МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ РАЗДЕЛА «НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Допущено учебно-методическим советом
Оренбургского государственного педагогического университета
в качестве учебно-методического пособия
для обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профилям Дошкольное образования и Начальное образование, Начальное образование и Иностранный язык, Русский язык и Начальное образование, Начальное образование и Математика по дисциплине «Математика» («Высшая математика») (Б1.В.ОД.3.4)

ОРЕНБУРГ
2019

УДК 510
ББК 22.18я73
О 64

Рецензенты:

Литвиненко Наталья Валерьевна - доктор психологических наук, профессор, зав.кафедрой педагогики дошкольного и начального образования ОГПУ

Мендыгалиева Алтнай Кинесовна - кандидат педагогических наук, доцент, зав.кафедрой теории и методики начального и дошкольного образования ОГПУ

О64 **Организация** самостоятельной учебной деятельности студентов в процессе освоения раздела «Натуральные числа»: учебно-методическое пособие/ авт-сост. М.В. Аксенова, Л.А. Гороховцева – Оренбург, 2019. – 73 с.

В учебно-методическом пособии предлагается содержание программы самостоятельной работы бакалавров направления подготовки: «Педагогическое образование», профили: «Дошкольное и Начальное образование», «Начальное образование и Иностранный язык», «Начальное образование и Математика», «Русский язык и начальное образование» по разделу «Натуральные числа» математических дисциплин, предложено краткое изложение теоретических вопросов, вопросы и задания для самопроверки, методические рекомендации по подготовке и самостоятельному выполнению контрольной работы по темам раздела, варианты контрольной работы, контрольные вопросы по теоретическому материалу, вопросы тестовых заданий, список литературы.

Использование учебно-методического пособия ориентирует бакалавров на самостоятельное овладение содержанием программы раздела «Натуральные числа» математических дисциплин, входящих в состав основной профессиональной образовательной программы бакалавриата, и решение проблемных ситуаций, встречающихся в процессе профессиональной деятельности учителей начальной школы. Пособие предназначено бакалаврам института дошкольного и начального образования, преподавателям вузов.

УДК 510
ББК 22.18я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«Натуральные числа» – это раздел дисциплины «Математика», в рамках которого студенты изучают аксиоматическую теорию натурального числа, теоретико-множественный смысл числа, натуральное число как меру величины, способы записи чисел и алгоритмы действий над ними. Для школьной математики натуральное число является тем понятием, с которого, как правило, начинается обучение. Поэтому студенты должны овладеть теми теориями, в которых обосновываются различные подходы к определению натурального числа, не только для того, чтобы математически грамотно ввести понятие числа и обучать младших школьников выполнять с ними действия, но и, что не менее важно, видеть и понимать различные функции натуральных чисел, их применимость в практической деятельности. Без этого понимания нельзя решить проблему преемственности в обучении математике в начальных и последующих классах школы.

Основное назначение учебно-методического пособия – обеспечить студентам самостоятельное освоение раздела «Натуральные числа» дисциплины «Математика», оказать помощь в организации изучения тем раздела и осуществить контроль за качеством усвоения основных вопросов, а именно:

- выделить основные теоретические сведения по темам раздела;
- указать на знания и умения, необходимые при решении задач тем данного раздела;
- дать методические рекомендации по решению типовых задач;
- предложить набор практических заданий для самостоятельной подготовки к контрольным работам;
- разработать варианты контрольных работ;
- перечислить контрольные вопросы по разделу;
- предложить вопросы тестовых заданий по разделу.

Переход к продуктивному уровню овладения материалом по данному разделу возможен в ходе самостоятельной деятельности, основанной на решении задач. Учебно-методическое пособие содержит задачи обязательного характера, решение которых способствует освоению раздела «Натуральные числа». Среди предлагаемых задач присутствуют учебно-профессиональные задачи, решение которых необходимо бакалавру для успешного осуществления будущей профессиональной деятельности.

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено студентам в рамках учебного плана по направлению – «Педагогическое образование», (профили) – «Дошкольное и Начальное образование», «Начальное образование и Иностранный язык», «Начальное образование и Математика», «Русский язык и Начальное образование».

Отбор содержания и последовательность изучения глав раздела «Натуральные числа» произведены в соответствии с учебником по дисциплине «Математика», предназначенным студентам учреждений высшего образования по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль «Начальное образование» (квалификация «бакалавр»)./ Стойлова Л. П. Математика: учебник для студ.учреждений высш. образования / Л. П. Стойлова. - М.:Академия, 2015. - 464 с.

1. Программа раздела «Натуральные числа»

1.1. Цель и задачи освоения раздела

Цель освоения раздела: формирование общекультурной и профессиональной компетенций будущих учителей начальных классов, основанной на овладении теориями, в которых обосновываются различные подходы к определению натурального числа и действий над числами, необходимых для качественного преподавания математики в начальной школе.

Задачи освоения раздела:

- раскрыть мировоззренческое значение натурального числа и действий над числами, углубить представления студентов о роли и месте натурального числа в изучении окружающего мира;
- ознакомить студентов с основными теоретическими понятиями раздела – натурального числа, арифметических действий над числами, на основе которых строится начальный курс математики;
- сформировать умения и навыки по применению этих знаний при решении практических задач;
- совершенствовать умения и навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов;
- развивать умение самостоятельно работать с учебными пособиями и другой математической литературой.

1.2. Требования к результатам освоения содержания раздела

Для школьной математики натуральное число является тем понятием, с которого, как правило, начинается обучение. Натуральное число имеет много функций, и многие из них должны быть поняты и усвоены уже младшими школьниками. В данном разделе надо рассмотреть аксиоматическое определение системы натуральных чисел, отвечающее на вопрос, что представляет собой число как элемент натурального ряда; затем построить ее теоретико-множественную модель и выяснить, что представляет собой натуральное число как мера величины, и, наконец, изучить способы записи чисел и алгоритмы действий над ними.

Итогом изучения данного раздела, должно быть, усвоение следующих понятий и закономерностей. Студент, изучивший раздел «Натуральные числа», должен:

Знать:

Понятия натурального числа, четырех арифметических действий, отношения «меньше», отрезка натурального ряда, конечного множества, числа элементов множества, счета, натуральное число как характеристику количества, как результат счета элементов конечного множества, как общее свойство класса конечных равномощных множеств, величина, единица величины, мера величины, положительная скалярная величина, однородные величины, разнородные величины, десятичная запись натуральных чисел, делитель данного числа, простое число, составное число, общий делитель данных чисел, наибольший общий делитель чисел, взаимно-простые числа, наименьшее общее кратное чисел.

Закономерности: количественный смысл натурального числа, теоретико-множественная трактовка свойств, взаимосвязь действий над натуральными числами и действиями над положительными скалярными величинами, правила действий над числами в позиционных системах счисления.

Усвоение названных понятий и закономерностей предполагает также умение оперировать ими при решении задач.

Студенту необходимо **уметь**:

- доказывать законы и правила действий над натуральными числами, используя определения арифметических действий в аксиоматической теории; их теоретико-множественную трактовку;
- обосновывать выбор действий при решении задач, пользуясь теоретико-множественной терминологией;
- излагать данное обоснование на языке школьной математики;
- обосновывать выбор действия при решении задач, в которых рассматриваются величины, отношения между ними, а также производятся различные операции;
- рационально выполнять и обосновывать вычисления с натуральными числами;
- выбирать из различных преобразований выражений наиболее рациональные;
- обосновывать алгоритмы арифметических действий над натуральными числами, владеть записью чисел и выполнением действий над ними в различных позиционных системах;
- применять признаки делимости на практике;
- устанавливать делимость суммы, разности, произведения на данное число, не производя указанных действий над числами;
- доказывать утверждения методом математической индукции;
- владеть алгоритмом распознавания простых чисел и умение пользоваться им на практике;
- владеть способами нахождения НОД и НОК.

1.3. Распределение трудоемкости раздела по видам работ

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	зач. ед.	час.	по семестрам	
			№ 3	№ 4
Общая трудоемкость по учебному плану	**4,5**	**162**	**72**	**90**
Аудиторные занятия	**2**	**72**	**34**	**38**
Лекции (Л)	0,9	30	14	16
Практические занятия (ПЗ)	1,1	42	20	22
Самостоятельная работа (СР):	**2**	**72**	**38**	**34**
Вид контроля: экзамен	**0,5**	**18**	-	**18**

1.4. Учебно-тематический план раздела

№ п/п	**Главы раздела**	**Лекции**	**Практические занятия**
1	Аксиоматическое построение системы натуральных чисел	4	8
2	Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и операций над числами	8	10
3	Натуральное число как мера величины	8	10

4	Запись целых неотрицательных чисел и алгоритмы действий над ними	6	8
5	Делимость натуральных чисел	4	6
	Всего	30	42

1.5. План самостоятельной работы

№ п/п	**Главы раздела**	**Вид работы**	**Форма контроля**
1	Аксиоматическое построение системы натуральных чисел	подготовка к пр.зан.	собеседование на занятии
2	Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и операций над числами	подготовка к пр.зан. индивид. задания	собеседование на занятии письменное оформление
3	Натуральное число как мера величины	подготовка к пр.зан. индивид. задания	собеседование на занятии письменное оформление
4	Запись целых неотрицательных чисел и алгоритмы действий над ними	подготовка к пр.зан. реферат	собеседование на занятии письменное оформление
5	Делимость натуральных чисел	подготовка к пр.зан. контроль. работа	собеседование на занятии письменное оформление

2. Основные теоретические сведения раздела «Натуральные числа»

2.1. Тема «Аксиоматическое построение системы натуральных чисел»

Содержание

В главе рассматривается подход к построению системы натуральных чисел, основанный на аксиоматике Пеано. При этом подходе натуральное число определяется как элемент множества, на котором задано отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам Пеано. Несмотря на определенную абстрактность, при данном подходе хорошо раскрывается суть натурального числа, он соответствует историческому процессу развития понятия числа в практике.

Кроме понятия натурального числа, в главе даются определения понятий четырех арифметических действий, отношения «меньше», отрезка натурального ряда, конечного множества, числа элементов конечного множества, счета.

Устанавливается, что всякое натуральное число, рассматриваемое в аксиоматической теории как порядковое, может иметь и количественный смысл, если является характеристикой численности некоторого конечного множества.

Основные понятия и теоремы:

Аксиоматический метод является одним из основных методов математики и представляет собой способ построения научной теории, при котором её основу составляют основные понятия определения, которым не дается при данном рассмотрении свойства, которых раскрываются с помощью определенных исходных положений (суждения) аксиомы, или постулаты, из которых все остальные утверждения этой теории выводятся логическим путём, посредством доказательств.

При **аксиоматическом построении** какой-либо **математической теории** соблюдаются определенные **правила**:

- некоторые понятия теории выбираются в качестве **основных** и принимаются без определения;

- каждому понятию теории, которое не содержится в списке основных, лается **определение**, в нем разъясняется его смысл с помощью основных и предшествующих данному понятий;

- формулируются **аксиомы** – предложения, которые в данной теории принимаются без доказательства; в них раскрываются свойства основных понятий;

- каждое предложение теории, которое не содержится в списке аксиом, должно быть доказано; такие предложения называют **теоремами** и доказывают их на основе аксиом и теорем, предшествующих рассматриваемой.

В качестве основного понятия при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел взято отношение «непосредственно следовать за», заданное на непустом множестве N. Суть **отношения «непосредственно следовать за»** раскрывается в **аксиомах Пеано.**

А1. В множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Будем называть его единицей и обозначать символом 1.

А2. Для каждого элемента a из N существует единственный элемент $a,'$ непосредственно следующий за a.

А3. Для каждого элемента a из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует a.

А4. Всякое подмножество М множества N совпадает с N, если обладает свойствами: 1) 1 содержится в М; 2) из того, что a содержится в М, следует, что и a' содержится в М.

Определение. Множество N, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется **множеством натуральных чисел**, а его элементы - **натуральными числами**.

Первое понятие, которое мы введем после определения натурального числа, - это отношение «непосредственно предшествует», которое часто используют при рассмотрении свойств натурального ряда.

Определение. Если натуральное число b непосредственно следует за натуральным числом a, то число a называется **непосредственно предшествующим (или предшествующим**) числу b.

Отношение «предшествует» обладает рядом свойств. Они формулируются в виде теорем и доказываются с помощью аксиом 1-4.

Теорема 1. Единица не имеет предшествующего натурального числа.

Теорема 2. Каждое натуральное число a, отличное от 1, имеет предшествующее число b, такое, что $b' = a$.

Итак, мы начали аксиоматическое построение системы натуральных чисел с выбора основного отношения «непосредственно следовать за» и аксиом, в которых описаны его свойства. Дальнейшее построение теории предполагает рассмотрение известных свойств натуральных чисел и операций над ними. Они должны быть раскрыты в определениях и теоремах, т.е. выведены чисто логическим путем из отношения «непосредственно следовать за», и аксиом 1-4.

Определение. **Сложением натуральных чисел** называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:

1) $\forall(a \in N)\ a + 1 = a'$, 2) $\forall(a, b \in N)\ a + b' =(a + b)'$.

Число $a + b$ называется суммой чисел a и b, а сами числа a и b - слагаемыми.

Теорема 3. Сложение натуральных чисел существует и оно единственно.

Свойства сложения:

Теорема 4. $\forall(a, b, c \in N)\ (a + b) + c = a + (b + c)$. Ассоциативное свойство

Теорема 5. $\forall(a, b \in N)\ a + b = b + a$. Коммутативное свойство

Теорема 6. $\forall(a, b \in N)\ a + b \neq b$.

Все доказанные свойства изучаются в начальном курсе математики и используются для преобразования выражений.

Определение. Умножением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:

1) $\forall(a \in N)\ a\cdot 1= a$.

2) $\forall(a, b \in N)\ a\cdot b' = a \cdot b+a$.

Число $a \cdot b$ называется произведением чисел a $и$ b, а сами числа a $и$ b- множителями.

Теорема 7. Умножение натуральных чисел существует, и оно единственно.

Свойства умножения:

Теорема 8. $\forall(a, b, c \in N)\ (a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$. свойство дистрибутивности справа относительно сложения

Теорема 9. $\forall(a, b, c \in N)\ c \bullet (a + b) = c \bullet a + c \bullet b$ свойство дистрибутивности слева относительно сложения

Теорема 10. $\forall(a, b, c \in N)\ (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. свойство ассоциативности умножения

Теорема 11. $\forall(a, b \in N)\ a \bullet b = b \bullet a$. свойство коммутативности умножения

В начальном курсе изучаются все рассмотренные свойства умножения: и коммутативность, и ассоциативность, и дистрибутивность.

Определение. Число a меньше числа b (a < b) тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c, что a + c = b.

При этих условиях говорят также, что число b больше a и пишут $b > a$.

Теорема 12. Для любых натуральных чисел a и b имеет место одно и только одно из трех отношений: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Из этой теоремы вытекает, что если $a \neq b$, то либо $a < b$, либо $a > b$, т.е. отношение «меньше» обладает свойством связанности.

Теорема 13. Если $a < b$ и $b < c$. то $a < c$.

Эта теорема выражает свойство транзитивности отношения «меньше».

Теорема 14. Если $a < b$, то неверно, что $b < a$. Доказательство. Эта теорема выражает свойство *антисимметричности* отношения «меньше».

Так как определенное нами отношение «меньше» антисимметрично и транзитивно и обладает свойством связанности, то оно является отношением линейного порядка, а множество натуральных чисел *линейно упорядоченным множеством.*

Из определения «меньше» и его свойств можно вывести известные свойства множества натуральных чисел.

Теорема 15. Из всех натуральных чисел единица является наименьшим числом, т.е. 1 < a для любого натурального числа $a\neq 1$.

Отношение «меньше» связано со сложением и умножением чисел свойствами монотонности.

Теорема 16.

1. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ *и* $a\,c = b\,c$;
2. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ *и* $ac < bc$;
3. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ *и* $ac > bc$.

Теорема 17 (обратная теореме 16).

1. $a + c = Ь + c$ или $ac \sim Ьc\text{-}\Rightarrow a = Ь$
2. $a + c < Ь + c$ или $ac < Ьc \Rightarrow a < Ь$:
3. $a + c > Ь +$ c или $ac > Ьc \Rightarrow a > Ь$.

Теорема 18. Для любых натуральных чисел a и b; существует такое натуральное число n, что $n\,b > a$.

Из рассмотренных свойств отношения «меньше» вытекают важные особенности множества натуральных чисел, которые мы приводим без доказательства.

1. Ни для одного натурального числа a не существует такого натурального числа n, что $a < n < a + 1$. Это свойство называется *свойством дискретности* множества натуральных чисел, а числа a и $a + 1$ называют *соседними.*

2. Любое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьшее число.

3. Если M - непустое подмножество множества натуральных чисел и существует такое число b, что для всех чисел x из M выполняется неравенство x < b, то в множестве M есть наибольшее число.

Таким образом, отношение «меньше» позволило рассмотреть (и в ряде случаев доказать) значительное число свойств множества натуральных чисел. В частности, оно является линейно упорядоченным, дискретным, в нем есть наименьшее число 1.

Определение. Вычитанием натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: a — b = c тогда и только тогда, когда b+c = a.

Число a - b называется разностью чисел a и b, число a – уменьшаемым, а число b - вычитаемым.

Теорема 19. Разность натуральных чисел a - b существует тогда и только тогда, когда $b < a$.

Теорема 20. Если разность натуральных чисел a и b существует, то она единственна.

Исходя из определения разности натуральных чисел и условия ее существования, можно обосновать известные **правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.**

Теорема 21. Пусть *a. b* и *c* - натуральные числа.

а) Если $a > c$, *то* $(a + b) - c = (a - c) + b$.

б) Если $b > c$. *то* $(a + b) - c - a + (b - c)$.

в) Если $a > c$ *и* $b > c$. то можно использовать любую из данных формул.

Теорему 21 можно сформулировать в виде правила, удобного для запоминания: дли того чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного слагаемого суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое.

Теорема 22. Пусть *a, b и c* - натуральные числа. Если $a > b + c$, то $a - (b + c) = (a - b) - c$ или $a - (b + c) = (a - c) - b$.

Теорему 22 можно сформулировать в виде правила, для того чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим.

При аксиоматическом построении теории натуральных чисел деление обычно определяется как операция, обратная умножению.

Определение. Делением натуральных чисел a и b называется операция, удовлетворяющая условию: $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $b \cdot c = a$.

Число $a:b$ называется **частным** чисел *a* и *b,* число *a* делимым, число *b* - делителем.

Как известно, деление на множестве натуральных чисел существует не всегда, и такого удобного признака существования частного, какой существует для разности, нет. Есть только необходимое условие существования частного.

Теорема 23. Для того чтобы существовало частное двух натуральных чисел *a* и *b*, необходимо, чтобы $b < a$.

Теорема 24. Если частное натуральных чисел *a* и *b* существует, то оно единственно.

Исходя из определения частного натуральных чисел и условия его существования, можно обосновать известные **правила деления суммы (разности, произведения) на число.**

Теорема 25. Если числа *a* и *b* делятся на число *c,* то и их сумма $a + b$ делится на с, причем частное, получаемое при делении суммы $a + b$ на число *c,* равно сумме частных, получаемых при делении *a* на *c* и *b* на *c*, т.е. $(a + b):c = a:c + b:c$.

Доказанную теорему можно сформулировать в виде правила деления суммы на число: для того чтобы разделить сумму на число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

Теорема 26. Если натуральные числа *a* и *b* делятся на число *c* и $a > b$, то разность $a - b$ делится на с, причем частное, получаемое при делении разности на число с, равно разности частных, получаемых при делении *a* на *c* и *b* на с, т.е. $(a - b):c = a: c - b:c$.

Эту теорему можно сформулировать в виде правила деления разности на число: **для** того, чтобы разделить разность на число, достаточно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого частного вычесть второе.

Теорема 27. Если натуральное число *a* делится на натуральное число с, то для любого натурального числа *b* произведение *ab* делится на с. При этом частное, получаемое при делении произведения *ab* на число с*,* равно произведению частного, получаемого при делении *a* на *c,* и числа b: $(a \cdot b):c - (a:c) \cdot b$.

Теорему можно сформулировать в виде правила деления произведения на число: для того чтобы разделить произведение на число, достаточно разделить на это число один из множителей и полученный результат умножить на второй множитель.

Присоединим к множеству N натуральных чисел еще один элемент, который называется нулем и обозначается 0. Полученное множество называется **множеством целых неотрицательных чисел** и обозначается Zo. Таким образом, Zo = N $\cup$ {0}.

Относительно числа 0 условимся, что оно меньше любого натурального числа, а арифметические операции в случае, когда одна из компонент равна нулю, определяются равенствами:

$\forall(a\ N)\in a + 0 = 0 + a = a;\ \forall(a\ N)\in a - 0 = a;$

$\forall(a\ N)\in a - 0 = 0 - a = 0;\ \forall(a\ N)\in 0 : a = 0$.

Кроме того, будем считать, что:

0 + 0 = 0, 0- 0 = 0, 0 – 0 = 0, a – a = 0.

Теорема 28. Деление на нуль невозможно.

Определение. Пусть a - целое неотрицательное число, a b - число натуральное. **Разделить a на b с остатком** - это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что a = b q + r , причем 0 < r r < b.

Из этого определения следует, что делить с остатком можно не только большее число на меньшее, но и меньшее на большее. Вообще если $a < b$ то при делении *a на b* с остатком получаем $q = 0$ и $r = a$.

Если при делении *a на b* с остатком оказывается, что $r = 0$. то говорят, что имеем деление нацело. Вообще $r = 0$ тогда и только тогда, когда a делится на b.

Теорема 29. Для любого целого неотрицательного числа a и натурального b существуют целые неотрицательные числа *q и r,* такие, что $a = b\,q + r$, *и* $0 < r < b$. И эта пара чисел *q и r* единственная для: заданных a и b .

Теорема 30. Если утверждение *A(n)* с натуральной переменной n истинно для $n = 1$ и из того, что оно истинно для $n = к$ (*к* – произвольное натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n = к'$, то утверждение *A(n)* истинно для любого натурального числа n.

Метод доказательства, основанный на этой теореме, называется методом математической индукции. Состоит оно из двух частей: 1) доказывают, что утверждение *A(n)* истинно для $n = 1$, т.е. что истинно высказывание *A(1):* 2) предполагают, что утверждение *A(n)* истинно для $n = к$, и, исходя из этого предположения, доказывают, что утверждение *A(n)* истинно и для $n = к+1$, т.е. что истинно высказывание $A\ \{к) \Rightarrow A\ (к + 1)$.

Если A(1) ^ $A(к) \Rightarrow A(к + 1)$ - истинное высказывание, то делают вывод о том. что утверждение *A(n)* истинно для любого натурального числа n.

Аксиоматическая теория описывает натуральное число как элемент бесконечного ряда, в котором числа располагаются в определенном порядке, существует первое число и т.д. Другими словами, в аксиоматике раскрывается порядковый смысл натурального числа. Но натуральные числа имеют и количественный смысл. Чтобы выяснить, как связаны между собой эти два смысла натурального числа, рассмотрим такие понятия, как отрезок натурального ряда, конечное множество, счет, и другие.

Определение. Отрезком Na натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа a.

Используя запись множества, для элементов которого указано характеристическое свойство, можно записать, что $Na = \{x \backslash x \in N \text{ и } x \leq a\}$.

Отметим два важных свойства отрезков натурального ряда.

1) Любой отрезок *Na* содержит единицу. Это свойство вытекает из определения отрезка *Na*.

2) Если число x содержится в отрезке *Na* и x $\neq$ a, то и непосредственно следующее за ним число x+1 также содержится в *Na*.

Определение. Множество А называется конечным, если оно равномощно некоторому отрезку Nа натурального ряда.

Теорема 31. Всякое непустое конечное множество равномощно одному и только одному отрезку натурального ряда,

Определение. Если непустое конечное множество А равномощно отрезку Nа, то **натуральное число а** называют **числом элементов множества А** и пишут п(А) = а.

Определение. Установление взаимно однозначного соответствия между элементами непустого конечного множества А и отрезком натурального ряда называется **счетом элементов множества** А.

Таким образом, всякое натуральное число а можно рассматривать как характеристику численности некоторого конечного множества А. Натуральное число а имеет при этом количественный смысл.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие об аксиоматическом методе построения теории.
2. Правила аксиоматического способа построения математической теории.
3. Аксиомы Пеано.
4. Аксиоматическое определение натурального числа.
5. Сложение натуральных чисел. Свойства сложения натуральных чисел.
6. Умножение натуральных чисел. Свойства умножения натуральных чисел.
7. Отношение «меньше» на множестве натуральных чисел.
8. Свойства множества натуральных чисел.
9. Вычитание натуральных чисел.
10. Деление натуральных чисел.
11. Правила вычитания, деления натуральных чисел.
12. Множество целых неотрицательных чисел.
13. Деление с остатком.
14. Метод математической индукции.
15. Отрезок натурального ряда. Счет элементов конечного множества.

Задания для самоконтроля

1. В чем суть аксиоматического способа построения теории?

2. Верно ли, что аксиома - это предложение, которое не требует доказательства?

3. Назовите основные понятия школьного курса планиметрии. Вспомните несколько аксиом из этого курса. Свойства каких понятий в них описываются?

4. Дайте определение прямоугольника, выбрав в качестве родового понятие параллелограмма. Назовите три понятия, которые в курсе геометрии должны предшествовать понятию «параллелограмм».

5. Какие предложения называют теоремами? Вспомните, какова логическая структура теоремы и что значит доказать теорему.

6. Укажите все случаи использования законов сложения целых неотрицательных чисел при вычислении значения выражения:

$399+138+473=399+473+138=399+(1+472)+138=(399+1)+(472+138)=$
$400+610=1010$

7. Вычислите значение выражения $123\times21+37\times123+42\times123$ рациональным способом и укажите все случаи использования законов сложения и умножения.

8. Объясните решение примера, используя язык вузовского и начального курсов математики: $47 + 9 = 47 + (3 + 6) = (47 + 3) +6=50+6=56$

9. Верно ли, что каждое натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы?

10. Используя определение сложения, найдите значение выражений:

а) 2 + 3; б) 3 + 3; в) 4 + 3.

11. Какие преобразования выражений можно выполнять, используя свойство ассоциативности сложения?

12. Выполните преобразование выражения, применив ассоциативное свойство сложения: а) (12 +3)+17; б) 24+ (6+19); в) 27 + 13+18.

13. Выясните, как формулируются в различных учебниках математики для начальной школы:а) коммутативное свойство сложения; б) ассоциативное свойство сложения.

14. В одном из учебников для начальной школы рассматривается правило прибавления числа к сумме на конкретном примере (4 + 3) + 2 и предлагаются следующие пути нахождения результата:

а) (4 + 3) + 2 = 7 + 2 = 9;

б) (4 + 3) + 2 = (4 + 2) + 3 = 6 + 3 = 9;

в) (4 + 3) + 2 = 4 + (2 + 3) = 4 + 5 = 9.

Обоснуйте выполненные преобразования. Можно ли утверждать, что правило прибавления числа к сумме есть следствие ассоциативного свойства сложения?

15. Известно, что $a + b$= 17. Чему равно:

а) $a + (b + 3)$; *b) (a + 6)+ b;* в) $(13 + b) + a$?

16. Опишите возможные способы вычисления значения выражения вида

$a + b + c$. Дайте обоснование этим способам и проиллюстрируйте их на конкретных примерах.

17. Используя определение умножения, найдите значения выражений: а) 3 • 3; 6) 3 • 4; в) 4 • 3.

18. Известно, что 37 • 3 = 111. Используя это равенство, вычислите: а) 37 • 18; 6) 185 • 12. Все выполненные преобразования обоснуйте.

19. Определите значение выражения, не выполняя письменных вычислений. Ответ обоснуйте: а) 8962 • 8 + 8962 • 2; б) 63402 • 3 + 63402 • 97; в) 849 +849 • 9.

20. Какие свойства умножения будут использовать учащиеся начальных классов, выполняя следующее задание:

Можно ли, не вычисляя, сказать, значения каких выражений будут одинаковыми: а) 3 • 7 + 3 • 5; 6) 7 • (5 + 3): в) (7 + 5) • 3?

21. Какие теоремы о монотонности сложения и умножения могут использовать младшие школьники, выполняя задание «Сравни, не выполняя вычислений»:

а) 27 + 8 ... 27 + 18; б) 27- 8 ... 27 -18.

22. Какие свойства множества натуральных чисел неявно используют младшие школьники, выполняя следующие задания:

А) Запиши числа, которые больше, чем 65, и меньше, чем 75.

Б) Назови предыдущее и последующее числа по отношению к числу 300(800,609,999).

В) Назови самое маленькое и самое большое трехзначное число.

23. Какие свойства вычитания являются теоретической основой следующих приемов вычислений, изучаемых в начальном курсе математики:

а) 48 - 30 = (40 + 8} - 30 = 40 + 8 =18;

б) 48 - 3 = (40 + 8) - 3 = 40 + 5 = 45.

24. Опишите возможные способы вычисления значения выражения вида. $a - b - c$ и проиллюстрируйте их на конкретных примерах.

25. Какие свойства деления являются теоретической основой для выполнения следующих заданий, предлагаемых школьникам начальных классов:

- можно ли, не выполняя деления, сказать, значения каких выражений будут одинаковыми:

а) (40+ 8):2; в) 48:3; д) (20+ 28):2;

б) (30 + 16):3; г) (21+27):3; е) 48:2;

- верны ли равенства:

а) 48:6:2 = 48:(6:2); б) 96:4:2 = 96:(4-2); в) (40 - 28): 4 = 10-7?

26. Разделите с остатком: а) 37 на 5; б) 83 на 4; в) 12 на 15.

27. Какие остатки могут получаться при делении чисел на 4? Какой вид имеют числа, при делении которых на 4 в остатке получается: а) 1; б) 3?

28. На множестве *А* - *{x \ x* е N и 1□ *x* □ 100} задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 5». На какие классы разобьются числа множества *А* при помощи данного отношения? Почему это разбиение возможно? В каком классе окажется 27? 98? 100?

29. Одно число на 62 больше другого. При делении одного из них на другое с остатком в частном получается 5 и в остатке 6. Найдите эти числа.

30. Докажите, что множество В конечное, если:

а) В - множество букв в слове «параллелограмм»;

б) В - множество учащихся в классе;

в) В — множество букв в учебнике математики.

31. Прочитайте записи n(A) = 5; n(A) = 7. Приведите примеры множеств, содержащих указанное число элементов.

2.2. Тема «Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и операций над числами»

Содержание

В главе рассматривается теоретико-множественный подход к понятию натурального числа. При этом подходе натуральное число определяется как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Кроме понятия натурального числа, в главе даются определения понятий четырех арифметических действий, свойств арифметических действий, отношения «меньше», нуля.

Изучая материал данной главы, устанавливаем, что натуральное число как характеристику количества можно рассматривать и как результат счета элементов конечного множества, и как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Основные понятия и теоремы:

С теоретико-множественной точки зрения, **натуральное число - это общее свойство класса конечных равномощных множеств.**

Число **«нуль»** с теоретико-множественных позиций рассматривается как число элементов пустого множества: 0 = п(0).

Итак, **натуральное число** как характеристику количества можно рассматривать с двух позиций:

1) как число элементов в множестве А, получаемое при счете, т.е. а = п(А), причем А ~ Na;

2) как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Установленная связь между конечными множествами и натуральными числами позволяет дать теоретико-множественное истолкование **отношения «меньше».**

В аксиоматической теории отношение «меньше» определено следующим образом: $a < b \Leftrightarrow (\exists c \in N)\ a + c = b$.

Если а < b, то это означает, что отрезок натурального ряда Na является собственным подмножеством отрезка Nв. Справедливо и обратное утверждение: если

Na - собственное подмножество Nв, то a <b. Тем самым **отношение «меньше» получает теоретико-множественное истолкование**: a < b в том и только в том случае, когда отрезок натурального ряда Na является собственным подмножеством отрезка Nв,: $a < b \Leftrightarrow Na \subset N_в$ и $N_в \neq Na$

Если воспользоваться терминологией, принятой в **школьном курсе математики**, то последнее **определение отношения «меньше»** можно сформулировать так: «Число **а меньше числа b** тогда и только тогда, когда при счете число а называют раньше числа b». Данная трактовка отношения «меньше» позволяет сравнивать числа, опираясь на знание их места в натуральном ряду.

Однако сравнение чисел (особенно небольших) часто выполняют иначе, используя связь чисел с конечными множествами. В общем виде рассмотренный подход к определению отношения «меньше» можно обосновать следующим образом: пусть a = n(A),b=n(B), и a <b. Тогда A ~Na, B ~Nв иNa ⊂Nв. Последнее отношение означает, что в множестве В можно выделить собственное подмножество В1, равномощное множеству А: a = n(A) ,b = n(B) и $a < b \Leftrightarrow A \sim B1$, где $B1 \subset B$, $B1 \neq B$, $B1 \neq \varnothing$

Свойства отношения «меньше» для натуральных чисел также получают **теоретико-множественное истолкование**: транзитивность и симметричность этого отношения связаны с тем. что транзитивно и антисимметрично отношение «быть подмножеством».

Теоретико-множественный смысл неравенства 0 < а, истинного для любого натурального числа а, связан с тем, что пустое множество является подмножеством отрезка Na (или любого такого множества А, для которого a =n(A)).

Заметим, что приведенные трактовки отношения «меньше» основываются на понятии подмножества конечного множества.

Теорема 1.Любое непустое подмножество конечного множества конечно.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Сложение целых неотрицательных чисел связано с объединением конечных непересекающихся множеств.

Теорема 2.Пусть А и В - конечные множества, не имеющие общих элементов. Тогда их объединение тоже конечно, причем $n(A \cup B) = n(A)+n(B)$.

Из рассмотренной теоремы следует, что с **теоретико-множественных позиций сумма натуральных чисел а и b** представляет собой число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств А и В таких, что a = n(A), b = n(B): **$a + b = n(A) + n(B) = n(A \cup B)$, если $A \cap \Re = \varnothing$.**

Теоретико-множественный смысл равенства **a + 0 = a.** Если a = n(A), $0=n(\varnothing)$ то. согласно теореме 2, $a + 0 = n(A) + n(\varnothing) = n(A \cup \varnothing)$. Но, как известно, $A = A \cup \varnothing$, следовательно, $n(A \cup \varnothing) = n(A)$, откуда a + 0 = a.

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций известные свойства сложения (коммутативность сложения, ассоциативность сложения).

Взаимосвязь сложения целых неотрицательных чисел и объединения множеств позволяет обосновывать выбор действий при решении текстовых задач определенного вида. Выясним, например, почему следующая задача решается при помощи сложения: «Катя нашла 3 гриба, а Саша - 4. Сколько всего грибов нашли девочки?»

В задаче рассматриваются три множества: множество А грибов Кати, множество В грибов Маши и их объединение. Требуется узнать число элементов в этом объединении, а оно находится сложением. Так n(A) = 3, n(B)= 4 и $A \cap \Re = \varnothing$, то $n(A \cup B) = 3 + 4$. Сумма 3 + 4 – это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: 3 + 4 = 7. Следовательно, девочки нашли 7 грибов.

Теоретико-множественный смысл разности

В аксиоматической теории вычитание натуральных чисел было определено как операция, обратная сложению: $a - b = c \Leftrightarrow (\exists\rangle \in N)\ b + c = a$

Вычитание целых неотрицательных чисел определяется аналогично. Выясним, каков смысл разности таких чисел, если $a = n(A)$, $b=n(B)$.

Теорема 3. Пусть A - конечное множество и B - его подмножество. Тогда множество A\B - тоже конечно, причем выполняется равенство $n(A\backslash B) = n(A)-n(B)$.

Из теоремы следует, что **с теоретико-множественных позиций разность натуральных чисел a и b** представляет собой число элементов в дополнении подмножества B до множества A, если $a = n(A)$, $b=n(B)$ и $B\subset\aleph$:

$a - b = n(A) - n(B) = n(A\backslash B)$, если $B\subset A$, $B\neq\aleph$, $\Re\neq.\varnothing$,

Аналогичное истолкование получает вычитание нуля, а также вычитание a из a. Так как $A \backslash \varnothing=\aleph$, $A \backslash A = \varnothing$, то $a - 0 = a$ и $a - a = 0$.

Взаимосвязь вычитания чисел и вычитания множеств позволяет **обосновать выбор действия при решении текстовых задач**. Выясним, например, почему следующая задача решается при помощи вычитания: «У школы росло 7 деревьев, из них 4 березы, остальные липы. Сколько лип росло у школы?»

В задаче рассматриваются три множества: множество A всех деревьев, множество B берез, оно является подмножеством множества A; и множество C лип - оно представляет собой дополнение множества B до A. В задаче требуется найти число элементов в этом дополнении. Так как по условию $n(A) = 7$, $n(B)=4$ и $B\subset\aleph$, то $n(C) = n(A\backslash B) = n(A) - n(B) = 7 - 4$. Разность 7 - 4 - это математическая модель данной задачи. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи: 7 -- 4 = 3. Следовательно, у школы росло 3 липы.

Рассматриваемый подход к сложению и вычитанию целых неотрицательных чисел позволяет истолковать с теоретико-множественных позиций правила вычитания числа из суммы и суммы из числа.

С теоретико-множественной позиции смысл отношений «больше на» и «меньше на».

В аксиоматической теории определение отношения «меньше на» («больше на») естественным образом вытекает из определения отношения «меньше». Действительно, из того, что $a < b$ тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число c, что $a + c = b$, имеем, что «a меньше b на c» или «b больше a на c».

С теоретико-множественной точки зрения «a меньше b на c» (или «b больше a на c») означает, что если $n(A) = a$, $n(B) = b$, то в множестве B содержится столько элементов, сколько их в A, и еще *c* элементов.

Так как $c= n(B\backslash B□)$. где $B□ \subset B$, $n(B) = b$, $n(B□) = a$, то, по определению разности, $c = a - b$. Следовательно, **чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.**

Взаимосвязь действии над множествами с действиями над числами, теоретико-множественный смысл отношений «меньше на» и «больше на» позволяют обосновывать **выбор действий при решении задач с этими отношениями.**

Рассмотрим, например, такую задачу: «На столе 5 чашек, а ложек на 2 больше. Сколько на столе ложек?» Легко видеть, что она решается при помощи сложения. Почему?

В задаче речь идет о двух множествах: множестве чашек *(A)* и множестве ложек *(B)*. Известно, что в первом множестве 5 элементов, т.е. $n(A) = 5$. Число элементов во втором множестве требуется найти при условии, что в нем на 2 элемента больше, чем в первом. Отношение «больше на 2» означает, что в множестве *B* элементов столько же, сколько их в *A*. и еще 2 элемента. Применимо к тем множествам, о которых идет речь в задаче, это означает, что ложек на столе столько же, сколько чашек, и еще 2. Используя правило подсчета элементов в объединении непересекающихся множеств, получаем: $n(B) = n(B□) + n(B\setminus B□)$ =5+2. Так как 5 + 2 = 7, то получим ответ на вопрос задачи: на столе 7 ложек.

Рассмотрим еще одну задачу: «На столе 5 чашек, а ложек на 2 меньше. Сколько на столе ложек?» Выясним, почему она решается при помощи вычитания.

В задаче речь идет о двух множествах: множестве чашек *(A)* и множестве ложек *(B)*. Известно, что в первом множестве 5 элементов, $n(A)= 5$. Число элементов во втором множестве надо найти при условии, что в нем на 2 элемента меньше, чем в первом. Отношение «меньше на 2» означает, что в множестве *B* элементов столько же, сколько их в А, но без двух. Применимо к тем множествам, о которых идет речь в задаче, это означает, что ложек на столе столько же, сколько чашек, но без двух. Таким образом, $n(A) = n(A\setminus A□)$ = 5 - 2. Так как 5-2=3, то получим ответ на вопрос задачи: на столе 3 ложки.

Теоретико-множественный смысл произведения

Определение умножения натуральных чисел в аксиоматической теории основывается на понятии отношения «непосредственно следовать за» и сложении. В школьном курсе математики используется другое определение умножения, оно связано со сложением одинаковых слагаемых.

Теорема 4. Если $o > 1$, то произведение чисел a и b равно сумме b слагаемых, каждое из которых равно a.

Таким образом, получаем следующее определение умножения целых неотрицательных чисел.

Определение. ***Если a, b - целые неотрицательные числа, то произведением a · b называется число, удовлетворяющее следующим условиям:***

1) $a \cdot b = a + a + \ldots + a + a$, если $b > 1$;

b слагаемых

2) $a \cdot b = a$, если $b = 1$;

3) $a \cdot b = 0$, если $b = 0$.

Случаю 1) этого определения можно дать теоретико-множественную трактовку. Если множества $A□, A□, \ldots, Ab$ имеют по a элементов каждое, причем никакие два из них не пересекаются, то их объединение $A□ \cup A□ \cup \ldots \cup Ab$ содержит $a \cdot b$ элементов.

Таким образом, ***с теоретико-множественных позиций a· b*** ($b > 1$) *представляет собой число элементов в объединении b множеств, каждое из которых содержит по a элементов и никакие два из них не пересекаются.*

$a \cdot b = n(A□ \cup A□ \cup \ldots \cup Ab)$, *если* $n(A□) = n(A□)=\ldots= n(Ab)= a$ и множества попарно не пересекаются.

Взаимосвязь умножения натуральных чисел с объединением равночисленных попарно непересекающихся подмножеств позволяет обосновывать **выбор действия умножения при решении текстовых задач.**

Рассмотрим, например, такую задачу: «На одно пальто пришивают 4 пуговицы. Сколько пуговиц надо пришить на 3 таких пальто?» Выясним, почему она решается при помощи умножения.

В задаче речь идет о трех множествах, в каждом 4 элемента. Требуется узнать число элементов в объединении этих трех множеств. Если $n(A□) = n(A□)= n(A□)= 4$ и множества попарно не пересекаются, то $n(A□ \cup A□ \cup A□) = n(A□) + n(A□) + n(A□)$= 4+4+4 = 4·3. Произведение 4·3 является математической моделью данной задачи. Так как 4·3 = 12. то получаем ответ на вопрос: на 3 пальто надо пришить 12 пуговиц.

Можно дать **другое теоретико-множественное истолкование произведения** целых неотрицательных чисел. Оно связано с понятием декартова произведения множеств.

Теорема 5. Пусть A и B - конечные множества. Тогда их декартово произведение также является конечным множеством, причем выполняется равенство:

$n(AxB)= n(A)\cdot n(B)$.

Из теоремы следует, что ***с теоретико-множественной точки зрения произведение a· b** целых неотрицательных чисел есть число элементов в декартовом произведении множеств A и B, таких, что n (A) = a, и n (B) =b.*

$a\cdot b = n(A)\cdot n(B) = n(AxB)$.

Этот подход к определению умножения позволяет раскрыть теоретико-множественный смысл свойств умножения (коммутативного свойства умножения, ассоциативного свойства умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения*)*.

В начальных курсах математики произведение целых неотрицательных чисел чаще всего определяют через сумму. Случай $a\cdot 1 = a$ и $a\cdot 0 = 0$ принимаются по определению.

Теоретико-множественный смысл частного натуральных чисел

В аксиоматической теории деление определяется как операция, обратная умножению, между делением и умножением тесная взаимосвязь. Если $a\cdot b = c$, то, зная произведение c и один из множителей, можно при помощи деления найти другой множитель: а = $c : b$, $b = c : a$.

Выясним **теоретико-множественный смысл частных *c : b и c : a.***

Произведение $a \cdot b = c$ с теоретико-множественной точки зрения представляет собой число элементов в объединении b попарно непересекающихся множеств, в каждом из которых содержится a элементов, т.е.

$a\cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b)$, *где* $n(A_1) = n(A_2)=...= n(A_b)$. *Так как* множества попарно не пересекаются, а при их объединении получается множество - назовем его *A,* - в котором *c* элементов, то можно говорить о разбиении множества *A* на равночисленные подмножества A_1, A_2, ..., A_b. Тогда частное *c: a* - это число подмножеств в разбиении множества А, а частное с *:b* - число элементов в каждом подмножестве этого разбиения.

С теоретико-множественной точки зрения деление чисел оказывается связанным с разбиением конечного множества на равночисленные попарно непересекающиеся подмножества и с его помощью решаются две задачи: отыскание числа элементов в каждом подмножестве разбиения (деление на равные части) и отыскание числа таких подмножеств (деление по содержанию).

Таким образом, **если *a = n(A)* и множество *A* разбито на попарно непересекающиеся равночисленные подмножества и если:**

***b* - число элементов в каждом подмножестве, то частное *a:b* - это число таких подмножеств;**

***b* - число подмножеств, то частное *a:b*- это число элементов в каждом подмножестве.**

Взаимосвязь деления натуральных чисел с разбиением конечных множеств на классы позволяет **обосновывать выбор действия деления при решении задач**, например, такого вида: «12 карандашей разложили в 3 коробки поровну. Сколько карандашей в каждой коробке?»

В задаче рассматривается множество, в котором 12 элементов. Это множество разбивается на 3 равночисленных подмножества. Требуется узнать число элементов в каждом таком подмножестве. Это число, как установлено выше, можно найти при помощи деления на равные части – 12 :3. Вычислив значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи - в каждой коробке по 4 карандаша.

Если дана задача: «В коробке 12 карандашей, их надо разложить в коробки, по 3 карандаша в каждую. Сколько коробок понадобится'?», - то для решения выбор действия деления можно обосновать следующим образом. Множество из 12 элементов разбивается на подмножества, в каждом из которых по 3 элемента. Требуется узнать число таких подмножеств. Его можно найти при помощи деления по содержанию - 12:3. Вычислив значение этого выражения, получаем ответ на вопрос задачи - понадобится 4 коробки.

Используя теоретико-множественный подход к действиям над целыми неотрицательными числами, можно дать **теоретико-множественное истолкование правил деления** суммы на число, разности на число, произведения на число.

Теоретико-множественной смысл отношений «больше в» и «меньше в», с которыми младшие школьники встречаются при решении текстовых задач.

В аксиоматической теории определение этих отношений вытекает из определения деления натуральных чисел: если $a:b = c$, то можно говорить, что «*a* больше *b в c* раз» или что *«b* меньше *a* в *c* раз». И чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого, надо большее число разделить на меньшее.

Если же $a = n(A)$, $b = n(B)$ и известно, что *«a* меньше *b* в *c* раз», то поскольку $a < b$, то в множестве *B* можно выделить собственное подмножество, равномощное множеству *A,* но так как *a* меньше *b* в *c* раз, то множество *B* можно разбить на *c* подмножеств, равномощных множеству *A*.

Так как *c* - это число подмножеств в разбиении множества *B,* содержащего *b* элементов, а в каждом подмножестве - *a* элементов, то $c = b:a$.

Теоретико-множественным смыслом отношения *«a* больше (меньше) *b* в *c* раз» можно воспользоваться **при обосновании выбора действий** при решении задач. Рассмотрим, например, такую задачу: «На участке растут 3 ели, а берез в 2 раза больше. Сколько берез растут на участке?»

В задаче речь идет о двух множествах: множестве елей *(A)* и множестве берез *(B)*. Известно, что $n(A) = 3$ и что в множестве *B* элементов в 2 раза больше, чем в множестве *A.* Требуется найти число элементов в множестве В, т.е. $n(B)$.

Так как в множестве *B* элементов в 2 раза больше, чем в множестве А, то множество *B* можно разбить на 2 подмножества, равномощных множеству *A*. Поскольку **в** каждом из подмножеств содержится по 3 элемента, то всего в множестве *B* будет 3 + 3 или 3·2 элементов. Выполнив вычисления, получаем ответ на вопрос задачи: на участке растет 6 берез.

Теоретико-множественное истолкование деления с остатком.

Напомним, что разделить натуральное число *a* на натуральное число *b* с остатком - это значит найти такие целые неотрицательные числа *q* и *r,*что $a=bq+r$, где $0 \le r < b$.

Пусть $a=n(A)$ и множество А разбито на множества $A_1, A_2, \ldots, A_q, R$, так, что множества $A_1, A_2, \ldots, A_q$ равночисленны, а множество *R* содержит меньше элементов, чем каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_q$. Тогда, если $n(A_1)= n(A_2)=\ldots= n(A_q) = b$, а $n(R) = r$, где $0 \le r < b$, причем число *q* равночисленных множеств является неполным частным при делении *a* на *b*, а число элементов в *R*- остатком при этом делении.

Основные выводы

Натуральное число как характеристику количества можно рассматривать и как результат счета элементов конечного множества, и как общее свойство класса конечных равномощных множеств.

Число «нуль» с теоретико-множественных позиций - это число элементов пустого множества: $n(\varnothing) = 0$.

Если отношение «меньше» рассматривать с теоретико-множественной точки зрения, то:

1) $a < b \Leftrightarrow N_a \subset N_b$, *где* $N_a =\{1, 2, \ldots, a\}$, $N_b = \{1, 2, \ldots, b\}$;

2) $a < b \Leftrightarrow A \sim B_1$, *где* $B_1 \subset B$ *и* $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \varnothing$, $a = n(B)$, $b = n(B)$.

Так как количественные натуральные числа связаны с конечными множествами, то действия над числами оказались связанными с действиями над множествами:

сложение чисел - с объединением конечных непересекающихся множеств;

вычитание чисел - с дополнением подмножества;

умножение чисел - с объединением равночисленных попарно непересекающихся множеств;

деление чисел - с разбиением множества на попарно непересекающиеся подмножества.

Так как действия над числами получили теоретико-множественную трактовку, то такую же трактовку оказалось возможным дать и их свойствам.

Вопросы для самоконтроля

1. Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и отношения «меньше».
2. Теоретико-множественный смысл суммы.
3. Теоретико-множественный смысл разности.
4. Теоретико-множественный смысл произведения.
5. Теоретико-множественный смысл частного натуральных чисел.

Задания для самоконтроля

I. Каков теоретико-множественный смысл суммы: а) 3 + 5; б) 0 + 4; в) 0 + 0.

2. Дайте теоретико-множественное истолкование суммы k слагаемых и, используя полученный вывод, объясните теоретико-множественный смысл суммы:

а) 3+4 + 2; б) 1 + 2 + 3 + 4.

3. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются сложением.

а) Дима сорвал 8 слив, Нина - 4. Сколько всего слив сорвали Дима и Нина вместе?

б) Из коробки взяли 6 красных карандашей и 4 синих. Сколько всего карандашей взяли из коробки?

4. Объясните с теоретико-множественной точки зрения смысл выражений:

а) 8-3; б)4-4; в) 4 - 0.

5. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи вычитания.

а) В корзине было 7 морковок, 3 из них отдали кроликам. Сколько морковок осталось?

б) На столе 8 чашек, их на 3 больше, чем стаканов. Сколько стаканов на столе?

в) На верхней полке шкафа 7 книг, а на нижней 4. На сколько книг больше на верхней полке, чем на нижней?

6. Обоснуйте выбор действий при решении задач.

а) На одной полке 5 книг, на другой на 3 больше. Сколько книг на двух полках?

б) Во дворе гуляли 6 мальчиков, а девочек на 2 меньше. Сколько детей гуляло во дворе?

7. Запишите, используя символы, правило вычитания суммы из числа и дайте его теоретико-множественное истолкование.

8. Используя теоретико-множественный смысл действий над числами, обоснуйте выбор действий при решении задач.

а) Первоклассники заняли в кинотеатре 3 ряда, второклассники – 4 ряда, а третьеклассники - 5 рядов. Сколько учеников начальных классов было в кинотеатре, если в каждом ряду они занимали по 9 мест?

б) В саду 8 рядов деревьев, по 9 в каждом. Из них 39 яблонь, 18 груш, остальные сливы. Сколько сливовых деревьев в саду?

9. Какие рассуждения учащихся вы будете считать правильными при выполнении ими следующих заданий.

а) Вера и Надя сажали тюльпаны. Вера посадила 8 рядов тюльпанов, по 9 в каждом, а Надя 9 рядов по 8 тюльпанов. Можно ли, не выполняя вычислений, утверждать, что Вера посадила столько же тюльпанов, сколько Надя?

Пользуясь данным условием, объясните, что означают выражения: 72+72; 2;·72 9·8 – 8.

б) В гараже в 6 рядов стояло по 9 машин. Из каждого ряда выехало 8 машин. Сколько машин осталось в гараже?

Объясните, что означают выражения, составленные по условию каждой задачи: $9 \cdot 6$; $8 \cdot 2$; $8 \cdot 6$; $9 - 8$; $(9 - 8) \cdot 2$; $(9 - 8) \cdot 6$.

10. Используя теоретико-множественный смысл частного, объясните смысл выражений:

а) 10:2; б) 5:1; в) 5:5.

11. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи деления.

а) 15 редисок связали в пучки по 5 редисок в каждом. Сколько получилось пучков?

б) 15 тетрадей раздали поровну 5 ученикам. Сколько тетрадей получил каждый?

12. Назовите отношения, которые рассматриваются в задачах, решите задачи арифметическим методом, выбор действий обоснуйте.

а) Для украшения елки девочка вырезала 4 звездочки, а флажков в 3 раза больше. Сколько флажков вырезала девочка?

б) У Коли в 4 раза больше открыток, чем у Вовы. А у Лены их на 20 меньше, чем у Коли. Сколько открыток у Лены, если у Вовы их 7?

в) Миша поймал 48 окуней. Саша - на 6 меньше, чем Миша, а Коля - в 7 раз меньше, чем Саша. Сколько окуней поймали все мальчики?

13. Какое правило является обобщением различных арифметических способов решения задачи.

а) В коробке лежало 12 зеленых и 20 красных хлопушек. Все хлопушки раздали детям, по 4 каждому. Сколько ребят получили хлопушки?

б) В лапту играли 8 девочек и 6 мальчиков. Они разделились на 2 команды. Сколько человек было в каждой команде?

14. Обоснуйте с теоретико-множественной позиции выбор действия при решении задачи.

В мастерской было 7 колес для велосипедов. При ремонте поставили на каждый велосипед по 2 колеса. На сколько велосипедов поставили колеса и сколько колес осталось в мастерской?

2.3. Тема «Натуральное число как мера величины»

Содержание

Числа возникли из потребности счета и измерения, но если для счета достаточно натуральных чисел, то для измерения величин нужны и другие числа. Однако в качестве результата измерения величин будем рассматривать только натуральные числа. В главе определим смысл натурального числа как меры величины, выясним, какой смысл имеют арифметические действия над такими числами.

Натуральное число мы будем рассматривать в связи с измерением положительных скалярных величин-длин, площадей, масс, времени и др., поэтому прежде, чём говорить о взаимосвязи величин и натуральных чисел, напомним некоторые факты, связанные с величиной и ее измерением, тем более что понятие величины, наряду с числом, является основным в начальном курсе математики.

Эти знания нужны учителю начальных классов не только для обоснования выбора действий при решении задач с величинами, но и для понимания еще одного подхода к трактовке натурального числа, существующего в начальном обучении математике.

Основные понятия и теоремы:

Величины (длина, площадь, масса, время и т.д.) представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называются **величинами одного рода** или **однородными величинами.** Например, длина стола и длина комнаты - это величины одного рода.

Напомним **основные положения,** связанные с **однородными величинами**.

1. Для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше», и для любых величин A *и* B справедливо одно и только одно из отношений: $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Например, мы говорим, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника больше, чем длина любого катета этого треугольника, масса яблока меньше массы арбуза, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.

2. Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно: если $A<B$ *и* $B<C$, *то* $A<C$.

3. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Иными словами, для любых двух величин A *и* B однозначно определяется величина $C = A + B$, её называют суммой этих величин

Сложение величин коммутативно и ассоциативно.

4. Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение.

Разностью величин A и B называется такая величина $C = A — B$, что
$A = B + C$. Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A>B$.

5. Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Более точно, для любой величины A и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $B=x\cdot A$, которую называют произведением величины A на число x.

6. Величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число.

Частным величин A и В называется такое положительное действительное число $x=A:B$, такое что $A = x B$.

Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью - их **можно оценивать количественно.** Для этого величину надо измерить. Чтобы осуществить измерение из данного рода величин выбирают величину, которую называют единицей измерения. Мы будем обозначать ее буквой E.

Если задана величина A и выбрана единица величины E (того же рода), то **измерить величину A - это значит найти такое положительное действительное число x, что $A = x \cdot E$.**

Число x называется *численным значением величины A* при единице величины Е. Оно показывает, во сколько раз величина A больше (или меньше) величины E принятой за единицу измерения.

Если $A=x\cdot E$, то число x называют также *мерой величины A при единице E* и пишут $x = m_E(A)$.

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин: так, длину измеряют в метрах, сантиметрах и т.д. Результат измерения записывают в таком виде: 2,7 кг; 13 см; 16с. Исходя из понятия измерения, данного выше, эти записи можно рассматривать как произведение числа и единицы величины. Например, 2,7кг = 2,7·кг; 13 см = 13·см; 16 с = 16·с. Используя это представление, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной.*

Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют *положительной скалярной величиной.*

Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

1. Если величины A и B измерены при помощи единицы величины E, то отношения между величинами A *и* B будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$A=B \iff m(A)=m(B)$;

$A<B \iff m(A)<m(B)$;

$A>B \iff m(A)>m(B)$.

2. Если величины A и B измерены при помощи единицы величины E то чтобы найти численное значение суммы $A + B$, достаточно сложить численные значения величин A и B: $A+B=C \Rightarrow m(A+B) = m(A)+m(B)$.

3. Если величины A и B таковы, что $B = x\cdot A$, где x - положительное действительное число, и величина A измерена при помощи единицы величины E *то,* чтобы найти численное значение величины B при единицы E достаточно, число x умножить на число $m(A)$: $B=x\cdot A \Rightarrow m(B)= x\cdot m(A)$.

Рассмотренные понятия - объект (предмет, явление, процесс), его величина, численное значение величины, единица величины - надо уметь вычленять в текстах и задачах. Например, математическое содержание, предложения «Купили 3 килограмма яблок» можно описать следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как яблоки, и его свойство - масса; для измерения массы использовали единицу массы - килограмм; в результате измерения получили число 3 - численное значение массы яблок при единице массы - килограмм.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека - это рост, масса, возраст и др. Процесс равномерного движения характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем, между которыми существуют зависимость, выражаемая формулой $s=v\cdot t$.

Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют *величинами разного рода,* или *разнородными величинами.* Так, например, длина и масса - это разнородные величины.

Определение. *Если отрезок x состоит из a отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e, то число a называют численным значением длины X данного отрезка при единице длины E.*

Пишут**:** $X = aE$ или $a = m_E(X)$.

Из данного определения получаем, что **натуральное число как результат измерения длины отрезка (или как мера длины отрезка) показывает, из скольких единичных отрезков состоит отрезок, длина которого измеряется.** При выбранной единице длины *E* это число единственное.

В связи с таким подходом к натуральному числу сделаем два замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины заданного отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным.
2. Если отрезок *x* состоит из *a* отрезков, равных *e,* а отрезок у — из *b* отрезков, равных *e,* то $a = b$ тогда и только тогда, когда отрезки *x* и *y* равны.

Аналогично можно истолковать смысл натурального числа и в связи с измерением других величин. Так, в записи 3 см^2 число 3 означает, что фигура *F* состоит из трех единичных квадратов с площадью, равной квадратному сантиметру,

Смысл суммы и разности натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

Теорема. Если отрезок *x с*остоит из отрезков *y* и *z* и длины отрезков *y* и *z* выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка *x* равна сумме мер длин его частей.

Из этой теоремы следует, что *сумму натуральных чисел a и b можно рассматривать как меру длины отрезка x, состоящего из отрезков y и z, мерами длин которых являются числа a и b.*

$a+b = m_E(Y)+m_E(Z) = m_E(Y+Z)$. Аналогичный смысл имеет сумма натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Покажем, как используется данный подход к **обоснованию выбора действия сложения** при решении текстовых задач: «В саду собрали 7 кг смородины и 3 кг малины. Сколько всего килограммов ягод собрали?»

В задаче две величины - масса смородины и масса малины. Известны их численные значения. Требуется найти численное значение массы, которая получится, если данные массы сложить. Для этого, согласно рассмотренной теореме, надо сложить численные значения массы смородины и массы малины, т.е. получить выражение 7 + 3. Это математическая модель данной задачи. Вычислив значение выражения 7 + 3, получим ответ на вопрос задачи,

Теорема. Если отрезок *x* состоит из отрезков *y* и *г* и длины отрезков *x* и *y* выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка z равна разности мер длин отрезков *x* и *y.*

Из этой теоремы следует, что разность натуральных чисел *a* и *b* можно рассматривать как меру длины такого отрезка z, что z□*y*= *x,* если мера длины отрезка *x* равна *a,* мера длины отрезка *y* равна *b.*

$a - b=m_E(X)- m_E(Y) = m_E(X-Y)$.

Аналогичный смысл имеет разность натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин.

Выясним, как используется данный подход к **обоснованию выбора действия вычитания** при решении текстовых задач, например, «Купили 7 кг картофеля и капусты. Сколько килограммов картофеля купили, если капусты было 3 кг?»

В задаче рассматривается масса овощей, известно ее численное значение. Эта масса складывается из массы картофеля и массы капусты, численное значение которой также известно. Требуется узнать численное значение массы картофеля.

Так как массу картофеля можно получить, вычитая из всей массы купленных овощей массу капусты, то численное значение массы картофеля находят действием вычитания: 7-3. Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи.

При помощи сложения или вычитания решаются также текстовые задачи, в которых величины связаны отношением «больше на» или «меньше на». Например: «Купили 3 кг моркови, а картофеля на 2 кг больше. Сколько килограммов картофеля купили?»

В задаче речь идет о двух величинах - массе моркови и массе картофеля. Численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что картофеля на 2 кг больше, чем моркови. Если построить вспомогательную модель задачи, то можно сразу увидеть, что картофеля купили столько же, сколько моркови, и еще 2 кг, т.е. масса картофеля складывается из двух масс (3 кг и 2 кг), и чтобы найти ее численное значение, надо сложить численные значения масс слагаемых. Получаем выражение 3 + 2, значение которого и будет ответом на вопрос задачи.

Смысл произведения и частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин

Теорема. Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E, а отрезок длины E состоит из b отрезков, длина которых равна E_1,то мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна $a \times b$.

Из этой теоремы следует, что **умножение натуральных чисел** связано с переходом в процессе измерения к новой единице длины: если натуральное число a– мера длины отрезка x при единице длины E, натуральное число b– мера длины E при единице длины E_1, то произведение $a \times b$– это мера длины отрезка x при единице длины E_1: $a \times b = m_\varepsilon(X) \times m_{\varepsilon 1}(E) = m_{\varepsilon 1}(X)$.

Аналогичный смысл имеет произведение натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин. И поэтому при построении вспомогательных моделей текстовых задач с величинами можно использовать отрезки (что, впрочем, мы делали и раньше). Кроме того, условимся, что в тех случаях, когда это не ведет к путанице, отрезок x и его длину X не различать. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Задача 1. Объяснить смысл произведения 4×3, если 4 и 3 – числа, полученные в результате измерения величин.

Решение. Пусть $4 = m_\varepsilon(X)$, $3 = m_{\varepsilon 1}(E)$, где X – измеряемая величина, E - первоначальная единица величины, а E_1 – новая единица величины. Тогда, согласно доказанной теореме, $4 \times 3 = m_{\varepsilon 1}(X)$, т.е. 4×3 – это численное значение длины X при единице длины E_1.

Задача 2. Обосновать выбор действия при решении задачи. «В одной коробке 6 ручек. Сколько ручек в трех таких коробках?».

*Решение.*В задаче речь идет о количестве ручек, которое сначала измерено коробками и известно численное значение этой величины при указанной единице. Требуется найти численное значение этой же величины при новой единице – ручка, причем известно, что коробка – это 6 ручек. Тогда 3 кор. = 3×кор.=3×(6 руч.) = (3×6) руч. Таким образом, задача решается при помощи действия умножения, поскольку в ней при измерении осуществляется переход от одной единицы величины (коробка) к другой – ручка.

Теорема. Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E, а отрезок длины E_1 состоит из b отрезков длины E, то мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна $a:b$.

Из этой теоремы следует, что **деление натуральных чисел** связано с переходом в процессе измерения к новой единице длины: если натуральное число a –

мера длины отрезка x при единице длины E, а натуральное число b - мера новой единицы длины E_1 при единице длины E, то частное $a:b$–это мера длины отрезка x при единице длины E_1: $a:b = m_\varepsilon(X) : m_\varepsilon(E_1) = m_{\varepsilon 1}(X)$.

Аналогичный смысл имеет частное натуральных чисел, полученных в результате измерения других положительных скалярных величин. Заметим, что такая трактовка частного возможна только для деления по содержанию.

Задача 3. Обосновать выбор действия при решении задачи.

«Из 12 м ткани сшили платья, расходуя на каждое по 4 м. Сколько платье сшили?»

Решение. В задаче рассматривается длина ткани, которая измерена сначала при помощи единицы длины – метр, и известно численное значение заданной величины. Требуется найти численное значение той же длины при условии, что она измеряется новой единицей – платьем, причем известно, что платье – это 4 м, откуда метр – это ¼ платья. Рассуждения, связанные с поиском численного значения длины при единице – платье, можно представить в таком виде:

12 м = 12×м = 12×(1/4 пл.) = (12×1/4)×пл. = (12:4)пл.

Таким образом, ответ на вопрос задачи находится при помощи деления, поскольку в задаче нужно перейти от одной единицы величины к другой в процессе измерения одной и той же величины.

Выбор действий умножения и деления при решении текстовых задач с величинами можно обосновывать иначе, используя понятие умножения и деления величины на натуральное число.

Напомним, что умножить величину A на натуральное число x– это значит получить такую величину B того же рода, что $B = x \times A$ или $B = A \times x$.

Чтобы найти численное значение величины B при единице величины E, достаточно численное значение величины A, полученное при той же единице E, умножить на число x, т.е. если $B = A \times x$, то $m_\varepsilon(B) = m_\varepsilon(A) \times x$.

Рассмотрим, например, задачу: «Купили 3 пакета муки, по 2 кг в каждом. Сколько килограммов муки купили?» Чтобы ответить на вопрос задачи, надо массу 2 кг повторить слагаемым три раза, т.е. массу 2 кг умножить на число 3. Численное значение полученной при этом величины находим, умножив численное значение массы муки в одном пакете на число 3. Произведение 2×3 будет математической моделью данной задачи. Вычислив его значение, будем иметь ответ на вопрос задачи.

Если $B = A \times x$, где x– натуральное число, B и A – величины одного рода, то с помощью деления решают две задачи:

- зная А и B, находят число x $(x = B:A)$, причем $x = m\varepsilon(B) : m\varepsilon(A)$; это деление по содержанию;

- зная B и x, находят A $(A = B:x)$, причем $m\varepsilon(A) = m\varepsilon(B) : x$; это деление на равные части.

С этих позиций выбор действия при решении задачи «6 кг муки разложили на пакеты по 2 кг в каждый. Сколько получилось пакетов?» можно обосновать так. В задаче надо узнать, сколько раз масса 2 кг укладывается в 6 кг, т.е. надо массу 6 кг разделить на массу 2 кг. В результате должно получиться число, которое находим, разделив численное значение одной величины на численное значение другой. Таким образом, получаем частное 6:2. Его значение и будет ответом на вопрос задачи.

Пользуясь описанным подходом к трактовке умножения и деления натуральных чисел, можно обосновывать выбор действия и при решении текстовых задач с отношениями «больше в», «меньше в».

Задача 4. Обосновать выбор действия при решении задачи.

«Купили 3 кг моркови, а картофеля в 2 раза больше. Сколько килограммов картофеля купили?»

Решение. В задаче рассматриваются масса моркови и масса картофеля, причем численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что она в два раза больше первой.

Если воспользоваться вспомогательной моделью задачи, то можно сказать, что масса картофеля складывается из двух масс по 3 кг, и, следовательно, ее численное значение можно найти, умножив 3 на 2. Найдя значение выражения 3 ·2, получим ответ на вопрос задачи

Основные выводы

При изучении материала главы установили, что объекты (предметы, явления, процессы) могут обладать особыми свойствами, которые называются величинами. Величины как свойства объектов проявляются при их сравнении, причем для каждой величины существует свой способ сравнения. Если выбрана единица величины, то величину можно измерить. В результате измерения получается число, которое называют численным значением величины или мерой величины при выбранной единице величины. Рассмотрены понятия: положительная скалярная величина; однородные величины; разнородные величины.

Установлено, что измерение величины позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

Введены записи $X = a \times E$ и $a = m\varepsilon(X)$, в которых X– обозначает величину, E– единицу величины, a – действительное число.

Если a– натуральное число, то запись $X = a \times E$ означает, что

$$X = \underbrace{E + E + \ldots + E}_{a \text{ слаг.}}$$

Установлено, что действия над натуральными числами и действия над положительными скалярными величинами взаимосвязаны: сложение чисел – со сложением величин, вычитание чисел – с вычитанием величин, а умножение и деление чисел – с переходом в процессе измерения от одной единицы величины к другой.

Кроме того, установлено, что обосновывать выбор действий умножения и деления при решении текстовых задач можно, используя понятие умножения величины на число.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие положительной скалярной величины и её измерения.

2. Смысл натурального числа, полученного в результате измерения величины.

3. Смысл суммы и разности натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

4. Смысл произведения и частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

Задания для самоконтроля

1. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:

а) Груши дороже яблок.

б) Книга тяжелее тетради.

в) Таня выше Светы.

2. Какие величины могут характеризовать следующие объекты: а) карандаш; б) человек; в) озеро?

3. Имеются два куска проволоки. Каким образом можно сравнить их длины, не прибегая к измерению? Какими могут быть результаты сравнения?

4. Как можно сравнить массы двух предметов, не определяя массу каждого из них? Какими могут быть результаты сравнения?

5. Разбейте на классы тремя способами следующие величины:

A – высота дерева; B – 16кг; C – масса доски; D – 25 см; E – возраст дерева; M – площадь доски; H – 13 с; K – 26 м; L – длина веревки; P – толщина доски.

6. Запишите стандартные единицы, с помощью которых можно измерить величины (длина, масса, ширина, объем, время, высота, количество).

7. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:

а) В одной коробке 25 яблок, а в другой 30 яблок.

б) 15 яблок дороже, чем 8 груш.

в) В одном ящике 20 кг овощей, а в другом 12 кг овощей.

8. Какие из данных величин можно сравнить между собой:

1500 м; 2,5 км; 18 штук; 8 десятков; 3 ц; 1 км 500 м; 299 кг; 18 пар.

9. Сравните величины: 56 мин и 7/10 ч; 3/50 м и 4/5 дм; 1,5 см и 3/20 дм; 5/4 кг и 1250 г.

10. Назовите объект, его величину, численное значение и единицу измерения величины в каждом из следующих предложений:

а) В коробке 8 кг яблок.

б) Глубина оврага 2 м.

в) Площадка садового участка 6 соток.

г) В сервизе 6 тарелок.

д) Рост девочки 1 м 20 см.

11. Назовите величины и объекты, о которых говорится в задаче:

а) За тетради заплатили x р., а за карандаши на / р. меньше. Сколько стоили карандаши?

б) Мешок картофеля тяжелее ящика с луком на 2 кг. Какова масса мешка картофеля, если масса ящика с луком z кг?

в) На первой полке стояло x книг. На второй на y книг больше, а на третьей на z книг меньше, чем на первой полке. Сколько книг стояло на трех полках?

12. Назовите величины, о которых говорится в задаче, и действия с ними, которые будут выполнены в процессе решения:

а) В ящике было 24 кг апельсинов. Сначала из него взяли 5 кг, а потом в 3 раза больше, чем в первый раз. Сколько апельсинов осталось в ящике?

б) Для вышивания первого узора нужно 24 м ниток, для второго в 6 раз меньше, а для третьего - на 16 м больше, чем для первого. Хватит ли 7 катушек для вышивания всех узоров, если в каждой катушке по 10 м ниток?

13. Какой смысл имеет натуральное число 7, если оно получено в результате измерения: длины отрезка; площади фигуры; массы тела?

14. Верно ли, что при увеличении единичного отрезка в к раз соответствующие численные значения длин отрезка уменьшаются во столько же раз?

15. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи сложения:

а) Когда из ящика взяли 4 кг яблок, то в нем осталось 6 кг. Сколько килограммов яблок было в ящике первоначально?

б) На пошив кофты израсходовали 2 м ткани, а на платье на 3 м больше. Сколько метров ткани израсходовали на платье?

16. Объясните, почему задачи решаются при помощи вычитания:

а) От ленты длиной 5 м отрезали 2 м. Сколько метров ленты осталось?

б) С первого участка собрали 10 мешков картофеля, а со второго на 3 мешка меньше. Сколько мешков картофеля собрали со второго участка?

17. Обоснуйте выбор действий при решении следующих задач:

а) Мама купила 5 кг огурцов, 2 кг свеклы и помидоры. Сколько килограммов помидоров купила мама, если масса всех овощей 12 кг?

б) На одной полке 30 книг, на другой на 7 книг меньше. Сколько книг на двух полках?

в) От проволоки длиной 15 дм отрезали сначала 2 дм, а потом еще 4 дм. Сколько дециметров проволоки осталось?

г) За лето первоклассники собрали 8 кг лекарственных трав, второклассники на 4 кг больше первоклассников, а третьеклассники на 3 кг меньше второклассников. Сколько килограммов лекарственных трав собрали третьеклассники?

18. Объясните различными способами, почему следующие задачи решаются при помощи умножения:

а) В одной корзине 5 кг яблок. Сколько килограммов яблок в трех таких корзинах?

б) За один день Саша прочитывает 4 страницы книги. Сколько страниц в книге, если Саша прочитал ее за 6 дней.

19. Объясните различными способами, почему следующие задачи решаются при помощи деления:

а) 8 кг варенья надо разложить в банки по 2 кг в каждую. Сколько получится банок?

б) На садовом участке посадили 15 кустов смородины по 5 кустов в каждом ряду. Сколько было рядов?

20. Обоснуйте выбор действий при решении следующих задач:

а) С трех овец настригли 18 кг шерсти. Сколько шерсти можно получить с 5 таких овец?

б) В пятиэтажном доме 80 квартир. На каждом этаже в подъезде по 4 квартиры. Сколько подъездов в этом доме?

в) Когда из гаража выехали 18 машин, в нем осталось машин в 3 раза меньше, чем было. Сколько машин было в гараже?

2.4. Тема «Запись целых неотрицательных чисел и алгоритмы действий над ними»

Содержание

В главе рассматривается способ записи чисел, который в настоящее время используется и носит название *десятичной системы счисления*. Предварительно даются определения понятий системы счисления, позиционные и непозиционные системы счисления.

Кроме перечисленных понятий, в главе даются определения понятий записи числа в десятичной системе счисления, способ наименования натуральных чисел, алгоритмы четырех арифметических действий. Рассматриваются запись и действия над числами в позиционных системах счисления, отличной от десятичной.

Предлагаемый материал является теоретической основой при рассмотрении различных методических подходов к обучению младших школьников способам записи чисел и выполнению действий над ними.

Основные понятия и теоремы:

Определение. Система счисления — это совокупность набора специальных знаков (цифр) и правил для записи чисел и произведения арифметических операций.

Существуют позиционные и непозиционные системы счисления.

Определение. В непозиционных системах вес цифры (т. е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа.

Примером непозиционной системы счисления является **римская**, в которой для записи чисел используются буквы латинского алфавита. При этом буква I всегда означает единицу, буква V – пять, X – десять, L – пятьдесят, C – сто, D – пятьсот, M – тысячу и т.д. Например, число 267 записывается в виде CCLXVII (100+100+50+10+7). В римской системе счисления в числе XXXII (тридцать два) вес цифры X в любой позиции равен десяти.

Основной недостаток непозиционных систем – большое число разных знаков и сложность выполнения арифметических операций.

Определение. В позиционных системах счисления значение каждой цифры числа зависит от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число. Например, в числе 757 первая семерка означает 7 сотен, вторая — 7 единиц.

Любая позиционная система счисления характеризуется своим основанием.

Определение. Основание позиционной системы счисления — это количество различных символов, используемых для изображения цифр в данной системе.

Приняв за основание число 10, получим хорошо знакомую десятичную систему.

Число 60 является основанием древней вавилонской системы счисления, к которой восходит деление часа на 60 минут и угла на 360 градусов.

Как известно, в десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 знаков (цифр): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 3745 является краткой записью числа $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Определение. *Десятичной записью натурального числа x называется его представление в виде:* $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 . 10 + a_0$, где коэффициенты a_n, a_{n-1}, a_1, a_0, принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n \pm 0$.

Сумму $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 . 10 + a_0$ в краткой форме принято записывать так: $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$.

Теорема. Любое натуральное число *x* можно представить в виде:

$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 . 10 + a_0$, где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и $a_n \pm 0$, и такая запись единственна.

Десятичная запись числа позволяет просто решать вопрос о том, какое из них меньше.

Теорема. Пусть *x* и *y* - натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 . 10 + a_0$,

$y = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + b_1 . 10 + b_0$,

Тогда **число x меньше числа *y*,** если выполнено одно из условий:

а) $n < m$;

б) $n = m$, *но* $a_n < b_n$

в) $n = m$, $a_n = b_n \ldots, a_к = b_к$, но $a_{к-1} < b_{к-1}$.

Выделение классов единиц, тысяч, миллионов и т.д. создает удобства для **записи и прочтения чисел.**

Если натуральное число x представлено в виде $x=a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 . 10 + a_0$, то числа 1, 10, 10^2, ..., 10^n называют *разрядными единицами* соответственно первого, второго, ...,n+1 разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 - основанию системы счисления.

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют *первым классом,* или классом единиц. В первый класс входят единицы, десятки и сотни.

Четвертый, пятый и шестой разряды в записи числа образуют *второй класс* - класс тысяч. В него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Затем следует *третий класс* - класс миллионов, состоящий тоже из трех разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т.е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие три разряда также образуют новый класс и т.д.

В десятичной системе всем числам можно дать название (имя).

Это достигается следующим образом: имеются названия первых десяти чисел, затем из них в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще немногих слов образуются названия последующих чисел.

Так, числа второго десятка (они представляются в виде $1 \cdot 10 + a_0$ образуются из соединения первых десяти названий и несколько измененного слова десять («дцать»): *одиннадцать* - один на десять, *двенадцать* - два на десять и т.д. Может быть, естественнее было бы говорить «два и десять», но наши предки предпочли говорить «два на десять», что и сохранилось в речи.

Слово «двадцать» обозначает два десятка.

Числа третьего десятка (это числа вида $2 \cdot 10 + a_0$) получают путем прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка: двадцать один, двадцать два и т.д.

Продолжая далее счет, получим название чисел четвертого, пятого, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого десятков. Названия этих чисел образуются так же, как и в пределах третьего десятка, только в трех случаях появляются новые слова: сорок (для обозначения четырех десятков), девяносто (для обозначения девяти десятков) и сто (для обозначения десяти десятков). Названия чисел второй сотни составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующих десятков. Таким путем образуются наименования: сто один, сто два, ..., сто двадцать и т.д. Отсчитав новую сотню, будем иметь две сотни, которые для краткости называют «двести». Для получения чисел, больших двухсот, снова воспользуемся названиями чисел первого и последующих десятков, присоединяя их к слову «двести». Затем получим особые названия: триста, четыреста, пятьсот и т.д. до тех пор пока не отсчитаем десять сотен, которые носят название **тысяча.**

Счет за пределами тысячи ведется так: прибавляя к тысяче по единице (тысяча один, тысяча два и т.д.), получим две тысячи, три тысячи и т.д. Когда же отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое наименование — **миллион.** Далее считаем миллионами до тех пор, пока не дойдем до тысячи миллионов. Полученное новое число - тысяча миллионов - носит особое название **миллиард,** или **биллион.** В вычислениях миллион принято записывать в виде 10^6, миллиард - 10^9. По аналогии можно получить записи еще больших чисел: **триллион — 10^{12}, квадриллион —** 10^{15} и т.д.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, потребовалось только 16 различных слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, девяносто, сто, тысяча, миллион, миллиард. Остальные названия чисел (в пределах миллиарда) образуются из основных.

Вопросы наименования и записи чисел рассматриваются в начальном курсе математики в разделе «Нумерация». При этом десятичной записью натурального числа считают его представление в виде суммы разрядных слагаемых. Например, 3000 + 700 + 40 + 5 есть сумма разрядных слагаемых числа 3745. Представление числа в виде таких сумм удобно для его наименования: три тысячи семьсот сорок пять.

Алгоритмы арифметических действий над многозначными числами.

В основе алгоритма сложения многозначных чисел лежат следующие **теоретические факты:**

- способ записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойства коммутативности и ассоциативности сложения;
- дистрибутивность умножения относительно сложения;
- таблица сложения однозначных чисел.

В общем виде алгоритм сложения натуральных чисел, записанных и десятичной системе счисления, формулируют так:

1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Складывают единицы первого разряда. Если сумма меньше десяти, записывают ее в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду (десятков).

3. Если сумма единиц больше или равна десяти, то представляют ее в виде $a_0+b_0 = 1 \cdot 10 + c_0$, где c_0 - однозначное число; записывают c_0 в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.

4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т.д. Процесс заканчивается, когда оказываются сложенными цифры старших разрядов. При этом, если их сумма больше или равна десяти, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняем сложение 1+0=1.

Заметим, что в этом алгоритме (как и в некоторых других) для краткости употребляется термин «цифра» вместо «однозначное число, изображаемое цифрой».

Алгоритм вычитания многозначного числа из многозначного основывается на **теоретических фактах**:

- способе записи числа в десятичной системе счисления;
- правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- свойстве дистрибутивности умножения относительно вычитания;
- таблице сложения однозначных чисел.

В общем виде алгоритм вычитания чисел:

1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем ее из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.

3. Если же цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0 > a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10 + a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа, далее переходим к следующему разряду.

4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д. уменьшаемого, равны нулю, то берем первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем ее на 1, вес цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10 + a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.

5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.

6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Алгоритм умножения многозначного числа на однозначное основывается на **теоретических фактах**:

- записи чисел в десятичной системе счисления;
- свойствах сложения и умножения;
- таблицах сложения и умножения однозначных чисел.

Алгоритм умножения многозначного числа $x=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ **на однозначное число** у:

1. Записываем второе число под первым.
2. Умножаем цифры разряда единиц числа х на число у. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).
3. Если произведение цифр единиц числа х на число у больше или равно 10, то представляем его в виде $10q_1+c_0$, где c_0– однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1- перенос в следующий разряд.
4. Умножаем цифры разряда десятков на число у, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пп. 2 и 3.
5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Умножение числа x **на число вида** $\boldsymbol{10^k}$ сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа *к* нулей.

Алгоритм умножения многозначного числа x **на многозначное** число y.

1. Записываем множитель x и под ним второй множитель y.
2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x \cdot b_0$ под числом y.
3. Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y и записываем произведение $x \cdot b_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x \cdot b_1$ на 10.
4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot bк$.
5. Полученные $к + 1$ произведения складываем.

Изучение алгоритма умножения многозначных чисел в начальном курсе математики, как правило, проходит в соответствии с выделенными этапами.

Обобщением различных случаев деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b является следующий **алгоритм деления уголком.**

1. Если a= b, то частное $q=1$, остаток r= 0.

2. Если $a > b$ и число разрядов в числах a и b одинаково, то частное q находим перебором, умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, так как а < 10b. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов *а и b.*

3. Если $a > b$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе b, то записываем делимое a и справа от него делитель b, который отделяем от a уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) Выделяем в числе *a* столько старших разрядов, сколько разрядов в числе *b* или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1, больше или равное b. Перебором находим частное q_1, чисел d_1, и b, последовательно умножая b на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Записываем q_1 под уголком (ниже b).

б) Умножаем *b* на q_1, и записываем произведение под числом а так, чтобы младший разряд числа bq_1, был написан под ним разрядом выделенного числа d_1.

в) Проводим черту под bq_1 и находим разность $r_1=d_1-bq_1$.

г) Записываем разность r_1 под числом bq_1, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого *a* и сравниваем полученное число d_2 с числом b.

д) Если полученное число d_2 больше или равно *b,* то относительно него поступаем согласно п. 1 или п. 2. Частное q_2 записываем после q_1.

е) Если полученное число d_2 меньше *b,* то приписываем еще столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3, большее или равное *b.* В этом случае записываем после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пп. 1, 2. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа *a* окажется, что $d_3<b$, то тогда частное чисел d_3 и *b* равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частному, а остаток $r=d_3$.

Возможно бесконечное множество позиционных систем счисления: двоичная, троичная, четверичная и т.д.

Основанием позиционной системы счисления может быть не только число 10, но и вообще любое натуральное число $p\geq 2$. Система счисления с основанием *p* называется *p*-ичной. Так, если $p=2$, то - двоичной, если $p=8$ - восьмеричной, если $p=10$ - десятичной.

Для записи чисел в системе с основанием ***p*** необходимо ***p*** символов. Принято использовать знаки десятичной системы счисления: 0, 1, 2, ...,***p***-1. Например, числа в троичной системе счисления записывают при помощи символов 0, 1, 2, а в пятеричной - при помощи символов 0,1,2,3, 4.

Определение. Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде:

$x= a_np^n+ a_{n-1} p^{n-1}+\ldots+ a_1p + a_0$(1), где коэффициенты $a_n, a_{n-1},\ldots a_1,a_0$ принимают значения 0, 1, 2, …, p-1 и $a_n\neq 0$.

Теорема. Пусть $p \geq 2$ - заданное натуральное число. Тогда натуральное число ***x*** представимо, и притом единственным образом в виде (1).

Вместо представления в виде (1) число ***x*** записывают кратко. Например, если $p=3$, то число $x = 2\cdot 3^3+ 0\cdot 3^2+1\cdot 3 +2$ можно записать в виде 2012_3, причем читать следует так: «два, ноль, один, два в троичной системе счисления».

Правило перевода чисел из десятичной системы в любую другую: Для перевода целого числа производят последовательное целочисленное деление на основание системы, в которую переводят, сначала самого числа, затем полученные частные. Процесс заканчивается, когда частное станет равным нулю. Число в новой системе счисления записывается как последовательность остатков от деления, записанных в обратном порядке.

Правило перевода чисел в десятичную систему счисления: Перевод чисел в десятичную систему счисления производится с использование записи чисел по основанию системы, и проведения арифметических операций в десятичной арифметике.

Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием *p* *(p*≠10) выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления. Надо лишь иметь для системы с основанием *p* соответствующие таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Основные выводы

Десятичная запись натурального числа - это его представление в виде

$x= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 . 10 + a_0 = a_n a_{n-1} .... a_1 a_0$, где $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ принимают значения 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 и $a_n \pm 0$.

В таком виде можно записать любое натуральное число и эта запись единственная.

Десятичная запись натуральных чисел позволяет их сравнивать и выполнять, по определенным правилам (алгоритмам), над ними действия. Мы рассмотрели теоретические основы этих алгоритмов и сформулировали их в общем виде.

Натуральные числа можно записывать не только в десятичной системе счисления, но и вообще в позиционных системах с основанием $p \geq 2$.

При этом записью числа *x* считается его представление в виде

$x= a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_1 . p + a_0 = a_n a_{n-1} .... a_1 a_0$, где $a_n a_{n-1} .... a_1 a_0$ принимают значения 0,1,2,…, p-1 и $a_n \pm 0$.

Действия над числами в позиционных системах счисления, отличных от десятичной, выполняются по правилам, аналогичным принятым в десятичной системе счисления.

Вопросы для самоконтроля

1. Позиционные и непозиционные системы счисления.

2. Запись числа в десятичной системе счисления.

3. Алгоритм сложения.

4. Алгоритм вычитания.

5. Алгоритм умножения.

6. Алгоритм деления.

7. Позиционные системы счисления, отличные от десятичной.

Задания для самоконтроля

1. Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых:

а) 4725; б)3370; в) 10255.

2. Какие числа представлены следующими суммами:

а) $6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 8$; б) $7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10$; в) $8 \cdot 10^4 + 10^3 + 3 \cdot 10 + 1$; г) $10^5 + 10^2$?

3. Напишите наибольшее трехзначное и десятизначное числа, в которых все цифры различны.

4. Решите арифметическим методом задачи из начального курса математики:

а) Сумма цифр двузначного числа равна 9, причем цифра десятков вдвое больше цифры единиц. Найдите это число.

б) Сумма цифр двузначного числа равна наименьшему двузначному числу. Цифра десятков обозначает число в 4 раза меньшее, чем цифра единиц. Какое это двузначное число?

Какие некорректности допущены в формулировках данных задач? Следует ли их исправлять?

5. Каждая цифра пятизначного числа на единицу больше предыдущей, а сумма его цифр равна 30. Какое это число?

6. Младшим школьникам предложена задача: «Запиши 5 четырехзначных чисел, используя цифры 2, 5, 0, 6 (одна и та же цифра не должна повторяться в записи числа)». А сколько вообще всевозможных четырехзначных чисел можно записать, используя цифры 2, 5, 0 и 6 так, чтобы одна и та же цифра не повторялась в записи числа?

7. На примере сложения чисел 237 и 526 покажите, какие теоретические факты лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.

8. При изучении алгоритма сложения трехзначных чисел в начальной школе последовательно рассматриваются такие случаи сложения: 231 + 342; 425 + 135; 237 + 526; 529 + 299. Каковы особенности каждого из этих случаев?

9. Вычислите устно значение выражения; использованный прием обоснуйте:

а) 2746 + 7254 + 9876; б) 7238 + 8978 + 2768; в) (4729 + 8473) + 5271; г) 4232 + 7419 + 5768 + 2591; д) (357 + 768 + 589) + (332 + 211+ 643).

10. Какие рассуждения школьников вы будете считать правильными при выполнении задания.

а) Можно ли утверждать, что значения сумм в каждом столбике одинаковы:

2459+ 121	53075 + 2306
2458+ 122	53076 + 2305
2457+ 123	53006 + 2375
2456+ 124	53306 + 2075

б) Можно ли записать значения этих сумм в порядке возрастания:

4583 + 321; 4593 + 311; 4573 + 331.

11. На примере нахождения разности чисел 469 и 246, 757 и 208 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма вычитания чисел столбиком.

12. Выполните вычитание, используя запись и объясняя каждый шаг алгоритма: а) 84072 - 63894; б) 935204 — 326435; в) 940235 - 32849; г) 653481 — 233694.

13. Сколько пятизначных чисел можно записать, используя цифры 1 и 0? Чему равна разность между наибольшим и наименьшим из этих пятизначных чисел?

14. Вычислите (устно) значение выражения, использованные приемы обоснуйте: а) 2362-(839+ 1362); б) (1241 +576)-841; в) (7929 + 5027 + 4843) - (2027 + 3843).

15. Вычислите рационально значение выражения: а) 5480 + (6290 — 3480); б) 2354-(965-1246); в) (4317 -1928) -317. Сформулируйте правило, которое вы использовали.

16. Как изменится разность, если:

а) уменьшаемое уменьшить на 277, а вычитаемое увеличить на 135;

б) к уменьшаемому и вычитаемому прибавить 198;

в) к уменьшаемому прибавить, а из вычитаемого вычесть 198?

17. Решить следующие задачи арифметическим методом, решение запишите в виде числового выражения; выбор действий обоснуйте, используя соответствующую математическую теорию:

а) Первый овощной магазин получил с базы на 500 кг овощей больше, чем второй магазин. Первый магазин продал за день 1 т 300 кг овощей, второй 1 т 100 кг. На сколько меньше овощей осталось к концу дня во втором магазине?

б) В двух мешках лежат яблоки; в первом мешке на 70 яблок больше, чем во втором. В каком мешке яблок будет меньше и на сколько, если переложить из первого мешка во второй 45 яблок?

в) В первой библиотеке 6844 книги, что на 959 книг меньше, чем во второй, а в третьей на 2348 книг меньше, чем в первой и второй библиотеках вместе. Сколько книг в третьей библиотеке?

18. На примере умножения 452 на 186 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма умножения многозначного числа на многозначное.

19. Объясните, почему нижеприведенные задачи решаются при помощи умножения чисел и решите их.

а) Земля при обращении вокруг Солнца за сутки проходит примерно 2 505 624 км. Какой путь проходит Земля за 365 дней?

б) В школу привезли 56 пачек книг, по 24 книги в каждой пачке. Сколько всего книг привезли в школу?

20. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение:

а) На элеватор отвезли 472 т овса, ржи на 236 т больше, чем овса, а пшеницы в 4 раза больше, чем овса и ржи вместе. Сколько тонн пшеницы отвезли на элеватор?

б) Столяр делает в день 18 рам, а его помощник на 4 рамы меньше. Сколько рам они сделают за 24 дня, если каждый день будут работать вместе?

21. Как могут рассуждать учащиеся, выполняя следующее задание: «Ширина земельного участка прямоугольной формы равна 24 м. Это в 6 раз меньше его длины. Объясни, что обозначают выражения, записанные по условию задачи, и вычисли их значения: 24 • 6; 24•(24•6); (24 + 24•6)•6; 24•2; 24•2 + 24•6•2».

22. Выполните умножение чисел, используя запись столбиком, и объясняя каждый шаг алгоритма:

а) 984 •27; в) 7040•234;

б) 8276 •73; г) 4569•357.

23. Используя свойства умножения, найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

а) 8•13•4125•25; г) 124•4 + 116•4;

б) 24•(27•125); д) (3750 - 125)•8;

в) (88 + 48) •125; е) 1779•1243 – 779•1243.

24. Зная, что 650•34 = 22100, найдите произведение чисел, не выполняя умножения столбиком:

а) 650 • 36; б) 650 • 32; в) 649•34.

25. Вычислите рациональным способом значение выражения:

а) (420 -394) • 405 – 25 • 405;

б) 105 • 209 + (964 - 859) • 209 • 400.

26. Найдите значения выражений 13•11, 27•11, 35•11, 43•11, 54•11. Верно ли: чтобы найти результат умножения двузначного числа на 11 в случае, когда сумма цифр двузначного числа меньше 10, достаточно между цифрами данного числа написать число, равное сумме его цифр?

27. Найдите значение выражений 29 • 11, 37 • 11, 47 • 11, 85 • 11, 97 • 11. Верно ли: чтобы найти результат умножения двузначного числа на 11 в случае, когда сумма цифр двузначного числа больше или равна 10, достаточно между цифрой десятков, увеличенной на 1, и цифрой единиц написать число, равное разности между суммой его цифр и числом 10?

28. Не выполняя деления, определите число цифр частного чисел:

а) 486 и 7; в) 5792 и 27;

б) 7243 и 238; г) 43126 и 543.

29. На примере деления числа 867 на 3 проиллюстрируйте теоретические основы алгоритма деления трехзначного числа на однозначное.

30. Обоснуйте процесс деления уголком *a* на b, если

а) *a*= 4066, b = 38; б) *a*= 4816, b = 112.

31. Как, не вычисляя, можно установить, что деление выполнено неправильно, если: а) 51054:127 = 42; б)405945:135 = 307?

32. Не вычисляя значений выражений, поставьте знаки > или < , чтобы получились верные неравенства: а) 1834:7...783:9; б) 8554:91 ...7488:72; в) 137532:146... 253242:198; г) 7248:6... 758547:801.

33. Объясните, почему при делении ***p*** на ***k*** в частном получаются нули, если:

а) p = 753, k= 5; г) p = 613, k =3;

б) p =1560, k=6; д) p =4086, k =2;

в) p =84800, k=4; е) p = 4012, k=4.

34. Не производя деления, разбейте данное выражение на классы при помощи «иметь в частном одно и то же число цифр»:

а) 20700:300; г) 20300: 700;

б) 5460:60; д) 14640: 80;

в) 30720: 40; е) 1500: 300.

35. Объясните, почему следующие задачи решаются при помощи деления чисел, и решите их.

а) В 125 коробок разложили поровну 3000 карандашей. Сколько карандашей в каждой коробке?

б) Расфасовали 12 кг 600 г конфет в коробки по 300 г в каждой. Сколько коробок конфет получилось?

36. Решение задачи запишите в виде числового выражения, а затем найдите его значение.

а) Туристы совершили экскурсию по реке на катере, проплыв всего 66 км. Сначала 2 ч они плыли со скоростью 18 км/ч, а остальной путь - со скоростью 15 км/ч. Сколько всего часов находились в пути туристы?

б) Печенье упаковали в пачки по 250 г. Пачки сложили в ящик в 4 слоя. Каждый слой имеет 5 рядов по 6 пачек в каждом. Определите массу сложенного в ящик печенья.

37. Найдите значение первого выражения, а затем используйте его при вычислении значения второго.

а) 45120:(376 ·12), б) 241·(1264:8),

45120: (376·3); 241 ·(1264:4).

38. Найдите двумя способами значение выражения: а) (297+ 405+ 567): 27; б) 56 ·(378:14); в) (240·23):48; г) 15120:(14·5-18).

39. Запишите число в виде суммы степеней основания с соответствующими коэффициентами: а) 3024_5; б) 7610_8; в) 11101_2.

40. Верно ли записаны числа в восьмеричной системе счисления: 347; 8025; 52; 1110; 223?

41. Для числа *x* назовите предшествующее и непосредственно следующее за ним число, если: а) $x = 34_5$; б) $x= 50_7$; в) $x=12_3$.

42. Выполните действия над числами, записанными в восьмеричной системе счисления: а) 4312+ 2767; б) 72·27; в)6714-3505; г) 5250:76.

43. Запишите в десятичной системе числа: 12_3, 144_5, 201_9, 1011_2.

44. Запишите в порядке возрастания числа:

а) $11_7, 11_5, 11_2, 11_9$;

б) 327_8, 1101_2, 513_6, 83_9, $20\,1\,2_3$.

45. Запишите в двоичной системе числа, запись которых дана в десятичной системе: 27, 125, 306.

46. Что меньше: $26543_8 - 325_7$ или $26543_7 - 325_8$?

2.5. Тема «Делимость натуральных чисел»
Содержание

В главе рассматриваются вопросы делимости натуральных чисел. Определяется понятие отношения делимости и его свойств. Формулируются признаки делимости - правила, которые по записи числа а позволяют узнавать, делится оно на число *b* или нет, не выполняя непосредственного деления *a* на *b*. Другие важные свойства делимости чисел, способы нахождения наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

В начальных курсах математики делимость натуральных чисел, как правило, не изучается, но многие факты из этого раздела математики неявно используются, что позволяет глубже усвоить материал, связанный с делением натуральных чисел. Например, признак делимости суммы, разности и произведения на число тесно связаны с правилами деления суммы, разности и произведения на число, изучаемыми в начальных классах.

Основные понятия и теоремы:

Определение. Пусть даны натуральные числа a и b. Говорят, что число a делится на число b, если существует такое натуральное число q, что a = bq.

В этом случае число *b* называют **делителем числа *a***, а число ***a*** - **кратным числа** *b*.

Из определения отношения делимости, равенства $a = 1 \cdot a$, верного для любого натурального *a*, вытекает, что **1 *является делителем любого натурального числа***

Свойства отношения делимости

Теорема 1. Делитель ***b*** данного числа ***a*** не превышает этого числа, т.е. если $\boldsymbol{a} \,\vdots\, \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.

В зависимости от числа делителей среди натуральных чисел различают **простые и составные числа.**

Определение. Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два делителя - единицу и само это число.

Например, число 13- простое, поскольку, у него только два делителя: 1 и 13.

Определение. Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Так число 4 составное, у него три делителя: 1,2 и 4.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом в связи с тем, что оно имеет только один делитель.

Чисел, кратных данному числу, можно назвать как угодно много, - их бесконечное множество. Так, числа, кратные 4, образуют бесконечный ряд: 4, 8, 12, 16, 20, 24, …, и все они могут быть получены по формуле *a* = 4q, где *q* принимает значения 1, 2, 3,....

Теорема 2. Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое натуральное число делится само на себя.

Теорема 3. Отношение делимости антисимметрично, т.е. если $\boldsymbol{a} \,\vdots\, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b} \,\overline{\vdots}\, \boldsymbol{a}$.

Теорема 4. Отношение делимости транзитивно, т.е. если $a \,\vdots\, b$ и $b \,\vdots\, c$, то $a \,\vdots\, c$.

Теорема 5 (признак делимости суммы). Если каждое из натуральных чисел $a_1,\ a_2,\ ...,a_n$ делится на натуральное число b, то и их сумма $a_1 + a_2 + ... + a_n$ делится на это число.

Теорема 6 (признак делимости разности). Если числа a_1 *и* a_2 делятся на *b* и $a_1 \geq a_2$, то их разность $a_1 - a_2$ делится на *b*.

Теорема 7 (признак делимости произведения). Если число *a* делится на b, то произведение вида *ax,* где *x* Є N, делится на b.

Из доказанной теоремы следует, что *если один из множителей произведения делится на натуральное число* b, *то и все произведение делится на* b. *Например*, произведение 24·976·305 делится на 12, так как на 12 делится множитель 24.

Рассмотрим еще три теоремы, связанные с делимостью суммы и произведения, которые часто используются при решении задач на делимость.

Теорема 8. Если в сумме одно слагаемое не делится на число ***b,*** а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число *b* не делится.

Теорема 9. Если в произведении *ab* множитель *a* делится на натуральное число *m,* а множитель *b* делится на натуральное число *n,то ab* делится *на mn.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы о делимости произведения.

Теорема 10. Если произведение *ac* делится на произведение *bc,* причем *c* - натуральное число, то и *a* делится на *b.*

Признаки делимости *позволяют установить по записи числа делится ли оно на другое, не выполняя деления.*

Теорема 11 (признак делимости на 2). Для того чтобы число *x* делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0,2,4,6,8.

Теорема 12. (признак делимости на 5). Для того чтобы число **x** делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

Теорема 13. (признак делимости на 4). Для того чтобы число ***x*** делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа *x.*

Теорема 14 (признак делимости на 9). Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

Теорема 15 (признак делимости на 3). Для того чтобы число *x* делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

Определение. Общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое кратно каждому из данных чисел.

Наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b называется ***наименьшим общим кратным*** этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел *a* и b условимся обозначать *K(a,b).*

Например, два числа 12 и 18 общими кратными являются: 36, 72, 108, 144, 180 и т.д. Число 36 - наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Можно записать: K(12,18) = 36.

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие **утверждения:**

1. Наименьшее общее кратное чисел *a* и b всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел *a* и b не меньше большего из данных чисел, т.е. если a > b, то *K(a,b) > a:*

3. Любое общее кратное чисел а и b делится на их наименьшее общее кратное.

Определение. Общим делителем натуральных чисел а и b называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.

Наибольшее число из всех общих делителей чисел а и b называется ***наибольшим общим делителем*** данных чисел.

Наибольший, общий делитель чисел a и b условимся обозначать $D(a, b)$.

Например, для чисел 12 и 18 общими делителями являются числа: 1, 2, 3, 6. Число 6- наибольший общий делитель чисел 12 и 18. Можно записать: D(12,18) = б.

Число 1 является общим делителем любых двух натуральных чисел a *и* b. Если у этих чисел нет иных общих делителей, то $D(a,b)=1$. Такие числа a и b называются ***взаимно простыми.***

Например, числа 14 и 15 взаимно простые. 'Так как D(14, 15)=1.

Для наибольшего общего делителя справедливы следующие утверждения:

1. Наибольший общий делитель чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит меньшего из данных чисел, т.е. если $a < b$, то $D(a, b) < a$.

3. Наибольший общий делитель чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

Основные свойства *D(a,b), K(a,b)*

Произведение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел а и b равно произведению этих чисел, т.е. $D(a,b)\cdot K(a,b)= ab$.

Из этого утверждения вытекают следующие следствия:

а) Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел, т.е. $D(a,b)=1$ и $K(a,b)=ab$.

Например, чтобы найти наименьшее общее кратное чисел 14 и 15, достаточно их перемножить, так как D(14,15) = 1.

б) Для того чтобы число а делилось на произведение взаимно простых чисел m и n необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на m и на n (признак делимости на числа, которые можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел).

Простые числа играют большую роль в математике - по существу они являются «кирпичами», из которых строятся составные числа.

Теорема (основная теорема арифметики натуральных чисел): Любое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей.

Например, запись $42 = 2\cdot 3\cdot 7$ есть представление числа 42 в виде произведения простых множителей или ***разложение** его **на простые множители.***

Два разложения числа на простые множители считают одинаковыми, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

При разложении числа на простые множители произведение одинаковых множителей представляют в виде степени: $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$; $60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$; $72 = 2^3\cdot 3^2$. Такое разложение числа на простые множители называют ***каноническим.***

Возникает необходимость определять, является данное число простым или составным. Эту задачу умели решать еще древнегреческие математики, которым были известны многие свойства простых чисел. Так, Эратосфеном (III в. до н.э.) был придуман способ получения простых чисел, не превышающих натурального числа a, называется решетом Эратосфена, так как позволяет отсеивать одно за другим составные числа. Простыми числами, не превосходящими 50, являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Алгоритм распознавания простых чисел: в арифметике доказано, что если натуральное число a, большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадрат которых не превосходит a , то a число простое.

Греческий математик Евклид доказал, что **множество простых чисел бесконечно.**

Способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Способ, основанный **на разложении данных чисел на простые множители.**

Вообще, чтобы найти **наибольший общий делитель данных чисел**:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;

2) образуют произведение общих для всех данных чисел простых множителей, каждый с наименьшим показателем, каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находят значение этого произведения - оно и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Вообще, чтобы найти **наименьшее общее кратное данных чисел**:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;

2) образуют произведение всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;

3) находят значения этого произведения, оно и будет наименьшим общим кратным данных чисел.

Способ, **отыскания наибольшего общего делителя,** требующий лишь деления с остатком **- *алгоритм Евклида***.

Алгоритм Евклида основан на следующих трех утверждениях:

1. Если a делится на b, то $D(a, b) = b$.

2. Если $a = bq + r$ и $r < b$, то множество общих делителей чисел $\boldsymbol{a}$ и b совпадает с множеством общих делителей чисел b и r.

3. Если $a = bq + r$ и $r < b$,, то $D(a, b) = D(b, r)$.

Сформулируем теперь **алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел *a* и *b***.

Пусть $a > b$.

Если a делится на b, то $D(a;b)= b$.

Если при делении a на b, получается ток r; то $a = bq + r$ и $D(a, b) = D(b,r)$ и задача свелась к отысканию наибольшего общего делителя чисел b и r.

Если b делится на r, то $D(b, r) = r$ и тогда $D(a, b) = r$.

Если при делении b на r получается остаток $r_,$, то $b = rq, + r,$ и поэтому $D(r,r,) = D(b,r) = D(a,b)$.

Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов получим остаток, на который будет делиться предыдущий остаток. Этот наименьший, отличный от нуля, остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

Для нахождения **наименьшего общего кратного** используем свойство: произведение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел а и b равно произведению этих чисел, т.е. $\boldsymbol{D(a,b)\cdot K(a,b)= ab}$.

Основные выводы

Определены следующие *понятия :*делитель данного числа; простое число; составное число; общий делитель данных чисел; наибольший общий делитель данных чисел; взаимно простые числа; общее краткое данных чисел; наименьшее общее кратное данных чисел.

Рассмотрены **теоремы** о свойствах делимости и признаках делимости на 2, 3, 4, 5,9. Кроме того, дан способ получения признаков делимости на те составные числа, которые можно представить в виде произведения взаимно простых чисел.

Любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей или *разложить на простые множители.*

Наибольший общий делитель двух чисел Можно находить двумя способами. Первый основан на разложении данных чисел на простые множители, а второй является алгоритмом Евклида.

Наименьшее общее кратное двух чисел можно находить, используя разложение данных чисел на простые множители, или, если известен наибольший общий делитель чисел ***a*** и ***b*,** то выражая его из формулы $D(a,b)\cdot K(a,b)= ab$.

Вопросы для самоконтроля

1. Отношение делимости и его свойства.

2. Признаки делимости.

3. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

4. Простые числа.

5. Способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Задания для самоконтроля

1. Объясните, почему число 15 является делителем числа 60 и не является делителем числа 70.

2. Постройте граф отношения «быть делителем данного числа», заданного на множестве $X = \{2, 6,. 12, 18, 24\}$. Как отражены на этом графе свойства данного отношения?

3. Известно, что число 24 - делитель числа 96, а число 96 -делитель числа 672. Докажите, что число 24 делитель числа 672, не выполняя деления.

4. Запишите множество делителей числа: а) 24; 6)13; в) 1.

5.На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; 12\}$ задано отношение «иметь одно и то же число делителей». Является ли оно отношением эквивалентности?

6.Постройте умозаключение, доказывающее, что: а) число 19 является простым; б) число 22 является составным.

7. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) Если сумма двух слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число.

б) Если одно из слагаемых суммы не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число.

в) Если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число.

г) Если одно из слагаемых суммы делится на некоторое число, а другое не делится на это число, то и сумма не делится на это число.

8. Выпишите из ряда чисел 132, 1050, 1114, 364, 12000 те, которые:

а) делятся на 2;

б) делятся на 4;

в) делятся на 2 и не делятся на 4;

г) делятся и на 2 и на 4.

9. Верно ли утверждение:

а) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4?

б) Для того чтобы число делилось на 2, достаточно, его делимости на 4?

10. Из ряда чисел 72,312,522,483,1197 выпишите те, которые:

а) делятся на 3;

б) делятся на 9;

в) делятся на 3 и не делятся на 9;

г) делятся и на 3 и на 9.

Сделайте вывод о взаимосвязи делимости на 3 и на 9. Докажите его.

11. Установите, делится ли значение выражения на 4,:

а) 284 + 1440 + 113; в) 284 + 1441+ 113;

б) 284+ 1440 + 792224; г) 284+ 1441 + 113+ 164.

12 Не выполняя вычитания, установите, делится ли разность на 9:

а) 360- 144; 6) 946-540; в) 30240-97.

13. Даны числа 18 и 24.

а) Найдите все общие делители этих чисел.

б) Можно ли назвать все их общие кратные?

в) Найдите три трехзначных числа, которые являются общими кратными данных чисел.

г) Чему равны D(18, 24) и K(18, 24)? Как проверить правильность полученных ответов?

14. Верны ли записи:

а) D(32, 8) = 8 и K(32,8) = 32;

б) D(17,35)= 1 и K(17,35) = 595;

в) D(255,306) = 17 и K(255,306),= 78030,

15. Найдите *K(a, b),* если известно, что:

а) a = 47,b=105 и D(47,105)= 1;

б) *a* = 315,b = 385 и D (315,385) = 35.

16. Сформулируйте признаки делимости на 12,15,18,36,45,75.

17. Из множества чисел 1032, 2964,5604,8910, 7008 выпишите те, которые делятся на 12.

18. Делятся ли на 18 числа 548 и 942?

19. К числу 15 припишите слева и справа по; одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

20. Не выполняя умножения и деления уголком, установите, какие из следующих произведений делятся на 30: а) 105·20; 6)47·12·5; в) 85·33·7.

21. Не выполняя сложения или вычитания, установите, значения каких выражений, делятся на 36.

а) 72 + 180 + 252; в) 180 + 252 + 100;

б) 612-432; г) 180 + 250 + 200.

22. Из множества чисел 17, 24, 31, 61, 86 выпишите простые числа, а составные разложите на простые множители.

23. Докажите, что число 1001 не является простым числом.

24. Разложите на простые множители числа 124,588,2700,3780.

25. Какое число имеет разложение: а) $2^3 \cdot 3^2 7 \cdot 13$; б) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$?

26. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное данных чисел, представив их в каноническом виде: а) 948 и 624; 6) 120, 540, 418.

27. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий делитель чисел. а) 846 и 246; б) 585 и 1960; в) 15283 и 10013.

28. Верно ли, что: а) D(448,656) = 16; б) K(578, 8670) = 8670?

29. Докажите, что числа 432 и 385 взаимно простые.

30. Найдите наибольший общий делитель всех пятизначных чисел, записанных при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в записи чисел не повторяются).

3. Методические рекомендации по выполнению практических заданий

Тема «Аксиоматическое построение системы натуральных чисел»
Методические рекомендации

В данной теме представлены два типа заданий. В первом задании две части, к первой относятся те, в которых выполнены тождественные преобразования выражений и требуется дать им обоснование. Их решение сводится к анализу каждого шага выполненных преобразований с указанием теоретической основы. Ко второй части относятся задания из начального курса математики, для решения которых необходимо знать свойства действий над числами и уметь обосновывать проводимые преобразования, используя язык вузовского и начального курсов математики.

Во втором задании требуется решить задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обосновать. Установить, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи. Провести анализ, всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулировать задачи с измененными данными и обосновать решения.

Для решения задач данной темы необходимо

знать:
- законы сложения и умножения натуральных чисел, их назначение в преобразованиях числовых выражений;
- дистрибутивные законы умножения относительно сложения и вычитания;
- правила вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- правила деления суммы, разности, произведения на число.

уметь:
- рационально выполнять вычисления с натуральными числами;
- обосновывать проводимые преобразования, используя язык вузовского и начального курсов математики;
- использовать свойства действий над натуральными числами при решении задач различными арифметическими способами.

Образец выполнения заданий

Задание 1. а) Образец 1. Вычислите значение выражения 12 х 25 х 50 х 4 рациональным способом и укажите все случаи использования законов сложения и умножения.

Решение. Удобно умножить 12 на 50, а 25 на 4. Для этого необходимо переставить множители 25 и 50, что возможно на основании коммутативного закона умножения, получим 12 х 50 х 25 х 4. На основании ассоциативного закона умножения выделим в полученном произведении группы по два множителя:

(12 х 50) х (25 х 4) = 600 х 100 = 60000

Образец 2. Укажите все случаи использования законов сложения целых неотрицательных чисел при вычислении значения выражения:

243 + 359 + 758 = 243 + 758 + 359 = 243 + (757 + 1) + 359 = (243 + 757) + (1 + 359) = 1000 + 360 = 1360.

Решение. Переход от выражения 243 + 359 + 758 к выражению 243 + 758 + 359 осуществлен на основании коммутативного закона сложения. Следующее тождественное преобразование - представление числа 758 в виде суммы 757 + 1 - возможно в силу единственности суммы двух данных чисел. Замена выражения 243 + (757 + 1) + 359 выражением (243 + 757) + (1 + 359) осуществлена на основе ассоциативного закона сложения. Затем действия выполнены по порядку.

б) Дайте обоснование приведенных преобразований, используя язык вузовского и начального курсов математики: 35+21=(30+5)+(20+1)=(30+20)+(5+|)=56.

Решение. Дадим обоснование приведенным преобразованиям на языке вузовского курса математики:

1, Переход от выражения 35 + 21 к тождественно равному выражению (30 + 5) + (20 + 1) осуществлен на основе способа записи чисел в десятичной системе счисления.

2. Замена выражения (30 + 5) + (20 + 1) выражением (30 + 20) + (5 + 1) осуществлена на основе коммутативного и ассоциативного законов сложения. Действительно, (30+5)+(20+ 1)=30+5+20+1=30+20+5+1=(30+20)+(5+1)=50+6=56.

Дадим обоснование приведенным преобразованиям на языке начального курса математики:

1. Переход от выражения 35 + 21 к тождественно равному выражению (30 + 5) + (20 + 1) осуществлен на основе представления чисел 35 и 21 в виде суммы разрядных слагаемых.

2. Замена выражения (30 + 5) + (20 + 1) выражением (30 + 20) + (5 + 1) осуществлена на основе правила прибавления суммы к сумме.

Задание 2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

Задача. На товарную станцию прибыло 12 вагонов фруктов, по 60 т в каждом. Их поровну распределили между тремя супермаркетами. Сколько тонн фруктов получил каждый супермаркет?

Решение. Задача может быть решена тремя арифметическими способами.

1-ый способ. Так как известно, что в каждом из 12 вагонов 60 т фруктов, то можно найти массу всего груза: 60·12=720 (т).

Эти фрукты распределили поровну между тремя супермаркетами, следовательно, каждый супермаркет получил 720:3=240 (т).

2-ой способ. Так как фрукты находятся в 12 вагонах, то их можно поровну распределить между тремя супермаркетами, получим 12:3=4 (вагона).

В каждом из четырёх вагонов по 60 т фруктов, значит каждый супермаркет получил 60·4=240 (т).

3-ий способ. Так как в каждом вагоне 60 т фруктов, то, распределив его поровну между тремя супермаркетами, получим 60:3=20 (т).

Вагонов 12, всего фруктов каждый супермаркет получит 20·12=240 (т).

Обобщением рассматриваемых способов решения данной задачи является правило деления произведения на число: для того чтобы разделить произведение а·в на число с, достаточно на это число разделить один из множителей и полученное частное умножить на другой множитель. Другими словами:

если а делится на с, то (а·в):с=(а:с) ·в ;

если в делится на с, то (а·в):с=а·(в:с).

Тема «Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и операций над числами»

Методические рекомендации

Умение правильно выбирать арифметическое действие при решении задачи - одно из наиболее важных для учащихся начальных классов. Теоретико-множественный подход к целому неотрицательному числу способствует формированию умения выбирать и обосновывать выбор действия при решении задач.

В данной теме выделены два типа задач. К первому относятся те, в которых действия над целыми неотрицательными числами связаны с действиями над множествами:

- сложение чисел - с объединением конечных непересекающихся множеств;

- вычитание чисел - с выделением подмножества данного множества и образованием нового множества - дополнения выделенного подмножества;

- умножение чисел - с объединением попарно непересекающихся равночисленных множеств;

- деление чисел - с разбиением множества на попарно непересекающиеся равночисленные подмножества.

Ко второму типу относятся задачи, в которых обоснование выбора действия требует знания теоретико-множественного смысла отношений «столько же», «больше (меньше) на», «больше (меньше) в». В этом случае, прежде чем обосновать выбор действия, надо выяснить, о каких множествах идет речь в задаче и какие отношения между их численностями рассматриваются.

Для решения задач данной темы необходимо

знать:	уметь:
- теоретико-множественный смысл сложения, вычитания, умножения и деления целых неотрицательных чисел; - теоретико-множественный смысл отношений «больше (меньше) на», «больше (меньше) в».	- обосновывать выбор действий при решении задач, пользуясь теоретико-множественной терминологией; - излагать данное обоснование на языке школьной математики.

Образец выполнения заданий

Задание. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию: а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

Задача 1. Ребята сделали 10 красных фонариков и 6 желтых. Из них собрали гирлянды, по 8 фонариков в каждой. Сколько получилось гирлянд?

Решение. Задача в два действия. Сначала узнаем, сколько всего фонариков (10 + 6 = 16), а затем выясним сколько получилось гирлянд (16 : 8 = 2). Обоснуем выбор этих действий.

Теоретико-множественное обоснование:

В задаче рассматривается множество красных фонариков (А) и множество желтых фонариков (В). Эти непересекающиеся множества объединяют для того, чтобы узнать, сколько всего было фонариков. Число элементов в объединении находят сложением: 10+ 6 = 16.

Далее полученное множество фонариков разбивается на равночисленные подмножества по 8 элементов в каждом. Число таких подмножеств находят делением (по содержанию): 16 : 8 = 2.

Обоснование с использованием школьной терминологии:

Имеется 10 красных фонариков и 6 желтых. Чтобы узнать, сколько всего фонариков, нужно к красным фонарикам прибавить желтые: 10 + 6 = 16 (фонариков).

Из этих 16 фонариков собрали гирлянды, по 8 фонариков в каждой. Число получившихся гирлянд можно найти, разделив 16 на 8: 16 : 8 = 2 (гирлянды).

Задача 2. В первый раз в лыжном походе участвовало 42 ученика, во второй - на 9 человек больше, а в третий — в 2 раза больше, чем во второй. Сколько человек участвовало в походе в третий раз?

Решение. Задача в два действия. Вначале узнаем, сколько человек участвовало в лыжном походе во второй раз (42 +9 = 51), а затем - сколько в третий (51 ›‹ 2 = 102). Обоснуем выбор этих действий.

Теоретико-множественное обоснование:

1) В задаче идет речь о трех множествах учащихся, участвовавших в лыжных походах, известно, что в первом множестве (А) 42 элемента; число элементов второго множества (В) неизвестно, но сказано, что в нем на 9 элементов больше, чем в первом, т.е. столько же, сколько в первом, и еще 9. Таким образом, множество В является объединением двух непересекающихся множеств, содержащих соответственно 42 и 9 элементов. Поэтому число элементов множества В находят сложением: 42 + 9 = 51.

2) Число элементов третьего множества (С) также неизвестно, но сказано, что в нем в 2 раза больше элементов, чем во втором, т.е. оно является объединением двух непересекающихся множеств, каждое из которых содержит столько же элементов, сколько их в множестве В. Поэтому число элементов в множестве С находят при помощи умножения: 51 ›‹ 2 = 102.

Обоснование с использованием школьной терминологии:

Было три похода. В первом принимало участие 42 учащихся, во втором - на 9 человек больше, т.е. столько же, сколько в первый раз, и еще 9 человек. Значит, число участников второго похода находят сложением: 42 + 9 = 51 (человек).

В третий раз участников было в 2 раза больше, чем во втором походе, т.е. 2 раза по 51. Это число находят умножением: 51 x 2 = 102 (человека).

Тема «Натуральное число как мера величины»

Методические рекомендации

Подход к натуральному числу как мере величины позволяет обосновывать выбор действий при решении задач с различными величинами.

Действия над натуральными числами и действия над положительными скалярными величинами взаимосвязаны: сложение чисел - со сложением величин, вычитание чисел - с вычитанием величин, умножение отражает переход к новой (более мелкой) единице величины, деление отражает переход к новой (более крупной) единице величины.

В данной теме представлены два типа задач. К первому относятся задачи, решение которых основывается на знании смысла сложения, вычитания, умножения и деления целых неотрицательных чисел, являющихся значениями величин.

Ко второму типу задач относятся те, в которых обоснование выбора действия требует знания смысла отношений «равно», «больше (меньше) на», «больше (меньше) в» для чисел - значений величин.

Для решения задач данной темы необходимо

знать:

- смысл сложения, вычитания, умножения и деления целых неотрицательных чисел, являющихся значениями величин;
-смысл отношений «равно», «больше (меньше) на», «больше (меньше) в» для чисел - значений величин.

уметь:

- обосновывать выбор действий при решении задач, в которых рассматриваются величины, отношения между ними, а также производятся различные операции;
- излагать данное обоснование на языке школьной математики.

Образец выполнения заданий

Задание. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя подход к натуральному числу как мере величины.

Задача I. Наташа собрала в саду 6 кг вишни, а Сережа 8 кг. Всю ягоду разложили в ведра, по 7 килограммов в каждое. Сколько ведер потребовалось?

Решение. Изобразим массу вишни, собранной Наташей, в виде отрезка АВ, а массу вишни, которую собрал Сережа, в виде отрезка ВС продолжение отрезка АВ. Получим отрезок АС.

Так как мера отрезка АС равна сумме мер его частей, то массу всей собранной вишни находим, сложив 6кг и 8 кг: 6 кг + 8 кг = 14 кг. В задаче рассматриваются две единицы измерения массы вишни - килограммы и ведра. Так как в задаче требуется выразить результат измерения массы вишни в ведрах, т.е. в новой (более крупной) единице, И известно, что в новой (ведре) содержится семь старых (килограммов), то задача решается делением: 14 кг : 7 кг = 2. Потребуется два ведра.

Задача 2. Ручка стоит 2 рубля, а тетрадь в 4 раза дороже. Сколько рублей стоит тетрадь?

Решение. В задаче рассматриваются цена ручки и цена тетради, причем численное значение первой величины известно, а численное значение второй надо найти, зная, что она в два раза больше первой. Если воспользоваться вспомогательной моделью задачи, то можно сказать, что цена тетради складывается из четырех цен по 2 рубля, следовательно, ее численное значение можно найти, умножив 2 на 4. Найдя значение выражения 2 х 4, получим ответ на вопрос задачи. Тетрадь стоит 8 рублей.

Тема «Запись целых неотрицательных чисел и алгоритмы действий над ними»

Методические рекомендации

Натуральные числа можно записывать не только в десятичной системе счисления, но и в любой позиционной системе счисления с основанием $p \geq 2$. При этом запись числа, сравнение натуральных чисел и действия над ними в позиционных системах счисления, отличных от десятичной, выполняются по правилам, аналогичным тем, что приняты в десятичной системе счисления.

Среди различных задач данной темы выделены два вида. К первому относятся задания, в которых проверяются знания студентов об алгоритмах действий с многозначными числами в десятичной системе счисления и умение обосновывать эти алгоритмы.

Ко второму виду относятся те задания, которые связаны с выполнением действий над натуральными числами в различных позиционных системах счисления. В процессе проверки правильности решения задания нужно воспользоваться правилом перехода от записи числа в системе счисления с основанием p ($p \neq 10$) к записи в десятичной системе счисления, и наоборот.

Для решения задач данной темы необходимо:

знать:	уметь:
- запись числа х в системе счисления с основанием р; - переход от записи числа в системе счисления с основанием р (р # 10) к записи в десятичной системе счисления, и наоборот;	- записывать число в любой позиционной системе счисления; - переходить от записи числа с основанием р (р # 10) к записи в десятичной системе счисления, и наоборот; - выполнять действия над числами в пози-

- правила выполнения действий в позиционных системах счисления с основанием р. ционных системах счисления.

Образец выполнения заданий

Задание 1. На примере вычитания числа 126 из 540 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма вычитания многозначных чисел.

Решение. Представим данные числа в виде сумм степеней десяти с коэффициентами: $540—126 = (5\cdot10^2 + 4\cdot10 + 0) — (1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 6)$. Так как из числа 0 нельзя вычесть 6, то из числа 540 возьмем один десяток и представим его в виде 10 единиц — запись числа в десятичной системе счисления позволяет это сделать: $(5\cdot10^2 + 3\cdot10 + 10) — (1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 6)$.

Если теперь воспользоваться правилом вычитания суммы из числа, то придем к выражению: $(5\cdot10^2 + 3\cdot10 + 10) — 1\cdot10^2 – 2\cdot10 - 6$.

Далее применим правило вычитания числа из суммы:

$$(5\cdot10^2 — 1\cdot10^2) + (3\cdot10 - 2\cdot10) + (10 — 6).$$

На основе дистрибутивного закона умножения относительно вычитания выносим общий множитель за скобки в двух первых слагаемых полученной суммы: $(5 – 1)\cdot10^2 + (3 - 2)\cdot10 + (10 — 6)$.

Воспользуемся таблицей сложения однозначных чисел: $4\cdot10^2 + 1\cdot10 + 4$.

Полученное выражение есть запись числа 414 в десятичной системе счисления.

Проведенные вычисления принято записывать так:

$$\begin{array}{r} _{-}540 \\ \underline{126} \\ 414. \end{array}$$

Из рассуждений, выше приведенных, следует, что правило вычитания «столбиком» основывается на:
- способе записи чисел в десятичной системе счисления;
- правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа;
- дистрибутивном законе умножения относительно вычитания;
- таблице сложения однозначных чисел.

Задание 2. Найдите значение выражения $42_5\cdot 324_5 + 213_5$. Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

Решение. Составим таблицу сложения и умножения однозначных чисел в пятеричной системе счисления.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

x	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Используя таблицу умножения, находим произведение

$42_5\cdot 324_5 = 30313_5$

Используя таблицу сложения, находим значение выражения

$30313_5 + 213_5 = 31031_5$

Итак, $42_5\cdot 324_5 + 213_5 = 31031_5$

Проверка:

Переходим от записи числа в системе счисления с основанием р=5 к записи числа в десятичной системе счисления:

$42_5 = 4\cdot5 + 2 = 22$

$324_5 = 3\cdot5^2 + 2\cdot5 + 4 = 89$

$213_5 = 2\cdot5^2 + 1\cdot5 + 3 = 58$

Находим результаты действий над числами в десятичной системе счисления

$22 \cdot 89 + 58 = 1958 + 58 = 2016$

Запишем в десятичной системе счисления ответ, полученный в пятеричной системе счисления:

$31031_5 = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 1875 + 125 + 15 + 1 = 2016.$

Тема «Делимость натуральных чисел»

Методические рекомендации

Культура вычислений, необходимая учителю начальных классов, предполагает знание некоторых вопросов теории делимости целых неотрицательных чисел и умение их применять на практике.

В данной теме представлены задачи различных типов. К первому типу относятся задания включающие две части, где в первой части, не производя указанных действий над числами, нужно установить, делится ли на данное число значение выражения, во второй части, требуется найти все числа определенного вида, кратные заданному числу. При их решении используются признаки делимости, а также теоремы о делимости суммы, разности и произведения, запись числа в виде суммы разрядных слагаемых.

Ко второму типу относится задание, в котором требуется найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел, используя различные способы их нахождения.

Умение определить, простое число или составное, является необходимым при решении некоторых математических задач. В третий тип заданий по данной теме, включены задачи на использование алгоритма распознавания простых чисел, `который позволяет ускорить процесс выявления простых чисел из некоторого множества.

Утверждения о делимости натуральных чисел можно доказывать различными методами. К четвертому типу заданий относятся задания на доказательство утверждений о делимости натуральных чисел методами математической и полной индукции.

Доказательство методом математической индукции утверждения A(n) о натуральных числах состоит из двух частей:

1) доказывают, что утверждение A(n) истинно для n=1, т.е. истинно высказывание A(1);

2) предполагают, что утверждение A(n) истинно для n = k; исходя из этого предположения, доказывают, что утверждение A(п) истинно для n = k+1, т.е. что истинно высказывание A(k) => A(k+1), где k — произвольное натуральное число.

Если A(1) и (A(k)=>A(k + 1)) - истинное высказывание, то делают вывод о том, что утверждение A(n) истинно для любого натурального числа n.

Метод рассуждений, ведущий от частных случаев к общему выводу, называется индукцией. Полная индукция - это способ доказательства, при котором истинность утверждения общего характера следует из истинности его во всех частных случаях. Метод полной индукции используется для доказательства утверждений о делимости натуральных чисел. Так как множество натуральных чисел бесконечно, то доказательство проводят следующим образом: множество N разбивают на конечное число подмножеств и доказывают, что при любом x из каждого подмножества разбиения данное утверждение истинно. И на этом основании заключают, что оно истинно для любого натурального числа.

Для решения заданий данной темы необходимо:

знать:	уметь:
- определение и свойства отношения делимости, признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 25, составные числа; - определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел;	- применять признаки делимости на практике, устанавливать, делится ли значение числового выражения на данное число, не производя указанных действий над числами;
- способ нахождения наибольшего общего делителя, который основан на делении с остатком (алгоритм Евклида),взаимосвязь наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел; способ нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, использующий разложение чисел на простые множители;	- находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел разными способами;
- определение простого, составного числа, алгоритм распознавания простых чисел;	- устанавливать` является число простым или составным;
- процесс доказательства методами математической, полной индукции в общем виде.	- использовать методы математической, полной индукции для доказательства утверждений о делимости натуральных чисел.

Образец выполнения заданий

Задание 1. **1 часть.** Не производя указанных действий над числами, установите, делится ли на 36 значение выражения:

а) 2844 — 540; б) 648 + 136 + 342; в) 32 х 15 х 21.

Решение. Воспользуемся признаком делимости на составное число. Для этого представим число 36 в виде произведения двух взаимно простых чисел 4 и 9. Тогда число будет делиться на 36, если оно делится на 4 и 9.

а) В данной разности число 2844 делится на 4 (число, образованное последними двумя цифрами, - 44 кратно 4) и делится на 9 (сумма цифр числа 2844 равна 18, 18 делится на 9). Следовательно, число 2844 делится на 36. Число 540 также кратно 4 и 9 (используем те же признаки делимости). Следовательно, число 540 делится на 36. Таким образом, в разности 2844 - 540 и уменьшаемое, и вычитаемое кратно 36, а значит, данная разность делится на 36 (по теореме о делимости разности).

б) В данной сумме 648 делится на 36, так как делится на 4 и 9 (см. пункт а)). Число 136 не делится на 36, так как не делится на 9 (сумма цифр числа 136 равна 10, 10 не делится на 9). Число 342 не делится на 36, так как не делится на 4 (число, образованное последними двумя цифрами 42 не делится на 4). Таким образом, в сумме 648 + 136 + 342 одно слагаемое делится на 36, а два других не делятся. Поэтому, не производя вычислений, нельзя ничего сказать о делимости всей суммы.

в) В данном произведении множитель 32 делится на 4, а значит, по теореме о делимости произведения, и значение выражения 32 х 15 х 21 кратно 4. Так как число 15 делится на 3 и число 21 делится на 3, то произведение 15 х 21 делится на произведение 3 х 3, т.е. на 9 (по теореме: если в произведении а х b множитель а делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то произведение a x b делится на произведение m x n). Получили, что значение выражения 15 x 21 кратно 9, следовательно, и произведение 32 x 15 x 21 делится на 9 (по теореме о делимости произведения). Таким образом, значение выражения 32 x 15›‹ 21 делится на 4 и на 9, а значит, делится на 36.

2 часть. Найдите все числа вида 71х1у, делящиеся на 45.

Решение. Число 45 можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел 5 и 9. Поэтому для того чтобы число 71х1у делилось на 45, необходимо, чтобы оно делилось на 5 и 9.

Согласно признаку делимости на 5 последняя цифра в записи числа должна быть 0 или 5, т. е. у=0 или у=5. А чтобы число делилось на 9, необходимо, чтобы сумма цифр в его записи была кратна 9, т. е. на 9 должна делиться сумма 7+1+х+1+у.

Если у=0, то эта сумма делится на 9 при х=0 (7+1+0+1+0=9) или х=9 (7+1+9+1+0=18). Других значений х нет, поскольку х должен быть числом однозначным.

Если у=5, то данная сумма делится на 9 только при х=4 (7+1+4+1+5=18).

Таким образом, условию задачи удовлетворяют числа: 71010; 71910; 71415.

Задание 2. Найти наибольший общий делитель чисел a, b и их наименьшее общее кратное различными способами.

1 способ. Найти наибольший общий делитель чисел a = 1643 и b = 1457 (с помощью алгоритма Евклида) и их наименьшее общее кратное.

Решение. Наибольший общий делитель чисел a и b обозначается D (a, b). Найдем D (1643, 1457), применяя алгоритм Евклида. Процесс последовательного деления будем записывать так:

$$1643=1457\cdot 1+186$$
$$1457= 186\cdot 7 +155$$
$$186 = 155 \cdot 1 + 31$$
$$155 = 31 \cdot 5 + 0$$

Таким образом, D (1643, 1457) = 31, так как последний отличный от нуля остаток в равенствах алгоритма Евклида равен 31.

Наименьшее общее кратное чисел a и b обозначается K(a, b) и вычисляется по формуле $K(a,b) = \dfrac{a \bullet в}{D(a,b)}$

Вычислим K (1643, 1457)

$$K(1643, 1457) = \frac{1643 \bullet 1457}{31} = 1643 \cdot 47 = 77221.$$

Ответ: D(1643, 1457) = 31, K (1643, 1457) = 77221.

2 способ. Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a = 1848, b = 1980, используя их разложения на простые множители.

Решение. Представим числа 1848 и 1980 в каноническом виде (т.е. в виде произведения простых чисел, где произведение повторяющихся множителей записывают с помощью обозначения степени).

$$\begin{array}{r|l} 1848 & 2 \\ 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$1848 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11 = 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11$

$$\begin{array}{r|l} 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$1980 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 11 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$

Найдем наибольший общий делитель данных чисел. В его разложение должны войти все общие простые множители, которые содержатся в разложениях чисел 1848 и 1980, причем каждый из них нужно взять с наименьшим показателем степени, с каким он входит в оба разложения. Следовательно, D (1848, 1980) = $2^2\cdot 3\cdot 11 = 132$.

Найдем наименьшее общее кратное данных чисел. В его разложение должны войти все простые множители, которые содержатся хотя бы в одном из разложений чисел 1848 и 1980, причем каждый из них нужно взять с наибольшим показателем степени, с каким он входит в оба разложения.

Следовательно, K (1848, 1980) = $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 27720$.

Ответ: D (1848, 1980) = 132, K (1848, 1980) = 27720.

Задание 3. Установите, являются ли простыми числа 127 и 213.

Решение. Установим, простое или составное число 127. Воспользуемся алгоритмом распознавания простых чисел. Для этого извлечем квадратный корень из 127: $11 < \sqrt{127} < 12$. Выпишем все простые числа, не превосходящие числа 12: 2, 3, 5, 7, 11. (1)

Проверим, делится ли число 127 на какое-либо из чисел ряда (1). На основании признаков делимости на 2, 3 и 5 устанавливаем, что число 127 не делится на 2, 3 и 5. Действительно, 127 не делится на 2 (последняя цифра 7, 7 не делится на 2). Число 127 не делится на 3 (сумма цифр числа 127 равна 10, 10 не делится на 3). Число 127 не делится на 5 (последняя цифра числа 127 не 0 и не 5).

Делимость числа 127 на остальные числа ряда (1) определяем путем деления уголком.

Получим, что число 127 не делится ни на одно из чисел ряда (1). Таким образом, нет ни одного простого числа, не превышающего корня из числа 127, на которое бы число 127 разделилось. Следовательно, число 127- простое.

Чтобы установить, простое или составное число 213, воспользуемся тем же алгоритмом. Извлечем квадратный корень из 213:
$14 < \sqrt{213} < 15$. Выпишем все простые числа, не превосходящие числа 15: 2, 3, 5, 7,11,13.(II)

Проверим, делится ли число 213 на какое-либо из чисел ряда (II). Число 213 не делится на 2 (последняя цифра числа 3, 3 не делится на 2). Число 213 делится на 3, так как сумма цифр числа 213 равна 6, 6 делится на 3. Следовательно, число 213 — составное.

Задание 4. Доказать утверждение о делимости натуральных чисел:

а) Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа n истинно утверждение: $(5^n - 1) \,\vdots\, 4$.

Решение.

1. Докажем, что данное утверждение истинно для n = 1. Имеем $5^1 - 1 = 4$, но 4 делится на 4. Следовательно, для n = 1 данное утверждение истинно.

2. Предположим, что данное утверждение истинно для $n = k$, т.е. $(5^к — 1) \vdots 4$. Из этого, докажем, что оно истинно и для $n = k + 1$, т.е. $(5^{к+1} — 1) \vdots 4$. Доказательство можно провести тремя способами. ’

1—й способ. Преобразуем выражение $5^{к+1} - 1$ к виду $5^к \cdot 5 - 1$. Если заменим число 5 суммой удобных слагаемых 4 и 1, то получим:
$5^к \cdot 5 — 1 = 5^к \cdot (4+1)-1=(5^к \cdot 4+5^к)-1=5^к \cdot 4+(5^к-1)$. В полученном выражении первое слагаемое $5^к \cdot 4$ кратно 4, так как один из множителей (4) делится на 4. Второе слагаемое $(5^к-1)$ кратно 4 по предположению. Следовательно, вся сумма кратна 4.

2-й способ. Рассмотрим разность $(5^{к+1} — 1) – (5^к — 1)$.

После преобразований получаем: $5^{к+1} - 1 – 5^к + 1= 5^{к+1} – 5^к= 5^к \cdot (5–1) = 5^к \cdot 4$. Имеем: $(5^{к+1} — 1) – (5^к — 1)= 5^к \cdot 4$. Произведение $5^к \cdot 4$ делится на 4, так как один из множителей делится на 4. Вычитаемое $(5^к-1)$делится на 4 по предположению. Отсюда на основании теоремы о делимости суммы вытекает делимость на 4 уменьшаемого $(5^{к+1} - 1)$, что и требовалось доказать на этом этапе рассуждений.

3-й способ. Преобразуем выражение $(5^{к+1} — 1)$ к виду $5^к \cdot 5 — 1$. Вычтем и прибавим 4, получим: $5^к \cdot 5 - 1-4+4= 5^к \cdot 5- 5+4=5(5^к — 1)+4$.

В данном выражении первое слагаемое $5(5^к — 1)$ кратно 4, так как $(5^к — 1)$ кратно 4 по предположению. Число 4 также делится на 4. Следовательно, вся сумма кратна 4.

Таким образом, данное утверждение истинно для $n = l$ и из истинности его для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$. Тем самым доказано, что утверждение $(5^п - 1) \vdots 4$ истинно для любого натурального числа n.

б) Используя метод полной индукции, докажите, что при любом натуральном n число $n^5 - n$ делится на 10.

Решение. Разность $n^5 - n$ представим в виде произведения:

$n^5 — n = n(n^4 - 1)= n (n^2 — 1) (n^2 + 1) = n (n — 1) (n + 1) (n^2 +1)$. Значит, надо доказать, что $n (n — 1) (n + 1) (n^2 +1) \vdots 10$. Но $10 = 2 \cdot 5$, и согласно признаку делимости на составное число 10 из того, что $n^5 - n$ делиться на 2 и на 5 будет следовать его делимость на 10.

Произведение $n(n - 1) (n + 1) (n^2 + 1) \vdots 2$, содержит два последовательных натуральных множителя, например n и n + 1, из которых одно число обязательно четное.

Докажем теперь, что число вида $n(n — 1) (n + 1) (n^2 +1)$ делится на 5 при любом натуральном n. Разобьем множество всех натуральных чисел на пять подмножеств чисел вида:

1) 5q, т.е. чисел, кратных 5;

2) 5q + l, т.е. чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1;

3) 5q + 2, т.е. чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 2;

4) 5q + 3, т.е. чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3;

5) 5q + 4, т.е. чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 4 (во всех случаях q — натуральное число).

В первом случае произведение $n(n — 1)(n + 1)(n^2 + 1)$ делится на 5, так как оно содержит множитель $n = 5q$.

Во втором случае на 5 делится множитель $n - 1= 5q+1— 1 = 5q$. Поэтому, и все произведение делится на 5.

В третьем случае на 5 делится множитель $n^2 + 1$, так как
$n^2 + 1=(5q + 2)^2+1=25q^2 +20q+5=5(5q^2 +4q+1)$.

В четвертом случае на пять делится множитель $n^2 +1$,так как
$n^2 +1=(5q+ 3)^2+1= 25q^2 + 30q + 10 = 5(5q^2+6q + 2)$, и, следовательно, все произведение делится на 5.

В пятом случае на пять делится множитель n + 1, так как $п+1=5q + 4+1=5q + 5= 5(q + 1)$. Следовательно, все произведение делится на 5.

Таким образом, доказано, что число n^5 -- n делится на 2 и на 5, следовательно, оно делится и на 10.

4. Варианты аудиторной контрольной работы

Вариант 1

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 4*747*25*6

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованиям, используя язык вузовского и начального курсов математики.

32+46=(30+2)+(40+6)=(30+40)+(2+6)=70+8=78

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

В куске было 32 метра ткани. От него отрезали сначала 6 метров, а затем еще 8 метров ткани. Сколько метров ткани осталось в куске?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

В пруду зоопарка плавали 6 лебедей, 12 гусей, а уток на 3 меньше, чем лебедей и гусей вместе. Сколько уток плавало в пруду?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

Папа купил 3 рулона обоев по 10м каждый, 25м обоев израсходовали. Сколько метров обоев осталось?

5. На примере сложения чисел 4389 и 734 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $324_8*22_8-10102_8 = x_5$.

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 12 значения выражений: 1) 144+324+256; 2) 15□28□31.

б) Найти все пятизначные числа вида 517mn (где n, m-цифры), которые делятся на 18.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 486 и в = 324, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Из множества {259, 611, 131} выделите подмножество составных чисел.

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (2^{4n} - 1) \vdots 15$

б) полной индукции: при любом натуральном а число $a^3 + 5a$ делится на 6.

Вариант 2

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 527*24 + 41*527+527*35.

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованиям, используя язык вузовского и начального курсов математики.

23+56=(20+3)+(50+6)=(20+50)+(3+6)=70+9=79

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

На товарную станцию прибыло 2 состава с мукой. В одном из них было 37 вагонов, а в другом - 41. Разгрузили 34 вагона. Сколько вагонов с мукой осталось разгружать?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

Для похода туристы закупили 96 банок консервов. В день они расходовали по 8 банок. Сколько банок консервов у них останется после 10 дней?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

Из 30кг муки, расфасованных поровну в 15 пакетов, продали 9 пакетов. Сколько кг муки осталось?

5. На примере вычитания числа 389 из числа 1734 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма вычитания многозначных чисел.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $30314_5 : 42_5 + 124_5 = x_3$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 36 значения выражений: 1) 23544 - 17028; 2) 39*51*16.

б) Найти все пятизначные числа вида 374nm (где n, m - цифры), которые делятся на 45.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 1002 и в = 522, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Являются ли простыми числа 211, 371, 853.

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (15^n + 6) \vdots 7$

б) полной индукции: произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

Вариант 3

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения (57+68+89)+(32+11+43)

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

26+7=26+(4+3)=(26+4)+3=30+3=33

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

На складе было 706 мешков муки. Сначала на хлебозавод отправили 138 мешков, а затем еще 354. Сколько мешков муки осталось на складе?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

В новогоднем подарке было 9 конфет «Ромашка» и 6 конфет «Василек». Три девочки разделили их между собой поровну. Сколько конфет получила каждая?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

От куска ситца отрезали 4м на платье, а на передник – на 3м меньше. Сколько метров ситца отрезали от куска?

5. На примере деления числа 16037 на число 79 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма деления многозначного числа на многозначное.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления
$35320_6 : 52_6 + 430_6 = x_4$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 15 значения выражений: 1) 225+540+115; 2) 33□17□25.

б) К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15. Укажите все возможные варианты.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 684 и в = 270, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Установите, какие числа 139, 323, 557 являются простыми.

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (7^n + 5) \vdots 6$

б) полной индукции: при любом натуральном n число $n^5 - n$ делится на 15.

Вариант 4

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 37*42 + 37*36 – 78*27

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

5*14=5*(10+4)=5*10+5*4=50+20=70

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

Мешок сахарного песка имеет массу 80 кг. До обеденного перерыва в магазине продали 3 мешка сахарного песка, а после перерыва – 5 таких мешков. Сколько килограммов сахарного песка продали за весь день?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

На елке было 8 красных шаров, золотых шаров на 3 меньше, чем красных, а зеленых столько, сколько красных и золотых шаров вместе. Сколько было зеленых шаров?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

Масса кабачка 2кг, а тыквы в 6 раз больше. Чему равна масса кабачка и тыквы вместе?

5. На примере умножения числа 1204 на число 8, а затем на число 28 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма умножения многозначного числа на однозначное и многозначное.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $(31024_6 – 3421_6) *53_6 = x_8$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 18 значения выражений: 1) 1836+2754; 2) 14*19*27.

б) Найти все пятизначные числа вида 56m3n (где n, m-цифры), которые делятся на 36.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 435 и в = 360, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Докажите, что числа 119, 889 являются составными, 421 - простое.

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (6^n + 4) \vdots 5$

б) полной индукции: сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

Вариант 5

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 3057 + 1561 + 1513 + 829 + 2564

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

36-2=(30+6)-2=30+(6-2)=30+4=34

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

В баке машины 96л бензина. За каждый час работы расходуется 12л. Сколько часов работала машина, если в баке осталось 36л бензина?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

Один рабочий изготавливал за день 23 детали, а другой – 21 деталь. Сколько деталей изготовят оба рабочих за 2 дня?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

В пустой бочонок сначала налили 13кг меда, а потом ещё 5кг. Масса бочонка с медом стала равна 20кг. Найдите массу пустого бочонка.

5. На примере сложения чисел 1957 и 9734 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления
$32541_6 * 342_6 - 451_6 = x_3$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 45 значения выражений: 1) 1215 – 305 + 135; 2) 41*13*225.

б) Найти все пятизначные числа вида 135mn (где n, m-цифры), которые делятся на 45.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 516 и в = 124, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Верно ли высказывание: «Все числа из множества {253, 1261, 397} являются составными»?

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (3^{2n+1} + 1) \vdots 4$

б) полной индукции: разность между кубом нечетного натурального числа и самим числом делится на 24.

Вариант 6

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 286*123+452*286+286*227

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

352*3=(300+50+2) *3=300*3+50*3+2*3=900+150+6=1056

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

В одном куске было 24 метра ткани, а в другом – на 8м меньше. Из всей этой ткани сшили несколько одинаковых платьев, расходуя на каждое по 4м. Сколько сшили платьев?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

В руках у игроков команды «Марс» - 14 клюшек, а запасных клюшек на 6 меньше. Сколько всего клюшек у команды «Марс»?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

В корзине было 5кг свеклы, а в двух одинаковых ящиках 24кг. На сколько килограммов больше свеклы в ящике, чем в корзине?

5. На примере вычитания числа 589 из числа 1704 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма вычитания многозначных чисел.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $(40045_6 – 5555_6) * 52_6 = x_7$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 12 значения выражений: 1) 2064 - 516+156; 2) 13*27*64.

б) Найти все пятизначные числа вида 517mn (где n, m-цифры), которые делятся на 6 и 9.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 121 и в = 253, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Докажите или опровергните высказывание: «Среди чисел 251, 829, 661 по крайней мере одно составное».

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (15^n - 1) \vdots 7$

б) полной индукции: произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 60.

Вариант 7

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения (7356 + 11932) – 9932

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

(2+7)+3=2+(7+3)=2+10=12

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

Учащиеся одного класса посадили 4 ряда яблонь по 3 в каждом, а учащиеся другого – 4 ряда по 5 в каждом. Сколько всего яблонь посадили учащиеся двух классов?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

В одной теплице вырастили 48 саженцев сосен, а в другой – 56. Для продажи все эти саженцы разложили в ящики, по 8 саженцев в каждый. Сколько таких ящиков потребовалось?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

Для ремонта квартиры купили 10 банок краски по 3кг в каждой. Израсходовали 7 банок. Сколько килограммов краски осталось?

5. На примере деления числа 4117 на число 179 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма деления многозначного числа на многозначное.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $(30042_5 + 4444_5) * 23_5 = x_7$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 36 значения выражений: 1) 3168+324+7220; 2) 24*35*81.

б) Найти все пятизначные числа вида 517mn (где n, m-цифры), которые делятся на 36.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 948 и в = 1620, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Верно ли высказывание: «Среди чисел 481, 1001, 167 найдется хотя бы одно простое»?

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (6^n - 1) \vdots 5$

б) полной индукции: произведение квадрата натурального числа на натуральное число, предшествующее этому квадрату, делится на 12.

Вариант 8

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 211*8*9*125

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

27+18=27+(3+15)=(27+3)+15=30+15=45

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

В магазин привезли 12 ящиков с яблоками по 8кг в каждом. До обеденного перерыва было продано 9 ящиков. Сколько килограммов яблок осталось продать после обеденного перерыва?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

В конструкторе 54 детали. Из 12 деталей Юра сделал электровоз, а из остальных – вагоны. Сколько получилось вагонов, если на каждый пошло по 7 деталей?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

В баке машины было 25л бензина. Для поездки на дачу израсходовали 14л бензина, а для поездки на станцию – 3л. Сколько литров бензина осталось после этого в баке?

5. На примере умножения числа 2054 на число 6, а затем на число 16 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма умножения многозначного числа на однозначное и многозначное.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $303145_5 * 42_5 + 124_5 = x_3$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 45 значения выражений: 1) 540+315+1125; 2) 57*21*35.

б) Найти все пятизначные числа вида 517mn (где n, m-цифры), которые делятся на 15.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 386 и в = 714, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Множество чисел {149, 973, 127, 671} разбейте на классы при помощи свойств «быть простым числом» и «быть составным числом».

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)$ $(3^{3n} - 1) \vdots 13$

б) полной индукции: при любом натуральном а число $a^3 + 35a$ делится на 6.

Вариант 9

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 213*125*7*8

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

68+11=68+(2+9)=(68+2)+9=70+9=79

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

В бензобаке машины было 24 л бензина. При заправке добавили еще 22 л. За день израсходовали 18 л бензина. Сколько литров бензина осталось в баке?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

У пристани стояло 18 маленьких и 7 больших рыбачьих лодок. Утром в море ушло 20 лодок. Сколько лодок осталось у пристани?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

Для столовой получили 24кг муки в 8 одинаковых пакетах. За день израсходовали 5 таких пакетов. Сколько килограммов муки осталось в столовой?

5. На примере вычитания числа 589 из числа 1034 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма вычитания многозначных чисел.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления

$324_6 * 22_6 - 10102_6 = x_3$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 18 значения выражений: 1) 702+324 - 132; 2) 15*26*33.

б) Найти все пятизначные числа вида 135mn (где n, m-цифры), которые делятся на 36.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 288 и в = 366, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Из множества {241, 1529, 157} выделите подмножество простых чисел.

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (13^{n} + 5) \vdots 6$

б) полной индукции: при любом натуральном а число $a^7 -$ а делится на 7.

Вариант 10

1. а) Указать все случаи использования законов сложения и умножения целых неотрицательных чисел при вычислении рациональным способом значения выражения 319+56+81+44+67

Записать используемые законы и объяснить, какие преобразования выражений возможны на их основе.

б) Задание взято из учебников математики для начальных классов. Дайте обоснование приведенным преобразованием, используя язык вузовского и начального курсов математики.

124+365=(100+20+4)+(300+60+5)=(100+300)+(20+60)+(4+5)=400+80+9=489.

2. Решите задачу различными арифметическими способами. Выбор действий обоснуйте. Установите, какое свойство (правило) является обобщением приведенных способов решения данной задачи.

В ящики, каждый из которых вмещает по 6кг фруктов, разложили 36кг яблок и 24кг груш. Сколько всего потребовалось ящиков?

Проанализируйте: всегда ли задача имеет такое количество арифметических способов решения, если нет, то сформулируйте задачи с измененными данными и дайте полное обоснование решения.

3. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) теоретико-множественную; б) принятую в начальном курсе математики.

Один рабочий изготавливал за день 37 деталей, а другой - 45 деталей. Сколько деталей изготовят оба рабочих за 2 дня?

4. Решите задачу и обоснуйте выбор действия, используя терминологию:

а) раскрывающую смысл действий над натуральными числами – результатами измерения величин; б) принятую в начальном курсе математики.

В ящики, каждый из которых вмещает по 6кг фруктов, разложили 36кг яблок и 24кг груш. Сколько всего ящиков потребовалось?

5. На примере сложения чисел 9389 и 835 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма сложения многозначных чисел.

6. Выполнить действия и записать ответ в заданной системе счисления $(31024_7 - 3421_7) * 53_7 = x_3$

Сделайте проверку вычислений в десятичной системе счисления.

7. а) Не производя указанных действий над числами, установите, делятся ли на 45 значения выражений: 1) 4365+324+115; 2) 51*43*25*39.

б) Найти все пятизначные числа вида 56m3n (где n, m-цифры), которые делятся на 18.

8. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел а = 192 и в = 240, используя алгоритм Евклида и каноническое разложение чисел.

9. Докажите или опровергните высказывание: «Все числа из множества {461, 757, 563} являются простыми».

10. Докажите утверждение, используя метод:

а) математической индукции: $(\forall n \in N)\ (7^{2n} - 5) \vdots 4$;

б) полной индукции: при любом натуральном а число $a^3 + 17a$ делится на 6.

5. Тематика рефератов

1. Краткие сведения о возникновении понятия натурального числа и нуля.
1. Различные подходы к построению теории натуральных чисел.
2. Аксиоматический метод в математике
3. Из истории развития системы единиц величин.

4. Величины, рассматриваемые в начальном курсе математики
5. Площадь. Из истории мер площади.
6. Масса. Из истории измерения массы.
7. Время. Единицы измерения времени.
8. Объем. Из истории мер емкости, объема.
9. Понятие системы счисления. Позиционные системы счисления.
10. Понятие системы счисления. Непозиционные системы счисления.
11. Алгоритмы арифметических действий натуральных чисел.
12. Свойства арифметических действий натуральных чисел.
13. Простые и составные числа. Решето Эратосфена.
14. Отношение делимости натуральных чисел.

1. Рекомендации к написанию реферата

Структура реферата:

Реферат состоит из титульного листа, который располагается на первой странице и имеет единую форму (см. приложение).

На второй странице находится оглавление (план, содержание), в нем указываются разделов, параграфы (пункты) реферата, а также номера страниц, указывающих начало перечисленных разделов и параграфов в тексте реферата.

Следующий структурный элемент реферата - введение. Введение состоит из текста на 1-2 страницы и содержит проблему и обоснование её актуальности, краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему, цель и задачи.

За введением следует основная часть реферата которая в соответствии с содержанием состоит из нескольких разделов каждый из которых состоит из нескольких параграфов и содержит осмысленное и логичное раскрытие основных мыслей, содержащихся в изученной литературе. Текст реферата должен обязательно содержать ссылки на литературу. Если используется цитата мысль, идея, вывод, необходимо сделайте ссылку на источник, из которого вы заимствовали данный материал.

Следующий структурный элемент реферата – заключение. Оно содержит основные выводы из основной части, в нем отмечается, как решены задачи, поставленные во введении и достигнута ли цель.

После заключения на отдельной странице располагается список использованной литературы для написания реферата. Список литературы оформляется согласно требованиям ГОСТ библиографического описания.

1. Требования, предъявляемые к оформлению реферата.

Реферат имеет объем 10-18 печатного текста на одной стороне листа формата А4 (шрифт Times New Roman, 14 пт, межстрочный интервал 1,5). Все листы реферата, за исключением титульного нумеруется внизу страницы, выравнивание по центру. Названия разделов и параграфов оформляются полужирным шрифтом, выравнивание по центру.

2. Конструкции, связывающие все композиционные части схемы-модели реферата.

Переход от перечисления к анализу основных вопросов статьи.

В этой (данной, предлагаемой, настоящей, рассматриваемой, реферируемой, названной...) статье (работе...) автор (ученый, исследователь...; зарубежный, известный, выдающийся, знаменитый...) ставит (поднимает, выдвигает, рассматривает...) ряд (несколько...) важных (следующих, определенных, основных, существенных, главных, интересных, волнующих, спорных...) вопросов (проблем...)

Переход от перечисления к анализу некоторых вопросов.

Варианты переходных конструкций:

· Одним из самых существенных (важных, актуальных...) вопросов, по нашему мнению (на наш взгляд, как нам кажется, как нам представляется, с нашей точки зрения), является вопрос о...

Среди перечисленных вопросов наиболее интересным, с нашей точки зрения, является вопрос о...

Мы хотим (хотелось бы, можно, следует, целесообразно) остановиться на...

Переход от анализа отдельных вопросов к общему выводу

В заключение можно сказать, что...

На основании анализа содержания статьи можно сделать следующие выводы...

Таким образом, можно сказать, что... Итак, мы видим, что...

Критерии оценки реферата

Оценка «**отлично**» ставится, если выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы.

Оценка «**хорошо**» – основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы.

Оценка «**удовлетворительно**» – имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод.

Оценка «**неудовлетворительно**» – тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы.

6. Контрольные вопросы к разделу «Натуральные числа»

1. Суть аксиоматического метода. Требования к системе аксиом. Аксиоматика Пеано в теории натуральных чисел.
2. Аксиоматическое определение сложения натуральных чисел. Законы сложения. Вывод таблицы сложения однозначных чисел.
3. Аксиоматическое определение умножения натуральных чисел. Законы умножения. Вывод таблицы умножения однозначных чисел.
4. Аксиоматическое определение вычитания и деления натуральных чисел, условия существования в множестве натуральных чисел. Свойства этих действий.
5. Отношение «меньше» и его свойства на множестве натуральных чисел. Свойства множества натуральных чисел.
6. Множество целых неотрицательных чисел. Деление с остатком.
7. Теоретико-множественный смысл натурального числа, нуля и отношения «меньше». Мощность множества. Счетные множества.
8. Теоретико-множественный смысл суммы, разности, произведения и частного натуральных чисел.
9. Смысл натурального числа, полученного в результате измерения величины. Натуральное число, как мера длины отрезка.
10. Сумма, разность, произведение и частное натуральных чисел, являющихся мерами длин отрезков.

11. Величины. Скалярные и векторные величины. Определение операции измерения величин и свойства меры величины.
12. Системы величин и системы единиц измерения величин. Величины, изучаемые в начальной школе.
13. Геометрические величины, изучаемые в начальной школе, их определение, свойства и признаки.
14. Позиционные и непозиционные системы счисления. Запись числа в десятичной системе счисления.
15. Запись чисел и арифметические действия над ними в любой позиционной системе счисления. Перевод чисел из одной системы счисления в другую.
16. Алгоритмы действий над целыми неотрицательными числами.
17. Отношение делимости чисел и его свойства.
18. Признаки делимости чисел.
19. Простые и составные числа. Каноническое разложение составных чисел на простые множители. Решето Эратосфена.
20. НОК и НОД двух чисел, их свойства и способы нахождения.

7. Демонстрационный вариант тестовых заданий по разделу «Натуральные числа»

Время выполнения теста: 35 минут
Количество заданий: 35.

1.Запишите, используя символику, правый дистрибутивный закон умножения относительно сложения для натуральных чисел:
a).$(\forall а, в, с \in N)(а + в) \cdot с = ас + вс$
b).$(\forall а, в \in N) а \cdot в = в \cdot а$
c).$(\forall а, в, с \in N)(а \cdot в) \cdot с = а \cdot (в \cdot с)$
d).$(\forall а, в, с \in N)(а + в) + с = а + (в + с)$
e).$(\forall а, в, с \in N) а \cdot (в + с) = ав + ас$
2.Утверждения, которые принимаются без доказательства, называются:
a).определениями
b).теоремами
c).аксиомами
d).примерами
e).высказываниями
3.Науку, в которой изучаются натуральные числа и действия над ними, называют:
a).алгебра
b).арифметика
c).математика
d).геометрия
e).натурология
4.Для счета предметов достаточно множества:
a).целых чисел
b).рациональных чисел
c).иррациональных чисел
d).действительных чисел
e).натуральных чисел
5.Если при делении с остатком числа а на 15 получили неполное частное 10, то наибольшее возможное значение делимого:
a).150
b).160

c).164
d).165
e).151
6.Разность натуральных чисел a-b существует только тогда, когда
a).b
b).a
c).$b \leq a$
d).$a \leq b$
e).другой ответ
7.Множество N при помощи отношения «иметь один и тот же остаток при делении на 6» разбивается на
a).5 классов
b).2 класса
c).6 классов
d).3 класса
e).другой ответ
8.Требования, предъявляемые к системе аксиом:
a).полнота, монотонность, независимость
b).непротиворечивость, независимость, полнота
c).независимость, непротиворечивость, монотонность
d).монотонность, полнота, непротиворечивость
полнота, монотонность, противоречивость
9.Термин «натуральное число» впервые употребил:
a).Евклид
b).Архимед
c).Пифагор
d).Фалес
e). Боэций
10.Действие, при помощи которого находят частное натуральных чисел называют:
a).умножением
b).сложением
c).вычитанием
d).делением
e).разностью
11.Если c и d- натуральные числа, то $c \cdot d'$равно
a).$\mathrm{cd} + \mathrm{c}$
b).$(c \cdot d)'$
c).$\mathrm{cd} + \mathrm{d}$
d).$(\mathrm{c} + \mathrm{d})'$
e).$\mathrm{cd} + 1$
12.Число a при делении на 8 дает в остатке 3 и поэтому имеет вид:
a).$\mathrm{a} = 8\mathrm{g}+3, g \in Z_0$
b).$\mathrm{a} = 3\mathrm{g}+8, g \in Z_0$
c).$\mathrm{a} = 8\mathrm{g}, g \in Z_0$
d).$\mathrm{a} = 3\mathrm{g}, g \in Z_0$
e).$\mathrm{a} = 3\mathrm{g} + \mathrm{a}, g \in Z_0$
13.Множество целых неотрицательных чисел упорядочивает отношение
a). «непосредственно следовать за»
b).«меньше»
c). «равно»
d).«непосредственно предшествовать»

e).«больше на 2»
14.Какое число представлено суммой $7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10$:
a).710
b).701
c).7001
d).7010
e).7100
15.Запишите, используя символику, коммутативный закон сложения для натуральных чисел:
a).$(\forall а, в \in N) а + в = в + а$
b).$(\forall а, в, с \in N)(а + в) + с = а + (в + с)$
c).$(\forall а, в \in N) а + в \neq в$
d).$(\forall а, в \in N) а \cdot в = в \cdot а$
e).$(\forall а, в \in N) а \cdot (в + с) = ав + ас$
16.При делении на 7 чисел a и b получаются остатки 2 и 5. тогда произведение ab при делении на 7 дает остаток:
a).10
b).3
c).2
d).5
e).7
17.Из перечисленных свойств множества натуральных чисел выделите свойство дискретности:
a).Из всех натуральных чисел единица является наименьшим числом.
b).Ни для одного натурального числа a нет такого натурального числа n, что a<n<a+1
c).Множество натуральных чисел – упорядоченное множество, т.к. отношение «меньше» для натуральных чисел транзитивно и антисимметрично
d).Множество натуральных чисел бесконечно
e).Любое непустое подмножество множества натуральных чисел содержит наименьшее число.
18.При делении целых неотрицательных чисел на число 7 могут получиться остатки:
a).1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
b).0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
c).1, 2, 3
d).1, 3, 5, 7
e).0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
19.Однородными величинами называют величины, которые:
a).выражают разные свойства объектов
b).можно сравнивать
c).получаются в результате измерения одного объекта
d).выражают свойства одного объекта
e). выражают одно и тоже свойство объектов
20.Пусть A = {m, n, k, l, p}, численность множества A равна …
a).3
b).4
c).6
d).0
e).5

21.В букете было 5 больших тюльпанов и 4 желтых тюльпана. Сколько всего тюльпанов было в букете, если известно, что 2 желтых тюльпана были больше. При теоретико-множественном обосновании решения этой задачи используется формула

a).$n(A \cup B) = \mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(B)$

b).$n(A \times B) = \mathrm{n}(A) \times n(B)$

c).$n(B'_A) = \mathrm{n}(A) - n(B)$

d).$n(A \cup B) = \mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(B) - n(A \cap B)$

e).другой ответ

22.Пусть даны натуральные числа a и в. Говорят, что число a делится на число в, если:

a).существует такое натуральное число q, что $\mathrm{a} = \mathrm{в} \cdot q$

b).существует такое натуральное число q, что $\mathrm{в} = \mathrm{a} \cdot q$

c).существует такое натуральное число q, что $\mathrm{q} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{в}$

d).существует такое рациональное число q, что $\mathrm{a} = \mathrm{в} \cdot q$

e).существует такое целое неотрицательное число q, что $\mathrm{a} = \mathrm{в} \cdot q$

23.Какое из утверждений истинно:

a).если одно из слагаемых суммы делится на некоторое число, а другое не делится на это число, то и сумма не делится на это число

b).если сумма двух слагаемых делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число

c).если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число

d).если одно из слагаемых суммы делится на некоторое число, а другие слагаемые не делятся на это число, то и сумма не делится на это число

e).если в сумме два слагаемых не делятся на некоторое число, а третье слагаемое делится на это число, то и сумма не делится на это число

24.Не выполняя вычислений выясните значения каких выражений будут равны

a).(50+16)-14 и 50+(16-14)

b).(50+16)-14 и 50-(16-14)

c).(50+16)-14 и (50-16)+14

d).(50+16)-14 и (50-14)-16

e).(50+16)-14 и 50-(16+14)

25.Системой счисления называют:

a).способ записи чисел, который в настоящее время используется повсеместно

b).способ названия и записи чисел

c).язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними

d).язык для записи чисел и выполнения действий над ними

e).другой ответ

26.Среди предложений выделите признак делимости суммы:

a).если каждое из натуральных чисел делится на натуральное число b, то и их сумма делится на это число

b).если сумма натуральных чисел делится на число b, то и каждое слагаемое этой суммы делится на это число

c).если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b не делится

d).если каждое из натуральных чисел не делится на натуральное число b, то и их сумма не делится на это число

e).если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b делится

27.Рассмотрим задачу: «Мама раздала детям 12 яблок, по 4 яблока каждому. Сколько детей получили яблоки». При теоретико-множественном обосновании выбора действия мы говорим, что нужно найти a).число элементов каждого подмножества в разбиении множества на попарно непересекающиеся равномощные подмножеств

b).число подмножеств в разбиении множества на попарно пересекающиеся равномощные подмножества

c).число элементов в дополнении одного множества до другого

d).число элементов в объединении двух множеств

e).число элементов в декартовом произведении двух множеств

28.На множестве натуральных чисел алгебраической является операция:

2.1. Пересечение
2.2. Деление
2.3. Вычитание
2.4. Объединение
2.5. Сложение

29.Какие из данных величин можно сравнивать между собой:

a).1500 м; 2,5 км; 1 км 500 м

b).1500 м; 3 ц; 18 штук

c).18 штук; 18 пар; 18 кг

d) 75 м; 35 с; 78 см

e) 1028 кг; 78 л; 123 ц.

30.Числа возникли из потребности:

a).счета

b)..измерения

c).количественной характеристики элементов конечного множества

d).счета и измерения

e).измерения положительных скалярных величин

31.В десятичной системе счисления для записи чисел используются цифры:

a).1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

b).0, 2, 4, 6, 8

c).1, 3, 5, 7, 9

d).0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

e).1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

32.Способ записи чисел, который в настоящее время используется повсеместно:

a).двоичная система счисления

b).римская система счисления

c).десятичная система счисления

d).славянская система счисления

e).другой ответ

33. Измерение величины заключается:

a).в выборе величины того же рода, принятой за единицу

b).в нахождении численного значения величины

c).в сравнении величин одного рода, процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин

d).в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу

e).другой ответ

34.Множества A и C не пересекаются n (A)=5, n (C)=12. Известно, что множество B подмножество множества C и n(B)=4. тогда $n(\mathrm{A} \times \mathrm{B}'_{\mathrm{C}})$равна

a).40

b).60

c).48

d).20

e).28

35.Для того, чтобы существовало частное двух натуральных чисел a и b , необходимо, чтобы

a).$b \leq a$
b).$a \leq b$
c).b
d).a
e).другой ответ

Критерии оценки результатов тестирования

Оценка экзамена (стандартная)	**Оценка экзамена** (тестовые нормы: % правильных ответов)
«отлично»	*80-100 %*
«хорошо»	*70-79%*
«удовлетворительно»	*60-69%*
«неудовлетворительно»	*менее 60%*

8. Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1 Стойлова Л. П. Математика : учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений / Л. П. Стойлова. – М.: Академия, 2015 – 464 с.

Дополнительная литература

1. Аматова Г.М. Математика : в 2 кн.: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Г. М. Аматова, М.А. Аматов. – М.: Академия, 2008.
2. Аматова Г.М. Математика. Упражнения и задачи: уч. пос. для студ. высш. пед. учеб. заведений / Г. М. Аматова, М.А. Аматов. – М.: Академия, 2008.

2 Виленкин Н.Я., Дутчев К.И. и др. Современные основы школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1980.

3 Виленкин Н.Я., Лаврова Н.Н., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1977.

4 Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б., Стойлова Л.П. Математика. – М.: Просвещение, 1977.

5 Добротворский А.С., Ковригина Л.П., Ситаров В.А., Шадрина И.В., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. – М.: Прометей, МГПИ им. В.И. Ленина, 1989.

6 Калинина Г.П., Ручкина В.П., Воробьева Г.В., Теплякова Л.Н. Руководство к самостоятельной работе по математике (для студентов 1-3 курсов заочного отделения). – Свердловск: Свердловский désинститут, 1989.

7 Куличкова О.П., Дроздова Л.В. Математика. – Мичуринск: Издательство МГПИ, 2001.

8 Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. – М.: Просвещение, 1985.

9 Стойлова Л.П., Виленкин Н.Я., Лаврова Н.Н. Математика. Часть I. – М.: Просвещение, 1990.

10 Стойлова Л.П., Лаврова Н.Н., Денищева Л.О., Морозова В.Л. Задачи для контрольных работ по математике. МГОПИ. – М.: Просвещение, 1993.

11 Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики: Учебное пособие для педучилищ. – М.: Просвещение, 1988.