностей последующего и предыдущего приближений

$$\Delta_i^{(k)} = \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, \dots).$$

Таблица 1 – последовательные приближения решения системы

k	0	1	2	3	4
x_1	1,4433	1,7312	1,7338	1,7307	1,7304
x_2	-1,3234	-1,1676	-1,1380	-1,1376	-1,1380
x_3	0,8545	0,9985	1,0019	1,0002	1,0001
Δ_1	-	0,2879	0,0026	0,0031	0,0003
Δ_2	-	0,1558	0,0295	0,0004	0,0003
Δ_3	-	0,1440	0,0034	0,0017	0,0002

Получили решение данной системы с заданной точностью

$x_1 = 1{,}730 \pm 0{,}001;$

$x_2 = -1{,}138 \pm 0{,}001;$

$x_3 = 1{,}000 \pm 0{,}001$.

Замечание. Очевидно, что решать данную систему целесообразно другими методами. Однако для систем линейных уравнений с большим количеством уравнений (порядка тысяч) метод последовательных приближений наиболее эффективен.

2.3 Задача Коши для ОДУ первого порядка

Теорема 7. Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

удовлетворяющая требованиям:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$;

2) функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то есть существует такое число $L > 0$, что при всех $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и при всех $y_1, y_2 \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|;$$

3) выполняется неравенство

$$N\delta \le \varepsilon,$$

где

$$N = \max_{\substack{x\in[x_0-\delta, x_0+\delta] \\ y\in[y_0+\varepsilon, y_0+\varepsilon]}} |f(x,y)|;$$

4) выполняется неравенство

$$L\delta < 1.$$

Тогда на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ данная задача Коши имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений:

1) $y_0(x)$ - любая функция из M (целесообразнее взять $y_0(x) = y_0$);

2) $y_{n+1}(x) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau))d\tau \quad (n = 0, 1, 2, ...)$.

Доказательство.

1. Проинтегрировав уравнение

$$y'(\tau) = f(\tau, y(\tau))$$

от x_0 до x, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} y'(\tau)d\tau = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad y(\tau)\Big|_{x_0}^{x} = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad y(x) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau. \quad (9)$$

Получили интегральное уравнение, которому эквивалентна данная задача Коши.

2. Рассмотрим оператор

$$Ay(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

в полном метрическом пространстве образованном множеством функций $y(x)$, непрерывных на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и удовлетворяющих на этом отрезке неравенству

$$y_0 - \varepsilon \le y(x) \le y_0 + \varepsilon ,$$

и расстоянием

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| .$$

Как показано в п. 1.3, оператор A отображает рассматриваемое метрическое пространство в себя и является сжимающим. Тогда из теоремы 4 следует, что интегральное уравнение (9) и данная задача Коши имеют единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

Теорема доказана.

Замечание. Можно показать, что если частная производная $f'_y(x, y)$ ограничена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, то в этой окрестности функция $f(x, y)$ будет удовлетворять условию Липшица.

Задача. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

методом последовательных приближений. В качестве ответа дать третье приближение $y = y_3(x)$.

Решение.

1. Функция $f(x,y)=y$ непрерывна, а ее частная производная $f'_y(x,y)=1$ ограниченна всюду на R^2. Отсюда следует, что данная задача имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

2. В качестве начального приближения возьмем

$$y_0(x)=1.$$

Найдем последовательные приближения:

1) $y_1(x)=1+\int_0^x 1d\tau=1+x$;

2) $y_2(x)=1+\int_0^x (1+\tau)d\tau=1+x+\frac{x^2}{2}$;

3) $y_3(x)=1+\int_0^x \left(1+\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Замечание. Данная задача Коши имеет очевидное решение $y=e^x$. n-ое последовательное приближение будет представлять собой соответствующую частичную сумму разложения функции $y=e^x$ в степенной ряд.

2.4 Интегральные уравнения

Теорема 8. Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (10)$$

удовлетворяющее требованиям:

1) функция $K(x,t)$ непрерывна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$;

2) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

3) выполняется неравенство

$$|\lambda| < \frac{1}{N(b-a)},$$

где

$$N = \max_{\substack{x\in[a,b]\\ t\in[a,b]}} |K(x,t)|.$$

Тогда на отрезке $[a,b]$ данное интегральное уравнение имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений:

1) $y_0(x)$ - любая функция из $C[a,b]$ (целесообразнее взять $y_0(x) = f(x)$);

2) $y_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) y_n(t)dt \ \ (n = 0, 1, 2, ...)$.

Доказательство.

Рассмотрим оператор

$$Ay(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t) y(t)dt$$

в полном метрическом пространстве $C[a,b]$.

Как показано в п. 1.3, оператор A отображает полное метрическое пространство $C[a,b]$ в себя и является сжимающим. Тогда из теоремы 4 следует, что интегральное уравнение (10) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений.

Теорема доказана.

Задача. Решите уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 xt^2 y(t)dt$$

методом последовательных приближений. В качестве ответа дать третье приближение $y = y_3(x)$.

Решение.

1. Функция $K(x,t) = xt^2$ является непрерывной в квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

В данном случае

$$N = \max_{\substack{x\in[0,1]\\ y\in[0,1]}} \left|xt^2\right| = 1$$

и выполняется неравенство

$$|\lambda| < \frac{1}{N(b-a)}.$$

Тогда данное уравнение можно решить методом последовательных приближений.

2. В качестве начального приближения возьмем $y_0(x) = 1$.

Найдем последовательные приближения:

1) $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 xt^2 \cdot 1dt = 1 + \frac{1}{6}x$;

2) $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 xt^2\left(1 + \frac{1}{6}t\right)dt = 1 + \frac{3}{16}x$;

3) $y_3(x)=1+\frac{1}{2}\int_0^1 xt^2\left(1+\frac{3}{16}t\right)dt=1+\frac{73}{384}x$.

Замечание. Данное уравнение имеет решение $y(x)=1+\frac{4}{21}x$. Можно показать, что $y_n(x)\to y(x)$ на отрезке $[0,1]$ при $n\to\infty$.

Список использованных источников

1 Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

2 Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1976 – 496 с.

3 Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. 2-е изд. - М.: Наука, 1965. - 520 с.

4 Вулих, Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. 2-е изд. - М.: Наука, 1967. – 416 с.

5 Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. Т. 5. - М.: ГИФМЛ, 1959. – 655 с.

6 Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. - М.: Мир, 1975. - 449 с.