Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра вычислительной техники

А.Т. Юсуфов, А.Ю. Кручинин

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ НА ЭВМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»
в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам
высшего профессионального образования по направлению подготовки
090900.62 Информационная безопасность

Оренбург
2012

УДК 681.3(075)
ББК 32.973.2-02я7
Ю 91

Рецензент – кандидат экономических наук О.Н. Яркова

Юсуфов, А.Т.
Ю 91 Обработка экспериментальных данных на ЭВМ: методические указания к практическим занятиям / А.Т. Юсуфов, А.Ю. Кручинин; Оренбургский гос. ун-т. - Оренбург: ОГУ, 2012. – 55 с.

Курс практических занятий содержит 6 работ и методические указания к ним. Каждая работа включает теоретическое изложение материала и ход выполнения работы.

Методические указания рекомендованы преподавателям как вспомогательный материал в организации и проведении занятий, а также студентам направления подготовки 090900.62 Информационная безопасность для аудиторного и самостоятельного освоения практического курса дисциплины «Обработка экспериментальных данных на ЭВМ».

УДК 681.3(075)
ББК 32.973.2-02я7

Содержание

Введение

Методические указания предназначены для получения практических навыков студентами специальности «Комплексная защита объектов информатизации» при изучении дисциплины «Обработка экспериментальных данных на ЭВМ».

Курс содержит 6 практических работ и охватывает основные разделы рабочей программы, связанные с обработкой экспериментальных данных.

При выполнении работ рекомендуется первоначально ознакомиться с теоретической частью соответствующего раздела и примером, описанном в разделе «ход выполнения работы». Практические занятия рекомендуется выполнять в порядке их нумерации. Для сдачи работы необходимо подготовить отчет с обязательным указанием даты, номера, темы, цели работы и кратких результатов выполненной работы с выводами. Дополнительный теоретический материал к практическим работам можно найти в списке использованных источников.

Выполнение практических занятий осуществляется по вариантам, для выбора варианта необходимо обратиться к преподавателю. Выборки индивидуальных данных выбираются один раз и используются во всех практических занятиях.

1 Практическое занятие №1. Табличное и графическое представление экспериментальных данных. Построение и расчёты эмпирических функций распределения и плотности

Цель работы: ознакомление с основами представления экспериментальных данных.

1.1 Теоретическая часть

Исследование - это подготовка, проведение эксперимента и обработка выходных данных.

Объект исследования – объект любого характера, который изучается экспериментальным путём.

Эксперимент – специальным образом спланированная и организованная процедура изучения объекта исследования, при которой на этот объект оказывается запланированное воздействие и регистрируется его реакции на это воздействие.

Факторы – воздействие на предмет (x_1 , x_2 , x_3 , $x_{4\ldots}$).

Отклонением объекта исследования называют его реакции на воздействие (y_g).

Эксперимент состоит из ряда опытов или наблюдений, при которых каждый из факторов x_1 , x_2 , x_3 … имеет разные значения.

Экспериментальные данные – все входящие и исходящие данные эксперимента, сведённые в таблицу экспериментальных данных.

Основным рабочим инструментом обработки и эксперимента является число.

Способы получения численных данных:

1) подсчёт;
2) измерение;
3) метод экспериментальных оценок.

Генеральная совокупность – совокупность всех мыслимых значений наблюдений, которые могли бы быть произведены при данном реальном комплексе условий (или, вся подлежащая изучению совокупность объектов называется генеральной совокупностью).

Число элементов в генеральной совокупности называется объемом генеральной совокупности (обозначается n).Относительно n, как правило, делается предположение, что он бесконечно велик, т. е. выборка получается из бесконечной генеральной совокупности.

Генеральная совокупность называется конечной (бесконечной) в зависимости от того конечная (бесконечная) совокупность всех наблюдений.

Та часть объектов, которая попала на исследование, называется выборочной совокупностью (или просто выборкой).

Число элементов в выборке называется объемом выборки (обозначается n).

Эмпирические данные - сведения, полученные на основе опыта, практики.

Выборочные данные, полученные в ходе эксперимента, называются соответственно экспериментальными (эмпирическими) данными.

Эмпирическое распределение – распределение элементов выборки по значениям изучаемого признака.

Экспериментальные данные можно представить в виде группированного или вариационного рядов.

Группировка представляет собой процесс систематизации, или упорядочения, первичных данных с целью извлечения содержащейся в них информации.

Группировка выполняется различными методами в зависимости от целей исследования, вида изучаемого признака и количества экспериментальных данных (объема выборки), но наиболее часто группировка сводится к представлению данных в виде статистических таблиц.

Группировки заключается в распределении вариант выборки по группам, или интервалам группировки, каждый из которых содержит некоторый диапазон значений изучаемого признака.

Вариационный ряд – ранжированный в порядке возрастания или убывания ряд вариантов с соответствующими им весами (частотой). То есть вариационный ряд –

двойной числовой ряд, показывающий, каким образом численные значения изучаемого признака связаны с их повторяемостью в выборке.

Вариационные ряды бывают двух типов: интервальные и без интервальные.

В интервальном вариационном ряду частоты (или частости), характеризующие повторяемость вариант в выборке, распределяются по интервалам группировки.

В без интервальном вариационном ряду частоты (или частости) распределяются непосредственно по значениям варьирующего признака.

Для большей наглядности эмпирических распределений, используется их графическое представление. Наиболее распространенными способами графического представления являются гистограмма, полигон частот и полигон накопленных частот (кумулята).

Гистограммой называется графическое изображение зависимости частоты попадания элементов выборки от соответствующего интервала группировки (диапазона значений показателя).

Гистограмма является эмпирическим аналогом функции плотности распределения f_i^*.

Полигон частот образуется ломаной линией, соединяющей точки, соответствующие средним значениям интервалов группировки и частотам этих интервалов, средние значения откладываются по оси x, а частоты – по оси y.

Полигон накопленных частот (кумулята) получается при соединении отрезками прямых точек, координаты которых соответствуют верхним границам интервалов группировки и накопленным частотам. Если по оси ординат откладывать накопленные частоты, то полученный график называется полигоном накопленных частот.

Пример 1. Программист подбирал пароль от почты своего друга. Пароль выбирался из словаря «наугад», затем его кодировали хеш-функцией (случайная величина *X*). Соответствие подбираемого пароля и правильного – случайная величина *У* (удача). Пароль подбирался 100 раз (N = 100). Полученный результат представлен в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Статистический ряд. Исходные значения величин X и Y

Х	У	Х.	У	Х	У	Х	У	Х	У
25	18,7	40,7	24	30,3	18	27,3	25,1	22	21
28,4	11,7	50,8	9	40,2	15,7	43,8	20,6	32	28,6
24,1	20,9	38,2	22,8	47,6	11,3	52,8	15,2	19,5	19,7
32,5	22,4	36	19,8	30,3	21,3	48	24,5	46	20,3
38,4	29,5	35,7	15,3	30,5	27,8	26	28,7	27,8	15,5
38,1	19,6	34,3	20,7	48,7	11,5	32,5	28	35,2	30,7
16,8	32,2	38	13	16,8	18,3	57,1	2,9	41,6	18,2
28,8	29,7	35,5	24	23,9	20,2	40	23,8	42,5	15,3
32,9	14,7	45,9	24	54,3	14,2	50,7	15,9	47,1	22,5
50,1	15,9	29,3	21,9	60,8	27,2	58,6	9,3	35,6	22,7
30,2	25	54,2	14,2	21,4	19,8	40,1	17,4	47	17,3
36,9	23,2	59,8	6,1	38,4	23	34,4	23,4	31,4	30,2
36,6	7,9	32,2	22,3	46,8	20,5	53,7	12,4	28,2	30
38	15,4	52	6,1	23,8	18,3	42,1	28,5	33,7	19,8
55	11	31,2	24,2	37,9	32,6	43	20,2	27,6	18,5
16,2	25,2	51,2	14,2	30,6	21,5	23,5	14,6	36,8	10,7
49,7	15,9	32,2	20,4	37	24,5	32,9	25,8	45,5	14,8
49,7	19,5	30,9	20,7	57,6	20,3	54	14,4	18,6	15,3
42,3	19,7	41,5	10,8	41,9	14,6	42,3	23,5	25,8	27,4
35,7	11,9	41,2	9,8	34,1	26,3	58,8	9,2	39,2	17,5

Найти эмпирическое распределение признака X, построить графическое отображение распределения.

1.2 Ход выполнения работы

1. Определим *минимальное и максимальное значения* совокупности X (статистического ряда): $x_{\min}$, $x_{\max}$.

$$x_{min}= 16,2 \qquad x_{max}= 60,8$$

2. Найдём *размах варьирования* измеримого признак: $R_x = x_{\max} - x_{\min}$.

$$R_x=60,8-16,2=44,6$$

3. Выберем *число интервалов* равным k.

Замечание: Выбор k зависит от объёма n, размаха R и от цели статистического исследования. Принято, чтобы получилось не менее 6 и не более 20 интервалов. Одна из формул: $k=1+3,2\ lgn$.

(Т.е. k целая часть числа $1+3,2\ lg\ n$).

$$k = 1 + 3,2 \cdot \lg n = 1 + 3,2 \cdot \lg 100 \approx 7$$

Определим, чему равен *шаг варьирования* признака (длина интервала будущего вариационного ряда X).

$$\Delta = \frac{R_x}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \text{ где}$$

x_{min} – минимальное значение выборки;

x_{max}– максимальное значение выборки

k – количество интервалов.

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{60,8\text{-}16,2}{7} = \frac{44,6}{7} \approx 6,37$$

4. Теперь найдем *границы интервалов* каждого признака таким образом, чтобы минимальное значение стало серединой первого интервала, а максимальное – серединой последнего. Для этого отступим от $x_{\min}$ на полшага, а к правому концу каждого интервала будем прибавлять длину шага:

$$\alpha_0 = x_{\min} - \frac{\Delta}{2} = 13,01$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta = 19,38$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta = 25,75$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \Delta = 32,12$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \Delta = 38,49$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 + \Delta = 44,86$$

$$\alpha_6 = \alpha_5 + \Delta = 51,23$$

$$\alpha_7 = \alpha_6 + \Delta = 57,6$$

$$\alpha_8 = \alpha_7 + \Delta = 63,97$$

Таким образом, фактическое число интервалов совокупности равно 8. Убедимся в правильности своих подсчетов: действительно, значения α_8=63,97 больше максимального значения $x_{\max}$ =60,8.

5. Найдем *серединыполучившихсяинтервалов*:

$$x_1 = x_{\min} = 16{,}2$$

$$x_2 = x_{\min} + \Delta = 22{,}57$$

$$x_3 = x_2 + \Delta = 28{,}94$$

$$x_4 = x_3 + \Delta = 35{,}31$$

$$x_5 = x_4 + \Delta = 41{,}68$$

$$x_6 = x_5 + \Delta = 48{,}05$$

$$x_7 = x_6 + \Delta = 54{,}42$$

$$x_8 = x_7 + \Delta = 60{,}8$$

Проверка: $x_8 \approx x_{\max}$

6. Составим *вариационный ряд* измеримого признака X.

Таблица 1.2 - Вариационный ряд

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
n_{xi}	4	8	20	26	15	15	8	4

Здесь n_{xi} - число значений x_i, попавших в соответствующий интервал $\alpha_{i-1} - \alpha_i$ (сумма абсолютных частот $\sum_{i=1}^{8} n_i = n$, где n – объём выборки).

7. Заполняем таблицу «Статистическая совокупность» для признака X:

Таблица 1.3 - Статистическая совокупность измеримого признака X

Интер-валы $\alpha_{i-1} - \alpha_i$	Середины интерв. x_i	Частоты				Плотность относи-тельн. частот $f_i^* = \frac{P_i^*}{\Delta}$
		Абсолютн. n_{xi}	Относительн. $P_i^* = \frac{n_i}{n}$	Накоплен. абсолютн. N_i	Накопленная относительн. $F_i^* = \frac{N_i}{n}$	
13,01-19,38	16,2	4	0,04	0 (N_1=0)	0	0,0063
19,38-25,75	22,57	8	0,08	4 (N_2=n_{x1})	0,04	0,0126

Продолжение таблицы 1.3

25,75-32,12	28,94	20	0,2	12	0,12	0,0314
32,12-38,49	35,31	26	0,26	32	0,32	0,0408
38,49-44,86	41,48	15	0,15	58	0,58	0,0235
44,86-51,23	48,05	15	0,15	73	0,73	0,0235
51,23-57,6	54,42	8	0,08	88	0,88	0,0126
57,6-63,97	60,8	4	0,04	96 ($N_8=n-n_{x8}$)	0,96	0,0063
		$\sum=100$	$\sum=1$	100 ($N_9=N_8+n_{x8}$)	1	

8. Построим полигон (ломаная линия) и гистограмму («столбики») распределения, затем – полигон накопленных частот (рисунок 1.1 и 1.2):

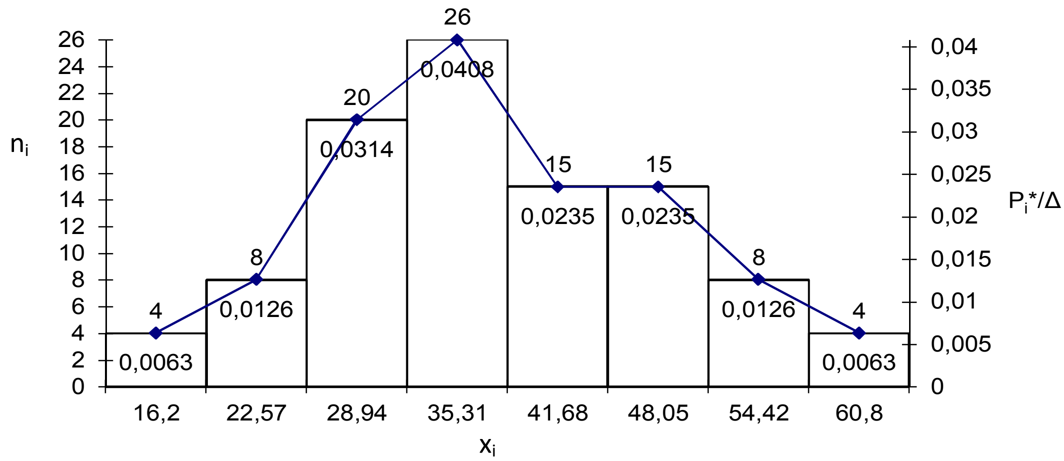

Рисунок 1.1 - Полигон и гистограмма распределения признака *X*

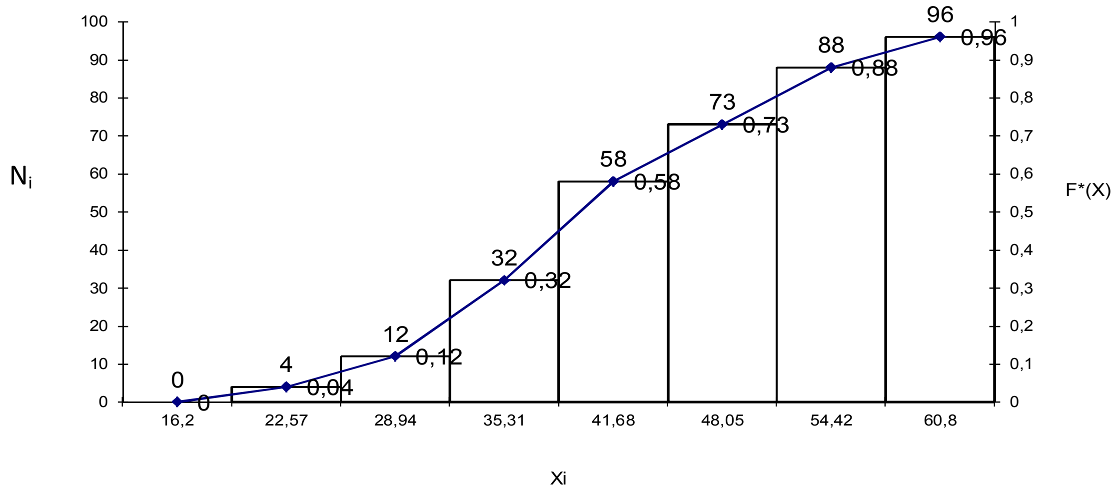

Рисунок 1.2 - Эмпирическая функция распределения *F*(X)*

2 Практическое занятие №2. Вычисление характеристик эмпирических распределений (выборочных характеристик)

Цель работы: получить навыки определения статистических характеристик выборок.

2.1 Теоретическая часть

Для компактного описания совокупности наблюдений (результатов измерений характеристик) используют методы описательной статистики (описания результатов с помощью различных агрегированных показателей и графиков).

Показатели описательной статистики можно разбить на несколько групп:

1) показатели положения – описывают положение экспериментальных данных на числовой оси. К таким показателям относятся:

– max и min элементы выборки;

– среднее выборочное.

Пусть имеется ряд наблюдений x_1, x_2, x_3, … x_n непрерывно распределенной случайной величины, тогда среднее значение наблюдаемого признака (выборочное среднее) определяется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \sum_{i-1}^{r} x_i p_i^* \tag{2.1}$$

где:

x_i - значение наблюдаемого признака;

n - объем выборки;

p_i^* - относительная частота.

– медиана – значение исследуемого признака, справа и слева от которого находится одинаковое число упорядоченных элементов выборки:

$$M_l^* = \alpha_{j-1} + h\frac{n/2 - N_j}{n_j} \tag{2.2}$$

где:

$M_l^* \approx x_j$ - середина интервала (медианного), содержащего накопленную частоту N_j, не превосходящую половины выборки $n/2$ ($N_j \le n/2$);

α_{j-1} - нижняя граница медианного интервала;

n_j и N_j - частота и накопленная частота соответственно этого интервала.

– мода – значение признака, которому соответствует наибольшая частота:

$$M_o^* = \alpha_{i-1} + h\frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} \tag{2.3}$$

где:

$M_0^* \approx x_i$ - середина интервала (модального) с наибольшей частотой n_i;

α_{i-1} - нижняя граница модального интервала (левый конец отрезка, на котором самое большое значение частоты n_i);

Δ – длина интервала.

2) показатели разброса – описывают степень разброса данных относительно своего центра (среднего значения).

К ним относятся, например:

– выборочная дисперсия или дисперсия эмпирического распределения, рассчитывается как сумма квадратов разности между элементами выборки и средним значением:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{r}(x_i - \bar{x})^2 p_i^* \tag{2.4}$$

где $(x_i - \bar{x})$ - отклонение каждого наблюдения от среднего.

Дисперсия характеризует разброс элементов выборки вокруг среднего значения.

– среднеквадратические отклонения:

а) для дисперсии эмпирического распределения:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \tag{2.5}$$

б) для несмещенной оценки дисперсии теоретического распределения σ^2 (для генеральной совокупности):

$$S = \sqrt{S^2} \text{ , где } \quad S^2 = \frac{n}{n-1} D_B \tag{2.6}$$

Оценка называется несмещенной, если при любом числе наблюдений *n* ее математическое ожидание точно равно значению оцениваемого параметра.

– центральные моменты распределения – отклонение отдельных величин признака от его средней арифметической величины:

а) первый центральный момент равен:

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0 \tag{2.7}$$

б) второй центральный момент равен:

$$\mu_2 = D_B \tag{2.8}$$

в) третий центральный момент равен:

$$\mu_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3 \tag{2.9}$$

г) четвертый центральный момент равен:

$$\mu_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^4 \tag{2.10}$$

и другие.

3) показатели асимметрии – положение медианы относительно среднего:

– коэффициент эксцесса, является характеристикой того, насколько кучно основная масса данных группируется около центра и является характеристикой поведения плотности (полигона) в районе её модального значения:

$$E_B = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3 \tag{2.11}$$

Исправленный эксцесс:

$$E^* = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)} \left((n+1) E_B + 6 \right) \tag{2.12}$$

Для нормального распределения:

$$\frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = 3\,. \tag{2.13}$$

Аналогом отсчета в измерении степени островершинности служит нормальное распределение, для которого $E_B = 0$.

Для островершинных (по сравнению с нормальным распределением) $E_B > 0$, а для плосковершинного $E_B < 0$.

– коэффициент асимметрии, характеризует асимметричность распределения;

Выборочный коэффициент асимметрии является характеристикой степени скошенности и подсчитывается с помощью второго и третьего выборочных центральных моментов:

$$A_B = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} \tag{2.14}$$

Исправленная асимметрия:

$$A^* = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} A_B . \tag{2.15}$$

Для симметричных распределений $m_3 = 0$ и $g = 0$.

Пример 2. Вычислить выборочные характеристики признака X, представленного в таблице 1.1

2.2 Ход выполнения работы:

1. Заполним расчетную таблицу 2.1, взяв данные для первых трех столбцов в таблице 1.3:

Таблица 2.1 - Расчет выборочных оценок признака X

Серед Инт. x_i	Частота n_i	Относит частота p^*_i	$x_i\ p_i^*$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2 p_i^*$	$(x_i-\bar{x})^3 p_i^*$	$(x_i-\bar{x})^4 p_i^*$
16,2	4	0.04	0,648	-21,467	18,434	-395,724	8495,123
22,57	8	0.08	1,8056	-15,097	18,234	-275,288	4156,111
28,94	20	0.2	5,788	-8,7273	15,233	-132,944	1160,245
35,31	26	0.26	9,1806	-2,3573	1,4448	-3,40579	8,02847
41,68	15	0.15	6,252	4,0127	2,4153	9,691731	38,89001
48,05	15	0.15	7,2075	10,383	16,170	167,889	1743,141
54,42	8	0.08	4,3536	16,753	22,452	376,1356	6301,287
60,8	4	0.04	2,432	23,133	21,405	495,1525	11454,21
Σ	100	1	$\bar{x} =$ 37,667		$D_B = \mu_2$ 115,7885	$\mu_3 =$ 241,5064	$\mu_4 =$ 33357,04

2. Выборочные оценки для признака X находим по данным таблицы 4 и формулам для сгруппированных данных:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \sum_{i-1}^{r} x_i p_i^* = 37{,}667;$$

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 n_i = \sum_{i=1}^{r} (x_i - \overline{x})^2 p_i^* = 115{,}7885;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = 10{,}76;$$

$$A_B = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = 0{,}19; \quad E_B = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3 = -0{,}51.$$

3. Исправленные оценки признака X:

- выборочное среднее $\overline{x} = \overline{x}_B = 37{,}67$;

- исправленная дисперсия $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = 116{,}958$;

- исправленное среднеквадратичное отклонение $S = \sqrt{S^2} = 10{,}81$;

-исправленная асимметрия $A^* = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2} A_B = 1{,}015*0{,}19 = 0{,}193$;

- исправленный эксцесс $E^* = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}\left((n+1)E_B + 6\right) = -0{,}47$.

4. Найдем моду и медиану по сгруппированным данным признака X:

n_i=26 – наибольшая частота, (32.12-38.49) – модальный интервал,

n_{i-1}=20; n_{i+1}=15,

тогда мода $M_o^* = 32{,}12 + 6{,}37\frac{26-20}{(26-20)+(26-15)}$=34,37.

Накопленная частота N_j=32, не превосходящая половины выборки $n/2$=100/2=50 ($N_j \le n/2$); (32.12-38.49) – медианный интервал, тогда медиана

$M_l^* = 32{,}12 + 6{,}37\frac{50-32}{26}$=36,53.

3 Практическое занятие №3. Отсев грубых погрешностей

Цель работы: получить навыки вычисления погрешностей при работе с экспериментальными данными.

3.1 Теоретическая часть

Любые, даже тщательно поставленные, эксперименты могут давать неоднородные данные, поскольку могут измениться условия проведения опытов в процессе эксперимента. В этом случае наблюдения, соответствующие разным уровням факторов, будут принадлежать к разным генеральным совокупностям. Данные, соответствующие изменившимся условиям, называют грубыми погрешностями (ошибками) или резко выделяющимися (аномальными) значениями.

Грубая погрешность может возникнуть также при неправильной организации процесса измерения (например, из-за неправильной эксплуатации измерительных приборов, неправильного отсчета показаний, выхода из строя какого- либо элемента).

Как правило, экспериментальные данные могут содержать ~ 10% аномальных значений. Эти аномальные значения могут дать сильное смещение при оценке параметров распределения, особенно для дисперсии, так как ошибки заметно отклоняются от основной группы значений, а на дисперсию особенно сильно влияют крайние члены вариационного ряда (вариационный ряд – результаты наблюдений, расположенные в возрастающей последовательности $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_i \ldots \leq x_n$).

Обычно экспериментаторы имеют дело с выборками небольшого объема (т.е. когда генеральная дисперсия σ_x^2 неизвестна и оценивается по опытным данным через выборочную дисперсию S_x^2), причем именно в этом случае аномальные данные имеют большой вес.

Известен ряд методов отсева грубых погрешностей.

Общим моментом для всех методов является построение вариационного ряда x_1 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_i \ldots \leq x_n$ по имеющейся выборке значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Затем вычисляют значения специфических для каждого метода статистик, которые сравнивают с соответствующими критическими значениями.

Рассмотрим некоторые методы отсева грубых погрешностей.

1. Метод максимального относительного отклонения для выборок объемом $3 \leq n \leq 25$:

а) вычисляем среднее значение выборки по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.1}$$

где:

x_i - значение наблюдаемого признака;

n – объем выборки.

б) вычисляем среднеквадратичное отклонение по формуле:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \tag{3.2}$$

в) определяем статистику по формуле:

$$\tau = \frac{\left|x_i - \bar{x}\right|}{\bar{S}} \tag{3.3}$$

где:

x_i – крайний (наибольший или наименьший) элемент выборки, по которой рассчитывалось среднее значение и среднеквадратичное отклонение.

г) сравниваем найденное значение статистики с табличным значением статистики, вычисленные при доверительной вероятности τ (p - 0,90; 0,95; 0,975; 0,99) или уровнях значимости α - 0,10; 0,05; 0,025 и 0,01. На практике обычно используют уровень значимости α = 0,05 (результат получается с 95 % - й доверительной вероятностью)

$$\tau \leq \tau_{1-p} \tag{3.4}$$

Если выполняется условие $\tau \leq \tau_{1-p}$, то наблюдение не отсеивается, в противном случае - исключается.

Процедуру отсева повторяют для следующего по абсолютной величине максимального относительного отклонения, но предварительно необходимо пересчитать характеристики эмпирического распределения по данным сокращенной выборки.

2. Другой способ отсева грубых погрешностей для выборок малых объемов заключается в следующем:

а) вычисляем по формуле τ:

$$\tau = \frac{|x_i - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \bar{S}} \,, \tag{3.5}$$

где:

$1/\sqrt{(n-1)/n}$ - уточняющий коэффициент.

б) полученный результат сравниваем с критическим значением, взятым из таблицы (квантили распределения при соответствующей доверительной вероятности (0,95)) при соответствующих*n*и *(1-p)*.

3. Если выборка большого объема, то для отсева грубых погрешностей лучше использовать таблицы распределения Стьюдента:

а) из таблицы выбираем наблюдения, имеющие наибольшие отклонения:

$$d_{\max(\min)} = \left| x_{\max(\min)} - \bar{x} \right| \tag{3.6}$$

б) вычисляем:

$$\tau = \frac{d_{\max(\min)}}{\bar{S}} \tag{3.7}$$

Так как критическое значение τ_p(*p* - процентная точка нормированного выборочного отклонения) выражается через критическое значение распределения Стьюдента $t_{p,\, n-2}$, по таблице (Приложение Б).

Находим процентные точки *t*-распределения Стьюдента для 5% и 0,1% и соответствующем *n* (объем выборки) и вычисляем соответствующие точки критического значения τ_p по формуле и.

$$\tau_{(5\%,n)} = \frac{t_{(5\%,n-2)} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+[t_{(5\%,n-2)}]^2}} \tag{3.8}$$

$$\tau_{(0,1\%,n)} = \frac{t_{(0,1\%,n-2)} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+[t_{(0,1\%,n-2)}]^2}} \tag{3.9}$$

д) полученное τ сравниваем с соответствующими точками критического значения τ_p.

Если $\tau \le \tau_{(5\%,n)}$ => наблюдение отсеивать нельзя;

Если $\tau_{(5\%,n)} < \tau < \tau_{(0.1\%,n)}$ => от отсева выделяющегося наблюдения лучше воздержаться, но можно и отсеять, если в пользу этой процедуры имеются еще и другие соображения экспериментатора (например, заключения, сделанные на основе изучения физических, химических и других свойств изучаемого явления);

Если $\tau > \tau_{(0.1\%,n)}$ => наблюдения отсеиваются всегда.

Если то или иное наблюдение будет отсеяно, необходимо пересчитать выборочные характеристики $\bar{x}$ и $\bar{S}$ для нового массива данных (без отсеянного значения x_i) при объеме выборки $(n-1)$ и повторить процедуру отсева для следующего по абсолютной величине наибольшего (наименьшего) отклонения.

Пример 3. Для выборки, представленной в таблице 3.1 (n = 20), необходимо произвести отсев грубых погрешностей.

Таблица 3.1 – Таблица значений выборки

Номер значения выборки	Значения выборки (x)	Номер значения выборки	Значения выборки (x)
1	9,81	11	6,72
2	2,34	12	5,15
3	6,55	13	0,34
4	0,15	14	2,23
5	8,63	15	4,85
6	7,11	16	5,01
7	1,57	17	4,15
8	2,34	18	1,11
9	5,55	19	2,48
10	0,99	20	4,44

3.2 Ход выполнения работы:

1. Отсев грубых погрешностей методом максимального относительного отклонения:

а) вычисляем среднее значение выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{81,52}{20} = 4,076 \approx 4,08$$

б)вычисляем среднеквадратичное отклонение:

$$\overline{S} = \sqrt{\overline{S}^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{146{,}824}{20-1}} \approx 2{,}78$$

в) определяем статистику для крайних (наибольшего или наименьшего) элементов выборки:

- для наибольшего элемента выборки $(x_{\max} = 9{,}81)$

$$\tau_{\max} = \frac{\left|x_i - \overline{x}\right|}{\overline{S}} = \frac{\left|9{,}81 - 4{,}08\right|}{2{,}78} = \frac{5{,}73}{2{,}78} \approx 2{,}06$$

- для наименьшего элемента выборки $(x_{\min} = 0{,}15)$

$$\tau_{\min} = \frac{\left|x_i - \overline{x}\right|}{\overline{S}} = \frac{\left|0{,}15 - 4{,}08\right|}{2{,}78} = \frac{3{,}93}{2{,}78} \approx 1{,}42$$

г) определяем табличное значение статистики (приложение А) при доверительной вероятности *q*= 0,95 или уровне значимости 0,05

$\tau_{0,05} = 2{,}62$

д) сравниваем найденные значения статистики с табличным значением

$\tau_{\max} = 2{,}06\ \tau \le \tau_{1-p}$ 2,06 < 2,62 - наблюдение отсеивать нельзя

$\tau_{\min} = 1{,}42$ 1,42 < 2,62 - наблюдение отсеивать нельзя

2. Отсев грубых погрешностей для выборок малых объемов.

Возьмем выборку *n*=10 и представим ее в виде вариационного ряда (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Значения выборки

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,15	0,34	0,99	1,11	1,57	2,23	2,34	2,34	2,48	4,15

По формуле $\tau = \frac{|x_i - \overline{x}|}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\overline{S}}$ вычислим значение τ. Для этого необходимо вычислить среднеквадратичное отклонение по формуле $\overline{S} = \sqrt{\overline{S}^2} = \frac{n}{n-1}D_B$.

Данные необходимые для вычисления $\overline{S}$ приведем в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Данные для вычисления $\overline{S}$

Номер значения выборки	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	0,15	-1,62	2,624
2	0,34	-1,43	2,045
3	0,99	-0,78	0,608
4	1,11	-0,66	0,436
5	1,57	-0,2	0,04
6	2,23	0,46	0,212
7	2,34	0,57	0,325
8	2,34	0,57	0,325
9	2,48	0,71	0,504
10	4,15	2,38	5,664
$\sum$	17,7		12,783

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{17,7}{10} = 1,77$$

$$\overline{S} = \frac{n}{n-1} D_B = 1,19$$

Определяем статистику для крайних (наибольшего или наименьшего) элементов выборки по формуле:

$$\tau = \frac{\left|x_i - \overline{x}\right|}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} * \overline{S}}$$

- для наибольшего элемента выборки $(x_{\max} = 4,15)$

$$\tau = \frac{\left|4,15 - 1,77\right|}{\sqrt{\frac{10-1}{10}} * 1,91} = 1,315$$

- для наименьшего элемента выборки $(x_{\min} = 0,15)$

$$\tau = \frac{\left|0,15 - 1,77\right|}{\sqrt{\frac{10-1}{10}} * 1,91} = 0,895$$

г) определяем табличное значение статистики (Приложение А) при доверительной вероятности *q*= 0,95 или уровне значимости 0,05

$$\tau_{0,05} = 2,29$$

д) сравниваем найденные значения статистики с табличным значением

$\tau_{\max} = 1{,}315\ \tau \le \tau_{1-p}$ 1,315 < 2,29 - наблюдение отсеивать нельзя

$\tau_{\min} = 0{,}895$ 0,895 < 2,29 - наблюдение отсеивать нельзя.

3. Отсев грубых погрешностей для выборок большого объема (использование таблиц распределения Стьюдента).

Для выборки, представленной в таблице 3.1 (n = 20), необходимо провести отсев грубых погрешностей с использованием таблиц распределения Стьюдента.

Определяем среднее значение для данной выборки, отклонение от среднегодля каждого члена выборки и среднеквадратичное отклонение. Все результаты вычисления сведем в таблицу 3.4.

Таблица 3.4 - Данные для вычисления $\bar{x}$, S

Номер значения выборки	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	Номер значения выборки	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	9,81	5,734	32,879	11	6,72	2,644	6,991
2	2,34	-1,736	3,0137	12	5,15	1,074	1,153
3	6,55	2,474	6,121	13	0,34	-3,736	13,958
4	0,15	-3,926	15,413	14	2,23	-1,846	3,408
5	8,63	4,554	20,739	15	4,85	0,774	0,599
6	7,11	3,034	9,205	16	5,01	0,934	0,872
7	1,57	-2,506	6,280	17	4,15	0,074	0,005
8	2,34	-1,736	3,014	18	1,11	-2,966	8,797
9	5,55	1,474	2,173	19	2,48	-1,596	2,547
10	0,99	-3,086	9,523	20	4,44	0,364	0,132
$\sum$					81,52		146,824

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{81{,}52}{20} = 4{,}076$$

$$\bar{S} = \sqrt{\bar{S}^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{146{,}824}{20-1}} \approx 2{,}78$$

Из таблицы 3.4 выберем наблюдения, имеющие наибольшее и наименьшее отклонения:

$$d_{\max(\min)} = \left| x_{\max(\min)} - \bar{x} \right|$$

$$d_{\max} = 5{,}734 \qquad d_{\min} = 0{,}364$$

Вычисляем τ для $d_{\max}$ u $d_{\min}$ по формуле $\tau = \frac{d_{\max(\min)}}{\overline{S}}$.

$$\tau_{\max} = \frac{5{,}734}{2{,}78} = 2{,}061 \quad \tau_{\min} = \frac{0{,}364}{2{,}78} = 1{,}412$$

По таблице (Приложение Б) находим процентные точкиt-распределения Стьюдента для 5% и 0,1% и соответствующем объеме выборки (n=20).

$$t_{(0,1;\ 18)} = 3{,}6105$$

$$t_{(5;\ 18)} = 1{,}7341$$

Вычисляем соответствующие точки критического значения τ_p по формулам $\tau_{(5\%,n)} = \frac{t_{(5\%,n-2)} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+[t_{(5\%,n-2)}]^2}}$ и $\tau_{(0,1\%,n)} = \frac{t_{(0,1\%,n-2)} \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+[t_{(0,1\%,n-2)}]^2}}$:

$$\tau_{0,1,20} = \frac{3{,}6105\sqrt{20-1}}{\sqrt{20-2+3{,}6105^2}} = 2{,}825$$

$$\tau_{5,20} = \frac{1{,}7341\sqrt{20-1}}{\sqrt{20-2+1{,}7341^2}} = 1{,}649$$

Полученные τ_p сравниваем с $\tau_{\max}$ u $\tau_{\min}$ и делаем соответствующие выводы.

$$\tau_{\max} = 2{,}061;\ \tau_{\min} = 1{,}412;$$

$$\tau_{(5\%,n)} = 1{,}649;\ \tau_{(0,1\%,n)} = 2{,}825;$$

Тогда, для максимального значения выборки выполняется условие

1,6491<2,061<2,825 – решение об отсеве данного наблюдения принимается экспериментатором.

Для минимального значения выборки выполняется условие 1,412<1,6491 – наблюдение отсеивать не нужно.

4 Практическое занятие №4. Методы проверки гипотезы нормальности распределения

Цель работы: освоить методы проверки гипотезы о нормальности вероятностного распределения.

4.1 Теоретическая часть

При обработке экспериментальных данных в науке и технике обычно предполагают нормальный закон распределения случайных величин.

Свойства нормально распределенной случайной величины x:

- $x \in (-\infty;+\infty)$;
- плотность вероятности $f(x)$ является непрерывной функцией;
- центр распределения случайной величины одновременно является центром симметрии;
- малые отклонения встречаются чаще больших (с большей вероятностью).

Наиболее полной характеристикой случайной величины является закон распределения вероятностей случайной величины, который связывает данное значение случайной величины с вероятностью появления его (т.е. этого значения) в опыте. Наиболее распространенным является закон распределения, получивший название нормального закона распределения. В аналитическом виде этот закон выражается известным уравнением Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}} \tag{4.1}$$

где $f(x)$ - плотность вероятностей при данном значении x.

Графически это уравнение имеет вид колоколообразной кривой, которая симметрична относительно центра распределения, которым является Mx (максимум функции $f(x)$) и концы которой уходят в $\pm\infty$, асимптотически приближаясь к горизонтальной оси x и не достигая ее.

При обработке экспериментальных данных если закон распределения генеральной совокупности, из которой взята наша выборка, неизвестен, то первое, что надо сделать - это проверить распределение в выборке на нормальность, т.е. соответствие закону нормального распределения.

Предположение о подчинении выборки на соответствие закону нормального распределения можно сделать:

1. По коэффициенту вариации.

Если коэффициент вариации превышает 33%, говорить о нормальности распределения данных выборки нельзя.

Предварительный анализ с помощью коэффициента вариации дает самую грубую оценку.

2. По коэффициентам эксцесса и асимметрии.

Для нормально распределенной случайной величины коэффициенты эксцесса и асимметрии равны 0. Поэтому, если соответствующие эмпирические величины достаточно малы, можно предположить, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

3. По несмещенным оценкам для показателей асимметрии и эксцесса.

Для этого необходимо определить несмещенные оценки для показателей асимметрии и эксцесса по формулам:

$$A_1 = \frac{\sqrt{(n-1)}}{n-2} \cdot A_B \tag{4.2}$$

$$A_2 = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)} \cdot [(n+1) \cdot A_B + 6] \tag{4.3}$$

Определяют среднеквадратические отклонения для показателей асимметрии и эксцесса по формулам:

$$S_{A_1} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}} \tag{4.4}$$

$$S_{A_2} = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}} \qquad (4.5)$$

Проверяют условия:

$$|A_1| \le 3S_{A_1} \qquad (4.6)$$

$$|A_2| \le 5S_{A_2} \qquad (4.7)$$

Если условия выполняются, то гипотеза нормальности распределения принимается

4. Для не очень больших выборок (n<120) можно вычислить среднее абсолютное отклонение (САО):

$$CAO = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \qquad (4.8)$$

где n – объем выборки;

$\bar{x}$ - среднее значение выборки.

Для выборки, имеющей приближенно нормальный закон распределения, должновыполняться условие:

$$\left| \frac{CAO}{S} - 0{,}7979 \right| < \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \qquad (4.9)$$

5. Проверку гипотезы нормальности распределения для сравнительно широкого класса выборок (3<n<1000) можно выполнить с помощью метода, основанного на размахе варьирования R.

Подсчитывают отношение $\frac{R}{S}$, где R – размах варьирования (ширина интервала), S - несмещенной оценки дисперсии теоретического распределения и сопоставляют с критическими верхними и нижними границами этого отношения.

Если данное отношение меньше нижней границы или больше верхней границы, то нормального распределения нет. Как правило, это условие проверяется при 10% - ном уровне значимости.

6. Проверку гипотезы нормальности распределения можно произвести по критерию χ^2.

Для проверки гипотезы Но: генеральная совокупность измеримого признака, из которой извлечена выборка, распределена при данном уровне значимости α=0,05 по нормальному закону с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где a и σ - параметры нормального распределения, необходимо:

- объединить интервалы с абсолютными частотами n_i, меньшими 5 , суммируя частоты;

- отметить, чему равно теперь r – число интервалов;

- записать число κ - степеней свободы и по таблицам найти $\chi_{кр}{}^2(\alpha,\kappa)$, $k=r-s-1$, r - число интервалов, s - число параметров распределения ($s=2$);

- заполнить расчетную таблицу для вычисления $\chi^2{}_{набл}=\sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$:

Таблица 4.1 - Проверка гипотезы Но по критерию Пирсона

Левая граница интерв. α_{i-1}	Правая гран.нтер. α_i	Абс.Частота n_i	$Z_i=\frac{\alpha_{i-1}-\bar{x}}{S_x}$	$\Phi(z_i)$	$p_i'=\Delta\Phi$	$n_i'=n\cdot p_i'$	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$
…	…	…	…	…	…	…	…
Σ		100			$\approx$ 1	100	$\chi^2{}_{набл}$

где $\Phi(z_i)$ – значение функции Лапласа для значений z_i, записанных в предыдущем столбце,

$p_i'=\Phi\left(\frac{\alpha_i-\bar{x}}{S_x}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha_{i-1}-\bar{x}}{S_x}\right)=\Delta\Phi$ - теоретическая вероятность попадания случайной величины X, распределенной нормально, в интервал α_{i-1}-α_i (значение функции Лапласа можно найти по таблице приложения В).

Пример 4. Проверить с помощью критерия хи-квадрат гипотезу о нормальности распределения случайной величины, представленной статистическим рядом в таблице 1.1 при уровне значимости α = 0,05.

4.2 Ход выполнения работы:

1. Проверим, взята ли данная выборка (для измеримого признака X) из нормально распределенной генеральной совокупности.

Формулируем статистическую гипотезу H_0: генеральная совокупность измеримого признака X, из которой извлечена выборка, распределена по нормальному закону при данном уровне значимости α=0,05, с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

где a и σ - параметры нормального распределения.

2. Выпишем границы интервалов и абсолютные частоты в них (Таблица 4.2)

Таблица 4.2 - Границы интервалов и абсолютные частоты в них

Интервалы $\alpha_{i-1} - \alpha_i$	Середины интерв. x_i	Абсолютн. частота $n_{x\,i}$
13.01-19.38	16.2	4
19.38-25.75	22.57	8
25.75-32.12	28.94	20
32.12-38.49	35.31	26
38.49-44.86	41.68	15
44.86-51.23	48.05	15
51.23-57.6	54.42	8
57.6-63.97	60.8	4

Видим, что в первом и последнем интервалах абсолютная частота меньше пяти. Объединяем первые два и последние два интервала, число интервалов r равно теперь 6, значит число степеней свободы $\kappa = r - 3 = 3$ и $\chi_{кр}^2(\alpha, \kappa) = \chi_{кр}^2(0{,}05;3)$ =7,8 (приложение Г).

б). Заполняем расчетную таблицу (Таблица 4.3):

Таблица 4.3 - Проверка гипотезы H_0 по критерию Пирсона

Левая граница интерв. α_{i-1}	Правая гран.нтерв. α_i	Абс. частот n_i	$Zi= \frac{\alpha_{i-1}-\bar{x}}{S_x}$	$\Phi(zi)$	$p_i' = \Delta\Phi$	$n_i' = n \cdot p_i'$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
13,01	25,75	12	-2,28	-0,4887	0,1244	13	0,01
25,75	32,12	20	-1,10	-0,3643	0,1693	17	0,56
32,12	38,49	26	-0,51	-0,1950	0,2269	23	0,48
38,49	44,86	15	-0,08	0,0319	0,2167	22	2,05
44,86	51,23	15	0,67	0,2486	0,1458	15	0,01
51,23	63,97	12	1,25	0,3944	0,1029	10	0,28
Σ		100	2,80	0,4973	≈ 1	100	$\chi^2_{набл}$ =3,4

Получили, что $\chi^2_{набл}$ =3,4 – меньше, чем $\chi_{кр}^2(\alpha,\kappa)$=7,8, значит гипотеза нормальности распределения принимается.

3. Запишем формулу плотности теоретического распределения *f(x)*: принимаем *a* = 37,67, σ=10,81. Итак, теоретическая функция распределения измеримого признака X

$$f(x) = \frac{1}{10{,}81\sqrt{2\pi}} e^{-(x-37{,}67)^2/233{,}71}.$$

5 Практическое занятие №5. Метод наименьших квадратов

Цель работы: построение уравнений регрессии методом средних и наименьших квадратов.

5.1 Теоретическая часть

Уравнение регрессии

Задача линейного регрессионного анализа состоит в том, что зная положение точек на плоскости, так провести линию регрессии, что бы сумма квадратов отклонения вдоль ординаты этих точек от проведенной прямой была минимальной. Можно использовать различные способы (метод наименьших квадратов, метод средних, графический метод). Для проведения вычислений по методы наименьших квадратов к выдвигаемой гипотезе или форме уравнения регрессии выдвигаются следующие требования:
- это уравнение должно быть линейным попараметром или допускать возможность линеаризации.

Пусть уравнение вида

$y = b_0 + bx$ и $y = b_0 + bz^2$, $x = z^2$

$y = b_0 + bx$

Это расчетное значение, следовательно, аналитически задачу наименьших квадратов можем выразить

$U = \sum_{i=1} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2{}_{\min}$, где

$y_i - (b_0 + b_1 x_i) = \Delta_i$, или $U = \sum_{i=1} \Delta^2{}_{i_{\min}}, i = \overline{1, n}$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{db_0} = 0, \\ \dfrac{dU}{db_1} = 0. \end{cases}$$

Необходимо вычислить частные производные и прировнять их к нулю. Решая эту системы, находим коэффициенты регрессии b_0 и b_1. Эта система называется системой нормальных уравнений.

Если подставить в системы значения U и продифференцируем, то получим системы следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{db_0} = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)] = 0, \\ \dfrac{dU}{db_1} = \sum_{i=1}^{n} [y_1 - (b_0 + b_1 x_i)] x_i = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum x_i = \sum y_i, \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i{}^2 = \sum (y_i x_i) \end{cases}$$

Если уравнение вида

$y = bx$, $\dfrac{dU}{db} = 0$, $U = \sum_{i=1}^{n} (y_g - bx)^2$, $b = \dfrac{\sum y_g \cdot x}{\sum x^2}$

Метод средних

Данный метод имеет ограниченное применение. Используется только в парных ситуациях y = f(x). Данный метод состоит в следующем – выполнение условия равенства нулю всех отклонений наблюдаемой величины суммы всех отклонений наблюдаемой величины от среднего значения.

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \text{, где } d_i = y_i - \bar{y}$$

$$y = b_1 x$$

$$\sum_{i=1}^{n} (b_1 x_i - y_i) = 0$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \text{, где } \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \text{, } \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Преимущество данного метода заключается в его простоте, не накладывает ограничение на исходные опытные данные (например, что бы эти данные имели нормальное распределение).

Если зависимость вида, то для получения нужного количества уравнений выбирают из общего количества пар наблюдений примерно половину и сумму их отклонений приравнивают к нулю, а затем сумму прочих отклонений

$$y = b_0 + b_1 x$$

$$\sum_{i=1}^{m} (b_0 + b_1 x - y) = 0 \text{, } \sum_{i=m+1}^{n} (b_0 + b_1 x_i - y) = 0$$

В итоге получаем систему уравнений вида

$$b_1 \sum_{i=1}^{m} x + m b_0 = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$b_1 \sum_{i=m+1}^{n} x_i + (n-m) b_0 = \sum_{i=m+1}^{n} y_i$$, где $m = \frac{n}{2}$ при четном n и $m = \frac{n+1}{2}$ при n нечетном.

Сложив эти два уравнения, получаем уравнение вида

$$b_1 \sum_{i=1}^{n} x + n b_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Разделив все члены уравнения на n, получаем

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Если представить зависимость в виде

$y - \bar{y} = b_1 (x - \bar{x})$, то коэффициент регрессии можно вычислить по одной из формул

$$b_1 = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})} \text{, или } b_1 = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i - \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^{n} y_i}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i - \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^{n} x_i}$$

На практике, при нечетном n второе из уравнений составляют в виде

$$b_1 \sum_{i=m}^{n} x_i + (n-m+1) b_0 = \sum_{i=m}^{n} y_i$$

Этот прием делает метод средних однозначным.

Если зависимость вида, то

$$y = a + bx + cx^2$$

$$c\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{m} x_i + m_1 a = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$c\sum_{i=m_1+1}^{m_2} x_i^2 + b\sum_{i=m_1+1}^{m_2} x_i + (m_2 + m_1)a = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} y_i$$

$$c\sum_{i=m_2+1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=m_2+1}^{n} x_i + (n - m_2)a = \sum_{i=m_2+1}^{n} y_i$$

Пример: Произвести регрессионный анализ для выборки, представленной в таблице 5.1 с помощью методов средних и наименьших квадратов.

Таблица 5.1 – Значения выборки

№	**X**	**Y**
1	220	8,81
2	200	7,4
3	180	6,1
4	160	4,89
5	140	3,88
6	120	3,02
7	100	2,3

5.2 Ход выполнения работы

Вид уравнения	**Метод**	**B_0**	**B_1**	**Sост**
1. $Y = b_1x$	Средних		0,0325	5,85
	Квадратов		0,0338	5,532
2. $Y = b_0+b_1x$	Средних	-3,555	0,0545	0,447
	Квадратов	-3,517	0,0544	0,438
3. $Y = b_0x+b_1x^2$	Средних	0,00675	0,00015	0,026
	Квадратов	0,00726	0,000148	0,016

Метод средних

1. $Y = b_1x$

$$b_1 = \frac{\sum y_i}{\sum x_i} = 0{,}0325$$

$Y_g = b_1x$

$$S\text{ост} = \sum (y_g - y_r)^2$$

№	**X**	**Yg**	**Yr**	**Yg-Yr**	**$(Yg\text{-}Yr)^2$**
1	220	8,81	7,150	1,66	2,7556
2	200	7,4	6,500	0,9	0,81

3	180	6,1	5,850	0,25	0,0625
4	160	4,89	5,200	-0,31	0,0961
5	140	3,88	4,550	-0,67	0,4489
6	120	3,02	3,900	-0,88	0,7744
7	100	2,3	3,250	-0,95	0,9025
$\sum$	1120	36,4			5,85

2. $Y = b_0+b_1x$

Для четного делим на две равные системы. Для нечетного центральный элемент включаем в обе системы.:

$b_0+220b_1 = 8,81$
$b_0+200b_1 = 7,40$
$b_0+180b_1 = 6,10$
$b_0+160b_1 = 4,89$

$b_0+160b_1 = 4,89$
$b_0+140b_1 = 3,88$
$b_0+120b_1 = 3,02$
$b_0+100b_1 = 2,30$

--- (суммируем)

$$\begin{cases} 4b_0 + 760b_1 = 27,2 \\ 4b_0 + 520b_1 = 14,09 \end{cases}$$

--- (решаем)

$$\begin{cases} b_1 = 0,0545 \\ b_0 = -3,555 \end{cases}$$

№	**X**	**Yg**	**Yr**	**Yg-Yr**	**$(Yg-Yr)^2$**
1	220	8,81	8,435	0,375	0,141
2	200	7,4	7,345	0,055	0,003
3	180	6,1	6,255	-0,155	0,024
4	160	4,89	5,165	-0,275	0,076
5	140	3,88	4,075	-0,195	0,038
6	120	3,02	2,985	0,035	0,001
7	100	2,3	1,895	0,405	0,164
$\sum$	1120	36,4			0,447

3. $Y = b_0x+b_1x^2$

Проводим линеаризацию:

$$\frac{y}{x} = \frac{b_0x}{x} + \frac{b_1x^2}{x}$$

$\frac{y}{x} = b_0 + b_1 x$

Подставляем исходные значения x и y, делим на две системы:

$0{,}040=b_0+220*b_1$

$0{,}037=b_0+200*b_1$

$0{,}034=b_0+180*b_1$

$0{,}030=b_0+160*b_1$

$0{,}030=b_0+160*b_1$

$0{,}027=b_0+140*b_1$

$0{,}025=b_0+120*b_1$

$0{,}023=b_0+100*b_1$

----------------------- Суммируем

$$\begin{cases} 0{,}141 = 4b_0 + 760b_1 \\ 0{,}105 = 4b_0 + 520b_1 \end{cases}$$

--------------------------------Решаем

$$\begin{cases} b_1 = 0{,}00015 \\ b_0 = 0{,}00675 \end{cases}$$

№	**X**	**Yg**	**Yr**	**Yg-Yr**	**(Yg-Yr)^2**
1	220	8,81	8,745	0,065	0,004
2	200	7,4	7,350	0,050	0,003
3	180	6,1	6,075	0,025	0,001
4	160	4,89	4,920	-0,030	0,001
5	140	3,88	3,885	-0,005	0,000
6	120	3,02	2,970	0,050	0,003
7	100	2,3	2,175	0,125	0,016
$\sum$	1120	36,4			0,026

Метод наименьших квадратов

1. $Y = b_1x$

$$b = \frac{\sum(y_g * x)}{\sum x^2} = 0{,}0338$$

№	**X**	**Yg**	**Yg*X**	**X^2**	**Yr**	**Yg - Yr**	**(Yg – Yr)^2**
1	220	8,81	1938,2	48400	7,434	1,376	1,892
2	200	7,4	1480	40000	6,759	0,641	0,411
3	180	6,1	1098	32400	6,083	0,017	0,000
4	160	4,89	782,4	25600	5,407	-0,517	0,267
5	140	3,88	543,2	19600	4,731	-0,851	0,724
6	120	3,02	362,4	14400	4,055	-1,035	1,072
7	100	2,3	230	10000	3,379	-1,079	1,165
$\sum$			6434,2	190400			5,532

2. $Y = b_0+b_1x$

$$b_0 = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \qquad b_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

№	X	Yg	X^2	XY	Yr	Yg - Yr	$(Yg – Yr)^2$
1	220	8,81	48400	1938,2	8,469	0,341	0,116
2	200	7,4	40000	1480	7,379	0,021	0,000
3	180	6,1	32400	1098	6,290	-0,190	0,036
4	160	4,89	25600	782,4	5,200	-0,310	0,096
5	140	3,88	19600	543,2	4,110	-0,230	0,053
6	120	3,02	14400	362,4	3,021	-0,001	0,000
7	100	2,3	10000	230	1,931	0,369	0,136
$\sum$	1120	36,4	190400	6434,2			0,438

$$(\sum x)^2 = 1254400$$

$$b_0 = \frac{36{,}4 * 190400 - 6434{,}2 * 1120}{7 * 190400 - 1254400} = -3{,}517 b_1 = \frac{7 * 6434{,}2 - 1120 * 36{,}4}{7 * 190400 - 1254400} = 0{,}0544$$

3. $Y = b_0 x + b_1 x^2$

$$b_0 = \frac{\sum xy - b_1 \sum x^3}{\sum x^2} = 0{,}00726$$

$$b_1 = \frac{\sum x^2 \sum yx^2 - \sum x^3 \sum xy}{\sum x^2 \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^3} = 0{,}00014834$$

№	X	Yg	x^2	yx^2	x^3	xy	x^4	Yr	Y-Yr	$(Y-Yr)^2$
1	220	8,81	48400	426404	10648000	1938,2	2342560000	8,778304	0,031696	0,001005
2	200	7,4	40000	296000	8000000	1480	1600000000	7,386897	0,013103	0,000172
3	180	6,1	32400	197640	5832000	1098	1049760000	6,114166	-0,01417	0,000201
4	160	4,89	25600	125184	4096000	782,4	655360000	4,960111	-0,07011	0,004916
5	140	3,88	19600	76048	2744000	543,2	384160000	3,924732	-0,04473	0,002001
6	120	3,02	14400	43488	1728000	362,4	207360000	3,008028	0,011972	0,000143
7	100	2,3	10000	23000	1000000	230	100000000	2,210001	0,089999	0,0081
$\sum$			190400	1187764	34048000	6434,2	6339200000			0,016537

6 Практическое занятие №6. Сравнение двух выборок

Общие подходы к определению достоверности совпадений и различий характеристик экспериментальной и контрольной группы

Цель работы: изучение сходств и различий по критериям Крамера - Уэлча и Вилкоксона – Манна – Уитни.

6.1 Теоретическая часть

Одной из задач анализа экспериментальных данных является установление совпадений или различий характеристик экспериментальной и контрольной группы. Для этого выдвигается статистическаягипотеза об отсутствии различий (так называемая нулевая гипотеза H_0).

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречивую ей гипотезу - гипотезу о значимости различий (так называемая альтернативная гипотеза H_1).

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость проверить ее. Поскольку проверку производят статистическими методами, ее называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т.е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том» что будет принята неправильная гипотеза.

Правильное решение может быть принято также в двух случаях: гипотеза принимается; причем и в действительности она правильная; гипотеза отвергается, причем и в действительности она неверна.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать q. Ее называют уровнем значимости.

Уровнем значимости называется вероятность ошибки, заключающейся в отклонении (не принятии) нулевой гипотезы, когда она верна, то есть вероятность того, что различия сочтены существенными, а они на самом деле случайны.

Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0,05; 0,1 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости, равный 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста мы рискуем допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, имеет место противоречащая гипотеза.

Для принятия решений о том, какую из гипотез (нулевую или альтернативную) следует принять, используют решающие правила – статистические критерии. То есть, на основании информации о результатах наблюдений (характеристиках членов экспериментальной и контрольной группы) вычисляется число, называемое эмпирическим значениемкритерия. Это число сравнивается с известным (например, заданным таблично) эталонным числом, называемым критическим значениемкритерия.

Если полученное исследователем эмпирическое значение критерия оказывается меньше или равно критическому, то принимается нулевая гипотеза – считается, что на заданном уровне значимости (то есть при том значении q, для которого рассчитано критическое значение критерия) характеристики экспериментальной и контрольной групп совпадают. В противном случае, если эмпирическое значение критерия оказывается строго больше критического, то нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза – характеристики экспериментальной и контрольной группы считаются различными с достоверностью различий $(1 - q)$. [Н]

Пример 6. Имеется две группы экспериментальная (ЭГ) и контрольная (КГ). В результате проведения эксперимента , с помощью одной и той же процедуры измерений одного и того же показателя были получены следующие данные: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – выборка для экспериментальной группы и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – выборка для контрольной группы, где n=m=10.

Результаты измерений эксперимента приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Результаты эксперимента

№ x_i ЭГ *(M)*	Результаты измерений ЭГ	№ y_iКГ *(N)*	Результаты измерений КГ
1	49	1	78
2	48	2	64
3	55	3	57
4	57	4	53
5	85	5	59
6	72	6	49
7	63	7	77
8	49	8	69
9	78	9	49
10	90	10	87

Необходимо определить достоверность совпадений и различий характеристик сравниваемых выборок.

6.2 Ход выполнения работы

1. Проверку гипотезы о совпадении характеристик двух групп проведем используя критерий Крамера – Уэлча.

Выдвигаем статистическуюгипотезу об отсутствии различий H_0. И альтернативную гипотезу H_1 о значимости различий.

Вычислим для сравниваемых выборок *Тэмп* – эмпирическое значение критерия Крамера - Уэлча по формуле:

$$T_{эмп} = \frac{\sqrt{M \cdot N} \cdot \left|\overline{x} - \overline{y}\right|}{\sqrt{M \cdot s_x^2 + N \cdot s_y^2}}$$

где *M* и *N* – объемы выборок *x* и *y*;

$\overline{x}$ и $\overline{y}$ **-** выборочные средние *x* и *y*;

s_x^2 и s_y^2 - выборочные дисперсии x и y.

Вычислим выборочные средние и выборочные дисперсии x и y. Данные необходимые для расчетов представлены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Данные, необходимые для расчетов.

	№ x_i ЭГ *(M)*	Результаты измерений ЭГ	$\left\|x_i - \overline{x}\right\|$	$(x_i - \overline{x})^2$	№ y_iКГ *(N)*	Результаты измерений КГ	$\left\|y_i - \overline{y}\right\|$	$(y_i - \overline{y})^2$
	1	49	15,6	243,36	1	78	13,8	190,44
	2	48	16,6	275,56	2	64	0,2	0,04
	3	55	9,6	92,16	3	57	7,2	51,84
	4	57	7,6	57,76	4	53	11,2	125,44
	5	85	20,4	416,16	5	59	5,2	27,04
	6	72	7,4	54,76	6	49	15,2	231,04
	7	63	1,6	2,56	7	77	12,8	163,84
	8	49	15,6	243,36	8	69	4,8	23,04
	9	78	13,4	179,56	9	49	15,2	231,04
	10	90	25,4	645,16	10	87	22,8	519,84
$\sum$	10	646	133,2	1934,84	10	642	108,4	1563,6

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i = \frac{646}{10} = 64{,}6 \quad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{642}{10} - 64{,}2$$

$$S_x^{\ 2} = \frac{1}{M}\cdot\sum_{i=1}^{M}\ (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1934{,}84}{10} = 193{,}48$$

$$S_y^{\ 2} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\ (y_i - \overline{y})^2 = \frac{1563{,}6}{10} = 156{,}36$$

$$T_{эмп} = \frac{\sqrt{M \cdot N}\cdot\left|\overline{x} - \overline{y}\right|}{\sqrt{M\cdot s_x^2 + N\cdot s_y^2}} = \frac{\sqrt{10\cdot 10}\left|64{,}6 - 64{,}2\right|}{\sqrt{10\cdot 193{,}48 + 10\cdot 156{,}36}} = \frac{10\cdot 0{,}4}{\sqrt{3498{,}4}} = 0{,}068$$

Сравниваем это значение с критическим значением $T_{кр}$= 1,96 (приложение Д) взятом на уровне значимости 0,05.

$T_{кр}$= 1,96;$T_{эмп}$= 0,068;$T_{эмп}$<$T_{кр}$

Следовательно, характеристики сравниваемых выборок совпадают на уровне значимости 0,05 или гипотеза о совпадении характеристик контрольной и экспериментальной групп принимается на уровне значимости 0,05.

7 Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

56.0	42.0	59.4	57.3	46.6	48.9	56.2	58.7	49.4	44.3
61.8	59.3	70.1	58.5	60.5	53.8	39.9	60.2	58.9	58.2
58.4	50.3	54.7	53.9	57.8	59.0	66.5	64.6	43.2	46.7
63.1	50.5	41.0	40.4	68.2	49.5	58.1	51.7	53.1	57.4
49.2	44.4	62.6	45.1	46.8	60.6	65.3	61.7	65.3	62.3
45.2	49.7	49.1	52.2	49.2	58.8	63.7	27.2	49.4	44.3
52.3	52.8	38.9	49.0	45.5	45.0	55.5	55.5	58.7	38.8
41.2	59.4	47.6	61.1	46.5	56.0	51.9	59.9	52.5	59.0
55.3	56.4	49.3	52.2	50.7	59.9	50.1	51.8	47.1	56.0
67.8	41.4	50.7	58.0	51.7	52.3	53.8	51.3	46.1	55.0

Вариант 2

86.1	74.0	67.2	82.4	83.1	72.3	88.1	77.8	67.6	78.2
81.2	79.0	78.4	84.5	76.1	68.5	82.9	76.0	72.7	73.1
78.9	84.3	86.4	55.5	76.4	79.1	72.0	63.8	74.7	77.0
83.8	73.4	77.9	80.1	76.9	84.2	70.9	80.8	71.8	71.4
76.1	71.3	85.9	63.4	93.8	79.2	76.3	81.0	70.0	69.5
74.4	70.9	83.9	83.9	77.6	74.7	74.3	84.2	76.8	80.1
78.3	83.6	85.4	68.9	84.4	82.2	67.0	71.3	66.9	70.2
73.2	86.1	77.7	82.7	71.8	81.0	76.1	84.1	70.4	81.5
70.7	85.6	84.3	73.1	75.7	70.2	80.0	80.2	68.0	77.9
66.0	83.4	80.6	80.4	68.9	91.8	78.9	90.1	80.8	68.6

Вариант 3

59.0	63.2	62.7	56.5	57.6	64.4	53.5	62.3	59.6	56.6
69.9	49.9	52.8	65.3	67.0	58.3	53.2	64.6	58.5	59.3
55.8	59.6	61.6	51.9	62.5	63.5	53.8	50.0	46.6	50.9
59.7	64.2	51.4	55.0	49.4	60.0	67.7	56.0	55.5	55.2
61.0	61.3	59.0	57.6	54.1	55.8	52.3	62.1	59.2	51.6
56.1	65.5	62.7	54.4	60.9	54.6	59.9	59.8	65.7	57.9
50.8	66.9	62.3	64.4	48.3	51.4	62.0	66.5	66.7	55.6
65.3	61.7	60.2	61.9	65.4	55.0	59.9	64.8	61.5	45.2
56.3	59.0	66.9	66.4	48.8	62.9	60.4	48.4	57.6	58.8
52.9	66.7	55.3	59.5	53.4	48.7	63.6	50.7	51.1	48.0

Вариант 4

54.6	33.7	52.9	29.7	75.9	61.4	41.0	75.3	55.3	43.2
75.6	59.5	45.7	45.6	49.9	52.9	62.8	58.1	71.5	59.3
65.8	62.2	54.5	72.0	80.8	67.0	40.3	60.5	78.6	48.6
61.6	67.6	36.4	53.9	75.2	55.0	44.5	68.1	50.4	48.2
56.6	54.6	74.0	50.1	51.1	49.3	54.1	49.4	67.1	51.5
46.3	69.7	50.3	62.0	69.2	52.7	54.3	31.8	65.1	58.3
48.1	43.7	51.4	60.2	51.5	68.0	35.8	55.7	75.2	68.6
63.9	49.7	63.2	56.9	54.2	74.7	42.9	39.1	47.4	69.7
77.8	55.8	62.6	47.3	46.8	56.4	65.2	57.6	76.4	55.4
63.9	47.6	57.2	61.1	64.3	61.5	71.7	59.6	72.1	78.4

Вариант 5

35.1	30.2	37.4	28.2	42.7	43.8	49.9	49.2	44.2	36.2
37.1	38.4	37.1	31.3	32.9	31.7	36.7	35.2	43.5	42.8
42.3	35.5	29.6	29.0	37.0	44.5	42.5	32.9	41.0	37.6
44.3	45.9	31.4	32.4	28.8	37.0	26.4	37.5	43.7	29.3
37.8	37.7	47.1	26.6	34.0	40.3	34.2	37.9	27.3	30.2
37.9	37.4	31.1	34.6	39.7	40.5	37.2	47.0	38.7	42.5
41.7	38.8	43.2	36.1	44.9	41.1	33.3	38.6	30.8	39.6
23.2	42.8	29.6	41.2	38.5	32.9	38.8	29.3	38.1	37.1
47.7	39.4	31.4	32.3	31.5	43.0	25.2	41.0	44.3	16.6
32.4	54.3	47.1	48.7	36.6	32.7	33.7	44.5	36.9	43.1

Вариант 6

95.6	80.5	67.2	75.9	82.7	86.6	90.5	77.1	80.4	71.6
86.2	79.3	78.3	65.8	77.7	72.7	68.7	69.5	65.7	89.0
74.8	80.9	80.2	74.4	89.4	83.1	74.6	85.4	73.4	73.7
71.5	72.5	75.2	71.8	77.4	83.0	88.9	72.6	78.6	92.0
73.5	76.5	82.9	75.5	78.8	86.2	80.2	73.6	84.1	88.2
72.1	85.9	81.9	85.5	80.1	80.9	81.8	85.0	70.5	73.1
78.9	78.4	64.7	69.3	70.4	82.3	73.9	81.6	74.3	80.6
78.6	79.9	75.4	71.1	76.4	78.1	72.5	85.8	79.0	81.2
82.6	73.1	75.8	78.2	85.5	90.4	75.6	84.4	72.0	74.6
80.6	73.4	77.3	75.4	75.3	85.9	78.9	80.8	80.9	66.2

Вариант 7

84.5	71.5	71.9	76.4	78.2	78.2	73.2	72.4	76.4	62.3
81.4	80.6	76.0	69.7	62.1	69.5	75.2	73.3	80.8	78.9
74.3	60.3	95.6	91.0	77.8	67.7	78.9	66.6	69.8	79.6
66.8	60.6	84.3	72.2	80.2	91.7	80.0	76.0	80.5	90.6
81.0	78.4	87.7	63.3	64.2	72.8	84.0	72.6	80.9	80.6
82.9	66.4	78.7	83.7	84.0	70.3	69.4	61.3	71.2	84.8
62.9	74.7	63.3	73.6	74.4	69.8	81.6	95.1	86.1	62.8
81.4	77.2	73.0	67.3	70.3	87.8	76.9	72.7	65.4	87.3
67.8	77.9	92.3	67.4	71.5	90.2	78.8	83.8	76.5	83.5
75.3	76.7	78.7	70.5	71.7	78.9	72.9	74.8	52.6	82.3

Вариант 8

36.7	43.2	44.7	50.6	45.7	59.7	44.3	39.4	50.9	21.3
45.3	35.5	32.5	60.8	33.7	13.5	43.7	44.1	37.3	31.1
36.8	36.5	29.1	46.9	48.5	17.0	27.0	31.8	14.7	28.8
49.5	22.5	31.7	26.0	39.3	45.3	36.7	43.8	47.8	31.5
39.8	34.6	28.9	28.7	56.9	46.0	19.2	44.5	37.6	58.3
46.7	46.3	37.2	55.5	45.2	45.0	27.4	50.2	39.2	49.9
50.0	30.4	33.9	44.3	21.5	49.3	37.4	21.0	47.7	39.9
19.0	19.8	34.4	55.5	35.0	31.7	38.5	26.7	42.0	47.4
41.6	52.7	37.8	21.6	37.8	46.3	43.5	37.7	41.0	21.2
29.0	40.9	34.7	17.9	51.7	36.4	41.7	32.3	13.2	32.9

Вариант 9

24.8	26.8	29.5	33.9	36.1	24.6	24.2	31.6	21.8	14.2
43.1	30.0	27.7	29.6	29.6	39.9	36.9	25.9	39.6	15.6
36.2	42.1	29.1	32.5	24.0	32.2	33.0	18.0	43.0	28.8
14.9	18.3	28.9	37.0	25.0	21.6	29.7	41.8	26.6	22.5
40.0	25.1	27.6	26.0	38.1	37.7	31.7	30.2	22.7	22.9
35.1	30.5	27.1	46.3	29.7	24.1	32.9	23.3	27.2	24.2
17.6	12.9	24.1	32.8	25.8	32.7	24.6	27.3	34.4	26.7
27.5	24.1	27.0	45.6	39.6	29.0	23.3	30.2	23.7	32.2
35.4	25.9	24.5	47.7	42.0	28.1	17.2	40.5	16.5	22.2
32.2	36.8	32.5	33.0	37.6	23.6	24.5	34.6	33.5	32.6

Вариант 10

75.9	78.7	69.3	75.2	63.9	75.1	71.3	74.4	72.9	64.1
70.0	79.1	72.8	77.1	82.6	69.8	76.0	77.3	64.5	82.1
73.1	75.6	83.3	71.0	75.7	75.6	76.1	76.0	73.4	65.5
80.5	73.8	76.0	74.4	75.8	71.1	74.6	71.5	76.8	69.4
75.3	80.6	75.2	77.5	85.0	78.3	78.0	72.0	74.5	73.4
77.0	75.7	75.4	74.5	74.5	81.4	76.8	75.3	64.7	74.6
87.0	69.6	76.3	73.8	80.5	72.0	75.1	71.9	78.2	70.4
72.2	76.3	73.5	73.6	79.1	76.7	77.1	78.1	67.8	77.1
69.6	76.4	80.6	74.0	74.0	77.8	78.8	74.9	76.7	70.8
73.1	82.5	70.9	79.0	77.5	77.7	68.5	80.4	74.3	75.3

Ответы

Вариант	M(X)	σ(X)
1	53.56	7.76
2	77.12	6.72
3	58.24	5.64
4	57.75	11.63
5	37.13	6.69
6	78.26	6.39
7	76.15	8.28
8	36.97	10.46
9	29.49	7.52
10	74.94	4.13

Список использованных источников

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман.- 12-е изд., перераб. - М. : Юрайт, 2010. - 480 с.

2. Ходасевич, Г.Б. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Ч . 1. Обработка одномерных данных [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г. Б. Ходасевич. - Режим доступа: http://www.dvo.sut.ru/libr/opds/il30hodo_part1/4.htm

3. Шашков, В.Б. Обработка экспериментальных данных и построение эмпирических формул : курс лекций / В. Б. Шашков; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2005. - 150 с.

Приложение А

(справочное)

Квантили распределения максимального относительного отклонения при отсеве грубых погрешностей

n	Уровень значимости α				n	Уровень значимости α			
	0.10	0.05	0.025	0.01		0.10	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41	15	2.33	2.49	2.64	2.80
4	1.65	1.69	1.71	1.72	16	2.35	2.52	2.67	2.84
5	1.79	1.87	1.92	1.96	17	2.38	2.55	2.70	2.87
6	1.89	2.00	2.07	2.13	18	2.40	2.58	2.73	2.90
7	1.97	2.09	2.18	2.27	19	2.43	2.60	2.75	2.93
8	2.04	2.17	2.27	2.37	20	2.45	2.62	2.78	2.96
9	2.10	2.24	2.35	2.46	21	2.47	2.64	2.80	2.98
10	2.15	2.29	2.41	2.54	22	2.49	2.66	2.82	3.01
11	2.19	2.34	2.47	2.61	23	2.50	2.68	2.84	3.03
12	2.23	2.39	2.52	2.66	24	2.52	2.70	2.86	3.05
13	2.26	2.43	2.56	2.71	25	2.54	2.72	2.88	3.07
14	2.30	2.46	2.60	2.76					

Приложение Б

(справочное)

Процентные точки t - распределения Стьюдента

	40%	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,25%	0,1%	0,05%
1	0,3249	1,0000	3,0777	3,3138	12,7062	31,8205	63,6567	127,3213	318,3088	636,6192
2	0,2887	0,8165	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	14,0890	22,3271	31,5991
3	0,2767	0,7679	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	7,4533	10,2145	12,9240
4	0,2707	0,7407	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	5,5976	7,1732	8,6103
5	0,2672	0,7267	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8934	6,8688
6	0,2648	0,7176	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2076	5,9588
7	0,2632	0,7111	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	4,0293	4,7853	5,4079
8	0,2619	0,7064	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0413
9	0,2610	0,7027	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6897	4,2968	4,7809
10	0,2602	0,6998	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5869
11	0,2596	0,6974	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0247	4,4370
12	0,2590	0,6955	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178
13	0,2586	0,6938	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2208
14	0,2582	0,6924	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1405
15	0,2579	0,6912	1,3406	1,7530	2,1314	2,6025	2,9467	3,2860	3,7328	4,0728
16	0,2576	0,6901	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6862	4,0150
17	0,2573	0,6892	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651
18	0,2571	0,6884	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9216
19	0,2569	0,6876	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5794	3,8834
20	0,2567	0,6870	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8495
21	0,2566	0,6864	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,1352	3,5272	3,8193
22	0,2564	0,6858	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,1188	3,5050	3,7921
23	0,2563	0,6853	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,1040	3,4850	3,7676
24	0,2562	0,6848	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,0905	3,4668	3,7454
25	0,2561	0,6844	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,0782	3,4502	3,7251
26	0,2560	0,6840	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,0669	3,4350	3,7066
27	0,2559	0,6837	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,0565	3,4210	3,6896
28	0,2558	0,6834	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,0469	3,4082	3,6739
29	0,2557	0,6830	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,0380	3,3962	3,6594
30	0,2556	0,6828	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,0298	3,3852	3,6460
32	0,2555	0,6822	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385	3,0149	3,3653	3,6218
34	0,2553	0,6818	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284	3,0020	3,3479	3,6007
36	0,2552	0,6814	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195	2,9905	3,3326	3,5821
38	0,2551	0,6810	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116	2,9803	3,3190	3,5657
40	0,2550	0,6807	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	2,9712	3,3069	3,5510
42	0,2550	0,6804	1,3020	1,6820	2,0181	2,4185	2,6981	2,9630	3,2960	3,5377
44	0,2549	0,6801	1,3011	1,6802	2,0154	2,4141	2,6923	2,9555	3,2861	3,5258
46	0,2548	0,6799	1,3002	1,6787	2,0129	2,4102	2,6870	2,9488	3,2771	3,5150
48	0,2548	0,6796	1,2994	1,6772	2,0106	2,4066	2,6822	2,9426	3,2689	3,5051

50	0,2547	0,6794	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	2,9370	3,2614	3,4960
55	0,2546	0,6790	1,2971	1,6730	2,0040	2,3961	2,6682	2,9247	3,2561	3,4764
60	0,2545	0,6786	1,2958	1,6707	2,0003	2,3901	2,6603	2,9146	3,2317	3,4602
65	0,2544	0,6783	1,2947	1,6686	1,9971	2,3851	2,6536	2,9060	3,2204	3,4466
70	0,2543	0,6780	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	2,8987	3,2108	3,4350
80	0,2542	0,6776	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	2,8870	3,1953	3,4163
90	0,2541	0,6772	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	2,8779	3,1833	3,4019
100	0,2540	0,6770	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	2,8707	3,1737	3,3905
120	0,2539	0,6765	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	2,8599	3,1595	3,3735
150	0,2538	0,6761	1,2872	1,6551	1,9759	2,3515	2,6090	2,8492	3,1455	3,3566
200	0,2537	0,6757	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	2,8385	3,1315	3,3398
250	0,2536	0,6755	1,2549	1,6510	1,9695	2,3414	2,5956	2,8322	3,1232	3,3299
300	0,2536	0,6753	1,2844	1,6499	1,9679	2,3388	2,5923	2,8279	3,1176	3,3233
400	0,2535	0,6751	1,2837	1,6487	1,9659	2,3357	2,5882	2,8227	3,1107	3,3150
500	0,2535	0,6750	1,2832	1,6479	1,9647	2,3338	2,5857	2,8195	3,1066	3,3101

Приложение В

(справочное)

Таблица значений функции Лапласа

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000

0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

Приложение Г

(справочное)

Значения χ^2 критерия Пирсона

df	P				df	P				df	P			
	0,10	**0,05**	**0,01**	**0,001**		**0,10**	**0,05**	**0,01**	**0,001**		**0,10**	**0,05**	**0,01**	**0,001**
1	2,706	3,842	6,635	10,829	**31**	41,422	44,993	52,203	61,118	**61**	75,514	80,232	89,591	100,887
2	4,605	5,992	9,211	13,817	**32**	42,585	46,202	53,498	62,508	**62**	76,630	81,381	90,802	102,165
3	6,251	7,815	11,346	16,269	**33**	43.745	47.408	54.789	63.891	**63**	77,745	82,529	92,010	103,442
4	7,779	9,488	13,278	18,470	**34**	44.903	48.610	56.074	65.269	**64**	78,860	83,675	93,217	104,717
5	9,236	11,071	15,088	20,519	**35**	46.059	49.810	57.356	66.641	**65**	79,973	84,821	94,422	105,988
6	10,645	12,593	16,814	22,462	**36**	47.212	51.007	58.634	68.008	**66**	81,085	85,965	95,626	107,257
7	12,017	14,068	18,478	24,327	**37**	48.363	52.201	59.907	69.370	**67**	82,197	87,108	96,828	108,525
8	13,362	15,509	20,093	26,130	**38**	49.513	53.393	61.177	70.728	**68**	83,308	88,250	98,028	109,793
9	14,684	16,921	21,669	27,883	**39**	50.660	54.582	62.444	72.080	**69**	84,418	89,391	99,227	111,055
10	15,987	18,309	23,213	29,594	**40**	51.805	55.768	63.707	73.428	**70**	85,527	90,531	100,425	112,317
11	17,275	19,677	24,729	31,271	**41**	52.494	56.953	64.967	74.772	**71**	86,635	91,670	101,621	113,577
12	18,549	21,028	26,221	32,917	**42**	54.090	58.135	66.224	76.111	**72**	87,743	92,808	102,816	114,834
13	19,812	22,365	27,693	34,536	**43**	55.230	59.314	67.477	77.447	**73**	88,850	93,945	104,010	116,092
14	21,064	23,688	29,146	36,132	**44**	56.369	60.492	68.728	78.779	**74**	89,956	95,081	105,202	117,347
15	22,307	24,999	30,583	37,706	**45**	57.505	61.668	69.976	80.107	**75**	91,061	96,217	106,393	118,599
16	23,542	26,299	32,006	39,262	**46**	58,641	62,841	71,221	81,431	**76**	92,166	97,351	107,582	119,850
17	24,769	27,591	33,415	40,801	**47**	59,774	64,013	72,463	82,752	**78**	94,374	99,617	109,958	122,347
18	25,989	28,873	34,812	42,323	**48**	60,907	65,183	73,703	84,069	**79**	95.476	100.749	111.144	123.595
19	27,204	30,147	36,198	43,832	**49**	62,038	66,351	74,940	85,384	**80**	96.578	101.879	112.329	124.839
20	28,412	31,415	37,574	45,327	**50**	63,167	67,518	76,175	86,694	**90**	107.565	113.145	124.116	137.208
21	29,615	32,675	38,940	46,810	**51**	64,295	68,683	77,408	88,003	**100**	118.498	124.342	135.807	149.449
22	30,813	33,929	40,298	48,281	**52**	65,422	69,846	78,638	89,308	**110**	129.385	135.480	147.414	161.582
23	32,007	35,177	41,647	49,742	**53**	66,548	71,008	79,866	90,609	**120**	140.233	146.567	158.950	173.618
24	33,196	36,420	42,989	51,194	**54**	67,673	72,168	81,092	91,909	**130**	151.045	157.610	170.423	185.573
25	34,382	37,658	44,324	52,635	**55**	68,796	73,326	82,316	93,205	**140**	161.827	138.613	181.841	197.450
26	35,563	38,891	45,652	54,068	**56**	69,919	74,484	83,538	94,499	**150**	172.581	179.581	193.207	209.265
27	36,741	40,119	46,973	55,493	**57**	71,040	75,639	84,758	95,790	**200**	226.021	233.994	249.445	267.539
28	37,916	41,343	48,289	56,910	**58**	72,160	76,794	85,976	97,078	**250**	279.050	287.882	304.939	324.831
29	39,087	42,564	49,599	58,320	**59**	73,279	77,947	87,192	98,365	**300**	331.788	341.395	359.906	381.424
30	40,256	43,780	50,904	59,722	**60**	74,397	79,099	88,406	99,649	**350**	384.306	394.626	414.474	

Приложение Д

(справочное)

Критические точки распределения Стьюдента

k \ α	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510

45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55	1,6730	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905