Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

М.А. Незнамова

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 011800.62 Радиофизика

Оренбург
2013

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7
Н 44

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент Герасименко С.А.

Незнамова, М.А.
Н 44 Функции комплексного переменного. Элементы операционного исчисления: учебное пособие / М.А. Незнамова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 122 с.
ISBN

В данной работе изложены основные сведения по теории функций комплексного переменного и основные положения операционного исчисления.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 011800.62 Радиофизика

УДК 517.9 (076)
ББК 22.161.6я7

ISBN

Содержание

Введение

Предлагаемое учебное пособие предназначено студентам очной формы обучения направления 011800.62 – Радиофизика в качестве лекционного курса по теории функций комплексного переменного (ТФКП). Данный раздел математики изучается студентами направления 011800.62 во 2 семестре.

Несмотря на наличие большого количества прекрасно зарекомендовавших на протяжении десятилетий учебников по данному разделу высшей математики [1-5], написание данного учебного пособия все же представляется целесообразным в силу следующих причин:

1) изменение количества учебных часов и структуры их распределения между аудиторной нагрузкой и самостоятельной работой;

2) важность соответствия учебного пособия рабочей программе;

3) целесообразность включения в учебное пособие рекомендаций по использованию компьютерных математических пакетов для выполнения трудоемких операций.

Следует отметить, что рассматриваемое учебное пособие можно использовать студентами и других направлений и специальностей с аналогичной трудоемкостью изучения ТФКП.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Кучеренко М.Г. и кандидату физико-математических наук, доценту Павленко А.Н. за ряд ценных предложений, рекомендаций и уточнений.

1 Понятие множества комплексных чисел

1.1 Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Изображение комплексных чисел на комплексной плоскости

Определение. Комплексными числами будем называть числа вида $z = x + iy$, где $x, y \in R$, а $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$).

Обозначать множество комплексных чисел будем символом C.

Число x называется действительной частью комплексного числа z. Обозначать действительную часть будем $\mathrm{Re}\, z$ (лат.: realis – действительный).

Число y называется мнимой частью комплексного числа z. Обозначать мнимую часть будем $\mathrm{Im}\, z$ (лат.: imaginarius – мнимый).

Запись $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа z.

Определение. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным к комплексному числу $z = x + iy$.

Если мнимая часть комплексного числа равна 0, то такое число будет еще и действительным. Отсюда следует, что множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел: $R \subset C$.

Если же действительная часть комплексного числа равна 0, то такое число будем называть чисто мнимым.

Как известно, любому действительному числу можно поставить в соответствие точку на числовой прямой. Аналогичное представление существует и для комплексных чисел: числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку M (или вектор $\overline{OM}$) с координатами (x, y) на плоскости (рисунок 1).

Ось x будем называть действительной осью, а ось iy - мнимой. В этом случае координатная плоскость называется комплексной плоскостью.

Модуль действительного числа представляет собой расстояние от точки, соответствующей данному числу до начала координат. Точно так же можно ввести понятие модуля и для комплексных чисел.

Определение. Модулем комплексного числа будем называть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Модуль $|z|$ равен расстоянию на комплексной плоскости от точки, соответствующей комплексному числу z до начала координат.

Модуль комплексного числа иногда будем обозначать ρ.

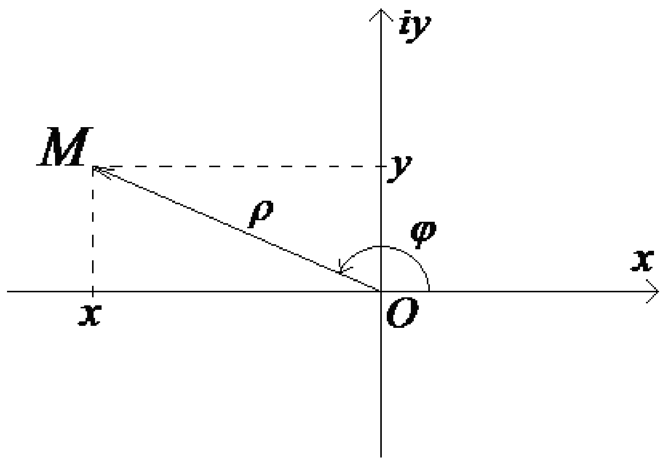

Рисунок 1

Определение. Угол φ, откладываемый от положительного направления оси x до луча $[OM)$ против часовой стрелки, называется аргументом комплексного числа z. Обозначение: $\varphi = \arg z$.

Очевидно, что $0 \le \arg z < 2\pi$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Тогда комплексное число z можно записать в виде

$$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение. Запись $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z.

Определение. Запись $z = \rho e^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа z.

Задача. Комплексное число, заданное в тригонометрической форме $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, записать в показательной и в алгебраической формах.

Решение.

1. Переведем данное число в показательную форму.

Так как тригонометрическая форма записи имеет вид $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для комплексного числа $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ имеем: $\rho = \sqrt{2}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Тогда показательная форма данного числа имеет вид

$$z = \rho e^{i\varphi} = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}.$$

2. Переведем данное число в алгебраическую форму.

Так как алгебраическая форма имеет вид $z = x + iy$, то для ее получения достаточно подставить вместо косинуса и синуса их значения для угла $\frac{3\pi}{4}$ и упростить поученное выражение

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i\,.$$

Задача. Комплексное число, заданное в алгебраической форме $z = 1 - \sqrt{3}\,i$, записать в тригонометрической и в показательной формах.

Решение.

Тригонометрическая и показательная формы записи имеют вид соответственно $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z = \rho e^{i\varphi}$.

Найдем модуль данного комплексного числа

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента данного комплексного числа сделаем чертеж (рисунок 2). Получим:

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha =$$

►Рассмотрим прямоугольный треугольник OMN. Тангенс угла α равен отношению противолежащего катета MN к прилежащему катету ON:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \alpha = \frac{\pi}{6}.◄$$

$$= \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}.$$

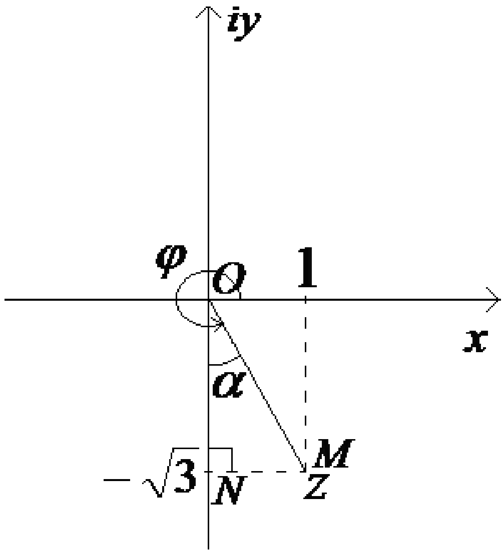

Рисунок 2

Тогда тригонометрическая форма имеет вид

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Показательная форма данного числа

$$z = \rho e^{i\varphi} = 2e^{i5\pi/3}.$$

1.2 Арифметические действия над комплексными числами. Формула Муавра. Корень n-ой степени из комплексного числа

1.2.1 Арифметические действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Определение. Два комплексных числа будем называть равными тогда и только тогда, когда равны их и действительные, и мнимые части.

Комплексные числа несравнимы, то есть на множестве C не рассматривается отношение «>».

Арифметические действия с комплексными числами в алгебраической форме будем проводить по тем же правилам, которые применяются при преобразовании выражений с переменными, с учетом равенства $i^2 = -1$.

Пусть имеются два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда арифметический действия с ними будут иметь вид:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

2) $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2 =$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1x - ix_1y_2 + iy_1x_2 - i^2 y_1y_2}{x_2^2 - (iy_2)^2} =$

$$= \frac{x_1x - ix_1y_2 + iy_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0\ \left(x_2^2 + y_2^2 \neq 0\right).$$

Рассмотрим операции сложения и вычитания комплексных чисел. Следует отметить, что данные операции совершенно аналогичны сложению и вычитанию векторов, заданных своими координатами. Если трактовать комплексные числа как вектора, то их сложение и вычитание можно проводить по правилам, применимым для векторов: по правилу параллелограмма и по правилу треугольника.

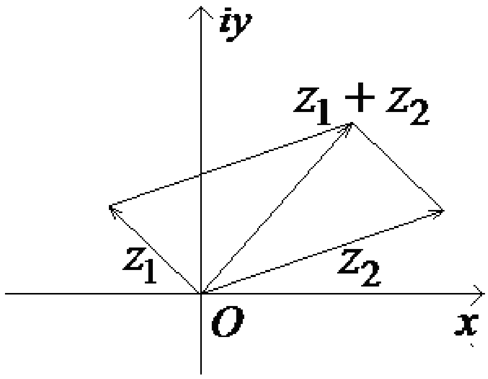

Рисунок 3

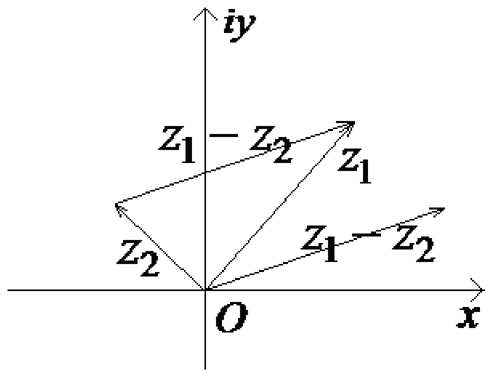

Рисунок 4

1.2.2 Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической и показательной формах

Рассмотрим теперь произведение (деление) комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.

Пусть нам даны два комплексных числа в тригонометрической форме: $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1. Найдем их произведение

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\times$$

$$\times(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$

$$+ i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\Big) = \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 +$$

$$+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

►Используем формулы тригонометрии

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.◄

$$=\rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Таким образом, при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. Найдем их частное

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2-i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2-i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2-(i\sin\varphi_2)^2}=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)-(-1)\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2-(-1)\sin^2\varphi_2}=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$

►Используем основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.◄$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{1}=$$

►Используем формулы тригонометрии

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.◄$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Таким образом, при делении двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Тригонометрическая форма: $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$	
$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$
Показательная форма: $z_1=\rho_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=\rho_2e^{i\varphi_2}$	
$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

1.2.3 Применение комплексных чисел при расчете цепей переменного тока (метод комплексных амплитуд)

Как известно [6]:

1) токи и напряжения в цепях переменного тока складываются с учетом сдвига фаз;

2) ток в емкости опережает напряжение на ней на $\frac{\pi}{2}$;

3) напряжение на индуктивности опережает ток через нее на $\frac{\pi}{2}$.

Поэтому при расчете цепей переменного тока используется метод векторных диаграмм [6]. При использовании данного метода токи и напряжения представляются векторами, длины которых соответствуют их амплитудам (или действующим значениям), а образуемые векторами углы с некоторым направлением соответствуют их сдвигам фаз.

Комплексные числа можно трактовать как вектора, поэтому их использование позволяет рассчитывать цепи переменного тока аналогично цепям постоянного тока.

Из закона Ома для участка цепи $\hat{I} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{Z}}$ ($\hat{U}$ - комплексные напряжение на участке цепи, $\hat{I}$ - комплексный ток в нем, а $\hat{Z}$ - его комплексное сопротивление) следует, что $\hat{Z} = \dfrac{\hat{U}}{\hat{I}}$.

Так как ток в емкости опережает напряжение на ней на $\dfrac{\pi}{2}$, а при делении аргументы вычитаются, то комплексное сопротивление конденсатора должно иметь аргумент $-\dfrac{\pi}{2}$. Из того, что ток в индуктивности отстает от напряжения на ней следует, что аргумент комплексного сопротивления индуктивности равен $\dfrac{\pi}{2}$. Тогда комплексные сопротивления емкости и индуктивности имеют вид

$$\hat{Z}_C = -\frac{1}{\omega C} i, \ \hat{Z}_L = \omega L i.$$

Здесь: $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота переменного тока в цепи, C - емкость конденсатора, а L - индуктивность катушки индуктивности.

Рассмотрим метод комплексных амплитуд на конкретном примере.

Задача. Найти напряжение на резисторе (рисунок 5), если известно, что $U = 10$ В, $f = 10$ кГц, $R = 10$ кОм, $C = 0{,}01$ мкФ, $L = 20$ мГн.

Решение.

Найдем комплексные сопротивления всех элементов цепи:

1) $\hat{Z}_R = R = 10000$ Ом;

2) $\hat{Z}_C = -\frac{1}{\omega C} i = -\frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 0{,}01 \cdot 10^{-6}} i \approx -1592i$ Ом;

3) $\hat{Z}_L = \omega L i = 2\pi \cdot 10^4 \cdot 0{,}02i \approx 1257i$ Ом.

Расчет данной цепи переменного тока будем проводить по схеме, аналогичной расчету цепей постоянного тока.

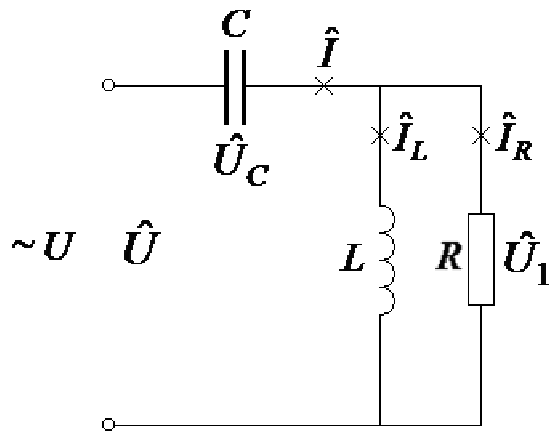

Рисунок 5

1. Найдем общее комплексное сопротивление индуктивности и резистора по формуле параллельного соединения двух сопротивлений

$$\hat{Z}_{LR} = \frac{\hat{Z}_L \cdot \hat{Z}_R}{\hat{Z}_L + \hat{Z}_R} \approx \frac{1257i \cdot 10000}{1257i + 10000} \approx 155 + 1237i \text{ (Ом).}$$

2. Найдем общее комплексное сопротивление конденсатора, индуктивности и резистора по формуле последовательного соединения двух сопротивлений

$$\hat{Z}_{CLR} = \hat{Z}_C + \hat{Z}_{LR} \approx -1592i + 155 + 1237i = 155 - 355i \text{ (Ом).}$$

3. Найдем комплексный ток $\hat{I}$, используя закон Ома.

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_{CLR}} \approx \frac{10}{155 - 355i} \approx 0{,}01038 + 0{,}02365i \text{ (А)}.$$

4. Найдем комплексное напряжение на конденсаторе

$$\hat{U}_C = \hat{Z}_C \cdot \hat{I} \approx -1592i \cdot (0{,}01038 + 0{,}02365i) \approx 37{,}65 - 16{,}52i \text{ (В)}.$$

5. Найдем комплексное напряжение на резисторе

$$\hat{U}_R = \hat{U} - \hat{U}_C \approx 10 - (37{,}65 - 16{,}52i) = -27{,}65 + 16{,}52i \text{ (В)}.$$

6. Найдем напряжение на резисторе

$$U_R = \left|\hat{U}_R\right| \approx \sqrt{(-27{,}65)^2 + 16{,}52^2} \approx 32{,}2 \text{ (В)}.$$

1.2.4 Формула Муавра

Так как натуральную степень комплексного числа можно рассматривать как последовательное выполнение операции умножения, то из формулы для произведения комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

непосредственно следует формула Муавра

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Применение формулы Муавра чрезвычайно упрощает возведение в степень, если показатель степени – большое натуральное число.

Задача. Вычислить $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1000}$.

Решение.

Переведем основание степени $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрическую форму $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Найдем модуль данного комплексного числа

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

Для нахождения аргумента данного комплексного числа сделаем чертеж. Получим:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}+\alpha=$$

►Рассмотрим прямоугольный треугольник OMN. Тангенс угла α равен отношению противолежащего катета MN к прилежащему катету ON (рисунок 6):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MN}{ON}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \alpha=\frac{\pi}{6}.◄$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}.$$

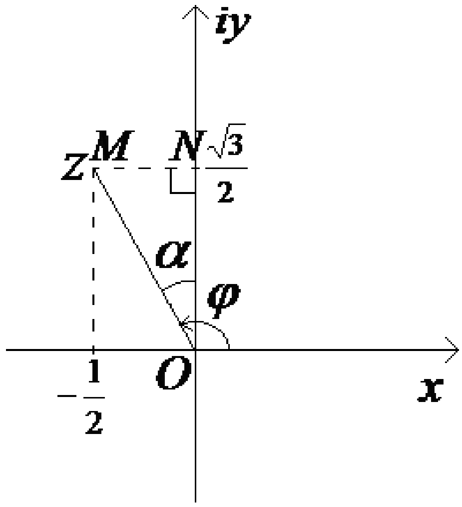

Рисунок 6

Тогда тригонометрическая форма имеет вид

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Используем формулу Муавр

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1000} = 1^{1000}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{1000} =$$

$$= 1^{1000}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{1000} = \cos 1000\cdot\frac{2\pi}{3} + i\sin 1000\cdot\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \cos\frac{2000\pi}{3} + i\sin\frac{2000\pi}{3} = \cos 666\frac{2\pi}{3} + i\sin 666\frac{2\pi}{3} =$$

►Используем, что функции синус и косинус периодичны с периодом $T = 2\pi$.◄

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1.2.5 Корень n-ой степени из комплексного числа

Определение. Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется такое комплексное число w, что $w^n = z$.

Получим формулу для нахождения корней n-ой степени из комплексных чисел.

Будем рассматривать комплексные числа z и w в тригонометрической форме: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Используя определение корня n-ой степени из комплексного числа, получим:

$$w^n = z,\ \left(r(\cos\psi + i\sin\psi)\right)^n = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Применим формулу Муавра $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$:

$$r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Для того чтобы два комплексных числа были равны необходимо и достаточно, чтобы равнялись их модули, а аргументы отличались на величину $2\pi k$, где $k \in Z$.

Тогда получаем два равенства:

$$r^n = \rho,\ n\psi = \varphi + 2\pi k.$$

Отсюда, получим:

$$r = \sqrt[n]{\rho},\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Рассмотрим величину $\psi = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \cdot \frac{k}{n}$. Так как данное значение является аргументом для функций синус и косинус (их период $T = 2\pi$), то для получения всех возможных значений корня достаточно положить $k = 0, 1, ..., n-1$. Отсюда следует, что корень n-ой степени из любого комплексного числа имеет ровно n значений. Обозначать k-ое значение корня будем в виде $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$.

Пусть дано комплексное число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда

$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, где $k = 0, 1, ..., n-1$.

Следует отметить, что все значения корня n-ой степени имеют одинаковые модули (т. е. находятся на одинаковом расстоянии от начала координат на комплексной плоскости), а их аргументы меняются с шагом $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что все n значений корня n-ой степени являются вершинами правильного n-угольника.

Задача. Найти все значения $\sqrt[6]{64}$. Построить полученные комплексные числа $\left(\sqrt[6]{64}\right)_0$, $\left(\sqrt[6]{64}\right)_1$,…, $\left(\sqrt[6]{64}\right)_5$ на комплексной плоскости.

Решение.

Используем формулу для нахождения значений корней n-ой степени из комплексного числа

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = 0, 1, ..., n-1.$$

Переведем комплексное число $z = 64$ в тригонометрическую форму.

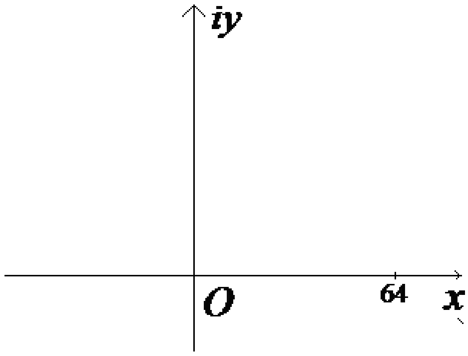

Рисунок 7

Из чертежа (см. рисунок 7) очевидно, что $\rho = 64$, а $\varphi = 0$.

Тогда получаем:

$$\left(\sqrt[6]{64}\right)_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right), \text{ где } k = 0, 1, ..., 5;$$

$$\left(\sqrt[6]{64}\right)_k = 2\left(\cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}\right), \text{ где } k = 0, 1, ..., 5;$$

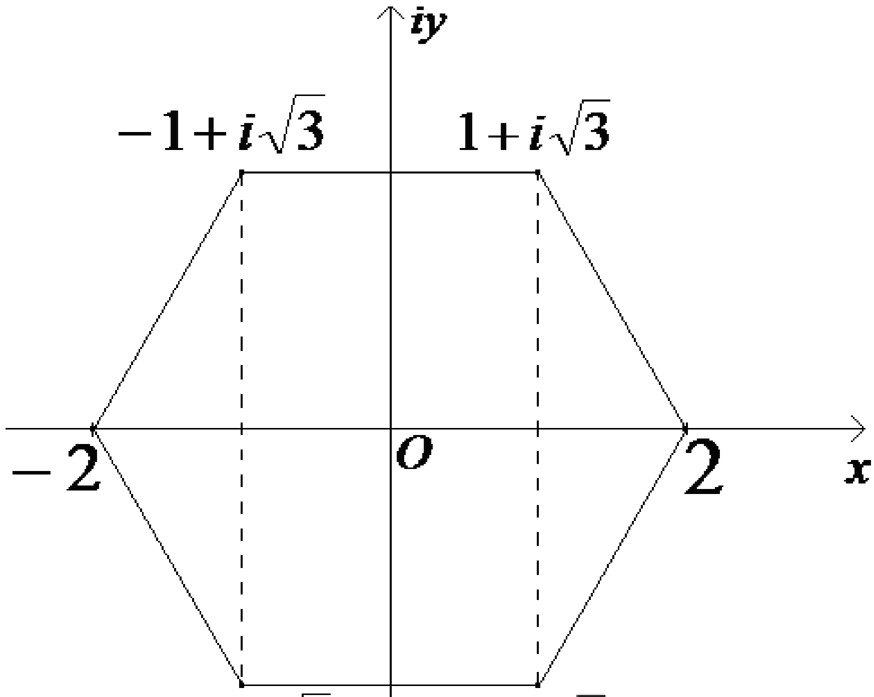

Рисунок 8

Найдем все искомые значения корня:

1) $\left(\sqrt[6]{64}\right)_0 = 2\left(\cos\dfrac{0\pi}{3} + i\sin\dfrac{0\pi}{3}\right) = 2$;

2) $\left(\sqrt[6]{64}\right)_1 = 2\left(\cos\dfrac{1\pi}{3} + i\sin\dfrac{1\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$;

3) $\left(\sqrt[6]{64}\right)_2 = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$;

4) $\left(\sqrt[6]{64}\right)_3 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{3} + i\sin\dfrac{3\pi}{3}\right) = -2$;

5) $\left(\sqrt[6]{64}\right)_4 = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}$;

6) $\left(\sqrt[6]{64}\right)_5 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Построим найденные значения на комплексной плоскости (рисунок 8). Полученные значения корня шестой степени находятся в вершинах правильного шестиугольника.

1.3 Предел последовательности комплексных чисел

Определение. Бесконечное множество занумерованных комплексных чисел будем называть числовой последовательностью комплексных чисел.

Обозначение: $z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n, \ldots$ или $\{z_n\}$.

Определение. Числовая последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ называется сходящейся к комплексному числу $z_0 = x_0 + iy_0$, если $|z_n - z_0| \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$, то соотношение $|z_n - z_0| \to 0$ равносильно одновременному выполнению соотношений $|x_n - x_0| \to 0$ и $|y_n - y_0| \to 0$.

Таким образом, для того, чтобы $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Определение. Числовая последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ называется сходящейся к ∞, если $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

Так как $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, то для того чтобы последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ сходилась к ∞ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ была бесконечно большой.

Таким образом, нахождение предела числовой последовательности комплексных чисел фактически сводится к нахождению пределов действительной и мнимой частей данной последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Отсюда следует возможность перенесения всех свойств предела действительной числовой последовательности на случай комплексной числовой последовательности. Исключения составляют лишь свойства, использующие знаки сравнения чисел в силу несравнимости комплексных чисел.

Задача. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{-n} + i\frac{n}{n+1}\right).$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^{-n} + i\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} + i \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0 + i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = i \cdot 1 = i .$$

1.4 Числовые ряды с комплексными членами

Определение. Числовым рядом с комплексными членами будем называть формально записанное выражение

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad (z_i \in C, i = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Все основные определения переносятся без изменений с действительных числовых рядов.

Так как понятие сходимости ряда и его суммы определяются через предел последовательности частичных сумм, который в свою очередь сводится к пределам своих действительной и мнимой частей, то тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ фактически сводится к двум рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$:

1) для сходимости рядя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$;

2) пусть S_1 - сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, а S_2 - сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ имеет сумму $S = S_1 + iS_2$.

1.5 Кривые и области на комплексной плоскости

Определение. Непрерывной кривой на комплексной плоскости будем называть параметрически заданное множество точек $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$, а $x = x(t)$ и $y = y(t)$ - непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$.

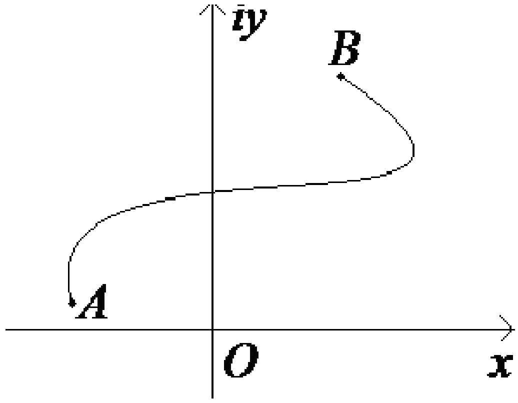

Рисунок 9

Пример: $z(t) = R\cos t + iR\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ - окружность с центром в начале координат и радиусом R.

Определение. Непрерывная кривая без самопересечений называется кривой Жордана.

Определение. Гладкой кривой на комплексной плоскости будем называть параметрически заданное множество точек $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$, а $x'(t)$ и $y'(t)$ - непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$, не обращающиеся одновременно в 0.

Определение. Непрерывную кривую будем называть кусочно-гладкой, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Определение. Ориентированной кривой будем называть кривую, у которой выбраны начало и конец.

Пусть на комплексной плоскости имеется некоторое множество точек M (рисунок 10).

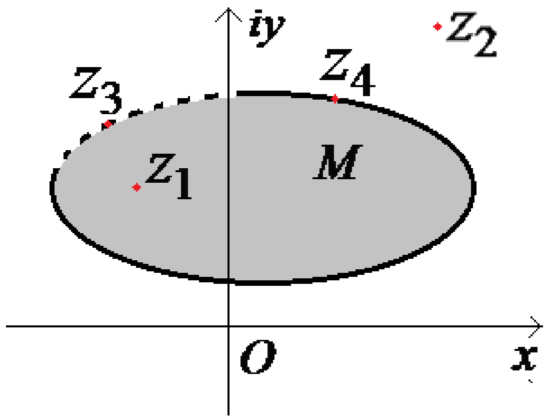

Рисунок 10

Определение. Точку z будем называть внутренней точкой множества M, если существует круг с центром в этой точке, целиком принадлежащий множеству M.

Для множества M (рисунок 10) точка z_1 является внутренней.

Определение. Множество, состоящее из всех внутренних точек множества M, будем называть внутренностью множества M и обозначать $\mathrm{int}\,M$ (рисунок 11).

Определение. Точку z будем называть внешней точкой множества M, если существует круг с центром в этой точке, не имеющих общих точек с множеством M.

Для множества M (рисунок 10) точка z_2 является внешней.

Определение. Множество, состоящее из всех внешних точек множества M, будем называть внешностью множества M и обозначать $\mathrm{aut}\,M$ (рисунок 11).

Определение. Точку z будем называть граничной точкой множества M, если любой круг с центром в этой точке содержит в себе как точки, принадлежащие множеству M, так и не принадлежащие ему.

Для множества M (рисунок 10) точки z_3 и z_4 являются граничными. Причем граничная точка z_3 не принадлежит самому множеству M, а точка z_4 принадлежит.

Определение. Множество, состоящее из всех граничных точек множества M, будем называть границей множества M и обозначать ∂M (рисунок 11).

Определение. Точку z будем называть предельной точкой множества M, если любой круг с центром в этой точке содержит в себе хотя бы одну точку, принадлежащую множеству M и отличную от точки z.

Для множества M (рисунок 10) точки z_1, z_3 и z_4 являются предельными.

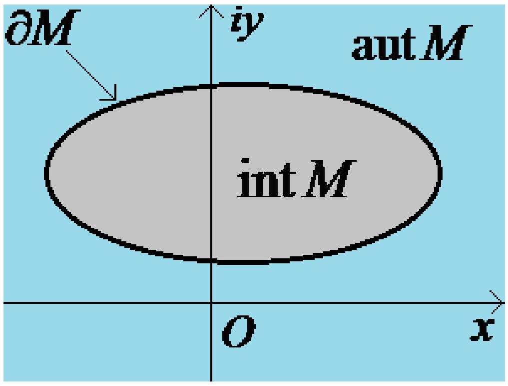

Рисунок 11

Очевидно, что внутренние точки множества M всегда принадлежат самому множеству M, внешние точки всегда не принадлежат, а граничные и предельные точки могут, как принадлежать множеству M, так ему и не принадлежать.

Определение. Множество называется связным, если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Множество M на рисунке 10 связно, а множество N, приведенное на рисунке 12, является несвязным.

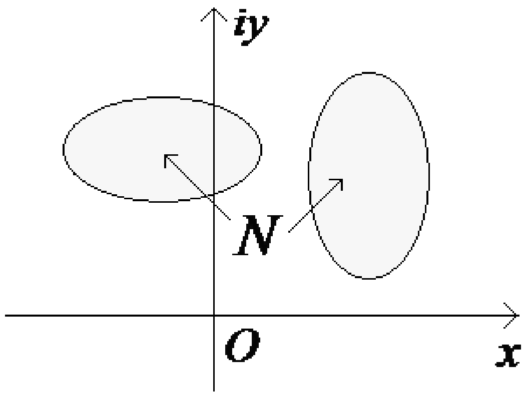

Рисунок 12

Определение. Областью будем называть связное множество, все точки которого являются внутренними (рисунок 13).

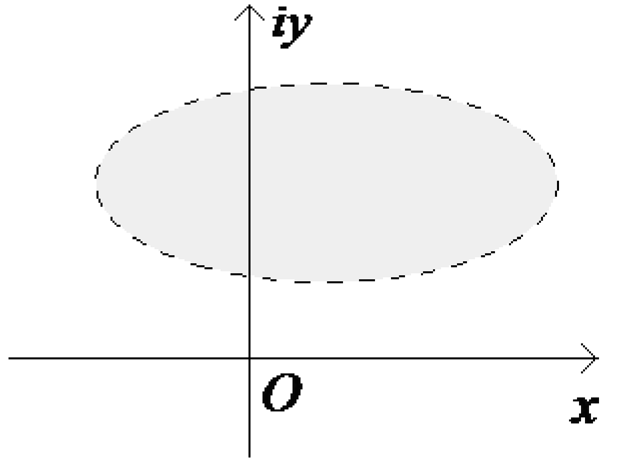

Рисунок 13

Определение. Область будем называть односвязной, если ее граница состоит из одной замкнутой кривой и n-связной, если ее граница состоит из n замкнутых кривых, которые могут вырождаться в незамкнутые кривые и точки.

На рисунке 14 изображенное множество является трехсвязным, так как его граница состоит из трех фрагментов: двух замкнутых кривых и одной незамкнутой кривой.

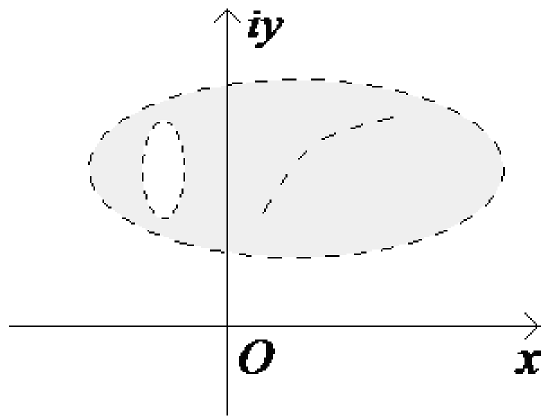

Рисунок 14

2 Функции комплексного переменного. Предел. Дифференцируемость

2.1 Понятие функции комплексного переменного

Определение. Однозначной функцией (функцией) комплексного переменного будем называть соответствие, при котором каждому комплексному числу из некоторого множества $D \subset C$ отвечает единственное комплексное число w.

Обозначение: $w = f(z)$.

Примеры: $f(z) = z^2$, $f(z) = \bar{z}$ и т. д.

Определение. Множество D называется областью определения функции, а множество $E = \{w = f(z) | z \in D\}$ называется областью значений функции.

Таким образом, функция $w = f(z)$ каждой точке одного множества на комплексной плоскости ставит в соответствие единственную точку другого множества на комплексной плоскости (рисунок 15).

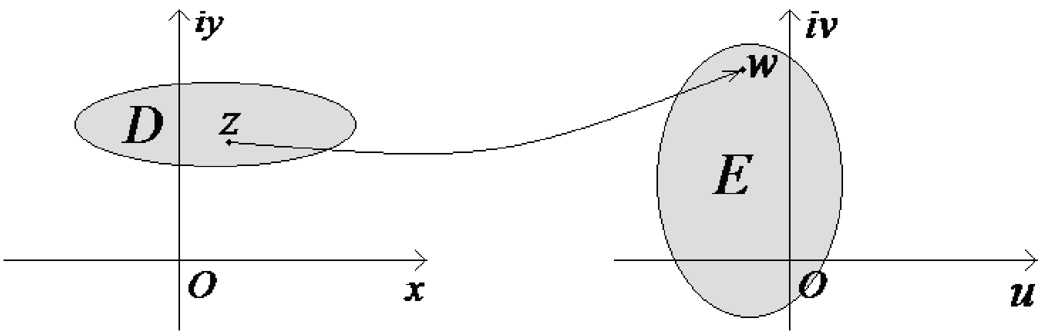

Рисунок 15

Функцию комплексного переменного можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy.$$

Здесь $u(x, y)$ - действительная часть функции $w = f(z)$, $v(x, y)$ - мнимая часть этой функции.

Задача. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = z^2$.

Решение.

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Отсюда следует, что действительная часть данной функции равна $u(x, y) = x^2 - y^2$, а $v(x, y) = 2xy$ - ее мнимая часть.

Так как и аргумент функции $z = x + iy$, и значение функции $w = u + iv$ являются комплексными переменными, то для изображения графика функции комплексного переменного необходима четырехмерная система координат с 4 осями x, y, u и v. Отсюда следует, что график функции комплексного переменного в трехмерном пространстве невозможно.

Для наглядной интерпретации функции комплексного переменного часто используется построение ее рельефа, то есть графика функции $w = |f(z)|$. Так как значения $|f(z)|$ всегда действительны, то рельеф является поверхностью в трехмерном пространстве и его построение возможно в трехмерной системе координат. На рисунке 16 приведен рельеф функции $f(z) = z$. Он представляет собой поверхность, являющуюся графиком функции двух переменных $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

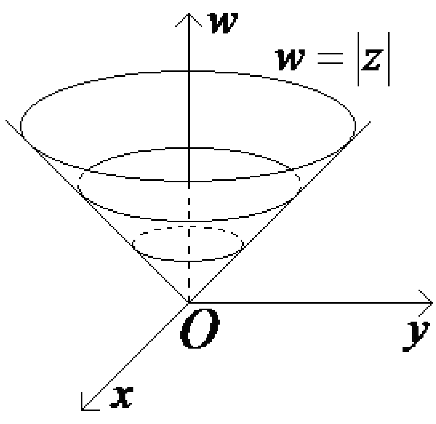

Рисунок 16

Определение. n-значной (∞-значной) функцией комплексного переменного будем называть соответствие, при котором каждому комплексному числу из некоторого множества $D \subset C$ отвечает n (∞) комплексных чисел.

Примеры: $f(z) = \sqrt[n]{z}$ - n-значная функция, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ - бесконечнозначная функция.

2.2 Предел функции комплексного переменного и его свойства

Пусть точка z_0 является предельной точкой области определения функции $w = f(z)$.

Определение. Будем говорить, что функция комплексного переменного $w = f(z)$ в точке $z = z_0$ имеет предел, равный C (обозначение: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in D(f)$, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, выполняется

$$|f(z) - C| < \varepsilon .$$

Предел функции комплексного переменного можно свести к пределам двух действительных функций двух переменных.

Пусть: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $C = A + iB$. Тогда для того, чтобы $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = A, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = B .$$

Отсюда следует, что предел функции комплексного переменного имеет те же свойства, что и предел функций действительного переменного. Исключения составляют лишь свойства, выраженные неравенствами, в силу того, что комплексные числа несравнимы.

2.3 Непрерывные функции комплексного переменного и их свойства

Определение. Функция комплексного переменного $w = f(z)$ называется непрерывной в точке $z = z_0$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Так как условие $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ равносильно равенствам

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

то тогда непрерывность функции комплексного переменного равносильна к непрерывности ее действительной и мнимой частей. Отсюда следует, что непрерывные функции комплексного переменного имеют те же свойства, что и непрерывные функции действительного переменного. Исключения составляют лишь свойства, выраженные неравенствами, в силу того, что комплексные числа несравнимы.

2.4 Производная и дифференциал функции комплексного переменного

2.4.1 Понятие производной и дифференциала

Определение. Пусть точка $z_0 \in \operatorname{int} D(f)$. Производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$ называется комплексное число

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Если число z_0 не фиксировать (и писать просто z), то тогда производная будет являться не числом, а функцией.

Задача. Найти производную функции $f(z) = z^2$.

Решение.

Функция $f(z)=z^2$ определена на всей комплексной плоскости.

Используя определение производной функции комплексного переменного, получим:

$$\left(z^2\right)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z .$$

Определение. Пусть точка $z_0 \in \operatorname{int} D(f)$. Функция $w = f(z)$ в точке $z = z_0$ называется дифференцируемой, если для ее приращения в точке $z = z_0$ существует представление

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z .$$

Где $A(z_0)$ - величина, не зависящая от Δz, а $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(z_0, \Delta z) = 0$.

Задача. Показать, что функция $f(z)=z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Решение.

Функция $f(z)=z^2$ определена на всей комплексной плоскости.

Рассмотрим ее приращение в произвольной точке $z = z_0$ комплексной плоскости

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = z_0^2 - 2z_0\Delta z + \Delta z^2 - z_0^2 = 2z_0\Delta z + \Delta z^2 .$$

Так получили выражение вида $A(z_0)\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\Delta z$ (с $A(z_0)=2z_0$, $\alpha(z_0,\Delta z)=\Delta z$), то данная функция является дифференцируемой на всей комплексной плоскости.

Как и для случая функций действительной переменной верны следующие теоремы.

Теорема. Для того чтобы функция комплексного переменного $w=f(z)$ имела производную в точке $z=z_0$ необходимо и достаточно, чтобы она в точке $z=z_0$ была дифференцируемой.

Теорема. Функция, дифференцируемая в точке $z=z_0$, является непрерывной в точке $z=z_0$.

Доказательства данных теорем совершенно аналогичны соответствующим доказательствам для функции действительного переменного.

Из первой теоремы следует, что понятия «функция, имеющая производную» и «дифференцируемая функция» можно не различать, кроме того из доказательства этой теоремы следует, что $A(z_0)=f'(z_0)$. Тогда представление из определения дифференцируемой функции можно записать в виде

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\alpha(z_0,\Delta z)\Delta z .$$

Определение. Выражение $f'(z_0)\Delta z$ называется дифференциалом функции $w=f(z)$ в точке z_0 и обозначается $df(z_0)$.

Так как $dz=z'\Delta z=\Delta z$, то тогда для независимой переменной верно равенство $\Delta z=dz$ и формула для дифференциала будет иметь вид

$$df(z_0)=f'(z_0)dz .$$

Так как понятие производной функции комплексного переменного вводится совершенно аналогично понятию производной функции действительного переменного, то и для производной функции комплексного переменного верны следующие правила для ее нахождения.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 2. $(Cu)' = Cu$.

3. $(uv)' = u'v + uv'$. 4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

5. $(f(u))' = f'(u)u'$.

Их доказательства полностью совпадают с соответствующими доказательствами для случая производной функции действительного переменного.

Определение. Функцию комплексного переменного, имеющую производную в каждой точке области D, будем называть аналитической функцией в области D.

Определение. Функцию комплексного переменного, имеющую производную в некоторой окрестности точки z_0, будем называть аналитической функцией в точке z_0.

2.4.2 Условия существования производной функции комплексного переменного

Пусть нам дана функция комплексного переменного

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Возникает вопрос, каким условиям должны удовлетворять функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, чтобы функция $f(z)$ имела производную.

Предположим, что существует производная $f'(z)$, тогда, используя определение производной, получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - (u(x,y) + iv(x,y))}{\Delta x + i\Delta y}. \qquad (1)$$

Полученный двойной предел в случае своего существования не должен зависеть от того, каким именно образом величины Δx и Δy стремятся к нулю.

Рассмотрим частный случай, когда в выражении (1) выполняется $\Delta y = 0$. В этом случае будем иметь

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - (u(x,y) + iv(x,y))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + i(v(x+\Delta x, y) - v(x,y))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= u'_x(x,y) + iv'_x(x,y).$$

Рассмотрим теперь другой частный случай, когда в выражении (1) выполняется $\Delta x = 0$. В этом случае будем иметь

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - (u(x,y) + iv(x,y))}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) + i(v(x, y+\Delta y) - v(x,y))}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right) =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= -i \cdot u'_y(x, y) + v'_y(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y).$$

Получили, что должны одновременно выполняться два равенства:

1) $f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)$;

2) $f'(z) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y)$.

так как для равенства комплексных чисел необходимо и достаточно, чтобы равнялись их действительные и мнимые части, то из существования производной следует выполнимость двух соотношений

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y),\ u'_y(x, y) = -v'_x(x, y). \qquad (2)$$

Данные равенства называются условиями Коши-Римана (или Даламбера-Эйлера).

Так как из существования производной следует выполнимость условий (2), то они условия Коши-Римана являются **необходимыми** для того, чтобы функция комплексного переменного имела производную.

Однако выполнимости одних условий Коши-Римана недостаточно для существования производной, то есть данные условия не являются достаточными. В качестве контрпримера достаточно рассмотреть функцию

$$f(z) = \begin{cases} 0,\ xy = 0; \\ 1,\ xy \neq 0. \end{cases}$$

Для данной функции действительная и мнимая части:

$$u(x,y)=\begin{cases}0, xy=0;\\1, xy\neq 0;\end{cases}\quad v(x,y)=0\,.$$

Проверим, для точки $z=0$ выполнимость условий Коши-Римана:

1) $u'_x(0{,}0)=0$ и $v'_y(0{,}0)=0$ - первое условие выполняется;

2) $u'_y(0{,}0)=0$ и $v'_x(0{,}0)=0$ - второе условие выполняется.

Однако рассматриваемая функция в точке $z=0$ не является непрерывной и, следовательно, дифференцируемой.

Следующая теорема выражает достаточное условие существования производной. Можно доказать, что это условие также будет и необходимым.

Теорема. Пусть действительная и мнимая части функции $w=f(z)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана и имеют все непрерывные частные производные первого порядка, тогда функция $w=f(z)$ имеет производную.

Доказательство.

По определению производной имеем

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-(u(x,y)+iv(x,y))}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i(v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y))}{\Delta z}=$$

►Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют все непрерывные частные производные первого порядка, то они являются дифференцируемыми. Тогда для них существуют представления:

$$1)\ u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=u'_x(x,y)\Delta x+u'_y(x,y)\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right);$$

$$2)\ v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=v'_x(x,y)\Delta x+v'_y(x,y)\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).◄$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u'_x(x,y)\Delta x+u'_y(x,y)\Delta y+o(|\Delta z|)+i\left(v'_x(x,y)\Delta x+v'_y(x,y)\Delta y+o(|\Delta z|)\right)}{\Delta z}=$$

►Используем, что $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}=0$.◄

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u'_x(x,y)\Delta x+u'_y(x,y)\Delta y+i\left(v'_x(x,y)\Delta x+v'_y(x,y)\Delta y\right)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x(x,y)\Delta x+u'_y(x,y)\Delta y+i\left(v'_x(x,y)\Delta x+v'_y(x,y)\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

►Используем условия Коши-Римана.◄

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x(x,y)\Delta x-v'_x(x,y)\Delta y+i\left(v'_x(x,y)\Delta x+u'_x(x,y)\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x(x,y)(\Delta x+i\Delta y)+v'_x(x,y)\Delta y(i\Delta x-\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u'_x(x,y)(\Delta x + i\Delta y) + iv'_x(x,y)\Delta y(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(u'_x(x,y) + iv'_y(x,y)\right) =$$

$$= u'_x(x,y) + iv'_x(x,y).$$

Получили, что в условиях теоремы функция $w = f(z)$ имеет производную, которую можно найти по формуле

$$f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y).$$

Задача. Найти точки, в которых функция $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$ имеет производную. Найти производную данной функции.

Решение.

Действительная и мнимая части данной функции соответственно равны

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \text{ и } v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Найдем частные производные первого порядка:

1) $u'_x(x,y) = (x^3 - 3xy^2)'_x = 3x^2 - 3y^2$ - непрерывная функция всюду на R^2;

2) $u'_y(x,y) = (x^3 - 3xy^2)'_y = -6xy$ - непрерывная функция всюду на R^2;

3) $v'_x(x,y) = (3x^2y - y^3)'_x = 6xy$ - непрерывная функция всюду на R^2;

4) $v'_y(x,y) = (3x^2y - y^3)'_y = 3x^2 - 3y^2$ - непрерывная функция всюду на R^2.

Получили, что условия Коши-Римана

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y),\ u'_y(x,y) = -v'_x(x,y)$$

выполняются всюду на R^2.

Отсюда следует, что данная функция всюду на комплексной плоскости имеет производную

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi\,.$$

2.5 Геометрическая интерпретация производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения

Пусть $f'(z_0) \neq 0$. Из определения производной

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

для $\Delta z \approx 0$ имеем приближенное равенство

$$f'(z_0) \approx \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Тогда

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \approx f'(z_0)\Delta z\,.$$

Отсюда следуют два приближенных равенства

1) $|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |\Delta z|$; (3)

2) $\arg(f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)) \approx \arg(f'(z_0)) + \arg(\Delta z)$. (4)

Рассмотрим точку $z = z_0 + \Delta z$ при $\Delta z \approx 0$. Эта точка на комплексной плоскости z будет находиться на расстоянии $|\Delta z|$ от точки $z = z_0$.

Функция комплексного переменного $w = f(z)$ отобразит точки z_0 и $z_0 + \Delta z$ на точки $f(z_0)$ и $f(z_0 + \Delta z)$, лежащие в плоскости w. Расстояние между этими двумя точками будет равняться $|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)|$.

Из приближенного равенства (3) следует, что расстояние между точками $f(z_0)$ и $f(z_0+\Delta z)$ больше чем расстояние между точками z_0 и $z_0+\Delta z$ примерно в $|f'(z_0)|$. Таким образом, функция $w=f(z)$ растягивает достаточно малую окрестность точки z_0 с коэффициентом растяжения $k=|f'(z_0)|$.

Из приближенного равенства (4) следует, что $\arg(f(z_0+\Delta z)-f(z_0))$ больше $\arg(\Delta z)$ на величину угла $\varphi=\arg(f'(z_0))$. Отсюда следует, что функция $w=f(z)$ достаточно малую окрестность точки z_0 поворачивает на угол $\varphi=\arg(f'(z_0))$.

Геометрический смысл модуля производной	Величина $|f'(z_0)|$ равна коэффициенту растяжения функцией $w=f(z)$ достаточно малой окрестности точки z_0
Геометрический смысл аргумента производной	Величина $\arg(f'(z_0))$ равна углу поворота функцией $w=f(z)$ достаточно малой окрестности точки z_0

Таким образом, дифференцируемая функция $w=f(z)$ при $f'(z_0)\neq 0$ осуществляет отображение, которое локально сохраняет коэффициент растяжения и углы. Такие отображения называются конформными.

3 Функциональные ряды и интегралы

3.1 Понятие функционального ряда

Определение. Пусть $f_1(z),\ f_2(z),\ldots,\ f_n(z),\ldots$ - последовательность функций комплексного переменного, определенных в некоторой области $D\subset C$.

Формально записанное выражение

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

называется функциональным рядом, заданным на области $D \subset C$.

Функции $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$, $f_n(z), \ldots$ называются членами функционального ряда.

Все основные определения из теории действительных функциональных рядов без изменений переносятся на случай комплексных функциональных рядов.

Как и для случая действительных функциональных рядов следующие верны теоремы.

Теорема (Признак Вейерштрасса). Пусть для всех $z \in D \subset C$ выполняются неравенства $|f_n(z)| \leq c_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ является сходящимся, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ в области D сходится равномерно и абсолютно.

Теорема. Пусть все функции $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$, $f_n(z), \ldots$ непрерывны в некоторой области $D \subset C$ и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ в области D сходится равномерно. Тогда его сумма является непрерывной функцией в области D.

Доказательства приведенных теорем аналогичны доказательствам их действительных аналогов.

3.2 Степенные ряды и структура их множества сходимости

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $z_0, c_1, c_2, \ldots \in C$ называется степенным рядом комплексного переменного с центром в точке z_0.

Очевидно, что наличие значения z_0 приводит лишь к сдвигу области сходимости ряда и его суммы, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только степенные ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

На степенной ряд комплексного переменного переносятся основные понятия и теоремы действительного степенного ряда.

Теорема (о структуре сходимости степенного ряда). Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ возможны случаи:

1) степенной ряд сходится только в одной точке $z=0$;

2) степенной ряд сходится абсолютно на всей комплексной плоскости;

3) существует такое число $R \in (0,+\infty)$, что (рисунок 17):

1) в открытом круге $|z|<R$ степенной ряд сходится абсолютно;

2) во внешности круга, то есть на множестве $|z|>R$ степенной ряд расходится;

3) на окружности $|z|=R$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Открытой круг $|z|<R$ назовем кругом сходимости степенного ряда, а величину R - радиусом сходимости степенного ряда. Как и в действительном случае, радиус сходимости можно найти по формулам:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \; R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

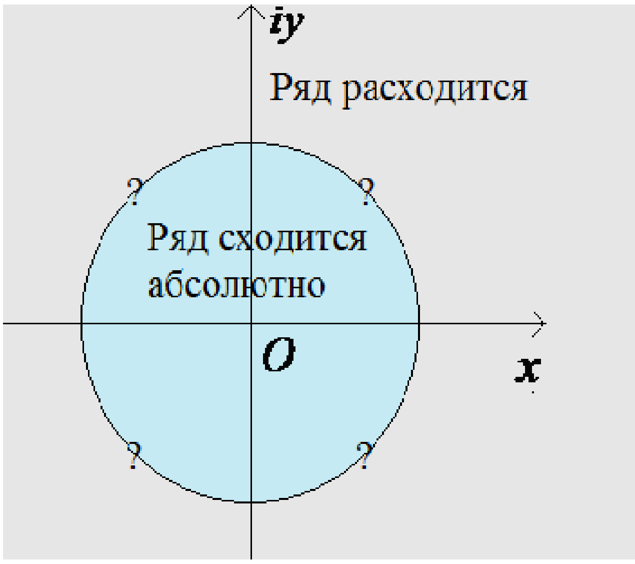

Рисунок 17

Теорема. Пусть радиус сходимости степенного ряда равен $R > 0$, тогда в замкнутом круге $|z| \le r < R$ данный ряд будет сходиться равномерно.

Задача. Построить на комплексной плоскости круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n(4+3i)^n}.$$

Решение.

Найдем радиус сходимости данного степенного ряда по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

В данном случае имеем

$$c_n = \frac{1}{n(4+3i)^n},\ c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(4+3i)^{n+1}},$$

$$|c_n| = \frac{1}{n|4+3i|^n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{4^2+3^2}\right)^n} = \frac{1}{n\,5^n}\,,\ |c_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)\,5^{n+1}}\,,$$

$$\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{\dfrac{1}{n\,5^n}}{\dfrac{1}{(n+1)\,5^{n+1}}} = \frac{5(n+1)}{n},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty}5\left(1+\frac{1}{n}\right) = 5(1+0) = 5\,.$$

Отсюда следует, что круг сходимости для данного степенного ряда задается неравенством $|z-1|<5$. Построим его на комплексной плоскости (рисунок 18).

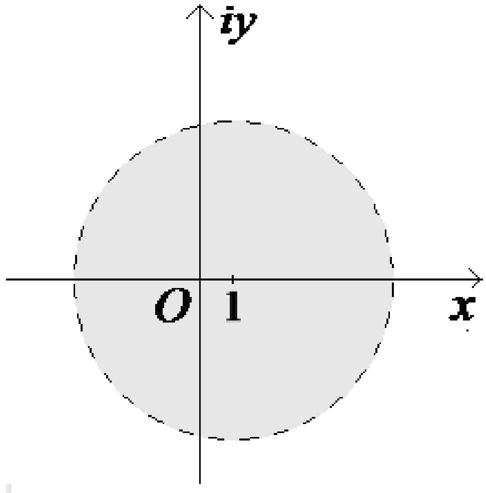

Рисунок 18

Как и в случае действительных степенных рядов верна теорема

Теорема. Внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать.

3.3 Экспонента, логарифмическая, тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного

3.3.1 Определение экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного

Как известно, функции действительного переменного e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ разлагаются в степенные ряды:

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots;$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots;$

4) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots;$

5) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

Определим данные функции, но уже комплексного переменного, с помощью приведенных степенных рядов, распространенных на всю комплексную плоскость.

Определение. По определению будем считать:

1) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots;$

2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots;$

3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots;$

4) $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots;$

5) $\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots;$

6) $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$;

7) $\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

Можно показать, что данные ряды сходятся на всей комплексной плоскости, поэтому функции, введенные таким образом, определены на все множестве комплексных чисел.

3.3.2 Связь экспоненты с тригонометрическими функциями

Рассмотрим

$$e^{iz} =$$

►Используем определение показательной функции.◄

$$= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{-z^2}{2!} + \frac{-iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \frac{-z^6}{6!} + \frac{-iz^7}{7!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \right) =$$

►Используем определение функций $\sin z$ и $\cos z$ комплексного переменного.◄

$$= \cos z + i \sin z.$$

Таким образом, получили равенство

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z . \qquad (5)$$

Из полученного равенства и тригонометрической формы записи комплексных чисел следует их показательная форма.

Заменив в равенстве (5) z на $(-z)$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z . \qquad (6)$$

Сложим равенства (5) и (6) и разделим результат на 2:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z , \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} . \ (7)$$

Вычтем из равенства (5) равенство (6) и разделим результат на $2i$:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z , \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} . \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) называются формулами Эйлера.

3.3.3 Связь экспоненты с гиперболическими функциями

Рассмотрим

$$e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots =$$

$$=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots+\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)=$$

►Используем определение функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ комплексного переменного.◄

$$=\operatorname{ch} z+i\operatorname{sh} z.$$

Таким образом, получили равенство

$$e^z=\operatorname{ch} z+i\operatorname{sh} z. \tag{9}$$

Заменив в равенстве (9) z на $(-z)$, получим

$$e^{-z}=\operatorname{ch} z-i\operatorname{sh} z. \tag{10}$$

Сложим равенства (9) и (10) и разделим результат на 2:

$$e^z+e^{-z}=2\operatorname{ch} z,\ \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}. \tag{11}$$

Вычтем из равенства (9) равенство (10) и разделим результат на 2:

$$e^z-e^{-z}=2\operatorname{sh} z,\ \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}. \tag{12}$$

3.3.4 Связь тригонометрических функций с гиперболическими

Из равенств (7), (8), (11) и (12) следуют соотношения

$$\operatorname{ch} iz=\cos z,\ \operatorname{sh} iz=i\sin z \tag{13}$$

Заменив в равенствах (13) z на iz, получим

$$\cos iz = \mathrm{ch} z\,,\ \sin iz = i\,\mathrm{sh}\, z\,. \qquad (14)$$

Из (13) следует:

1) $\mathrm{th}\, iz = \dfrac{\mathrm{sh}\, iz}{\mathrm{ch}\, iz} = \dfrac{i \sin z}{\cos z} = i\,\mathrm{tg}\, z$;

2) $\mathrm{cth}\, iz = \dfrac{\mathrm{ch}\, iz}{\mathrm{sh}\, iz} = \dfrac{\cos z}{i \sin z} = -i\,\mathrm{ctg}\, z$.

Из (14) следует:

1) $\mathrm{tg}\, iz = \dfrac{\sin iz}{\cos iz} = \dfrac{i\,\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z} = i\,\mathrm{th}\, z$;

2) $\mathrm{ctg}\, iz = \dfrac{\cos iz}{\sin iz} = \dfrac{\mathrm{ch}\, z}{i\,\mathrm{sh}\, z} = -i\,\mathrm{cth}\, z$.

3.3.5 Свойства экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного

Используя определения данных функций и свойства степенных рядов, можно доказать все свойства рассматриваемых функций.

В качестве примера докажем два свойства.

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ $(z_1, z_2 \in C)$.

Используя определение экспоненты, получим

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1^4}{4!} + \ldots\right)\left(1 + z + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \frac{z_2^4}{4!} + \ldots\right) =$$

►Так данные степенные ряды сходятся абсолютно, то их можно перемножать почленно.◄

$$=1+\left(z_1+z_2\right)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+z_1z_2+\frac{z_2^2}{2!}\right)+\left(\frac{z_1^3}{3!}+\frac{z_1^2}{2!}\cdot z_2+z_1\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}\right)+\ldots=$$

$$=1+\left(z_1+z_2\right)+\frac{1}{2!}\left(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2\right)+\frac{1}{3!}\left(z_1^3+3z_1^2z_2+3z_1z_2^2+z_2^3\right)+\ldots=$$

$$=1+\left(z_1+z_2\right)+\frac{1}{2!}\left(z_1+z_2\right)^2+\frac{1}{3!}\left(z_1+z_2\right)^3+\ldots=e^{z_1+z_2}.$$

2. $(\sin z)'=\cos z$.

Используя определение синуса комплексного переменного, получим

$$(\sin z)'=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right)'=$$

►Используем, что степенные ряды внутри круга сходимости можно дифференцировать.◄

$$=1-\frac{3z^2}{3!}+\frac{5z^4}{5!}-\frac{7z^6}{7!}+\ldots=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots=\cos z.$$

Свойства функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного почти полностью совпадают с соответствующими свойствами их действительных аналогов. Рассмотрим только те свойства данных функций комплексного переменного, которые отличаются от свойств их действительных аналогов.

Из равенства (5) следует, что функция e^z (а тогда и функции $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$) являются периодичными с $T = 2\pi i$.

Из равенств (14) имеем, что при $z = x \in R$ выполняется

$$\cos ix = \operatorname{ch} x,\ \sin ix = i \operatorname{sh} x.$$

Из полученных соотношений следует неограниченность функций $\sin z$, $\cos z$ на множестве комплексных чисел.

3.3.6 Выделение действительной и мнимой частей из функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$

1. $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Совершенно аналогично можно получить и нижеприведенные формулы.

2. $\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} z + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$.
3. $\cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y$.
4. $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$.
5. $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x - \operatorname{ch} 2y}$
6. $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$.
7. $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$.
8. $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} 2x + i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$.
9. $\operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{sh} 2x - i \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}$.

3.3.7 Функция $\operatorname{Ln} z$

Данные функции вводятся как обратные функции к функциям e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Получим формулу для нахождения натурального логарифма. Так как $w = \mathrm{Ln}\, z$, то тогда $z = |z| e^{i \arg z} = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$.

Отсюда следует, что $|z| = e^{u}$, а $v = \arg z + 2\pi n \ \ (n \in Z)$.

Тогда формула для нахождения натурального логарифма функции комплексного переменного будет иметь вид

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n).$$

Эта функция является бесконечнозначной. Для нее также верны равенства:

1) $\mathrm{Ln}\, z_1 \cdot z_2 = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$;

2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

С помощью экспоненты и натурального логарифма вводится общая степенная функция $w = z^{a} \ \ (a \in C)$.

$$z^{a} = e^{a \,\mathrm{Ln}\, z}.$$

3.4 Интеграл функции комплексного переменного

3.4.1 Определение интеграла функции комплексного переменного

Пусть L - кусочно-гладкая ориентированная кривая, на которой определена однозначная функция комплексного переменного $w = f(z)$ (рисунок 19).

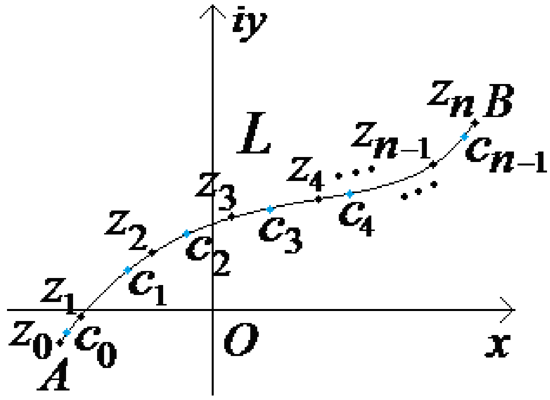

Рисунок 19

Разобьем кривую L точками z_1, $z_2,\ldots,$ z_{n-1} произвольным образом. Нумерация точек z_k начинается от начала кривой (точка $A = z_0$). Конец кривой (точка B) обозначим за z_n.

Введем обозначение, характеризующее «мелкость» разбиения кривой L

$$\lambda = \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \left|\Delta z_k\right|, \text{ где } \Delta z_k = z_{k+1} - z_k .$$

Выберем на каждой дуге точку c_k произвольным образом.

Интегралом функции комплексного переменного $w = f(z)$ по кусочно-гладкой ориентированной кривой L (обозначение: $\int\limits_L f(z)dz$) назовем предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(c_k)\Delta z_k .$$

Предполагается, что данный предел не зависит ни от способа разбиения кривой L на дуги, ни от выбора точек c_k.

Если L - кусочно-гладкая ориентированная кривая, а функция комплексного переменного $w = f(z)$ на этой кривой однозначна и непрерывна, то тогда существует интеграл $\int\limits_L f(z)dz$.

3.4.2 Нахождение интеграла функции комплексного переменного

Выведем формулу для нахождения интеграла функции комплексного переменного.

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{\infty} f(c_k)\Delta z_k =$$

►Пусть: $c_k = a_k + ib_k$, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta z_k = \Delta x_k + \Delta y_k$.◄

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(u(a_k,b_k) + iv(a_k,b_k)\right)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(u(a_k,b_k)\Delta x_k + iu(a_k,b_k)\Delta y_k + iv(a_k,b_k)\Delta x_k - v(a_k,b_k)\Delta y_k\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(u(a_k,b_k)\Delta x_k - v(a_k,b_k)\Delta y_k\right) + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(u(a_k,b_k)\Delta y_k + v(a_k,b_k)\Delta x_k\right) =$$

►Используя определение криволинейного интеграла второго рода, получим◄

$$= \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy =$$

►Пусть кривая L задана параметрически ($z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha,\beta]$), тогда используя формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода, получим◄

$$= \int_{\alpha}^{\beta}[u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]dt + i\int_{\alpha}^{\beta}[v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

Используя, что $z(t)=x(t)+iy(t)$, $f(z(t))=u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))$, полученную формулу можно записать более компактно

$$\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Таким образом, получили формулы для нахождения интеграла от функции комплексного переменного:

1) $\int_L f(z)dz=\int_L udx-vdy+i\int_L vdx+udy$;

2) $\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$;

3) $\int_L f(z)dz=\int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)]dt+$

$+i\int_\alpha^\beta [v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)]dt$.

Задача. Найти интеграл $\int_L \bar{z}dz$.

1) L - отрезок, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$;

2) L - дуга параболы, соединяющая точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.

Решение.

Сведем данный интеграл к двум криволинейным интегралам второго рода по формуле

$$\int_L f(z)dz=\int_L udx-vdy+i\int_L vdx+udy.$$

В данном случае имеем

$$f(z) = \bar{z} = x - iy\,,\ u(x, y) = x\,,\ v(x, y) = -y\,.$$

Тогда

$$\int_L \bar{z}dz = \int_L xdx + ydy + i\int_L -ydx + xdy\,.$$

1. Пусть интегрирование происходит по отрезку, соединяющему точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$. Тогда имеем, что $x \in [0,1]$, $y = x$, $dy = dx$.

$$\int_L \bar{z}dz = \int_0^1 (x + x)dx + i\int_0^1 (-x + x)dx = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1\,.$$

2. Пусть интегрирование происходит по дуге параболы, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$. Тогда имеем, что $x \in [0,1]$, $y = x^2$, $dy = \left(x^2\right)' dx = = 2xdx$.

$$\int_L \bar{z}dz = \int_0^1 \left(x + x^2 \cdot 2x\right)dx + i\int_0^1 \left(-x^2 + x \cdot 2x\right)dx = \int_0^1 \left(x + 2x^3\right)dx + i\int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1 + i\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{i}{3}\,.$$

Замечание. Данный пример показывает, что интеграл от функции комплексного переменного, вообще говоря, зависит от пути интегрирования, а не только от его начальной и конечной точки.

В дальнейшем будут рассматриваться интегралы и по замкнутым кривым. В данном случае в качестве начала и конца кривой можно взять любую ее точку, а направление обхода замкнутой кривой по умолчанию будем считать направление против часовой стрелки.

Задача. Найти интеграл $\int\limits_L \frac{dz}{z-z_0}$, где L - окружность $|z-z_0|=R$, проходимая против часовой стрелки.

Решение.

Используем формулу для нахождения интеграла от функции комплексного переменного

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Зададим окружность L в параметрическом виде $z(t)=x_0+R\cos t+i(y_0+R\sin t)$, где $t\in[0,2\pi]$, тогда:

1) $z'(t)=\left(x_0+R\cos t+i(y_0+R\sin t)\right)'=-R\sin t+iR\cos t$;

2) $f(z(t))=\dfrac{1}{z(t)-z_0}=\dfrac{1}{x_0+R\cos t+i(y_0+R\sin t)-(x_0+iy_0)}=$

$=\dfrac{1}{R\cos t+iR\sin t}$.

Тогда

$$\int\limits_L \frac{dz}{z-z_0}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-R\sin t+iR\cos t}{R\cos t+iR\sin t}dt=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-\sin t+i\cos t}{\cos t+i\sin t}dt=$$

►Чтобы избавиться от i в знаменателе умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю.◄

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(-\sin t+i\cos t)(\cos t-i\sin t)}{(\cos t+i\sin t)(\cos t-i\sin t)}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t\cos t+i\sin^2 t+i\cos^2 t-i^2\cos t\sin t}{\cos^2 t-(i\sin t)^2}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t\cos t+i(\sin^2 t+\cos^2 t)+\cos t\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}idt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i\,.$$

3.4.3 Свойства интеграла функции комплексного переменного

Так как интеграл функции комплексного переменного сводиться к двум криволинейным интегралам, то он имеет аналогичные свойства.

1. $\int\limits_L (f(z)\pm g(z))dz=\int\limits_L f(z)dz\pm\int\limits_L g(z)dz$.

2. $\int\limits_L cf(z)dz=c\int\limits_L f(z)dz$.

3. Пусть кривая L состоит из двух кривых L_1 и L_2, тогда

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_{L_1} f(z)dz+\int\limits_{L_2} f(z)dz\,.$$

4. Пусть L^- - та же кривая L, но проходимая в обратном направлении, тогда

$$\int\limits_{L^-} f(z)dz=-\int\limits_L f(z)dz\,.$$

5. Пусть на кривой L (длина кривой L равна l) выполняется неравенство $|f(z)|\le M$, тогда

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml .$$

6. Пусть:

1) функции комплексного переменного $f_k(z)$ $(k=1,2,...)$ непрерывны на кривой L;

2) функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ равномерно сходится на кривой L.

Тогда данный ряд можно почленно интегрировать

$$\int_L \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_L f_k(z)dz .$$

3.4.4 Замена переменной в интеграле от функции комплексного переменного

Замена переменной в интеграле от функции комплексного переменного производится совершенно аналогично замене переменной в определенном интеграле функции действительного переменного.

Пусть аналитическая функция $z=\varphi(w)$ отображает взаимно однозначно ориентированную кривую L_1 в комплексной плоскости w на кривую L в комплексной плоскости z, тогда

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(\varphi(w))\varphi'(w)dw .$$

Если интегрирование происходит по окружности $|z-z_0|=R$, то целесообразна замена $z-z_0=Re^{i\varphi}$. В этом случае интегрирование будет происходить по действительной переменной φ от 0 до 2π.

Задача. Найти интеграл $\int\limits_L \frac{dz}{(z-z_0)^n}$, где $n=2,3,4,\ldots$, а L - окружность $|z-z_0|=R$, проходимая против часовой стрелки.

Решение.

Введем замену $z-z_0=Re^{i\varphi}$. Интегрирование будет происходить по действительной переменной φ от 0 до 2π.

$$\int\limits_L \frac{dz}{(z-z_0)^n}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(z_0+Re^{i\varphi}\right)' d\varphi}{\left(Re^{i\varphi}\right)^n}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{\left(Re^{i\varphi}\right)^n}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{id\varphi}{\left(Re^{i\varphi}\right)^{n-1}}=$$

$$=\frac{i}{R^{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(e^{i\varphi}\right)^{n-1}}=\frac{i}{R^{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi=\frac{i}{R^{n-1}}\cdot\left.\frac{e^{i(1-n)\varphi}}{i(1-n)}\right|_0^{2\pi}=\left.\frac{e^{i(1-n)\varphi}}{R^{n-1}(1-n)}\right|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{e^{2\pi i(1-n)}}{R^{n-1}(1-n)}-\frac{1}{R^{n-1}(1-n)}=\frac{e^{2\pi i(1-n)}-1}{R^{n-1}(1-n)}=$$

►Используем формулу

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.◄$$

$$=\frac{\cos 2\pi(1-n)+i\sin 2\pi(1-n)-1}{R^{n-1}(1-n)}=0.$$

3.4.5 Интегральные теоремы Коши

Теорема Коши (односвязная область). Пусть:

1) функция $w=f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой односвязной области D;

2) L - замкнутая кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в D и ограничивающая внутри себя односвязную область D_1.

Тогда $\int\limits_L f(z)dz = 0$.

Доказательство.

Докажем данную теорему для случая, когда L, $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют всем условиям применения формулы Грина.

Сведем данный интеграл к двум криволинейным интегралам

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy =$$

►Используем формулу Грина

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).◄$$

$$= \iint\limits_{D_1} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy =$$

►Используя условия Коши-Римана, получаем, что в обоих интегралах подынтегральные функции тождественно равны 0.◄

$$= 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой односвязной области D, тогда внутри этой области интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ не зависит от пути интегрирования, то есть если имеются две кусочно-гладкие кривые L_1 и L_2, целиком лежащие внутри области D и имеющие общие начало и конец, то тогда

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz .$$

Доказательство.

Докажем данное следствие для случая, когда кривые L_1 и L_2 вместе образуют замкнутую кривую L, ограничивающую внутри себя односвязную область D_1 (рисунок 20).

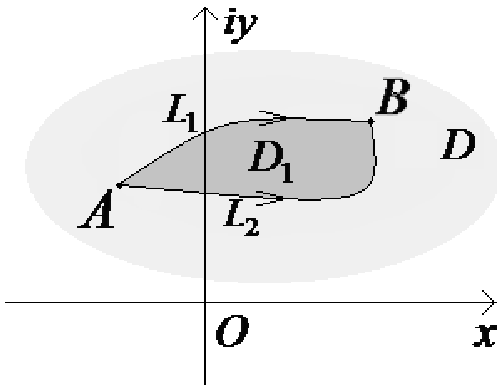

Рисунок 20

Тогда из доказанной теоремы следует:

$$\int_{L} f(z)dz = 0 , \ \int_{L_2} f(z)dz + \int_{L_1^-} f(z)dz = 0 , \ \int_{L_2} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz = 0 ,$$

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz .$$

Следствие доказано.

Замечание. Так как интегралы от однозначной и аналитической в некоторой односвязной области не зависят от пути интегрирования, а зависят только от начала и конца кривой, то интеграл $\int_{L} f(z)dz$ (z_1 - начало кривой L, а z_2 - ее конец) будем записывать в виде

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz\ .$$

Теорема Коши (многосвязная область). Пусть:

1) многосвязная область D_1 ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых;

2) функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в области D, содержащей область D_1 и ограничивающие ее кривые.

Тогда интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам. Все контуры проходятся против часовой стрелки.

3.4.6 Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в односвязной области D, тогда интеграл $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ в области D $(z_0 \in D)$ будет являться аналитической функцией и $F'(z) = f(z)$.

Таким образом, $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ является первообразной функции $f(z)$.

Доказательство.

Покажем, что в любой точке $z_1 \in D$ функция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ имеет производную, и эта производная равна $f(z_1)$. Пусть $z_1 + \Delta z \in D$. Рассмотрим выражение

$$\left|\frac{F(z_1+\Delta z)-F(z_1)}{\Delta z}-f(z_1)\right|=\left|\frac{\int\limits_{z_0}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi-\int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi}{\Delta z}-f(z_1)\right|=$$

$$=\left|\frac{\int\limits_{z_0}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi+\int\limits_{z_1}^{z_0} f(\xi)d\xi}{\Delta z}-f(z_1)\right|=\left|\frac{\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi}{\Delta z}-f(z_1)\right|=$$

$$=\left|\frac{\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi-f(z_1)\Delta z}{\Delta z}\right|=\left|\frac{\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi-f(z_1)\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} d\xi}{\Delta z}\right|=$$

$$=\left|\frac{\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(\xi)d\xi-\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(z_1)d\xi}{\Delta z}\right|=\left|\frac{\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} \left(f(\xi)-f(z_1)\right)d\xi}{\Delta z}\right|=$$

$$=\frac{\left|\int\limits_{z_1}^{z_1+\Delta z} \left(f(\xi)-f(z_1)\right)d\xi\right|}{|\Delta z|}<$$

►Так как функция $w=f(z)$ аналитична в точке z_1, то она и непрерывна в этой точке.

Тогда какое бы мы малое $\varepsilon > 0$ мы бы не взяли, то всегда можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех значений $\xi \in U_{\delta(\varepsilon)}(z_1)$ будет выполняться неравенство $|f(\xi) - f(z_1)| < \varepsilon$.

Пусть $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$. Так как данный интеграл не зависит от пути интегрирования, то будем считать, что интегрирование происходит по отрезку, соединяющему точку z_1 с точкой $z_1 + \Delta z$.

Используя свойство 5 интеграла от функции комплексного переменного, будем иметь◄

$$< \frac{\varepsilon|\Delta z|}{|\Delta z|} = \varepsilon .$$

Таким образом, мы показали, что какое бы мы малое значение $\varepsilon > 0$ мы бы не взяли, то всегда можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех значений $|\Delta z| < \delta(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{F(z_1 + \Delta z) - F(z_1)}{\Delta z} - f(z_1) \right| < \varepsilon .$$

Отсюда по определению предела функции в точке имеем, что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{F(z_1 + \Delta z) - F(z_1)}{\Delta z} - f(z_1) \right) = 0,\ F'(z_1) - f(z_1) = 0,\ F'(z_1) = f(z_1).$$

Таким образом, функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi) d\xi$ в каждой точке $z_1 \in D$ имеет производную $F'(z_1) = f(z_1)$.

Теорема доказана.

Замечание. Можно показать, что все первообразные функции $w = f(z)$ имеют вид $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C$.

Как и в случае определенного интеграла для интегралов от аналитических функций верна формула Ньютона-Лейбница.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в односвязной области D и $z_1, z_2 \in D$, а $F(z)$ - любая первообразная функции $f(z)$, тогда верна формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Доказательство.

Возьмем для подынтегральной функции любую первообразную

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi + C.$$

Тогда получим

$$F(z_1) = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi + C,\ F(z_2) = \int\limits_{z_0}^{z_2} f(\xi)d\xi + C.$$

Вычтя из второго равенств первое, будем иметь:

$$F(z_2) - F(z_1) = \int\limits_{z_0}^{z_2} f(\xi)d\xi - \int\limits_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi,\ F(z_2) - F(z_1) = \int\limits_{z_0}^{z_2} f(\xi)d\xi + \int\limits_{z_1}^{z_0} f(\xi)d\xi,$$

$$F(z_2)-F(z_1)=\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi\,,\ \int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2)-F(z_1),$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1).$$

Формула Ньютона-Лейбница доказана.

Применение данной формулы совершенно аналогично случаю определенного интеграла функции действительной переменной. Кроме того, если подынтегральная функция является аналитической, то для вычисления интеграла функции комплексного переменного применима формула интегрирования по частям. В качестве примеров рассмотрим следующие задачи.

Задача. Найти интеграл $\int_1^i zdz$.

Решение.

Так как подынтегральная функция является аналитической всюду на комплексной плоскости, то используем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1).$$

Получим

$$\int_1^i zdz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_1^i = \frac{i^2}{2}-\frac{1^2}{2} = -1.$$

Задача. Найти интеграл $\int_0^i z\cos zdz$.

Решение.

Так как подынтегральная функция является аналитической всюду на комплексной плоскости, то используем формулу интегрирования по частям

$$\int_{z_1}^{z_2} f dg = fg\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} g df .$$

$$\int_0^i z\cos z dz = \begin{bmatrix} f = z, & dg = \cos z dz, \\ df = dz, & g = \sin z. \end{bmatrix} = z\sin z\Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = i\sin i - 0\sin 0 -$$

$$-\left(-\cos z\right)\Big|_0^i = i\sin i + \cos z\Big|_0^i = i\sin i + \cos i - \cos 0 = i\sin i + \cos i - 1 =$$

►Используем формулы $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\, z$, $\cos iz = \mathrm{ch}\, z$.◄

$$= i\cdot i\,\mathrm{sh}1 + \mathrm{ch}1 - 1 = \mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1 - 1 =$$

►Используем формулы $\mathrm{sh}\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}\, z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.◄

$$= \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - \frac{e^1 - e^{-1}}{2} - 1 = \frac{1}{e} - 1 .$$

3.4.7 Интегральная формула Коши

Теорема. Пусть:

1) функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой односвязной области D;

2) L - замкнутая кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в D и ограничивающая внутри себя односвязную область D_1.

Тогда для любой точки z_0, лежащей внутри замкнутой кривой L верна интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Направление интегрирования по кривой L - против часовой стрелки.

Решение.

Опишем вокруг точки z_0 окружность ω настолько малого радиуса r, чтобы она целиком лежала внутри кривой L (рисунок 21).

Пусть D_1 - это область, ограниченная кривой L и окружностью ω. Так как в области D_1 функция $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ является аналитической, то мы находимся в условиях интегральной теоремы Коши для многосвязной области. Тогда верно равенство

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \int\limits_\omega \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \qquad (15)$$

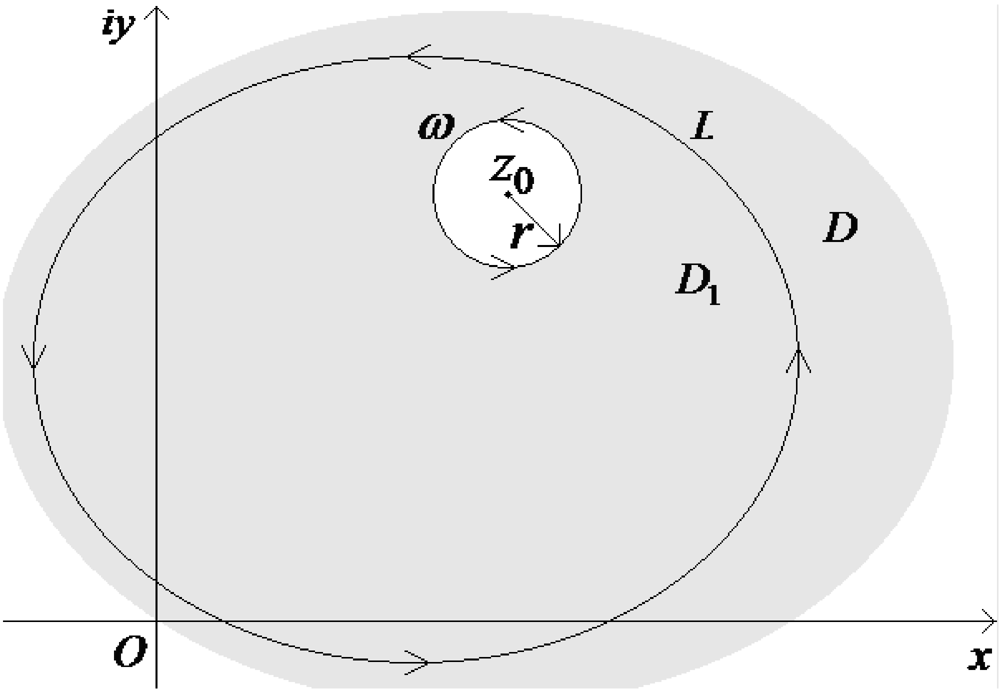

Рисунок 21

Существование производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 влечет непрерывность этой функции в данной точке. Тогда, взяв достаточно малый радиус r окружности ω, можно добиться, чтобы значения функции $w = f(z)$ на этой окружности как угодно мало отличались от $f(z_0)$. Отсюда

$$\int_{\omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \to \int_{\omega} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$$

при $r \to 0$.

Осуществив предельный переход при $r \to 0$ в равенстве (15), получим

$$\int_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\omega} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz, \ \int_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\omega} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Последний интеграл (см. задачу из п. 3.4.2) равен $2\pi i$. Таким образом, имеем

$$\int_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0), \ f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Теорема доказана.

С помощью интегральной формулы Коши можно находить некоторые интегралы функции комплексного переменного.

Задача. Найти интеграл $\int_{L} \frac{dz}{z^2 + z - 2}$, где L - окружность $|z - 1| = 1$.

Решение.

Подынтегральная функция аналитична всюду на комплексной плоскости кроме точек $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$, в которых знаменатель обращается в 0. Так как внутрь окружности L попадает только одна точка $z_2 = 1$ (рисунок 21), то для нахождения интеграла применим интегральную формулу Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

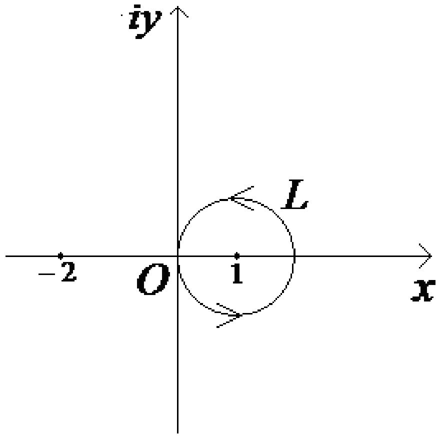

Рисунок 22

Из данной формулы следует равенство

$$\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

Получим

$$\int_L \frac{dz}{z^2+z-2}=\int_L \frac{dz}{(z-1)(z+2)}=\int_L \frac{\frac{1}{z+2}}{z-1}dz=$$

►Так как функция $f(z)=\dfrac{1}{z+2}$ аналитична в области содержащей окружность L и ее внутренность, то применим интегральную формулу Коши.◄

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{1}{z+2}\right|_{z=1}=2\pi i\cdot\frac{1}{1+2}=\frac{2\pi i}{3}.$$

Определение. Пусть L - разомкнутая или замкнутая кусочно-гладкая кривая, а функция $w=f(z)$ на ней является однозначной и непрерывной, тогда интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad (z\notin L)$$

будем называть интегралом типа Коши.

Можно показать, что интеграл типа Коши в любой точке $z \in C \setminus L$ имеет производную любого порядка, которые можно найти, дифференцируя интеграл по параметру z

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (16)$$

Определение. Пусть:

1) функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в некоторой односвязной области D;

2) L - замкнутая кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в D и ограничивающая внутри себя односвязную область D_1.

Тогда интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (z \notin L)$$

будем называть интегралом Коши.

Из интегральной теоремы Коши для односвязной области и интегральной формулы Коши следует, что интеграл Коши равен

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z_0 \in D_1; \\ 0, z_0 \notin D_1 \cup L; \\ \text{не определен}, z_0 \in L. \end{cases}$$

Так как произвольная аналитическая функция представима интегралом Коши, который как частный случай интеграла типа Коши, имеет производные всех порядков, то тогда аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой.

3.5 Некоторые свойства аналитических функций

1. Для того чтобы функция $w = f(z)$ аналитична в области D, необходимо и достаточно чтобы в окрестности любой точки $z_0 \in D$ данная функция была представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

2. Для того чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в некоторой области D, необходимо и достаточно чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являлись дважды дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и условиям Коши-Римана.

3. Аналитическая функция имеет производные любого порядка.

4. **Принцип максимума.** Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в замкнутой области D (это означает, что она аналитична в некоторой открытой области, содержащей область D), тогда максимум $|f(z)|$ будет достигаться на границе области D.

5. **Теорема Лиувилля.** Если функция аналитична на всей комплексной плоскости и ограничена на ней по модулю, то она является константой.

6. **Теорема единственности.** Пусть две функции аналитичны в области D и совпадают в некоторой ее подобласти, тогда они совпадают и во всей области D.

Часть из данных свойств будут нами в дальнейшем доказаны.

3.6 Ряд Тейлора

В данном пункте покажем, что любая функция $w = f(z)$ аналитическая в области D, в окрестности любой точки $z_0 \in D$ представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D и точка $z_0 \in D$. Тогда в круге $K : |z - z_0| < R$ (R - расстояние от точки z_0 до границы ∂D) функция $w = f(z)$ представима рядом Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

Числа $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами ряда Тейлора.

Доказательство.

Пусть:

1) z - произвольная точка круга K;

2) L - окружность с центром в точке z_0 и радиусом $r < R$, содержащая внутри себя точку z (рисунок 23).

Тогда для точки z верна интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Рассмотрим и преобразуем дробь

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$$

►Так как интегрирование происходит по окружности L, то всегда $\xi \in L$ и $|\xi - z_0| = r$. Кроме того, точка z находится внутри окружности L, и тогда $|z - z_0| < r$.

Отсюда следует неравенство

$$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < \frac{r}{r} = 1.$$

Полученное неравенство позволяет использовать для дроби

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \ldots \quad (|w| < 1).$$

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^3 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^4 + \ldots \text{◄}$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^3 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^4 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} + \frac{(z - z_0)^3}{(\xi - z_0)^4} + \frac{(z - z_0)^4}{(\xi - z_0)^5} + \ldots$$

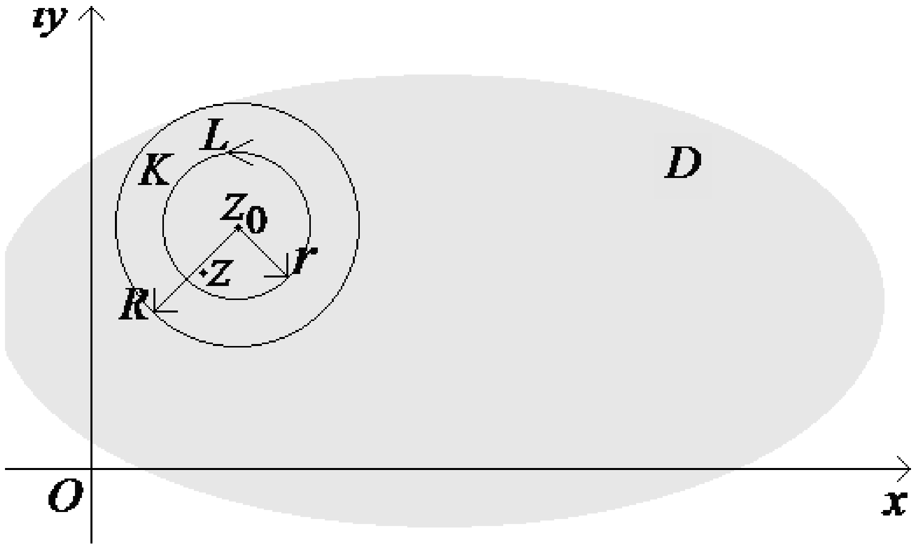

Рисунок 23

Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\xi)\frac{1}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\xi)\left(\frac{1}{\xi-z_0}+\frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(z-z_0)^2}{(\xi-z_0)^3}+\frac{(z-z_0)^3}{(\xi-z_0)^4}+\frac{(z-z_0)^4}{(\xi-z_0)^5}+\ldots\right)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}+\frac{f(\xi)(z-z_0)}{(\xi-z_0)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{f(\xi)(z-z_0)^2}{(\xi-z_0)^3}+\frac{f(\xi)(z-z_0)^3}{(\xi-z_0)^4}+\frac{f(\xi)(z-z_0)^4}{(\xi-z_0)^5}+\ldots\right)d\xi=$$

►Рассмотрим абсолютные величины членов функционального ряда, стоящего под знаком интеграла

$$\left|\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z)^{k+1}}\right|.$$

Так как функция $f(z)$ является аналитической в D, то она непрерывна на окружности L. Отсюда следует ограниченность ее модуля на L

$$|f(\xi)| \le M .$$

Используя, что $|\xi - z_0| = r$, $|z - z_0| < r$, получаем

$$\left| \frac{f(\xi)(z - z_0)^k}{(\xi - z)^{k+1}} \right| < \frac{M(z - z_0)^k}{r^{k+1}} = \frac{M}{r} \cdot \left(\frac{z - z_0}{r} \right)^k .$$

В правой части равенства находятся члены бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Так как они образуют сходящийся ряд, то по признаку Вейерштрасса имеем равномерную сходимость рассматриваемого функционального ряда.

Таким образом, данный ряд можно почленно интегрировать.◄

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \int_L \frac{f(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \int_L \frac{f(\xi)(z - z_0)^2}{(\xi - z_0)^3} d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_L \frac{f(\xi)(z - z_0)^3}{(\xi - z_0)^4} d\xi + \int_L \frac{f(\xi)(z - z_0)^4}{(\xi - z_0)^5} d\xi + \ldots \right) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \right.$$

$$+ (z - z_0) \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + (z - z_0)^2 \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} d\xi + (z - z_0)^3 \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^4} d\xi +$$

$$\left. + (z - z_0)^4 \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^5} d\xi + \ldots \right) =$$

►Из равенства (16) следует

$$\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \qquad (17)◄$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i f(z_0)+(z-z_0)\frac{2\pi i}{1!}f'(z_0)+(z-z_0)^2\frac{2\pi i}{2!}f''(z_0)+\right.$$

$$\left.(z-z_0)^3\frac{2\pi i}{3!}f'''(z_0)+\ldots\right)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+$$

$$+\frac{f'''(z_0)}{n!}(z-z_0)^3+\ldots$$

Теорема доказана.

Замечание. Из равенства (17) следует

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi .$$

Тогда коэффициенты ряда Тейлора $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ можно найти по формуле

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi . \qquad (18)$$

С помощью данной формулы можно оценить коэффициенты ряда Тейлора.

Теорема. Для коэффициентов ряда Тейлора справедлива оценка

$$|c_n|\le\frac{M_L}{r^n}.\ (n=0,1,2,3,\ldots)$$

Здесь $M_L=\max\limits_{z\in L}|f(z)|$.

Доказательство.

Из равенства (18) имеем

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{n+1}}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{|f(\xi)|}{r^{n+1}}d\xi = \frac{1}{2\pi r^{n+1}}\int\limits_L |f(\xi)| d\xi \le$$

►Используем 5 свойство интеграла функции комплексного переменного (пункт 3.4.3).◄

$$\le \frac{1}{2\pi r^{n+1}} M_L l = \frac{1}{2\pi r^{n+1}} M_L \cdot 2\pi r = \frac{M_L}{r^n}.$$

Теорема доказана.

С помощью полученной оценки для коэффициентов ряда Тейлора легко доказывается следующая теорема.

Теорема Лиувилля. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична и ограничена на всей комплексной плоскости. Тогда данная функция является константой.

Доказательство.

Так как функция $w = f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, то ее можно разложить в ряд Тейлора, например при $z_0 = 0$, и радиус сходимости этого ряда будет равен $+\infty$.

Из предыдущей теоремы имеем оценку для коэффициентов полученного ряда Тейлора

$$|c_n| \le \frac{M_L}{r^n}.$$

Так как функция $w = f(z)$ ограничена на всей комплексной плоскости, то тогда существует такое $M > 0$, что для всех $z \in C$ выполняется неравенство $|f(z)| \le M$. Отсюда следует неравенство

$$\left|c_n\right| \le \frac{M_L}{r^n} \le \frac{M}{r^n}.$$

Перейдя в неравенстве $\left|c_n\right| \le \frac{M}{r^n}$ к пределу при $r \to +\infty$, получим, что $c_n = 0$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

Тогда получаем

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots = c_0.$$

Теорема доказана.

Используя теорему Лиувилля можно доказать основную теорему алгебры.

Основная теорема алгебры. Алгебраическое уравнение n-ой степени с комплексными коэффициентами

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

всегда имеет хотя бы один комплексный корень.

Доказательство.

Предположим противное, то есть левая часть данного уравнения никогда не обращается в 0. Отсюда следует, что функция

$$f(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

аналитична на всей комплексной плоскости.

Так как

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = 0,$$

то можно указать такое значение R, что при всех $|z| > R$ выполняется неравенство $\left|f(z)\right| < 1$.

Из того, что функция $f(z)$ является аналитической, следует ее непрерывность. Тогда в замкнутом круге $|z| \le R$ она будет являться ограниченной, то есть при $|z| \le R$ будет выполняться неравенство $|f(z)| \le M$.

Получили, что на всей комплексной плоскости выполняется неравенство

$$|f(z)| < \max\{1, M\}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ на всей комплексной плоскости ограниченна и по теореме Лиувилля постоянна.

Получили противоречие. Теорема доказана.

3.7 Ряд Лорана

Определение. Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в области D за исключением отдельных точек. Тогда эти точки называются особыми.

Нам уже известно, что если в точке z_0 функция $w = f(z)$ является аналитической, то в некотором круге с центром в точке z_0 функция $w = f(z)$ представляется рядом Тейлора.

Возникает вопрос о возможности представления степенным рядом (по степеням $z - z_0$) функции $w = f(z)$, если точка z_0 является особой.

Ответ на данный вопрос дает теорема Лорана.

Теорема Лорана. Пусть функция $w = f(z)$ является однозначной и аналитической в кольце $r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R \le +\infty)$. Тогда она однозначно представляется рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Коэффициенты ряда Лорана могут быть найдены по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi ,$$

где L - любая окружность $|z - z_0| = \rho$ ($r < \rho < R$), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Сходимость ряда Лорана в кольце $r < r_1 \le |z - z_0| \le R_1 < R$ абсолютная и равномерная.

Замечание. Из интегральной теоремы Коши для многосвязной области следует, что окружность $|z - z_0| = \rho$ ($r < \rho < R$) можно заменить любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, содержащей в себе окружность $|z - z_0| = r$ и находящейся внутри окружности $|z - z_0| = R$.

Определение. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ называется главной частью ряда Лорана.

Задача. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

в окрестности точки $z_0 = 0$ в кольцах 1) $0 < |z| < 1$, 2) $1 < |z| < +\infty$.

Решение.

Представим данную функцию в виде суммы простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

1. Пусть $0 < |z| < 1$. Тогда используя известное разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + ... \quad (|z| < 1),$$

получим

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-z^3-z^4-\ldots$$

2. Пусть $1<|z|<+\infty$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}=$$

►Так как $1<|z|<+\infty$, то $\left|\frac{1}{z}\right|<1$. Применив разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+u^4+\ldots\quad (|u|<1),$$

получим

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\left(\frac{1}{z}\right)^4+\ldots$$ ◄

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right)-\frac{1}{z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots-\frac{1}{z}=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots$$

3.8 Виды изолированных особых точек

Определение. Если в некоторой окрестности особой точки нет других особых точек, то такую точку будем называть изолированной особой точкой.

Определение. Изолированная особая точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $w = f(z)$, если ее ряд Лорана не имеет главной части.

Если z_0 - устранимая особая точка, то предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ равен конечному числу.

Пример. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ имеет особую точку $z_0 = 0$.

Разложим данную функцию в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Так как полученный ряд Лорана не имеет главной части, то $z_0 = 0$ - устранимая особая точка функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Определение. Изолированная особая точка z_0 называется полюсом k-ого порядка функции $w = f(z)$, если ее ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_{-k} \neq 0).$$

Полюс первого порядка называется простым полюсом.

Если z_0 - полюс k-ого порядка, то предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Если z_0 - полюс k-ого порядка функции $w = f(z)$, то существует представление

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k},$$

где $\varphi(z)=c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+c_{-k+2}(z-z_0)^2+\ldots$ - аналитическая функция в точке z_0, причем $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ имеет особую точку $z_0=0$.

Так как

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}+\ldots-1}=\frac{1}{z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{z\left(1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^3}{4!}+\ldots\right)}=\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^3}{4!}+\ldots}}{z}=\frac{\varphi(z)}{z}.$$

Функция $\varphi(z)=\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^3}{4!}+\ldots}$ является аналитической функцией в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=1\neq 0$.

Таким образом, точка $z_0=0$ является простым полюсом функции $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$.

Определение. Изолированная особая точка z_0 называется существенно особой точкой функции $w=f(z)$, если главная часть ее ряда Лорана содержит бесконечно много членов.

Если z_0 - существенно особая точка, то предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Пример. Функция $f(z)=e^{1/z}$ имеет особую точку $z_0=0$.

Используя определение функции $w=e^z$ (пункт 3.3.1), разложим данную функцию в ряд Лорана

$$f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\left(\frac{1}{z}\right)^4+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots$$

Так как полученный ряд Лорана имеет главную часть, состоящую из бесконечного числа членов, то $z_0=0$ - существенно особая точка функции $f(z)=e^{1/z}$.

3.9 Вычеты и их применение

3.9.1 Нахождение вычетов

Определение. Пусть функция $w=f(z)$ аналитична в кольце $0<|z-z_0|<R$. Вычетом функции $w=f(z)$ в точке z_0 будем называть коэффициент c_{-1} из разложения данной функции в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

в кольце $0<|z-z_0|<R$.

Обозначение: $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$.

1. Пусть z_0 - устранимая особая точка функции $w=f(z)$ или эта функция аналитична в точке z_0. Так как функция $w=f(z)$ в окрестности этой точки представима рядом Тейлора (рядом Лорана без главной части), то $c_{-1}=0$. В этих случаях имеем

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=0.$$

2. Пусть z_0 - простой полюс функции $w = f(z)$. В этом случае разложение данной функции в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z)^2 + \ldots$$

Умножим обе части равенства на $(z - z_0)$

$$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z)^3 + \ldots$$

Перейдем к пределу при $z \to z_0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = c_{-1}.$$

Отсюда

$$\operatorname*{res}_{z = z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

Задача. Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=1} \frac{1}{z^2 + z - 2}$.

Решение.

В данном случае комплексное число $z = 1$ является простым полюсом функции $f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}$, тогда применим формулу

$$\operatorname*{res}_{z = z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

Получим

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{1}{z^2 + z - 2} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^2 + z - 2}(z - 1) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-1)(z+2)}(z - 1) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z + 2} = \frac{1}{3}.$$

Пусть функция $w = f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Здесь:

1) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0;

2) $\varphi(z_0)\neq 0$;

3) $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$

В данном случае точка z_0 является простым полюсом функции $w=f(z)$. Ее вычет в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)}{z-z_0}}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Получили, что

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Задача. Найти вычет $\operatorname*{res}\limits_{z=1}\dfrac{1}{z^2+z-2}$.

Решение.

В данном случае комплексное число $z=1$ является простым полюсом функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$, причем данная функция представима в виде

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)=1$, $\psi(z)=z^2+z-2$ - аналитические функции. Тогда используем формулу

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Получим

$$\operatorname*{res}_{z=1}\frac{1}{z^2+z-2}=\left.\frac{1}{\left(z^2+z-2\right)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{1}{2z+1}\right|_{z=1}=\frac{1}{2\cdot1+1}=\frac{1}{3}.$$

3. Пусть z_0 - полюс кратности k функции $w=f(z)$. В этом случае разложение данной функции в ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z)^2+\ldots$$

Умножим обе части равенства на $(z-z_0)^k$

$$f(z)(z-z_0)^k=c_{-k}+c_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{k-1}+c_0(z-z_0)^k+c_1(z-z_0)^{k+1}+\ldots$$

Продифференцируем обе части полученного равенства $k-1$ раз

$$\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}=c_{-1}(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1+c_0k(k-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2(z-z_0)+$$

$$+c_1(k+1)k\cdot\ldots\cdot4\cdot3(z-z_0)^2+\ldots$$

Перейдем к пределу при $z\to z_0$

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)} = c_{-1}(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (k-1)!\,c_{-1}.$$

Отсюда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}.$$

Задача. Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$.

Решение.

В данном случае для функции $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ комплексное число $z=i$ является полюсом второго порядка, тогда применим формулу

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}.$$

Получим

$$\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}(z-i)^2\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}(z-i)^2\right)' =$$

$$=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i}(-2)(z+i)^{-3} = (-2)(i+i)^{-3} = -\frac{1}{4}i.$$

4. Пусть z_0 - существенно особая точка функции $w=f(z)$. В этом случае удобнее находить вычет из разложения данной функции в ряд Лорана.

Задача. Найти вычет $\operatorname*{res}_{z=0}\sin\frac{1}{z}$.

Решение.

Используя определение функции $\sin z$, разложим функцию $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ в ряд Лорана в кольце $0 < |z| < +\infty$.

Получим

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{z}\right)^7 + \ldots = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z} + \ldots$$

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=0} \sin\frac{1}{z} = c_{-1} = 1.$$

3.9.2 Применение вычетов для нахождения интегралов

Применение вычетов для нахождения интегралов основывается на следующих теоремах.

Теорема. Пусть функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$, L - кусочно-гладкая кривая, находящаяся в данном кольце и содержащая внутри себя точку z_0. Тогда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Доказательство.

Так как функция $w = f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$, то она согласно теореме Лорана представима в этом кольце рядом Лорана. Учитывая, что L - кусочно-гладкая кривая, находящаяся в данном кольце и содержащая внутри себя точку z_0, коэффициенты ряда Лорана можно найти по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Для $n = -1$ имеем

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\xi)d\xi .$$

Тогда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi c_{-1}, \quad \int_L f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Теорема доказана.

Теорема. Пусть:

1) функция $w = f(z)$ однозначна и аналитична в односвязной области D за исключением конечного числа особых точек;

2) L - кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в области D и не проходящая через особые точки;

3) $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n$ - особые точки, находящиеся внутри кривой L.

Тогда

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство.

Опишем вокруг особых точек $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_n$ окружности $L_1,\ L_2,\ldots,\ L_n$ настолько малого радиуса, чтобы они не пересекались и лежали внутри кривой L (рисунок 24).

Применив теорему Коши для многосвязной области, получим

$$\int_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz =$$

►Из предыдущей теоремы имеем

$$\int_{L_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).◄$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Теорема доказана.

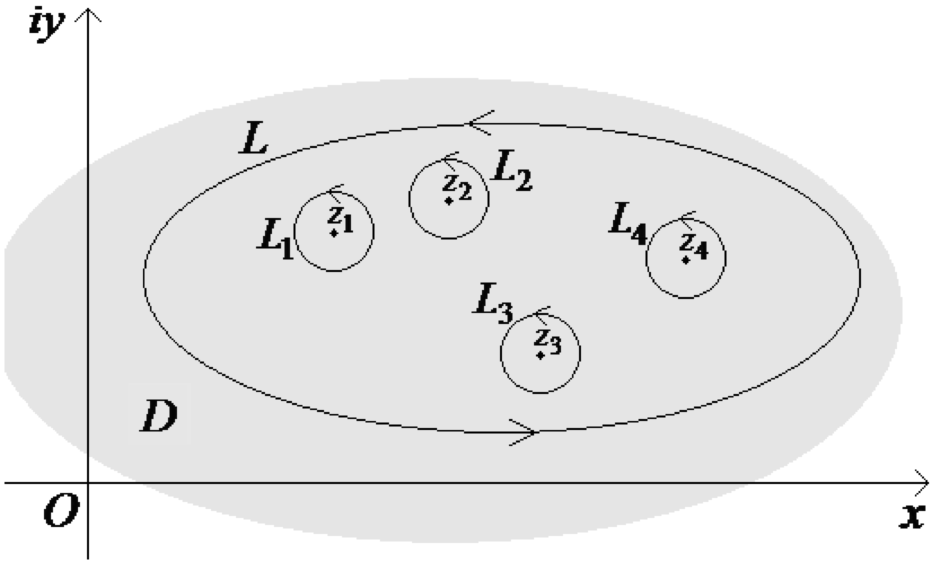

Рисунок 24

Рассмотрим применение вычетов для нахождения интегралов на конкретных примерах.

Задача. Найти интеграл $\int\limits_L \frac{e^z}{z^2+1}dz$, где L - окружность $|z|=2$.

Решение.

Подынтегральная функция $f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}$ является аналитической всюду на комплексной плоскости за исключением двух простых полюсов $z_{1,2}=\pm i$. Оба они находятся внутри окружности L. Тогда

$$\int\limits_L \frac{e^z}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-i}\frac{e^z}{z^2+1}+\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^z}{z^2+1}\right) = 2\pi i\left(\left.\frac{e^z}{\left(z^2+1\right)'}\right|_{z=-i}+\left.\frac{e^z}{\left(z^2+1\right)'}\right|_{z=i}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=-i} + \left.\frac{e^z}{2z}\right|_{z=i}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{-i}}{2(-i)} + \frac{e^i}{2\cdot i}\right) = \pi\left(e^i - e^{-i}\right) =$$

►Используем формулу

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,.◄$$

$$= \pi\left(\cos 1 + i\sin 1 - (\cos 1 - i\sin 1)\right) = 2\pi i\sin 1\,.$$

С помощью понятия вычета могут быть вычислены некоторые собственные и несобственные интегралы функции действительного переменного.

Задача. Найти определенный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos x}\,.$$

Решение.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} =$$

►Введем подстановку $z = e^{it}$ $\left(t \in [0,2\pi]\right)$. Тогда получим:

1) $dz = \left(e^{it}\right)' dt = ie^{it}dt = izdt$, $dt = \dfrac{dz}{iz}$;◄

2) $\dfrac{1}{2+\cos t} = \dfrac{1}{2+\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}} = \dfrac{1}{2+\dfrac{z+z^{-1}}{2}} = \dfrac{2}{4+z+z^{-1}}$;

3) когда действительная переменная t пробегает отрезок $[0,2\pi]$, комплексная переменная $z = e^{it}$ опишет против часовой стрелки окружность $|z| = 1$.

$$= \int_{|z|=1} \frac{2}{4+z+z^{-1}}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1} =$$

►Подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+1}$ является аналитической всюду на комплексной плоскости за исключением двух простых полюсов $z_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$. Внутри окружности $|z|=1$ находится только простой полюс $z_1=-2+\sqrt{3}$. Тогда◄

$$=\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\underset{z=-2+\sqrt{3}}{\operatorname{res}}\frac{1}{z^2+4z+1}=4\pi\cdot\left.\frac{1}{\left(z^2+4z+1\right)'}\right|_{z=-2+\sqrt{3}}=$$

$$=4\pi\cdot\left.\frac{1}{2z+4}\right|_{z=-2+\sqrt{3}}=2\pi\cdot\left.\frac{1}{z+2}\right|_{z=-2+\sqrt{3}}=2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

Для нахождения несобственных интегралов полезны следующие теоремы.

Теорема. Пусть:

1) $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - дробно-рациональная функция;

2) причем степени многочленов, находящихся в числителе и знаменателе, удовлетворяют неравенству $n\ge m+2$;

3) для всех $x\in R$ выполняется неравенство $Q(x)\neq 0$;

4) $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_r$ - полюса функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{r}\underset{z=z_k}{\operatorname{res}}f(z_k).$$

Теорема. Пусть:

1) $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - дробно-рациональная функция;

2) $n>m$;

3) для всех $x\in R$ выполняется неравенство $Q(x)\neq 0$;

4) $z_1,\ z_2,\ldots,\ z_r$ - полюса функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости;

5) $\lambda > 0$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re} 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) e^{i\lambda z},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im} 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) e^{i\lambda z}.$$

Задача. Найти несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx$.

Решение. В данном случае:

1) подынтегральная функция является дробно-рациональной, причем степень числителя $(m=1)$ и степень знаменателя $(n=4)$ удовлетворяют неравенству $n \ge m+2$;

2) знаменатель не обращается в ноль на действительной оси.

Тогда найдем искомый интеграл по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z_k).$$

Здесь z_1, $z_2, \ldots$, z_r - полюса функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Подынтегральная функция имеет два полюса $z_{1,2} = \pm i$, причем выше действительной оси находится только полюс второго порядка $z_1 = i$.

Получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{z+1}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to i} \left(\frac{z+1}{(z^2+1)^2} (z-i)^2 \right)' =$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{z+1}{((z-i)(z+i))^2}(z-i)^2\right)' = 2\pi i\lim_{z\to i}\left(\frac{z+1}{(z+i)^2}\right)' =$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{(z+i)^2-(z+1)2(z+i)}{(z+i)^4}=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{z+i-2(z+1)}{(z+i)^3}=$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}\frac{-z-2+i}{(z+i)^3}=2\pi i\frac{-i-2+i}{(i+i)^3}=2\pi i\frac{-2}{8(-i)}=\frac{\pi}{2}.$$

Задача. Найти несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$.

Решение. В данном случае:

1) подынтегральная функция имеет вид $f(x)\cos\lambda x$, где $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, причем степень числителя ($m=0$) меньше степени знаменателя ($n=2$);

2) знаменатель не обращается в ноль на действительной оси.

Тогда найдем искомый интеграл по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx=\operatorname{Re}2\pi i\sum_{k=1}^{r}\operatorname*{res}_{z=z_k}f(z)e^{i\lambda z}.$$

Здесь z_1, $z_2,\ldots,$ z_r - полюса функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Подынтегральная функция имеет два полюса $z_{1,2}=\pm i$, причем выше действительной оси находится только простой полюс $z_1=i$.

Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}dx=\operatorname{Re}2\pi i\operatorname*{res}_{z=i}\frac{1}{z^2+1}e^{2iz}=\operatorname{Re}2\pi i\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^{2iz}}{z^2+1}=$$

$$= \operatorname{Re} 2\pi i \frac{e^{2iz}}{\left(z^2+1\right)'}\Bigg|_{z=i} = \operatorname{Re} 2\pi i \frac{e^{2iz}}{2z}\Bigg|_{z=i} = \operatorname{Re} 2\pi i \frac{e^{2i^2}}{2i} = \operatorname{Re} \pi e^{-2} = \frac{\pi}{e^2}.$$

4 Элементы операционного исчисления

Операционное исчисление рассматривает методы решения некоторых задач из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, интегральных уравнений и т.д., основанные на использовании прямого и обратного преобразований Лапласа.

Основные этапы использования операционного исчисления:

1) по данной задаче с помощью преобразования Лапласа строится более простая задача-изображение исходной задачи-оригинала;

2) получение решения задачи-изображения;

3) с помощью обратного преобразования Лапласа получение по решению задачи-изображения искомое решение задачи-оригинала.

4.1 Преобразование Лапласа и его свойства

Определение. Преобразованием Лапласа будем называть преобразование, ставящее в соответствие действительной функции $f(t)$ функцию комплексного переменного

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Очевидно, что данное преобразование применимо не к любым функциям $f(t)$. Введем понятие функции-оригинала, для которой заведомо существует функция $F(p)$. Последнюю будем называть функцией-изображением (изображением).

Определение. Функция действительного переменного $f(t)$ называется функцией-оригиналом (оригиналом), если она удовлетворяет требованиям:

1) функция $f(t)$ определена на всей действительной оси, причем при $t<0$ она тождественно равна 0;

2) на любом отрезке $[a,b]\subset[0,+\infty)$ функция $f(t)$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

3) при $t\to+\infty$ функция $f(t)$ имеет не более чем экспоненциальный порядок роста, то есть существуют такие постоянные $M>0$ и $s>0$, что при всех $t\geq 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)|\leq Me^{st}.$$

Определение. Точная нижняя грань s_0 всех значений s, для которых для функции $f(t)$ выполняется последнее неравенство, называется показателем степени роста функции $f(t)$.

Соответствие оригинала и его изображения будем обозначать следующим образом

$$f(t)\risingdotseq F(p),\ F(p)\fallingdotseq f(t) \text{ или } L[f(t)]=F(p),\ L^{-1}[F(p)]=f(t).$$

Можно показать, что всегда $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re}p\to+\infty$.

Используя определение преобразования Лапласа можно получить его свойства и изображения основных элементарных функций. В качестве примеров докажем теорему о дифференцировании оригинала и получим изображение функции $f(t)=e^{at}$, а остальные свойства и изображения остальных наиболее часто используемых функций приведем без доказательства.

Теорема о дифференцировании оригинала. Пусть функции $f(t)$ и $f'(t)$ непрерывны на промежутке $[0,+\infty)$, тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \ (\operatorname{Re} p > s_0).$$

Здесь s_0 наибольший из показателей степени роста функций $f(t)$ и $f'(t)$.

Доказательство.

Используя определение преобразования Лапласа, получим

$$f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt =$$

►Применим интегрирование по частям

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

$u = e^{-pt}$	$dv = f'(t)dt$
$du = -pe^{-pt}dt$	$v = f(t)$

◄

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-p)e^{-pt}dt = \lim_{t \to +\infty} f(t)e^{-pt} - f(0)e^{-pt} +$$

$$+ p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

►Так как $\operatorname{Re} p > s_0$, то существует такое значение $s > 0$, что

$$s_0 < s < \operatorname{Re} p.$$

Рассмотрим

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| = |f(t)| \cdot \left|e^{-pt}\right| \le Me^{st}\left|e^{-pt}\right| = M\left|e^{st}e^{-pt}\right| = M\left|e^{(s-p)t}\right|.$$

Так как $s < \operatorname{Re} p$, то тогда $\left|f(t)e^{-pt}\right| \to 0$ при $t \to +\infty$.◄

$$= -f(0) + p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p).$$

Теорема доказана.

Найдем изображение функции $f(t) = e^{at}$.

Используя определение преобразования Лапласа, получим

$$e^{at} \;\dot{=}\; \int\limits_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}dt = \left.\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)}\right|_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} - \frac{1}{-(p-a)} =$$

►Пусть $\operatorname{Re} p > a$, тогда предел будет равен 0.◄

$$= -\frac{1}{-(p-a)} = \frac{1}{p-a}.$$

Свойства преобразования Лапласа

Подробные доказательства данных свойств можно найти в [1, 3-5, 7].

1. Теорема единственности. Если две непрерывные функции имеют одинаковое изображение, то они тождественно равны.

2. Теорема о линейности преобразования. Для любых постоянных $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ выполняется соотношение

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \;\dot{=}\; \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p).$$

3. Теорема о подобии. Пусть $\alpha > 0$, тогда при $\operatorname{Re} p > \max\{s_0, \alpha s_0\}$ выполняется соотношение

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4. Теорема о запаздывании. Пусть $t_0 \geq 0$, тогда

$$f(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(p).$$

5. Теорема о смещении. Пусть $\operatorname{Re}(p + p_0) > s_0$, тогда

$$e^{-p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p + p_0).$$

6. Теорема о дифференцировании оригинала. Пусть функция $f(t)$ и ее производные до порядка n включительно являются функциями-оригиналами с максимальным порядком роста s_0, тогда при $\operatorname{Re} p > s_0$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

7. Теорема об интегрировании оригинала. При $\operatorname{Re} p > s_0$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

8. Теорема о дифференцировании изображения. При $\operatorname{Re} p > s_0$

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p).$$

9. Теорема об интегрировании изображения. Пусть $\int\limits_p^{\infty} F(q)dq$ сходится, тогда

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(q)dq .$$

Изображения некоторых функций

1. $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$;

2. $e^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$

3. $\sin at \risingdotseq \dfrac{a}{p^2+a^2}$.

4. $\cos at \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+a^2}$.

5. $\operatorname{sh} at \risingdotseq \dfrac{a}{p^2-a^2}$.

6. $\operatorname{ch} at \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-a^2}$.

7. $e^{-\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$.

8. $e^{-\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$.

9. $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

10. $te^{-at} \risingdotseq \dfrac{1}{(p+a)^2}$.

11. $t\sin at \risingdotseq \dfrac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

12. $t\sin at \risingdotseq \dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$.

4.2 Восстановление оригинала по изображению

Теорема (обращение преобразования Лапласа). Пусть $F(p) \risingdotseq f(t)$. Тогда при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ выполняется

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)dp .$$

Данную формулу (формула Меллина) будем называть обратным преобразованием Лапласа.

Обозначение: $L^{-1}[F(p)] = f(t)$.

Для получения оригинала по его изображению используются следующая теорема.

Теорема (теорема разложения). Пусть изображение $F(p)$ - дробно-рациональная функция с полюсами $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$, тогда оригиналом данного изображения является функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p)e^{pt} .$$

Если $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$ - простые полюсы функции $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$, $\dfrac{A(p)}{B(p)}$ - несократимая дробь, то оригиналом данного изображения будет являться функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} .$$

Задача. По данному изображению $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2 + p - 2}$ восстановить оригинал $f(t)$, используя теорему разложения.

Решение.

Данное изображение имеет только простые полюсы $p_1 = -2$ и $p_2 = 1$, тогда найдем оригинал по формуле

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Получим

$$f(t) = \frac{p+3}{\left(p^2+p-2\right)'} e^{pt}\Bigg|_{p=-2} + \frac{p+3}{\left(p^2+p-2\right)'} e^{pt}\Bigg|_{p=1} = \frac{p+3}{2p+1} e^{pt}\Bigg|_{p=-2} +$$

$$+ \frac{p+3}{2p+1} e^{pt}\Bigg|_{p=1} = \frac{-2+3}{2(-2)+1} e^{-2t} + \frac{1+3}{2\cdot 1+1} e^{1\cdot t} = -\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{4}{3} e^{t}.$$

Вместо данной теоремы часто бывает удобнее использовать разложение изображения на простые дроби.

Задача. По данному изображению $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}$ восстановить оригинал $f(t)$, используя разложение изображения на простые дроби.

Решение.

Представим данное изображение в виде сумме простых дробей.

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)} = \frac{A}{p+3} + \frac{Bp+C}{p^2+15^2} =$$

$$= \frac{A\left(p^2+15^2\right) + (Bp+C)(p+3)}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)} = \frac{Ap^2 + 15^2 A + Bp^2 + 3Bp + Cp + 3C}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)} =$$

$$= \frac{(A+B)p^2 + (3B+C)p + 15^2 A + 3C}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}.$$

Так как

$$\frac{1}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}=\frac{(A+B)p^2+(3B+C)p+15^2A+3C}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)},$$

то тогда получаем тождество

$$1=(A+B)p^2+(3B+C)p+15^2A+3C.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 3B+C=0, \\ 15^2A+3C=1. \end{cases}$$

Решив ее, получим: $A=\frac{1}{234}$, $B=-\frac{1}{234}$, $C=\frac{1}{78}$.

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{234}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{-\frac{1}{234}p+\frac{1}{78}C}{p^2+15^2}=\frac{1}{234}\cdot\frac{1}{p+3}-\frac{1}{234}\cdot\frac{p}{p^2+15^2}+$$

$$+\frac{1}{1170}\cdot\frac{15}{p^2+15^2}.$$

Используем свойства преобразования Лапласа:

$$e^{at}\risingdotseq\frac{1}{p-a},\ \cos at\risingdotseq\frac{p}{p^2+a^2},\ \sin at\risingdotseq\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Тогда получим

$$f(t)=\frac{1}{234}e^{-3t}-\frac{1}{234}\cos 15t+\frac{1}{1170}\sin 15t=\frac{1}{1170}\left(5e^{-3t}-5\cos 15t+\sin 15t\right).$$

Замечание. Для нахождения оригинала по данному изображению (выполнение обратного преобразования Лапласа) удобно использовать компьютерные математические пакеты MathCAD [8], Maxima, Derive и др.

4.3 Свертка

Определение. Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau .$$

Свойства свертки

1. Теорема о симметрии. Выполняется тождество

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t).$$

Доказательство.

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau =$$

►Ведем замену $\lambda=t-\tau$, тогда:

1) $d\lambda=-d\tau$;

2) новые пределы интегрирования:

$$\lambda_1=t-\tau_1=t-0=t,\ \lambda_2=t-\tau_2=t-t=0 .◄$$

$$= -\int_{t}^{0} f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda = \int_{0}^{t} f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) d\lambda = \int_{0}^{t} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau .$$

Свойство доказано.

2. Теорема умножения изображений. Пусть $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, тогда

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p) F_2(p).$$

Доказательство.

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot \int_{0}^{+\infty} \left(f_1(t) * f_2(t) \right) e^{-pt} dt = \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt =$$

►При $\tau > t$ выполняется $t - \tau < 0$, что влечет $f_2(t-\tau) \equiv 0$. Тогда верхний предел t можно заменить на $+\infty$.◄

$$= \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt =$$

►Поменяем порядок интегрирования.◄

$$= \int_{0}^{+\infty} \left(\int_{0}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = \int_{0}^{+\infty} f_1(\tau) \left(\int_{0}^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-pt} dt \right) d\tau =$$

►Ведем замену $s = t - \tau$, тогда:

1) $ds = dt$;

2) новые пределы интегрирования:

$$s_1 = t_1 - \tau = 0 - \tau = -\tau, \; s_2 = t_2 - \tau = +\infty .◄$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\left(\int_{-\tau}^{+\infty} f_2(s)e^{-p(s+\tau)}ds\right)d\tau =$$

►Так как при $s < 0$ имеем $f_2(s) \equiv 0$, то нижний предел $(-\tau)$ можно заменить на 0.◄

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\left(\int_0^{+\infty} f_2(s)e^{-p(s+\tau)}ds\right)d\tau = \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\left(\int_0^{+\infty} f_2(s)e^{-ps}e^{-p\tau}ds\right)d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau \cdot \int_0^{+\infty} f_2(s)e^{-ps}ds = F_1(p)F_2(p).$$

Свойство доказано.

Теорема об умножении изображений часто применяется, когда требуется получить оригинал изображения, в которое входит неизвестная функция.

Задача. По данному изображению $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p+a}$ восстановить оригинал $\varphi(t)$.

Решение.

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p+a} = F(p) \cdot \frac{1}{p+a} \risingdotseq$$

►Используем соотношения:

$$f(t) \risingdotseq F(p),\ e^{-at} \risingdotseq \frac{1}{p+a},\ f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p)F_2(p)◄$$

$$= f(t) * e^{-at} = \int_0^t f(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau\ .$$

4.4 Приложения операционного исчисления

4.4.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Операционное исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем с постоянными коэффициентами.

Пусть нам дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 = f(t),$$

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1, \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

С помощью применения теоремы о дифференцировании оригинала данную задачу можно свести к алгебраическому уравнению, из которого легко находится изображение искомого решения. Применив обратное преобразование Лапласа, получим оригинал решения задачи Коши.

Задача. Решить задачу Коши

$$x'' + x' - 2x = \sin t,$$
$$x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$$

Решение.

Получим изображение данной задачи Коши, используя теорему о дифференцировании оригинала. Из последней имеем соотношения

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),\ f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Тогда

$$p^2X(p)-px(0)-x'(0)+pX(p)-x(0)-2X(p)=\frac{1}{p^2+1},$$

$$p^2X(p)-p-2+pX(p)-1-2X(p)=\frac{1}{p^2+1},$$

$$\left(p^2+p-2\right)X(p)-p-3=\frac{1}{p^2+1},\ \left(p^2+p-2\right)X(p)=p+3+\frac{1}{p^2+1},$$

$$X(p)=\frac{p+3+\frac{1}{1+p^2}}{p^2+p-2}.$$

Для нахождения оригинала по полученному изображению, используем математический пакет MathCAD [8]. Применив обратное преобразование Лапласа, получим решение данной задачи Коши

$$x(t)=-0{,}3\sin t-0{,}1\cos t+1{,}5e^t-0{,}4e^{-2t}.$$

Применение преобразования Лапласа позволяет свести систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к системе линейных алгебраических уравнений.

Задача. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'=-x+2y+1, \\ y'=2x-y, \end{cases}$$

$$x(0)=0,\ y(0)=1.$$

Решение.

Получим изображение данной задачи Коши, используя соотношения

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0),\ 1 \doteq \frac{1}{p}.$$

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = -X(p) + 2Y(p) + \dfrac{1}{p}, \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) - Y(p), \end{cases} \begin{cases} pX(p) = -X(p) + 2Y(p) + \dfrac{1}{p}, \\ pY(p) - 1 = 2X(p) - Y(p), \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX(p) + X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p}, \\ pY(p) - 2X(p) + Y(p) = 1, \end{cases} \begin{cases} (p+1)X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p}, \\ -2X(p) + (p+1)Y(p) = 1. \end{cases}$$

Решим полученную систему алгебраических уравнений методом Крамера.

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p+1 & -2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^2 - 4 = p^2 + 2p - 3;$$

$$\Delta_X(p) = \begin{vmatrix} 1/p & -2 \\ 1 & p+1 \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p} + 2 = 3 + \frac{1}{p},\ \Delta_Y(p) = \begin{vmatrix} p+1 & 1/p \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = p + 1 + \frac{2}{p};$$

$$X(p) = \frac{\Delta_X(p)}{\Delta(p)} = \frac{3 + \frac{1}{p}}{p^2 + 2p - 3} = \frac{3p+1}{p(p^2 + 2p - 3)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y(p)}{\Delta(p)} = \frac{p + 1 + \frac{2}{p}}{p^2 + 2p - 3} = \frac{p^2 + p + 2}{p(p^2 + 2p - 3)}.$$

По полученным изображениям в математическом пакете MathCAD найдем оригиналы, используя обратное преобразование Лапласа.

$$x(t) = e^t - \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3},\ y(t) = e^t + \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}.$$

4.4.2 Уравнения с частными производными

Операционное исчисление применяется для решения некоторых типов задач для уравнений с частными производными (УЧП). Применение преобразований Лапласа позволяет перейти от УЧП с n независимыми переменными к УЧП с n-1 переменной, а УЧП с двумя независимыми переменными сводит к обыкновенному дифференциальному уравнению [9].

Операционное исчисление применяется при решении задач для однородных и неоднородных УЧП с постоянными коэффициентами и однородных и неоднородных граничных условий. Преобразование проводится по независимой переменной, изменяющейся в пределах промежутка $[0,+\infty)$. Этой переменной может быть как время t, так и пространственная переменная.

Задача. Решить задачу о свободных колебаниях конечной струны с жестким закреплением концов вида

УЧП: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < \pi$, $t > 0$);

НУ: $u(x,0) = \sin 2x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ ($0 \le x \le \pi$);

ГУ: $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$ ($t \ge 0$).

Решение.

Получим изображение данной задачи, используя преобразование Лапласа по переменной t. Изображение неизвестной функции $U(x,t)$ будем рассматривать как функцию одной переменной x и параметра p.

ОДУ: $p^2U - pu(x,0) - \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = a^2U''$;

ГУ: $U(0) = 0$, $U(\pi) = 0$.

Так как $u(x,0) = \sin 2x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$, то получим уравнение

$$p^2U - p\sin x = a^2U'',\ a^2U'' - p^2U = -p\sin x.$$

Данное уравнение является линейным ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Так как его характеристическое уравнение

$$a^2\lambda^2 - p^2 = 0$$

имеет два действительных различных корня $\lambda_{1,2} = \pm\dfrac{p}{a}$, то общее решение соответствующего однородного ОДУ имеет вид

$$U_0 = C_1e^{-\frac{p}{a}x} + C_2e^{\frac{p}{a}x}.$$

Будем искать частное решение неоднородного ОДУ в виде

$$U_1 = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Определим коэффициенты A и B, подставив предполагаемое решение в неоднородное ОДУ.

$$U_1' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,\ U_1'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x,$$

$$a^2(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) - p^2(A\sin 2x + B\cos 2x) = -p\sin 2x,$$

$$\left(-4Aa^2 - Ap^2\right)\sin 2x + \left(-4Ba^2 - Bp^2\right)\cos 2x = -p\sin 2x.$$

Приравняв коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -4Aa^2 - Ap^2 = -p, \\ -4Ba^2 - Bp^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{p}{p^2 + 4a^2}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение неоднородного ОДУ имеет вид

$$U_1 = \frac{p}{p^2 + 4a^2}\sin 2x.$$

Найдем общее решение неоднородного ОДУ

$$U = U_0 + U_1 = C_1 e^{-\frac{p}{a}x} + C_2 e^{\frac{p}{a}x} + \frac{p}{p^2 + 4a^2}\sin 2x.$$

Получим коэффициенты C_1 и C_2, используя ГУ:

1) $U(0) = C_1 + C_2 = 0$;

2) $U(\pi) = C_1 e^{-\frac{\pi p}{a}} + C_2 e^{\frac{\pi p}{a}} = 0$.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\frac{\pi p}{a}} + C_2 e^{\frac{\pi p}{a}} = 0, \end{cases}$$

получим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Таким образом, изображение решения данной задачи имеет вид

$$U = \frac{p}{p^2 + 4a^2} \sin 2x.$$

Получим оригинал решения, используя обратное преобразование Лапласа

$$u(x,t) = \cos 2at \sin 2x.$$

4.4.3 Интегральные уравнения

Операционное исчисление применяется для решения уравнения Вольтерры типа свертки [10]

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt.$$

С помощью понятия свертки данное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + K(x) * \varphi(x).$$

Пусть функции $f(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к функциям-оригиналам.

Применим к обеим частям уравнения преобразование Лапласа.

$$L[\varphi(x)] = L[f(x)] + L[K(x) * \varphi(x)].$$

Используя теорему об умножении изображений, получим

$$L[\varphi(x)] = L[f(x)] + L[K(x)] \cdot L[\varphi(x)],\ \Phi(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)\Phi(p),$$

$$\Phi(p) - \widetilde{K}(p)\Phi(p) = F(p),\ \Phi(p)\left(1 - \widetilde{K}(p)\right) = F(p).$$

Отсюда имеем изображение неизвестной функции

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \widetilde{K}(p)}.$$

Восстановив по нему оригинал, получим решение данного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = L^{-1}[\Phi(p)].$$

Задача. Решить уравнение Вольтерры типа свертки

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)dt.$$

Решение.

С помощью понятия свертки данное интегральное уравнение можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sin x + 2\cos(x) * \varphi(x).$$

Применим к полученному уравнению преобразование Лапласа, используя соотношения

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},\ \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},\ f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p).$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + 2\frac{p}{p^2+1}\Phi(p),\ \left(p^2+1\right)\Phi(p) = 1 + 2p\Phi(p),$$

$$\left(p^2-2p+1\right)\Phi(p) = 1,\ (p-1)^2\Phi(p) = 1,\ \Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Мы получили изображение неизвестной функции. Восстановив по нему оригинал, получим решение данного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = xe^x.$$

Список использованных источников

1. Бугров, Я.С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

2. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - 4-е изд., испр. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.

3. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - М.: Наука, 1981. – 302 с.

4. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М. Наука, 1966. – 388 с.

5. Бицадзе, А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного/А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

6. Борисов, Ю.М. Электротехника: учебник для вузов / Ю.М. Борисов, Д.Н. Липатов, Ю.Н. Зорин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 552 с.

7. Усманов, З.Д. Ряды. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление: учебное пособие / З.Д. Усманов, Х.Х. Усманов, Л.Г. Устинова. – 2-е изд., перепаб. и дополненное. – Волжский: Филиал ГОУ ВПО «МЭИ (ТУ)» в г. Волжском, 2005. – 130 с.

8. Очков, В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия/ В.Ф. Очков. – СПб.: BHV-Петербург, 2009. – 512 с.

9. Фарлоу, С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров/ С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 384 с.

10. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. - 4-е изд., испр. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.