МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

О.Н.КАЗАКОВА, О.Н. КОНЮЧЕНКО, Т.А. ФОМИНА

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано к изданию Ученым советом государственного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет» в качестве учебно-
методического пособия для студентов специальности 030301.65 «Психология»
и направления 030300.62 «Психология» заочной формы обучения

Оренбург
2009

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1 я 73
К 14

Рецензенты:
Герасименко С.А. – кандидат физико-математических наук, доцент
Нефедов Ю.В. – кандидат физико-математических наук, доцент

Казакова, О.Н.

К 14 Математика: учебно-методическое пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко, Т.А. Фомина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 140 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено студентам психологам заочной формы обучения.

Пособие также может быть использовано для организации работы студентов очной, ускоренной и индивидуальной форм обучения различных специальностей. Оно содержит выписку из государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для специальности 030301.65 «Психология», программу курса математики, краткие теоретические сведения, вопросы по курсу, задания для самопроверки, задачи с «психологическим» содержанием, примеры решения некоторых типовых задач, индивидуальные контрольные задания, методические рекомендации по выполнению контрольной работы, список рекомендуемой литературы, приложения.

ББК 22.1 я 73

$К\frac{1602010000}{\quad}$

Содержание

Введение

Математика играет важную роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях, в том числе и в психологии. Она является не только орудием количественного исчисления, но и методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем. Психология – наука многоплановая. Психологами мы в равной степени называем и психолога-исследователя, и психолога-психотерапевта, и многих других. Цель преподавания математики в вузе, где ведется подготовка специалистов-психологов – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре; развить навыки математического исследования прикладных вопросов и умения сформулировать задачу на математическом языке. Все это понадобится для успешной работы и для ориентации в будущей профессиональной деятельности.

Данное пособие содержит задания, соответствующие государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Математическая статистика – раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей. Математическая статистика опирается на теорию вероятностей. Изучение вероятностных моделей дает возможность понять различные свойства случайных явлений на абстрактном и обобщенном уровне, не прибегая к эксперименту. В математической статистике исследование связано с конкретными данными и идет от наблюдения к гипотезе и ее проверке.

Хотя современные компьютерные средства значительно упрощают расчетную часть многих математических выкладок, тем не менее, непосредственное изучение математики позволит студентам понять суть изучаемых категорий.

Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении математики, используются при изучении таких дисциплин, как: математические методы в психологии, компьютерный психологический практикум.

Дисциплина «Математика», как правило, изучается на первом курсе и включает: лекционные занятия, практические занятия, выполнение домашней контрольной работы. Итоговой формой контроля является зачет/экзамен. К зачету/экзамену допускаются студенты, выполнившие домашнюю контрольную работу и прошедшие по ней собеседование. Особенностью заочной формы обучения является то, что больший объем учебного материала студент осваивает самостоятельно по учебникам и учебным пособиям. При этом он имеет право обращаться за помощью и консультацией к преподавателю. Студенту рекомендуется вести рабочую тетрадь, конспектировать в ней определения, формулировки теорем, формулы, решение типовых задач. Для того чтобы хорошо усвоить теоретический материал, необходимо решать как можно больше задач, а не только те, которые предложены в домашней контрольной работе. Очень важны систематические занятия. Необходимо записывать всю последовательность решения задачи с пояснениями и возникающими вопросами.

Выписка из государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для специальности 030301.65 «Психология»

Введение в дискретную математику; элементы теории множеств; векторная алгебра; матрицы; элементы функционального анализа; вероятность и статистика; теория вероятностей; статистическое оценивание и проверка гипотез; параметрические и непараметрические методы; элементы дисперсионного анализа; статистические методы обработки экспериментальных данных.

1 Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ

При подготовке к выполнению контрольных работ студент должен изучить соответствующие разделы по пособиям и учебникам (список литературы прилагается).

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил:

- работа должна быть выполнена в тетради, имеющей поля для замечаний рецензента. Чернила можно использовать любого цвета, кроме красного;
- на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер контрольной работы, название дисциплины (приложение В);
- перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера;
- следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию заданий;
- в работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются;

- решения задач должны сопровождаться развернутыми пояснениями; нужно привести в общем виде все используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений; объяснить и мотивировать все действия по ходу решения; сделать необходимые чертежи. Чертежи должны быть выполнены в прямоугольной системе координат в полном соответствии с данными условиями задач и теми результатами, которые получены;

- после получения прорецензированной работы (как не зачтенной, так и зачтенной) студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты выполнить все рекомендации рецензента. Если работа получила в целом положительную оценку, но в ней есть отдельные недочеты (указанные в рецензии в тетради), то нужно сделать соответствующие исправления и дополнения в той же тетради (после имеющихся решений и записи «Работа над ошибками») и предъявить на экзамене или собеседовании. Если работа не зачтена, то ее необходимо в соответствии с требованиями рецензента частично или полностью переделать. Повторную работу надо выполнять в той же тетради (если есть место) или в новой тетради с надписью на обложке «Повторная», с указанием фамилии рецензента, которым работа была ранее не зачтена, и вместе с не зачтенной работой направить ее на новую проверку. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Прорецензированную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, студент представляет к защите.

Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается вузом для студентов в соответствии с распределением по семестрам материала и сообщается студентам каждой специальности дополнительно.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить консультацию преподавателя.

При решении заданий контрольной работы можно использовать различные методы решений, различные компьютерные прикладные программы.

2 Программа курса математики

2.1 Элементы теории множеств и математической логики

Понятие множества. Виды множеств. Способы задания множеств. Операции над множествами. Основные числовые множества. Мощность множества.

Понятие высказывания. Кванторы существования и общности. Символы математической логики. Отношения логического следования и равносильности. Необходимые и достаточные условия. Строение и виды теорем.

2.2 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Определители второго и третьего порядков, их свойства и правила вычисления.

Линейное пространство: определение, примеры. Линейная комбинация векторов линейного пространства: определение, понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Конечномерное линейное пространство: определение, базис, размерность. Координаты вектора: определение, единственность разложения по базису. Критерии линейной независимости векторов в конечномерном линейном пространстве.

Матрицы: основные понятия, действия над ними, элементарные преобразования матриц, приведение к треугольному виду, транспонирование, построение обратной матрицы. Ранг матрицы, базисный минор матрицы.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера, матричным способом, методом Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Построение общего решения неоднородной и однородной систем линейных уравнений. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.

Формулы перехода от одного базиса к другому в одном и том же конечномерном линейном пространстве. Формулы для связи координат одного и того же вектора в двух базисах одного и того же конечномерного пространства.

Евклидово пространство: основные определения и понятия, норма вектора, ортонормированный базис.

Геометрические векторы на плоскости и в трехмерном пространстве. Скалярное произведение векторов: определения, свойства, координатное представление, геометрические приложения.

Различные виды уравнений прямой на плоскости, прямой и плоскости в трехмерном пространстве.

Линейные операторы: определение, примеры, свойства. Матрица линейного оператора. Действия над линейными операторами. Вырожденные и невырожденные операторы. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Квадратичные формы в R_n. Матрица квадратичной формы, приведение ее к диагональному виду. Приведение к каноническому виду.

2.3 Элементы теории графов

Понятие графа: вершины, дуги, ребра. Ориентированные и неориентированные графы. Пути и маршруты. Эйлеровы и Гамильтоновы цепи и циклы. Отыскание кратчайшего пути на графе. Матричное задание графов.

2.4 Введение в математический анализ

Метрические пространства: определение, примеры. Окрестность точки в метрическом пространстве: определение, примеры. Понятие последовательности и функции. Основные элементарные и элементарные функции. Функции нескольких переменных. Понятие предела в метрическом пространстве. Предел последовательности, предел функции одной и нескольких переменных в точке. Непрерывность функции одной и нескольких переменных в точке, на множестве, односторонние пределы и непрерывность; свойства соответствующих функций. Бесконечно малые и бесконечно большие в точке функции. Замечательные пределы. Асимптоты функций.

2.5 Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных

Производная функции одной переменной: определение, геометрический и физический смысл. Правила дифференцирования, таблица производных. Дифференциал функции одной переменной: определение, геометрический и механический смысл. Свойство инвариантности дифференциала. Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной: Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя для вычисления пределов.

Экстремум функции: определение, необходимое условие, достаточные условия. Приложение дифференциального исчисления функции одной переменной к исследованию функций и построению графиков.

Частные производные функций нескольких переменных в точке: определение, правила нахождения, геометрический смысл. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке: определение, свойства, необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Дифференциал функции нескольких переменных. Производные высших порядков.

Понятие о локальном экстремуме функции нескольких переменных.

2.6 Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных

Первообразная функция: определение, свойства. Неопределённый интеграл: определение, свойства, таблица основных интегралов. Методы интегрирования: по частям, замена переменной.

Определённый интеграл: определение, необходимые и достаточные условия существования, геометрический смысл, свойства. Интеграл с переменным верхним пределом: определение, свойства. Методы вычисления определённых интегралов: формула Ньютона-Лейбница, метод интегрирования по частям, метод замены переменной. Приложения определённых интегралов.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами и для разрывных функций.

Двойной интеграл, двукратный интеграл. Основные определения, теорема существования, свойства. Правила вычисления.

2.7 Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения: определение, основные понятия.

Дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной: теоремы существования и единственности решения задач Коши. Понятие общего и частного решений. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка.

2.8 Теория вероятностей

Элементы комбинаторики: правила сложения и умножения, перестановки, размещения, сочетания.

Предмет теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Классическое, аксиоматическое и геометрическое определение вероятности. Несовместные и независимые события. Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Вероятность появления хоты бы одного события. Полная вероятность. Формула Байеса.

Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы (локальная и интегральная) в схеме Бернулли.

Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения, многоугольник распределения, функция распределения, ее свойства, график функции распределения. Плотность распределения непрерывной случайной величины: определение, свойства, вероятностный смысл. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения.

Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты, асимметрия, эксцесс. Их определение, свойства, формулы для вычисления.

Виды распределений непрерывных и дискретных случайных величин (биноминальное, равномерное, Пуассона, показательное). Нормальное распределение, его свойства, график. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Правило трех сигм. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального. Распределения «хи-квадрат», Стьюдента, Фишера-Снедекора.

Система двух случайных величин: закон распределения, функция распределения и ее свойства, плотность совместного распределения, условные законы распределения, условное математическое ожидание. Корреляционный момент, коэффициент корреляции, коррелированность и зависимость случайных величин. Нормальный закон распределения на плоскости. Линейная регрессия, линейная корреляция, нормальная корреляция.

Понятие о различных формах закона больших чисел. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.

2.9 Элементы математической статистики

Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма и полигон частот. Эмпирическая функция распределение. Числовые характеристики выборки. Переход к условным вариантам.

Точечные оценки. Свойства несмещенности, состоятельности и эффективности. Оценки математического ожидания и дисперсии. Доверительные интервалы и области. Интервальные оценки параметров нормального и биномиального распределений.

Статистическая проверка статистических гипотез. Общее понятие о статистической проверке гипотез. Простые и сложные гипотезы. Понятие степени свободы. Критерий и критическая область. Односторонние и двусторонние критерии. Ошибки первого и второго рода. Критерии согласия. Мощность критерия. Примеры статистических проверок статистических гипотез: сравнение средних арифметических, дисперсий, о виде распределения и др. Непараметрические критерии: Манна-Уитни, Вилкоксона.

Виды зависимости: функциональная, статистическая и корреляционная. Выборочное уравнение регрессии. Корреляционная таблица. Поле корреляции. Методы вычисления. Регрессионный анализ. Особенности модели. Выбор вида уравнения регрессии, результативной и объясняющих переменных. Пошаговые алгоритмы регрессионного анализа. Коэффициенты ранговой корреляции.

Дисперсионный анализ. Сравнение средних, общая факторная и остаточная дисперсии. Схема однофакторного дисперсионного анализа.

3 Краткие теоретические сведения

3.1 Определители и матрицы

Определителем (детерминантом) n - го порядка называется число, записываемое в виде таблицы, состоящей из n строк и n столбцов.

Обозначается: Δ_n *или* d .

$\left|a_{11}\right| = a_{11}$ – определитель первого порядка;

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$ – определитель второго порядка;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

определитель третьего порядка.

При вычислении использовали правило треугольника (Рисунок 1).

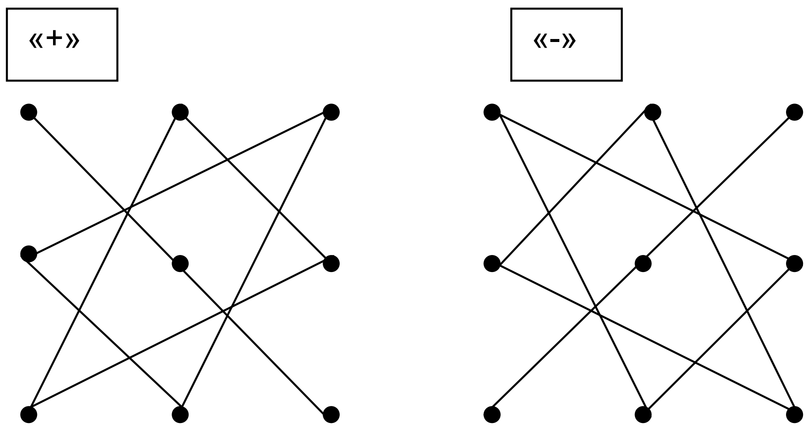

Рисунок 1 – Правило треугольника

Минором элемента a_{ij} определителя n–го порядка называется определитель (n-1) – го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки с номером i, столбца с номером j. Обозначается M_{ij} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема Лапласа: Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения.

Свойства определителей

Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Если в определителе поменять местами соответствующие строки и столбцы, то величина определителя не изменится.

При умножении столбца (или строки) определителя на некоторое число определитель умножается на это число.

Если определитель содержит нулевой столбец или нулевую строку, то он равен нулю.

Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Определитель равен нулю, если он содержит одинаковые (пропорциональные) строки (столбцы).

Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}.$$

Формулы Крамера

Система из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В случае если определитель, составленный из коэффициентов перед неизвестными системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам: $x_i = \Delta_i/\Delta$, где $\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца с номером i столбцом из свободных членов b_i:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матрицей называется таблица из чисел.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1j} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2j} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{i1} & a_{i2} & \Lambda & a_{ij} & \Lambda & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mj} & \Lambda & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица размерности $m\times n$;

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1j} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2j} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{i1} & a_{i2} & \Lambda & a_{ij} & \Lambda & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nj} & \Lambda & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица размерности $n\times n$ – квадратная матрица;

$A_{1\times n}=\left(a_{11}\ \ a_{12}\ \mathrm{K}\ a_{1n}\right)$ – матрица строка размера n;

$$A_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \mathrm{M} \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$ – матрица столбец размера m;

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$ – нулевая матрица;

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица.

Сумма двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ есть матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, i=1,…., m; j=1,….., n.

Произведение матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* λ есть матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=\lambda a_{ij}$, i=1,….,m; j=1,….., n.

Произведение матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{n\times p}=(b_{ij})$ есть матрица $C_{m\times p}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, i=1,….,m; j=1,….., n.

Умножение матриц возможно только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В общем случае $AB \neq BA$.

Транспонированием матрицы называется перемена местами соответствующих строк и столбцов матрицы, новая матрица обозначается A^T *или* A'. Если $A_{m\times n} = (a_{ij})$, *то* $A^T = (a_{ji})$.

Квадратная матрица называется *симметрической* (симметричной), если $A = A^T$, то есть $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \Lambda & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \Lambda & A_{n2} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ A_{1n} & A_{2n} & \Lambda & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ji} - алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Обратная матрица существует только для невырожденных матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Составим матрицы:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; \ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений коротко можно записать в виде $A \cdot X = B$.

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

Так как множество матриц одной размерности образуют линейное пространство, то справедливы понятия линейной зависимости и независимости матриц, строк и столбцов матриц.

Если в матрице выделено s произвольных строк и s произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется *минором матрицы А порядка s*.

В матрице порядка $m\times n$ *минор порядка r* называется *базисным*, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, называются базисными.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Порядок базисного минора матрицы называется *рангом матрицы* и обозначается *Rg A* или *r*.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования:

1) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элементам одной строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на какое-либо число;
3) перемена строк (столбцов) местами.

Элементарные преобразования матриц не изменяют ранг матрицы.

В произвольной матрице каждый столбец (строка) является линейной комбинацией базисных столбцов (строк), то есть в которых расположен базисный минор.

Ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты перед неизвестными,

b_i –свободные члены.

Решением системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*. Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Система называется *определенной*, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного.

Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей системы*, а матрица

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной матрицей системы.*

Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется *однородной*. Однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Теорема Кронекера-Капели (условие совместности системы): Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы: $RgA = RgB$.

Ненулевой вектор $x \in R_n$ называется *собственным вектором матрицы A* порядка n, если существует такое число λ, что выполняется равенство $Ax = \lambda x$. Число λ называется *собственным значением матрицы.*

3.2 Векторы

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).

К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Обозначается $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало.

Любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Произведение на число $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства линейных операций:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$;
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$;
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов представляет собой линейную комбинацию остальных векторов.

Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Любые 4 вектора линейно зависимы.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ называются координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Равные векторы имеют одинаковые координаты.

При умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\,\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\,\overrightarrow{e_3}.$$

При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты:

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3};\ \vec{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора.

Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Координаты середины отрезка находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2;\ y = (y_1 + y_2)/2;\ z = (z_1 + z_2)/2.$$

$(\vec{a},\vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot Cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ – скалярное произведение векторов

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\,\vec{a}\,|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$;
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const.

$\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$ – векторное произведение векторов, если выполняются условия:

1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot Sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;
2) $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;
3) тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$ – правая.

Свойства векторного произведения:

1) $[\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{a},\vec{b}]$;
2) $[\vec{a},\vec{b}] = 0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;
3) $[m\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},m\vec{b}] = m[\vec{a},\vec{b}]$;
4) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\ \vec{c}]$;
5) геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]$ – смешанное произведение векторов.

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение равно нулю, если:
   а) хоть один из векторов равен нулю;
   б) два из векторов коллинеарны;
   в) векторы компланарны;

2) $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]$;
3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;
4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$;
5) объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$.

Если $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3),\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3;\ [\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix};\ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

3.3 Прямые и плоскости

$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}$ – уравнение прямой на плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha,\beta)$.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой на плоскости, заданной двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

$y=kx+b$ – уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – уравнение прямой на плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A,B)$.

$Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$ – общее уравнение прямой на плоскости.

$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ – уравнение прямой в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha,\beta,\gamma)$.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – уравнение прямой в пространстве, заданной двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_1)$.

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – общее уравнение прямой в пространстве.

$Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C_2 \neq 0$ – общее уравнение плоскости в пространстве.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A, B, C)$.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках.

$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двумя направляющими векторами $\vec{a}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\vec{a}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, заданной тремя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

3.4 Комплексные числа

Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением: $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$. Число a называется действительной частью числа z ($a = Re\, z$), а b – мнимой частью ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет *чисто мнимым*, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются *комплексно – сопряженными*.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Величина r называется *модулем комплексного числа*, а угол наклона φ – *аргументом комплексного числа*.

Обозначаются $r = |z|$; $\varphi = Arg\, z$.

Вычисляются по формулам:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a}.$$

Показательная форма записи комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Действия над комплексными числами

1) Сложение и вычитание

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2),$$
$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}.$$

2) Умножение

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

Получаем $z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

В тригонометрической форме:

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

то $z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

3) Деление

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy,$$
$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Получаем

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

4) Возведение в степень

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где n – целое положительное число.

Это выражение называется *формулой Муавра*.

5) Извлечение корня из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

3.5 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Производной функции f(x) в точке $x=x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Таблица 1 –Таблица производных и правила дифференцирования

$(C)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$
$(ax+b)' = a$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(UV)' = U'V + UV'$
$(x^m)' = mx^{m-1}$ $(x)' = 1$	$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y'_x = y'_u\, u'_x$, если $y=y(u)$, $u=u(x)$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(UVW)' = U'VW + UV'W + UVW'$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	

Уравнение касательной к кривой:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к кривой:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Дифференциал функции f(x) в точке x вычисляется по формуле:

$$dy = f'(x)dx.$$

Правило Лопиталя: Если функции f(x) и g(x) дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, g′(x) отлична от нуля вблизи a и f(a) = g(a) = 0, то предел отношения функций при x→a равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].

Функция f(x) имеет в точке максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего данную точку. Аналогично определяется минимум.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

Необходимое условие существования экстремума: Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Достаточные условия существования экстремума:

1) пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1). Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум;
2) если $f'(x_1) = 0$, то функция f(x) в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.

Кривая называется *выпуклой вверх* (выпуклой) на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая называется *выпуклой вниз* на интервале (a, b), если все ее точки лежат выше любой ее касательной на этом интервале (вогнутой).

Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла). Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) положительна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вниз (вогнута).

Точка, в которой выпуклость меняется на вогнутость, называется *точкой перегиба.*

Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.

Прямая называется *асимптотой кривой*, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая x=a – вертикальная асимптота кривой y = f(x).

Наклонная асимптота имеет вид y=kx + b, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

3.6 Дифференциальное исчисление функции двух переменных

Пусть в некоторой области задана функция z=f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx переменной x. Тогда величина $\Delta_x z$ = f(x + Δx, y) – f(x, y) называется частным приращением функции по x.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$ называется *частной производной функции z = f(x, y) по переменной x*. Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$; $f'_x(x,y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по переменной y: $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$.

Дифференциал функции z=f(x,y) находится по формуле:

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy\,.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ и т.д. называются *смешанными частными производными*.

Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка M_0 называется *точкой максимума*.

Если для функции z = f(x, y), определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$,то точка M_0 называется *точкой минимума*.

Необходимые условия экстремума: Если функция f(x,y) в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) называют *критической*.

Достаточные условия экстремума: Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Рассмотрим выражение: $D(x, y) = f''_{x^2}(x, y) \cdot f''_{y^2}(x, y) - \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$.

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) имеет экстремум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ - максимум, если $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ - минимум.
2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f(x, y) не имеет экстремума.
3) В случае, если D = 0, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ – производная функции u(x, y, z) по направлению вектора $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z). $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{S}$.

Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, координаты которого равны значениям функции u в соответствующей точке, то этот вектор называется градиентом функции u:

$$grad\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \text{ или } grad\bar{u} = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{dy}, \frac{\partial u}{\partial z}\}.$$

3.7 Интегральное исчисление функции одной переменной

Функция F(x) называется *первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b]*, если в любой точке этого отрезка верно равенство: F′(x) = f(x).

Первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число: $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.

Записывают $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Таблица 2 – Таблица интегралов, правила и методы интегрирования

$\int dx = x + C$	$\int tgx\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$ $m \neq -1$	$\int ctgx\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx +$ $+\int g(x)dx$
$\int -\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$	$\int udv = uv - \int vdu$ – метод интегрирования по частям
$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$	$\int f(x)dx = \int f(x(t))\,x'_t dt$, если y=y(x),x=x(t)
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C$	$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{a + x^2}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$		

Таблица 3 – Интегрирование методом подстановки

Подынтегральная функция	Подстановка
$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)-$ нечетная относительно синуса	$\cos x = t$
$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)-$ нечетная относительно косинуса	$\sin x = t$
$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)-$ четная относительно синуса и косинуса	$tgx = t$ $(ctgx = t)$, если есть знаменатель. Если нет знаменателя, то применяются формулы понижения степени.
$R(tgx)$	$tgx = t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$
Любые тригонометрические функции	$tg\frac{x}{2} = t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}-$ универсальная тригонометрическая подстановка.

Продолжение таблицы 3

Подынтегральная функция	Подстановка
$R(x,\sqrt{a^2-x^2})$	$x=a\cdot\sin t\ \ (a\cdot\cos t)$
$R(x,\sqrt{x^2-a^2})$	$x=\dfrac{a}{\sin t}\ \ \left(\dfrac{a}{\cos t}\right)$
$R(x,\sqrt{a^2+x^2})$	$x=a\cdot tgt\ \ (a\cdot ctgt)$
$x^m\cdot(a+bx^n)^p$	$p-$ *целое, то* $x=t^N$, *где* $N-$ *общий знаменатель для* m *и* n; $\dfrac{m+1}{n}-$ *целое, то* $a+bx^n=t^N$, *где* $N-$ *знаменатель дроби* p; $\dfrac{m+1}{n}+p-$ *целое, то* $\dfrac{a}{x^n}+b=t^N$, *где* $N-$ *знаменатель дроби* p.
$R\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}},\ \sqrt[p]{\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}},\mathrm{K}\right)$	$\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1}=t^N$, *где* $N-$ *общий знаменатель дробей* m, p
$R(x,x^{\alpha},x^{\beta},\mathrm{K})$	$x=t^k$, *где* $k-$ *общий знаменатель дробей* α,β,K

Интегрирование элементарных дробей вида: $\dfrac{1}{ax+b}$; $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$, где m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и $b^2-4ac<0$.

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

$$\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;\ \ldots$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

3.8 Определенный интеграл

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).

Разобьем отрезок [a, b] на n произвольных частей следующими точками деления: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Обозначим $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε:

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1,\ x_1 < \varepsilon_2 < x_2,\ \ldots,\ x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим интегральную сумму для функции f(x) на отрезке [a, b]:

$$\sigma = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i .$$

Обозначим $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$ – наибольший отрезок разбиения.

Если при $\lambda \to 0$ существует предел интегральной суммы $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ не зависящий ни от разбиения отрезка [a, b] таких, ни от выбора точек ε_i, то функция называется интегрируемой на отрезке [a, b].

Полученный предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$, где a – нижний предел интегрирования, b – верхний предел интегрирования, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \cdot$
2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.
3) $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
5) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

6) *Теорема о среднем*: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$.

7) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

8) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Если $f(x) \ge 0$ на отрезке [a,b], то интеграл $\int_a^b f)x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x), прямыми x=a, x=b и осью (0x).

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбница.

$\int_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V\,dU$ – формула интегрирования по частям.

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x_t'dt$, где $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$ – интегрирование заменой переменной.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на промежутке [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется *несобственным интегралом первого рода* от функции f(x) на промежутке [a, ∞) (интеграл с бесконечными пределами интегрирования).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$.

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае – расходится.

Аналогичные $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на промежутке [a,c), тогда $\int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$ – *несобственный интеграл второго рода* (интеграл от неограниченной функции).

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x)dx$ – сходится, если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ не существует, то $\int_a^c f(x)dx$ – расходится.

Аналогично, если в точке x=a функция терпит разрыв, то

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)dx .$$

Если функция f(x) имеет разрыв в точке b на промежутке [a, c], то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

3.9 Числовые и функциональные ряды

Таблица 4 – Таблица эквивалентности бесконечно малых

При $\alpha\to 0$ будут эквивалентными:		
$\sin\alpha$ и α $tg\alpha$ и α	$\arcsin\alpha$ и α $arctg\alpha$ и α	$1-\cos\alpha$ и $\dfrac{\alpha^2}{2}$
$\ln(1+\alpha)$ и α	$e^\alpha - 1$ и α	$a^\alpha - 1$ и $\alpha\ln a$

«Эталонные» ряды для сравнения

$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \Lambda$ – геометрический ряд, сходится при $|q|<1$, расходится при $|q|\geq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\Lambda$ – гармонический ряд, сходится при $\alpha>1$, расходится при 0<$\alpha\leq 1$.

Признаки сходимости числовых рядов

Необходимый признак сходимости: Если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Первый признак сравнения: Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), причем для любого n верно неравенство $u_n \le v_n$. Тогда: если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1); если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Второй (предельный) признак сравнения: Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ne 0$, то ряды одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Признак Даламбера: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел отношения (n+1)-го члена ряда к n-му члену $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$. Тогда, если d<1, то ряд сходится; если d>1, то ряд расходится; если d=1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Коши: Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$. Тогда, если k<1, то ряд сходится; если k>1, то ряд расходится; если k=1, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Интегральный признак сходимости: Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, то есть $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$, а функция f(x), определенная при $x \ge 1$, непрерывная и возрастающая и $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, $\ldots$, $f(n) = u_n$, $\ldots$. Тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Признак Лейбница: Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если:

1) члены ряда убывают по абсолютной величине, то есть $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$;
2) предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма ряда не превосходит первого члена: $S \le u_n$.

Таблица 5 – Таблица разложений элементарных функций в степенной ряд Тейлора

$Sin\,x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, $x \in (-\infty, +\infty)$	$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$, $x \in (-\infty, +\infty)$

Продолжение таблицы 5

$Cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$, $x \in (-\infty, +\infty)$	$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, $x \in (-1, +1]$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$, $x \in (-\infty, +\infty)$	$arctg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$, $x \in (-1, +1)$
$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$, $x \in (-1, +1)$	

3.10 Дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y(x) и ее производные: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

$f_1(y)g_1(x)dy = f_2(y)g_2(x)dx$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ – однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Решается с помощью замены $y = U(x) \cdot x$.

$y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где p(x) и q(x) – некоторые известные функции, непрерывные в данной области – линейное дифференциальное уравнение первого порядка.
Решается с помощью замены y=U(x)V(x).

$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ – уравнение Бернулли.
Решается с помощью замены y=U(x)V(x).

$y'' + py' + qy = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Вид общего решения зависит от решения характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Если корни k_1 и k_2 действительны и различны, то общее решение имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. Если корни k_1 и k_2 действительны и совпадают (равны k), то общее решение имеет вид $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$. Если корни комплексно -сопряженные ($k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$), то общее решение имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

$y'' + py' + qy = f(x)$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения данного неоднородного уравнения. Вид частного решения зависит от вида правой части (Таблица 6).

Таблица 6 – Вид частного решения

Вид правой части f(x)	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$R_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r R_m(x)$
$e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$	Число α не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x} R_m(x)$
	Число α является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x} R_m(x)$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x$	Число βi не является корнем характеристического уравнения	$R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x$
	Число βi является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$
$e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right]$	Число $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$
	Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r	$x^r e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + T_l(x)\sin\beta x\right)$

Здесь $P_m(x)$ *и* $Q_s(x)$ – известные многочлены степеней m и s.

$R_l(x)$ *и* $T_l(x)$ – неизвестные многочлены, определяемые подстановкой частного решения в дифференциальное уравнение, $l = \max\{m, s\}$.

3.11 Основные понятия теории вероятностей

Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других.

Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта.

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

Исход опыта является *благоприятствующим* событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий: $P(A) = \frac{m}{n}$ – *классическое определение вероятности*. Предполагается, что все исходы испытания равновозможны.

Вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.

3.12 Формулы комбинаторики

Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности n различных элементов и различающиеся только порядком их расположения, называются *перестановками*. Число всех возможных перестановок определяется по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Комбинации по m элементов, составленные из n различных элементов, отличающихся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называются *размещениями*. Число всевозможных размещений определяется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n различных элементов и различающиеся хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями*. Число всевозможных сочетаний определяется формулой

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Если множество из n различных элементов разбивается на k групп так, что в первую группу попадают n_1 элементов, во вторую – n_2 элементов, в k-ю группу – n_k элементов, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то комбинации, различающиеся только порядком расположения элементов, называют *перестановками с повторениями* число таких перестановок определяется по формуле:

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Если каждый отобранный элемент перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность, то такой выбор называется *размещением с повторениями* (или последовательным выбором с возвращением). Поскольку на каждом шаге выборка производится из генеральной совокупности объема n, общее число $\overline{A}_n^m$ различных способов, какими можно произвести выборку с возвращением m элементов из генеральной совокупности объема n, равно

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Если в сочетаниях из n элементов по m некоторые из элементов или все могут оказаться одинаковыми, то такие сочетания называются *сочетаниями с повторениями из n элементов по m*, и число всевозможных сочетаний с повторениями определяется по формуле:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

3.13 Операции над событиями

События А и В называются *равносильными*, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Объединением или *суммой* событий A_k называется событие А, которое означает появление *хотя бы одного* из событий A_k:

$$A = \bigcup_k A_k \text{ или } A = A_1 + A_2 + \ldots + A_к .$$

Пересечением или *произведением* событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении *всех* событий A_k:

$$A = \bigcap_k A_k \text{ или } A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_к .$$

Противоположным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А не происходит. $\overline{A}$ и А два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема сложения вероятностей: Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Событие А называется *независимым* от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

Событие А называется *зависимым* от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется *условной вероятностью* события В:

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A).$$

Теорема умножения вероятностей: Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$.

Также можно записать: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$.

Если события независимые, то $P(B/A) = P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид: $P(AB) = P(A)P(B)$.

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна $P(A) = 1 - q_1q_2...q_n$. Здесь событие *А* обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

3.14 Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие *А* может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$ – *формула полной вероятности*.

3.15 Формула Байеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$ – *формула Байеса*.

3.16 Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно k раз (будет ровно k успехов), причем вероятность наступления события А в в каждом испытании постоянна и равна p, то остальные n-k раз это событие не наступает (n-k неудач) с соответствующей вероятностью $q = 1 - p$.

Тогда вероятность того, что в n испытаниях событие А наступает ровно k раз находится по формуле:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \text{ – \textit{формула Бернулли.}}$$

3.17 Случайные величины

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания может принимать то или иное значение, причем заранее не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть пронумерованы). Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значения, необходимо также указать вероятности, с которыми она их принимает.

3.18 Закон распределения дискретной случайной величины

Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется *законом распределения дискретной* случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется *рядом распределения*.

Графическое представление этой таблицы называется *многоугольником распределения:* отрезками соединяются точки с координатами (x_i, p_i) При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины и равна единице.

Если вероятность находится по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где *к = 0,1,2,…,*то закон распределения называется *биноминальным*.

Если вероятность находится по формуле:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $\lambda = np$, то получаем *распределения Пуассона***.** Если известны числа λ и *k*, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

3.19 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности: $m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

Свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$;
2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(Cx) = CM(x)$;
3) математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X)M(Y)$;
4) математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;

5) математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю: $M(X - M(X)) = 0$.

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M[X - M(X)]^2$.

Свойства дисперсии:

1) дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$;
2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$;
3) дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$;
4) дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$;
5) дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}.$$

Модой Мо дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Если многоугольник распределения два или несколько максимумов, то такое распределение называется *двумодальным* или *многомодальным*.

3.20 Функция распределения

Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$.

Функцию распределения также называют *интегральной функцией*.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x.

Свойства функции распределения:

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1]: $0 \le F(x) \le 1$;
2) F(x) – неубывающая функция: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$;
3) вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;
4) при $x \to -\infty$ функция распределения равна нулю $F(x) = 0$, при $x \to +\infty$ функция распределения равна единице $F(x) = 1$;
5) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю;
6) функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой–либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

3.21 Плотность распределения

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция p*(x)* – первая производная от функции распределения F(x): $p(x) = F'(x)$.

Плотность распределения также называют *дифференциальной функцией.* Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает, как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

Свойства плотности распределения:

1) вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx\,;$$

2) функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$;
3) плотность распределения – неотрицательная функция: $p(x) \ge 0$;
4) несобственный интеграл от плотности распределения на бесконечном интервале равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$.

3.22 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *p(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a,b*].

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл вида: $M(X) = \int_a^b xp(x)dx$.

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то *математическое ожидание* находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx\,.$$

При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 p(x)dx\,\cdot$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - [M(X)]^2$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Модой Мо непрерывной случайной величины называется такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум: $f(M_0)=\max$.

Если кривая распределения случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двумодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется *антимодальным*.

Медианой Ме случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины: $P(X<Me)=P(X>Me)$.

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Начальным моментом порядка *k* случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k: $\nu_k=M[X^k]$.

Для дискретной случайной величины: $\nu_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k p(x)dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Центральным моментом порядка *k* случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X-m_x)^k$.: $\mu_k=M[(X-m_x)^k]$.

Для дискретной случайной величины: $\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k p(x)dx$.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Коэффициентом асимметрии называется отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени: $A=\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. Он служит для характеристики скошенности распределения.

Для характеристики крутости (островершинности и плосковершинности) распределения используется величина, называемая *эксцессом*: $E=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3$.

Непрерывная случайная величина имеет *равномерное* распределение на отрезке [*a, b*], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью:

$$p(x)=\begin{cases}0, & при\quad x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & при\quad x\ge 0\end{cases}$$

где λ - положительное число.

3.23 Нормальный закон распределения

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Можно легко показать, что параметры *a* и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Нормальный закон распределения также называется *законом Гаусса*.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Функция распределения имеет вид: $F(x)=\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma_x^2}}dt$.

График плотности нормального распределения называется *кривой Гаусса.*

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) функция определена на всей числовой оси;
2) при всех *x* функция распределения принимает только положительные значения;

3) ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента x, значение функции стремится к нулю;
4) в точке $x = a$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
5) функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате;
6) при $x = a + \sigma$ и $x = a - \sigma$ функция имеет перегиб. Значение функции равно $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

Построим график функции плотности распределения (Рисунок 2).

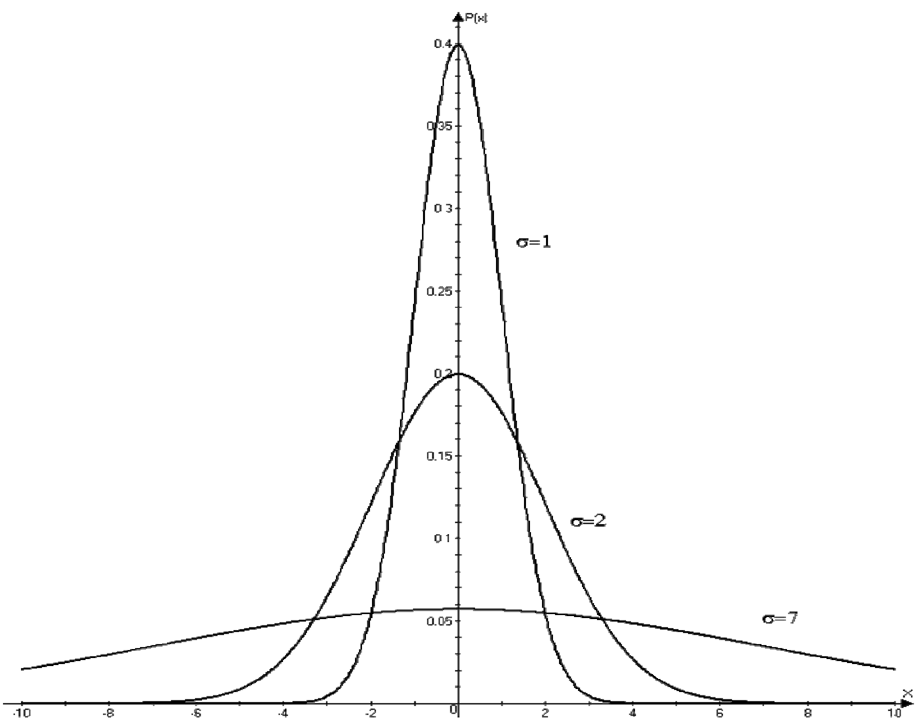

Рисунок 2 – График функции плотности распределения

Построены графики при a =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.

Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$, то график сместится в отрицательном направлении вдоль оси OX.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется *нормированной*. Уравнение нормированной кривой: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – *функция Лапласа или интеграл вероятностей***.**

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах (Приложение Б).

Функцию Лапласа является нечетной, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Правило трех сигм: Если случайная величина имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения: $P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973$.

Существует множество распределений, основанных на нормальном распределении. В частности, χ^2 – распределение (хи-квадрат), распределение Стьюдента, распределение Фишера-Снедекора и другие.

3.24 Система случайных величин

Рассмотренные выше случайные величины были одномерными, т.е. определялись одним числом, однако, существуют также случайные величины, которые определяются двумя, тремя и т.д. числами. Такие случайные величины называются двумерными, трехмерными и т.д.

В зависимости от типа, входящих в систему случайных величин, системы могут быть дискретными, непрерывными или смешанными, если в систему входят различные типы случайных величин.

Более подробно рассмотрим системы двух случайных величин.

Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

Функцией распределения системы двух случайных величин называется функция двух аргументов *F(x, y)*, равная вероятности совместного выполнения двух неравенств *X<x, Y<y:* $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Свойства функции распределения системы двух случайных величин:

1) если один из аргументов стремится к плюс бесконечности, то функция распределения системы стремится к функции распределения одной случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x);$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y);$$

2) если оба аргумента стремятся к бесконечности, то функция распределения системы стремится к единице $F(\infty,\infty) = 1$;
3) при стремлении одного или обоих аргументов к минус бесконечности функция распределения стремится к нулю:

$$F(-\infty, y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0;$$

4) функция распределения является неубывающей функцией по каждому аргументу;
5) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, вычисляется по формуле:

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

Плотностью совместного распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная частная производная от функции распределения: $p(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Если известна плотность распределения, то функция распределения может быть легко найдена по формуле: $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} p(x,y)dxdy$.

Двумерная плотность распределения неотрицательна и двойной интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

По известной плотности совместного распределения можно найти плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины:

$$p_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy; \qquad p_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx.$$

Тогда $F_1(x) = F(x,\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy$; $F_2(y) = F(\infty,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy$ – *функции распределения одномерных случайных величин*.

Распределение одной случайной величины, входящей в систему, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, называется *условным законом распределения.*

Условный закон распределения можно задавать как функцией распределения, так и плотностью распределения.

Условная плотность распределения вычисляется через совместную плотность по формулам:

$$p(x/y)=\frac{p(x,y)}{p_2(y)}=\frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx},\ p(y/x)=\frac{p(x,y)}{p_1(x)}=\frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy}.$$

Условная плотность распределения обладает всеми свойствами плотности распределения одной случайной величины.

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при X = x (x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y/X=x)=\sum_{i=1}^{m}y_i p(y_i/x).$$

Для непрерывных случайных величин: $M(Y/X=x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot p(y/x)dy$,

где *p(y/x)* – условная плотность случайной величины Y при X=x.

Аналогично определяются условная дисперсия и условные моменты системы случайных величин.

Случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение принимает другая случайная величина.

Понятие зависимости случайных величин является очень важным в теории вероятностей.

Условные распределения независимых случайных величин равны их безусловным распределениям.

Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно:

1) чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:
$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y);$$

2) чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих:

$$p(x,y)=p_1(x)p_2(y).$$

Корреляционным моментом μ_{xy} случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий: $\mu_{xy}=M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}$.

Практически используются формулы:

1) для дискретных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j);$$

2) для непрерывных случайных величин:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]p(x, y)dxdy.$$

Корреляционный момент служит для того, чтобы охарактеризовать связь между случайными величинами. Если случайные величины независимы, то их корреляционный момент равен нулю. Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей случайных величин X и Y.

Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий: $|\mu_{xy}| \le \sqrt{D_x D_y}$.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин: $r_{xy} = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы: $|r_{xy}| \le 1$.

Случайные величины называются *коррелированными*, если их корреляционный момент отличен от нуля, и *некоррелированными*, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод об их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Наряду с коэффициентом корреляции степень зависимости случайных величин можно охарактеризовать и другой величиной, которая называется *коэффициентом ковариации*. Коэффициент ковариации определяется формулой: $k(X,Y) = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)$.

3.25 Линейная регрессия

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y), где X и Y – зависимые случайные величины.

Представим приближенно одну случайную величину как функцию другой. Точное соответствие невозможно. Будем считать, что эта функция линейная.

$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$.

Для определения этой функции остается только найти постоянные величины α и β.

Функция $g(X)$ называется *наилучшим приближением* случайной величины Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание $M[Y - g(X)]^2$ принимает наименьшее возможное значение. Также функция $g(x)$ называется *среднеквадратической регрессией* Y на X.

Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X вычисляется по формуле: $g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$, где $m_x=M(X)$, $m_y=M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$ – коэффициент корреляции величин X и Y.

Величина $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ называется *коэффициентом регрессии Y на X*.

Прямая, уравнение которой $y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$, называется *прямой среднеквадратической регрессии Y* на X.

Величина $\sigma_y^2(1 - r^2)$ называется *остаточной дисперсией* случайной величины Y относительно случайной величины X. Эта величина характеризует величину ошибки, образующейся при замене случайной величины Y линейной функцией $g(X)=\alpha X + \beta$.

Видно, что если $r=\pm 1$, то остаточная дисперсия равна нулю, и, следовательно, ошибка равна нулю и случайная величина Y точно представляется линейной функцией от случайной величины X.

Прямая среднеквадратичной регрессии X на Y определяется аналогично по формуле: $x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$.

Прямые среднеквадратичной регрессии пересекаются в точке (m_x, m_y), которую называют *центром совместного распределения* случайных величин X и Y.

Если две случайные величины X и Y имеют в отношении друг друга линейные функции регрессии, то говорят, что величины X и Y связаны *линейной корреляционной зависимостью*.

Если двумерная случайная величина (X, Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.

3.26 Закон больших чисел

Неравенство Чебышева: Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2 .$$

Теорема Чебышева: Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышаю постоянного числа C), то, как бы мало не было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right] < \varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико. Т.е. можно записать

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. В этом случае теорема Чебышева несколько упрощается:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1$$ – *Теорема Бернулли***.**

Теорема Пуассона: Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в каждом опыте равна p_i, то при увеличении n частота события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i.

Если случайные величины X_i взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, причем существует третий абсолютный момент ν_3, то при неограниченном увеличении числа испытаний n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Бернулли: Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний p достаточно велико: $\lim_{n \to \infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$, здесь m – число появлений события А.

Теорема Пуассона: если производится *n* независимых опытов и вероятность появления события А в каждом опыте равна p_i, то при увеличении *n* частота события А сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i.

Теорема Муавра – Лапласа: если производится *n* независимых опытов, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью p, то для любого интервала (α, β) справедливо соотношение:

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

где Y – число появлений события А в n опытах,

q = 1 – p,

Φ(x) – функция Лапласа.

Теорема Муавра – Лапласа описывает поведение биноминального распределения при больших значениях *n*. Данная теорема позволяет существенно упростить вычисление по формуле биноминального распределения.

Расчет вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал $P(\alpha < Y < \beta) = \sum_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$ при больших значениях *n* крайне затруднителен. Гораздо проще воспользоваться формулой:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right].$$

3.27 Вариационный ряд: основные понятия, графики

Полученная в результате статистического наблюдения *выборка* из *n* значений (*вариант*) изучаемого количественного признака *X* образует *вариационный ряд.*

Ранжированный вариационный ряд получают, расположив варианты x_j, где $j = 1, 2, \ldots, n$, в порядке возрастания значений, то есть $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_j \le \ldots \le x_n$.

Изучаемый признак *X* может быть дискретным или непрерывным.

Частотой m_i в случае дискретного признака *X* называют число одинаковых вариант x_i, содержащихся в выборке. В ранжированном вариационном ряду одинаковые варианты расположены подряд:

$$\overbrace{\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{x_i, x_i, \ldots, x_i}_{m_i}, \ldots, \underbrace{x_k, x_k, \ldots, x_k}_{m_k}}^{n}.$$

Вариационный ряд для дискретного признака X представляют в виде таблицы, в первой строке которой указаны k различных значений x_i изучаемого признака, а во второй строке – соответствующие этим значениям частоты m_i, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Такую таблицу называют *статистическим (выборочным) распределением.* Таблицу можно составлять и по столбцам.

Статистическое распределение для непрерывного признака X представляют интервальным рядом – таблицей, в первой строке которой указаны k интервалов значений изучаемого признака X вида ($x_{i-1} - x_i$), а во второй строке – соответствующие этим интервалам частоты m_i, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Обозначение $(x_{i-1} - x_i)$ – указывает не разности, а все значения признака X от x_{i-1} до x_i, кроме правой границы интервала x_i. Частота m_i – число различных x_j, попавших в соответствующий промежуток: $x_j \in [x_{i-1}; x_i)$.

Если число различных значений дискретного признака очень велико, то для удобства дальнейших вычислений статистическое распределение такого дискретного признака также представляют в виде интервального ряда.

Вместо частот m_i во второй строке могут быть указаны *относительные частоты* $w_i = \dfrac{m_i}{n}$ *(частости).*

Сумма частот равна объему выборки (выборочной совокупности) n, а сумма относительных частот (частостей) равна единице:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1.$$

Если в статистическом распределении вместо частот (относительных частот) указать накопленные частоты (относительные накопленные частоты), то такой ряд распределения называют *кумулятивным***.**

Накопленной частотой называется число значений признака X, меньших заданного значения x: $H(x) = m(X < x)$, то есть, число вариант x_j в выборке, отвечающих условию $x_j < x$.

Переход от дискретного ряда частот к дискретному ряду накопленных частот задается соотношениями:

$$H(x_1) = 0; \quad H(x_i) = m(X < x_i) = \sum_{l=1}^{i-1} m_l \text{, где } i = 2, 3, \ldots, k+1 \text{, причем } H(x_{k+1}) = n;$$

или в табличной форме (Таблица 7).

Таблица 7 – Переход от дискретного ряда частот к дискретному ряду накопленных частот

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_k	x_{k+1}
$H(x_i)$	0	m_1	m_1+m_2	…	$H(x_{i-1}) + m_{i-1}$	…	$H(x_{k-1}) + m_{k-1}$	$H(x_k) + m_k = n.$

Переход от интервального ряда частот к интервальному ряду накопленных частот задается соотношениями:

$$H(x_0)=0; \quad H(x_i)=m(X<x_i)=\sum_{l=1}^{i} m_l \text{, где } i=1,2,\ldots,k \text{, причем } H(x_k)=n;$$

или в табличной форме (Таблица 8).

Таблица 8 – Переход от интервального ряда частот к интервальному ряду накопленных частот

x_{i-1}–x_i	$-\infty$–x_0	x_0–x_1	x_1–x_2	…	x_{i-1}–x_i	…	x_{k-1}–x_k
$H(x_i)$	0	m_1	m_1+m_2	…	$H(x_{i-1}) + m_i$	…	$H(x_{k-1}) + m_k = n.$

Накопленной относительной частотой (накопленной частостью) называется отношение числа значений признака X, меньших заданного значения x , к объему выборки n: $F^*(x)=\dfrac{H(x)}{n}=\dfrac{m(X<x)}{n}$, то есть, доля вариант x_j в выборке, отвечающих условию $x_j < x$.

По аналогии с теоретической функцией распределения генеральной совокупности $F(x)$, которая определяет вероятность события $X<x$: $F(x)=P(X<x)$, рассматривается *эмпирической функции распределения* $F^*(x)$, которая определяет относительную частоту этого же события $X<x$, то есть $F^*(x) = \dfrac{m(X<x)}{n}$. Таким образом, эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ задается рядом накопленных относительных частот.

Из теоремы Бернулли следует, что $F^*(x)$ стремится по вероятности к $F(x)$: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|F(x)-F^*(x)\right|<\varepsilon\right)=1 \ (\varepsilon>0)$, поэтому эмпирическую функцию распределения можно использовать для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Дискретный ряд накопленных относительных частот может быть получен двумя равноправными способами:

1) переход от дискретного ряда частостей к дискретному ряду накопленных частостей задается соотношениями:

$$F^*(x_1)=0; \ F^*(x_i)=\frac{m(X<x_i)}{n}=\sum_{l=1}^{i-1} w_l \text{, где } i=2,3,\ldots,k+1 \text{, причем } F^*(x_{k+1})=1;$$

или в табличной форме (Таблица 9).

Таблица 9 – Переход от дискретного ряда частостей к дискретному ряду накопленных частостей

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_k	x_{k+1}
$F^*(x_i)$	0	w_1	w_1+w_2	…	$F^*(x_{i-1})+w_{i-1}$	…	$F^*(x_{k-1})+w_{k-1}$	$F^*(x_k)+w_k=1;$

2) переход от дискретного ряда накопленных частот к дискретному ряду накопленных частостей задается соотношением:

$$F^*(x_i)=\frac{H(x_i)}{n},\text{ где } i=1,2,\ldots,k+1.$$

Интервальный ряд накопленных относительных частот может быть получен двумя равноправными способами:

1) переход от интервального ряда частостей к интервальному ряду накопленных частостей задается соотношениями:

$$F^*(x_0)=0;\ F^*(x_i)=\frac{m(X<x_i)}{n}=\sum_{l=1}^{i}w_l,\text{ где } i=1,2,\ldots,k,\text{ причем } F^*(x_k)=1;$$

или в табличной форме (Таблица 10).

Таблица 10 – Переход от интервального ряда частостей к интервальному ряду накопленных частостей

x_{i-1}–x_i	$-\infty$–x_0	x_0–x_1	x_1–x_2	…	x_{i-1}–x_i	…	x_{k-1}–x_k
$F^*(x_i)$	0	w_1	w_1+w_2	…	$F^*(x_{i-1})+w_i$	…	$F^*(x_{k-1})+w_k=1;$

2) переход от интервального ряда накопленных частот к интервальному ряду накопленных частостей задается соотношением:

$$F^*(x_i)=\frac{H(x_i)}{n},\text{ где } i=0,1,2,\ldots,k.$$

Принято использовать следующие *формы графического представления статистических распределений:*

1) дискретный ряд изображают в виде полигона.

Полигон частот – ломаная линия, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, m_i); аналогично, *полигон относительных частот* – ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, w_i);

2) интервальный ряд изображают в виде гистограммы.

Гистограмма частот есть ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых – интервалы длиной h_i, а высоты – плотности частот $\frac{m_i}{h_i}$.

В случае *гистограммы относительных частот* высоты прямоугольников – плотности относительных частот $\dfrac{w_i}{h_i} = \dfrac{m_i}{n \cdot h_i}$.

Здесь в общем случае $h_i = x_i - x_{i-1}$, однако на практике чаще всего полагают величину h одинаковой для всех интервалов:

$$h_i = h = (x_k - x_0)/k \text{, где } i = 1,2,\ldots k.$$

Площадь гистограммы есть сумма площадей ее прямоугольников:

$$S_{\text{ч}} = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} h \cdot \frac{m_i}{h} = \sum_{i=1}^{k} m_i = n, \quad S_{\text{отн.ч}} = \sum_{i=1}^{k} S_i = \sum_{i=1}^{k} h \cdot \frac{m_i}{n \cdot h} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i = 1,$$

таким образом, площадь гистограммы частот $S_{\text{ч}}$ равна объему выборки, а площадь гистограммы относительных частот $S_{\text{отн.ч}}$ равна единице.

В теории вероятностей гистограмме относительных частот соответствует график плотности распределения вероятностей $p(x)$. Поэтому гистограмму можно использовать для подбора закона распределения генеральной совокупности.

Если в статистическом исследовании исходным является статистическое распределение в виде интервального ряда (сгруппированные данные), а исходный вариационный ряд недоступен, то точное расположение отдельных вариант, попавших в каждый из интервалов неизвестно. Только выбирая в качестве аргумента эмпирической функции распределения правую границу интервала (x_{i-1}–x_i), можно быть уверенными, что все варианты, попавшие в этот интервал, будут учтены (просуммированы) в значении накопленной частоты (накопленной относительной частоты), соответствующей этому интервалу.

Поэтому в случае интервального ряда значения $F^*(x)$ и $H(x)$ точно определены лишь для правой границы интервала: $x = x_i$. В остальных точках интервала $x_{i-1} < x < x_i$ значения $F^*(x)$ и $H(x)$ можно задать лишь приближенно.

3.28 Числовые характеристики статистических распределений

Для описания основных свойств статистических распределений чаще всего используют *выборочные характеристики* следующих видов:

- *выборочная средняя:* характеризует типичное для выборки значение признака X; приближенно характеризует (оценивает) типичное для генеральной совокупности значение признака *X;*
- *средняя арифметическая*: применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы) $\overline{x}_{\text{в}} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$;

- *взвешенная средняя арифметическая* (частоты m_i, и частости w_i называют весами): используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i, \ \bar{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot w_i;$$

- *медиана* – это серединное значение признака X; по определению

$$F^*(x_{\text{ме}}) = \frac{1}{2}.$$

$x_{\text{ме}} = \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$,если $n = 2j$ – четное;

$x_{\text{ме}} = x_{j+1}$, если $n = 2j+1$ – нечетное;

- *мода* – наиболее часто встречающееся значение признака X. $x_{\text{мо}} = x_i$, если $m_i = m_{\max}$ (справедливо только для дискретного ряда).

  Если $\bar{x}_{\text{в}} = x_{\text{мо}} = x_{\text{ме}}$, то распределение симметричное. При нарушении симметрии равенство нарушается.

Характеристики вариации (рассеяния)

- *выборочная дисперсия* есть выборочная средняя арифметическая квадратов отклонений значений признака X от выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ (равна «среднему квадрату без квадрата средней»):

$$D_{\text{в}} = \overline{(x - \bar{x}_{\text{в}})^2}, \ D_{\text{в}} = \overline{x^2} - \bar{x}_{\text{в}}^2;$$

Выборочная дисперсия применяется к вариационному ряду (данные наблюдения не сгруппированы):

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}_{\text{в}})^2;$$

- *выборочная взвешенная дисперсия:* используется, если данные сгруппированы; непосредственно применима только к статистическому распределению дискретного признака (дискретному ряду)

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot m_i, \ D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \cdot w_i;$$

- *средний квадрат* есть выборочная средняя арифметическая квадратов значений признака X (для вариационного ряда и для дискретного распределения соответственно):

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \,,\; \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot m_i \,;$$

- *выборочное среднее квадратическое отклонение* есть арифметическое значение корня квадратного из дисперсии; оно показывает, на сколько в среднем отклоняются значения x_j признака X от выборочной средней $\bar{x}_в$: $y_в = \sqrt{D_в}$;
- *размах вариации:* $R = x_{max} - x_{min}$;
- *коэффициент вариации:* применяют для сравнения вариации признаков сильно отличающихся по величине, или имеющих разные единицы измерения (разные наименования): $v = \frac{y_в}{\bar{x}_в} \cdot 100\,\%$.

Если исходный вариационный ряд недоступен, приведенные выше формулы вычисления выборочных характеристик, применимые только к дискретному ряду, могут быть использованы для приближенного вычисления выборочных характеристик непрерывного признака, представленного интервальным рядом. Для этого предварительно каждый интервал x_{i-1}–x_i заменяется его серединой $x_i' = (x_{i-1} + x_i)/2$, то есть производится замена интервального ряда дискретным, соответствующим ему приближенно.

3.29 Точечные и интервальные оценки параметров распределения

Важной задачей математической статистики является задача оценивания (приближенного определения) по выборочным данным параметров закона распределения признака X генеральной совокупности. Другими словами, необходимо по данным выборочного распределения оценить неизвестные параметры теоретического распределения. Статистические оценки могут быть точечными и интервальными.

Пусть признак X генеральной совокупности распределен нормально, то есть теоретическое распределение имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

с параметрами:

$a = M(X) = \bar{x}_{ген}$ – математическое ожидание признака X;

$\sigma = \sqrt{M((X - M(X))^2)} = \sigma_{ген}$ – среднеквадратическое отклонение признака X.

Точечной оценкой неизвестного параметра называют число (точку на числовой оси), которое приблизительно равно оцениваемому параметру и может заменить его с достаточной степенью точности в статистических расчетах.

Для того чтобы точечные статистические оценки обеспечивали «хорошие» приближения неизвестных параметров, они должны быть несмещенными, состоятельными и эффективными.

Пусть θ^* – точечная оценка неизвестного параметра θ.

Несмещенной называют такую точечную статистическую оценку θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру: $M(\theta^*) = \theta$.

Состоятельной называют такую точечную статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. В частности, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Эффективной называют такую точечную статистическую оценку, которая при фиксированном n имеет наименьшую дисперсию.

Можно показать, что выборочная средняя $\bar{x}_{\text{в}}$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой генеральной средней $\bar{x}_{\text{ген}}$. Точечными оценками генеральной дисперсии $D_{\text{ген}} = \sigma^2$ могут служить выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, или, при малых объемах выборки n, исправленная выборочная дисперсия: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}}$.

Точечными оценками для генерального среднеквадратического отклонения $\sigma_{\text{ген}} = \sigma$ могут служить: $y_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение или $S = \sqrt{S^2}$ – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

Для построения *интервальной оценки* рассмотрим событие, заключающееся в том, что отклонение точечной оценки параметра θ^* от истинного значения этого параметра θ по абсолютной величине не превышает некоторую положительную величину Δ. Вероятность такого события $P(|\theta - \theta^*| < \Delta) = \gamma$. Заменив неравенство $|\theta - \theta^*| < \Delta$ на равносильное, получим: $P(\theta^* - \Delta < \theta < \theta^* + \Delta) = \gamma$.

Вероятность того, что *доверительный интервал* $(\theta^* - \Delta,\ \theta^* + \Delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ и называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки. Величину Δ называют *точностью* оценки.

Построим интервальную оценку параметра $a = \bar{x}_{\text{ген}}$ для двух случаев:

1) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *известен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \bar{x}_{\text{ген}}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\bar{x}_{в} - \Delta < a < \bar{x}_{в} + \Delta,$$

где $\Delta = \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$,

t – аргумент функции Лапласа: $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;

2) параметр σ нормального закона распределения признака X генеральной совокупности *неизвестен*. В этом случае интервальная оценка параметра $a = \bar{x}_{ген}$ с заданной надежностью γ определяется формулой:

$$\bar{x}_{в} - \Delta < a < \bar{x}_{в} + \Delta,$$

где $\Delta = \dfrac{t_{\gamma} \cdot S}{\sqrt{n}}$,

S – точечная оценка параметра σ,

$t_{\gamma} = t(\gamma, n)$ – значения распределения Стьюдента, которые находим по таблице.

3.30 Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Во многих практических задачах точный закон распределения исследуемого признака X генеральной совокупности неизвестен. В этом случае необходимо проверить *гипотезу* о предполагаемом законе распределения. Выдвигаются *нулевая* гипотеза H_0 и ей *конкурирующая* H_1.

H_0: признак X имеет нормальный закон распределения.

H_1: признак X имеет закон распределения, отличный от нормального.

Нулевая гипотеза проверяется с помощью *критерия согласия*.

Возможны случаи:

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	*Ошибка первого рода*
Неверна	*Ошибка второго рода*	Правильное решение

Вероятность допустить ошибку первого рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она верна) называется *уровнем значимости критерия*.

Вероятность не допустить ошибку второго рода (отвергнуть нулевую гипотезу, когда она неверна) называется *мощностью критерия.*

Критерий χ^2 *Пирсона* («хи-квадрат») – наиболее часто употребляемый критерий, может применяться для проверки гипотезы о любом законе распределения. Независимо от того, какое распределение имеет X, распределение случайной величины χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i^{э} - m_i^{т})^2}{m_i^{т}},$$

где $m_i^{э}$ – эмпирические частоты, $m_i^{т}$ – теоретические частоты; при $n \to \infty$ стремится к χ^2 – распределению с k степенями свободы.

Теоретические частоты определяются, исходя из предположения о законе распределения генеральной совокупности, в данном случае о нормальном законе. Так как $p_i = \frac{m_i}{n}$, где p_i – теоретическая вероятность, то $m_i^{т} = n \cdot p_i$.

Для дискретного ряда: $p_i = \frac{h}{\sigma_{в}} \cdot f(u_i)$, где $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_{в}}$, $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ –дифференциальная функция нормированного нормального распределения, шаг $h = x_i - x_{i-1}$, $\bar{x}_{в}$ – выборочная средняя, $y_{в}$ – выборочное среднее квадратическое отклонение.

Для интервального ряда: $p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_{в}}{\sigma_{в}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_{в}}{\sigma_{в}}\right)$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Рассчитав теоретические частоты, находят $\chi^2_{набл}$. Из таблицы *критических точек* распределения χ^2 по заданному уровню значимости α (достаточно малая вероятность) и числу степеней свободы *k* находят $\chi^2_{крит}(\alpha, k)$ – границу правосторонней критической области. Здесь $k = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного или число интервалов $(x_{i-1} - x_i)$ непрерывного признака *X*, *r* – число параметров предполагаемого закона распределения, для нормального распределения $r = 2$, отсюда $k = s - 3$. Затем сравнивают $\chi^2_{набл}$ и $\chi^2_{крит}(\alpha, k)$ и делают вывод.

При формулировке вывода руководствуются следующим правилом:

- если *наблюдаемое значение* критерия $\chi^2_{набл}$ попало в *область принятия гипотезы* ($\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3а.), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак *X* имеет нормальный закон распределения, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{э}$ и $m_i^{т}$) случайное;

- если наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл}$ попало в *критическую область* ($\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}(\alpha, k)$), как показано на рисунке (Рисунок 3б.), то нулевая гипотеза отвергается, справедлива конкурирующая гипотеза, то есть признак *X* имеет закон распределения, отличный от нормального, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами ($m_i^{э}$ и $m_i^{т}$) значимо.

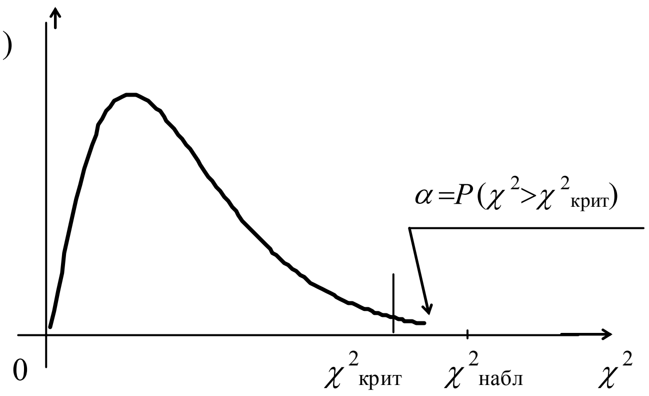

Рисунок 3а – Область принятия гипотезы

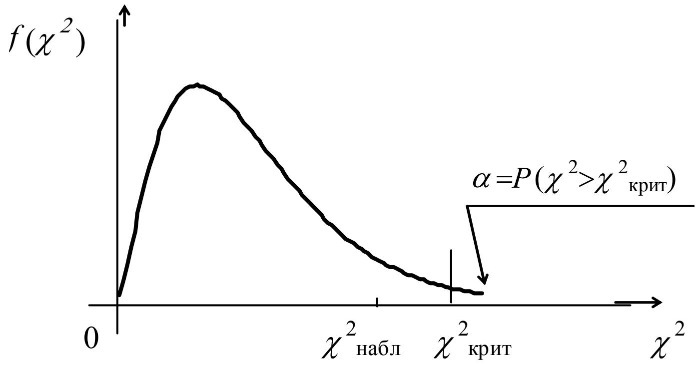

Рисунок 3б – Критическая область

3.31 Корреляционная зависимость. Линейное уравнение регрессии – оценка параметров

Признаки X и Y находятся в *корреляционной зависимости*, если каждому значению одного признака x_i соответствует определенная условная средняя $\overline{y}_{x_i}$ другого признака.

Парная корреляционная зависимость будет линейной, если она приближенно выражается линейной функцией. Вид зависимости можно определить графически. С этой целью строятся точки с координатами (x_i, $\overline{y}_{x_i}$). По расположению построенных точек подбирается линия. Можно предположить, что это прямая, тогда связь – линейная.

Целью корреляционного анализа является оценка тесноты связи между признаками. Для этого находится *выборочный линейный коэффициент корреляции* по формуле:

$$r_{\text{в}} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$ – выборочные средние;

σ_x, σ_y – выборочные средние квадратические отклонения.

Так как коэффициент корреляции $r_в$ рассчитывается по выборочным данным и является оценкой генерального коэффициента корреляции $r_{ген}$, то необходимо проверить значимость $r_в$. С этой целью выдвигаются нулевая и конкурирующая гипотезы: H_0: $r_{ген} = 0$, H_1: $r_{ген} \neq 0$.

Нулевая гипотеза проверяется при заданном уровне значимости α с помощью случайной величины T, имеющей распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы:

$$T = \frac{r_в \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}}.$$

По выборочным данным рассчитывают $T_{набл}$, а по таблице критических точек распределения Стьюдента находим $t_{крит.дв}(\alpha, k)$ с учетом *двусторонней критической* области. Сравнивают $T_{набл}$ и $t_{крит.дв}(\alpha, k)$. Если $|T_{набл}| < t_{крит.дв}(\alpha, k)$, то есть наблюдаемое значение критерия попало в область принятия гипотезы, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения $r_{ген} = 0$, $r_в$ незначим, признаки X и Y некоррелированны. А если $T_{набл}$ попало в критическую область, то есть $|T_{набл}| > t_{крит.дв}(\alpha, k)$, то нулевую гипотезу отвергают, справедлива конкурирующая, то есть $r_{ген} \neq 0$, $r_в$ значим, признаки X и Y коррелированны.

С помощью $r_в$ анализируют тесноту взаимосвязи между признаками X и Y. Чем ближе $|r_в|$ к единице, тем теснее связь между признаками, чем ближе $|r_в|$ к нулю, тем связь слабее.

Коэффициент детерминации $D = r_в^2 \cdot 100\,\%$ показывает, на сколько процентов в среднем вариация *результативного признака Y* объясняется за счет вариации *факторного признака X*.

Следующим этапом является *регрессионный анализ*, с помощью которого корреляционную зависимость между признаками приближенно выражают в виде линейного уравнения регрессии вида $\overline{y}_x \approx a_0 + a_1 \overline{x}$. Неизвестные параметры a_0 и a_1 находятся методом наименьших квадратов. Применяя этот метод, получаем следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \overline{x} = \overline{y} \\ a_0 \overline{x} + a_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}.$$

Решая систему, находят оценки параметров a_0 и a_1. Уравнение регрессии можно записать в таком виде:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^2} (x - \overline{x}).$$

Параметр $a_1 = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x^2}$ – *коэффициент регрессии* – показывает, как изменится в среднем результативный признак, если факторный признак увеличится на единицу своего измерения. Уравнение регрессии можно использовать для *прогнозирования* (предсказания).

4 Вопросы по курсу

1. Множества: определение, виды множеств, способы задания множеств, операции над множествами, мощность множества.
2. Определители: определение, свойства, правила вычисления.
3. Линейные пространства: определение, примеры, свойства.
4. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства. Свойства линейной независимости.
5. Размерность и базис линейного пространства: определение, примеры. Координаты вектора.
6. Матрица системы векторов. Матрица перехода от базиса к базису. Преобразования координат вектора при переходе к новому базису.
7. Евклидово пространство: определение, примеры, базис и размерность.
8. Норма вектора, ортонормированный базис.
9. Линейный оператор: определение, примеры.
10. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Координаты образа вектора.
11. Характеристическое уравнение линейного оператора: определение, инвариантность относительно базиса. Собственные векторы линейного оператора: определение, правило нахождения.
12. Квадратичные формы: определение. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
13. Линейное пространство матриц: определение матриц, виды матриц, линейные операции над матрицами.
14. Специальные операции над матрицами: транспонирование, умножение, построение обратной матрицы.
15. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.
16. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными (методом Крамера и матричным способом).
17. Совместность системы m линейных уравнений с n неизвестными: определение, критерий совместности, построение общего решения системы.
18. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.
19. Различные уравнения прямой на плоскости.
20. Различные уравнения плоскости в пространстве. Прямая в пространстве.
21. Линейное пространство геометрических векторов.
22. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, использование при решении задач.
23. Основные понятия теории графов.

24. Метрические пространства: определение, примеры. Окрестность точки в метрическом пространстве.
25. Понятие функции, виды функций, способы задания функций. Основные элементарные функции.
26. Понятие предела в метрическом пространстве. Предел последовательности, предел функции.
27. Свойства пределов числовых функций. Теоремы о пределах.
28. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
29. Непрерывность функции. Точки разрыва: определение, классификация.
30. Производная: определение, геометрический и механический смысл. Правила вычисления производной. Таблица производных.
31. Дифференциал функции одной переменной: определение, геометрический и механический смысл. Свойство инвариантности дифференциала.
32. Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной (Ферма, Ролля, Лагранжа). Правило Лопиталя.
33. Экстремум функции одной переменной: определение, необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
34. Приложение дифференциального исчисления функции одной переменной к исследованию функций и построению графиков.
35. Понятие функции, виды функций, способы задания функций нескольких переменных.
36. Дифференцирование функции двух переменных: частные производные, их геометрический смысл. Частные производные второго порядка.
37. Дифференциал функции двух переменных. Условия дифференцируемости функции двух переменных.
38. Экстремум функции двух переменных: определение, необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции.
39. Первообразная, теорема о первообразных. Неопределенный интеграл: определение, свойства.
40. Основные методы интегрирования: табличный, по - частям, подстановкой.
41. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
42. Свойства определенного интеграла, выраженные равенствами и неравенствами.
43. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
44. Несобственные интегралы первого и второго рода.
45. Двойные интегралы: определение, геометрический смысл, правило вычисления.
46. Дифференциальные уравнения первого порядка: определение, общее и частное решения, их геометрический смысл, теорема о существовании и единственности решения.

47. Решение дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, линейных).
48. Дифференциальные уравнения второго порядка: определение, общее и частное решения, теорема о существовании и единственности решения.
49. Элементы комбинаторики: размещения, сочетания, перестановки.
50. Пространство элементарных исходов. События: виды событий, операции над событиями.
51. Относительная частота. Статистическое определение вероятности
52. Аксиоматическое определение вероятности. Классическое определение вероятности.
53. Совместные и несовместные события. Теорема сложения вероятностей.
54. Условная и безусловная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
55. Вероятность появления хотя бы одного события.
56. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
57. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
58. Предельные теоремы в схеме Бернулли.
59. Наивероятнейшее число появления событий в независимых испытаниях.
60. Дискретные и непрерывные случайные величины: определение, закон распределения.
61. Функция распределения вероятностей случайной величины, ее свойства.
62. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, ее свойства.
63. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.
64. Дисперсия случайной величины, ее свойства. Среднее квадратичное отклонение.
65. Моменты случайных величин: начальные и центральные.
66. Законы распределения случайных величин: равномерное, биноминальное, показательное, распределение Пуассона.
67. Нормальное распределение: определение, свойства, график. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал.
68. Правило трех сигм. Оценка отклонения теоретического распределения от нормального.
69. Распределения «хи-квадрат», Стьюдента, Фишера-Снедекора.
70. Закон распределения двумерной случайной величины.
71. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной случайной величины.
72. Числовые характеристики непрерывной системы двух случайных величин.
73. Закон больших чисел: неравенство и теорема Чебышева.
74. Генеральная совокупность и выборка, способы отбора.
75. Вариационный ряд: дискретный и интервальный.
76. Виды и графики вариационных рядов: полигон, гистограмма.
77. Эмпирическая функция распределения, ее свойства.

78. Числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана.
79. Понятие оценки. Точечные оценки параметров распределения. Несмещенные оценки.
80. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал.
81. Понятие статистической гипотезы. Ошибки первого и второго рода.
82. Гипотезы о параметрах нормального распределения.
83. Гипотезы о равенстве средних и дисперсий двух нормальных распределений.
84. Критерии согласия. Непараметрические критерии: Манна-Уитни, Вилкоксона.
85. Корреляция: корреляционная таблица, коэффициент корреляции.
86. Ранговая корреляция: Спирмена, Кендалла.
87. Регрессия: эмпирическая, линейная.
88. Решение задачи однофакторного дисперсионного анализа.

5 Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Среди матриц выбрать те, для которых существует обратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{\sin(\ln\sqrt{x})}$.
3. Образуют ли матрицы размерности 2*3 Евклидово пространство?
4. Известно, что однородная система линейных уравнений содержит 5 уравнений с 7 неизвестными, ранг равен 3. Что можно сказать о пространстве решений этой системы?
5. Исследовать функцию на экстремум $y = x^2 - 4x$.
6. Является ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 7 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ транспонированной к произведению матриц $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.
7. Проверить, образуют ли векторы $\overline{a}(1,2,3)$, $\overline{b}(4,5,6)$, $\overline{c}(7,8,9)$ базис.
8. Используя определение производной, найти производную постоянной функции.
9. Укажите возможные способы задания функций y=lnx+2, $U = x + y + z - xyz$.
10. Укажите первообразную для функции $y = {}^{1}\!/_{2x}$.
11. Найти тангенс угла наклона касательной к линии y=lnx в точке x=2.
12. Являются ли векторы линейно независимыми $\overline{a}(1,3,2)$, $\overline{b}(4,3,8)$, $\overline{c}(3,9,0)$, $\overline{d}(3,6,2)$?
13. Однородная система линейных уравнений содержит 3 уравнения с 4 неизвестными. Что можно сказать о количестве решений такой системы?
14. Неоднородная система линейных уравнений содержит 3 уравнений с 3 неизвестными. Что можно сказать о количестве решений такой системы?
15. Найти полный дифференциал функции $z = xy - x^2 - y^3$.
16. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$ *и* $y = -x^2 - 2$.
17. Найти точки, в которых функция $z = x^2 + y^2 - xy$ может иметь экстремум.
18. Найти смешанные частные производные 2 порядка: $z = x^3 y^3$.
19. Решить задачу Коши: $y' = 3x^2 - 4x + 2;\ y(1) = 1$.

20. Вычислить $\int_{1}^{2} \frac{3x^2-1}{(x^3-x+10)^2}dx$.

21. Найти общий член ряда: $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\Lambda$.

22. Найти все решения дифференциального уравнения $(x+1)^3 dy-(y-2)^2 dx=0$.

23. Найти $\int(2x-2)\cos 2xdx$.

24. Исследовать ряд на сходимость в точках x=2 и x=-2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(4-x)^n$.

25. Вычислить $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx$.

26. Какая из функций является решением дифференциального уравнения: $y=x^3+c;\ \ y=\sin x;\ \ \ y'^2+y^2=1$.

27. Является ли функция $y=x^2\ln x+c_1x^2+c_2x+c_3$ решением дифференциального уравнения $xy'''=2$?

28. Среди рядов выбрать сходящиеся: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

29. Вычислить $\int_{0}^{\Pi}(2x^2-2)\cos 2xdx$.

30. Является ли ряд абсолютно сходящимся: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$.

31. Вычислить $\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx$.

32. Относительно событий, перечисленных в каждом примере, указать, образуют ли они в данном опыте полную группу событий (да, нет):

а) опыт - бросание монеты, события: A1={герб}; A2={цифра};

б) опыт - бросание двух монет; события: B1={два герба}; B2={две цифры};

в) опыт - бросание двух игральных кубиков; события: C1={на обоих кубиках шестерки}; C2={ни на одном кубике нет шестерки}; C3={на одном из кубиков шестерка, на другом - нет}.

33. Относительно каждой группы событий ответить на вопрос, являются ли они в данном опыте несовместными (да, нет).

а) опыт - бросание монеты; события: A1={герб}; A2={цифра};

б) опыт - бросание двух монет; события: B1={герб на первой монете}; B2={герб на второй монете};

в) опыт - вынимание двух карт из колоды; события: $C1$={обе карты черной масти}; $C2$={среди вынутых карт есть дама треф}; $C3$={среди вынутых карт есть туз пик}.

34. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A={герб на первой монете};
B={цифра на первой монете};
C={герб на второй монете};
D={цифра на второй монете};
E={хотя бы один герб};
F={хотя бы одна цифра};
G={один герб и одна цифра};
H={ни одного герба};
K={два герба}.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: 1) $A+C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G+E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E+K$.

35. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится “герб”.

36. В коробке имеется десять шаров: три белых и семь черных. Из коробки наугад вынимается шар. Какова вероятность того, что этот шар: а) белый; б) черный?

37. Из слова НАУГАД выбирается одна буква. Какова вероятность, что это буква *А*? Какова вероятность того, что это гласная?

38. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпадут ровно два герба?

39. В ящике 10 шаров, из которых четыре окрашены. Взяли три шара. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых шаров окрашен.

40. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что два наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

41. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из 2-х орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

42. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

43. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти, взятых наугад, изделий: а) нет ни одного испорченного; б) будут два испорченных.

44. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

45. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных х «гербом” вверх, будет от 45 до 55?

46. Игральная кость бросается пять раз. Найти вероятность того, что два раза появится число очков, кратное 3.

47. Сколько нужно взять случайных цифр, чтобы вероятность появления среди них цифры 5 была не менее 0,9.

48. Монета бросается 20 раз. Найти наивероятнейшее число появлений герба.

49. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее число появлений числа очков, кратного трем.

6 Решение типовых задач

Пример 1.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ 3x + 3y - 2z = 8, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти её решения с помощью формул Крамера;

2) записать систему в матричном виде и решить её средствами матричного исчисления:

Решение:

1) Рассмотрим матрицу системы линейных уравнений $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Главный определитель матрицы

$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot(-2) - 3\cdot 1\cdot 1 = 5$ (вычислили по правилу треугольника).

Так как $d = 5 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое и можно найти по формулам Крамера. Для системы трех уравнений с тремя неизвестными формулы Крамера имеют вид: $\begin{cases} x = \dfrac{d_1}{d}, \\ y = \dfrac{d_2}{d}, \\ z = \dfrac{d_3}{d}, \end{cases}$ где d_1, d_2 и d_3 – получаются из определителя d заменой соответственно первого, второго и третьего столбца на столбец из свободных членов. Составим и вычислим эти определители, используя, например, правило треугольника.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 6 + 1\cdot 8\cdot(-1) - (-1)\cdot 3\cdot 6 - 1\cdot(-2)\cdot 5 - 1\cdot 8\cdot 1 = 15;$$

$$d_2=\begin{vmatrix}2&5&-1\\3&8&-2\\1&6&1\end{vmatrix}=2\cdot8\cdot1+5\cdot(-2)\cdot1+6\cdot3\cdot(-1)-(-1)\cdot8\cdot1-6\cdot(-2)\cdot2-5\cdot3\cdot1=15\,;$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2&1&5\\3&3&8\\1&1&6\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot6+1\cdot8\cdot1+1\cdot3\cdot5-5\cdot3\cdot1-1\cdot8\cdot2-1\cdot3\cdot6=10\cdot$$

По формулам Крамера получаем:

$$x=\frac{d_1}{d}=\frac{15}{5}=3,\ y=\frac{d_2}{d}=\frac{5}{5}=1,\ z=\frac{d_3}{d}=\frac{10}{5}=2.$$

2) Данную систему можно представить в матричном виде: $A{\cdot}X=B$,

где $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&3&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$ – матрица системы уравнений,

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ – матрица-столбец из неизвестных,

$B=\begin{pmatrix}5\\8\\6\end{pmatrix}$ - матрица-столбец из свободных членов.

Умножим слева обе части уравнения на A^{-1}, где A^{-1} – обратная для матрицы A матрица. Тогда $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}B,\quad A^{-1}A=E,\quad \Rightarrow\quad X=A^{-1}B$. Значит, решение матричного уравнения $A{\cdot}X=B$ будем искать в виде $X=A^{-1}\cdot B$, где

A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

Так как определитель матрицы A не равен нулю (d=5), то обратная матрица существует и равна:

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

где A_{ji} – алгебраическое дополнение для элементов исходной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}=3\cdot1-(-2)\cdot1=5;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}=-(3\cdot1-(-2)\cdot1)=-5\,;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = -2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3) = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3.$$

Получаем $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + (-2) \cdot 8 + 1 \cdot 6 \\ -5 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 6 \\ 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 3$; $y = 1$; $z = 2$.

Пример 2.

Построить общее решение линейной однородной системы трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 18x_2 - 16x_3 - 37x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Будем решать систему методом Гаусса. Для этого с помощью элементарных преобразований приведём матрицу к трапециевидному виду.

$$\begin{pmatrix}1&4&-3&-9\\3&-2&4&1\\1&18&-16&-37\end{pmatrix}\begin{matrix}(-3)\ (-1)\\ +\quad +\\ \ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-3&-9\\0&-14&13&28\\0&14&-13&-28\end{pmatrix}\begin{matrix}\ \\ +\\ \ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-3&-9\\0&-14&13&28\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получили трапециевидную матрицу, в которой только две ненулевые строки. Этой матрице соответствует система:

$$\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3-9x_4=0,\\-14x_2+13x_3+28x_4=0.\end{cases}$$

В полученной системе два уравнения с четырьмя неизвестными, значит система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от n-r =4-2=2 параметров (n – число неизвестных в системе. r – число уравнений в получившейся после преобразований системе).

Обозначим для удобства $x_3=C_1$, $x_4=C_2$ и выразим базисные неизвестные через параметры:

$$\begin{cases}x_1+4x_2=3C_1+9C_2,\\-14x_2=-13C_1-28C_2.\end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим переменную x_2: $x_2=\left(-13C_1-28C_2\right)/(-14)$

Подставим полученное выражение в первое уравнение и выразим переменную x_1:

$$x_1=\frac{-4\left(-13C_1-28C_2\right)}{-14}+\left(3C_1+9C_2\right)=\frac{52C_1+112C_2-42C_1-126C_2}{-14}=\frac{10C_1-14C_2}{-14}.$$

Тогда: $x_1=\dfrac{d_1}{d}=\dfrac{10C_1-14C_2}{-14}$, $\quad x_2=\dfrac{d_2}{d}=\dfrac{-13C_1-28C_2}{-14}$.

Общее решение исходной системы имеет вид: $\begin{cases}x_1=\dfrac{10C_1-14C_2}{-14},\\[2ex] x_2=\dfrac{-13C_1-28C_2}{-14},\\[2ex] x_3=C_1,\\ x_4=C_2.\end{cases}$

Пример 3.

По координатам вершин $A\,(3;-2;2)$, $B\,(1;-3;1)$, $C\,(2;0;4)$, $D\,(6;-4;6)$ пирамиды $ABCD$.

Найти:

а) длины ребер AB и AC;

б) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) уравнение прямой AB;
г) уравнение плоскости BCD.

Решение:
Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = \left(1-3;\ -3-(-2);\ 1-2\right) = \left(-2;\ -1;\ -1\right);$$
$$\overline{AC} = \left(2-3;\ 0-(-2);\ 4-2\right) = \left(-1; 2; 2\right);$$
$$\overline{AD} = \left(6-3;\ -4-(-2);\ 6-2\right) = \left(3; -2; 4\right).$$

а) Длины ребер AB и AC найдем как длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6},\ \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

т.е. $AB = \sqrt{6}$ (ед.), $AC = 3$ (ед.).

б) Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ найдём, используя скалярное произведение векторов: $\cos\left(\overline{AB}\,\hat{,}\,\overline{AC}\right) = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$,

тогда $\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{6}\cdot 3 = 3\sqrt{6}$, $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = -2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 2 = -2;$

$$\cos\left(\overline{AB}\,\hat{,}\,\overline{AC}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{6}}.$$

в) Для нахождения уравнения прямой AB используем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Имеем:

$\dfrac{x-3}{1-3} = \dfrac{y+2}{-3-(-2)} = \dfrac{z-2}{1-2}$, $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$ – каноническое уравнение искомой прямой.

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} \\ \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{z-2}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1(x-3) = -2(y+2) \\ -1(x-3) = -2(z-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-7=0 \\ x-2z+1=0 \end{cases}$$ – общее уравнение искомой прямой.

г) Для нахождения уравнения плоскости BCD используем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем: $\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 2-1 & 0+3 & 4-1 \\ 6-1 & -4+3 & 6-1 \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

т.е.: $18\cdot(x-1)+10\cdot(y+3)-16\cdot(z-1)=0,\quad 18x-18+10y+30-16z+16=0.$
$18x+10y-16z+28=0$ – искомое уравнение, или $9x+5y-8z+14=0$.

Ответ: а) $\sqrt{6}; 3$; б) $\dfrac{-2}{3\sqrt{6}}$; в) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$; г) $9x+5y-8z+14=0$.

Пример 4.
Исследовать функцию и построить её график: $y = x(x-1)^3$.

Решение:

1. Областью определения данной функции является промежуток x ∈ (-∞, ∞), так как функция представляет собой многочлен.
2. Функция не является ни четной ни нечетной, так как на всей области определения выполняется $f(-x) \neq f(x),\quad f(-x) \neq -f(x)$.
3. Точки пересечения с осями координат:

с осью Оу: x = 0, y = 0, так как, подставляя вместо x ноль, получаем, что и y равен нулю;

с осью Ох: y = 0, x = 0, x = 1, так как функция принимает нулевое значение при значениях x, равных нулю и единице.

4. Асимптоты кривой.

Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва (это видно из области определения).

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x-1)^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{1} = \infty$ – наклонных асимптот нет.

5. Находим точки экстремума.

$$y' = \left[x(x^3-3x^2+3x-1\right]' = \left[x^4-3x^3+3x^2-x\right]' = 4x^3-9x^2+6x-1.$$

Для нахождения критических точек следует решить уравнение:
$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.

Для этого разложим данный многочлен третьей степени на множители.

Подбором можно определить, что одним из корней этого уравнения является число x = 1.

Тогда

$$
\begin{array}{l|l}
-\,4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 & \underline{\;x - 1\;} \\
\quad \underline{4x^3 - 4x^2} & 4x^2 - 5x + 1 \\
\qquad -\,{-5x^2} + 6x & \\
\qquad\;\; -\underline{5x^2 + 5x} & \\
\qquad\qquad -\;\; x - 1 & \\
\qquad\qquad\quad\; \underline{x - 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0 &
\end{array}
$$

Тогда можно записать $(x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$. Окончательно получаем две критические точки: x = 1 и x = 1/4.

Найдем вторую производную функции: $12x^2 - 18x + 6$. Приравнивая к нулю, находим: x = 1, x = 1/2.

Систематизируем полученные данные в таблице (Таблица 11).

Таблица 11 – Таблица данных исследования

	(-∞ ; 1/4)	1/4	(1/4 ; 1/2)	1/2	(1/2 ; 1)	1	(1 ; ∞)
f′′(x)	+	+	+	0	–	0	+
f′(x)	–	0	+	+	+	0	+
f(x)	убывает вып.вниз	min	возрастает вып.вниз	перегиб	возрастает вып.вверх	перегиб	возрастает вып. вниз

6. Построим график функции (Рисунок 4).

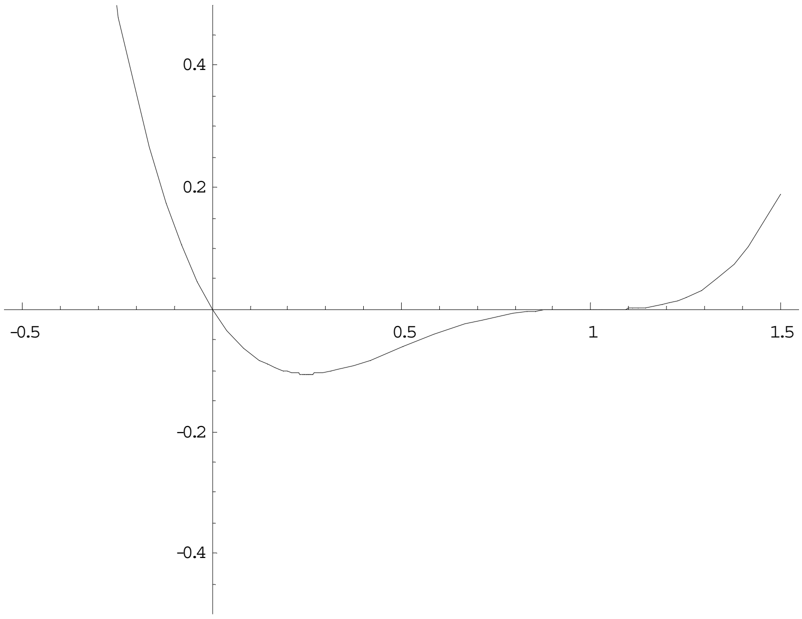

Рисунок 4 – График функции $y = x(x-1)^3$

Пример 5.

Экспериментальным путём получены следующие данные (таблица 12). Требуется с помощью метода наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$.

Таблица 12 – Таблица экспериментально полученных данных

X_i	1	2	3	4	5	6
Y_i	6	8	10	9	12	11

Решение:

Для нахождения значений *a* и *b* воспользуемся формулами:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Результаты вычислений запишем в таблице 13.

Таблица 13 –Таблица результатов вычислений

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	6	1	6
2	2	8	4	16

Продолжение таблицы 13

3	3	10	9	30
4	4	9	16	36
5	5	12	25	60
6	6	11	36	66
$\sum_{i=1}^{n}$	21	56	91	214

Получаем систему:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 214, \\ 21a + 6b = 56. \end{cases}$$

Решив систему, получаем $a = \frac{36}{35}$, $b = \frac{86}{15}$ и искомая функция имеет вид:

$y = \frac{36}{35}x + \frac{86}{15}$.

Ответ: y=$\frac{36}{35}x + \frac{86}{15}$.

Пример 6.

Исследовать функцию $z = f(x, y)$ на экстремум.

$f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + x + y$.

Решение:

Найдём стационарные точки, используя необходимые условия экстремума:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-x^2 - xy - y^2 + x + y\right)_x' = -2x - y + 1;$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(-x^2 - xy - y^2 + x + y\right)_y' = -x - 2y + 1;$

$$\begin{cases} -2x - y + 1 = 0, \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Получаем одну стационарную точку $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Исследуем функцию на экстремум в точке *M,* используя достаточные условия экстремума.

Обозначим: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, dy}(M)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-2x - y + 1\right)_x' = -2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, dy} = \left(-2x - y + 1\right)_y' = -1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x - 2y + 1\right)_y' = -2.$$

Тогда: $A = -2,\ B = -1,\ C = -2$.

Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} : \Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$

Так как $\Delta = 3 > 0$, то в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ экстремум есть. Так как $A = -2 < 0$, то в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет строгий локальный максимум.

Ответ: максимум в точке $M\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Пример 7.

Найти неопределённые интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

а) $\int \frac{6x - arctg 4x}{1 + 16x^2}\, dx$,

б) $\int x \cdot arctg\, x\, dx$.

Решение:

а) $$\int \frac{6x + arctg 4x}{1 + 16x^2}\, dx = \int \frac{6x}{1 + 16x^2}\, dx + \int \frac{arctg 4x}{1 + \left(4x\right)^2}\, dx = \frac{6}{32}\int \frac{32x}{1 + 16x^2}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{4}\int arctg 4x \cdot d\left(arctg 4x\right) = \frac{6}{32} \cdot \ln\left|1 + 16x^2\right| + \frac{1}{4}\int \frac{\left(arctg 4x\right)^2}{2} + C =$$
$$= \frac{3}{16} \cdot \ln\left|1 + 16x^2\right| + \frac{1}{8}\left(arctg 4x\right)^2 + C.$$

При решении использован метод подведения под знак дифференциала и правило $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln\left|f(x)\right| + C.$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{16} \cdot \ln\left|1 + 16x^2\right| + \frac{1}{8}\left(arctg 4x\right)^2 + C\right)' = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1 + 16x^2} \cdot 32x + \frac{1}{8} \cdot 2 arctg\, 4x \frac{1}{1 + 16x^2} \cdot 4 + 0 =$$

$$= \frac{6x}{1 + 16x^2} + \frac{arctg 4x}{1 + 16x^2} = \frac{6x + arctg 4x}{1 + 16x^2}.$$

б) $\int x \cdot arctg\, x\, dx = \begin{vmatrix} u = arctg\, x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\, dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = arctgx \dfrac{x^2}{2} - \int \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{dx}{1+x^2} =$

$$= arctg\, x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = arctg\, x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = arctg\, x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$arctg\, x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2} arctg\, x = arctg\, x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arctg\, x + C.$$

При решении использован метод интегрирования по частям:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du.$$

Проверка:

$$\left(arctg\, x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot arctg\, x + C \right)' = (arctg\, x)' \cdot \frac{x^2}{2} + arctg\, x \left(\frac{x^2}{2} \right)' - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} + 0 =$$

$$= \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x^2}{2} + arctg\, x \frac{2x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{x^2}{2(1+x^2)} + x \cdot arctg\, x - \frac{1+x^2-1}{2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x^2)} + x \cdot arctg\, x - \frac{x^2}{2(1+x^2)} = x \cdot arctg\, x.$$

Пример 8.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$ и $y=x^2-2x$.

Решение:

Построим графики функций: $y = 4 - x^2$ парабола, ветви направлены вниз, $y = x^2 - 2x$ парабола, ветви направлены вверх.

Определим точки их пересечения:

$4 - x^2 = x^2 - 2x, \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0, \quad x_1 = -1, \; x_2 = 2.$

Две точки пересечения парабол $A(-1;3)$ и $B(2;0)$. Построим эти точки и параболы (Рисунок 5).

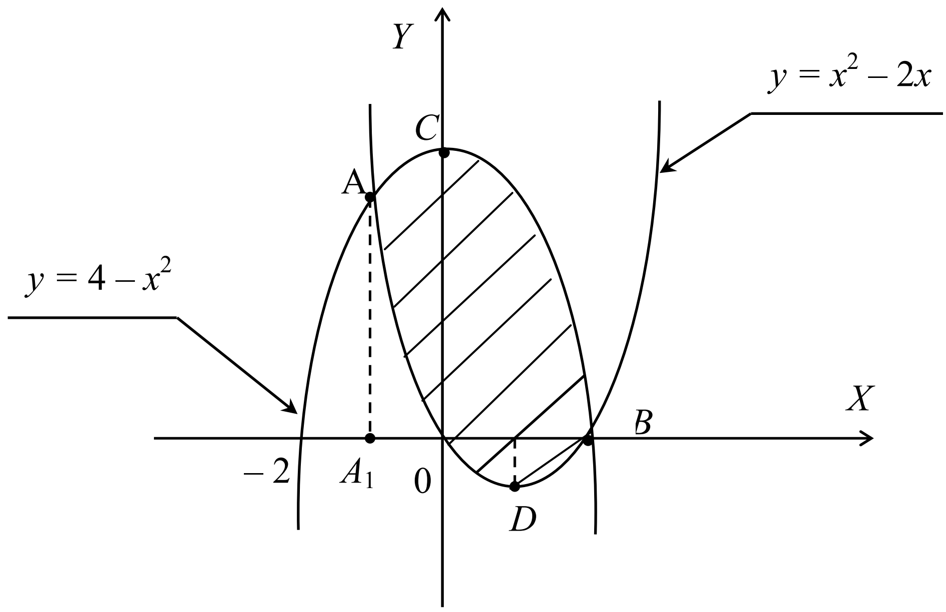

Рисунок 5 – Графики функций: $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$

Искомую площадь S можно найти по формуле: $S = \int_{-1}^{2} \left(f(x) - \varphi(x) \right) dx$, где $f(x) = 4 - x^2, \quad \varphi(x) = x^2 - 2x$.

$$S = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\, dx = \int_{-1}^{2} \left(\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 2x\right) \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(4 + 2x - 2x^2\right) dx.$$

Отсюда $S = \int_{-1}^{2} \left(4 + 2x - 2x^2\right) dx = \left(4x^2 + x^2 - \frac{2}{3} x^2 \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 9.$

Ответ: 9 кв. ед.

Пример 9.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.

Решение:

Подынтегральная функция чётная, поэтому: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b \to +\infty} arctg \Big|_{0}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left(arctg\, b - arctg\, 0 \right) = \frac{p}{2}.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{p}{2} = p$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Ответ: интеграл сходящийся, π .

Пример 10.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения
$3x(2+y^2)dx = 2y(x^2+3)dy$.

Решение:

Нам дано дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Приведем его к уравнению с разделенными переменными учитывая, что $x^2+3 \neq 0,\ 2+y^2 \neq 0$.

Получим: $\frac{3x}{x^2+3}dx = \frac{2y}{2+y^2}dy$.

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{3x}{x^2+3}dx = \int \frac{2y}{2+y^2}dy ,$$
$$\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \int \frac{2y}{2+y^2}dy ,$$
$$\frac{3}{2}\ln\left|x^2+3\right| = \ln\left|y^2+2\right| + \ln C ,$$
$$\ln(x^2+3)^{3/2} = \ln(C(y^2+2)) ,$$

$(x^2+3)^{3/2} = C(y^2+2)$ – общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Ответ: $(x^2+3)^{3/2} = C(y^2+2)$.

Пример 11.

В урне содержится 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) ровно 2 белых шара, б) меньше, чем 2 белых шара, в) хотя бы 1 белый шар.

Решение:

а) Пусть событие А – среди вынутых шаров ровно два белых (тогда два других вынутых шара – черные). Вероятность этого события найдем, используя классическую формулу вероятности: $P(A) = \frac{m}{n}$, где n- число всевозможных элементарных исходов, m – число элементарных исходов, благоприятствующих данному событию. Элементарными исходами являются всевозможные сочетания:

$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\cdot(11-4)!} = \frac{11!}{4!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 7!} = 330;$$

$$m = C_6^2 C_5^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 15\cdot 10 = 150.$$

Получаем: $P(A) = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$.

б) Пусть событие В – среди вынутых шаров меньше, чем два белых шара. Это возможно, когда вынули один белый и три черных шара или ноль белых и четыре черных шара. Поэтому

$$m = C_6^1 C_5^3 + C_6^0 C_5^4 = \frac{6!}{1!\cdot(6-1)!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} + \frac{6!}{0!\cdot(6-0)!}\cdot\frac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = 60 + 5 = 65.$$

Получаем: $P(B) = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}$.

в) Пусть событие С – среди вынутых шаров хотя бы один белый шар. Перейдем к противоположному событию $\overline{C}$ - среди вынутых шаров нет ни одного белого, то есть все вынутые шары – черные. Следовательно $m = C_5^4 \cdot C_6^0 = 5$.

Получаем: $P(\overline{C}) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}$, тогда $P(C) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}$.

Ответ: а) 5/11, б) 13/66, в) 65/66.

Пример 12.

В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели этих заводов в количестве 19, 6 и 11 штук соответственно, которые могут работать до конца гарантийного срока с вероятностями 0,85; 0,76 и 0,71 соответственно. Рабочий берет случайно электродвигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятность того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом.

Решение:

Рассмотрим событие А, которое заключается в том, что электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока. И гипотезы H_1, H_2, H_3, заключающиеся в том, что электродвигатель поставлен с первого, второго или третьего завода соответственно.

Всего имеется 36 электродвигателей. Тогда вероятности того, что электродвигатель поставлен с первого, второго или третьего завода соответственно, будут равны:

$$P(H_1) = \frac{19}{36} = 0,528, \quad P(H_2) = \frac{6}{36} = 0,167, \; P(H_3) = \frac{11}{36} = 0,306\,.$$

Из условия задачи известны условные вероятности:

$P_{H_1}(A) = 0,85$ – вероятность того, что поставленный первым заводом двигатель работает безотказно;

$P_{H_2}(A) = 0,76$ – вероятность того, что поставленный вторым заводом двигатель работает безотказно;

$P_{H_3}(A) = 0,71$ – вероятность того, что поставленный третьим заводом двигатель работает безотказно;

По формуле полной вероятности получаем:

$$P\,(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0,85\cdot 0,528 + 0,76\cdot 0,167 + 0,71\cdot 0,306 = 0,792.$$

Это вероятность того, что электродвигатель проработает безотказно до конца гарантийного срока.

Теперь воспользуемся формулами Байеса: $P_A\;(H_i) = \dfrac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}$,

где $P\,(A)$ – полная вероятность.

Получаем:

$P_A\;(H_1) = \dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \dfrac{0,528\cdot 0,85}{0,792} = 0,566$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен первым заводом;

$P_A\;(H_2) = \dfrac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \dfrac{0,167\cdot 0,76}{0,792} = 0,160$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен вторым заводом;

$P_A\;(H_3) = \dfrac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \dfrac{0,306\cdot 0,71}{0,792} = 0,274$ – вероятность того, что работающий безотказно двигатель поставлен третьим заводом.

Ответ: $P_A(H_1) = 0,566, \quad P_A(H_2) = 0,160, \quad P_A(H_3) = 0,274.$

Пример 13.

Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;
б) не менее 75 раз;
в) не более 74 раз.

Решение:

а) Согласно интегральной теореме Лапласа, если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то вероятность того, что во всех этих испытаниях событие А появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа.

По условию задачи $n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 75$, $k_2 = 90$.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$
$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{90 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{10}{4} = 2{,}5.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. Приложение Б), учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944;$$
$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}5) = 0{,}4938.$$

Тогда

$$P_{100}(75{,}90) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}4938 - (-0{,}3944) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

б) Требование, что событие А появится не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75 либо 76, либо 77, …, либо 100 (больше 100 быть не может по условию задачи). Значит, в рассматриваемом случае следует принять, что $k_1 = 75$, $k_2 = 100$, тогда

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{5}{4} = -1{,}25;$$
$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{100 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. Приложение Б), учитывая нечетность этой функции, находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25) = -0{,}3944;$$
$$\Phi(x_2) = \Phi(5) = 0{,}5.$$

Тогда $P_{100}(75{,}100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}5 - (-0{,}3944) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944.$

в) События «А появится не более 74 раз» и «А появится не менее 75 раз» противоположны, поэтому $P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$

Ответ: а) 0,8882; б)0,8944; в) 0,1056.

Пример 14.

Дискретная случайная величина задана таблицей:

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	p_5

Найти P_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Решение:

Для любой дискретной случайной величины $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Получаем: 0,1+0,2+0,3+0,25+p_5=1. Отсюда p_5=1-0,85=0,15. То есть закон распределения имеет вид (Таблица 14)

Таблица 14 – Закон распределения случайной величины

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Математическое ожидание найдем по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Получаем

M(X) = $-1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}15$= -0,1+0,3+0,5+0,45=1,15.

Дисперсию найдем по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i$.

Получаем

$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}15$=0,1+0,3+1,0+1,35=2,75.

Тогда D(X)=2,75-$1{,}15^2$=1,427.

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

Получаем $\sigma_x = \sqrt{1.427} \approx 1{,}195$.

Построим многоугольник распределения (Рисунок 6).

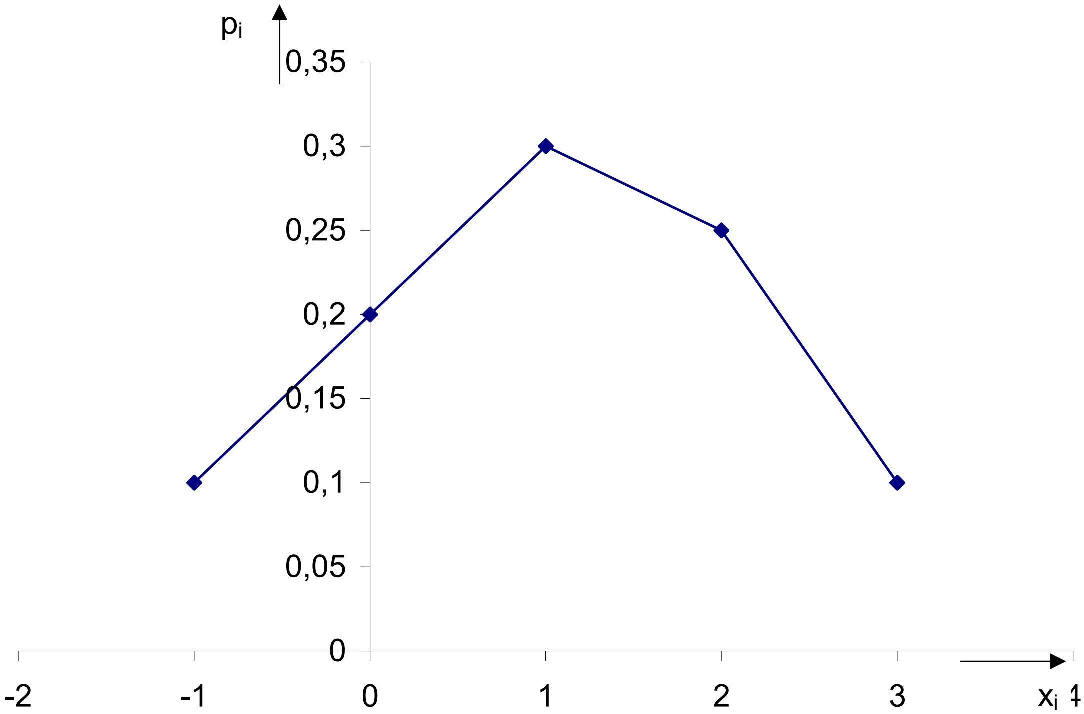

Рисунок 6 – Многоугольник распределения

Функция распределения (интегральная функция распределения) задается формулой $F(x) = P(X < x)$.

Будем задавать различные значения x и находить соответствующие значения функции.

Если $x \le -1$, то F(x)=0 (в том числе и при x= -1, так как F(-1)=P(X< -1)=0).

Если $-1 < x \le 0$, то F(x)=P(X<0)=P(X= -1)=0,1.

Если $0 < x \le 1$, то F(x)=P(X<1)=P(X= -1)+P(X=0)=0,1+0,2=0,3.

Если $1 < x \le 2$, то F(x)=P(X<2)=P(X= -1)+P(X=0)+P(X=1)=0,1+0,2+0,3=0,6.

Если $2 < x \le 3$, то
F(x)=P(X<3)=P(X= -1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)=0,1+0,2+0,3+0,25=0,85.

Если $x > 3$, то
F(x)= P(X= -1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)+P(X=4)=0,1+0,2+0,3+0,25+0,15=1.

Получаем: $F(x)=\begin{cases}0,\ при\ x\le -1,\\ 0{,}1,\ при\ \ -1<x\le 0,\\ 0{,}3,\ при\ \ 0<x\le 1,\\ 0{,}6,\ при\ \ 1<x\le 2,\\ 0{,}85,\ при\ \ 2<x\le 3,\\ 1,\ при\ \ x>3.\end{cases}$

Построим график функции распределения (Рисунок 7).

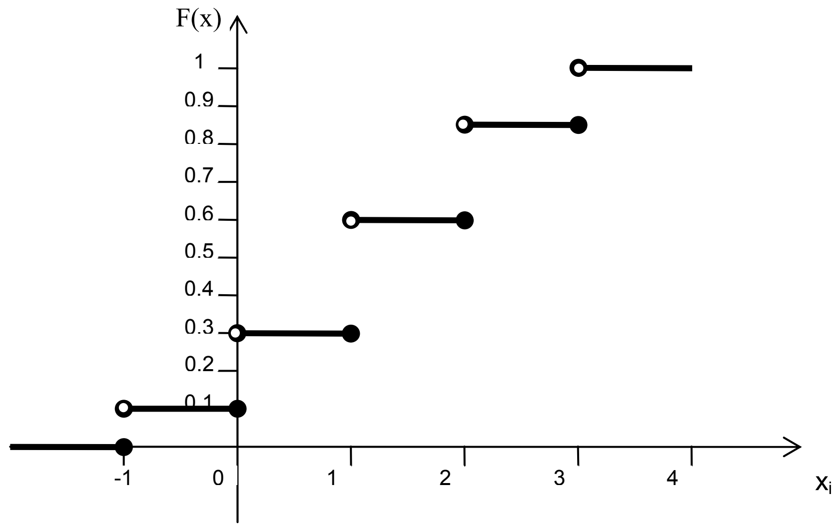

Рисунок 7 – График функции распределения

Пример 15.

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения

$$P(x)=\begin{cases}0 \quad при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} \quad при \quad 0<x\le 2,\\ 0 \quad при \quad x>2.\end{cases}$$

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$.

Решение:

а) Функции $p(x)$ *и* $F(x)$ связаны соотношением $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt$.

Если $x\le 0$, *то* $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0$.

Если $0<x\le 2$, *то* $F(x)=\int_{-\infty}^{0}p(t)dt+\int_{0}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int_{0}^{x}\frac{t}{2}dt=0+\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^x=\frac{x^2}{4}$.

Если $x>2$, *то* $F(x)=\int_{-\infty}^{0}p(t)dt+\int_{0}^{2}p(t)dt+\int_{2}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int_{0}^{2}\frac{t}{2}dt+\int_{2}^{x}0dt=\left.\frac{t^2}{4}\right|_0^2=1$.

Получаем: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

Построим график плотности распределения (Рисунок 8а) и график функции распределения (Рисунок 8б).

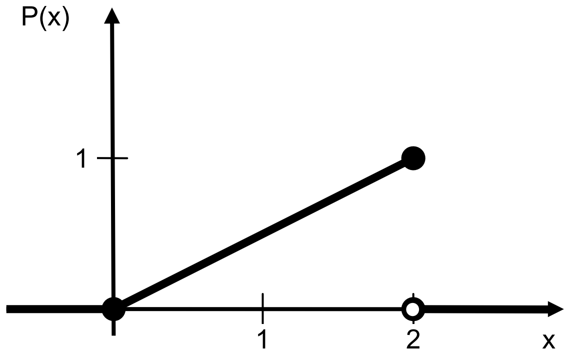

Рисунок 8а – График функции $p(x)$

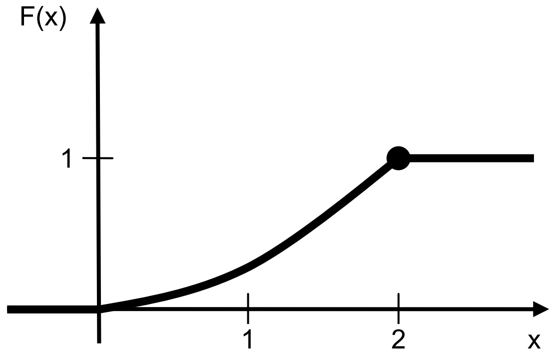

Рисунок 8б – График функции $F(x)$

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение найдем по формулам:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx,\quad D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx-(M(x))^2,\ \sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Получаем

$$M(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}0dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{+\infty}0dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^3dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{x^4}{8}\Bigg|_0^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{8}-\frac{16}{9}=\frac{2}{9};$$

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

в) Вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[1;2]$ найдем по формуле $P(a\le X\le b)=\int_a^b p(x)dx$.

Получаем $P(1\le X\le 2)=\int_1^2\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\Bigg|_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

Ответ: $M(x)=\frac{4}{3}$; $D(x)=\frac{2}{9}$; $\sigma(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$; $P(1\le X\le 2)=\frac{3}{4}.$

Пример 16.

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно 18, а вероятность ее попадания в интервал (16, 20) равна 0,98. Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины.

Решение:

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ определяется через функцию Лапласа по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-M}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-M}{\sigma}\right).$$

По условию задачи вероятность $P(16<X<20)=0{,}98$.

Тогда

$$P(16<X<20)=\Phi\left(\frac{20-18}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{16-18}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=0{,}98$$

Так как функция Лапласа является нечетной функцией, для нее $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\left(-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right)=2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0{,}98.$$

Откуда $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0{,}49$.

Найдем значение аргумента $z=\frac{2}{\sigma}$ функции Лапласа. Из таблицы значений функции Лапласа (см. Приложение Б) получаем $z=2{,}33$. Значит, $\frac{2}{\sigma}=2{,}33$, а $\sigma=\frac{2}{2{,}33}=0{,}86$.

Ответ**:** 0,86.

Пример 17.
Выборка задана интервальным вариационным рядом

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

Построить гистограмму выборочной оценки плотности вероятности.

Решение:

Интервальный вариационный ряд графически изображают с помощью гистограммы. Для ее построения в прямоугольной системе координат на оси x откладывают отрезки частичных интервалов варьирования и на этих отрезках как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными отношению частот m_i или w_i относительных частот к длине интервалов варьирования h. Величины $\frac{m_i}{h}$ называют плотностью частоты, а $\frac{w_i}{h}$ называют плотностью относительной частоты.

Длина каждого интервала равна h=4.

Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{5} m_i = 10 + 20 + 50 + 12 + 8 = 100$.

Найдем значения относительных частот $w_i = \frac{m_i}{n}$ и занесем полученные результаты в таблицу (Таблица 15).

Таблица 15 – Таблица значений относительных частот

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i	w_i
1	1-5	10	0,1
2	5-9	20	0,2
3	9-13	50	0,5
4	13-17	12	0,12
5	17-21	8	0,08

Определим плотности относительных частот $\frac{w_i}{h}$ (Таблица 16).

Таблица 16 – Таблица значений плотности относительных частот

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	$\frac{w_i}{h}$
1	1-5	$25 \cdot 10^{-3}$
2	5-9	$50 \cdot 10^{-3}$
3	9-13	$125 \cdot 10^{-3}$
4	13-17	$30 \cdot 10^{-3}$
5	17-21	$20 \cdot 10^{-3}$

По результатам второго и третьего столбцов таблицы построим гистограмму относительных частот (Рисунок 9).

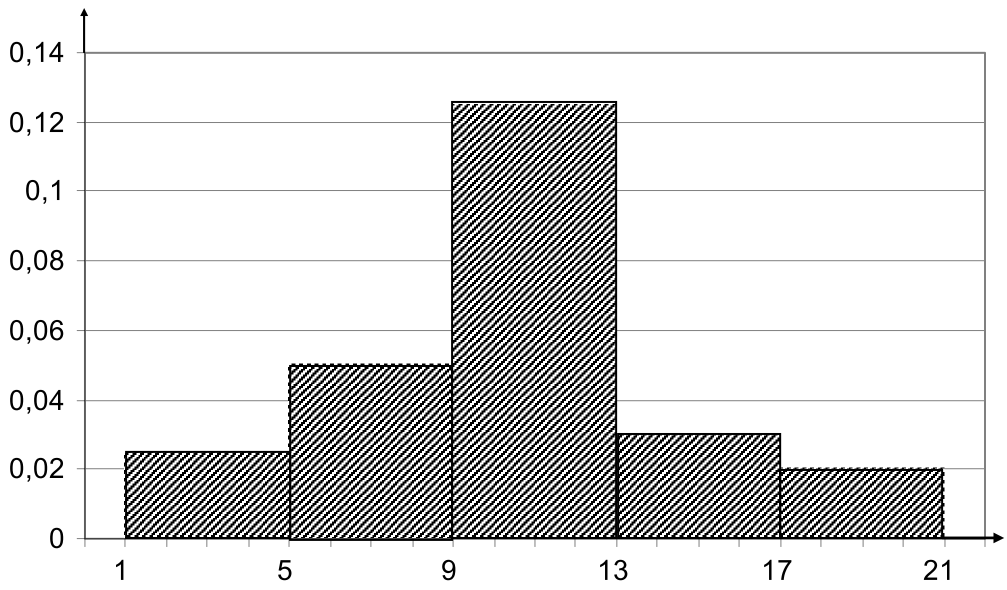

Рисунок 9 – Гистограмма относительных частот

Пример 18.

Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы

Y	X					
	10	20	30	40	50	60
15	5	7	-	-	-	-
25	-	20	23	-	-	-
35	-	-	30	47	2	-
45	-	-	10	11	20	6
55	-	-	-	9	7	3

Решение:

Выборочное уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \frac{\sigma_{ув}}{\sigma_{хв}} \cdot r_в \cdot (x - \overline{x}).$$

Для упрощения расчетов целесообразно ввести условные варианты

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

где C_1, C_2 - ложные нули (выбираемые значения), h_1, h_2 - разности между двумя соседними значениями соответственно X и Y.

В этом случае для $\overline{x}$ и $\overline{y}$, $\sigma_{хв}$ и $\sigma_{ув}$ получаем выражения

$$\overline{x} = \frac{h_1 \sum_{i=1}^{n} u_i + nC_1}{n} = h_1 \overline{u} + C_1, \quad \overline{y} = \frac{h_2 \sum_{j=1}^{n} v_j + nC_2}{n} = h_2 \overline{v} + C_2,$$

$\sigma_{хв} = h_1 \sigma_u$, $\sigma_{ув} = h_2 \sigma_v$, где $\overline{u}$ и $\overline{v}$ - средние значения условных вариант, σ_u и σ_v – средние квадратические отклонения условных вариант.

Для подсчета выборочного коэффициента корреляции в этом случае используется формула:

$$r_в = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} u_i U_i - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v} = \frac{\sum_{j=1}^{k_2} v_j V_j - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u \sigma_v}, \text{ где } U_i = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij} v_j, \; V_j = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij} u_i.$$

Подсчитав $r_в$ и вычислив $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\sigma_{хв}$, $\sigma_{ув}$, можно получить соответствующее уравнение регрессии.

Введем условные варианты с учетом того, что $C_1 = 40, C_2 = 35$, $h_1 = 10, h_2 = 10$: $u_i = \frac{x_i - 40}{10}$, $v_j = \frac{y_j - 35}{10}$.

Составим корреляционную таблицу (Таблица 17), в которую запишем условные варианты u_i, v_i, а также внесем в нее значения n_{ui} и n_{vj}.

Таблица 17 – Корреляционная таблица

v_j	u_i						n_{vj}
	-3	-2	-1	0	1	2	
-2	5	7	-	-	-	-	12
-1	-	20	23	-	-	-	43
0	-	-	30	47	2	-	79
1	-	-	10	11	20	6	47
2	-	-	-	9	7	3	19
n_{ui}	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Затем составим таблицу (Таблица 18), в которую внесем произведения $n_{ij}u_i$ в правый верхний угол заполненных ячеек и $n_{ij}v_j$ в левый нижний угол, после чего суммируем верхние значения по строкам для получения значений $V_j = \sum_{i=1}^{k_1} n_{ij}u_i$ и нижние значения по столбцам для получения значений $U_i = \sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}v_j$. В дополнительный столбец и строку внесем произведения u_iU_i и v_jV_j.

Таблица 18 – Корреляционная таблица

v_j	u_i						V_j	v_jV_j
	-3	-2	-1	0	1	2		
-2	-15 5 -10	-14 7 -14					-29	58
-1		-40 20 -20	-23 23 -23				-63	63
0			-30 30 0	0 47 0	2 2 0		-28	0
1			-10 10 10	0 11 11	20 20 20	12 6 6	22	22
2				0 9 18	7 7 14	5 3 6	13	26
U_i	-10	-34	-13	29	34	12	-	169
u_iU_i	30	68	13	0	34	24	169	-

Параллельный подсчет $\sum_{i=1}^{k_1} u_iU_i$ и $\sum_{j=1}^{k_2} v_jV_j$ осуществляется для контроля вычислений. Эти суммы при правильном вычислении должны быть равны.

В данном случае $\sum_{i=1}^{k_1} u_iU_i = \sum_{j=1}^{k_2} v_jV_j = 169.$

Найдем
$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}u_i}{n} = \frac{5\cdot(-3)+27\cdot(-2)+63\cdot(-1)+29\cdot 1+9\cdot 2}{200} = -0{,}425,$$
$$\bar{v} = \frac{\sum_{j=1}^{k_2}\sum_{i=1}^{k_1} n_{ij}v_j}{n} = \frac{12\cdot(-2)+43\cdot(-1)+47\cdot 1+19\cdot 2}{200} = 0{,}09,$$
$$\overline{u^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} n_{ij}u_i^2}{n} = \frac{5\cdot(-3)^2+27\cdot(-2)^2+63\cdot(-1)^2+29\cdot 1^2+9\cdot 2^2}{200} = 1{,}405,$$
$$\overline{v^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k_2}\sum_{i=1}^{k_1} n_{ij}v_j^2}{n} = \frac{12\cdot(-2)^2+43\cdot(-1)^2+47\cdot 1^2+19\cdot 2^2}{200} = 1{,}05.$$

По формулам $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2}$, $\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\overline{v})^2}$ определяем средние квадратические отклонения:

$$\sigma_u = \sqrt{1{,}405 - (-0{,}425)^2} = 1{,}106, \qquad \sigma_v = \sqrt{1{,}05 - (0{,}09)^2} = 1{,}02.$$

Подставим рассчитанные данные в формулу для $r_в$:

$$r_в = \frac{169 - 200 \cdot (-0{,}425) \cdot 0{,}09}{200 \cdot 1{,}106 \cdot 1{,}02} = 0{,}7.$$

Осуществим переход к исходным вариантам

$$\overline{x} = h_1\overline{u} + C_1 = -0{,}425 \cdot 10 + 40 = 35{,}75, \qquad \overline{y} = h_2\overline{v} + C_2 = 0{,}09 \cdot 10 + 35 = 35{,}9,$$

$$\sigma_{xв} = h_1\sigma_u = 10 \cdot 1{,}106 = 11{,}06, \qquad \sigma_{yв} = h_2\sigma_v = 10 \cdot 1{,}02 = 10{,}2.$$

Подставим найденные значения в выборочное уравнение линейной регрессии:

$$\overline{y}_x - 35{,}9 = \frac{10{,}2}{11{,}06} \cdot 0{,}7 \cdot (x - 35{,}75),$$

окончательно получаем $\overline{y}_x = 0{,}645 \cdot x + 12{,}8$.

Ответ: выборочное уравнение линейной регрессии имеет вид $\overline{y}_x = 0{,}645 \cdot x + 12{,}8$.

Пример 19.

Выборка X объемом N=100 измерений задана таблицей:

x_i	0,2	1,4	2,6	3,8	5	6,2	7,4
m_i	5	13	25	25	19	10	3

где x_i - результаты измерений, m_i - частоты, с которыми встречаются значения x_i, $\sum\limits_{i=1}^{7} x_i = 100$. По критерию χ^2 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение:

Нам необходимо проверить гипотезу о предполагаемом законе распределения. Выдвигаем нулевую гипотезу H_0 и ей конкурирующую H_1.

H_0: признак X имеет нормальный закон распределения.

H_1: признак X имеет закон распределения, отличный от нормального.

Нулевую гипотезу проверим с помощью критерия согласия χ^2 Пирсона ("хи-квадрат"): $\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(m_i^{э} - m_i^{т})^2}{m_i^{т}}$, где $m_i^{э}$ – эмпирические частоты, $m_i^{т}$ – теоретические частоты. Число степеней свободы равно $\mathrm{k} = s - r - 1$, где s – число различных значений x_i дискретного признака X (у нас s равно 7), r – число параметров предполагаемого закона распределения (для нормального распределения $r = 2$), отсюда k = 7-1-2=4.

Из таблицы критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы k=4 находим $\chi^2_{\text{крит}}(0{,}05,\ 4)=9{,}49$.

Вычислим предварительно среднее выборочное и среднее квадратическое отклонение. Необходимые расчеты проведем в таблице (Таблица 19), перейдя к условным вариантам: $u_i = \frac{x_i - C}{h_x}$. У нас $h_x = 1{,}2$ - шаг выборки, С=3,8 – условная варианта (соответствует наибольшей частоте).

Таблица 19

i	u_i	m_i	$u_i m_i$	$u_i^2 m_i$	$(u_i+1)^2 m_i$
1	-3	5	-15	45	20
2	-2	13	-26	52	13
3	-1	25	-25	25	0
4	0	25	0	0	25
5	1	19	19	19	76
6	2	10	20	40	90
7	3	9	9	27	48
$\sum$		100	-18	208	272

Проверка:

$$\sum (u_i+1)^2 m_i = \sum u_i^2 m_i + 2\sum u_i m_i + \sum m_i$$

272=272

Найдем теперь условные характеристики:

$$\overline{U} = \frac{\sum m_i u_i}{100} = -0{,}18,\ D_u = \frac{\sum m_i u_i^2}{100} - (\overline{U})^2 = 2{,}048,\ \sigma_u = \sqrt{D_u} = 1{,}43.$$

Возвращаясь к исходному вариационному ряду с помощью равенства $x_i = h_x u_i + C$ получаем: $\overline{x}_{xв} = h_x\overline{U} + C = 3{,}58$, $D_x = h_x^2 D_u = 2{,}949$, $\sigma_x = h_x \sigma_u = 1{,}72$.

Составим расчетную таблицу (Таблица 20) для нахождения $\chi^2_{\text{набл}}$, используя формулу $m_i^T = \frac{100 h_x}{\sigma_x} \cdot \varphi(\frac{x_i - \overline{x}_{xв}}{\sigma_x})$, где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Таблица 20 – Расчетная таблица

x_i	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{xв}}{\sigma_x}$	$\varphi(z_i)$ (по таблице)	m_i^T	m_i	$m_i - m_i^T$	$\dfrac{(m_i - m_i^T)^2}{m_i^T}$
0,2	-1,97	0,06	4,18	5	0,81	0,158
1,4	-1,27	0,18	12,56	13	0,44	0,015
2,6	-0,57	0,34	23,72	25	1,27	0,069
3,8	0,13	0,40	27,91	25	-2,91	0,303
5	0,82	0,29	20,23	19	-1,23	0,075
6,2	1,52	0,13	9,07	10	0,93	0,095
7,4	2,22	0,03	2,09	3	0,91	0,393
$\sum$						**1,11**

Так как наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}=1{,}11$ попало в область принятия гипотезы ($\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha,\ k)$, а у нас 1,11<9,49), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, по данным наблюдения признак X имеет нормальный закон распределения с параметрами $a = 3{,}58$, $\sigma_x = 1{,}72$.

Ответ: гипотеза о нормальном распределении принимается.

7 Индивидуальные задания

Задача 1.

Дана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Требуется:

а) найти её решение с помощью формул Крамера;

б) записать систему в матричном виде и решить её средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} -2x + y - 3z = -4, \\ 4x + 7y - 2z = -6, \\ x - 8y + 5z = 1; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 2z = -5, \\ x + 9y - 4z = -1, \\ -2x + 6y - 3z = 6; \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x + 5y - 6z = -5, \\ 2x - 3y + 5z = 8, \\ x + 4y - z = 1; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ -3x + y + 2z = 0, \\ x + 4y + 3z = 2; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5; \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + 4y + 3z = -10, \\ -x + 5y - 2z = 5, \\ 3x - 2y + 4z = 3; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x + 7y - 3z = -10, \\ 2x + 9y - z = 8, \\ -x + 6y - 3z = 3; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 7y - 2z = 3, \\ 3x + 5y + z = 5, \\ -2x + 5y - 5z = -4; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 4x - y + 5z = 6, \\ x - 2y + 4z = 9; \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x - 9y + 8z = 5, \\ 2x - 5y + 5z = 4, \\ 2x - y + z = -4; \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8, \\ x + 7y - 5z = -9, \\ 4x + 2y - z = -12; \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - 5y + 3z = -1, \\ 2x + 4y + z = 6, \\ -3x + 3y - 7z = -13; \end{cases}$

16. $\begin{cases} -x + 2y + z = 5, \\ 2x - 3y + 3z = 1, \\ y - 5z = -9; \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x + 2z = 5, \\ 2x + 2y + 5z = 10, \\ 3x - 2y + 2z = -1; \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3, \\ 3x + 4y - 5z = -8, \\ 2y + 7z = 17; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ 2x - 5y - 3z = -17, \\ x + y - z = 0; \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

Задача 2.

Построить общее решение однородной линейной системы трёх уравнений с четырьмя неизвестными.

1. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 9x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 15x_4 = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 18x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 0; \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

17. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

Задача 3.

По координатам вершин пирамиды *ABCD* найти:
а) длины рёбер *AB* и *AC*;
б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
в) уравнение прямой *AB*;
г) уравнение плоскости *BCD*.

1. $A(-1;2;1)$, $B(-2;2;5)$, $C(-3;3;1)$, $D(-1;4;3)$;
2. $A(2;0;3)$, $B(1;0;7)$, $C(0;1;3)$, $D(2;2;5)$;
3. $A(-2;1;-1)$, $B(-3;1;3)$, $C(-4;2;-1)$, $D(-2;3;1)$;
4. $A(2;-1;2)$, $B(1;-1;6)$, $C(0;0;2)$, $D(2;1;4)$;
5. $A(1;1;2)$, $B(0;1;6)$, $C(-1;2;2)$, $D(1;3;4)$;
6. $A(-1;0;2)$, $B(-2;0;6)$, $C(-3;1;2)$, $D(-1;2;4)$;
7. $A(2;3;2)$, $B(1;3;6)$, $C(0;4;2)$, $D(2;5;4)$;
8. $A(-1;-2;1)$, $B(-2;-2;5)$, $C(-3;-1;1)$, $D(-1;0;3)$;
9. $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(3;2;-6)$;
10. $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;5)$;
11. $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$;
12. $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(-4;3;5)$;
13. $A(-3;-5;6)$, $B(2;1;-4)$, $C(0;-3;1)$, $D(-5;2;-8)$;
14. $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(6;-3;8)$;
15. $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$;
16. $A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$;
17. $A(0;3;2)$, $B(-1;3;6)$, $C(-2;4;2)$, $D(0;5;4)$;
18. $A(-1;2;0)$, $B(-2;2;4)$, $C(-3;3;0)$, $D(-1;4;2)$;
19. $A(1;2;1)$, $B(0;2;5)$, $C(-1;3;1)$, $D(1;4;3)$;
20. $A(2;2;3)$, $B(1;2;7)$, $C(0;3;3)$, $D(2;4;5)$.

Задача 4.

Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$;
2. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$;
3. $y = x^3 + 12x^2 + 45x + 50$;
4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$;
5. $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 28$;
6. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$;
7. $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 28$;
8. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;
9. $y = x^3 - 6x^2 - 15x - 8$;
10. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$;
11. $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + x + 1}$;
12. $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$;
13. $y = \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + x + 1}$;
14. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 1}$;
15. $y = \dfrac{-x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1}$;
16. $y = \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 - 3x + 3}$;
17. $y = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 3}$;
18. $y = \dfrac{-x^2 + 7x + 9}{x^2 - 3x + 3}$;
19. $y = \dfrac{-x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 3}$;
20. $y = \dfrac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 3x + 3}$.

Задача 5.

Экспериментальным путем получены следующие данные (таблица 21). Требуется с помощью метода наименьших квадратов найти линейную зависимость $y = ax + b$.

Таблица 21

1.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

2.

x_i	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3
y_i	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0

3.

x_i	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0
y_i	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8

4.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

5.

x_i	0,1	0,3	0,5	1,2	2,1
y_i	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6

6.

x_i	1,1	1,3	1,7	1,9	2,2
y_i	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7

7.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

8.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

9.

x_i	2,1	2,5	3,0	3,1	3,3
y_i	11,1	12,8	13,9	14,5	15,1

10.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	4,9	5,9	4,4	2,4	2,9

11.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

12.

x_i	1,3	2,4	3,5	4,1	5,5
y_i	3,4	4,7	5,5	6,5	7,8

13.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

14.

x_i	2,1	3,0	3,2	3,9	4,1
y_i	3,4	8,1	9,2	12,6	13,3

15.

x_i	2,2	3,1	4,5	5,3	5,7
y_i	0,1	-0,4	-1,2	-1,6	-1,8

16.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,9	6,9	5,4	3,4	3,4

17.

x_i	1,0	3,7	5,8	6,1	7,2
y_i	2,8	6,8	10,0	10,4	12,1

18.

x_i	3,2	3,8	4,7	5,1	5,4
y_i	10,5	12,3	14,9	16,4	16,9

19.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

20.

x_i	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	5,2	2,0	4,7	2,7	3,2

Задача 6.

Исследовать функцию $z = f(x, y)$ на локальный экстремум.

1. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$
2. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$
3. $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y + 3$
4. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 1$
5. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3$
6. $z = 5 + 4x + 10y - 4xy - 2x^2 - 3y^2$
7. $z = 1 - x + y - 5xy - 3x^2 - 3y^2$
8. $z = xy - 2x^2 - y^2 + 7x - 7y - 10$
9. $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x + 3y + 1$
10. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y + 5$
11. $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 3$
12. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 4$
13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$
14. $z = x^2 + xy + y^2 + 4x - y + 5$
15. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 6$
16. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 7$
17. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 2x - 8y + 3$
18. $z = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 10y + 12$
19. $z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 12y + 10$
20. $z = x^2 + xy - y^2 - 5x + 5y - 2$

Задача 7.

Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{8x - arctg 2x}{1+4x^2} dx$, б) $\int \ln(x^2+4) dx$,

2. а) $\int \frac{arctgx + x}{1+x^2} dx$, б) $\int (4x-3) e^{-2x} dx$,

3. а) $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$, б) $\int (\sqrt{2}+3x) \sin 3x \, dx$,

4. а) $\int \frac{4arctgx - x}{1+x^2} dx$, б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$, ;

5. а) $\int \frac{x\cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$, б) $\int \sqrt{x^3} \cdot \ln x \, dx$,

6. а) $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int arctg(\sqrt{5x-1}) dx$,

7. а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int x^2 \sin 3x \, dx$,

8. а) $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2\sin x} dx$, б) $\int (1 - \ln x) dx$,

9. а) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2} dx$, б) $\int (\sqrt{2} - 8x) \sin 3x \, dx$,

10. а) $\int \frac{x + (arctg\, x)^2}{1+x^2} dx$, б) $\int (x\sqrt{2} - 3) \cos 2x \, dx$,

11. а) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9}} dx$, б) $\int (7x-10) \sin 4x \, dx$,

12. а) $\int \frac{\arcsin x + 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int (4x+3) \sin 5x \, dx$,

13. а) $\int \frac{2x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int x \ln(1-3x) dx$,

14. а) $\int \frac{2^{arctgx} + 2x}{1+x^2} dx$, б) $\int x e^{-7x} dx$,

15. а) $\int \frac{e^{\arcsin x} - 2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, б) $\int e^{-3x} (2-9x) \, dx$,

16. а) $\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4+1} dx$, б) $\int \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) dx$,

17. а) $\int \frac{\sqrt{arctgx + 3x}}{1+x^2} dx$, б) $\int (3x+4) e^{3x} dx$,

18. а) $\int \frac{x^3 + 3x^7}{\sqrt{1-x^8}} dx$, б) $\int arctg(\sqrt{4x-1}) \, dx$,

19. а) $\int \frac{x^2 - 2x^5}{\sqrt{6+x^6}} dx$, б) $\int x \cdot \ln^2 x \, dx$,

20. а) $\int \frac{2 + \ln x}{x(1+\ln^2 x)} dx$, б) $\int x \cdot e^{3x} dx$,

Задача 8.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями. Построить чертёж.

1. $y=(x-2)^3, \quad y=4x-8;$
2. $y=4-x^2, \quad y=x^2-2x;$
3. $y=x\sqrt{9-x^2}, \quad y=0, \quad (0\le x\le 3);$
4. $y=x\cdot\sqrt{36-x^2}, \quad y=0, \quad (0\le x\le 6);$
5. $y=4-x^2, \quad x=y^2-2y;$
6. $y^2=9x, \quad x^2=4y;$
7. $y^2=4x, \quad x^2=4y;$
8. $y=x^2+2, \quad x+y=4;$
9. $y=x^2, \quad y^2=4x;$
10. $xy=6, \quad x+y-7=0;$
11. $y=x^2, \quad y=2-x^2;$
12. $y=x^2+4x, \quad y=x=4;$
13. $y=x+3, \; xy=4, \; x=0, \; x=4, \; y=0$
14. $y=x^2-2x, \quad x-y+4=0;$
15. $y=4x-x^2, \quad y=x;$
16. $y=x^2, \quad xy=8, \quad y=9;$
17. $y=x^2+1, \quad y=x, \quad y=5, \quad x=0;$
18. $y=e^x, \quad y=e^{-x}, \quad x=1;$
19. $y=2^x, \quad y=2, \quad x=0;$
20. $y=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad y=\dfrac{x^2}{2}.$

Задача 9.

Вычислить несобственный интеграл.

1. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
2. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$;
3. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx$;
4. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$;
5. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$;
6. $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}}dx$;
7. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$;
8. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$;
9. $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}dx$;
10. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$;
11. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}dx$;
12. $\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;
13. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
14. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;
15. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$;
16. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^4+1)^3}dx$;
17. $\int_0^{+\infty} \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$;
18. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$;
19. $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}dx$;
20. $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx$.

Задача 10.

Проинтегрировать уравнение.

1. $ydx + (1 + x^2)dy = 0$;
2. $2ydx + (3 + x^2)dy = 0$;
3. $y' = tgx \cdot tgy$;
4. $y' = tgx \cdot ctgy$;
5. $y' \cdot y = -2xe^x$;
6. $y' \cdot y = xe^{-x}$;
7. $y(1 + x^2)y' + x(1 + y^2) = 0$;
8. $y(2 + x^2)y' + 2x(1 + y^2) = 0$;
9. $y' = 2e^x Cosx$;
10. $y' = 3e^x Sinx$;
11. $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;
12. $y' = \dfrac{3x}{2 + x^2}$;
13. $y' = y \ln y$;
14. $y' = y \ln^2 y$;
15. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$;
16. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$;
17. $e^x dx - (1 + e^x) ydy = 0$;
18. $e^x dx + (1 + e^x) ydy = 0$;
19. $y' + Sin(x + y) = Sin(x - y)$;
20. $y' + Cos(x + y) = Cos(x - y)$.

Задача 11.

В урне содержится K черных и H белых шаров. Случайным образом вынимают M шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) ровно P белых шара, б) меньше, чем P белых шара, в) хотя бы 1 белый шар. Значения K, H, M и P даны в таблице (Таблица 22).

Таблица 22 – Таблица значений K, H, M и P

вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
K	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7
H	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4
M	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4
P	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2

вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
K	8	6	4	8	5	7	5	6	5	6
H	6	5	6	6	6	4	7	5	7	7
M	4	4	4	5	5	5	4	5	5	5
P	3	3	3	2	4	3	3	2	4	3

Задача 12.

Вариант 1.

По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй группе – 15 из 25. найти вероятность того, наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

Вариант 2.

При проверке изделия на соответствие стандарту вероятность того, что оно пройдет через первого контролера, равна 0,55, а через второго – 0,45. Вероятность признания бездефектного изделия стандартным у первого контролера равна 0,9, а у второго – 0,98. Бездефектное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие прошло через второго контролера.

Вариант 3.

Два завода производят холодильники одной и той же марки, причем первый завод выпускает продукции вдвое больше, чем второй. Первый завод производит в среднем 70% холодильников высшего качества, а второй - 80%. Выбранный наугад холодильник оказался высшего качества. Найти вероятность того, что холодильник изготовлен на первом заводе.

Вариант 4.

В первом ящике содержится 7 синих и 5 красных шаров, во втором - 4 синих и 4 красных. Наудачу был выбран ящик и из него наудачу извлечен шар, который оказался красным. Найти вероятность того, что этот шар был извлечен из первого ящика.

Вариант 5.

В трех студенческих группах обучается 75 студентов, из них 25 в первой группе, 30 – во второй, остальные в третьей. Успешно сдали экзамен 22 студента из первой группы, 24 из второй и 15 из третьей. Наудачу выбранный студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он учится во второй группе.

Вариант 6.

В магазине продается 25 телевизоров, из них 9 выпущены первым заводом, 10 – вторым и остальные – третьим. Известно, что среди всех телевизоров, выпущенных первым, вторым и третьим заводом, имеют брак соответственно 5%, 12% и 10% телевизоров. Купленный телевизор оказался с дефектом. Найти вероятность того, что он был изготовлен третьим заводом.

Вариант 7.

В первом ящике содержится 8 шаров, из них 3 белых, во втором – 15, из которых 6 белых, в третьем – 10 шаров, из них 7 белых. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар извлечен из второго ящика.

Вариант 8.

Консервоперерабатывающий завод отправляет треть перерабатываемой продукции на первый склад, пятую часть – на второй и остальную продукцию – на третий. После хранения годным к употреблению является 90% продукции, хранившейся на первом складе, 80% продукции – на втором и 85% - на третьем. Наудачу взятая единица продукции оказалась годной. Найти вероятность того, что эта продукция хранилась на первом складе.

Вариант 9.

Пассажир за получением билета может обратиться в одну из трех касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую – 0,35 в третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3; для второй – 0,4; для третьей – 0,6. найти вероятность того, что купивший билет пассажир, приобрел его во второй кассе.

Вариант 10.

Имеется три урны. В первой из них 5 белых и 6 черных шаров, во второй 4 белых и 3 черных шара, в третьей 5 белых и 3 черных шара. Наугад выбирается урна и из нее вынимается шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из второй урны.

Вариант 11.

В магазин поступила обувь от двух поставщиков. Количество обуви, поступившей от первого поставщика, в два раза больше, чем от второго. Известно, что в среднем 20% обуви от первого поставщика и и35% обуви от второго поставщика имеют различные дефекты отделки. Из общей массы наугад выбирают одну упаковку с обувью. Оказалось, что обувь не имеет дефекта отделки. Найти вероятность того, что она изготовлена первым поставщиком.

Вариант 12.

К контролеру ОТК поступили изделия, изготовленные тремя рабочими. Причем первый предоставил 20 изделий, второй 15 и третий – 17. вероятность того, что изделие не имеет брака, равна: для первого рабочего – 0,6; для второго – 0,5; для третьего – 0,4. Контролер проверил одну деталь, она оказалась бракованной. Найти вероятность того, эту деталь изготовил первый рабочий.

Вариант 13.

Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4; а во вторую – 0,6. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билеты будут распроданы, равна 0,35 для первой кассы и 0,7 для второй. Пассажир посетил одну из касс и приобрел билет найти вероятность того, что он приобрел билет во второй кассе.

Вариант 14.

В магазин поступил одноименный товар, изготовленный двумя предприятиями. С первого предприятия поступило 150 единиц товара, из них 30 единиц первого сорта. Со второго предприятия – 200 единиц, из них 50 – первого сорта. Из общей массы извлекли единицу товара, который оказался первого сорта. Найти вероятность того, что извлеченный товар изготовлен на первом предприятии.

Вариант 15.

На автозаводе три конвейерных линии, причем на первой из них собирается 35% всех изделий, на второй 25%, на третьей – 45%. Вероятность брака для изделий, собранных на первой линии, равна 0,2; на второй -0,1, на третьей -0,15. Приобретенный покупателем автомобиль не имеет брака. Найти вероятность того, он собран на первой линии.

Вариант 16.

Покупатель желает приобрести электрическую лампочку. На полке в магазине лежат 200 лампочек, изготовленных на одном заводе и 150 на другом (все лампочки одинаковой мощности). Вероятность брака для первого завода составляет 0,01; для второго 0,005. Продавец взял лампочку для проверки, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что лампочка изготовлена на втором заводе.

Вариант 17.

Преподаватель получил для проверки контрольные работы студентов трех групп: 28 работ студентов первой группы, 19 работ студентов второй группы и 20 работ студентов третьей группы. Вероятность того, что студент первой группы не допустит ни одной ошибки в контрольной работе, равна 0,4; второй -0,35; третьей – 0,6. Выбранная случайным образом контрольная работа оказалась без единой ошибки. Найти вероятность того, что эта работа выполнена студентом третьей группы.

Вариант 18.

На автопредприятие поступили одноименные детали с двух заводов. Вероятность того, что деталь, изготовленная на первом заводе, не соответствует ГОСТу -0,9; для второго – 0,3. Первый завод поставил 2000 деталей, второй – 3000. Сборщик взял одну деталь, которая оказалась соответствующей ГОСТу. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом заводе.

Вариант 19.

В магазин поступили холодильники трех фирм в количестве 35, 20 и 4 соответственно. Вероятность того, что холодильник не откажет в период гарантийного срока, равна: для первой фирмы 0,95; для второй – 0,8; для третьей – 0,9. Купленный холодильник оказался надежным. Найти вероятность того, что этот холодильник изготовлен второй фирмой.

Вариант 20.

В двух одинаковых коробках находятся карандаши. Известно, что 1/3 карандашей в первой коробке и ¼ карандашей во второй коробке характеризуются твердостью ТМ. Наугад выбирается коробка и из нее наугад извлекается карандаш. Он оказался твердости ТМ. Найти вероятность того, что карандаш извлечен из первой коробки.

Задача 13.

Вероятность возврата в срок потребительского кредита каждым из n заемщиков в среднем равна p. Найти вероятность того, что к назначенному сроку кредит вернут:

а) не менее k_1 человек и не более k_2 человека;

б) не менее k_2 человек;

в) не более k_3 человек.

Значения n, p, k_1, k_2, k_3 даны в таблице (Таблица 23)

Таблица 23 – Таблица значений n, p, k_1, k_2, k_3

Вариант	n	k_1	k_2	k_3	p
1	120	100	115	114	0,75
2	150	120	140	139	0,90
3	220	180	200	199	0,95
4	275	250	265	264	0,96
5	110	70	95	94	0,8
6	130	85	105	104	0,85
7	135	100	120	119	0,97
8	150	130	145	144	0,95
9	160	145	155	154	0,9
10	175	160	170	169	0,85
11	200	175	195	194	0,98
12	105	85	100	99	0,95
13	125	85	105	104	0,85
14	145	90	125	124	0,97
15	180	155	170	169	0,9
16	210	190	205	204	0,9
17	140	120	135	134	0,85
18	170	135	155	154	0,95
19	115	95	110	109	0,9
20	205	185	200	199	0,85

Задача 14.

Дискретная случайная величина задана таблицей (Таблица 24). Найти p_5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Таблица 24

1.

x_i	-3	-2	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5

2.

x_i	-7	-4	0	4	7
p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	p_5

3.

x_i	-5	-2	0	2	5
p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p_5

4.

x_i	-3	-1	0	4	5
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	p_5

5.

x_i	-7	-4	0	4	7
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5

6.

x_i	2	9	10	11	13
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	p_5

7.

x_i	-6	-4	-2	2	4
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	p_5

8.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	p_5

9.

x_i	-2	-1	0	3	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5

10.

x_i	-3	-2	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	p_5

11.

x_i	-5	-3	-1	1	5
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5

12.

x_i	1	4	6	7	9
p_i	0,2	0,05	0,15	0,3	p_5

13.

x_i	1	3	5	7	9
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5

14.

x_i	-2	0	3	6	8
p_i	0,3	0,15	0,3	0,2	p_5

15.

x_i	-5	-4	0	1	3
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	p_5

16.

x_i	2	4	5	10	12
p_i	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5

17.

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	p_5

18.

x_i	0	3	6	8	9
p_i	0,15	0,35	0,05	0,2	p_5

19.

x_i	-3	-2	1	2	7
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	p_5

20.

x_i	0	3	6	10	11
p_i	0,05	0,4	0,25	0,2	p_5

Задача 15.

Непрерывная случайная величина задана функцией плотности распределения $p(x)$.

а) Найти функцию распределения $F(x)$, построить графики функций $p(x)$ *и* $F(x)$.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

в) Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке $[a,b]$.

1. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ x-\dfrac{1}{2} & при \quad 1<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$

$P(1{,}5\le X\le 1{,}75)-?$

2. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ x-\dfrac{x^3}{4} & при \quad 0<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$

$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

3. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 6\\ \dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{2} & при \quad 6<x\le 9\\ 0 & при \quad x>9\end{cases}$$

$P(3\le X\le 4)-?$

4. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x}{16}+\dfrac{1}{18} & при \quad 0<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$$

$P(0\le X\le 3)-?$

5. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{5}{4} & при \quad 2<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$$

$P(2{,}5\le X\le 3{,}5)-?$

6. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{x}{36}+\dfrac{1}{18} & при \quad 1<x\le 7\\ 0 & при \quad x>7\end{cases}$$

$P(2\le X\le 5)-?$

7. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{36} & при \quad 0<x\le 6\\ 0 & при \quad x>6\end{cases}$$

$P(0{,}5\le X\le 2{,}5)-?$

8. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 5\\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2x}{25} & при \quad 5<x\le 10\\ 0 & при \quad x>10\end{cases}$$

$P(6\le X\le 9)-?$

9. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{11}{18}-\dfrac{x}{9} & при \quad 1<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$$

$P(2\le X\le 3)-?$

10. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 7\\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{27}{10} & при \quad 7<x\le 9\\ 0 & при \quad x>9\end{cases}$$

$P(8\le X\le 8{,}5)-?$

11. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{x}{32} & при \quad 0<x\le 8\\ 0 & при \quad x>8\end{cases}$$

$P(1\le X\le 7)-?$

12. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{3x^2}{64} & при \quad 0<x\le 4\\ 0 & при \quad x>4\end{cases}$$

$P(0\le X\le 2)-?$

13. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{2x+1}{3} & при \quad 0<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$

$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

14. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{2x-1}{6} & при \quad 0<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$$

$P(1\le X\le 2{,}5)-?$

15. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{2x-1}{2} & при \quad 1<x\le 2\\ 0 & при \quad x>2\end{cases}$$

$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)-?$

16. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 6x+2 & при \quad 0<x\le \dfrac{1}{3}\\ 0 & при \quad x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$P(0{,}1\le X\le 0{,}2)-?$

17. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ \dfrac{2x+1}{2} & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}$$

$P(\frac{1}{6}\le X\le \frac{5}{6})-?$

18. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1\\ \dfrac{2x-1}{6} & при \quad 1<x\le 3\\ 0 & при \quad x>3\end{cases}$$

$P(1{,}5\le X\le 3{,}5)-?$

19. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 3x^2 & при \quad 0<x\le 1\\ 0 & при \quad x>1\end{cases}$$

$P(0{,}5\le X\le 1)-?$

20. $$p(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 4\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{3} & при \quad 4<x\le 6\\ 0 & при \quad x>6\end{cases}$$

$P(5\le X\le 6)-?$

Задача 16.

Случайная величина X является нормально распределенной. Ее математическое ожидание равно M , а вероятность ее попадания в интервал $(\alpha;\beta)$ равна P . Найти среднее квадратическое отклонение σ случайной величины. Значения M,α,β,P даны в таблице (Таблица 25)

Таблица 25 – Таблица значений M,α,β,P

Вариант	α	M	β	P
1	36	40	44	0,966
2	40	42	44	0,98
3	51	56	61	0,97
4	17	20	23	0,96
5	23	26	29	0,81
6	15	18	21	0,88
7	18	22	26	0,97
8	30	32	34	0,99
9	41	45	49	0,98
10	29	33	37	0,966

Вариант	α	M	β	P
11	9	13	17	0,98
12	22	24	26	0,966
13	52	55	58	0,82
14	42	47	52	0,97
15	21	23	25	0,89
16	11	16	21	0,9
17	38	41	44	0,95
18	32	35	38	0,95
19	12	15	18	0,96
20	23	25	27	0,85

Задача 17.

Рассчитать и построить гистограмму относительных частот по сгруппированным данным, представленным в таблице (Таблица 26), где m_i - частота попадания вариант в промежуток $\left(x_i ; x_{i+1}\right]$.

Таблица 26 – Таблица данных m_i и $\left(x_i ; x_{i+1}\right]$

Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	1	2—4	5
	2	4—6	8
	3	6—8	16
	4	8—10	12
	5	10—12	9
2	1	3—7	4
	2	7—11	6
	3	11—15	9
	4	15—19	10
	5	19—23	11
3	1	-6—2	2
	2	-2—2	8
	3	2—6	14
	4	6—10	6
	5	10—14	10
4	1	4—8	5
	2	8—12	7
	3	12—16	10
	4	16—20	12
	5	20—24	6
5	1	7—9	5
	2	9—11	4
	3	11—13	8
	4	13—15	12
	5	15—17	11

Вариант	i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
11	1	10—12	4
	2	12—14	12
	3	14—16	8
	4	16—18	8
	5	18—20	18
12	1	3—7	6
	2	7—11	8
	3	11—15	10
	4	15—19	12
	5	19—23	4
13	1	5—7	4
	2	7—9	14
	3	9—11	12
	4	11—13	8
	5	13—15	2
14	1	11—14	3
	2	14—17	8
	3	17—20	14
	4	20—23	15
	5	23—26	10
15	1	2—5	6
	2	5—8	24
	3	8—11	13
	4	11—14	1
	5	14—17	6

Продолжение таблицы 26

6	1	5—8	5
	2	8—11	7
	3	11—14	4
	4	14—17	1
	5	17—20	3

7	1	4—6	3
	2	6—8	9
	3	8—10	7
	4	10—12	22
	5	12—14	9

8	1	1—5	4
	2	5—9	5
	3	9—13	9
	4	13—17	10
	5	17—21	2

9	1	10—14	3
	2	14—18	16
	3	18—22	8
	4	22—26	7
	5	26—30	6

10	1	20—22	4
	2	22—24	6
	3	24—26	10
	4	26—28	4
	5	28—30	6

16	1	10—14	5
	2	14—18	14
	3	18—22	26
	4	22—26	9
	5	26—30	6

17	1	5—10	3
	2	10—15	9
	3	15—20	18
	4	20—25	14
	5	25—30	16

18	1	10—20	12
	2	20—30	17
	3	30—40	46
	4	40—50	12
	5	50—60	13

19	1	15—30	8
	2	30—45	16
	3	45—60	12
	4	60—75	4
	5	75—90	10

20	1	20—40	8
	2	40—60	14
	3	60—80	10
	4	80—100	9
	5	100—120	19

Задача 18.

Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X на основании корреляционной таблицы (Таблица 27).

Таблица 27 – Корреляционная таблица

Вариант	Корреляционная таблица							
1	Y \ X	10	15	20	25	30	35	
	15	6	4					
	25		6	8				
	35				21	2	5	
	45				4	12	6	
	55					1	5	

2	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
	30		6		4		2	5
	40	4		5		7	1	
	50		4	3	5			6
	60	5	3			10	2	
	70			4	10	4	2	8

3	Y \ X	12	17	22	27	32	37	
	105		4		3			
	115	2	3	1		10		
	125	3		5	1		4	
	135				8	2	1	
	145	1	2					

4	Y \ X	10	15	20	25	30	35	
	14			4	2	1		
	24	2	1		3	8	5	
	34		4	2	1		3	
	44	3	2	10		3	2	
	54	1	3		9		1	

Вариант	Корреляционная таблица							
11	Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
	100	2	4		8	4		10
	110	3		5		2	10	
	120		3		4	5	6	
	130	2		4	6			5
	140		4	7			1	5

12	Y \ X	30	40	50	60	70	80	90
	20		6		4		2	5
	30	4		5		7	1	6
	40		4	3	5	10		
	50	5	3			4	2	8
	60			4	10		2	

13	Y \ X	24	28	32	36	40	44	48
	10		6		4		2	5
	20	4		5		7	1	
	30		4	3	5			6
	40	5	3			10	2	
	50			4	10	4	2	8

14	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
	5	10		3	5		1	4
	15		4	10		2	8	
	25	3	4		6			6
	35				4	7	1	5
	45	2	5			10		

Продолжение таблицы 27

	Y \ X	10	15	20	25	30	35	
	20	1	5		7		4	
	40	2		4		6	5	
5	60		3	5	4	6		
	80	10		2	3		5	
	100	2	4		4	8	10	

	Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
	15	2		4	6	5		
15	30		4	7			1	5
	45	3			4	5	6	
	60	3	5		2			10
	75		4	2		4	10	8

	Y \ X	5	10	15	20	25	30	
	15		6	4	2		2	
6	25	4	2	8	1	5		
	35				10	7	1	
	45	5	3	8		6	7	
	55	9	5		4		1	

	Y \ X	20	22	24	26	28	30	32
	30		6		4		2	5
16	40	4		5		7	1	
	50		4	3	5			6
	60	5	3			10	2	
	70		4	10	4	2	8	

	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
	5	10		3	5		1	4
7	15		4	10		2	8	
	25	3	4		6			6
	35				4	7	1	5
	45	2	5			10		

	Y \ X	5	10	115	20	25	30	
	100		6	4	2		2	
17	110	4	2	8	1	5		
	120				10	7	1	
	130	5	3	8		6	7	
	140	9	5		4		1	

	Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
	10	2		4	6	5		
8	20		4	7			1	5
	30	3			4	5	6	
	40	3	5		2			10
	50		4	2		4	10	8

	Y \ X	20	25	30	35	40	45	
	30		6		4		2	
18	40	4	1	5		7		
	50	3		4	5		6	
	60	5	3		10	2		
	70		2	3		3	5	

	Y \ X	5	10	15	20	25	30	35
	30		6		4		2	5
9	40	4		5		7	1	
	50		4	3	5			6
	60	5	3			10	2	
	70			4	10	4	2	8

	Y \ X	10	15	20	25	30	35	
	36		4		3			
19	46	2	3	1		10		
	56	3		5	1		4	
	66				8	2	1	
	76	1	2					

Продолжение таблицы 27

	Y \ X	10	15	20	25	30	35	40
10	30		4	7			1	5
	50	2		4	6	5		
	70		3		4	5	6	
	90	10		2			5	3
	110	2	4		8	4		10

	Y \ X	42	46	50	54	58	62	
20	15			4	2	1		
	25	2	1		3	8	5	
	35		4	2	1		3	
	453	3	2	10		3	2	
	55	1	3		9		1	

Задача 19.
Выборка X объемом N=100 измерений задана таблицей (Таблица 28)

Таблица 28 – Таблица измерений

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
m_i	5	13	20+(m+n)	30-(m+n)	19	10	3

где x_i - результаты измерений, m_i - частоты, с которыми встречаются значения x_i, $\sum_{i=1}^{7} x_i = 100$, x_i=0,2m+0,3(i-1)n. По критерию χ^2 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

вариант	m	n	вариант	m	n	вариант	m	n	вариант	m	n
1	4	3	6	2	3	11	4	1	16	4	3
2	3	2	7	4	1	12	3	4	17	2	2
3	5	1	8	2	5	13	5	5	18	2	1
4	3	4	9	1	2	14	1	3	19	1	4
5	1	5	10	5	4	15	3	1	20	5	5

8 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

8.1 Основная:

8.1.1 **Высшая математика для экономистов**: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер [и др.] – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2004. – 471 с.

8.1.2 **Гмурман, В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003.– 479 с.

8.1.3 **Кремер, Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 543 с.

8.1.4 **Кричевец, А.Н.** Математика для психологов: учебник / А.Н. Кричевец, Е.В. Шикин, А.Г.Дьячков; под ред. А.Н. Кричевца. – М.: Флинта: Московский психолого-социальный институт, 2003.– 376 с.

8.1.5 **Шипачев, В.С.** Курс высшей математики: учеб. / В.С. Шипачев. – Изд.2-е. – М.: Изд-во Проспект, 2004. – 600 с.

8.2 Дополнительная:

8.1.1 **Выгодский, М.Я.** Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 992 с.

8.1.2 **Гмурман, В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1997. – 400 с.

8.1.3 **Гусак, А.А.** Справочное пособие по решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – 288 с.

8.1.4 **Гусак, А.А.** Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – 416 с.

8.1.5 **Гусак, А.А.** Справочное пособие по решению задач: теория вероятностей / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998. – 288 с.

8.1.6 **Гурский, Е.И.** Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях учебное пособие / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; под общей ред. Е.И. Гурского. – Минск: Высш. шк., 1990. – 400С

8.1.7 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч. учебное пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2006.

8.1.8 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учеб. / В.С. Шипачев. – Изд. 4-е, стереотип. – М.: Высш. шк., 1998. – 479с.

Приложение А

(Справочное)

Определители и матрицы, векторы, прямые и плоскости, таблица производных и правила дифференцирования, таблица интегралов, правила и методы интегрирования, формулы комбинаторики, некоторые формулы теории вероятностей

Определители и матрицы

$|a_{11}| = a_{11}$ – определитель первого порядка;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$$ – определитель второго порядка;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1j} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2j} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{i1} & a_{i2} & \Lambda & a_{ij} & \Lambda & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mj} & \Lambda & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица размерности $m \times n$;

$$O_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$ – нулевая матрица;

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица;

Сумма двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ есть матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i=1,…,.m; j=1,…,n.

Произведение матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число λ есть матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что, $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ i=1,…,.m; j=1,…,n.

Произведение матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{ij})$ есть матрица $C_{m\times p} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, i=1,…,.m;   j=1,…,n.

Продолжение приложения А

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \Lambda & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \Lambda & A_{n2} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ A_{1n} & A_{2n} & \Lambda & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ji} - алгебраические дополнения матрицы А.

Векторы

$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot Cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$ - скалярное произведение векторов.

$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ - векторное произведение векторов, если выполняются условия:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot Sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$;

2) $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\ \vec{c}$ – правая.

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\vec{a}\cdot[\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{c}]$ - смешанное произведение векторов.

Если $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3),\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$, то

$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$; $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$; $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Прямые и плоскости

$\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}-$ уравнение прямой на плоскости, заданной точкой и направляющим вектором;

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}-$ уравнение прямой на плоскости, заданной двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$;

$y=kx+b-$ уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом;

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-$ уравнение прямой в отрезках;

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0-$ уравнение прямой на плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A,B)$;

$Ax+By+C=0$,
где $A^2+B^2\neq 0-$ общее уравнение прямой на плоскости;

$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}-$ уравнение прямой в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha,\beta,\gamma)$;

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}-$ уравнение прямой в пространстве, заданной двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_1)$;

$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}-$ общее уравнение прямой в пространстве;

$Ax+By+Cz+D=0$,
где $A^2+B^2+C_2\neq 0-$ общее уравнение плоскости в пространстве;

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ уравнение плоскости в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A,B,C)$;

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1-$ уравнение плоскости в отрезках;

$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=0-$ уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и двумя направляющими векторами $\vec{a}_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и $\vec{a}_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$;

$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0-$ уравнение плоскости, заданной тремя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Таблица производных и правила дифференцирования

$(C)'=0$;

$(ax+b)'=a$;

$(x^m)'=mx^{m-1}$,

$(x\ \ )'=1$;

$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$;

$(\sqrt{x}\ \ )'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$(e^x)'=e^x$,

$(a^x)'=a^x\ln a$;

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

$(\sin x)'=\cos x$;

$(\cos x)'=-\sin x$;

$(tg\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$(ctg\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

$(U\pm V)'=U'\pm V'$;

$(UV)'=U'V+UV'$;

$\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$;

$y'_x=y'_u\,u'_x$,

если y=y(u), u=u(x);

$(UVW)'=U'VW+UV'W+UVW'$.

Таблица интегралов, правила и методы интегрирования

$\int dx=x+C$;

$\int x^m dx=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C,\ \ m\neq -1$;

$\int -\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$;

$\int \dfrac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx=\ln|x|+C$;

$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$;

$\int e^x dx=e^x+C$;

$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$;

$\int \cos x\,dx=\sin x+C$;

$\int tgx\,dx=-\ln|\cos x|+C$;

$\int ctgx\,dx=\ln|\sin x|+C$;

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$;

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$;

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$;

$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$;

$\int \dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right|+C$;

$\int \dfrac{1}{x^2-a^2}dx=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$;

$\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx$;

$\int (f(x)+g(x))dx=$

$=\int f(x)dx+\int g(x)dx;$

$\int udv=uv-\int vdu$ - метод интегрирования по частям;

$\int f(x)dx=\int f(x(t))\,x'_t dt$,

если y=y(x), x=x(t);

$\int f(ax+b)dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$;

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$.

Формулы комбинаторики

Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности n различных элементов и различающиеся только порядком их расположения, называются перестановками. Число всех возможных перестановок определяется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \mathrm{K} \cdot n = n!.$$

Комбинации по m элементов, составленные из n различных элементов, отличающихся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называются размещениями. Число всевозможных размещений определяется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\mathrm{K}\ (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n различных элементов и различающиеся хотя бы одним элементом, называются сочетаниями. Число всевозможных сочетаний определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Некоторые формулы теории вероятностей

Классическое определение вероятности: $P(A) = \dfrac{m}{n}$ – отношению числа благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий: $0 \le P(A) \le 1$

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ – для несовместных событий.

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ – для совместных событий.

$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$ – для зависимых событий.

$P(AB) = P(A)P(B)$ – для независимых событий.

$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$ – формула полной вероятности**.**

$P(H_i/A) = \dfrac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$ – формула Байеса.

$P_n(k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$ – формула Бернулли.

$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ – математическое ожидание дискретной случайной величины.

$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$ – дисперсия (рассеивание) дискретной случайной величины.

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины.

$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i)$ – функция распределения дискретной случайной величины.

$p(x)=F^{э}(x)$ – плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

$M(X)=\int_a^b xp(x)dx$ – математическое ожидание непрерывной случайной величины.

$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2\,p(x)dx$ – дисперсия непрерывной случайной величины.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности $p(x)=\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$.

Функция распределения имеет вид $F(x)=\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma_x^2}}dt$.

Вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал находится по формуле $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ - функция Лапласа.

Правило трех сигм: если случайная величина имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднего квадратического отклонения: $P(|X-a|<3\sigma)=0{,}9973$.

Выборочное уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид:

$\overline{y}_x-\overline{y}=\dfrac{\sigma_{yв}}{\sigma_{xв}}\cdot r_в\cdot\left(x-\overline{x}\right)$.

Приложение Б

Таблица значений для функций $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ **и** $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040'	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3116
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	91	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	и	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	ЗОИ	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794 .	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58'	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение В

Примеры задач с «психологическим» содержанием

1. Психолог Сидоренко прошел три разных тестирования по определению типологии личности. Первое предполагало выявление двух признаков: «интуит», «этик»; второе было связано с проверкой признаков «сенсорик», «иррационал»; третье – выявление признаков «логик», «рационал». Эксперимент заключался в том, что Сидоренко умышлено в каждом тесте по одному из признаков давал ложную информацию о себе. В результате каждый тест дал положительный ответ относительно соответствующих признаков. Нужно выяснить, какое заключение можно сделать о характерных для Сидоренко признаках на основе полученных результатов, и возможна ли при этом истинная характеристика?

2. Проводилось тестирование по двум тестам. Результаты таковы: по первому тесту 4 человека получили балл x, один человек получил балл y при общей сумме баллов 1; по второму тесту 2 человека получили балл x и 2 – y при общей сумме баллов 1. Определить баллы x и y.

3. Пусть a_1 и a_2 параметры, характеризующие количество радостных дней у данного человека за данный промежуток времени в быту и на работе соответственно. Будем считать, что a_1 и a_2 могут быть и дробными. Пусть $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица психотерапевтического воздействия. Необходимо определить значения параметров, при которых количества радостных дней в быту и на работе у данного человека: а) не меняется, несмотря на психотерапевтическое воздействие; б) увеличивается в одинаковое количество раз.

4. Каждому из 8 школьников одного класса предложили назвать из их числа имена 3 человек, с которыми больше всего хотелось бы дружить. В результате Петя Смирнов был назван в 7 анкетах. Случайно ли это?

5. В группе из 25 учащихся при тестировании было обнаружено, что 8 человек имеют уровень проявления коммуникативных и организаторских способностей КОС ниже среднего (они не стремятся к общению, плохо ориентируются в незнакомой ситуации, тяжело переживают обиды и т.д.); 7 человек характеризуется средним уровнем КОС (стремление к контактам); остальные относятся к группе с высоким уровнем проявления КОС (стремятся к контактам, занимаются общественной деятельностью и т.д.). Какова вероятность того, что наугад вызванный учащийся будет либо со средним, либо с высоким уровнем проявления КОС?

6. В группе из 20 человек проводился тест «Узнай свой характер». При определении «ведущей руки» у 8 испытуемых это

оказалась левая рука, а при определении «ведущего глаза» у 10 человек оказался ведущим правый глаз. Какова вероятность того, что у произвольно выбранного человека данной группы ведущими будут левая рука или левый глаз?

7. В группе студентов 5 человек оказались сангвиниками, 8 холериками, 10 флегматиками и 2 меланхоликами. В то же время 15 человек из этой группы – интроверты, 10 – экстраверты. Какова вероятность того, что 2наугад вызванных человека из данной группы либо окажутся холериками и экстравертами, либо один будет меланхоликом и интровертом, а другой – флегматиком и экстравертом? С какой вероятностью можно утверждать, что ни один не будет сангвиником?

8. Максим Дерягин, оценивая свои возможности, пришел к выводу, что он может набрать не менее 8 баллов по первому тесту с вероятностью 0,8 баллов, по второму – с вероятностью 0,9 и по третьему – с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что Максим Дерягин хотя бы по одному тесту получит не менее 8 баллов.

9. В семье семь детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) три мальчика; б) менее трех мальчиков; в) мальчиков не менее трех, но и не более шести. Построить ряд распределения и найти значение функции распределения при x=3.

10. В «Службу доверия» города поступает в среднем 3 обращения в час. Какова вероятность того, что за два часа будет: а) 5 обращений; б) от 4 до 7 обращений; в) не более 3 обращений.

11. Производится 1000 однородных психологических тестирований. Предполагается, что в каждом независимом испытании вероятность отрицательного результата чрезвычайно мала – 0,003. Найти вероятность того, что отрицательных результатов будет: а) ровно два; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы один.

12. Пусть в опытах по психодиагностике вероятность того, что тестируемый субъект зафиксирует световую вспышку в указанном секторе, равна 0,8. Какова вероятность того, что вспышка будет обнаружена впервые в третьем опыте?

13. Уровень тревожности X в нормальной обстановке распределен по показательному закону: $p(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ 4e^{-4x} & при\ \ x > 0. \end{cases}$ Найти вероятность того, что в результате испытаний уровень тревожности попадет в интервал (0,2;0,5).

14. Математическое ожидание порога чувствительности в серии психофизических опытов равно 40, дисперсия равна 100. Вычислить вероятность того, что в данном испытании порог будет заключен в интервале (30,80), считая распределение порога нормальным.

15. Как известно, почерк человека, в том числе наклон букв, тесно связан с его характером. Низкий наклон (30-40 град.) свидетельствует о вспыльчивости и возбудимости человека, излишней прямоте и торопливости в поступках; наклон 40-50 град. характеризует гармоническое развитие натуры; наклон 50-90 град. Свидетельствует о самообладании, узком диапазоне увлечений. Среди студентов института был исследован почерк 50 человек. Оказалось, что почерк у 30% присутствующих имеет низкий наклон, у 50% - наклон 40-50 и у 20% - наклон 50-90 град. Найти распределение частот, относительных частот, построить полигон и гистограмму. С какой частотой встречается наклон почерка в границах от 45 до 60 градусах?

16. В «Службе знакомств» города тестировалось 50 представителей мужского пола в возрасте от 18 до 50 лет с целью определения уровня тревожности при обращении в данную службу. Получилось следующее статистическое распределение уровня тревожности:

Уровень тревожности	3	7	20	35	50	75
Количество человек	3	5	18	19	3	2

Предлагается построить эмпирическую функцию распределения и найти, как часто указанный показатель будет попадать в границы от 7 до 20.

17. Исследователь собрал следующий статистический материал, касающийся дистанции при его общении с другими людьми в течение недели:

Вид общения	Расстояние (см.)	Относительная частота
Интимное (общение близких людей)	0-45	0,3
Персональное (общение со знакомыми)	45-120	0,2
Социальное (официальное общение)	120-400	0,1
Публичное (выступление перед аудиторией)	400-750	0,4

Найти выборочную среднюю дистанцию общения.

18. Найдите оценку разброса скорости чтения, распределение которой представлено в таблице. Предварительно определите, какова относительная частота средней скорости чтения.

Скорость слов в 1 мин.	200 (низкая)	250-300 (средняя)	300-450 (быстрая)	650 (сверхбыстрая)
Относительная частота	0,1	?	0,4	0,05

19. По схеме бесповторной выборки из 400 испытуемых в опытах Францена и Оффенлоха с применением вызванных потенциалов отобраны 100 человек и проведены замеры латентных периодов. Результаты испытаний приведены в таблице:

Длительность латентного периода, мс	[40;42]	(42;44]	(44;46]	(46;48]	(48;50]	Итого
Количество испытуемых	7	24	38	19	12	100

Найти:

а) вероятность того, что средний латентный период всех 400 человек отличается от среднего периода в выборке не более чем на 0,31 мс (по абсолютной величине);

б) границы, в которых с вероятностью $\gamma = 0{,}99$ заключено среднее значение латентного периода;

в) объем выборки, для которой доверительные границы с предельной ошибкой $\delta = 0{,}42$ имели бы место с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}99$;

г) доверительные границы, в которых с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ во всей группе находится доля испытуемых с латентным периодом, большим 46 мс;

д) каким должен быть объем выборки, чтобы с той же доверительной вероятностью 0,95 можно было гарантировать доверительные границы с предельной ошибкой 0,05?

20. Для 9 претендентов на должность руководителя была проведена оценка профессионального показателя $\aleph$, характеризующего способность руководить людьми. Считая показатель $\aleph$ распределенным по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 5 усл. ед., определить с надежностью 0,9 доверительный интервал для истинного (генерального) среднего квадратического отклонения показателя $\aleph$.

Данные задачи взяты из книги:

Ганичева, А.В. Математика для психологов: учеб. пособие для студентов вузов / А.В.Ганичева, В.П.Козлов. – М.: Аспект Пресс, 2005. – 239 с.