Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Индустриально-педагогический колледж

Отделение технологии производства и промышленного оборудования

Г. В. Погадаева

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программе среднего профессионального образования по специальности 051001.52 «Профессиональное обучение» заочной формы обучения

Оренбург
2012

УДК 51(076)
ББК 22.1я 7
П43

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук, С. А. Герасименко

Погадаева, Г. В.

П43 Математика: методические указания по выполнению контрольной работы / Г. В. Погадаева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2012. – 52 с.

Основное содержание: подробное объяснение решения задач предназначенные для изучения основ в рамках курса «Высшая математика»

Методические указания по выполнению контрольных работ по дисциплине «Высшая математика» предназначены для студентов, обучающихся в колледже по специальности 051001.52 «Профессиональное обучение» заочной формы обучения.

УДК 51 (076)
ББК 22.1я 7

Содержание

Введение

Методические указания и контрольные задания по высшей математике предназначены для студентов первого курса специальности; 051001.52-«Профессиональное обучение» заочной формы обучения.

Целью преподавания дисциплины является формирование умений и навыков необходимых для решения и вычисления математических задач.

В результате изучения дисциплины студент должен знать:

-элементы линейной алгебры;

-дифференциальное и интегральное исчисление функций одной действительной переменной.

Студентам предлагается десять вариантов контрольных работ. Варианты контрольных работ студенты выбирают по номерам своих зачеток. Менять варианты не разрешается.

Контрольные работы пишутся в обыкновенных тетрадях от руки и обязательно подписываются. Задания контрольной работы переписываются на первой странице работы. Остаются поля (2,5см) для пометок преподавателя.

1 Элементы линейной алгебры

1.1 Решение систем линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса

Рассмотрим произвольную систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=h_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3 \end{cases}$$

$$\text{тогда}\ x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta},\ \text{где}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

если $\Delta \neq 0,$ то система линейных уравнений имеет решение.

Пример

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ z+y-z=0 \\ x+2y-3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-8}{2}=-4 \\ y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{14}{2}=7 \\ z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}=\dfrac{6}{2}=3 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=2,\quad \Delta x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-8,\quad \Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=14,\quad \Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6.$$

Ответ: (-4; 7; 3)

Метод Гаусса состоит в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида (треугольного вида) из которой последовательно, начиная с последнего уравнения, находят все неизвестные системы.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y-z=0 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \lrcorner + \\ \lrcorner + \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y-4z=-5 \\ -2z=-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=7 \\ z=3 \end{cases}$$

Ответ: (-4; 7; 3)

Контрольные задания

Дана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Найти её решение с помощью формул Крамера и методом Гаусса;

1. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x+4y+3z=-10, \\ -x+5y-2z=5, \\ 3x-2y+4z=3; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x+7y-3z=-10, \\ 2x+9y-z=8, \\ -x+6y-3z=3; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+7y-2z=3, \\ 3x+5y+z=5, \\ -2x+5y-5z=-4; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 4x-y+5z=6, \\ x-2y+4z=9; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x-9y+8z=5, \\ 2x-5y+5z=4, \\ 2x-y+z=-4; \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x+5y-6z=-8, \\ x+7y-5z=-9, \\ 4x+2y-z=-12; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} -5y+3z=-1, \\ 2x+4y+z=6, \\ -3x+3y-7z=-13; \end{cases}$

2 Элементы аналитической геометрии

2.1 Решение задач применение аналитической геометрии

Задача. По координатам вершин пирамиды ABCD найти:

а) длины ребер AB и AC;

б) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) объем пирамиды ABCD;

г) высоту, опущенную из вершины D на грань ABC;

д) уравнение прямой AB;

е) уравнение плоскости BCD;

ж) площадь основания ABC;

з) расстояние от точки A до плоскости BCD;

A(3; -2; 2), B (1; -3; 1), C (2; 0; 4), D (6; -4; 6).

Решение: Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$\overline{AB}$ = (1 -3; -3 – (- 2); 1 -2) = (-2; - 1; -1);

$\overline{AC}$ = (2 – 3; 0 – (-2); 4 – 2) = (-1; 2; 2);

$\overline{AD}$ = (6 – 3; - 4 – (-2); 6 – 2) = (3 ; - 2; 4).

Длины ребер AB и AC найдем как длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\lceil AB \rceil = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\lceil AC \rceil = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

т.е. AB = $\sqrt{6}$ (ед.), AC = 3 (ед.).

Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ найдем, используя скалярное произведение векторов:

$$\cos\left(\overline{AB},\overline{AC}\right) = \frac{\overline{AB\cdot AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|},$$

$$\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{6} \cdot 3 = 3\sqrt{6}\,,\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = -2,$$

$$\cos\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{6}}.$$

Объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, как на сторонах. Объем параллелепипеда найдем, используя смешанное произведение векторов:

$$(\overline{AB}\ \ \overline{AC}\ \ \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -30.$$

Объем параллелепипеда равен V = $|-30|$ = 30 (ед^3).

Объем пирамиды равен V = $\frac{1}{6}$ · 30 = 5 (ед^3).

Из школьного курса известна формула объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

$$h = \frac{3V}{S_{осн}}.$$

Площадь основания найдем, используя векторные произведения векторов:

$$\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\,\bar{j}\ - 5\,\bar{k},$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 5^2 + (-5^2)} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ ед.}^2$$

$$h = \frac{3 \cdot 5}{\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\text{ ед.}$$

Для нахождения уравнения прямой AB используем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Имеем:

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y+2}{-3-(-2)} = \frac{z-2}{1-2},$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$$

- каноническое уравнение искомой прямой.

Для нахождения уравнения плоскости BCD используем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 2-1 & 0+3 & 4-1 \\ 6-1 & -4+3 & 6-1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$18 \cdot (x-1) + 10 \cdot (y+3) - 16 \cdot (z-1) = 0$$

$$18x - 18 + 10y + 30 - 16z + 16 = 0$$

$18x + 10y - 16z + 28 = 0$ – искомое уравнение, или $9x + 5y - 8z + 14 = 0$

Ответ: а) $\sqrt{6}$; 3; б) $\frac{-2}{3\sqrt{6}}$ в) 5 г) $3\sqrt{2}$

д) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

е) $9x + 5y - 8z + 14 = 0$

Контрольные задания

По координатам вершин пирамиды *ABCD* найти:

а) длины рёбер *AB* и *AC* и *AD*;

б) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) объём пирамиды *ABCD*;

г) высоту, опущенную из вершины *D* на грань *ABC*;

д) уравнение прямой AB и AD;

е) уравнение плоскости BCD

ж) площадь основания ABC;

з) расстояния от точки A до плоскости BCD;

1. A(-3; 4;-7), B(1;5;-4), C(-5;-2;0), D(2;5;4);
2. A(1;3;0), B(4;-1;2), C(3;0;1), D(-4;3;5);
3. A(-3;-5; 6), B(2;1;-4), C(0;-1;3), D(-5;2;-8);
4. A(1;-1; 2), B(2;1;2), C(1;1;4), D(6;-3;8)
5. A(3; 10;-1), B(-2;3;-5), C(-6;0;-3), D(1;-1;2);
6. A(-2;-1;-1), B(0;3;2), C(3;1;-4), D(-4;7;3)
7. A(0;3;2), B(-1;3;6), C(-2;4;2), D(0;5;4)
8. A(-1;2;0), B(-2;2;4), C(-3;3;0), D(-1;4;3);
9. A (1;2;1), B(0;2;5), C(-1;3;1), D(1;4;3);
10. A (2;2;3), B(1;2;7), C(0;3;3), D(2;4;5).

3 Основы математического анализа

3.1 Предел функции

Основные свойства пределов

1 Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim(x + y + \cdots + t) = \lim x + \lim y + \cdots + \lim t.$$

2 Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:

$$\lim(x * y \ldots t) = \lim x * \lim y \ldots \lim t.$$

3 Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim(cx) = \lim c * \lim x = c \lim x.$$

Например, $\lim(5x + 3) = \lim 5x + \lim 3 = 5\lim x + 3$

4 Предел отношений двух переменных величин равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

5 Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной:

$$\lim x^n = (\lim x)^n.$$

Замечательные пределы

$$\boldsymbol{lim_{x\to 0}} \frac{\boldsymbol{sin\,x}}{\boldsymbol{x}}=1$$

Этот предел называется первым замечательным пределом

если $x \to \infty$, то имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}7182\ldots,$$

называется вторым замечательным пределом.

Доказательство его справедливости приводится в подробных курсах математического анализа.

Число e в математике имеет большое значение. Логарифмы при основании e называют натуральными и для них употребляют обозначения ln.

Итак, $\ln x = \log_e x$. Например, $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

Пример 1 Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x}$.

Решение: Здесь непосредственный переход к пределу не возможен, поскольку предел делителя равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(3-x) = 3-3 = 0$

Предел делимого также равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9) = 9-9 = 0$. Значит, имеем неопределённость вида 0/0, для его нахождения нужно предварительно преобразовать функцию, разделив числитель и знаменатель на выражения (x-3):

$$\frac{x^2-9}{3-x} = \frac{(x-3)(x+3)}{3-x} = -\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = -(x+3).$$

Для выражения $-(x+3)$ предел при $x \to 3$ находится легко:

$$\lim_{x\to3}\big(-(x+3)\big) = -\lim_{x\to3}(x+3) = -6.$$

Пример 2 Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-1}$

Решение: Здесь числитель и знаменатель не имеют предела, так как оба неограниченно возрастают. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость вида ∞/∞. Разделим числитель и знаменатель на x^3 (наивысшую степень x в данной дроби):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^3})} = 2,$$

так как $1/x^2$ и $1/x^3$ при $x \to \infty$ стремится к нулю.

Пример 3 Найти $\lim_{a\to0}\frac{\sin x}{a}$.

Решение: Здесь числитель и знаменатель не имеют предела. Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 2, а постоянный множитель 2 вынесем на знак предела. Имеем:

$$\lim_{a\to0}\frac{\sin 2a}{a} = \lim_{a\to0}\frac{2\sin 2a}{2a} = 2\lim_{a\to0}\frac{\sin 2a}{2a}.$$

Учитывая, что если $a \to 0$, то и $2a \to 0$, получим $\lim_{a\to0}\frac{\sin 2a}{a} =$

$$2\lim_{2a\to0}\frac{\sin 2a}{2a} = 2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 2*1 = 2.$$

Пример 4 Найти $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^x$

Решение: Разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^x = \lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1+\frac{1}{x}})^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{e}$$

Пример 5 Найти $\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+4)$

Решение: Для нахождения предела данной функции заменим аргумент x его предельным значением:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+4) = 3^2 - 7*3 + 4 = -8$$

Пример 6 Найти $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение: Проверим, не обращается ли знаменатель дроби в нуль при $x=2$: имеем $2^2+2*2+8=16\neq 0$. Подставив предельное значение аргумента, находим $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{2^2+2+2}{2^2+2*2+8}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

Пример 7 Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$

Решение: Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражения, сопряженное числителю, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}==\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\frac{2}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{5\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\frac{2}{5*2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Контрольные задания

Вычисление пределов

Найти пределы следующих функций:

1.а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+2x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}Sin3x\cdot ctg2x$;

2.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-1}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$;

3.а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+3x}{3x^3+x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}(x-\sqrt{x^2+2x})$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{2x}$;

4.а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-2}{x^2-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-3x+}{x^3+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$;

5.а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+3x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}$;

6.а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+x-3}{x^3+3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 3x}$;

7.а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+7x-4}{4-3x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3-8x+1}{3x^2-x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

8.а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+1}{x^3+3x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\operatorname{tg} 2x}$;

9.а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2-16}{x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{9x-2x^2-10}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3-4x+1}{2x^2+x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{2\sin^2 2x}$;

10.а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-3}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{x^3+1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2-x-x^2}{2x^2+x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}$;

3.2 Производная функции

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Определение. Производной функцией $y = f(x)$ в данной точке x называется предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т.е.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При решении примеров воспользуйтесь формулами:

1) $C' = 0$;

2) $(U \pm V \pm W)' = U' \pm V' \pm W'$;

3) $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$;

4) $(CU)' = CU'$;

5) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$;

6) $(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$;

7) $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$;

8) $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$;

9) $(a^U)' = a^U \cdot U' \cdot Lna$;

10) $(CosU)' = -U' \cdot SinU$;

11) $(tgU)' = \frac{U'}{Cos^2 U}$;

12) $(ctgU)' = -\frac{U'}{Sin^2 U}$;

13) $(\arcsin U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$;

14) $(\arccos U)' = -\frac{U'}{\sqrt{1-U}}$;

15) $(arctgU)' = \frac{U'}{1+U^2}$.

Пример 1 Найти производную функции: $y = \ln(x^3 - 1)$.

Решение: $y' = \frac{1}{x^3-1} \cdot (x^3 - 1)' = \frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3-1}$.

Пример 2 Найти производную функции: $y = x^2 + \frac{2}{x^4} - \sqrt[3]{x}$.

Решение: Имеем $y = x^2 + 2x^{-4} - x^{1/3}$

$$y' = \left(x^2 + 2x^{-4} - x^{1/3}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(2x^{-4}\right)' - \left(x^{1/3}\right)' = 2x - 8x^{-5} - \frac{1}{3}x^{-2/3} =$$

$$= 2x - \frac{8}{x^5} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Пример 3 Найти производную функции: $f(x) = x^3 Sinx$.

Решение: Учитывая, что $(Sinx)' = Cosx$, находим

$$f'(x) = 3x^2 Sinx + x^3 Cosx = x^2 (3Sinx + xCosx).$$

Пример 4 Найти производную функции: $y = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

Решение: $y' = \frac{(x^2-2)'\,(x^2+2) - (x^2-2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2-2)}{(x^2+2)^2} =$

$$= \frac{2x(x^2+2-x^2+2)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x \times 4}{(x^2+2)^2} = \frac{8x}{(x^2+2)^2}.$$

Пример 5 Найти производную функции: y= arcsin (lnx)

Решение: $y' = (\arcsin(\ln x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(lnx)^2}} \times (lnx)' = \frac{1}{\sqrt{1-(lnx)^2}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-(lnx)^2}}$.

Контрольные задания

Найти производные функций:

1. а) $y = \left(3x - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + 2\right)^5$; б) $y = \arccos 2x + \sqrt{1-4x^2}$; в) $y = \frac{e^{3x}}{x^2 - 4x + 3}$;

2. а) $y = \left(5x^2 + 4\sqrt[4]{x^5} + 3\right)^3$; б) $y = arctg\sqrt{x^2 - 1}$; в) $y = e^{3x} - 2xtg3x$;

3. а) $y = \left(\frac{1}{4}x^2 + 8\sqrt[8]{x^3} - 1\right)^3$; б) $y = \arccos\sqrt{x+1}$; в) $y = 3^{\cos 3x} - xSin2x$;

4. а) $y = \left(\frac{1}{5}x^5 - 3x\ \sqrt[3]{x} - 4\right)^4$; б) $y = arctg\sqrt{x-1}$; в) $y = \sqrt{x}ctg3x - 2^{x^2}$;

5. а) $y = \left(3x^3 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3\right)^5$; б) $y = arctg\,\frac{2}{x-3}$; в) $y = 5^{\sqrt{x}} - x^2 tg2x$;

6. а) $y = \left(5x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^2$; б) $y = \arccos\sqrt{1-x}$; в) $y = 3^{\sqrt{x}} + \frac{1 - Sin3x}{1 + Sin3x}$;

7. а) $y = \left(4x^3 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} - 2\right)^5$; б) $y = arcctg\sqrt{x-1}$; в) $y = \frac{4^x}{x+1}$;

8. а) $y = \left(7x^5 - 3x\sqrt[3]{x^2} - 6\right)^4$; б) $y = \arcsin 3x - \sqrt{1-9x^2}$; в) $y = \left(x^2 - 1\right)\cdot e^x - tgx^2$;

9. а) $y = \left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^5$; б) $y = arctg\,\frac{1}{x-1}$; в) $y = \frac{\ln x}{x^3 + 5}$;

10. а) $y = \left(8x^3 - \frac{9}{x^2\sqrt[3]{x}} + 6\right)^5$; б) $y = \arcsin\sqrt{1-x}$; в) $y = e^{\sqrt{x^3 + 4x^2 + 1}}$.

3.3 Исследования функций и построение графика

Построение графиков функций по характерным точкам.

При построении графика функции $y = f(x)$ полезно выяснить его характерные особенности:

- найти область определения функции;
- исследовать функцию на чётность и нечётность;
- найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва (если они существуют) и установить характер разрыва; найти асимптоты кривой $y = f(x)$;
- найти интервалы возрастания и убывания функции и её экстремумы;
- найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки её перегиба.

Пример 1 Построить график функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Область определения функции – вся ось *Ox,* за исключением точки $x = 0$, т.е. $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Функция не является чётной и нечётной.

Найдём точки пересечения графика с осью *Ox,* имеем $\dfrac{x^3 + 4}{x^2} = 0; x = -\sqrt[3]{4}.$

Точка разрыва $x = 0$, причем, $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$; следовательно, $x = 0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика.

Найдём наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1;$$

$$b' = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = x$.

Найдём экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания. Имеем

$y' = 1 - 8/x^3 = (x^3 - 8)/x^3$; $y' = 0$ при $x = 2$; $y' = \infty$

при $x=0$ точка разрыва функции.

Точки $x=0$ и $x=2$ разбивают числовую ось на промежутки $(-\infty,0),(0,2)$ и $(2,+\infty)$,

при $y'>0$ в промежутках $(-\infty,0)$ и $(2,+\infty)$ функция возрастает

при $y'<0$ в промежутке $(0,2)$ функция убывает

Далее, находим $y''=24/x^4; y''(2)>0,$ следовательно,

$x=2$ - точка минимума; $y_{\min}=3.$

Найдём интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки её перегиба.

Так как $y''>0,$ то график функции всюду вогнут. Точек перегиба кривая не имеет.

Используя полученные данные, строим график функции (рисунок 1).

Пример 2 Построить график функции $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

Область определения – вся ось Ox, т.е. $D(y)=(-\infty,+\infty)$.

Функция не является чётной и нечётной.

Точки пересечения с осями координат: если $x=0,$ то $y=1;$ если $y=0,$ то $x=1.$

Точек разрыва и вертикальных асимптот нет.

Имеем:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=0.$$

Итак, наклонная асимптота $y=-x.$

Находим $y'=-x^2/\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2};$ $y'=0$ при $x=0;$ $y'=\infty$

при $x=1$ в окрестности критических точек производная не меняет знака, экстремумов нет.

Так как $y'<0$ при всех $x\neq 0,$ то функция убывает на всей числовой оси.

Находим $y''=-2x/\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^5};$ $y''=0$ при $x=0;$ $y''=\infty$

при $x=1$; $y^{n}(-h)>0$; $y^{n}(h)<0$, $y^{n}(1-h)<0$; $y^{n}(1+h)>0$.

Следовательно, в промежутках $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ кривая вогнута, а в промежутке $(0,1)$- выпукла.

Точки перегиба имеют координаты (0; 1) и (1; 0).

Используя полученные данные, строим график (рисунок 2).

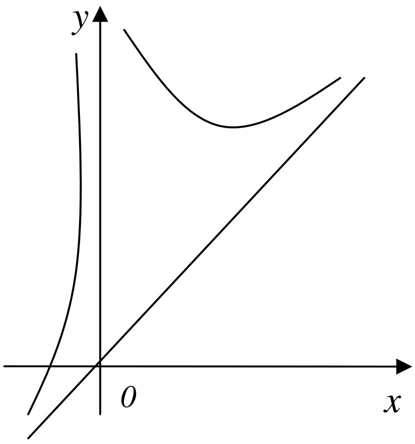


Рисунок 1- График функции

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}.$$

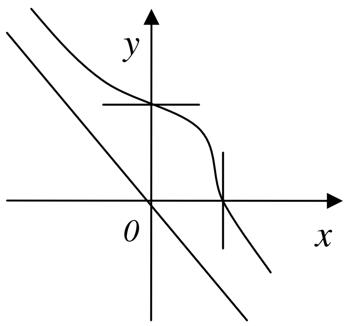


Рисунок 2 - График функции

$$y=\sqrt[3]{1-x^3}.$$

Контрольные задания

Исследовать функцию и построить её график.

1. $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$;

2. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$;

3. $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$.

4. $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$;

5. $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$;

6. $y=\dfrac{x}{4x^2-1}$;

7. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

8. $y=x+\dfrac{4}{x+2}$;

9. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$;

10. $y=x+\dfrac{1}{2x^2}$;

3.4 Неопределённый интеграл

Первообразная функция для функции $y=f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что имеет место равенство $F'(x)=f(x)$/

Например, функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на бесконечном промежутке $(-\infty.\ \infty)$, так как для любых x *справедливо* $(\sin x)'=\cos x$.

Неопределенный интеграл функции $y=f(x)$- это совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$.

Обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,, \qquad \text{где } \int - \text{знак интеграла}$$

(это стилизованная латинская буква S, означающая суммирование)

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральная выражение;

C- постоянная интегрирования, способная принимать любое значение;

x - переменная интегрирования.

При решении примеров воспользуйтесь формулами:

$$\int du = u + C,$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1),$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,$$

$$\int e^u\, du = e^u + C,$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C,$$

$$\int \cos u du = \sin u + C,$$

$$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C,$$

$$\int ctgudu = \ln|\sin u| C,$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C,$$

$$\int \frac{du}{sin^2 u} = ctgu + C,$$

$$\int \frac{du}{sinu} = \ln|tg\frac{u}{2}| + C,$$

$$\int \frac{du}{cosu} = \ln|tg\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C,$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+u}{a-u}| + C,$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2\ du} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}arcsin\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \sqrt{a^2 + u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}\ | + C,$$

Пример 1 $\int \left(Sin\frac{x}{2} + Cos\frac{x}{2} \right)^2 dx.$

Решение.

$$\int \left(Sin\ \frac{x}{2} + Cos\ \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(Sin^2\ \frac{x}{2} + 2Sin\ \frac{x}{2} Cos\ \frac{x}{2} + Cos^2\ \frac{x}{2} \right) dx =$$
$$= \int (1 + Sinx) dx = \int dx + \int Sinxdx = x - Cosx + C.$$

Применяемые формулы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1;$

$2Sin\alpha Cos\alpha = Sin2\alpha.$

Пример 2 $\int (2x+3)^4 dx.$

Решение.

$$\int (2x+3)^4 dx = \left| \begin{array}{l} z = 2x+3, \\ dz = 2dx, \\ dx = \frac{1}{2}dz \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int z^4 dz = 0{,}1z^5 + C = 0{,}1(2x+3)^5 + C.$$

Проверка: $d\left(0{,}1(2x+3)^5 + C\right) = 0{,}5(2x+3)^4 (2x)' dx = (2x+3)^4 dx.$

Пример 3 $\int xCosxdx$.

Решение. Интеграл содержит произведение двух функций x и $Cos\ x$. Способ подстановки не даёт возможности найти этот интеграл.
Обозначим $x = u, Cosxdx = dv$; тогда $dx = du; v = Sinx$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int xCosxdx = xSinx - \int Sinxdx = xSinx + Cosx + C.$$

Приняв, $x = u$, мы получили $u' = 1$ и интеграл $\int vdu$ оказался проще, чем $\int udv$.

Если же в этом интеграле сделать другую замену: $Cosx = u, xdx = dv$, то легко убедится, что полученный интеграл окажется сложнее исходного, т.е. замена окажется неудачной. Умение определить целесообразность той или иной замены приходит с приобретением навыка. Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

Пример 4 $\int \frac{6x - arctg4x}{1+16x^2}dx$,

Решение.

$$\int \frac{6x + arctg4x}{1+16x^2}dx = \int \frac{6x}{1+16x^2}dx + \int \frac{arctg4x}{1+(4x)^2}dx =$$

$$= \frac{6}{32}\int \frac{32x}{1+16x^2}dx + \frac{1}{4}\int arctg4x \cdot d(arctg4x) = \frac{6}{32}\cdot 1n\left|1+16x^2\right| + \frac{1}{4}\int \frac{(arctg4x)^2}{2} + C = =$$

$$\frac{3}{16}\cdot 1n\left|1+16x^2\right| + \frac{1}{8}(arctg4x)^2 + C.$$

При решении использован метод подведения под знак дифференциала и правило $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx = 1\text{n}\ |f(x)| + C$.

Проверка: $\left(\frac{3}{16}\cdot 1n\left|1+16x^2\right| + \frac{1}{8}(arctg4x)^2 + C\right)' =$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{1+16x^2}\cdot 32x + \frac{1}{8}\cdot 2arctg4x\frac{1}{1+16x^2}\cdot 4 + 0 = \frac{6x}{1+16x^2} + \frac{arctg4x}{1+16x^2} = \frac{6x + arctg4x}{1+16x^2}.$$

Пример 5 $\int x\cdot arctgxdx$

Решение:

$$\int x\cdot arctgxdx=\begin{vmatrix} u=arctgx & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=arctg\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=$$

$$=arctgx\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=arctgx\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=arctgx\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}arctgx=arctgx\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C\,.$$

При решении использован метод интегрирования по частям:

$$\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du\,.$$

Проверка

$$\left(arctgx\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot arctgx+C\right)'=\left(arctgx\right)'\cdot\frac{x^2}{2}+arctgx\left(\frac{x^2}{2}\right)'-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+0=$$

$$=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{2}+arctgx\frac{2x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+x^2)}=\frac{x^2}{2(1+x^2)}+x\cdot arctgx-\frac{1+x^2-1}{2(1+x^2)}=$$

$$=\frac{x^2}{2(1+x^2)}+x\cdot arctgx-\frac{x^2}{2(1+x^2)}=x\cdot arctgx.$$

Пример 6 $\int\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)(x-1)}\cdot dx.$

Решение.

Представим дробь $\dfrac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)\cdot(x-1)+C(1+x^2)}{(1+x^2)\cdot(x-1)}\Leftrightarrow 3x^2-x+2=$$
$$=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(1+x^2).$$

$$3x^2-x+2=Ax^2+Bx-Ax-B+C+Cx^2$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^2 \div 3 = A + C$

$$x^1 \div -1 = B - A \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 2 \end{cases}$$

$x^0 \div 2 = -B + C$

Получаем:

$$\frac{3x^2 - x + 2}{(1+x^2)\cdot(x-1)} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Тогда искомый интеграл будет равен:

$$\int \frac{3x^2 - x + 2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}dx = \int \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx =.$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}1n\left|1+x^2\right| + 21n\left|x-1\right| + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}1n\left|1+x^2\right| + 21n\left|x-1\right| + C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x + 2\frac{1}{x-1} + 0 = \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{x-1} =$$

$$= \frac{x(x-1) + 2(1+x^2)}{(1+x^2)\cdot(x-1)} = \frac{x^2 - x + 2 + 2x^2}{(1+x^2)\cdot(x-1)} = \frac{3x^2 - x + 2}{(1+x^2)\cdot(x-1)}$$

Пример 7 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \begin{vmatrix} HOK(3:6) = 6 \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{vmatrix} = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{t^6}{1+t^2}dt =$

$$=6\int\left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 6\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - arctgt\right) + C = \frac{6}{5}t^5 - 2t^3 + 6t - 6arctgt + C =$$

$$= \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C.$$

При решении использован метод замены переменной для интегралов от иррациональных функций вида R(x; $(ax + b)^a$, $(ax + b)^B$, …).

Проверка:

$$\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C. = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot x^{\frac{1}{6}} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} + 6\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{\frac{5}{6}} - 6\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{\frac{5}{6}} =$$

$$x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-x^{\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{6}}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

Контрольные задания

Найти неопределённые интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1. а) $\int\frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx,$ б) $\int\ln(x^2+4)dx,$ в) $\int(7x-10)\sin 4x dx,$

2. а) $\int\frac{arctgx+x}{1+x^2}dx,$ б) $\int(4x-3)e^{-2x}dx,$ в) $\int\frac{3x}{\sqrt{(x+1)^3}}dx;$

3. а) $\int\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx,$ б) $\int(\sqrt{2}+3x)Sin3xdx,$ в) $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x}dx;$

4. а) $\int\frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx,$ б) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,$ в) $\int\frac{1}{\sqrt{x}+5}dx;$

5. а) $\int\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx,$ б) $\int\sqrt{x^3}\cdot\ln x dx,$ в) $\int\frac{\sqrt{x}}{4-x}dx;$

6. а) $\int\frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ б) $\int e^{-3x}(2-9x)dx,$ в) $\int\frac{\sqrt{x}}{x-6}dx;$

7. а) $\int\frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ б) $\int x^2\sin 3x dx,$ в) $\int\frac{\sqrt{x}}{x-6}dx;$

8. а) $\int\frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx,$ б) $\int(1-\ln x)dx,$ в) $\int\frac{x^2}{x^4-81}dx,$

9. а) $\int\frac{x+(arctgx)^2}{1+x^2}dx,$ б) $\int(x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx,$ в) $\int\frac{x}{\sqrt{(5-x)^3}}dx;$

10. а) $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9}}dx,$ б) $\int(7x-10)\sin 4x dx,$ в) $\int\frac{\sqrt{x-3}}{x}dx,$

3.5 Определённый интеграл

Если F(x)+C-первообразная функция для f(x), то приращение F(b)-F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x=a до x=b называется определенным интегралом и обозначается символом т.е. , где a - нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Пример 1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=-x^2+5$ и $y=x+3$.

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения параболы $y=-x^2+5$ и прямой $y=x+3$. Для этого решим систему $\begin{cases} y=-x^2+5, \\ y=x+3, \end{cases}$ откуда $x_1=-2, x_2=1$.

Найдём площадь S_1 фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5$, прямыми $x=-2, x=1$ и $y=0$ (рисунок 3).

Получим $S_1=\int_{-2}^{1}\left(-x^2+5\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5x\right)\Big|_{-2}^{1}=12$ (кв. ед.).

Найдём площадь S_2 фигуры, ограниченной прямыми $y=x+3, x=-2, x=1, y=0$:

$$S_2=\int_{-2}^{1}(x+3)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-2}^{1}=7{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь искомой фигуры есть $S=S_1-S_2=12-7{,}5=4{,}5$ (кв. ед.)

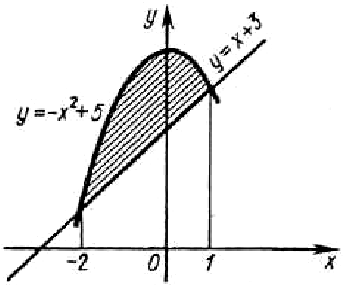


Рисунок 3 - Площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=x+3, x=-2, x=1, y=0:$

Пример 2 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

Решение. На рисунке 4 изображена фигура, площадь которой надо вычислить. Как видно из рисунка, площадь фигуры *OBMAO* можно представить как разность площадей фигур *OBMPO* и *OAMPO*, где *MP*- перпендикуляр, опущенный из точки *M* на ось *Ox*.

Найдём координаты точки *M*. Решив систему уравнений

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2/4, \end{cases}$ получим $x = 4, y = 4,$ т. е. *M* (4; 4).

Следовательно,

$$S = \int_0^4 \sqrt{4x}dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4}dx = \frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 - \frac{x^3}{12}\Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

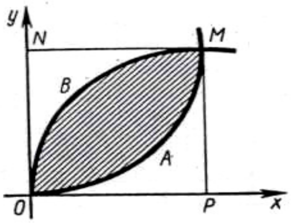


Рисунок 4 - Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

Контрольные задания

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Построить чертёж.

1. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x;$
2. $y^2 = 9x, \ x^2 = 4y;$
3. $y^2 = 4x, \ x^2 = 4y;$
4. $y = x^2 + 2, \quad x + y = 4;$
5. $y = x^2, \ y^2 = 4x;$
6. $xy = 6, \quad x + y - 7 = 0;$
7. $y = x^2, \ y = 2 - x^2;$

8. $y = x^2 + 4x, \quad y = x = 4;$

9. $y = x + 3, \quad xy = 4, \quad x = 0, \quad y = 0;$

10 $y = x^2 - 2x, \quad x - y + 4 = 0;$

3.6 Числовые ряды

Числовой ряд – это выражение вида: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$.
Числа $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots. a_n \ldots$ ....называются членами ряда.
Общий член ряда - это член a_n с произвольным номером.
Сокращенно ряд обозначают следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Признак Даламбера.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то при $p < 1$ ряд сходится, а при $p > 1$ ряд расходится.

При p=1 вопрос о сходимости ряда остается нерешенным. В этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Если для этого ряда существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

Пример 1.

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1} \cdot (x+2)^n.$$

Решение.

Для построения интервала и радиуса сходимости воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+4)\cdot(x+2)^{n+1}\cdot(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot(n+3)\cdot(x+2)^n}\right| =$$

$$= |x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)\cdot(n^2+1)}{(n^2+2n+2)\cdot(n+3)} = |x+2|.$$

Ряд абсолютно сходится при $|x+2|<1$,

$$-1<x+2<1,$$

$$-3<x<-1.$$

Ряд расходится при $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

Радиус сходимости равен 1.

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала:

$x=-3:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-3+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1)^n$ - знакочередующийся ряд.

Так как: $|a_1|>|a_2|>|a_3|>...$

$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+1}=0,$ т.к. выполняются оба условия теоремы Лейбница, то этот знакочередующийся ряд сходится.

$x=-1:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ - числовой положительный ряд.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, он расходится.

Так как

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+1}:\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+1}=1,$

То по признаку сравнения ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$ - расходится.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}\cdot(-1)^n$ - сходится условно.

Ответ: $-3\le x<-1,$ в точке $x=-3$ ряд сходится условно.

Контрольные задания

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

1. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-6}{6^n}(x-6)^n$;

2. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{4^n}(x-4)^n$;

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}(x+6)^n$;

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3}{3^n}(x-3)^n$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$;

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n$;

8. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-5}{5^n}(x-5)^n$;

9. $\sum_{n=2}^{\infty}(3n-1)\cdot(x+2)^n$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n^2-1)\cdot(x-2)^n$;

3.7 Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение - это равенство содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y'y'' \dots\dots) = 0,$$

где $x -$ независимая переменная,

$y -$ неизвестная функция,

$y' -$ ее производная первого порядка и т. д.

Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли.

Чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью $(q \neq 0)$, нужно свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

При решении таких уравнений применяют метод Бернулли. Для этого используют подстановку $y = uv$, в результате которого уравнение $y' + py = q$ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$u' + pu = 0; \quad uv' = q,$$

где u и v – новые функции переменной x.

Одну из этих функций подбирают так, чтобы уравнение, содержащее другую функцию, стало уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Решить уравнение $y' - \frac{3}{x} y = x.$

Решение. Это линейное уравнение, так как оно имеет вид $y' + py = q$, где $p = -3/x, q = x$. Положим $y = uv$; тогда $y' = u'v + v'u$.

Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, получим

$$uv' + v'u - \frac{3}{x} uv = x,$$

или

$$u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) + u'v = x. \tag{1}$$

Считая, что неизвестная функция y является произведением двух (также неизвестных) функций u и v, мы тем самым можем одну из этих функций выбрать произвольно. Поэтому приравняем нулю коэффициент при u в уравнении (1)

$$v' - \frac{3}{x} v = 0.$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, имеем

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x}; \quad \ln v = \ln x; \quad v = x^3.$$

Снова ввиду произвольности в выборе v мы можем не учитывать произвольную постоянную C (точнее – можем приравнивать её нулю).

Найденное значение v подставляем в уравнение (1)

$$u'x^3 = x; \quad u' = \frac{1}{x^2}; \quad du = \frac{1}{x^2} dx; \quad \int du = \int \frac{dx}{x^2}; \quad u = -\frac{1}{x} + C$$

(здесь C писать обязательно, иначе получится не общее, а частное решение).

Тогда окончательно получим $y = uv = \left(C - \frac{1}{x} \right) x^3.$

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v\left(u' - \frac{3}{x} u \right) + uv' = x.$$

Произвольно выбирая функцию u (а не v), мы могли полагать $u' - \frac{3}{x} u = 0$ и т.д. Этот путь решения отличается от предыдущего одной лишь заменой v на u (и следовательно, u на v), так что окончательное значение y оказывается тем же самым.

Общая формула для решения линейных уравнений слишком громоздка и поэтому, удобнее в каждом отдельном случае проводить решение линейных уравнений заново.

Решить уравнение $y' + ytgx = Cos^2 x$.

Решение. Это линейное уравнение, так как оно имеет вид $y' + py = q$, где $p = tgx, \;\; q = Cos^2 x$. Пусть $y = uv;$ тогда $y' = u'v + v'u$. Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, имеем

$u'v + v'u - uvtgx = Cos^2 x$.

или

$$u'v + (v' + vtgx)u = Cos^2 x. \qquad (2)$$

Из двух функций u и v одну можно выбрать произвольно; поэтому определим функцию v так, чтобы множитель при u в уравнении (2) обратился в нуль, т.е. чтобы

$$v' + vtgx = 0 \text{ или } \frac{dv}{v} + tgxdx = 0,$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} + \int tgx = 0; \;\; \ln|v| - \ln|Cosx| = 0; \;\; v = Cosx$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю).

Представляя выражение функции v в уравнение (2), для определения u получаем уравнение

$$u'Cosx = Cos^2 x \text{ или } du = Cosxdx,$$

откуда

$$\int du = \int Cosxdx + C \text{, т.е. } u = Sinx + C\,.$$

Так как $y = uv$, то общее решение заданного уравнения примет вид

$y = (Sinx + C)Cosx.$

Из рассмотренных примеров легко установить алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

- приводят уравнение к виду $y' + py = q$.

- используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение.

- группируют члены уравнения, выносят одну из функций v или u за скобки. Находят вторую функцию, прировняв выражения в скобках нулю и решив полученное уравнение.

- подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.

- записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$

- если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} + Cosx + ySinx = 1.$

Решение**.**

Разделив все члены уравнения на $Cosx$, получим

$$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{Cosx}.$$

Полагаем $y = uv;\quad y' = \dfrac{dy}{dx} = u'v + v'u.$

Подставляя выражение y и $\dfrac{dy}{dx}$ в уравнение, имеем

$$u'v + v'u + uvtgx = \frac{1}{Cosx},$$

или

$$u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{Cosx}. \qquad (3)$$

Полагаем $v' + vtgx = 0$, или $\frac{dv}{dx} = -vtgx$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v} = -tgxdx; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int tgxdx \text{ или } \ln v = \ln Cosx$$

(произвольную постоянную *C* не пишем); отсюда $v = Cosx$.

Теперь уравнение примет вид

$$u'Cosx = \frac{1}{Cosx}, \text{ или } \frac{du}{dx} = \frac{1}{Cos^2 x}, \quad \text{или} \quad du = \frac{dx}{Cos^2 x}.$$

Интегрируя, находим $\int du = \int \frac{dx}{Cos^2 x}$, т.е. $u = tgx + C$.

Подставляя значения u и v в равенство $y = uv$, получим $y = (tgx + C)Cosx$, или, окончательно,

$$y = Sinx + C \cdot Cosx.$$

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = \frac{2}{x}y = x^4$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = \frac{4}{3}$.

Решение**.** Поскольку данное уравнение является линейными, полагаем $y = uv$ и, следовательно, $y' = u'v + v'u$. Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, имеем

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = x^4$$

Или

$$u'v + \left(v' - \frac{2}{x}v\right)u = x^4. \qquad (4)$$

Выберем v так, чтобы

$$v' - \frac{2}{3}v = 0, \text{ или } \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = 2\ln|x|; \quad v = x^2.$$

Подставив выражение v в уравнение (4), для определения u получим уравнение

$$u'x^2 = x^4 \text{ или } du = x^2 dx,$$

откуда

$$\int du = \int x^2 dx, \text{ т.е. } u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Поскольку $y = uv$, общее решение заданного уравнения записывается в виде

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)x^2.$$

Теперь, используя начальные условия $y\big|_{x=1} = \frac{4}{3}$, находим C; имеем $\frac{4}{3} = \left(\frac{1}{3} + C\right)\cdot 1$, откуда $C = 1$. Следовательно, частное решение заданного уравнения имеет вид

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)x^2 \quad \text{или} \quad y = \frac{x^5}{3} + x^2.$$

Контрольные задания

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$a(x)y' + b(x)y = C(x)$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$

1. $x^2 y' - 2xy = 3 \qquad y_0 = 3 \quad x_0 = 1$
2. $y' - 2y = e^{2x} \qquad y = 1 \quad x_0 = 0$
3. $xy' - y = x^2 Cosx \qquad y_0 = \dfrac{\pi}{2} \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$
4. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \qquad y = 5 \quad x_0 = 0$
5. $y'Sinx - yCosx = 1 \qquad y_0 = 0 \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$
6. $y' - 3\dfrac{y}{x} = 2x^4 \qquad y_0 = 3 \quad x = 1$
7. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2} \qquad y_0 = 0 \quad x_0 = 0$
8. $xy' + 2y = \dfrac{1}{x} \qquad y = 1 \quad x_0 = 3$
9. $xy + y' = 4x \qquad y_0 = 1 \quad x_0 = 1$
10. $xy' - 3y = x^4 e^x \qquad y_0 = e \quad x = 1$

4. Тест для самостоятельного контроля по дисциплине: «Высшая математика»

Вариант 1

Таблица 1

Вопросы	Варианты ответов
1	2
1 Найти сумму $(-3+2i)+(7-5i)$	а) $4-3i$; б) $-4+3i$; в) $-4-3i$; г) $10+7i$;
2 Вычислить $i^3 = ?$	а) –i; б) i; в) 1; г) -1;
3 Определить формулу записи комплексного числа $z = x + iy$	а) геометрическая; б) алгебраическая; в) тригонометрическая; г) показательная форма записи;
4 Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = ?$	а) -11; б) -5; в) 5; г) 4;
5 Найти корни системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ 5x-2y-2z=3 \\ x+y-z=-2 \end{cases}$	а) (-1,1,-2); б) (1,-1,2); в) (-1,1,-2); г) (1,1,2);
6 Найти длину вектора $\bar{a} = \{1,-2,2\}$	а) 6; б) 3; в) 4; г) 5;
7 Найти сумму векторов $\bar{a} = \{-7,8,3\}$ $\bar{b} = \{6,-3,2\}$	а) $\{-1,5,5\}$; б) $\{5,5,-1\}$; в) $\{3,4,1\}$; г) $\{-1,-5,5\}$;
8 Найти скалярное произведение векторов, если $\lvert\bar{a}\rvert = 3$ $\lvert\bar{b}\rvert = 4$ и угол между векторами 90^0	а) -1; б) 0; в) 1; г) 12;
9 Разложение вектора в базис $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ имеет вид $\bar{m} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$. Определить координаты вектора.	а) $\{-2,-3,1\}$; б) $\{2,3,-1\}$; в) $\{4,9,-1\}$; г) $\{-2,3,-1\}$;
10 Найти объем прямоугольного параллелепипеда построенного на векторах $\bar{a} = \{1,-2,1\}$ $\bar{b} = \{3,2,1\}$ $\bar{c} = \{1,0,-1\}$	а) 12; б) 24; в) -12; г) 10;

Продолжение таблицы 1

1	2
11 Найти площадь параллелограмма построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно $(\overline{a}*\overline{b})=2\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$	а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{16}$; в) 14; г) 7;
12 Найти производную функции $y=3*Lnx$	а) $\frac{3}{x}$; б) $3x$; в) $3e^{x}$; г) $\frac{3}{e^{x}}$;
13 Чему равен $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=?$	а) 1; б) 0; в) e^{x}; г) e;
14 Определить вид кривой второго порядка $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$	а) эллипс; б) окружность; в) парабола; г) гипербола;
15 Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5dx$	а) $\frac{x^6}{6}$; б) $\frac{x^5}{5}$; в) x^6; г) $5x^6$;
16 Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 xdx$	а) 3; б) 4; в) 5; г) -4;
17 Найти дифференциал функции $y=e^{2x}$	а) e^{2x}; б) $2e^{2x}$; в) $4e^{2x}$; г) $-2e^{2x}$;
18 Вычислить предел функции $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$	а) 1; б) 2; в) -1; г) -2;
19 Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$	а) 1,99; б) 1,98; в) 1,97; г) 1,96;
20 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^1=3x^2$	а) $y=x^3+c$; б) $y=x^3-c$; в) $y=3x+c$; г) $y=3x-c$;
21 Определить вид поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	а) сфера; б) однополостный гиперболоид; в) эллипсоид; г) конус;
22 Определить вид уравнений $y=kx+b$	а) общее уравнение прямой; б) уравнение гипербол; в) уравнение параболы; г) уравнение прямой с угловым коэффициентом;

Продолжение таблицы 1

1	2
23 Вычислить 6!	а) 620; б) 720; в) 520; г) -720;
24 Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = ?$	а) -6; б) 6; в) 10; г) 7;
25 Чему равен радиус окружности $x^2 + y^2 = 9$	а) 4; б) 9; в) 3; г) -9;
26 Найти расстояние между двумя точками А (2,3,0) В (4,5,1)	а) 5; б) 4; в) 3; г) 2;
27 С помощью признака Коши исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$	а) расходится; б) сходится; в) может сходится и расходится; г) знакочередующийся ряд;
28 Определить вид уравнения $y - y_0 = -\frac{1}{f^1(x_0)}(x - x_0)$	а) уравнение касательной; б) уравнение нормали; в) общее уравнение прямой; г) уравнение прямой проходящей через две точки;
29 Примените правило Лопиталя при вычислении предела функции $x \xrightarrow{Lim} 0 \frac{e^x - 1}{x} = ?$	а) -1; б) 0; в) 1; г) e^x;
30 Чему равно произведение матриц $A * A^{-1} = ?$	а) 0; б) 1; в) -1; г) 2;

Вариант 2

Таблица 2

1	2
1 Чему равно i^2	а) 0 б) 1 в) 2 г) -1
2 Выполните умножение комплексных чисел (2+3i)*(2-3i)	а) 11 б) 12 в) 13 г) -13
3 Z = r (cos φ+i sin φ) определить форму записи комплексного числа	а) алгебраическая форма записи комплексного числа б) тригонометрическая форма записи комплексного числа в) показательная форма записи комплексного числа г) геометрическая форма записи комплексного числа
4 Вычислите определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = ?$	а) 3 б) 4 в) 5 г) -6
5 Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - x = -2 \end{cases}$	а) (1; -1; 2) б) (1; -2; 3) в) (0; 1; -1) г) (-1; 2; -3)
6 Найти координаты вектора $\bar{AB}$, если А (1; -2; -4) В (2; -1; -5)	а) (1; 1; -1) б) (2; 2; -1) в) (3;-1; 1) г) (1; 2; -3)
7 Найти скалярное произведение векторов АВ и АС, если $\overrightarrow{AB} = \{1; -2; 3\}$ $\overrightarrow{AC} = \{2; 3; 5\}$	а) 10 б) 11 в) 12 г) -10
8 Найти угол между векторами $\bar{a} = \{5; 30\}$ $\bar{b} = \{3; 5; 0\}$	а) $\frac{П}{2}$ б) $\frac{П}{4}$ в) $\frac{П}{3}$ г) $\frac{П}{6}$

1	2
9 Найти векторное произведение векторов $a=\{1;2;0\}$ $в=\{0;-1;1\}$	а) $(\bar{a}*\bar{в})=2\bar{i}-\bar{k}-\bar{j}$ б) $(\bar{a}*\bar{b})=2\bar{i}+\bar{k}+\bar{j}$ в) $(\bar{a}*\bar{b})=2\bar{i}-\bar{k}+\bar{j}$ г) $(\bar{a}*\bar{b})=2\bar{i}+\bar{k}-\bar{j}$
10 Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}=2\bar{i}+5\bar{j}=7\bar{k}$ $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$ $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$	а) 0 б) 1 в) -1 г) 3
11 Найти уравнение прямой проходящей через две точки А (0;2) В (-3;7)	а) 5x-3y-6=0 б) 5x+3y+6=0 в) 5x-3y+6=0 г) 5x+3y-6=0
12 Найти расстояние между двумя точками А (1;0;2) В (3;1;4)	а) 3 б) 4 в) 9 г) 10
13 Определить вид кривой второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	а) окружность б) парабола в) гипербола г) эллипс
14 Чему равен $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$	а) 0 б) 1 в) -1 г) 2
15 Найти производную функции $f(x)=(3x^5+2\sqrt{x}+\sin x)$	а) $15x^4+\frac{1}{\sqrt{x}+\cos x}$ б) $15x^4+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin s$ в) $8x^4+2x+\cos x$ г) $8x^4+\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos s$
16 Определить вид уравнения $(x-x_0)=f^1(x_0)*(x-x_0)$	а) уравнение нормали б) уравнение касательной в) уравнение прямой г) уравнение с угловым коэффициентом
17 Вычислить неопределенный интеграл $\int \sin x dx =$	а) cosx+c б) sinx+c в) –sinx+c г) –cosx+c

Продолжение таблицы 2

1	2
18 Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 x^3 dx$	а) $\frac{1}{3}$ б) -$\frac{1}{3}$ в) $\frac{1}{4}$ г) -$\frac{1}{4}$
19 Найти площадь фигуры ограниченной линиями $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = \sqrt{x}$	а) $\frac{1}{4}$ б) $\frac{1}{3}$ в) 2 г) 3
20 Найти приближенное значение $\sqrt[3]{26{,}8}$	а) 2,79 б) 2,87 в) 2,67 г) 2,99
21 Найти дифференциал функции y=sin5x	а) dy=5cos5x б) dy=5sin5x в) dy=cos5x г) dy=-5sin5x
22 Вычислите предел функции $\underset{\to\infty}{Lim} \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{2x^3 - 2x - 6}$	а) 1 б) 1/2 в) 2 г) -6
23 Найти производную третьего порядка $y = e^{2x}$	а) $8e^{2x}$ б) $4e^{2x}$ в) e^{2x} г) $2x^2 + c$
24 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^1 = x$	а) $\frac{x^2}{2} + c$ б) $\frac{x^3}{3} + c$ в) $x^2 + c$ г) $2x^2 + c$
25 С помощью признака Даламбера исследовать сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\text{I}}$	а) ряд сходится б) ряд расходится в) ряд может сходится и расходится г) гармонический ряд
26 Определить вид поверхности $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$	а) конус б) эллипсоид в) гиперболоид г) сфера
27 Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 3$ при x=2	а) 4x+y-7=0 б) 4x-y+7=0 в) 4x-y-7=0 г) 4x+y+7=0
28 Определить вид уравнения Ax+By+Cz+D=0	а) общее уравнение прямой б) общее уравнение плоскости в) параметрическое уравнение прямой г) уравнение окружности

Продолжение таблицы 2

1	2
29 Вычислить определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$	а) 4 б) 3 в) 2 г) 1
30 Вычислить 5!	а) 135 б) 130 в) 125 г) 120

Правильные ответы
Таблица 3

№ задания	Вариант 2	Вариант 1
1	г	а
2	в	а
3	б	б
4	в	в
5	а	б
6	а	б
7	б	а
8	а	б
9	а	б
10	а	а
11	г	а
12	а	а
13	г	г
14	б	б
15	а	а
16	б	б
17	г	б
18	г	б
19	б	б
20	г	а
21	а	в
22	б	г
23	а	б
24	а	б
25	а	в
26	г	в
27	в	а
28	б	б
29	г	в
30	г	б

Вариант 3

Таблица 4

1	2
1 Найти разность двух комплексных чисел $(-2+5i)-(3+2i)$	а) $-5-3i$; б) $5+3i$; в) $-5+3i$; г) $5-3i$.
2 Вычислить i^2+i^4	а) 0; б) 1; в) -1; г) i.
3 Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = ?$	а) 14; б) 10; в) -10; г) -14.
4 Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = ?$	а) 8; б) -5; в) 4; г) 5.
5Найти корни системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x-y-z=3 \\ x+2y=3 \\ y+2z=-1 \end{cases}$	а) (-1,1,1); б) (1,-1,2); в) (1,1,-1); г) (1,2,-2).
6 Найти координаты вектора $\overline{CD}$ C (0,3,3) D (2,4,5)	а) (2,1,3); б) (1,2,2); в) (0,7,8); г) (-2,1,-2).
7 Найти разность векторов $\bar{a}=(3,10,-1\ \}$ $\bar{b}\{-2,3,-5\ \}$	а) $\bar{a}-\bar{b}=\{3,5,4\}$; б) $\bar{a}-\bar{b}=\{5,7,4\}$; в) $\bar{a}-\bar{b}=\{1,13,-6\}$; г) $\bar{a}-\bar{b}=\{-6,13,-5\}$.
8 Найти угол между векторами $\bar{a}=\{1,1,0\}$ $\bar{b}=\{1,0,1\}$	а) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; б) $cox\alpha=0{,}4235$; в) $\cos\alpha=0{,}6231$; г) $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
9 Найти объем пирамиды, ABCD $\overline{AB}=\{6,0,0\}$ $\overline{AC}=\{1,2,1\}$ $\overline{AD}=\{2,1,3\}$	а) $V=10$ куб.ед.; б) $V=15$ куб.ед.; в) $V=30$ куб.ед.; г) $V=5$ куб.ед.
10 Найти площадь треугольника, если векторное произведение имеет координаты $(\bar{a}*\bar{b})=\{1,2,-2\}$	а) $S_\Delta=3/2$ кв.ед.; б) $S_\Delta=3$ кв.ед.; в) $S_\Delta=4$ кв.ед.; г) $S_\Delta=6$ кв.ед.

Продолжение таблицы 4

1	2
11 Чему равен $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} =$	а) 1; б) 2; в) 3; г) 0.
12 Вычислите предел функции $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-15} =$	а) 2; б) -3; в) 1/5; г) 2/3.
13 Найти производную функции $y=\sqrt{x}$	а) $y^1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y^1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y^1 = 2\sqrt{x}$; г) $y^1 2x$.
14 Найти дифференциал функции $y = x^2 * (x+5)$	а) $y^1 = 3x^2 + 10x$; б) $y^1 = 3x + 10$; в) $y^1 = x^2 + 10$; г) $y^1 = x^2 + 10x$.
15 Вычислить неопределенный интеграл функции $\int(2x+3)dx$	а) $x^2 + 3 + c$; б) $x^2 - 3x + c$; в) $x^2 + 3x + c$; г) $\frac{x^3}{3} + c$.
16 Вычислить определенный интеграл $\int_3^5 dx$	а) 1; б) 2; в) -2; г) 5.
17 Что определяет данное уравнение $(\bar{a} * \bar{b}) = x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2$	а) векторное произведение векторов; б) смешанное произведение векторов; в) скалярное произведение векторов; г) сумму векторов.
18 Найти координаты центра сферы $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 25$	а) (1,-2,2); б) (-1,2,-2); в) (1,2,3); г) (1,2,-2).
19 Вычислить 3!+4!=?	а) 25; б) 30; в) 7!; г) 16.
20 Найти общее решение дифференциального уравнения $y^1 = x^2$	а) $y = \frac{x^2}{2} + c$; б) $y = x^3 + c$; в) $y = \frac{x^3}{3} + c$; г) $y = x - c$.
21 Вычислить предел, применяя правило Лопиталя $\lim x_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} =$	а) 2; б) 1; в) 1/2; г) 0.
22 Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	а) параболу; б) эллипсоид; в) конус; г) сферу.

Продолжение таблицы 4

1	2
23 Найти частные производные функции $z = x^2 + y^2$	а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y^2$; в) $\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$; г) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^3}{3} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^3}{3}$.
24 Прямая задана уравнением $y = x + 2$. Найти угловой коэффициент данной прямой	а) k=2; б) k=1/2; в) k=0; г) k=1.
25 Найти значение $\sqrt{8}$	а) 2,85; б) 2,84; в) 2,83; г) 2,95
26 Найти общее решение дифференциального уравнения $2ydy = 3x^2dx$	а) $y = \sqrt{x^2 + c}$; б) $y = \sqrt{x^3 + c}$; в) $y = x^3 + c$; г) $y = 3x^2 + c$.
27 Разложение вектора в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеет вид $\overline{m} = 5i - 6j + 2\bar{k}$. Найти координаты вектора $\overline{m}$.	а) (5,-6,2); б) (-5,6,-2); в) (5,6,3); г) (-6,2,5).
28 Найти производную третьего порядка $f(x) = e^x$	а) e; б) e^x; в) 1; г) 0.
29 Дана прямоугольная система координат в пространстве O_{xyz}. Как называют ось O_z?	а) ось абсцисс; б) ось ординат; в) ось аппликат; г) ось симметрии.
30 Производная $f^1(x)$ в точках х равна угловому коэффициенту касательной к графику функций $y = f(x)$ в точке абсцисса, которой равна х. В этом заключается …	а) геометрический смысл производной б) механический смысл производной; в) физический смысл производной; г) математический смысл производной.

Вариант 4

Таблица 5

1	2
1 Найти корни квадратного уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$	а) $x_1 = 2 + i \quad x_2 = 2 - i$ б) $x_1 = -2 + i \quad x_2 = -2 - i$ в) $x_1 = -2 + 4i \quad x_2 = -2 - 4i$ г) $x_1 = 1 \quad x_2 = 3$
2 Вычислить $i^5 = ?$	а) 0 б) i в) -1 г) 1
3 Определить форму записи комплексного числа $z = r \cdot e^{i\varphi}$	а) алгебраическая б) тригонометрическая в) показательная г) математическая
4 Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix} Sin\alpha - Cos\alpha \\ Cos\alpha \cdot Sin\alpha \end{vmatrix} = ?$	а) 1 б) -1 в) 0 г) $Cos2\alpha$
5 Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -9 \end{vmatrix} = ?$	а) 1 б) 2 в) -4 г) 0
6 Найти корни системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$	а) (-1;1;2) б) (-1;-1;-2) в) (1;-1;2) г) (0;-2;1)
7 Дан вектор $\overline{a} = (3;-2;7)$ Найти $5\overline{a} - 3\overline{a}$	а) (2;-3;6) б) (5;-4;14) в) (-6;4;-14) г) (6;-4;14)
8 Если скалярное произведение векторов равно нулю, $(\overline{a} \cdot \overline{b}) = 0$, то …	а) векторы параллельны б) перпендикулярны в) лежат на одной прямой г) противоположные
9 Если векторное произведение векторов равно нулю, $(\overline{a} \times \overline{b}) = 0$, то …	а) векторы коллинеарны б) векторы компланарны в) векторы равные г) векторы противоположно направлены

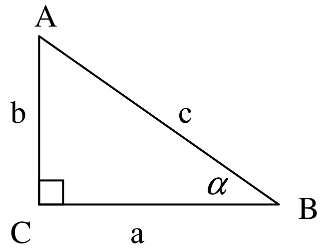
Продолжение таблицы 5

1	2
10 Если смешанное произведение равно нулю, $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 0$, то векторы …	а) коллинеарны б) равные в) компланарные г) неравные
11 Найти длину вектора $\bar{a} = \{1;3;-4\}$	а) $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{26}$ б) $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{27}$ в) $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{30}$ г) $\lvert\bar{a}\rvert = 5$
12 Найти производную функции $y = 4x^3 + \sqrt{x} + 3$	а) $y' = 7x^2 + \sqrt{x}$ б) $y' = x^2 + 3\sqrt{x}$ в) $y' = 12x^2 - 2\sqrt{x}$ г) $y' = 12x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
13 Чему равен второй замечательный предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = ?$	а) e^{-3} б) e в) 1 г) 0
14 Вычислить неопределённый интеграл $\int (x+2)^2 dx$	а) $x^3 + 2x^2 + 4x$ б) $\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x + C$ в) $x^3 + 2x^2 + C$ г) $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + C$
15 Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^1 3x^2 dx$	а) -1 б) 3 в) $\frac{1}{3}$ г) 1
16 Найти дифференциал функции $y = (1 - Cosx)$	а) $y' = Sinx$ б) $y' = Cosx$ в) $y' = -Cosx$ г) $y' = -Sinx$
17 Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 - x^2 - 3}$	а) -1 б) 0 в) $\frac{1}{2}$ г)1
18 Найти приближенное значение $\sqrt[3]{9}$	а) 2,08 б) 2,09 в) 2,28 г) 2,07
19 Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 5x^4$	а) $y = x^5 + C$ б) $y = -x^5 + C$ в) $y = 20x^3 + C$ г) $y = x^5 - C$
20 Определить вид кривой второго порядка $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	а) эллипс б) гипербола в) парабола г) окружность

Продолжение таблицы 5

1	2
21 С помощью признака Даламбера исследовать сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5}$	а) ряд может сходиться и расходиться б) ряд абсолютно сходится в) ряд сходится г) ряд расходится
22 Вычислить $\frac{7!}{6!}$	а) 5 б) 6 в) 7 г) 8
23 Найти уравнение прямой проходящей через две данные точки $A(2;3)$ $B(7;5)$	а) $2x-5y+11=0$ б) $2x+5y+11=0$ в) $-2x-5y+11=0$ г) $-2x+5y-11=0$
24 Пусть $y_1=k_1x+b_1$ уравнения прямой с угловыми $y_2=k_2x+b_2$ коэффициентами, если $k_1\cdot k_2=-1$, то	а) прямые перпендикулярные б) параллельные в) пересекаются г) совпадают
25 Что определяет данная формула $Cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$	а) угол между прямыми линии б) угол между векторами в) угол между плоскостями г) нахождение углового коэффициента
26 Дан вектор $\bar{a}=\{2;-3;5\}$, разложить данный вектор в базисе $(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$	а) $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$ б) $\bar{a}=-2\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$ в) $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-5\bar{k}$ г) $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$
27 Как называется данная формула $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$	а) формула Гаусса б) формула Муавра в) формула Бернулли г)формула Ньютона-Лейбница
28 Как проверить результат интегрирования?	а) дифференцированием б) подстановкой в) с помощью таблицы интегралов г) с помощью графики
29 Найти расстояние между двумя точками $M(2;3;4), N(3;5;6)$	а) d = 5 б) d = 4 в) d = 3 г) d = 10

Продолжение таблицы 5

1	2
30 Чему равен $Cos\alpha = ?$  	а) $Cos\alpha = \frac{a}{c}$ б) $Cos\alpha = \frac{b}{c}$ в) $Cos\alpha = \frac{c}{a}$ г) $Cos\alpha = \frac{a}{b}$

Правильные ответы
Таблица 6

№ задания	Вариант 3	Вариант 4
1	в	а
2	а	б
3	б	в
4	г	а
5	в	г
6	а	в
7	б	г
8	а	б
9	г	а
10	а	в
11	б	а
12	в	г
13	а	а
14	а	б
15	в	г
16	б	а
17	в	в
18	а	а
19	б	а
20	в	б
21	б	г
22	в	в
23	а	а
24	г	а
25	в	б
26	б	а
27	а	г
28	б	а
29	в	в
30	а	а

Список использованных источников

1 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – 5-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2005.- Ч. 1 – 288 с. – ISBN 5-8112-1170-8.

2 **Соловейчик, И. Л.** Сборник задач по математике с решениями для техникумов / И.Л. Соловейчик, В.Т. Лисичкин. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»; ООО «Мир и Образование», 2006. – 464 с.: ил. – ISBN 5-329-00902-2 (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век») - ISBN 5-94666-121-3 (ООО «Издательство «Мир и Образование»).

3 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник для вузов/ В. С. Шипачев.- 6-е., стер.- М.: Высшая школа, 2008. - 479с. - ISBN 5-06-003959-5.

4 **Омельченко, В. П.** Математика: учебное пособие, среднее профессиональное образование / В.П. Омельченко. - Ростов н/Д. : Феникс, 2005.-380 с. - ISBN 5-222-06004-7.

5 **Дадаян, А. А**. Математика : учебник / А. А. Дадаян. - 3-е изд. – М. : ФОРУМ, 2011. – 544 с. – ISBN978-5-91134-460-3.

6 **Богомолов, Н. В**. Сборник задач по математике : учеб.пособие для ссузов / Н. В. Богомолов. - 6-е изд., стереотип – М. : Дрофа, 2010. – 204 с. – ISBN 978-5-358-07916-8.