Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Индустриально-педагогический колледж

Отделение технологии производства и промышленного оборудования

Г. В. Погадаева

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»
В качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программе среднего профессионального образования по специальностям: 230401.51 Информационные системы (по отраслям), 220703.51 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 160108.51 Производство летательных аппаратов,151901.51 Технология машиностроения, 051001.52 Профессиональное обучение (по отраслям)

Оренбург
2012

УДК 517.224(076)
ББК 22.16я 7
П43

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С. А. Герасименко

Погадаева, Г. В.

П43 Применение производной при решении задач на оптимизацию: методические указания по выполнению практических работ / Г. В. Погадаева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 26 с.

Основное содержание: подробное объяснение решения задач в применении производной на нахождение наибольшего и наименьшего значения.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Математика» предназначены для студентов, обучающихся в колледже по специальностям: 230401.51 Информационные системы (по отраслям), 220703.51 Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям), 160108.51 Производство летательных аппаратов, 151901.51 Технология машиностроения, 051001.52 Профессиональное обучение (по отраслям) очной формы обучения.

УДК 512.22.(076)
ББК 22.16я 7

Содержание

Введение

Большую часть своих усилий человек тратит на поиск оптимального решения поставленной задачи. Как, располагая определенными ресурсами, добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени - так ставятся вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества.

С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям разных профессий например: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стремятся спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т.д.

Математикам удалось разработать методы решения задач на наибольшее и наименьшее значение, или, как их еще называют, задач на оптимизацию от латинского слова "оптимум" - наилучший.

В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причём надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает своё наименьшее или наибольшее т.е. наилучшее в данных условиях значение.

Многие задачи, поиска оптимальных решений, могут быть решены только с использованием методов дифференциального исчисления. Ряд задач такого типа решается с помощью специальных методов линейного программирования, но существуют и такие экстремальные задачи, которые решаются средствами элементарной математики.

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трёх этапов математического моделирования:

1) составление математической модели;

2) работа с моделью;

3) ответ на вопрос задачи.

Следует различать также два вида задач на оптимизацию.

В задачах первого вида улучшение достигается за счет коренных качественных изменений: выбор новых конструктивных решений, переход на новую технологию изготовления.

В задачах второго рода качественная сторона дела остается неизменной, но меняются количественные показатели. В таких задачах находят наибольшее и наименьшее значения функций, зависящих от одной или нескольких переменных.

1 Математические модели и их свойства

Прежде чем решать какую - либо жизненную задачу, человек старается взвесить имеющуюся у него информацию, выбрать из нее существенную. И только потом, когда станет более или менее ясно, из чего исходить и на какой результат рассчитывать, он приступает к решению задачи. Часто описанный процесс называют условием задачи, фактически же это замена исходной жизненной задачи ее моделью. В осмыслении простейшей жизненной ситуации присутствует модельный подход, хотя человек обычно не замечает своей деятельности по созданию моделей - настолько она для него естественна. Иное дело, если возникающая задача затрагивает ключевые моменты жизни одного человека или какого - либо сообщества людей. Разнообразие информационных аспектов в каждой такой задаче настолько велико, что бывает сложно из всего многообразия информации об изучаемом явлении или объекте выбрать наиболее существенные. В таких случаях необходимо сделать упрощающее предположение, чтобы выделить исходные данные, определить, что будет служить результатом и какова связь между исходными данными и результатом. Все это - предположения, исходные данные, результаты, связи между ними - их называют моделью задачи.

Если построенная модель дает удовлетворительные результаты при решении жизненных задач, то говорят, что модель адекватна рассматриваемому объекту, процессу или явлению. Нередко для решения модельной задачи требуется некоторый инструментарий. Этот инструментарий обычно организуется в виде единого объекта, называемого исполнителем. Чтобы исполнитель мог получить ответ, ему нужны указания, что и как делать. Такие указания часто представляются в виде алгоритма, в котором задаются математические соотношения, связывающие исходные данные и результат.

В этом случае говорят о построении математической модели задачи.

Обычно модель возникает как необходимый этап решения конкретной задачи. Однако в дальнейшем может происходить обособление модели от задачи, и модель начинает жить самостоятельно. Примером может служить сюжет движения с постоянной скоростью, который возникал в человеческой деятельности столь часто, что в конце концов обособился от задач и стал составляющей физического знания, называемого "равномерное прямолинейное движение". Теперь при решении задачи, связанная с равномерным движением пользуются этой готовой моделью процесса. В одних задачах результатом может оказаться время, в других - пройденный путь, в третьих скорость. Остальные параметры модели процесса станут исходными данными.

Если же в задаче фигурирует не равномерное движение, а равноускоренное, то физика и здесь предложит готовую модель в виде формулы:

$$S=v_0 t+\frac{at}{2}$$

Все естественные науки, использующие математику, можно считать математическими моделями явлений. Например, гидродинамика является моделью движения жидкости, математическая экономика - моделью процессов экономики и т.д. До появления компьютера и других электронно-вычислительных машин математическое моделирование сводилось к построению аналитической теории явления. Не всегда математическую теорию явления удавалось доводить до возможности вывода формул. Природа оказывалась сложнее возможностей аналитических методов математики. Приходилось вносить значительные упрощения в модель явления.

В этом веке математика пополнилась мощным математическим методом исследования: моделированием сложных систем с помощью информационных технологиях на компьютерах. Теперь исследователь ставит перед собой не ту цель, что раньше – вывод расчетной формулы. Теперь он стремится вычислять те или иные параметры, характеризующие явление. Таким путем были исследованы сложные вопросы, связанные с термоядерными реакциями, поведением самолетов в критических ситуациях, влиянием различных факторов на экологические системы, распространением эпидемий и пр.

В настоящее время широко используется математическое моделирование и тогда, когда о физической структуре процесса известно крайне мало. В этом случае строится гипотетическая модель и на ее основе выводятся следствия уже доступные наблюдению. Если такие модели не оправдываются опытом, то они живут недолго и отмирают, уступив место другим моделям, позволяющим познать природу вещей точнее.

История науки показывает, сколь большую роль сыграли научные гипотезы и построенные на их основе математические модели явлений.

Математический аппарат, применяемый при построении моделей, весьма разнообразен. Кроме классических разделов математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление) широко используются современные разделы математики, в которых изучаются методы, позволяющие находить оптимальные решения: линейное, нелинейное и динамическое программирование. Для анализа многих операций применяют аппарат теории вероятностей. Это вызвано тем, что исследования проводятся в условиях, определенных не полностью, зависящих от случайных причин. В тех случаях, когда в центре внимания находятся вопросы динамики явлений, широко применяют аппарат дифференциальных уравнений, а в более сложных случаях используется метод статистического моделирования.

2 Применение производной при решении задач на оптимизацию

Задача 1. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению её ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы её прочность была наибольшей? (рисунок 1) [1]

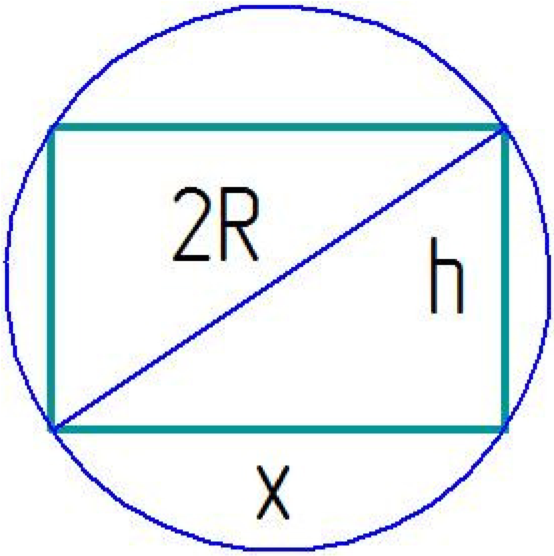

Рисунок 1 – сечение балки вытесанная из цилиндрического бревна

Решение. Составление математической модели.

Оптимизируемая величина-прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей. Обозначим оптимизируемую величину буквой y.

Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. Ширину балки обозначим буквой x. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R, то $0 \le x \le 2R$.

Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (по теореме Пифагора), значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

Прочность балки y пропорциональна произведению xh^2, т. е.

$y = kxh^2$ (где коэффициент k – некоторое положительное число).

Значит $y = kx(4RR^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R]$.

математическая модель задачи составлена.

Работа с составленной моделью.

Для функции $y = kx(4RR^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R\}$ надо найти $y_{наиб}$.

Имеем: $y = 4kR^2x - kx^3$

$y' = 4kR^2 - 3kx^2$

Приравниваем производную нулю, получим

4kR^2-3kx^2= 0

$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$; $x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Заданному отрезку принадлежит лишь точка x= $x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Вычислим значение функции $y = 4kR^2x - kx^3$ в точке $x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ на концах отрезка в точках 0 и 2R.

Имеем f(0)=0 f(2R)=0 $f(\frac{2R}{\sqrt{3}}) > 0$ значит $y_{наиб}$ =f $(\frac{2R}{\sqrt{3}})$.

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Выяснили, что ширина прямоугольника, являющая осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Найдем высоту: $h^2 = 4R^2 - x^2$ т.е. h^2=$4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}$.

$h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\frac{h}{x} = \sqrt{2}$

Ответ: Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

Замечание: Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но они принимают указанное отношение равным 1,4 (приближённое значение иррационального числа $\sqrt{2}$ как раз равно 1,4).

Задача 2. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать V литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей? (рисунок 2)

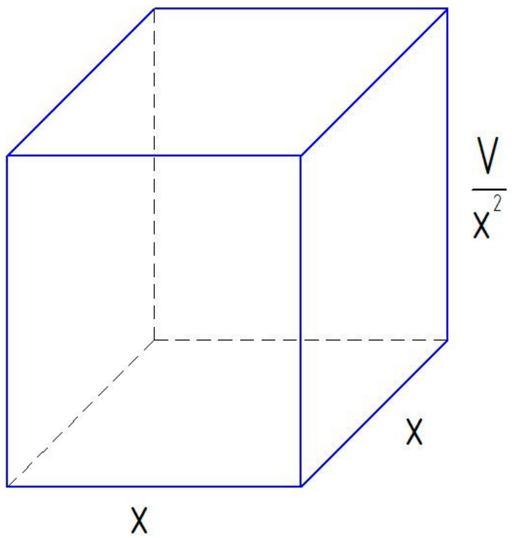

Рисунок 2 – бак имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием

Решение. Составим математическую модель.

Оптимизируемая величина – площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим оптимизируемую величину буквой S.

Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой x. Ясно, что $x>0$. Других ограничений нет, значит, $0<x< +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменой.

Если h – высота бака, то $V=x^2h$, находим $h=\frac{V}{x^2}$.

На рисунке 2 изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$.

Значит, $S = x^2 + 4\frac{V}{x^2}x = x^2 + \frac{4V}{x}$.

$$S = x^2 + 4\frac{V}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Математическая модель задачи составлена.

Работа с составленной моделью.

На этом этапе для функции $S = x^2 + 4\frac{V}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ надо найти $y_{\text{наим.}}$.

Для этого нужна производная функции.

$$S' = 2x - 4\frac{V}{x^2}, \qquad S' = \frac{2(x^3 - 2V)}{x^2}$$

На промежутке $(0, +\infty)$ критических точек нет, а стационарная точка только одна: $S' = 0$ при $x = \sqrt[3]{2V}$.

Заметим, что при $x < \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' < 0$,

а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' > 0$.

Значит, $x = \sqrt[3]{2V}$. – единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, а поэтому в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Ответ на вопрос задачи. В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$.

Задача 3. Требуется вырыть силосную яму объёмом $32\ \text{м}^2$, имеющую квадратное дно, так чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количества материала. Каковы должны быть размеры ямы?

Решение. Пусть сторона дна есть x, тогда площадь дна составит x^2.

Высота ямы $\frac{32}{x^2}$, а площадь стенки $\frac{x.32}{x^2} = \frac{32}{x}$. Сумму площадей дна и четырех стенок обозначим через S, т.е.

$$S{=}x^2 + 4 * \frac{32}{x}.$$

Найдем производную S по x:

$$S' = 2x\frac{4 * 32}{x^2}; \quad S' = 0; \quad x = 4$$

Поскольку $S'' = 2 + \frac{2*4*32}{x^2}$; $S''(4) > 0,$ заключаем, что при $x = 4$ функция имеет минимум.

Ответ: Сторона дна ямы равна 4 м, а высота ямы есть $\frac{32}{4^2} = 2$ м .

Задача 4. Имеется квадратный лист жести, сторона которого *a*=60 см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку без крышки. Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем? (рисунок 3) [3]

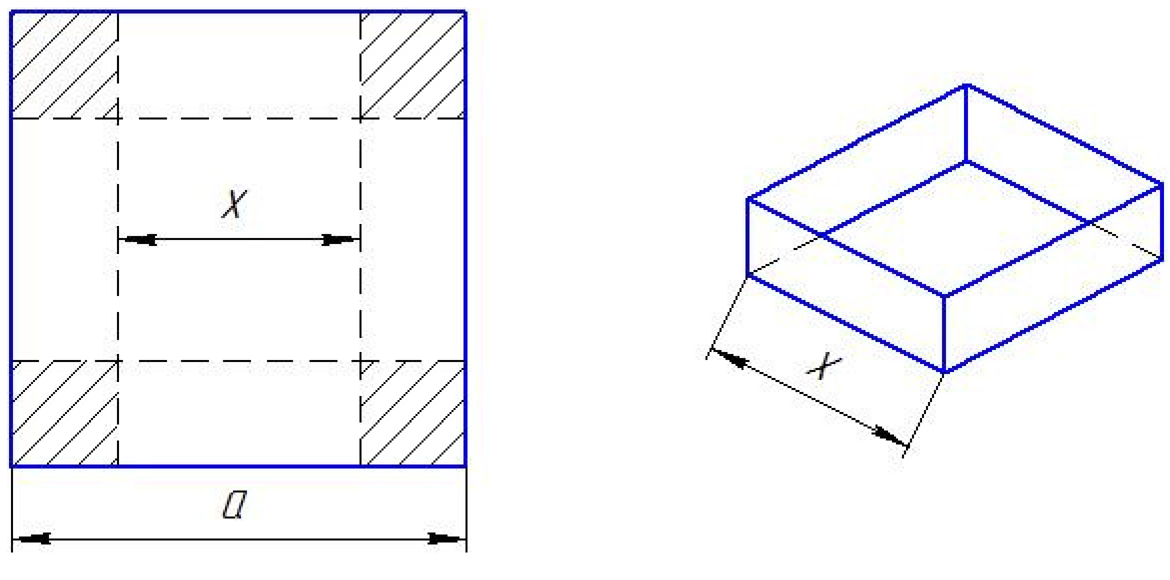

Рисунок 3 - квадратный лист жести

Решение. По условию, сторона квадрата $a = 60$. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через x. Дном коробки является квадрат со стороной (а-2x), а высота коробки равна стороне $\boldsymbol{x}$ вырезаемого квадрата.

Следовательно, объем коробки выразится функцией

$$V = (a - 2x)^2 x.$$

Значение х, при котором функция примет наибольшее значение. Для этого сначала преобразуем функцию, а затем исследуем ее на экстремум:

$$V = (a^2 - 4ax + 4x^2)x:$$

$$V = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x:$$

$$V' = 12x^2 - 6ax + a^2 = 0:$$

Очевидно, что значение $x = \frac{a}{2}$ не отвечает условию, так как в этом случае квадрат был бы разрезан на четыре равные части и никакой коробки не получилось бы. Поэтому исследуем функцию на экстремум в критической точке

$$x_2 = \frac{a}{6}$$

$$V'' = 24x - 8a;$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = 24\frac{a}{6} - 8a = 4a - 8a = -4a < 0,$$

т.е. при х = $\frac{a}{6}$ достигается максимум.

Итак, сторона вырезаемого квадрата должна быть равна х=$\frac{a}{6}$. В данном конкретном случае при а = 60 см получим х = 10 см.

Ответ: Размеры вырезаемых квадратов коробки равны

60 см, 10 см.

Задача 5. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса r (рисунок 4).

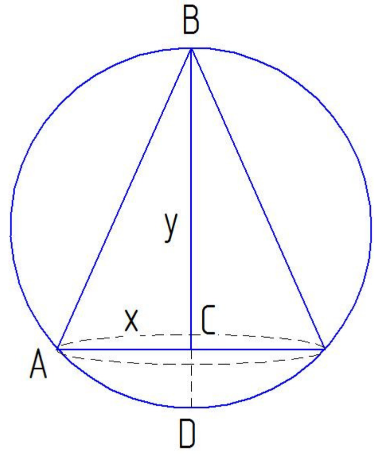

Рисунок 4 – Конус вписанный в шар

Решение. Обозначим радиус основания конуса через x, высоту его через y. Тогда объем V конуса будет равен $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$. Из рисунка 4 имеем $x^2=BC\cdot CD=y(2r-y)$.

Поэтому функция V выразится через переменную y следующим образом:

$$V=\frac{\pi}{3}y^2(2r-y).$$

Функция V достигает максимума, а вместе с тем и наибольшего значения, при $y=\frac{3}{4}\pi$.

Задача 6. Каковы должны быть размеры прямоугольной комнаты площадью 25 $м^2$, чтобы периметр ее был наименьшим?

Решение. Примем длину комнаты равной x (м), тогда ширина равна $\frac{25}{x}$, а периметр $y=2(x+\frac{25}{x})$.

Периметр y есть функция, длины x определенная для всех положительных значений x. Определим интервалы ее возрастания и убывания.

Находим производную: $y' = \frac{2(x-5)(x+5)}{x^2}$. Так как знаменатель больше нуля и длина x положительна, то знак производной определяется знаком разности (x-5).

Таким образом, периметр прямоугольника имеет наименьшее значение (минимум), если длина прямоугольника 5 м и ширина $\frac{25}{5} = 5$ м т.е. когда комната имеет квадратную форму.

Задача 7. Оросительный канал имеет форму равнобочной трапеции. Боковые стороны, которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

Решение. Обозначим меньшее основание трапеции через a, угол наклона боковых сторон – через S (рисунок 5).

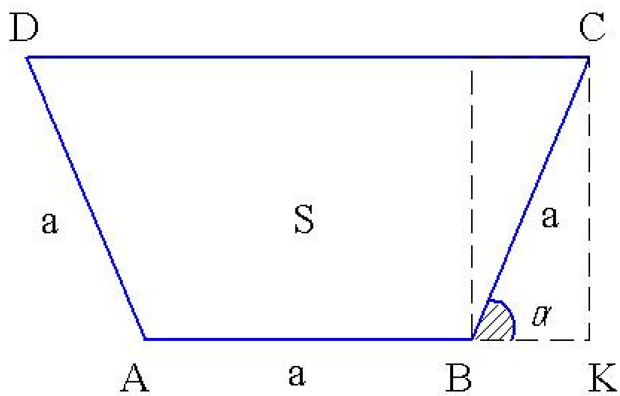

Рисунок 5 - Оросительный канал имеющий форму равнобочной трапеции

По условию, |AB|=|AD|=|BC|= a.

Из треугольника BCK найдем |BK|=a cosα. Тогда |CD|=a+2a cosα.

Определим площадь трапеции:

$$S = \frac{|AB|+|DC|}{2} |CK| = \frac{a+a+2acos\alpha}{2} asin\alpha = a^2(1+cos\alpha)sin\alpha.$$

Чтобы найти наибольшее значение площади S = S(α), нужно найти критические точки, принадлежащие интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$, вычислить значения функции S(α) в этих точках и на концах интервала $(0, \frac{\pi}{2})$, а затем из полученных результатов выбрать наибольший.

Найдем производную:

$$=a^2((1+cos\alpha)'sin\alpha+(1+cos\alpha)(sin\alpha)')=S'(\alpha)$$

$$a^2(-sin^2\alpha+\cos\alpha+cos^2\alpha)=a^2(2cos^2\alpha+cos\alpha-1).$$

Приравняем производную нулю и решим полученное уравнени:

$$(2cos^2\alpha+cos\alpha-1)=0,$$

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{2\$},\qquad \cos\alpha_2=-1,$$

откуда $\alpha_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\qquad \alpha_2=\pi+2\pi n.$

Интервалу $(0,\frac{\pi}{2})$, принадлежит только критическая точка $\alpha_1=\frac{\pi}{3}$.

Найдем $S(\alpha_1)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+cos\frac{\pi}{3}\right)sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2,$

S (0) =0, $S(\frac{\pi}{2})=a^2$.

Сравнивая полученные результаты, заключаем, что функция

S (α) принимает наибольшее значение при $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Таким образом, площадь сечения канала является наибольшей, если угол наклона боковых сторон равен 60°.

Задача 8. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной *a,* р., и переменной, возрастающий пропорционально кубу скорости. При какой скорости *v* плавание судна окажется наиболее экономичным? [4]

Решение. Плавание окажется наиболее экономичным, если затраты на 1 км пути будут наименьшими. Из условия вытекает, что за сутки расходы составят $(a+kv^3)$, где k- коэффициент пропорциональности, при этом за сутки пути судно пройдет $24v$ км.

Следовательно, расходы на 1 км пути составят

$$P=\frac{a+kv^3}{24v}.$$

Эта функция при v=0 имеет бесконечный разрыв, но нулевая скорость для нас не представляет интереса.

Найдем производную: $P' = \frac{2kv^3 - a}{24v^2}$.

Критическое значение v получим, решая уравнение $P_v' = 0$, т.е.

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

При переходе через это значение P' меняет знак с минуса на плюс следовательно, функция имеет минимум.

Итак, наиболее экономическая скорость

$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. плавания есть $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

Ответ: экономическая скорость плавания $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

Задача 9. Над центром круглого стола радиуса r висит лампа. На какой высоте следует подвесить эту лампу, чтобы на краях стола получить наибольшую освещенность (рисунок 6).

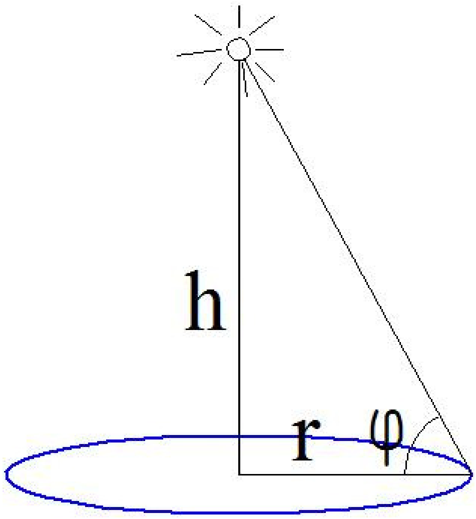

Рисунок 6 - Над центром круглого стола радиуса r висит лампа

Решение. Из физики известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света и пропорциональна синусу угла наклона луча света к освещаемой маленькой площадке. Иными словами,

$$E = k \times \frac{\sin\varphi}{h^2 + r^2}.$$

где E - освещенность на краю стола,

$$\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}},$$

h - высота лампы до стола.

Вместо функции $E = k\frac{h}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$ рассмотрим функцию

$$T = \frac{1}{k^2} E^2 = \frac{h^2}{(h^2 + r^2)^3}.$$

При этом вместо h можно взять переменную z=h^2 и найти критические точки T как функции от z:

$$T = \frac{z}{(h^2 + r^2)^3},$$

$$T'' = \frac{(z+r^2)^3 - z3(z+r^2)^2}{(z+r^2)^6} = \frac{z+r^2-3z}{(z+r^2)^4}$$

$$T' = 0,$$

$$r^2 - 2z = 0,$$

$$z = \frac{r^2}{2}, \qquad h^2 = \frac{r^2}{2}, \qquad h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Итак, освещенность максимальна, если $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$, т.е.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: максимальная освещенность при $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 10. Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением 4,5 $м^2$. Каковы должны быть размеры сечения, чтобы для облицовки стенок и дна пошло наименьшее количество материала?

Решение. Пусть стенки канала имеют длину *x м.*, а дно канала - *y м.* Тогда x × y = 4,5, $y = \frac{4,5}{x}$, S = L (2x+y), S = L (2x + $\frac{4,5}{x}$).

Найдем производную.

Так как S'=0, и L (длина канала) - положительное число, то *x*=1,5.

Легко убедиться, что при данном *x* значение S минимально.

Ответ: *x* = 1,5 *м*, *y* = 3 *м*

Практические задачи, приводящие к исследованию линейной функции

Задача 1. Расстояние между двумя шахтами *A* и *B* по шоссейной дороге 60 *км.* На шахте *A* добывается 200 т руды в сутки, на шахте *B* - 100 т в сутки. Где нужно построить завод по переработке руды, чтобы для ее перевозки количество тонно-километров было наименьшим?

Решение.

Выясняем, что суммарное количество тонно-километров изменяется в зависимости от места нахождения завода, вычислив его, например, для случаев, когда завод находится от пункта *A* на расстоянии *30 км, 20 км, 10 км.*

Далее приступаем к решению задачи, обозначив расстояние от завода *C* до шахты *A* через *x*:

$$AC = x \qquad BC = 60 - x$$

Количество тонно-километров, пройденных транспортом от А до *C* за каждый день, составляет *200 x* т/*км,*

от В до *C* - *100 (60 - x)* т/*км.*

Суммарное количество тонно-километров выразится функцией

$$y = 200x + 100\,(60 - x) = 100x + 6000,$$

которая определена на сегменте [*0; 60*].

Ясно, что это уравнение может иметь бесконечно много решений.

Вопрос - найти дешевый вариант перевозок.

Исследуя функцию $y = 100x + 6000$ на сегменте [*0; 60*], получим

$$y_{min} = 6000.$$

Эта линейная функция будет иметь минимальное значение при $x = 0$,

$$y_{min} = 6000 \text{ т/км}.$$

Завод надо строить возле шахты *A*.

Для лучшего понимания этой задачи целесообразно дополнительно выяснить вопрос, где нужно бы построить завод, если бы:

а) в шахте A добывалось 100 т, а в шахте B - 200 т руды;

б) в шахте A - 200 т, а в шахте B - 190 т;

в) в шахте A и шахте B - по 200 т руды;

Чтобы решить этот вопрос, нужно найти на сегменте $[0; 60]$ минимум функции:

а) $y = 100x + 200(60 - x) = - 100x + 12000;$

б) $y = 200x + 190(60 - x) = 10x + 11400;$

в) $y = 200x + 200(60 - x) = 12000.$

Ответ: Из всего этого можно сделать такой вывод: если в шахте A добывается руды больше, чем в шахте B, то завод надо строить возле шахты A; если же количество руды в этих шахтах одинаковое, то завод можно строить в любом месте вблизи шоссейной дороги между шахтами A и B.

Задача 2. На колхозной ферме нужно провести водопровод длиной 167 м. Имеются трубы длиной 5 м и 7 м. Сколько нужно использовать тех и других труб, чтобы сделать наименьшее количество соединений трубы не резать)?

Решение. Учитывая, что количество как одних, так и других труб может изменяться,

количество 7 - метровых труб обозначим через x,

количество 5 - метровых – через y,

тогда $7x$ - длина 7 - метровых труб,

$5y$ - длина 5 - метровых труб.

Получаем уравнение $7x + 5y = 167.$

Так как $x, y \in Z$, то методом перебора легко найти соответствующие пары значений x и y, которые удовлетворяют уравнение $7x + 5y = 167.$

$(1; 32)$, $(6; 25)$, $(11; 18)$, $(16; 11)$, $(21; 4)$.

Ответ: Из этих решений наиболее выгодное последнее, т.е.

$$x = 21, y = 4.$$

Использование свойства квадратичной функции при решении экстремальных задач

Задача. На учебном полигоне произведен выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении не разрывающимся снарядом. Требуется определить наибольшую высоту подъема снаряда, если начальная скорость снаряда V = 300 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Из курса физики известно, что путь S, пройденный телом при равноускоренном движении, изменяется в зависимости от времени по закону

$$S = s_0 + \frac{at^2}{2},$$

где s_0 - начальный путь, м;

a - ускорение, м/с;

t - время, с.

В рассматриваемом случае *s* =0, *v* =300 м/с, *a*=-5 м/с ,

S(t) = 300t - 5t2 .

Функция S(t) принимает наибольшее значение при

S(30)= 300×30-5×302 =4500(м)

Ответ: Наибольшая высота подъема снаряда равна 4500 м.

Как видно из примеров, решение экстремальных задач дает возможность установить более тесную межпредметную связь алгебры, геометрии и физики. При их решении можно приобрести не только математическую информацию, но и знания из курса физики.

Решение физических задач поучительно с точки зрения математики, так как можно показать тонкости тех или иных математических приемов в действии, в их практическом приложении.

В частности, эти задачи помогают осознать, что функция, заданная аналитической формулой, может выражать зависимости между реальными величинами в самых различных явлениях и процессах.

3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Требуется огородить сеткой длиной 600 м зону отдыха прямоугольной формы, прилегающую к реке. Определите, каковы должны быть длина и ширина участка, чтобы он имел наибольшую площадь.

Ответ: наибольшая площадь участка, если ширина150 м, длина 300 м.

Задача 2. Прямоугольный лист жести имеет длину 64 см и ширину 40 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была максимальной.

Задача 3. Определить размеры открытого бассейна объемом 256 $м^2$, имеющего дно в виде квадрата, так чтобы на облицовку его стен и дна было израсходовано наименьшее количество материала.

Ответ: 8 м. 8 м, 4 м.

Задача 4. Прилегающую к дому прямоугольную площадку нужно оградить решеткой длиной 120 м. Определить размеры площадки, так чтобы она имела наибольшую площадь.

Ответ: 30 м, 60 м.

Задача 5. Тело движется по закону $s = 18t + 9t^2 - t^3$. Найти его максимальную скорость.

Ответ: $v_{max} = v(3) = 45$

Задача 6. Количество Q вещества, получающегося в процессе химической реакции, выражается формулой $Q=3+9t^2 - t^3$, где t - время. Найти максимальную скорость реакции.

Ответ: $v_{max} = v(3) = 27$

Задача 7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен а. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Ответ: Высота прямоугольника должна быть равна радиусу полукруга:

h = r = $\frac{a}{4+\pi}$

Задача 8. Электрическую лампу надо повесить над центром круглой площадки, имеющий 30 м в диаметре. Предполагая, что сила освещения изменяется прямо пропорционально косинуса угла падения и обратно пропорционально квадрату расстояния от освещаемой поверхности, определить на какой высоте нужно повесить лампу, чтобы она наилучшим образом освещала дорожку, проходящую по краю площадки.

Ответ: На высоте $\frac{15}{\sqrt{2}}$ м

Задача 9. Энергия, затрачиваемая на перемещение парохода, пропорциональна кубу его скорости. Найти наиболее экономичную скорость парохода при движении его против течения, составляющего *a* км/ч.

Ответ: $\frac{3}{2}$a.

Задача 10. Требуется сделать открытый цилиндрический резервуар вместимостью 300 м^2 воды. Стоимость материала, из которого делается дно резервуара, в два раза больше стоимости материала, идущего на боковые стенки резервуара. При каких размерах резервуара постройка его будет наиболее дешевой?

Ответ; Высота резервуара в два раза больше радиуса основания.

Задача 11. Требуется огородить прямоугольный участок земли, используя в качестве одной из сторон забора часть стены дома. Участок должен иметь определенную площадь. Как следует выбрать соотношение между длинами его сторон, чтобы на постройку забора пошло наименьшее количество материала?

Ответ: Сторона забора, параллельная стене дома, должна быть в два раза длиннее боковой стороны.[6]

Заключение

В настоящее время получило всеобщее признание то, что успех развития многих областей науки и техники существенно зависит от развития многих направлений математики. Математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений и, в конечном счете, содействует повышению производительности труда и устойчивому поступательному развитию народного хозяйства.

Использование экстремальных задач при изучении математики оправдано тем, что они с достаточной полнотой закладывают понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучше. Решая задачи указанного типа, наблюдаем, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, а с другой - большую эффективную их применимость к решению жизненных практических задач. Экстремальные задачи помогают ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности.

Решение экстремальных задач способствует углублению и обогащению наших математических знаний. Через задачи мы знакомимся с экстремальными свойствами изучаемых функций, с некоторыми свойствами неравенств. Эти задачи могут серьезно повлиять на содержание учебного материала, на аспекты применения положений изучаемой теории на практике.

В настоящее время в нашей стране большое внимание уделяется вопросам повышения эффективности и качества во всех сферах производства. В этой связи особую значимость приобретает умение решать так называемые задачи на оптимизацию, которые возникают там, где необходимо выяснить как с помощью имеющихся средств достичь наилучшего результата, как получить нужный результат с наименьшей затратой средств, материалов, времени, труда и т.п.

Список использованных источников

1 Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа: учебник для общеобразовательных учреждений 10-11 классы: в 2 ч. / А. Г. Мордкович.- 8-е изд. стер.- М. : Мнемозина, 2007. - Ч. 1. - 375 с. - ISBN 978-5-346-00762-3.

2 Мордкович, А. Г. Сборник задач Алгебра и начала анализа: учебник для общеобразовательных учреждений 10-11 классы: в 2 ч. / А. Г. Мордкович.- 8-е изд. стер.- М. : Мнемозина, 2007.- Ч. 2. - 375 с. - ISBN 978-5-346-00762-3.

3 Омельченко, В. П. Математика: учебное пособие, среднее профессиональное образование / В.П. Омельченко.- Ростов н / Д. : Феникс, 2005.-380 с. - ISBN 5-222-06004-7.

4 Дадаян, А. А. Математика : учебник / А. А. Дадаян. - 3-е изд. – М. : ФОРУМ, 2011. – 544 с. – ISBN978-5-91134-460-3.

5 Богомолов, Н. В. Сборник задач по математике : учеб. пособие для ссузов / Н. В. Богомолов.- 6-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2010. – 204 с. – ISBN 978-5-358-07916-8.

6 Соловейчик, И. Л. Сборник задач по математике с решениями для техникумов / И. Л. Соловейчик. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»; ООО «Мир и Образование», 2006. – 464 с. – ISBN 5-329-00902-2.