

Министерство образования и науки Российской Федерации

Бузулукский гуманитарно-технологический институт  
(филиал) федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра промышленного и гражданского строительства

*А.В. Власов*

## **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом  
федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет» в качестве  
методических указаний для студентов, обучающихся по программам  
высшего профессионального образования по специальности  
270102.65 Промышленное и гражданское строительство

Оренбург  
2013

УДК 69.04  
ББК 38.112  
В58

Рецензент

доцент кафедры сопротивления материалов ОГУ П.Н. Ельчанинов

В58

**Власов, А.В.**

Строительная механика: методические указания к расчётно-графической работе / А.В. Власов; Бузулукский гуманитарно-технологический институт (филиал) Оренбургского государственного университета – Бузулук : БГТИ (филиал) ОГУ, 2013. – 39с.

Методические указания предназначены для проведения расчётно-графической работы на тему «Расчёт плоской статически неопределимой рамы методом сил» по дисциплине «Строительная механика» для студентов специальности 270102.65 «Промышленное и гражданское строительство».

Целью работы является закрепление теоретических знаний студентов.

ББК 38.112  
УДК 69.04

© Власов А.В., 2013  
© БГТИ (филиал) ОГУ, 2013

## Содержание

Введение.....	4
1 Общая часть. Расчет сооружений методом сил.....	5
1.1 Алгоритм расчёта методом сил.....	6
1.2 Определение степени статической неопределимости.....	7
1.3 Выбор основной системы метода сил (ОСМС).....	9
1.4 Канонические уравнения метода сил.....	11
1.5 Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы канонических уравнений.....	13
1.6 Построение суммарной единичной эпюры и выполнение проверки правильности вычислений перемещений.....	13
1.7 Построение окончательных эпюр $M_{ок}$ , $N_{ок}$ , $Q_{ок}$ .....	14
1.8 Статическая проверка решения задачи.....	16
2 Пример решения задачи методом сил.....	17
3 Контрольные задания к расчётно-графической работе.....	33
Список использованных источников.....	39

## Введение

Прежде чем приступить к выполнению расчётно-графической работы необходимо изучить методические указания и разобрать рекомендованную задачу. В противном случае при выполнении расчётно-графической работы могут возникнуть большие затруднения.

Несамостоятельное выполнение контрольной работы не дает возможности преподавателю-рецензенту вовремя заметить недочеты в подготовке студента, в результате чего студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену.

Запрещается выполнение расчётно-графической работы при помощи ЭВМ (специализированных компьютерных программ).

Получив после рецензирования работу, студент обязан выполнить все указанные преподавателем исправления и дополнения, даже если работа допущена к зачету. В случае доработки работы необходимо внести требуемые исправления на том же листе (если позволяет место) или на отдельном и представить всю работу целиком на повторную рецензию. Нельзя стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки.

Рекомендуется каждому студенту тщательным образом изучить общие требования и правила оформления студенческих работ СТО 02069024.101 – 2010.

## 1 Общая часть. Расчет сооружений методом сил

Под статически неопределимой системой понимается такая геометрически неизменяемая система, в которой внутренние усилия или опорные реакции, или те и другие не могут быть найдены только из уравнений статического равновесия. Такие системы содержат так называемые лишние (избыточные) связи, удаление которых не нарушает геометрической неизменяемости и неподвижности. Количество (число) лишних связей, будем называть степенью статической неопределимости системы.

### *Основные свойства статически неопределимых систем*

1. В статически неопределимых системах от теплового воздействия, смещения опор, неточности изготовления отдельных элементов, как правило, возникают внутренние усилия и опорные реакции. Эпюры внутренних усилий в этом случае будут прямолинейными.

2. Реакции и усилия в элементах статически неопределимых систем зависят от соотношений между поперечными размерами отдельных элементов, а также от модулей упругости материалов сооружения, в случае если элементы системы изготовлены из различных материалов. Поэтому перед расчетом таких систем необходимо задаваться жесткостными характеристиками элементов ( $EI$ ,  $EA$ ,  $GA$ ) или их соотношениями.

3. В статически неопределимых системах усилия в абсолютно необходимых связях всегда статически определимы.

4. Статически неопределимая система, находящаяся под внешним воздействием, допускает бесконечное множество решений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, но только одно из них будет соответствовать тем условиям, которые накладываются на перемещения с помощью лишних связей. Статически определимая система допускает, как известно, только одно решение, удовлетворяющее условиям равновесия, как всей системы, так и отдельных ее частей.

5. В таких системах, в отличие от соответствующих им статически определимых, при действии одинаковых нагрузок возникают меньшие внутренние усилия, деформации и перемещения, к тому же они имеют в большинстве случаев более равномерное распределение.

6. Статически неопределимые системы, в противоположность статически определимым, обладают большей «живучестью», надежностью, так как разрушение части системы не всегда приводит к разрушению всего сооружения.

**Основными методами расчета статически неопределимых систем являются:**

1. Метод сил. Здесь в качестве неизвестных рассматриваются усилия - силы и моменты.

2. Метод перемещений. Неизвестными являются деформационные факторы - углы поворота узлов и их линейные перемещения.

3. Смешанный метод. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть - перемещения.

4. Комбинированный метод. Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую - методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

### **1.1 Алгоритм расчёта методом сил**

Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Записать систему канонических уравнений.

4. Построить эпюры изгибающих моментов для единичных состояний основной системы и эпюру для грузового состояния.
5. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений (единичные и грузовые перемещения).
6. Построить суммарную единичную эпюру.
7. Выполнить проверку правильности вычислений при определении единичных и грузовых перемещений.
8. Решить систему канонических уравнений (нахождение неизвестных усилий).
9. Вычислить и построить окончательную эпюру изгибающих моментов.
10. Провести кинематическую (деформационную) проверку окончательной эпюры изгибающих моментов.
11. Вычислить и построить окончательные эпюры поперечных и продольных сил.
12. Выполнить статическую проверку (для рам).

Не все пункты приведенного алгоритма являются, безусловно, необходимыми, однако они позволяют контролировать правильность выполнения расчета. Для систем с одной лишней связью пункты 6 и 7 просто лишены смысла, так как в этом случае суммарная единичная эпюра совпадает с единичной.

Остановимся подробнее на некоторых из вышеперечисленных этапов расчета.

## **1.2 Определение степени статической неопределимости**

Расчет статически неопределимой системы начинается с анализа ее схемы. Анализ необходим, прежде всего, для того, чтобы установить степень статической неопределимости.

*Степень статической неопределимости равна* числу так называемых лишних связей, удаление которых превращает статически неопределимую систему в определимую и геометрически неизменяемую систему.

Для конструкций со сложным внутренним образованием можно указать на следующий общий прием определения степени статической неопределимости:

$$S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3, \quad (1)$$

где  $n$  – степень статической неопределимости системы;

$K$  – число замкнутых контуров;

$C_{\text{опор}}$  – число опорных стержней;

$n$  – число простых (кратных) шарниров;

3 – число уравнений статики.

Кратность шарнира определяется по формуле:

$$n = m - 1, \quad (2)$$

где  $m$  – количество стержней (дисков).

Рассмотрим ряд примеров по определению степени статической неопределимости.

Пример 1 – (Рисунок 1),  $S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3 = 0 + 8 - 0 - 3 = 5$ . Система пять раз статически неопределима.

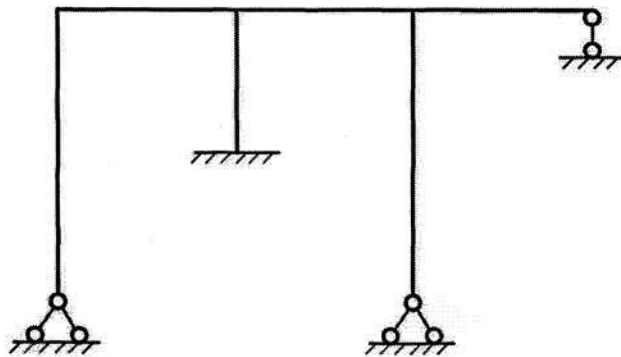


Рисунок 1 – Трехпролетная рама

Пример 2 – (Рисунок 2),  $S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3 = 3 + 3 - 2 - 3 = 1$ . Система один раз статически неопределима.



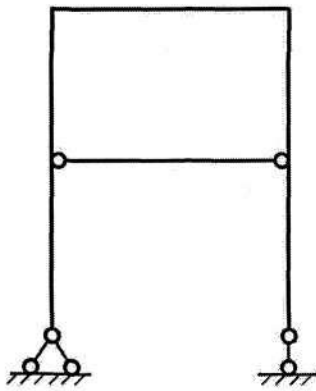


Рисунок 2 – Двухопорная рама с повышенной затяжкой

Пример 3 – (Рисунок 3, а),  $S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3 = 3 + 3 - 0 - 3 = 3$ . Система три раза статически неопределима.

Пример 4 – (Рисунок 3, б),  $S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3 = 3 + 4 - 0 - 3 = 4$ . Система четыре раза статически неопределима.

Пример 5 – (Рисунок 3, в),  $S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3 = 3 + 6 - 2 - 3 = 4$ . Система четыре раза статически неопределима.

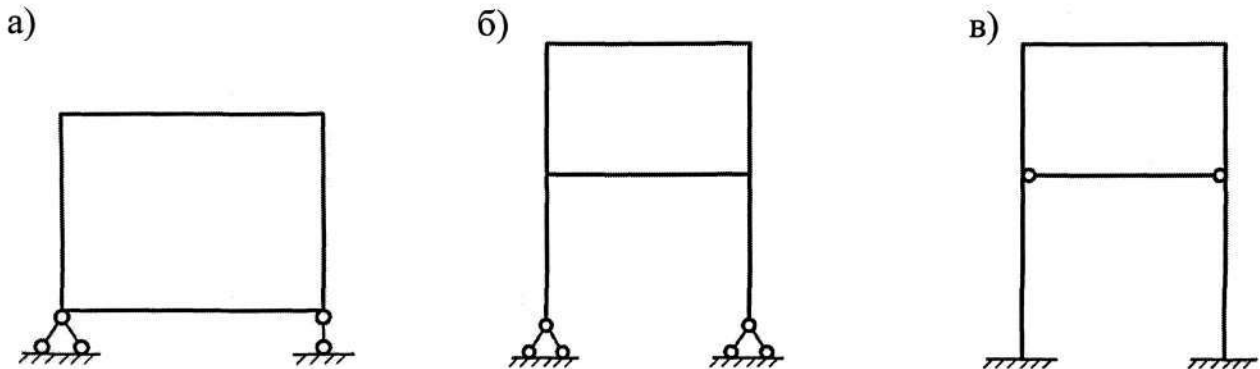


Рисунок 3 – Рамы с замкнутыми контурами

### 1.3 Выбор основной системы метода сил (ОСМС)

Основной системой называется такая геометрически неизменяемая стержневая система, которая получается из заданной статически неопределимой путём отбрасывания всех или части лишних связей.

При расчете рам большое значение имеет выбор основной системы. Удачный выбор основной системы может значительно сократить объем расчетной работы и

тем самым облегчить решение задачи. Надо таким образом отбросить лишние связи, чтобы основная система была эквивалентна заданной, для этого необходимо приложить заданную внешнюю нагрузку и неизвестные усилия  $X_i$  в направлении отброшенных связей.

Рассмотрим возможные способы удаления лишних связей, что и определяет вид основной системы.

1. Отбрасывание лишних связей осуществляется полным удалением некоторых опор или их заменой опорами с меньшим числом связей. Реакции, действующие в направлениях отброшенных связей, являются лишними неизвестными. На рисунке 4, б, в, г показаны различные варианты основной системы, полученные этим способом для рамы (рисунок 4,а).

2. Постановка шарниров в промежуточных сечениях стержней позволяет в каждом таком сечении установить связь, соответствующую изгибающему моменту. Эти моменты являются лишними неизвестными. Для рамы, имеющей степень статической неопределимости  $S=3$  (рисунок 5,а), при выборе основной системы необходимо поставить три шарнира. Положение этих шарниров может быть произвольным, но удовлетворяющим требованию геометрической неизменяемости системы (рисунок 5,б).

3. Рассечение стержня устраняет три связи, соответствующие внутренним усилиям  $M, Q, N$  (рисунок 5,в).

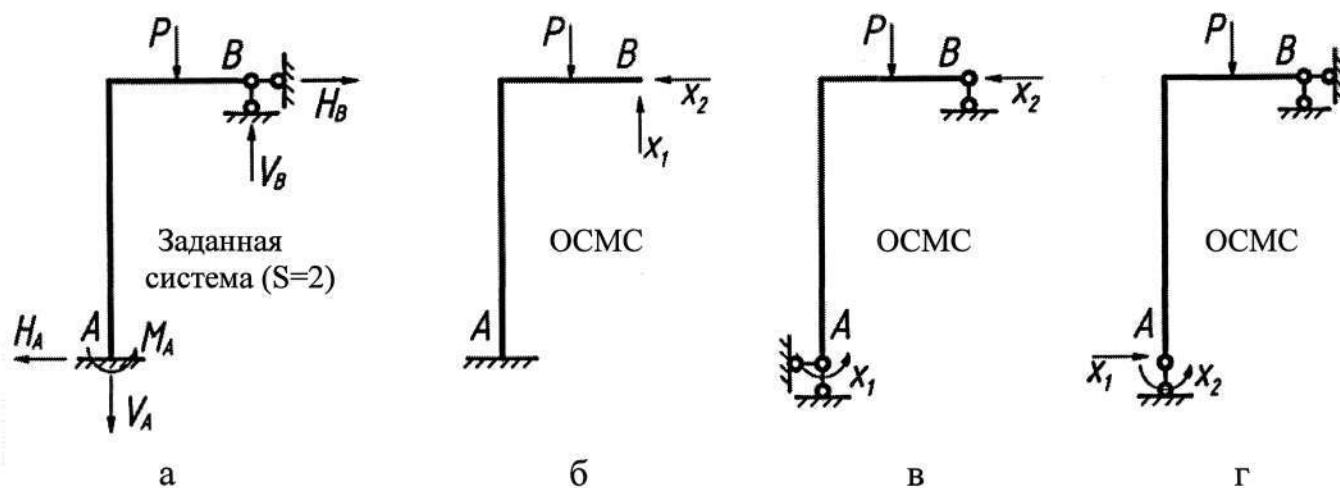


Рисунок 4 – Способы удаления лишних связей (правило – 1)

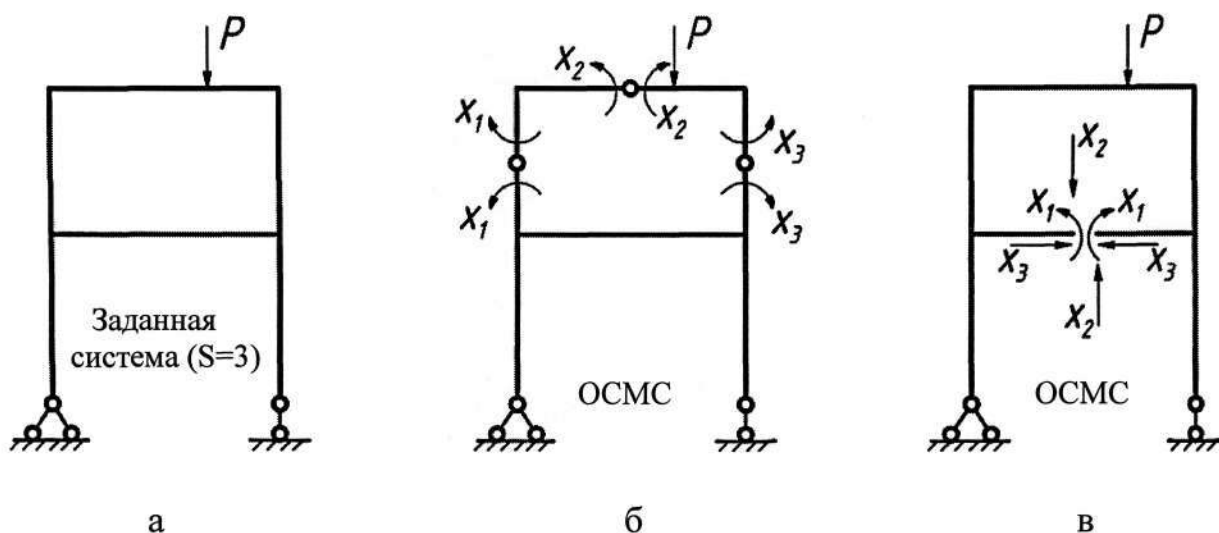


Рисунок 5 – Способы удаления лишних связей (правило – 2,3)

Среди связей статически неопределимой системы различают абсолютно необходимые и условно необходимые. К абсолютно необходимым относятся связи, при удалении которых система становится геометрически изменяемой. Для абсолютно необходимой связи характерна статическая определенность усилия в ней, т.е. реакция такой связи может быть вычислена из условия равновесия. При выборе основной системы абсолютно необходимые связи отбрасывать нельзя.

Связи, при удалении которых система продолжает оставаться геометрически неизменяемой, называются условно необходимыми. Система, у которой удалили такую связь, может являться основной системой метода сил.

#### 1.4 Канонические уравнения метода сил

Идея метода сил: канонические уравнения метода сил отрицают наличие перемещений по направлению удаленных связей в основной системе. Уравнений столько, сколько лишних связей, столько неизвестных усилий  $X_i$ .

Система канонических уравнений метода сил для нахождения неизвестных может быть записана в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n + \Delta_{3P} &= 0; \\ \dots & \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Все перемещения, обозначенные буквой  $\delta$ , называются единичными перемещениями. Так,  $\delta_{ik}$  - перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по ее направлению от действия силы  $X_k = 1$ ;  $\delta_{ii}$  - перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по ее направлению от действия силы  $X_i = 1$ ;  $\Delta_{iP}$  - перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по ее направлению от действия заданной нагрузки.

Первый индекс «i» – означает «адрес» перемещения. Второй индекс «k», «P» – означает «причину» перемещения (от какого воздействия).

Коэффициенты с одинаковыми индексами, расположенные на главной диагонали системы, называются главными коэффициентами. Они всегда положительны и не равны нулю.

Все остальные коэффициенты этой системы называются побочными. Они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Чем больше побочных коэффициентов обратится в ноль, тем более удачной является выбранная основная система.

На основании теоремы Максвелла о взаимности перемещений между побочными коэффициентами с обратными индексами выполняется следующее соотношение:  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ .

## 1.5 Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены вычисляются по формуле Максвелла - Мора с использованием правила Верещагина или с помощью формулы Симпсона.

При расчете рам и балок учитываются только изгибающие моменты:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} dx; \quad \delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx; \quad \Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx \quad (3)$$

где  $\bar{M}_i$  – эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия на нее силы  $X_i = 1$ ;

$\bar{M}_k$  – эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия на нее силы  $X_k = 1$ ;

$M_p$  – эпюра изгибающих моментов сил, построенные в основной системе от действия заданной силовой нагрузки.

Эпюры  $\bar{M}_k, \bar{M}_i$  называются единичными эпюрами, а эпюра  $M_p$  – грузовой.

## 1.6 Построение суммарной единичной эпюры и выполнение проверки правильности вычислений перемещений

Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членах для основной системы, содержащей два и более неизвестных, представляет собой довольно трудоемкий процесс и при ручном счете нередко приводит к ошибкам в окончательных результатах расчета. Во избежание этих ошибок рекомендуется заранее проводить проверку правильности вычислений перемещений. Для этого надо построить так называемую суммарную единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_s$  в основной системе при одновременном действии на нее всех неизвестных, равных по единице. Эту же эпюру  $\bar{M}_s$  можно получить и путем алгебраического сложения построенных ранее единичных эпюр по формуле:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \dots + \bar{M}_n. \quad (4)$$

Алгебраическую сумму всех коэффициентов, можно представить так:

$$\sum \delta = \delta_{ss} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}, \quad (5)$$

с другой стороны, эта же сумма может быть вычислена путем перемножения суммарной единичной эпюры  $\bar{M}_s$  самой на себя:

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s^2}{EI} dx. \quad (6)$$

Проверка свободных членов уравнений состоит в том, что их сумма  $\sum \Delta$  должна быть равна величине  $\Delta_{sp}$ .

$$\sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p}; \quad (7)$$

$$\Delta_{SP} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_p}{EI} \cdot dx. \quad (8)$$

### 1.7 Построение окончательных эпюр $M_{ок}$ , $N_{ок}$ , $Q_{ок}$

Эпюры изгибающих моментов можно построить двумя способами. По первому способу найденные значения сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и заданную силовую нагрузку прикладывают к основной системе. Поскольку основная система является статически определимой, после вычисления опорных реакций по уравнениям статики построение окончательной эпюры  $M_{ок}$  не вызывает особых затруднений. По второму способу на основании принципа суперпозиции окончательная эпюра изгибающих моментов строится как алгебраическая сумма исправленных единичных эпюр  $\bar{M}_i X_i$  с грузовой эпюрой  $M_p$ :

$$M_{ок} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_p. \quad (9)$$

Эпюру поперечных сил строят по окончательной эпюре изгибающих моментов по формуле Журавского:

$$Q_{ок} = Q_o + \frac{M_{пр} - M_{лев}}{l}, \quad (10)$$

где  $Q_o$  – балочная поперечная сила;

$M_{пр}$  и  $M_{лев}$  – соответственно значения правого и левого изгибающих моментов на участке системы.

Окончательно эпюру продольных сил  $N_{ок}$  строят по эпюре  $Q_{ок}$  способом вырезания узлов.

Прежде чем переходить к построению эпюр  $Q_{ок}$  и  $N_{ок}$ , надо выполнить кинематическую (деформационную) проверку правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

Перемещения основной, а также заданной системы от совместного действия неизвестных и нагрузки по направлению любого неизвестного должны быть равны нулю, потому что в заданной системе эти перемещения невозможны из-за наличия связей. Так как результатом совместного действия неизвестных и нагрузки является окончательная эпюра изгибающих моментов  $M_{ок}$  (первый способ построения эпюры  $M_{ок}$ ), перемножение ее с любой единичной эпюрой  $\bar{M}_i$ , должно каждый раз приводить к нулю:

$$\sum \int \frac{M_{ок} \bar{M}_i}{EI} dx = 0. \quad (11)$$

Если единичных эпюр моментов много, то вместо перемножения окончательной эпюры  $M_{ок}$  со всеми эпюрами  $\bar{M}_i$  достаточно произвести одно перемножение с суммарной единичной эпюрой  $\bar{M}_s$ , по формуле:

$$\sum \int \frac{M_{ок} \bar{M}_s}{EI} dx = 0. \quad (12)$$

Нулевой результат кинематической проверки является достаточным условием правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

Относительная погрешность в общем случае определяется по известной формуле:

$$\varepsilon = \frac{|A - B|}{\min\{A, B\}} \cdot 100\% \leq 1\%, \quad (13)$$

где  $A$  – сумма слагаемых с положительным знаком;

$B$  – сумма по абсолютной величине слагаемых с отрицательным знаком;

$\min\{A, B\}$  — наименьшее значение по абсолютной величине из двух сумм  $A$  и  $B$ .

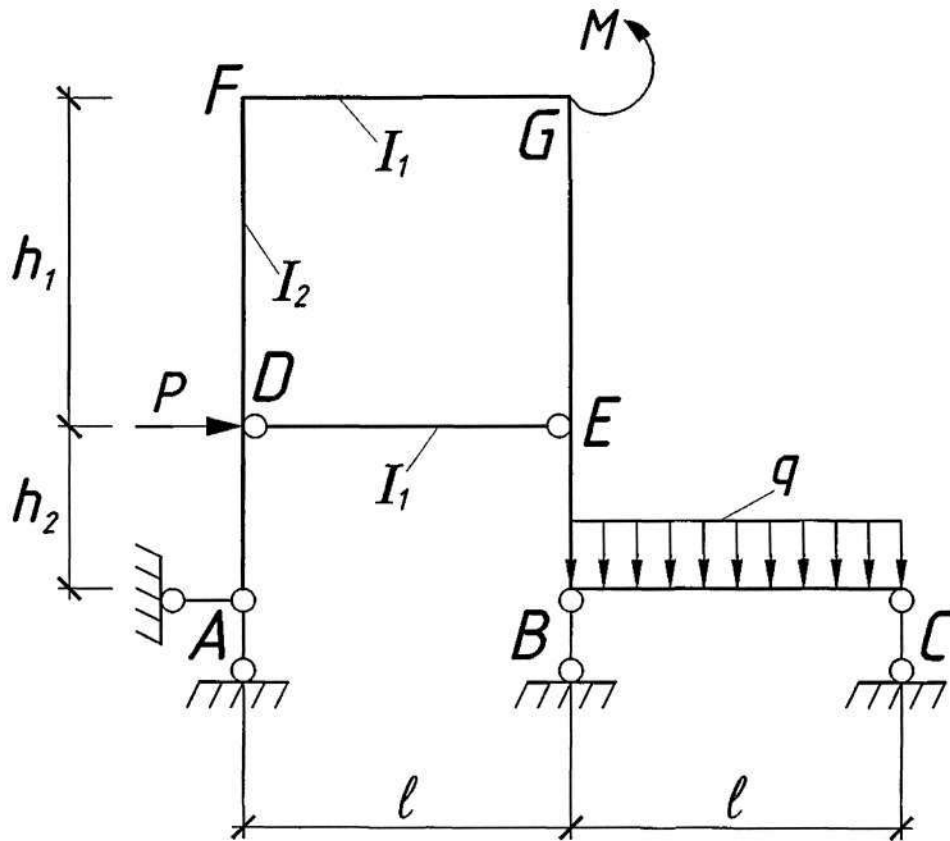
### 1.8 Статическая проверка решения задачи

Проверка эпюр  $M_{ок}$ ,  $Q_{ок}$  и  $N_{ок}$  состоит в проверке условий, согласно которым любая отсеченная часть системы должна находиться в равновесии под действием нагрузки и приложенных в местах разреза сил, т.е. должны выполняться условия статического равновесия:  $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ;  $\sum M_k = 0$  (для рам).



## 2 Пример решения задачи методом сил

Задание: для статически неопределимой рамы методом сил построить эпюры  $M_{ок}$ ,  $Q_{ок}$ ,  $N_{ок}$  и проверить правильность их построения.



$$P = 9 \text{ кН}; q = 2 \text{ кН/м}; M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; l = 6 \text{ м}; h_1 = 6 \text{ м}; h_2 = 3 \text{ м}; \frac{I_1}{I_2} = \frac{2}{3}$$

Решение:

1 Определяем степень статической неопределимости рамы по формуле (1):

$$S = 3K + C_{\text{опор}} - n - 3,$$

где  $K = 1$ ;

$n = 2$ ;

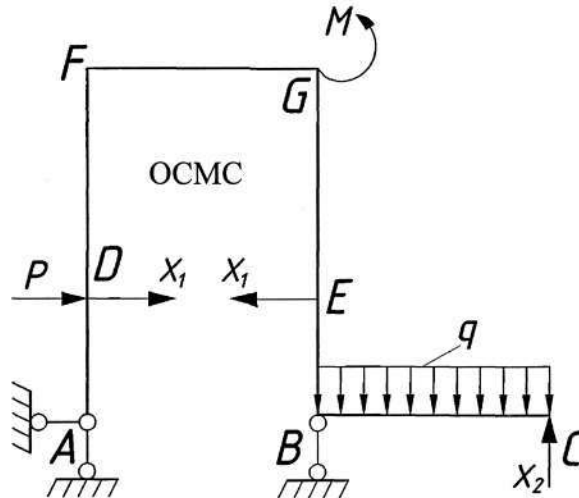
$C_{\text{опор}} = 4$ .

$$S = 3 \cdot 1 + 4 - 2 - 3 = 2$$

Рама 2 раза статически неопределима.

## 2 Выбор основной системы метода сил (ОСМС)

Основную систему образуем, убрав одну опорную связь и добавив муфту. Заменяем их действие двумя неизвестными силами  $X_1$  и  $X_2$ . Неизвестные силы  $X_1$  приложим не в крайних точках малого зазора, а в точках прикрепления ферменного элемента и силу  $X_2$  вместо внешней опорной связи в точке  $C$ .



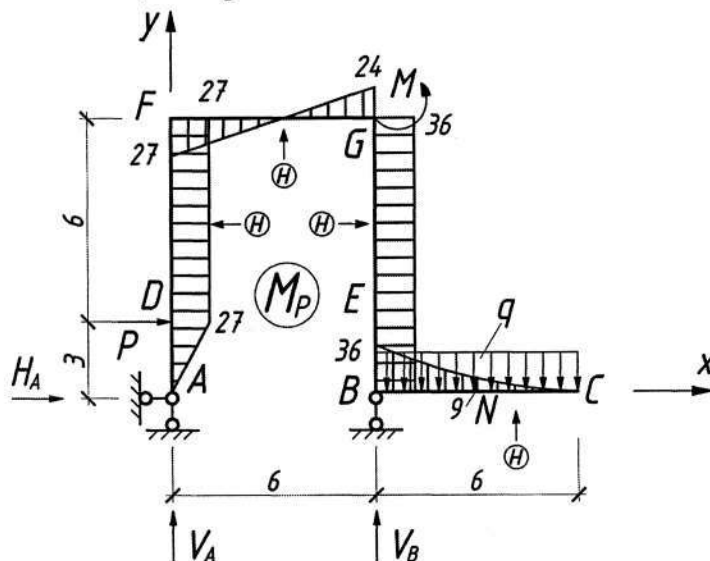
## 3 Составляем систему канонических уравнений метода сил

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

## 4 Построение грузовой эпюры моментов

Значения ординат моментов откладываем со стороны растянутых волокон.

Эпюра  $M_P$ .



Примечание: Поместим мысленно внутри рамы наблюдателя ( $\odot \rightarrow$ ), последовательно поворачивающегося лицом к каждому стержню, полученные положительные значения изгибающих моментов в характерных сечениях откладываем вниз (к наблюдателю) от оси стержня, отрицательные – вверх (от наблюдателя).

#### 4.1 Определяем опорные реакции от заданной нагрузки

$$1) \Sigma M_B = 0;$$

$$-M + V_A \cdot 6 + P \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$V_A = \frac{-9 \cdot 3 - 36 + 12}{6} = -8,5 \text{ кН};$$

$$2) \Sigma M_A = 0;$$

$$-M - V_B \cdot 6 + P \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 9 = 0;$$

$$V_B = \frac{-12 + 2 \cdot 6 \cdot 9 + 9 \cdot 3}{6} = 20,5 \text{ кН};$$

$$3) \Sigma X = 0;$$

$$H_A + P = 0;$$

$$H_A = -9 \text{ кН}.$$

$$4) \text{ Проверка } \Sigma Y = 0;$$

$$V_A + V_B - q \cdot 6 = 0;$$

$$-8,5 + 20,5 - 2 \cdot 6 = 0;$$

0=0 – проверка выполняется.

#### 4.2 Определяем изгибающие моменты

Участок AD:

$$M_A = 0;$$

$$M_D = -H_A \cdot 3 = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок DF:

$$M_D = 27 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_F = -H_A \cdot 9 - P \cdot 6 = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок FG:

$$M_F = 27 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M'_G = -H_A \cdot 9 - P \cdot 6 + V_A \cdot 6 = -24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок GB:

$$M_G = M'_G - M = -24 - 12 = -36 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_B = P \cdot 3 + V_A \cdot 6 - M = -36 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок BNC:

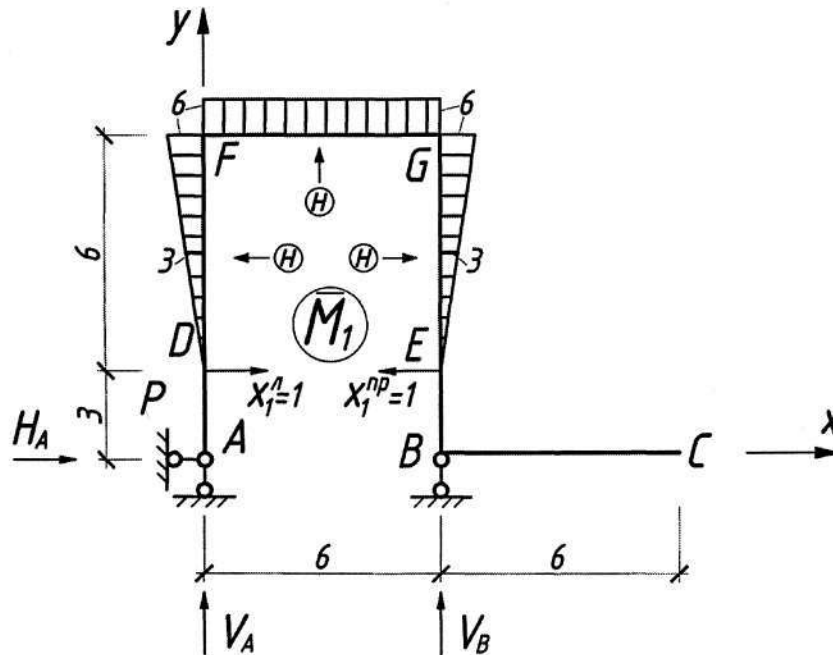
$$M_B = -36 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_N = -q \cdot 3 \cdot 1,5 = 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C = 0.$$

5 Строим единичные эпюры моментов ( $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ )

Эпюра  $\bar{M}_1$ .



5.1 Определяем опорные реакции:

$$1) \Sigma M_A = 0;$$

$$-V_B \cdot 6 - \bar{x}_1^n \cdot 3 - \bar{x}_1^{np} \cdot 3 = 0,$$

$$V_B = \frac{-\bar{x}_1^n \cdot 3 - \bar{x}_1^{np} \cdot 3}{6} = 0.$$

$$2) V_A = 0.$$

$$3) \Sigma X = 0;$$

$$\bar{x}_1^n - \bar{x}_1^{np} + H_A = 0,$$

$$H_A = 0 \text{ кН.}$$

4) Проверка  $\Sigma Y = 0$ ;

$$V_A + V_B = 0;$$

$0=0$  – проверка выполняется.

5.2 Определяем изгибающие моменты:

Участок AD:

$$\bar{M}_A = 0;$$

$$\bar{M}_D = 0.$$

Участок DF:

$$\bar{M}_D = 0;$$

$$\bar{M}_F = -\bar{x}_1^n \cdot 6 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Участок FG:

$$\bar{M}_F = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}_G = -6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок GE:

$$\bar{M}_G = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}_E = 0.$$

Участок EB:

$$\bar{M}_E = 0;$$

$$\bar{M}_B = 0.$$

Участок BC:

$$\bar{M}_B = 0;$$

$$\bar{M}_C = 0.$$

Эпюра  $\bar{M}_2$ .

5.3 Определяем опорные реакции:

$$1) \Sigma M_A = 0;$$

$$-V_B \cdot 6 - \bar{x}_2 \cdot 12 = 0;$$

$$V_B = \frac{-\bar{x}_2 \cdot 12}{6} = -2 \text{ кН}$$

$$2) \Sigma M_B = 0;$$

$$V_A \cdot 6 - \bar{x}_2 \cdot 6 = 0;$$

$$V_A = \frac{\bar{x}_2 \cdot 6}{6} = 1 \text{ кН}$$

$$3) \Sigma X = 0;$$

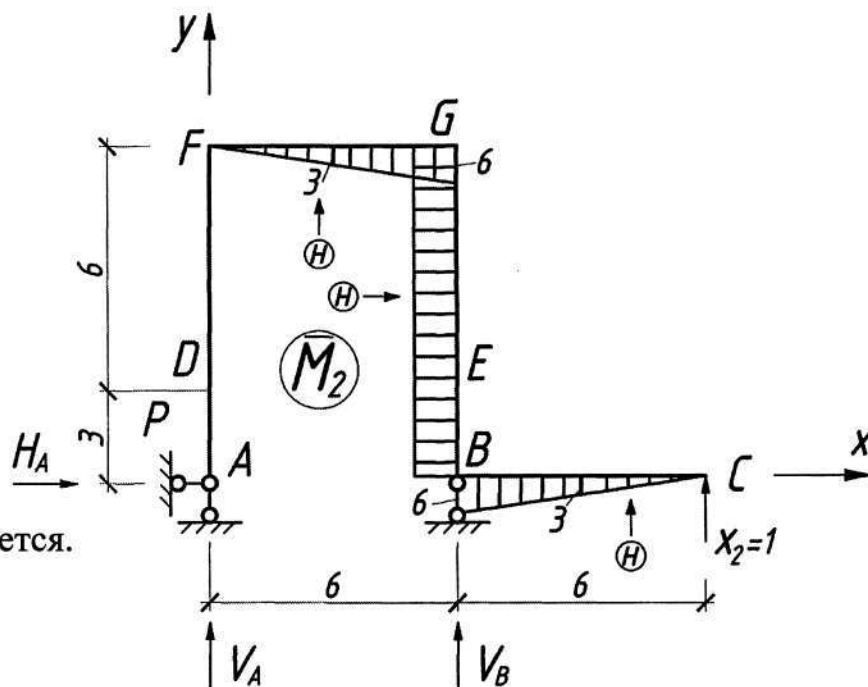
$$H_A = 0.$$

$$4) \text{ Проверка } \Sigma Y = 0;$$

$$V_A + V_B + \bar{x}_2 = 0;$$

$$1 - 2 + 1 = 0;$$

$0=0$  – проверка выполняется.



#### 5.4 Определяем изгибающие моменты:

Участок AD:

$$\bar{M}_A = 0;$$

$$\bar{M}_D = 0.$$

Участок DF:

$$\bar{M}_D = 0;$$

$$\bar{M}_F = 0.$$

Участок FG:

$$\bar{M}_F = 0;$$

$$\bar{M}_G = V_A \cdot 6 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок GB:

$$\bar{M}_G = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}_B = V_A \cdot 6 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок BC:

$$\bar{M}_B = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

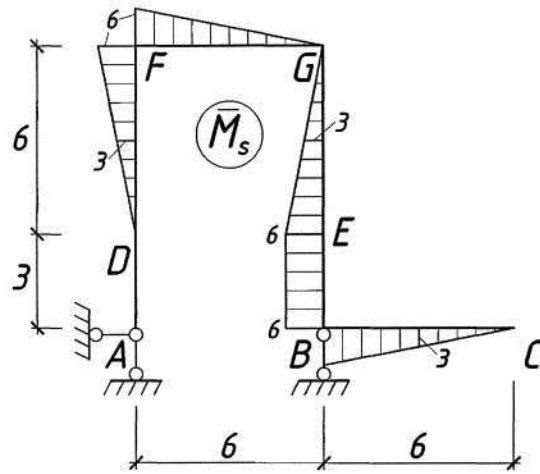
$$\bar{M}_C = 0.$$

## 6 Построение суммарной эпюры моментов

Эпюру  $\bar{M}_S$  можно получить путем алгебраического сложения построенных ранее единичных эпюр по формуле (4):

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Эпюра  $\bar{M}_S$ .



## 7 Вычисление коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений

Вычисление перемещений производим с использованием способа Верещагина:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} \cdot dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{-90}{EI}$$

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} \cdot dx = \Sigma \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = \left( \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \right) \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{48}{EI} + \frac{108}{EI} = \frac{156}{EI}$$

$$\delta_{22} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} \cdot dx = \left( \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \right) \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6 = \frac{180}{EI}$$

Выполняем проверку вычисленных коэффициентов при неизвестных  $\Sigma \delta = \delta_{SS}$ , где

$$\Sigma \delta = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{12} + \delta_{21} = \frac{156}{EI} - \frac{90}{EI} - \frac{90}{EI} + \frac{180}{EI} = \frac{156}{EI}.$$

$$\delta_{SS} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_s^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \right) \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \right) \cdot 2 = \frac{156}{EI}.$$

Результаты проверки совпали, следовательно, коэффициенты при неизвестных вычислены, верно.

Находим свободные члены.

Для нахождения свободных членов кроме способа Верещагина используется формула Симпсона:

$$\Delta_{ip} = \int \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx = \sum \frac{l}{6EI} [M_{p,лев} \bar{M}_{i,лев} + 4M_{p,ср} \bar{M}_{i,ср} + M_{p,пр} \bar{M}_{i,пр}],$$

где  $l$  - длина участка;

$M_{p,лев}$  и  $\bar{M}_{i,лев}$  - соответственно левые моменты участка на грузовой эпюре и на единичной эпюре;

$M_{p,ср}$  и  $\bar{M}_{i,ср}$  - соответственно средние моменты участка на грузовой эпюре и на единичной эпюре;

$M_{p,пр}$  и  $\bar{M}_{i,пр}$  - соответственно правые моменты участка на грузовой эпюре и на единичной эпюре.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} \cdot dx = \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 27 - 6 \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2EI} + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \times \\ \times 36 = \frac{27}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_p}{EI} \cdot dx = \frac{6}{12EI} \cdot [4 \cdot 1,5 \cdot 3 - 24 \cdot 6] - \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 9 \cdot 36 + \frac{6}{12EI} \times \\ \times (-36 \cdot 6 - 4 \cdot 9 \cdot 3) = -\frac{873}{EI}.$$

Проверка вычисления свободных членов  $\sum \Delta = \Delta_{SP}$ , где

$$\sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{846}{EI}.$$

$$\Delta_{SP} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_p}{EI} \cdot dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 27 + \frac{6}{12EI} \cdot (-27 \cdot 6 - 4 \cdot 1,5 \cdot 3) - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \times \\ \times 6 \cdot 36 - \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 36 + \frac{6}{12EI} \cdot (-36 \cdot 6 - 4 \cdot 9 \cdot 3) = -\frac{846}{EI}.$$

Свободные члены вычислены, верно.



## 8 Решаем системы канонических уравнений

Подставляем вычисленные значения коэффициентов в канонические уравнения:

$$\begin{cases} \frac{156}{EI} \cdot X_1 - \frac{90}{EI} \cdot X_2 + \frac{27}{EI} = 0 \\ -\frac{90}{EI} \cdot X_1 + \frac{180}{EI} \cdot X_2 - \frac{873}{EI} = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

Решаем эту систему:

$$\begin{cases} \frac{156}{EI} \cdot X_1 - \frac{90}{EI} \cdot X_2 + \frac{27}{EI} = 0 \\ -\frac{45}{EI} \cdot X_1 + \frac{90}{EI} \cdot X_2 - \frac{436,5}{EI} = 0 \end{cases}$$

---

Все члены уравнений можно сократить на жесткость  $EI$ . Это означает, что при силовом воздействии главную роль играют не абсолютные значения жесткостей стержней, а их соотношения.

$$111 \cdot X_1 - 409,5 = 0$$

$$X_1 = \frac{409,5}{111} = 3,689 \text{ кН.}$$

Подставим найденное значение  $X_1$  в первое уравнение:

$$156 \cdot 3,689 - 90 \cdot X_2 + 27 = 0$$

$$X_2 = \frac{156 \cdot 3,689 + 27}{90} = 6,695 \text{ кН.}$$

Решив систему канонических уравнений, получили значения неизвестных сил в отброшенных связях:

$$X_1 = 3,689 \text{ кН; } X_2 = 6,695 \text{ кН.}$$

Значения неизвестных получились со знаком плюс, следовательно, предварительное направление их выбрано верно.

Правильность вычисления неизвестных проверим путём подстановки найденных значений  $X_1$  и  $X_2$  в исходные уравнения:

$$156 \cdot 3,689 - 90 \cdot 6,695 + 27 = 602,48 - 602,5 \approx 0; \quad 0 = 0;$$

$$-90 \cdot 3,689 + 180 \cdot 6,695 - 873 = -1205,01 + 1205,1 \approx 0; \quad 0 = 0.$$

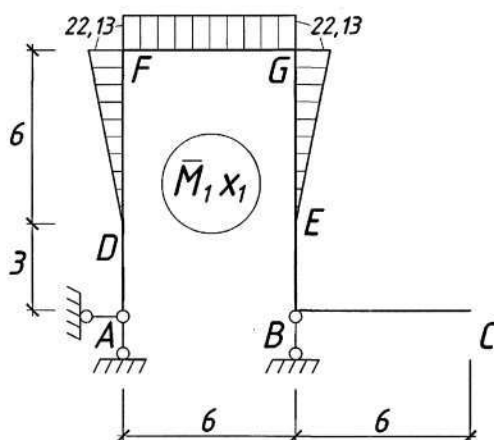
⇒ **Примечание:** Если значения неизвестных получились со знаком минус, предварительное направление выбрано неправильно и единичные эпюры надо перевернуть (тем самым учтем знак минус у неизвестного).

После нахождения неизвестных переходим к построению окончательной эпюры изгибающих моментов. На основании принципа суперпозиции окончательную эпюру изгибающих моментов построим как алгебраическую сумму исправленных единичных эпюр  $\bar{M}_i \cdot X_i$  с грузовой эпюрой  $M_p$ :

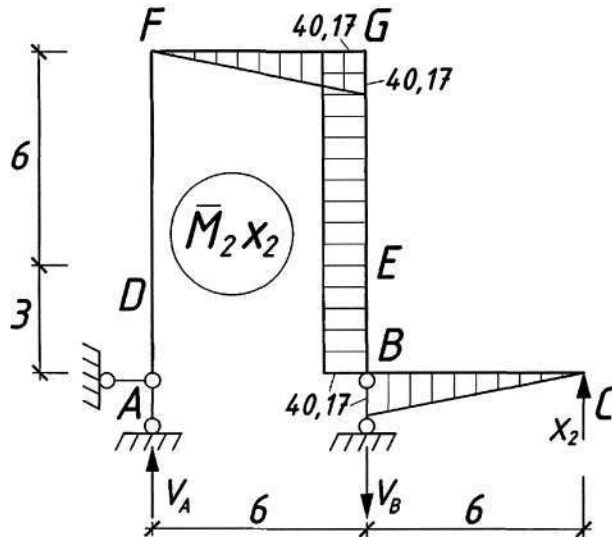
$$M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n + M_p.$$

9 Строим исправленные единичные эпюры путем умножения единичных эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на найденные значения сил  $X_1$  и  $X_2$

Эпюра  $X_1 \cdot \bar{M}_1$ .



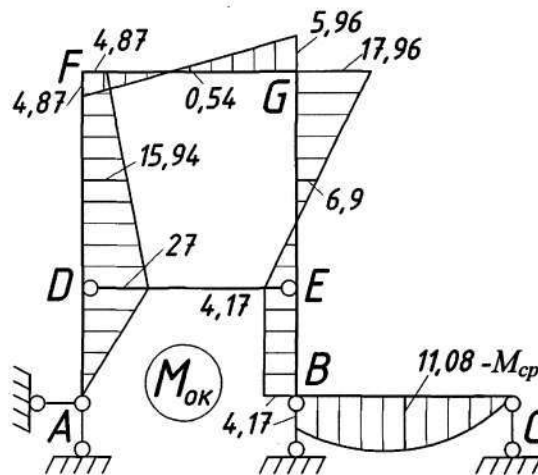
Эпюра  $X_2 \cdot \bar{M}_2$ .



10 Построение окончательной эпюры изгибающих моментов

$$M_{ок} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p \text{ (кН}\cdot\text{м)}$$

Эпюра  $M_{ок}$ .



11 Кинематическая (деформационная) проверка правильности построения эпюры  $M_{ок}$ .

Должно быть:

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_{ок}}{EI} \cdot dx = 0.$$

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_{ок}}{EI} \cdot dx = \frac{6}{6 \cdot 3EI} (-2 \cdot 4,87 \cdot 6 - 27 \cdot 6) + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (-2 \cdot 6 \cdot 4,87 + 5,96 \times \\ \times 6) + \frac{6}{6 \cdot 3EI} (2 \cdot 4,17 \cdot 6 - 17,96 \cdot 6) + 3 \cdot 4,17 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3EI} + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (4,17 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \times \\ \times 11,08) = -\frac{104,06}{EI} + \frac{103,92}{EI} = -\frac{0,14}{EI}$$

Относительная погрешность:

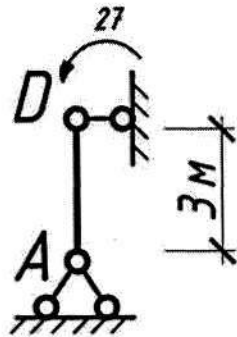
$$\varepsilon = \frac{|104,06 - 103,92|}{103,92} \cdot 100\% = 0,13\% \leq 1\%$$

Проверка выполняется, т.е. эпюра  $M_{ок}$  построена, верно.

12 Построение эпюры поперечных сил  $Q_{ок}$

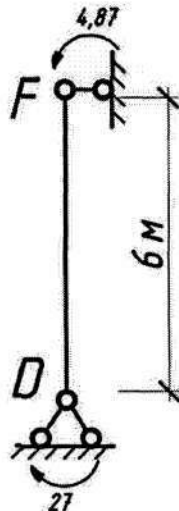
Эпюру  $Q_{ок}$  строим по эпюре  $M_{ок}$ , рассматривая равновесие участков, используя формулу Журавского:

$$Q = Q^0 + \frac{(M_{пр} - M_{лев})}{l}$$



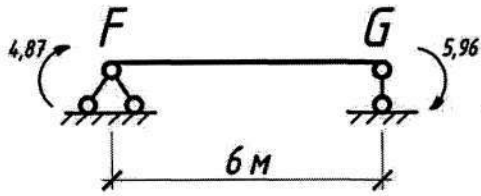
Стойка AD.

$$Q_A = Q_D = \frac{27 - 0}{3} = 9 \text{ кН.}$$



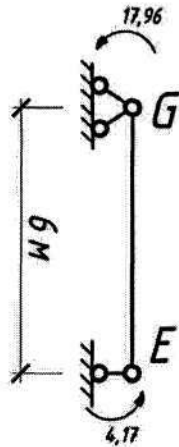
Стойка DF.

$$Q_D = Q_F = \frac{4,87 - 27}{6} = -3,69 \text{ кН.}$$



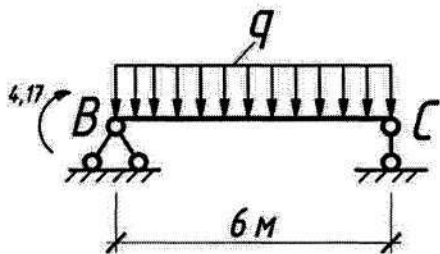
Ригель FG.

$$Q_F = Q_G = \frac{-5,96 - 4,87}{6} = -1,8 \text{ кН.}$$



Стойка GE.

$$Q_G = Q_E = \frac{4,17 + 17,96}{6} = 3,69 \text{ кН.}$$



Ригель BC.

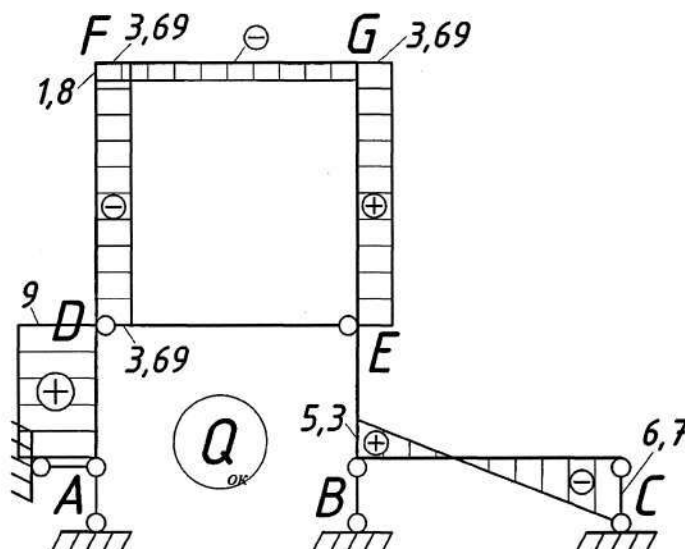
$$Q_{BC} = \frac{2 \cdot 6}{2} - 2x + \frac{(0 - 4,17)}{6} =$$

$$= 6 - 2x - 0,695 = 5,3 - 2x$$

$$x_B = 0; 5,3 - 0 = 5,3 \text{ кН.}$$

$$x_C = 6; 5,3 - 2 \cdot 6 = -6,7 \text{ кН.}$$

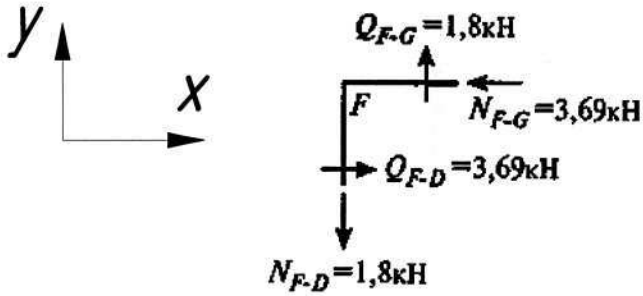
Эпюра  $Q_{ок}$ .



### 13 Построение эпюры продольных сил $N_{ок}$

Построение эпюры продольных сил производим методом вырезания узлов по эпюре  $Q_{ок}$  (расчет ведется с узла, в котором сходятся 2 стержня).

#### Узел F



$$\Sigma X = 0;$$

$$Q_{FD} - N_{FG} = 0$$

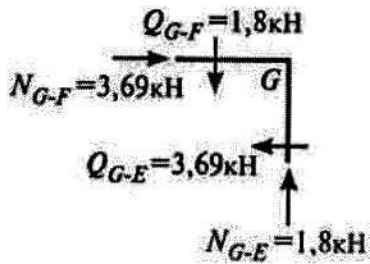
$$N_{FG} = Q_{FD} = 3,69 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$Q_{FG} - N_{FD} = 0$$

$$N_{FD} = Q_{FG} = 1,8 \text{ кН.}$$

#### Узел G



$$\Sigma X = 0;$$

$$-Q_{GE} + N_{GF} = 0$$

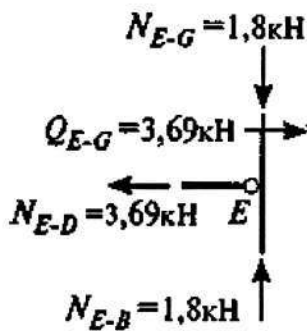
$$N_{FG} = Q_{GE} = 3,69 \text{ кН.}$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$-Q_{GF} + N_{GE} = 0$$

$$N_{GE} = Q_{GF} = 1,8 \text{ кН.}$$

#### Узел E



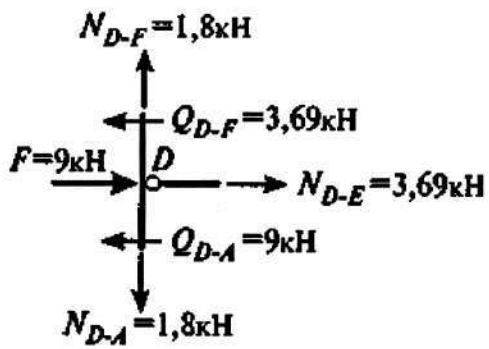
Из условия равновесия узла E:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$-N_{EG} + N_{EB} = 0$$

$$N_{EB} = N_{EG} = 1,8 \text{ кН.}$$

### Узел D



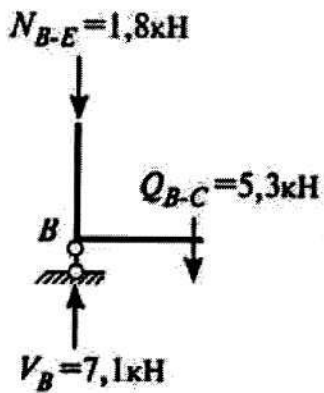
Из условия равновесия узла D:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$N_{DF} - N_{DA} = 0$$

$$N_{DF} = N_{DA} = 1,8 \text{ кН.}$$

### Узел B



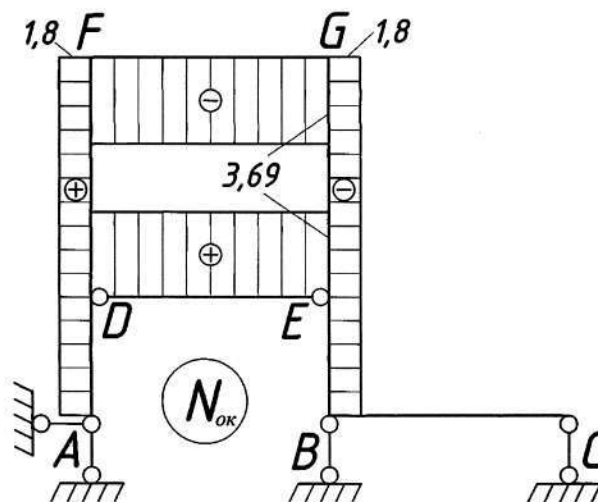
Из условия равновесия узла B:

$$\Sigma Y = 0;$$

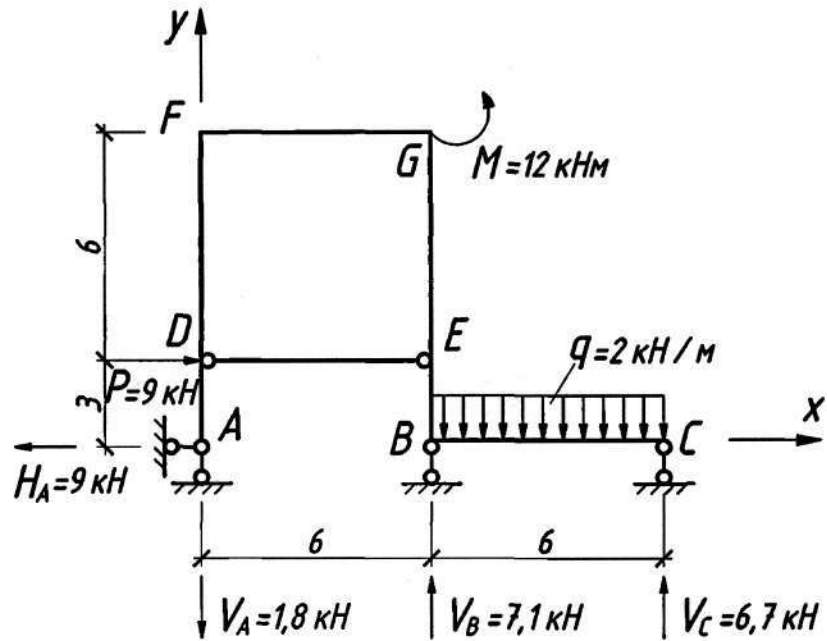
$$-N_{BE} + V_B - Q_{BC} = 0$$

$$V_B = 1,8 + 5,3 = 7,1 \text{ кН.}$$

Эпюра  $N_{ок}$ .



## 14 Статическая проверка



$$\Sigma X = 0;$$

$$P - H_A = 0$$

$$9 - 9 = 0.$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$-ql + V_C - V_A + V_B = 0$$

$$-6,7 - 12 - 1,8 + 7,1 = 0.$$

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-V_B \cdot 6 - V_C \cdot 12 + q \cdot 6 \cdot 9 - M + P \cdot 3 = 0$$

$$-7,1 \cdot 6 - 6,7 \cdot 12 + 2 \cdot 6 \cdot 9 - 12 + 9 \cdot 3 = -135 + 135 = 0.$$

Вывод: Расчет выполнен верно.



### 3 Контрольные задания к расчётно-графической работе

РГР «Расчёт плоской статически неопределимой рамы методом сил».

Для заданной расчетной схемы рамы требуется:

1. Вычертить расчётную схему рамы в соответствии с данными таблицы №1.
2. Определить степень статической неопределимости.
3. Выбрать основную систему.
4. Записать систему канонических уравнений.
5. Построить эпюры изгибающих моментов для единичных состояний основной системы и эпюру для грузового состояния.
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений (единичные и грузовые перемещения).
7. Построить суммарную единичную эпюру.
8. Выполнить проверку правильности вычислений при определении единичных и грузовых перемещений.
9. Решить систему канонических уравнений (нахождение неизвестных усилий).
10. Вычислить и построить окончательную эпюру изгибающих моментов.
11. Провести кинематическую (деформационную) проверку окончательной эпюры изгибающих моментов.
12. Вычислить и построить окончательные эпюры поперечных и продольных сил.
13. Выполнить статическую проверку (для рам).

Примечание: вариант по номеру в журнале.

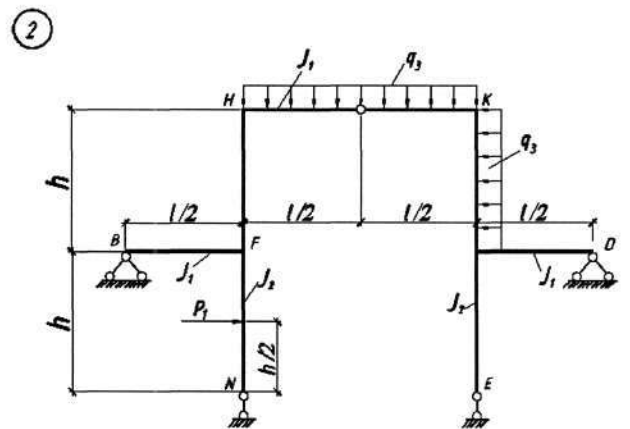
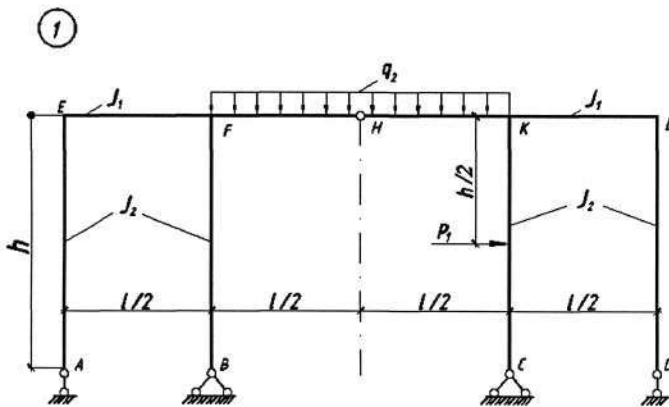
Таблица 1 – Исходные данные к работе

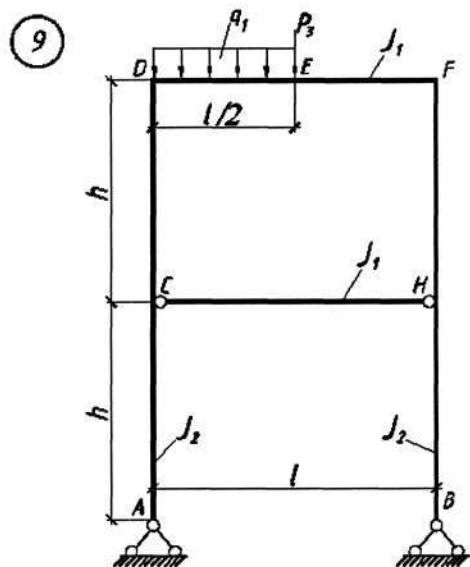
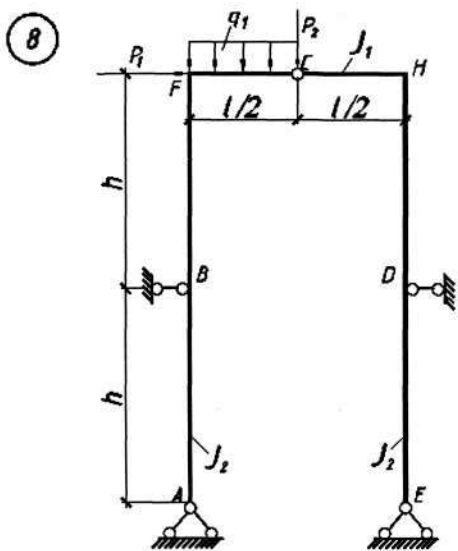
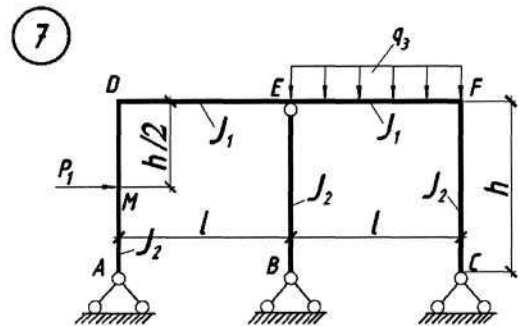
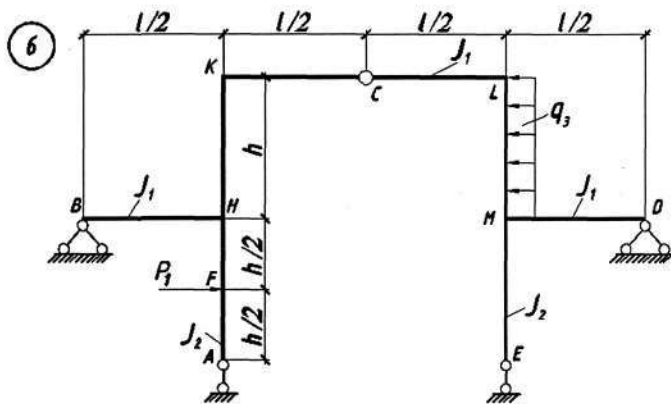
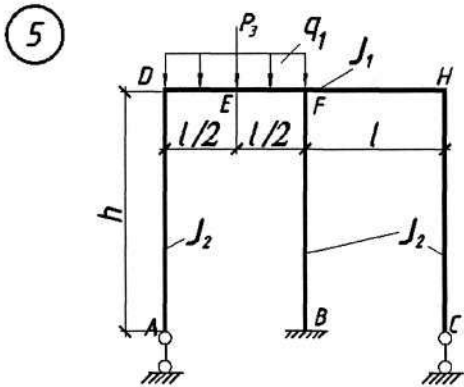
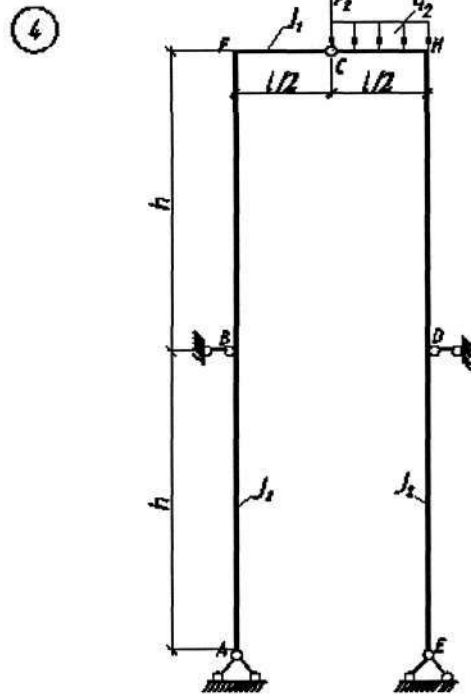
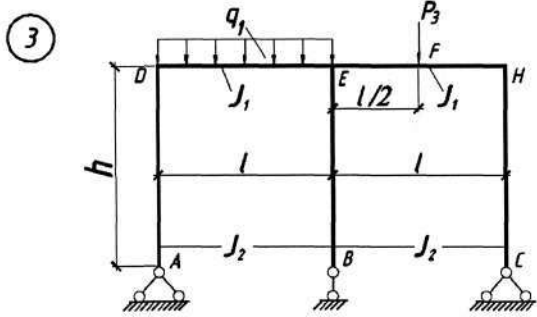
Вариант	$P_1, \text{кН}$	$P_2, \text{кН}$	$P_3, \text{кН}$	$l, \text{м}$	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	$q_3, \text{кН/м}$	$h, \text{м}$	$I_1: I_2$	Номер схемы
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-	4	-	11	-	2	-	4	3:2	12
2	-	-	5	4	2	-	-	7	1:4	5
3	4	-	-	11	-	1	-	11	3:4	13

Продолжение таблицы 1

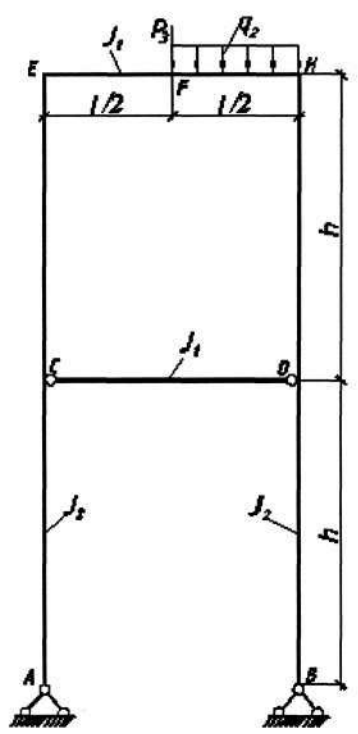
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	4	-	-	13	-	1	-	11	3:2	1
5	5	-	-	10	-	-	4	6	1:3	2
6	5	-	-	10	-	-	1	5	1:3	6
7	-	6	-	7	2	-	-	7	2:3	8
8	-	6	-	7	-	2	-	4	1:2	18
9	-	-	4	6	2	-	-	7	1:2	3
10	-	-	4	6	-	2	-	4	1:3	15
11	-	6	-	7	-	1	-	11	2:3	4
12	-	-	6	9	2	-	-	7	1:3	9
13	-	-	6	9	-	1	-	11	1:3	10
14	5	-	-	10	2	-	-	7	2:3	11
15	-	-	-	11	2	-	-	3	1:3	20
16	4	-	-	8	-	-	1	5	1:2	17
17	6	-	-	5	2	-	-	7	2:1	14
18	4	-	-	13	2	-	-	7	1:2	16
19	6	-	-	5	-	-	1	5	2:1	7
20	4	2	-	8	-	-	-	12	1:1	21
21	4	-	-	8	-	2	-	10	1:2	19
22	-	6	-	8	-	4	-	10	2:3	23
23	-	-	5	10	-	1	-	5	1:3	22
24	6	-	-	8	-	-	2	5	1:2	25
25	-	-	-	10	-	4	-	6	1:3	24

Расчётные схемы

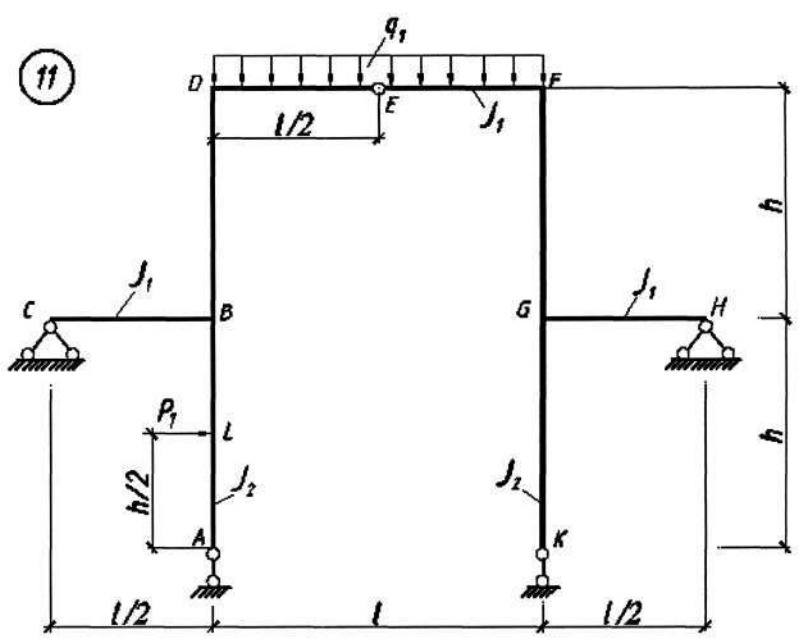




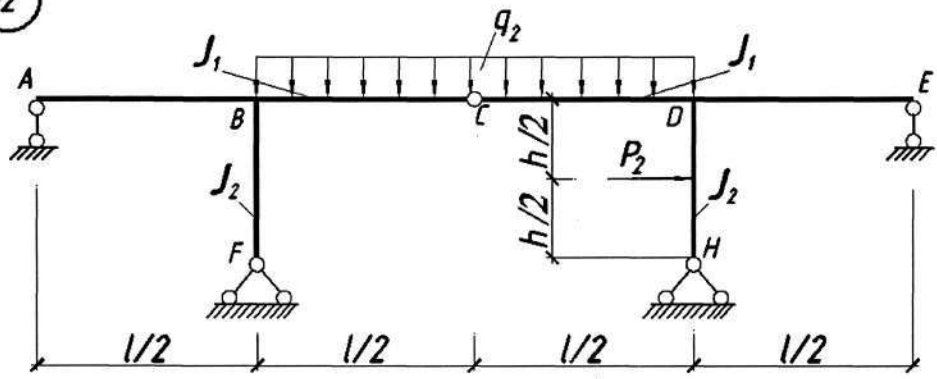
10



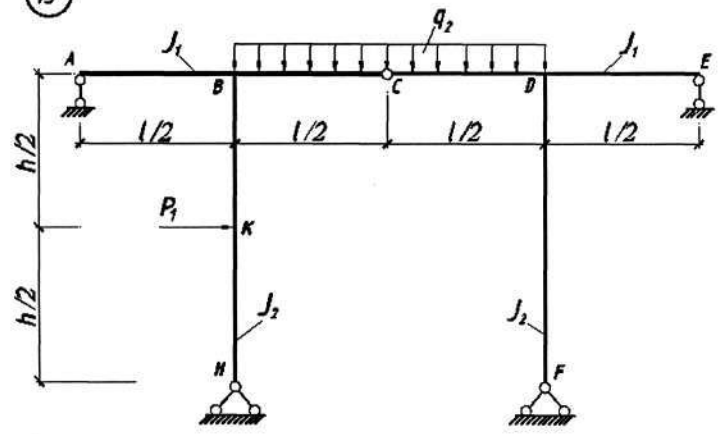
11



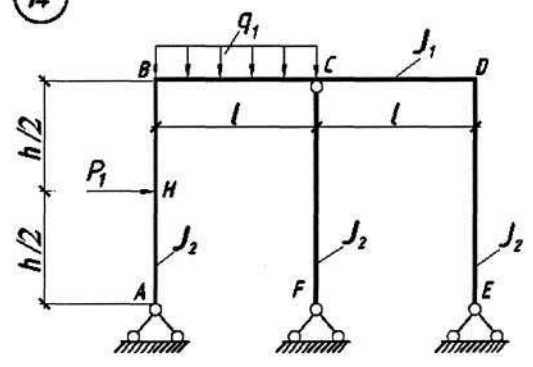
12



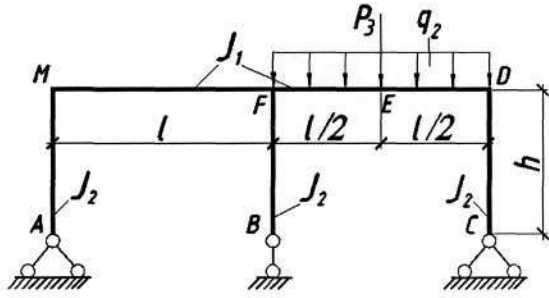
13



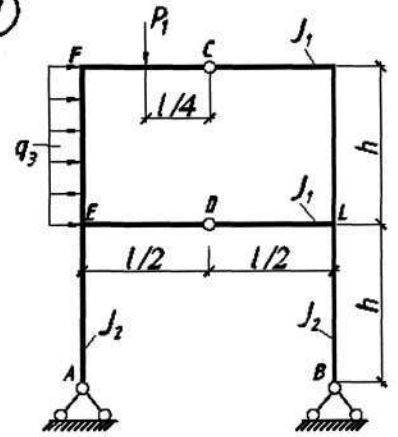
14



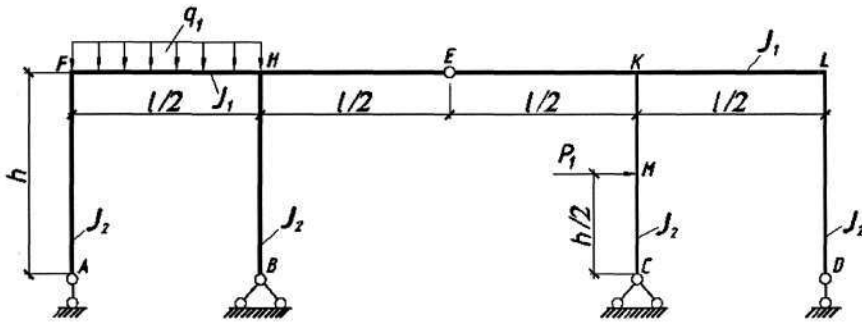
15



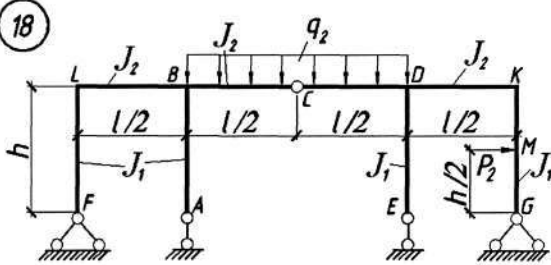
17



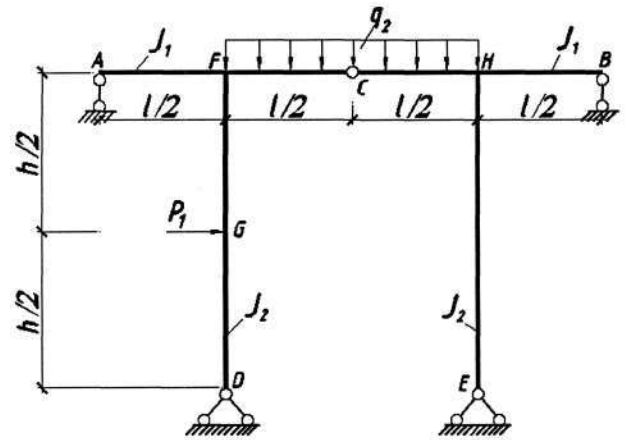
16



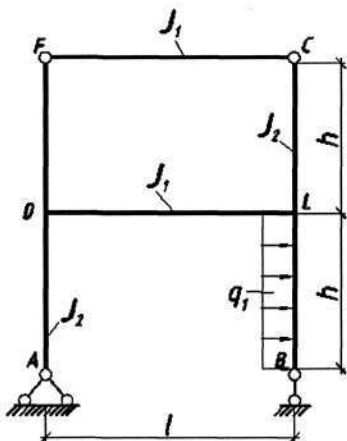
18



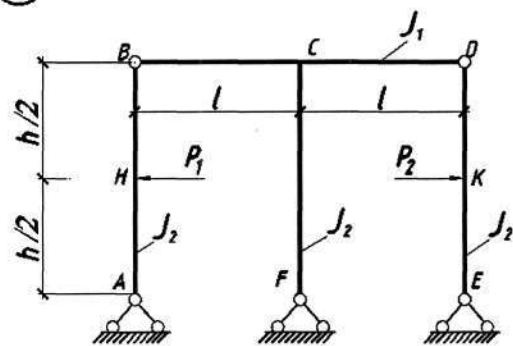
19

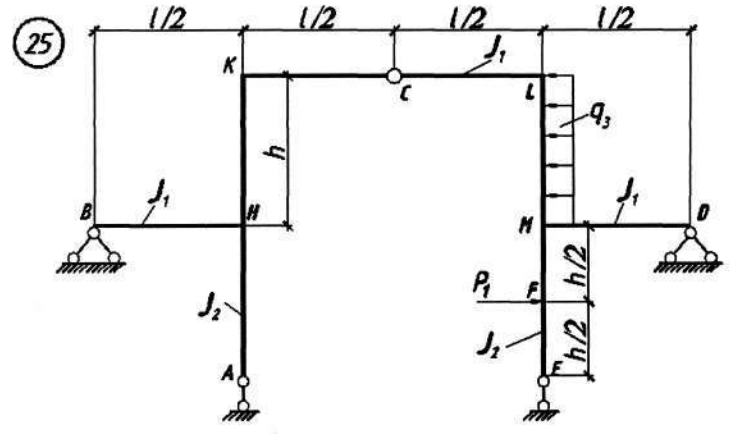
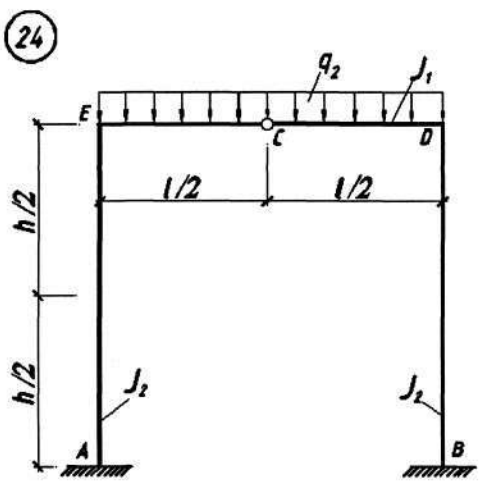
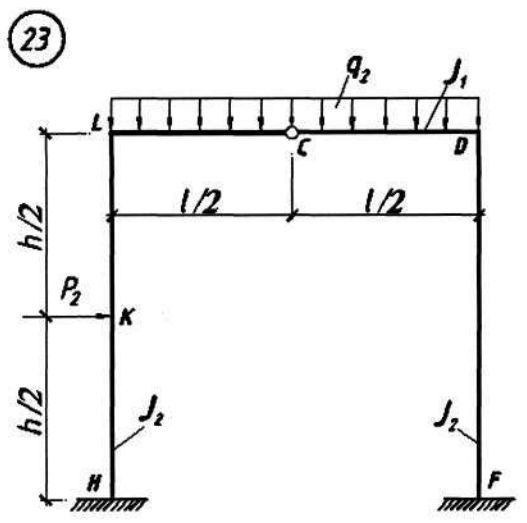
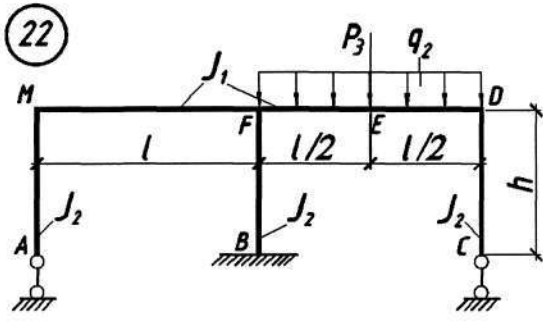


20



21





## Список использованных источников

1 Дарков, В.А. Строительная механика: учебник / В.А. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 9-е изд., испр. – М.: Издательство «Лань», 2004. – 607 с. – (Высшее образование). – ISBN 5-8114-0576-6.

2 Основы строительной механики стержневых систем: учебник/ Н.Н. Леонтьев [и др.] – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с. – (Высшее образование). – ISBN 5-87829-023-5.

3 Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах: в 2 ч. учеб. пос. / Н.Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – Ч.2: Статически неопределимые системы. – 464 с. – (Высшее образование). – ISBN 5-93093-024-4.

4 Саргсян, А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций: учебник / А.Е. Саргсян. – М: Высшая школа, 2004. – 462с. – (Высшее образование). – ISBN 5-06-004440-8.

5 Снитко, Н.К. Строительная механика: учебник / Н.К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1980. – 431 с. – (Высшее образование).

6 Ельчанинов, П.Н. Строительная механика. Расчетно-проектировочные работы: учебное пособие / П.Н. Ельчанинов. -2-е изд., испр. и доп. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2010.- 162 с.