

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В.Г. КАЗАЧКОВ, Ф.А. КАЗАЧКОВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук, профессора Н.А.Манакова

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальностям гуманитарного и технического направлений

Оренбург 2009

УДК 53 (075.8)
ББК 22.3 я73
К 14

Рецензент

доктор физико-математических наук, профессор М.Г. Кучеренко

К14 **Казачков В.Г.**
Курс общей физики: учебное пособие / В.Г. Казачков,
Ф.А. Казачкова; под ред. Н.А.Манакова – Оренбург: ИПК
ГОУ ОГУ, 2009. – 217 с.
ISBN

В пособии кратко рассмотрены основные разделы курса общей физики: механика, электродинамика, колебания и волны, тепловые явления, атомная физика.

Учебное пособие написано для студентов гуманитарного и технического направлений изучающих физику в течение одного или двух семестров.

БК 22.3я73

К 1604010000

ISBN

© Казачков В.Г., 2009
© ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

Введение	5
Часть 1 Физические основы механики	6
Глава 1 Механика материальной точки.....	6
§ 1.1 Принцип относительности.....	6
§ 1.2 Материальная точка	7
§ 1.3 Скорость и ускорение	9
§ 1.4 Преобразования Галилея	11
§ 1.5 Импульс	13
§ 1.6 Сила.....	15
§ 1.7 Виды взаимодействия и силы.....	18
§ 1.8 Работа и потенциальная энергия.....	20
§ 1.9 Кинетическая энергия. Закон сохранения механической энергии.....	24
§ 1.10 Столкновения	25
§ 1.11 Момент импульса и момент силы.....	27
Глава 2 Движение твердого тела.....	29
§ 2.1 Виды движения твердого тела	29
§ 2.2 Энергия движущегося твердого тела.....	31
§ 2.3 Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси	33
Часть 2 Электродинамика.....	36
Глава 3 Электрическое поле	36
§ 3.1 Электрическое взаимодействие	36
§ 3.2 Напряженность электрического поля.....	37
§ 3.3 Теорема Гаусса	41
§ 3.4 Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$. Потенциал	47
§ 3.5 Емкость	51
§ 3.6 Электрическая энергия	53
§ 3.7 Электрическое поле в веществе	55
Глава 4 Постоянный электрический ток	60
§ 4.1 Вектор плотности тока.....	60
§ 4.2 Основные законы постоянного тока.....	61
Глава 5 Магнитное поле.....	69
§ 5.1 Сила Лоренца. Поле вектора $\vec{B}$	69
§ 5.2 Основные законы магнитного поля.....	75
§ 5.3 Закон Ампера	80
§ 5.4 Магнитное поле в веществе. Магнетики.....	81
§ 5.5 Электромагнитная индукция.....	84
§ 5.6 Энергия магнитного поля	87
§ 5.8 Система уравнений Максвелла	91
Часть 3 Колебания и волны	94
Глава 6. Колебания	94
§ 6.1 Гармонические колебания	94
§ 6.2 Затухающие колебания	101
§ 6.3 Вынужденные колебания. Резонанс	102
Глава 7 Уравнение волны, волновое движение.....	105
§ 7.1 Математическое описание незатухающей волны	105

§ 7.2 Гармонические волны	107
§ 7.3 Поток энергии	110
§ 7.4 Волновое уравнение	112
§ 7.5 Электромагнитные волны	113
§ 7.6 Плоская электромагнитная волна	115
§ 7.7 Энергия электромагнитной волны. Поток энергии	116
§ 7.8 Световая волна и ее характеристики	118
§ 7.9 Интерференция	121
§ 7.10 Дифракция	127
Часть 4 Физика тепловых явлений	137
Глава 8 Теплота	137
§ 8.1 Температура	137
§ 8.2 Давление	140
§ 8.3 Уравнение состояния	141
§ 8.4 Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа	142
§ 8.5 Идеальный газ во внешнем силовом поле	146
§ 8.6 Распределение Максвелла	148
§ 8.7 Работа и количество теплоты. I закон термодинамики	151
§ 8.8 Теплоемкость. Теплоемкость идеального газа	155
§ 8.9 Теплоемкость твердых тел	159
Глава 9 Тепловые процессы	160
§ 9.1 Тепловой процесс	160
§ 9.2 Адиабатический процесс	161
§ 9.3 Стационарный поток	166
§ 9.4 Необратимость тепловых процессов. II закон термодинамики	170
§ 9.5 Природа необратимости тепловых процессов	172
§ 9.6 Энтропия	174
§ 9.7 Цикл Карно	178
Часть 5 Атомные процессы	181
Глава 10 Квантовая природа излучения	181
§ 10.1 Тепловое излучение и его закономерности	181
§ 10.2 Фотоэффект. Квантовые свойства излучения	185
§ 10.3 Волновые свойства микрочастиц	188
§ 10.4 Уравнение Шредингера	190
§ 10.5 Физический смысл пси-функции	193
§ 10.6 Принцип неопределенности	194
§ 10.7 Частица в прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». Квантование энергии	197
§ 10.8 Атом водорода в квантовой механике	203
§ 10.9 Распределение плотности вероятности	207
§ 10.10 Спектр атома водорода	209
§ 10.11 Спин электрона	213
§ 10.12 Принцип Паули. Заполнение электронных оболочек	214
Список использованных источников	217

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, изучающих физику в течение одного или двух семестров. Это, например, студенты, поступившие на бакалавриат по направлению подготовки 010300 – «Математика. Компьютерные науки». В соответствии с учебными планами на изучение физики им отводится не более 170 аудиторных часов. Поэтому стандартные вузовские учебники и учебные пособия, рассчитанные на трех-, четырех семестровые курсы физики в данном случае избыточны по объему материала.

В связи с этим авторы поставили перед собой задачу – дать краткое, местами конспективное изложение сведений предусмотренных соответствующими типовыми программами по физике. В основу учебного пособия положены курсы лекций, которые читались в Оренбургском государственном университете для специальностей: 010503 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»; 230105.65 – «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»; 080401 – «Товароведение и экспертиза товаров»; 020701.65 – «Почвоведение»; 190702 – «Организация и безопасность движения» и др.

В учебном пособии предлагается нетрадиционный порядок изложения физики. За механикой следует электродинамика, затем колебания и волны, после чего излагается теория теплоты и атомная физика. Разделы физики твердого тела и ядерной физики вынесены на лабораторный практикум.

Такой порядок изложения дает возможность остановиться главным образом на основных, принципиальных вопросах физики, опустив ряд частных, имеющих технический характер и, кроме того, на наш взгляд, более соответствует современному состоянию физики.

В пособии приведено «установившееся» содержание курса общей физики, лишенное исторических обзоров, детальных описаний лекционных демонстраций, приборов, экспериментальных установок и методов измерений.

Авторами учтено, что студенты перечисленных выше специальностей получают различную математическую подготовку, порой довольно ограниченную, поэтому в пособии по возможности не используется сложный математический аппарат. Тем не менее, основные математические обоснования даются в тексте, выделенном курсивом. Курсивом выделен также ряд примеров для более любознательных студентов, пожелавших более глубоко понять природу явлений.

В заключении, авторы выражают глубокую благодарность ведущему инженеру кафедры общей физики О.В. Глазковой за большую работу по оформлению учебного пособия.

Часть 1 Физические основы механики

Глава 1 Механика материальной точки

§ 1.1 Принцип относительности

Механика изучает простейшую форму движения – механическое движение. Механическое движение можно определить как изменение положения тела или тел относительно других тел с течением времени.

Совокупность тел, по отношению к которым рассматривается движение и которые условно можно считать неподвижными, называется в физике **системой отсчета**. Систему отсчета можно выбирать произвольно бесчисленным множеством способов. Если система отсчета совпадает с самим телом, то в ней тело будет покоиться, а в других – двигаться, причем в разных системах отсчета по-разному, то есть по различным траекториям. Все системы отсчета являются равноправными и одинаково допустимыми при изучении движения какого-либо тела. Однако физические явления протекают, вообще говоря, различно в разных системах отсчета. Поэтому, вполне естественно выбирать систему отсчета таким образом, чтобы явления природы выглядели в ней наиболее просто.

Рассмотрим тело, расположенное настолько далеко от других тел, что оно не испытывает воздействий со стороны последних. Такое тело называют **свободно движущимся**. Конечно, условия свободного движения могут реально осуществляться лишь с большей или меньшей степенью точности, но принципиально можно представить себе, что тело со сколь угодно большой степенью точности не взаимодействует с другими телами.

Свободное движение, как и другие виды движения, выглядит различно в разных системах отсчета. Однако, если в качестве системы отсчета выбрать систему, связанную с каким-либо свободно движущимся телом, то в такой системе свободное движение других тел выглядит особенно просто: оно происходит прямолинейно и равномерно или, иначе говоря, с постоянной по величине и направлению скоростью. Это утверждение составляет содержание **закона инерции**, впервые открытого Галилеем. Система отсчета, связанная со свободно движущимся телом, называется **инерциальной** системой отсчета. Закон инерции в механике называют также **первым законом Ньютона**.

Инерциальных систем отсчета существует бесчисленное множество. Действительно, любая система, которая движется по отношению к инерциальной системе с постоянной (по величине и направлению) скоростью, также будет инерциальной.

Необходимо подчеркнуть, что существование инерциальных систем отсчета не является чисто логической необходимостью. Утверждение о существовании, в принципе, таких систем отсчета, по отношению к которым

движение тел происходит прямолинейно и равномерно, представляет собой один из основных законов природы.

Из всего сказанного ясно, что изучая свободное движение мы не можем отличить различные инерциальные системы. Возникает естественный вопрос, можно ли, изучая другие физические явления, как-то отличить одну инерциальную систему от другой и, таким образом, выделить одну из систем как особенную. Развитие науки показало, что такой избранной системы не существует. Все физические явления протекают одинаково в различных инерциальных системах отсчета. Это утверждение, которое является одним из важнейших законов физики, получило название **принципа относительности движения**.

Так как все физические законы формулируются одинаково во всех инерциальных системах отсчета, а в неинерциальных системах отсчета эти формулировки отличаются, то естественно изучать все физические явления именно в инерциальных системах отсчета. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться только инерциальными системами отсчета, за исключением особо оговоренных случаев.

§ 1.2 Материальная точка

Изучение законов движения проще начинать с движения тела, размеры которого достаточно малы. Движение такого тела происходит наиболее просто, так как можно не принимать во внимание перемещение различных частей тела друг относительно друга и вращение тела.

Тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь, называется **материальной точкой**. Материальная точка является основным объектом механики. Вместо слов «материальная точка» часто говорят просто «точка», мы будем говорить также «частица».

Возможность рассматривать движение некоторого тела как материальной точки определяется не только геометрическими размерами, а зависит от условий физической задачи. Например, шарик скользящий без трения по наклонной плоскости можно считать материальной точкой. Однако шарик скатывающийся с наклонной плоскости уже нельзя рассматривать как материальную точку из-за его вращения вокруг оси.

Описать движение материальной точки – значит в каждый момент времени указать ее положение в пространстве по отношению к выбранной системе отсчета.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат жестко связать с системой отсчета, то положение материальной точки однозначно определяется заданием трех координат x , y , z (рисунок 1), которые численно равны расстояниям от точки A до плоскостей: YOZ , XOZ , XOY . В этой связи говорят, что материальная точка обладает тремя системами свободы.

Замечание – Если мы возьмем другую систему координат (сферическую, цилиндрическую и т.д.), то положение точки все равно будет определяться тремя числами. Это объясняется тем, что пространство, в котором существует весь наблюдаемый нами мир, имеет три измерения. Поэтому и положение точки в этом пространстве определяется тремя числами.

Положение частицы можно описывать также с помощью радиуса-вектора. Радиусом-вектором точки A (рисунок 1) называется вектор $\vec{R}$,

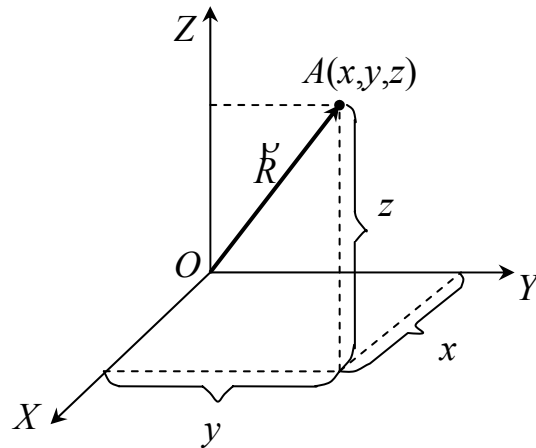


Рисунок 1

проекции которого на оси системы координат совпадают с координатами точки A , а его численное значение равно

$$|\vec{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При движении радиус-вектор точки может изменяться как по величине, так и по направлению. Это означает, что радиус-вектор является функцией времени t :

$$\dot{\vec{R}}(t) = \dot{\vec{R}}\{x(t), y(t), z(t)\}.$$

Эта функция определяет закон движения материальной точки. При движении точки конец радиуса-вектора описывает в пространстве линию, которую называют **траекторией**.

Время при движении точки отсчитывается по часам, помещенным в начало координат. В дальнейшем, для удобства изложения, мы будем рассматривать движение частицы только в одной из координатных плоскостей, что не скажется на физической сути рассматриваемых вопросов.

§ 1.3 Скорость и ускорение

Для характеристики движения точки вводятся два основных понятия: скорость и ускорение.

Предположим, что точка A переместилась вдоль некоторой траектории из положения 1 в положение 2. за какой-то промежуток времени Δt (рисунок 2). Положение точек 1 и 2 описывается радиусами-векторами $\dot{R}_1(t)$ и $\dot{R}_2(t + \Delta t)$, соответственно. Из рисунка 2 видно, что вектор $\Delta \dot{R}$ представляет собой перемещение точки A , а ΔS – путь за время Δt : $\Delta \dot{R} = \dot{R}_2 - \dot{R}_1$. Отношение $\Delta \dot{R} / \Delta t$, называют средней скоростью $\langle \dot{\vartheta} \rangle$ за время Δt . Вектор $\langle \dot{\vartheta} \rangle$ совпадает по направлению с $\Delta \dot{R}$. Определим вектор скорости $\dot{\vartheta}$ точки в данный момент времени как предел отношения $\Delta \dot{R} / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то есть:

$$\dot{\vartheta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{R}_2(t + \Delta t) - \dot{R}_1(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{R}}{\Delta t} = \frac{d\dot{R}}{dt}. \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) означает, что вектор скорости $\dot{\vartheta}$ равен производной от радиуса-вектора $\dot{R}$ по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке (рисунок 2), как и вектор $d\dot{R}$. Модуль вектора $\dot{\vartheta}$ равен

$$\vartheta = |\dot{\vartheta}| = \left| \frac{d\dot{R}}{dt} \right|.$$

Обозначим через $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ проекции (компоненты) скорости $\dot{\vartheta}$ на координатные оси системы отсчета: $\dot{\vartheta} = \{\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z\}$. Тогда, векторное выражение (1.1) эквивалентно трем соотношениям:

$$\vartheta_x = \frac{dx(t)}{dt}; \quad \vartheta_y = \frac{dy(t)}{dt}; \quad \vartheta_z = \frac{dz(t)}{dt};$$

соответственно

$$\vartheta = |\dot{\vartheta}| = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}.$$

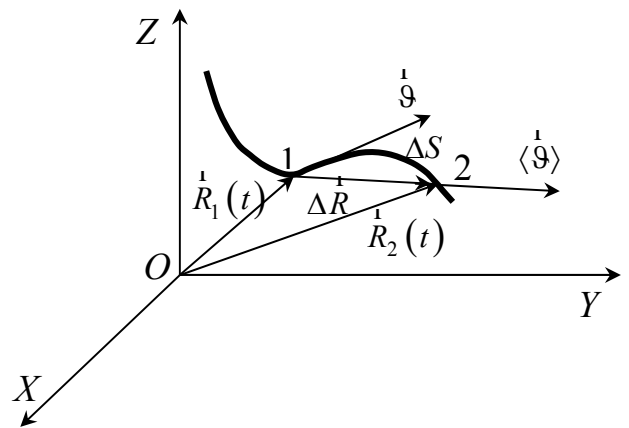


Рисунок 2

Замечание – Скорость и положение являются основными величинами характеризующими состояние материальной точки.

В общем случае движения частицы по сложной траектории ее скорость непрерывно меняется как по величине, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости вводят понятие **ускорения**. Ускорением называют вектор $\dot{\vec{a}}$ равный производной от скорости по времени:

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}, \quad (1.2)$$

или второй производной от радиуса-вектора по времени. Компоненты и модуль вектора $\dot{\vec{a}}$ записываются аналогично вектору скорости.

Если направление скорости не изменяется, то есть материальная точка движется по прямой, то ускорение направлено по этой же прямой и равно, очевидно

$$a = \frac{d|\dot{\vec{v}}|}{dt} = \frac{d\dot{v}}{dt}.$$

В отличие от скорости, ускорение может иметь любую ориентацию по отношению к направлению движения частицы, так как оно направлено вдоль вектора $d\dot{\vec{v}}$.

Замечание – Помимо скорости и ускорения можно рассматривать и более высокие производные радиуса-вектора. Однако в этом нет необходимости. Далее мы покажем, что для систем материальных точек ускорения выражаются через координаты и скорости, то есть не являются независимыми величинами.

В общем случае движения точки по заданной траектории ускорение точки $\dot{\vec{a}}$ удобней разложить на два вектора (рисунок 3): $\dot{\vec{a}}_\tau$ – направлен по касательной к траектории движения и $\dot{\vec{a}}_n$ – перпендикулярный к нему, то есть, $\dot{\vec{a}} = \dot{\vec{a}}_\tau + \dot{\vec{a}}_n$.

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\dot{\vec{a}} = a_\tau \dot{\vec{\tau}} + a_n \dot{\vec{n}},$$

где $\dot{\vec{\tau}}$ и $\dot{\vec{n}}$ – ортогональные друг другу векторы (вдоль выделенных направлений) единичной длины: $|\dot{\vec{\tau}}| = |\dot{\vec{n}}| = 1$;

a_τ – называют тангенциальным ускорением;
 a_n – нормальным ускорением.

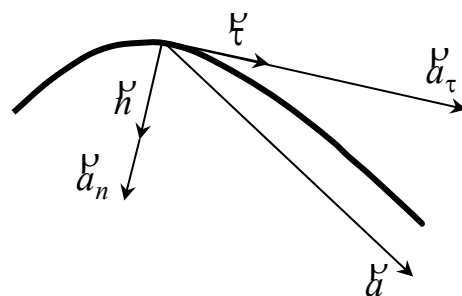


Рисунок 3

Смысл разделения ускорения на тангенциальную и нормальную составляющие таков: тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине, т.е. $a_\tau = \frac{d|\dot{\mathbf{g}}|}{dt}$; нормальное ускорение – изменение скорости по направлению и равно, $a_n = \frac{\dot{\mathbf{g}}^2}{R}$, где R – радиус кривизны кривой в данной точке.

§ 1.4 Преобразования Галилея

Равноправие инерциальных систем отсчета дает возможность в каждом конкретном случае подбирать систему координат, наиболее удобную для решения рассматриваемой задачи. Давайте проследим, как производится выбор нужной системы отсчета и какие задачи приходится при этом решать.

Вначале необходимо установить инерциальность какой-либо системы отсчета. После этого можно выбирать наиболее удобную систему путем изменения: а) начала отсчета времени; б) начала координат; в) ориентации координатных осей, а также – г) путем перехода к системе координат, движущейся поступательно с некоторой постоянной скоростью.

При переходе от одной системы отсчета к другой координаты частиц, компоненты их скоростей и другие величины изменяются. Поэтому возникает задача о выражении величин, заданных в одной системе отсчета, через те же величины в другой системе. В случаях (а), (б), (в) такие преобразования очевидны и однозначны, как это следует из рисунков 4 и 5.

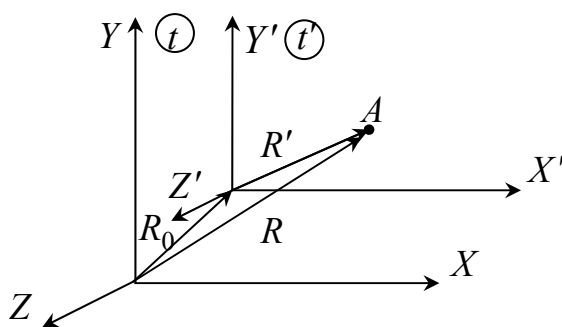


Рисунок 4

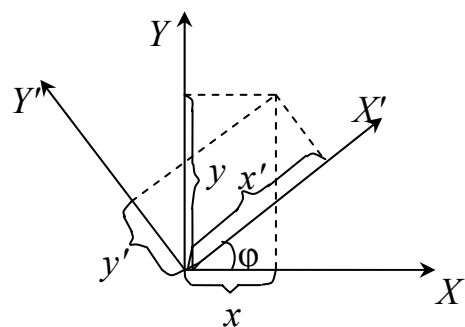


Рисунок 5

Смещение отсчета времени на промежуток t_0 и начала координат на вектор $\vec{R}_0$ время t и радиуса-вектора $\vec{R}$ в исходной системе отсчета связаны с временем t' и радиусом-вектором $\vec{R}'$ в новой системе отсчета соотношениями

$$t = t' + t_0, \quad \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}' + \dot{\vec{R}}_0. \quad (1.3)$$

При повороте координатных осей на произвольный угол φ , в плоскости XU исходные координаты выражаются через новые по формулам

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \quad (1.4)$$

Прежде чем переходить к получению преобразований перехода к движущимся системам отсчета, следует отметить, что эти преобразования достаточно получить для простейшего случая, когда исходная система (назовем ее системой K) с координатными осями X, Y, Z и временем t считается покоящейся, а новая система K' с координатами X', Y', Z' и временем t' движется с постоянной скоростью $\dot{V}$, направленной вдоль оси X . Любое другое преобразование перехода к движущейся системе отсчета сводится к комбинации только что указанного с преобразованиями смещений и поворотов. Итак, пусть система K' движется относительно системы K с постоянной скоростью $\dot{V}$ вдоль оси X (рисунок 6). Взяв за начало отсчета времени момент, когда начало координат O' и O совпадали, запишем соотношение между векторами $\dot{\vec{R}}$ и $\dot{\vec{R}}'$ одной и той же точки A в K' и K – системах, в соответствии с рисунком 6.

$$\dot{\vec{R}}' = \dot{\vec{R}} - \dot{V}t \quad (1.5)$$

и, кроме того,

$$t' = t. \quad (1.6)$$

В ньютоновской механике считается, что длина отрезков и ход времени не зависят от состояния движения и, следовательно, одинаковы в обеих системах отсчета.

Соотношения (1.5) и (1.6) представляют собой преобразования Галилея.

В координатах эти преобразования имеют вид

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

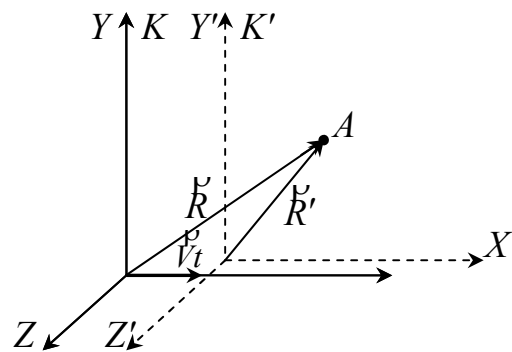


Рисунок 6

Дифференцируя (1.5) по времени найдем классический закон преобразования скорости точки при переходе от одной инерциальной системы к другой

$$\dot{\vec{g}}' = \dot{\vec{g}} - \dot{V}.$$

Дифференцируя это выражение по времени с учетом того, что $\dot{V} = const$ по условию, получим

$$\dot{a}' = \dot{a},$$

то есть, ускорения одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

В механике Ньютона масса тел не зависит от выбора системы отсчета, следовательно второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, будет одинаков во всех инерциальных системах. Отсюда непосредственно вытекает, что законы механики инвариантны относительно преобразований Галилея – в полном соответствии с принципом относительности.

§ 1.5 Импульс

При свободном движении материальной точки, когда она не взаимодействует с другими частицами, ее скорость в инерциальных системах отсчета остается постоянной. Если материальные точки взаимодействуют друг с другом, то их скорость меняется с течением времени. Изменение скорости взаимодействующих частиц зависит от многих причин. Для выяснения этих причин введем понятие замкнутой системы.

Замкнутой (изолированной) системой называется совокупность материальных точек, взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующих с окружающими телами. Например, изолированной системой, с высокой степенью точности, можно считать буксующий автомобиль.

Для замкнутых систем существует ряд величин, связанных со скоростями и не меняющихся с течением времени.

Одной из таких неизменяющихся величин является полный импульс системы частиц.

Импульсом материальной точки называют вектор, пропорциональный скорости и равный

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (1.7)$$

где m – масса материальной точки, кг;

Тогда сумма векторов $\vec{p}$ всех частиц системы даст нам полный импульс системы:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Постоянство полного импульса системы,

$$\dot{\vec{P}} = const, \quad (1.8)$$

называется **законом сохранения импульса**.

Поскольку полный импульс системы является вектором, то в проекциях на координатные оси закон сохранения импульса запишется в виде трех уравнений:

$$P_x = \sum_{i=1}^n m_i \vartheta_{x_i} = \text{const}, \quad P_y = \sum_{i=1}^n m_i \vartheta_{y_i} = \text{const}, \quad P_z = \sum_{i=1}^n m_i \vartheta_{z_i} = \text{const}.$$

Используя закон сохранения импульса можно определить отношение масс частиц. Действительно, представим себе систему, состоящую из двух частиц с массами m_1 и m_2 . Пусть $\overset{\cdot}{\vartheta}_1$ и $\overset{\cdot}{\vartheta}_2$ обозначают скорости до столкновения, а $\overset{\cdot}{u}_1$ и $\overset{\cdot}{u}_2$ – после столкновения. Тогда из закона сохранения импульса следует, что

$$m_1 \overset{\cdot}{\vartheta}_1 + m_2 \overset{\cdot}{\vartheta}_2 = m_1 \overset{\cdot}{u}_1 + m_2 \overset{\cdot}{u}_2.$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$m_1 (\overset{\cdot}{\vartheta}_1 - \overset{\cdot}{u}_1) = m_2 (\overset{\cdot}{u}_2 - \overset{\cdot}{\vartheta}_2).$$

Отсюда

$$m_2 = m_1 \frac{|\overset{\cdot}{\vartheta}_1 - \overset{\cdot}{u}_1|}{|\overset{\cdot}{u}_2 - \overset{\cdot}{\vartheta}_2|}.$$

Принимая массу произвольной частицы m_1 за эталонную, мы сможем определить массу остальных частиц по отношению к выбранному эталону. В системе единиц СИ за единицу массы принимают один килограмм.

Из закона сохранения импульса можно вывести два важных следствия, которые называются **законом сохранения движения центра масс** и **законом аддитивности массы**.

Чтобы разъяснить содержание этих законов, рассмотрим для замкнутой системы частиц точку, называемую **центром инерции**. **Центром инерции** системы частиц с радиусами-векторами $\overset{\cdot}{r}_1, \overset{\cdot}{r}_2, \dots, \overset{\cdot}{r}_n$ и массами, соответственно, $m_1, m_2, \dots, m_n$ называется точка с радиусом-вектором

$$\overset{\cdot}{R}_{II} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overset{\cdot}{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (1.9)$$

где суммирование производится по всем частицам.

Центр инерции обладает замечательным свойством – он движется с постоянной скоростью, в то время как отдельные частицы, входящие в состав замкнутой системы, могут двигаться со скоростями, изменяющимися с течением времени. Докажем это утверждение, получившее название закона сохранения центра инерции.

Действительно, скорость движения центра инерции равна

$$\mathbf{r}_V = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \mathbf{P}_i}{\sum m_i} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{P}$ – полный импульс системы;

M – суммарная масса частиц системы.

Так как полный импульс замкнутой системы сохраняется, то скорость в выражении (1.10) также сохраняется.

Перепишем выражение (1.10) в виде

$$\dot{\mathbf{P}} = M\dot{\mathbf{V}}, \quad (1.11)$$

которое по внешнему виду совпадает с выражением (1.7) для материальной точки. Поэтому мы можем рассматривать полный импульс системы как импульс одной материальной точки, совпадающей с центром инерции системы и имеющей массу, равную массе всей системы. Скорость центра инерции в этом случае можно считать скоростью движения системы частиц как целого. В то же время сумма масс отдельных частиц выступает как масса всей системы. Это привычное утверждение (далеко не тривиальное) является следствием закона сохранения импульса и получило название закона аддитивности массы (или закона сохранения массы).

§ 1.6 Сила

Если материальная точка совершает свободное движение, то есть не взаимодействует с окружающими телами, то ее импульс сохраняется. Если, напротив, частица взаимодействует с окружающими телами, то ее импульс будет изменяться с течением времени. Чем больше это изменение в единицу времени, тем интенсивнее взаимодействие. Величину этого взаимодействия следует определить как производную от вектора импульса по времени, т.е. $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$. Эта производная равна **силе**, действующей на частицу. Такое определение силы характеризует одну сторону взаимодействия – оно касается только степени реагирования материальной точки на взаимодействие со стороны окружающих тел.

С другой стороны, изучая взаимодействие материальной точки с окружающими телами, можно связать эту силу с величинами, характеризующими их взаимное расположение.

Возьмем для примера:

$$\left. \begin{array}{l} \text{сила Кулона} \quad - \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{e}_r; \\ \text{сила тяготения Ньютона} - \quad \vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{e}_r, \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор в направлении действия силы.

Из формул (1.12) видно, что сила взаимодействия между материальными точками, зависит только от их расположения. Забегая вперед, отметим, что сила может зависеть и от скорости, как правило это силы сопротивления.

Обобщая сказанное о силе, мы можем записать равенство

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (1.13)$$

Выражение (1.13) называется уравнением движения материальной точки.

Так как $\vec{p} = m\vec{\dot{\vartheta}}$, то уравнение (1.13) можно записать в виде

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{\dot{\vartheta}}}{dt} = m\vec{\dot{a}}, \quad (1.14)$$

то есть сила, действующая на материальную точку, равна произведению ускорения материальной точки на ее массу. Это утверждение составляет содержание второго закона Ньютона.

Особо отметим, что выражение (1.13) и второй закон Ньютона приобретает конкретный смысл только после того, как установлен вид функции $\vec{F}$ как функции координат. Если вид функции известен, то уравнения движения (1.13), (1.14), представляющие собой дифференциальные уравнения 2-го порядка относительно радиуса-вектора $\vec{R}$, позволяют, в принципе, определить зависимость скорости и координат материальной точки от времени, т.е. найти траекторию движения. Для однозначного решения уравнения, помимо вида функции $\vec{F}$, должны быть заданы, как говорят, начальные условия: положение $\vec{R}_0$ и скорость $\vec{\dot{\vartheta}}_0$ частицы в некоторый момент времени t_0 , принимаемый в качестве исходного.

Рассмотрим в общем виде математическую сторону вопроса. Из 2 закона Ньютона мы можем, путем интегрирования уравнения (1.13) или (1.14) найти скорость:

$$\overset{r}{\mathfrak{V}} = \int \frac{\overset{r}{F}}{m} dt = \frac{\overset{r}{F}}{m} t + const, \quad (1.15)$$

так как интегрирование проводится с точностью до постоянного множителя.

Значение константы определим из следующих соображений. Будем считать, что мы начали наблюдать движение частицы с некоторого момента времени t и примем его за начало отсчета, т.е. $t = t_0 = 0$. Подставляя значение $t = 0$ в решение уравнения (1.15) получим

$$const = \overset{r}{\mathfrak{V}}_0,$$

то есть скорость в начальный момент времени t_0 .

Тогда выражение (1.15) логично переписать в виде

$$\overset{r}{\mathfrak{V}} = \frac{\overset{r}{F}}{m} t + \overset{r}{\mathfrak{V}}_0.$$

Совершенно аналогично поступим при определении положения точки. По формуле (1.1)

$$\overset{r}{R} = \int \overset{r}{\mathfrak{V}} dt = \int \left(\frac{\overset{r}{F}}{m} t + \overset{r}{\mathfrak{V}}_0 \right) dt = \frac{\overset{r}{F}}{2m} t^2 + \overset{r}{\mathfrak{V}}_0 t + const, \quad (1.16)$$

где при $t = 0$, $const = \overset{r}{R}_0$.

В итоге получим выражение для траектории движения частицы

$$\overset{r}{R}(t) = \overset{r}{R}_0 + \overset{r}{\mathfrak{V}}_0 t + \frac{\overset{r}{F}}{2m} t^2. \quad (1.17)$$

Таким образом, из сказанного следует, что знание начального положения и начальной скорости достаточно для полного определения ее дальнейшего движения. Именно в этом заключается смысл сделанного в § 1.3 замечания о том, что механическое состояние частицы задается ее координатами и скоростью.

Уравнение движения (1.13) является векторным уравнением. Поэтому его можно спроектировать на оси координат и записать в виде трех скалярных уравнений:

$$m \frac{d\vartheta_x}{dt} = F_x; \quad m \frac{d\vartheta_y}{dt} = F_y; \quad m \frac{d\vartheta_z}{dt} = F_z.$$

Рассмотрим снова замкнутую систему материальных точек, запишем для нее закон сохранения импульса

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 + \dots + \dot{\vec{p}}_n = \text{const}$$

и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\dot{\vec{P}}}{dt} = \frac{d\dot{\vec{p}}_1}{dt} + \frac{d\dot{\vec{p}}_2}{dt} + \dots + \frac{d\dot{\vec{p}}_n}{dt} = 0.$$

Последнее выражение, с учетом уравнения (1.13), перепишем в виде:

$$\dot{\vec{F}}_1 + \dot{\vec{F}}_2 + \dots + \dot{\vec{F}}_n = 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, сумма всех сил в замкнутой системе равной нулю. Эти силы называют внутренними силами.

В частности, если в замкнутой системе содержится только два тела, то сила, с которой первое тело действует на второе, должна быть равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое, т.е.

$$\dot{\vec{F}}_1 = -\dot{\vec{F}}_2.$$

Это утверждение носит название **закона равенства действия и противодействия**, или третьего закона Ньютона.

§ 1.7 Виды взаимодействия и силы

Главный результат предыдущего параграфа состоит в том, что основная задача механики решается с помощью уравнения движения

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где выражение для силы находится из опыта и является результатом взаимодействия тел.

По современным представлениям все многообразие явлений, наблюдаемых во Вселенной, обусловлено четырьмя видами **фундаментальных** взаимодействий: гравитационным, слабым, электромагнитным и сильным.

Гравитационное взаимодействие осуществляется между любыми массами и проявляется в форме сил тяготения

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{e}_r, \quad (1.18)$$

Роль этих сил возрастает при переходе к большим массам. В микромире силы тяготения практически никакой роли не играют.

Слабое взаимодействие определяет нестабильность многих элементарных частиц (группа лептонов) приводя к их распадам, и характерным только для определенного круга квантовых процессов.

Электромагнитное взаимодействие осуществляется между телами, в состав которых входят заряженные частицы и проявляется в форме силы Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (1.19)$$

В этой форме первое слагаемое учитывает электрическую часть взаимодействия, а вторая – магнитную часть. При малых скоростях магнитная составляющая крайне мала в сравнении с электрической. Эти взаимодействия обуславливают существование стабильных атомов, связывают атомы в молекулы, являются причиной действия сил между частицами газов, жидкостей, твердых тел, плазмы и играют основную роль во всех физико-химических и биологических процессах. К электрическим взаимодействиям сводится подавляющее большинство явлений, с которыми мы будем иметь дело при изучении курса.

Сильные взаимодействия осуществляются между частицами из группы мезонов (за исключением мюона) и барионов – элементарных частиц, обуславливающих процессы ядерной физики высокой энергии. Эти взаимодействия связывают протоны и нейтроны в атомных ядрах. Характерной особенностью сильных взаимодействий является малый радиус их действия (порядка 10^{-15} м).

В классической механике все силы имеют гравитационную или электромагнитную природу. Однако провести анализ разнообразных явлений и связанных с ними сил, с которыми мы сталкиваемся в механике, на основе фундаментальных взаимодействий было бы затруднительно. Поэтому, наряду с силами (1.12), (1.19) мы пользуемся менее фундаментальными силами, которые перечислим ниже.

Сила тяжести:

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad (1.20)$$

где g – ускорение свободного падения, м/с^2 .

Упругая сила – пропорциональная смещению частицы из положения равновесия и направленная к положению равновесия:

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \quad (1.21)$$

где k – коэффициент упругости;

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Сила трения скольжения возникающая при скольжении одного тела по поверхности другого

$$F = -\mu N, \quad (1.22)$$

где μ – коэффициент трения;

N – сила нормального давления.

Сила трения скольжения всегда направлена в сторону противоположную направлению движения.

Сила сопротивления действующая на тело при его движении в газе или жидкости. При небольших скоростях, когда течение жидкости имеет ламинарный характер, эта сила определяется законом Стокса

$$\vec{F} = -\alpha\vec{v}, \quad (1.23)$$

где α – коэффициент пропорциональности;

$\vec{v}$ – скорость движения тела.

При больших скоростях (не превышающих скорость звука в среде) течение носит турбулентный характер. В этом случае сила сопротивления определяется законом Ньютона

$$\vec{F} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v}, \quad (1.24)$$

где β – коэффициент пропорциональности.

§ 1.8 Работа и потенциальная энергия

Если на частицу в каждой точке пространства действует определенная сила, то всю совокупность сил называют силовым полем. В общем случае силы поля могут меняться от точки к точке и зависеть от времени.

Введем понятие работы, для этого рассмотрим движение материальной точки в некотором силовом поле.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называют скалярное произведение

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cos \alpha \, dr = F_r dr, \quad (1.25)$$

где сила $\vec{F}$ на участке $d\vec{r}$ считается постоянной.

Для определения работы на конечном участке 1-2 (рисунок 7), нужно этот участок «разбить» на элементарные участки $d\vec{r}$ и, определив работу на каждом элементарном участке по формуле (1.25), проинтегрировать по всему участку, т.е.

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_r dr. \quad (1.26)$$

В системе единиц СИ работа измеряется в джоулях (Дж). $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Из определения работы следует, что сила направленная перпендикулярно перемещению, работы не производит.

Работа, производимая в единицу времени, называется **мощностью**,

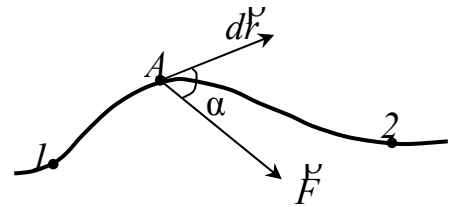


Рисунок 7

$$P = \frac{dA}{dt} = \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.27)$$

Мощность в системе СИ измеряется в ваттах (Вт):

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}.$$

Рассмотрим стационарное силовое поле, т.е. поле, не зависящее от времени. В таком поле существуют силы, работа которых, при перемещении частицы по замкнутому контуру, всегда равна нулю. Такие силы называют консервативными (или потенциальными). Все остальные силы называют неконсервативными (или диссипативными).

К консервативным силам относятся все силы, зависящие от положения материальной точки, то есть сила тяготения, сила Кулона, сила упругости и т.д. К диссипативным силам относятся, например, сила трения, сила сопротивления. Как правило, эти силы зависят от скорости, и работа этих сил по замкнутому кругу отлична от нуля.

Если работа сил по замкнутому контуру равна нулю, то она (работа сил) не зависит от формы пути материальной точки, а определяется только ее начальным и конечным положениями. Докажем это. Пусть частица под дей-

ствием консервативных сил перемещается по замкнутой траектории (рисунок 8), при этом работа, производимая силами поля равна нулю, т.е.

$$A = A_{1a2} + A_{2b1} = 0. \quad (1.28)$$

При изменении направления движения (по определению работы) изменится только знак, но не величина работы. Отсюда следует, с учетом (1.28), что

$$A_{1a2} = -A_{2b1} = A_{1b2}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положения точек, что и требовалось доказать.

Математически последнее утверждение можно записать в виде

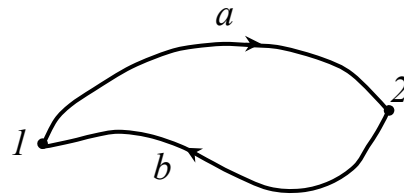


Рисунок 8

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \Pi(\vec{r}_1) - \Pi(\vec{r}_2) = -\Delta\Pi(\vec{r}). \quad (1.29)$$

Функция положения частицы $\Pi(\vec{r})$ получила название **потенциальной энергии**. Она всегда имеет смысл энергии взаимодействия частицы с объектами создающими данное силовое поле. Работа потенциальной силы всегда равна со знаком минус изменению потенциальной энергии частицы при ее перемещении из одного положения в другое, или, говорят, равна убыли потенциальной энергии.

Замечания:

1 Понятие потенциальная энергия применимо только к силовым полям, в которых действуют консервативные силы.

2 Необходимо хорошо понять физическую сущность выражения (1.29). Проще всего это сделать на примере растянутой пружины, у которой сила упругости (1.21) зависит только от положения тела на пружине и является консервативной по определению.

В механике потенциальная энергия определяется как способность производить работу (1.29). Пружина обладает определённым запасом потенциальной энергии, зависящей от того, насколько она натянута или сжата. При неподвижном положении закреплённого конца потенциальная энергия пружины зависит от положения тела, к которому прикреплён неподвижный конец пружины. Таким образом, потенциальная энергия $\Pi = \Pi(\vec{R})$ есть функция положения тела $\vec{R}$. Если в начальном положении

$\dot{R} = \dot{R}_1$ потенциальная энергия пружины равна $\Pi(\dot{R}_1)$, то после перемещения тела в положение $\dot{R}_2$, когда пружина совершила работу A , равную

$$A = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r},$$

оставшаяся потенциальная энергия пружины $\Pi(\dot{R}_2)$ будет равна разности $\Pi(\dot{R}_1) - A$. Таким образом,

$$\Pi(\dot{R}_2) = \Pi(\dot{R}_1) - \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Следовательно, если пружина совершает (положительную) работу, то запас способности пружины совершать работу уменьшается, т.е. произведённая работа «черпается» из запаса потенциальной энергии. Поэтому произведенная пружинной работа, как следует из написанного соотношения, равна разности начальной и конечной энергии пружины:

$$A = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \Pi(\dot{R}_1) - \Pi(\dot{R}_2),$$

то есть убыли потенциальной энергии пружины.

Таким образом, взаимодействие частицы с окружающими телами можно описывать двумя способами: с помощью сил или с помощью потенциальной энергии. В механике Ньютона оба способа используют одинаково широко, однако первый обладает большей общностью, т.к. применим не только к консервативным силам, для которых можно ввести потенциальную энергию.

Установим связь между потенциальной энергией и силой. Так как, по определению, работа равна убыли потенциальной энергии, т.е.

$$A = \Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta\Pi,$$

то для элементарной работы можно записать

$$\dot{\vec{F}} d\vec{r} = -d\Pi. \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) определяющее связь между силой и энергией, является одним из основных выражений в механике.

Для пояснения применения формулы (1.30) определим потенциальную энергию в постоянном однородном поле, когда силы поля имеют повсюду одинаковую величину, неизменное направление и не зависят от времени.

Например, поле притяжения Земли вблизи ее поверхности. Примем направление силы поля $\dot{\vec{F}} = m\dot{\vec{g}}$ за ось Z . Тогда, согласно выражению (1.30), получим

$$Fdz = -d\Pi,$$

откуда после интегрирования получим откуда

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad & \Pi = -Fz + \text{const}, \\ & \Pi = -mgz + \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Из полученных соотношений видно, что потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Это обстоятельство имеет общий характер и связано с произвольным выбором исходной точки поля, от которой отсчитывается произведенная над частицей работа. Обычно принято произвольную постоянную, в выражениях (1.31) выбирать так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль, когда частица находится на бесконечно большом расстоянии от других тел.

§ 1.9 Кинетическая энергия. Закон сохранения механической энергии

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\dot{\vec{F}}$ (в общем случае не обязательно консервативной). Найдем элементарную работу этой силы на элементарном приращении $d\vec{r}$ по формуле (1.24).

$$dA = \dot{\vec{F}} d\vec{r}.$$

В этой формуле $\dot{\vec{F}} = m d\dot{\vec{\vartheta}} / dt$ и $d\vec{r} = \dot{\vec{\vartheta}} dt$. Подставим эти выражения в формулу для работы и получим, что

$$dA = \dot{\vec{F}} d\vec{r} = m \dot{\vec{\vartheta}} d\dot{\vec{\vartheta}}. \quad (1.32)$$

Так как $\dot{\vec{\vartheta}} d\dot{\vec{\vartheta}} = \vartheta d\vartheta$, то выражение (1.32) можно переписать в виде

$$dA = m \vartheta d\vartheta = d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right). \quad (1.33)$$

Из выражения (1.33) видно, что работа силы $\dot{\vec{F}}$ идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией:

$$K = \frac{m\vartheta^2}{2}.$$

При конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$K_2 - K_1 = A_{12},$$

то есть приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно работе сил, действующих на частицу на том же перемещении.

С другой стороны работа равна убыли потенциальной энергии на том же участке перемещения, $dA = -d\Pi$, поэтому мы можем записать равенство

$$-d\Pi = d\left(\frac{m\vartheta^2}{2}\right),$$

или

$$d\left(\Pi + \frac{m\vartheta^2}{2}\right) = 0. \quad (1.34)$$

Обозначив стоящую в скобках сумму буквой E , запишем

$$E = \frac{m\vartheta^2}{2} + \Pi = \text{const}. \quad (1.35)$$

Из полученного выражения следует, что сумма кинетической энергии частицы, зависящей только от ее скорости, и потенциальной энергии, зависящей только от ее координат, не меняется при движении частицы. Эта сумма получила название **полной энергии** (или просто – энергии) частицы, а полученное соотношение (1.35) называется **законом сохранения энергии в механике**. Отметим, что энергия, как и работа измеряется в джоулях.

§1.10 Столкновения

Законы сохранения энергии и импульса могут быть использованы для установления изменений между различными физическими величинами происходящими при столкновении тел.

В физике под столкновениями понимают процессы взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не буквально как соприкосновение тел. Тела, проходя друг мимо друга, взаимодействуют между собой в результате чего могут происходить самые разные процессы – тела могут соединяться вместе, могут возникать новые тела и, наконец, может иметь место **упру-**

гое столкновение, при котором тела после сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния.

Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются **неупругими**. Происходящие в обычных условиях столкновения тел практически всегда в той или иной степени неупругие, хотя бы потому, что они сопровождаются деформацией и некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части кинетической энергии в энергию деформации и тепло. При этом сталкивающиеся частицы образуют новую единую частицу. В случае неупругого столкновения двух тел с массами m_1 и m_2 выполняется закон сохранения импульса

$$m_1 \dot{\mathfrak{g}}_1 + m_2 \dot{\mathfrak{g}}_2 = (m_1 + m_2) \dot{u}, \quad (1.36)$$

где $\dot{u}$ – скорость центра масс новой частицы с массой равной $(m_1 + m_2)$.

Закон сохранения механической энергии в данном случае не выполняется.

Упругие столкновения играют большую роль при изучении газов, некоторых атомных явлений, ядерных реакций. При упругих столкновениях кинетическая энергия системы сохраняется, а скорости частиц могут после удара менять свою величину и направление. Таким образом, при упругом ударе выполняются законы сохранения механической энергии и импульса, то есть

$$\frac{m_1 \mathfrak{g}_1^2}{2} + \frac{m_2 \mathfrak{g}_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (1.37)$$

и

$$m_1 \dot{\mathfrak{g}}_1 + m_2 \dot{\mathfrak{g}}_2 = m_1 \dot{u}_1 + m_2 \dot{u}_2.$$

Рассмотрим для примера простой случай упругого удара двух частиц. Пусть массы сталкивающихся частиц одинаковы и одна из частиц до удара покоилась (игра в бильярд). В этом случае законы сохранения (1.37) примут вид

$$\mathfrak{g}_1^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad (1.38)$$

и

$$\dot{\mathfrak{g}}_1 = \dot{u}_1 + \dot{u}_2. \quad (1.39)$$

В написанных выражениях общий множитель $1/2$ и одинаковые массы мы опустим.

Из соотношения (1.39) следует, что векторы $\dot{\mathfrak{g}}_1$, $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ образуют треугольник (рисунок 9), а из выражения (1.38) следу-

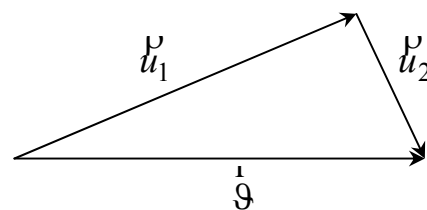


Рисунок 9

ет, что этот треугольник будет прямоугольным. Таким образом, при столкновении частиц с одинаковыми массами, они разлетаются под прямым углом.

§ 1.11 Момент импульса и момент силы

Помимо энергии и импульса в замкнутой системе сохраняется еще одна векторная величина, называемая **моментом импульса**.

Предположим, что материальная точка имеет импульс $\vec{p}$, а ее положение определяется радиусом-вектором $\vec{r}$ (рисунок 10).

Тогда момент импульса $\vec{L}$ материальной точки определяется как вектор, численно равный

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$ (рисунок 10).

Направление $\vec{L}$ принято определять по правилу правого винта: если вращать рукоятку винта по направлению от $\vec{r}$ к $\vec{p}$, то винт будет перемещаться вдоль $\vec{L}$ (рисунок 10). Приведенное определение вектора $\vec{L}$ совпадает с понятием векторного произведения двух векторов. Поэтому выражение для момента импульса отдельной частицы записывают как

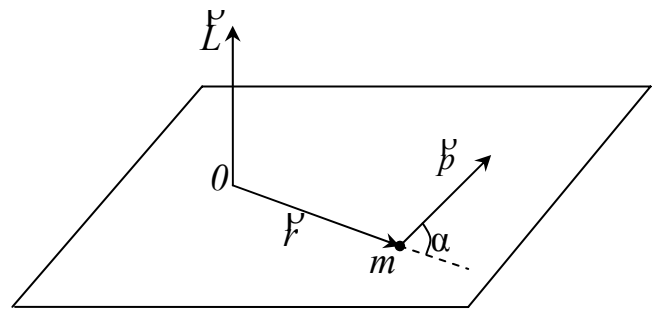


Рисунок 10

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}], \quad (1.40)$$

или, так как $\vec{p} = m \vec{v}$,

$$\vec{L} = m [\vec{r} \vec{v}]. \quad (1.41)$$

Моментом импульса системы частиц называется векторная сумма

$$\vec{L} = [\vec{r}_1 \vec{p}_1] + [\vec{r}_2 \vec{p}_2] + \dots + [\vec{r}_n \vec{p}_n]. \quad (1.42)$$

моментов отдельных частиц. Эта сумма для замкнутой системы остается постоянной во времени, что составляет суть **закона сохранения момента импульса**.

Принято начало отсчета совмещать с центром масс системы частиц. В этом случае вектора $\dot{\vec{L}}$, $\dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{p}}$ изображают в виде, представленном на рисунке 11.

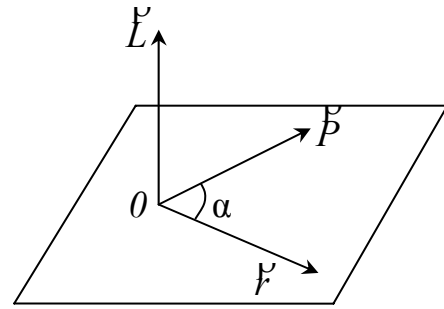


Рисунок 11

В результате взаимодействий момент импульса может изменяться. Найдем величину, ответственную за изменение момента импульса.

Определим производную от момента импульса частицы.

$$\frac{d\dot{\vec{L}}}{dt} = \frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}} \dot{\vec{p}}] = \left[\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \dot{\vec{p}} \right] + \left[\dot{\vec{r}} \frac{d\dot{\vec{p}}}{dt} \right]. \quad (1.43)$$

Так как $d\dot{\vec{r}} / dt = \dot{\vec{\vartheta}}$, а $\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{\vartheta}}$, то, поскольку $m[\dot{\vec{\vartheta}}\dot{\vec{\vartheta}}] = 0$, первый член в выражении (1.43) будет равен нулю. Во втором члене выражения (1.43) $\frac{d\dot{\vec{p}}}{dt} = \dot{\vec{F}}$. В итоге выражение (1.43) запишется в виде

$$\frac{d\dot{\vec{L}}}{dt} = [\dot{\vec{r}} \dot{\vec{F}}].$$

Векторное произведение $[\dot{\vec{r}} \dot{\vec{F}}]$ называют **моментом силы** относительно заданной точки начала отсчета и обозначают буквой $\dot{\vec{M}}$. Направление и величину вектора $\dot{\vec{M}}$ определяют аналогично вектору $\dot{\vec{L}}$. Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту действующей на него силы

$$\frac{d\dot{\vec{L}}}{dt} = \dot{\vec{M}}. \quad (1.44)$$

Полный момент импульса замкнутой системы сохраняется, значит производная по времени от суммы моментов, входящих в систему частиц, равна нулю.

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{L}}_2 + \dots + \dot{\vec{L}}_n) = \frac{d\dot{\vec{L}}_1}{dt} + \frac{d\dot{\vec{L}}_2}{dt} + \dots + \frac{d\dot{\vec{L}}_n}{dt} = 0.$$

Отсюда, в соответствии с (1.44), следует, что

$$\dot{\vec{M}}_1 + \dot{\vec{M}}_2 + \dots + \dot{\vec{M}}_n = 0.$$

Таким образом, в замкнутой системе не только сумма действующих на все частицы сил (1.18) равна нулю, но и сумма моментов сил равна нулю. Первое из этих утверждений эквивалентно закону сохранения импульса, а второе – закону сохранения момента импульса.

Существует глубокая связь между этими свойствами замкнутой системы и основными свойствами самого пространства. Укажем на эти связи без доказательства: происхождение закона сохранения импульса связано с однородностью пространства, т.е. независимостью свойств замкнутой системы от ее положения в пространстве; происхождение закона сохранения момента импульса связано с изотропией пространства, т.е. эквивалентностью всех направлений в нем, а значит независимостью свойств замкнутой системы от ее поворота (как целого) в пространстве.

Следует отметить, что закон сохранения энергии связан с **однородностью времени**, т.е. свойства замкнутой системы (как целого) не зависят от сдвига начала отсчета времени. Это значит, что все физические процессы протекают одинаково независимо от того, когда он начался.

Глава 2 Движение твердого тела

§ 2.1 Виды движения твердого тела

В предыдущих разделах мы изучили основные законы механики материальной точки. Теперь рассмотрим законы движения тел, для которых, в отличие от материальной точки, нельзя пренебрегать размерами. При этом мы будем рассматривать тела, которые в механике называют **абсолютно твердыми** или просто **твердыми**.

Под твердым телом понимается тело, взаимное расположение частей которого не меняется во время движения. Такое тело выступает при движении как единое целое.

Сразу отметим, что любое движение твердого тела сводится к двум простейшим: поступательному и вращательному движениям.

Движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе, – называется **поступательным** движением. Например, перемещая компас в горизонтальной плоскости, его стрелка, сохраняя постоянное направление с юга на север, будет совершать поступательное движение.

При поступательном движении все части (точки) твердого тела имеют одинаковую скорость и описывают в пространстве траектории одинаковой формы, параллельные друг другу.

Другим простейшим видом движения твердого тела является **вращение** тела вокруг оси. При вращении различные части тела описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Для характеристики вращательного движения вводят понятия угловой скорости и углового ускорения.

Так как все части твердого тела описывают окружности, то нам достаточно рассмотреть движение любой его части, которую можно рассматривать как материальную точку.

Пусть за время dt тело поворачивается на угол $d\phi$, при этом путь ds (рисунок 12), проходимый какой-либо точкой от положения 1 до положения 2, будет равен

$$ds = r d\phi, \quad (2.1)$$

где r – радиус окружности.

Разделив выражение (2.1) на dt , найдем скорость точки на пути ds :

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.2)$$

Величина $d\phi/dt$, одинаковая для всех точек твердого тела, получила название угловой скорости тела. Обозначим угловую скорость буквой ω , тогда

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.3)$$

В системе единиц СИ угловая скорость измеряется в радианах за секунду, то есть $[\omega] = \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$.

Таким образом, скорости различных точек вращающегося вокруг оси твердого тела определяется формулой

$$v = \omega r, \quad (2.4)$$

где r – радиус окружности, какой-либо точки твердого тела.

Из выражения (2.4) видно, что скорость точки пропорциональна ее расстоянию от оси вращения.

Вращение тела характеризуется не только величиной угловой скорости, но и направлением оси вращения. Их объединяют вместе, вводя вектор угловой скорости $\vec{\omega}$, имеющий направление оси вращения. Направление угловой скорости определяют по правилу правого винта, описанным в § 1.11, то-есть вращая винт по направлению вращения тела, направление перемещения винта происходит в направления оси вращения (рисунок 12).

Величина угловой скорости может меняться с течением времени. Для характеристики величины и направления изменения угловой скорости вводят угловое ускорение

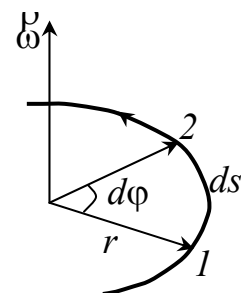


Рисунок 12

$$\frac{r}{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.5)$$

Если вращение происходит равномерно, то угловая скорость остается постоянной, а угловое ускорение равно нулю.

§ 2.2 Энергия движущегося твердого тела

Из предыдущего параграфа ясно, что энергия движущегося твердого тела будет складываться из суммы энергий поступательного и вращательного движений.

Кинетическая энергия поступательного движения твердого тела определяется из следующих соображений. Так как при поступательном движении все точки тела имеют одинаковую скорость, то кинетическая энергия будет равна

$$K = \frac{1}{2}MV^2, \quad (2.6)$$

где M – масса тела;

V – скорость центра масс.

Выражение (2.6) совпадает с выражением кинетической энергии материальной точки.

Определим теперь кинетическую энергию вращающегося твердого тела. Разобьем, мысленно, твердое тело на части, которые можно считать как материальные точки, и будем рассматривать твердое тело как систему материальных точек.

Возьмем произвольную материальную точку. Если считать m_i – масса произвольной материальной точки, а r_i – ее расстояние до оси вращения (рисунок 13), то скорость точки определяется по формуле (2.4).

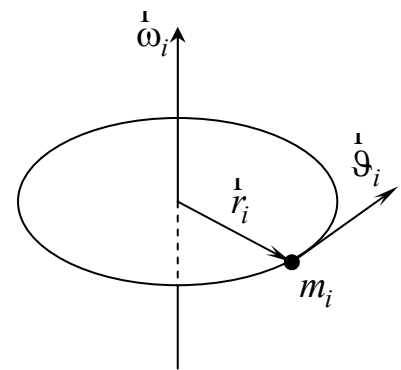


Рисунок 13

$$v_i = r_i \omega,$$

где ω – угловая скорость вращения тела.

Кинетическая энергия движения этой точки равна

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2.$$

Просуммировав эти энергии, получим полную кинетическую энергию системы точек

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2). \quad (2.7)$$

Выражение, стоящее в скобках получило название **момента инерции** системы материальных точек относительно оси вращения, обозначается буквой I .

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2. \quad (2.8)$$

Поскольку твердое тело сплошное, то делить его нужно на бесконечно большое количество бесконечно малых частей. В этом случае суммирование в формуле (2.8) заменяется интегрированием, т.е.

$$I = \int r^2 dm. \quad (2.9)$$

Из формул (2.8) и (2.9) видно, что момент инерции является характеристикой твердого тела и зависит от формы тела, размеров и распределения масс в нем относительно оси вращения.

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося твердого тела может быть записана в виде

$$K = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (2.10)$$

Кинетическую энергию произвольно движущегося твердого тела можно представить в виде суммы поступательной и вращательной энергий, если провести ось вращения через центр инерции тела. Тогда полную кинетическую энергию можно представить в виде

$$K = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_0 \omega^2}{2}, \quad (2.11)$$

где I_0 – момент инерции относительно оси проходящий через центр масс.

Замечание – Выражение (2.11) имеет реальный смысл только в том случае, если ось вращения, в процессе движения, сохраняет постоянное направление в теле.

Если твердое тело движется в поле тяжести Земли, то его полная энергия будет равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$K = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} + Mgh. \quad (2.12)$$

§ 2.3 Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси

Связь между скоростью изменения момента импульса и моментом силы дается векторным соотношением (1.44)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Это выражение эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.13)$$

которые получаются из уравнения (1.44) путем проектирования на неподвижные оси декартовой системы координат. Величины L_z и M_z называются соответственно **моментом импульса и моментом силы относительно оси Z**. Аналогично говорят о моментах импульса и сил относительно координатных осей X и Y .

Уравнения (2.13) называются **уравнениями моментов относительно осей**.

Ранее мы уже говорили, что будем рассматривать вращение твердого тела только вокруг закрепленной оси, проходящей через центр масс. Поэтому договорились вдоль этой оси направлять ось Z .

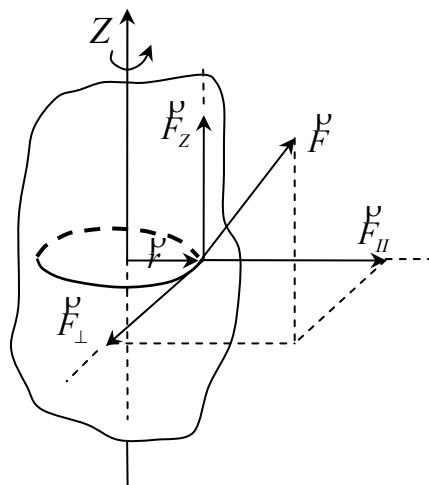


Рисунок 14

Геометрический смысл момента силы M_z легко понять из рисунка 14.

Тело под действием силы $\vec{F}$ вращается в направлении, указанном стрелкой. Разложим вектор на три составляющие: вдоль оси $\vec{F}_z$, вдоль радиуса вращения $\vec{F}_r$ и перпендикулярно радиусу вращения $\vec{F}_\perp$. Из рисунка ясно, что составляющие силы $\vec{F}_z$ и $\vec{F}_r$ не вызывают вращения тела вокруг оси. Соответственно и проекция момента силы $\vec{F}_z$ на ось Z равна нулю, а момент силы $\vec{F}_r$ равен нулю по определению.

Вращение тела вызывает только составляющая $\vec{F}_\perp$, ее момент, равный $[\vec{r}\vec{F}_\perp]$ параллелен оси Z . Таким образом, только составляющая вектора $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$ параллельная оси Z и равная

$$M_z = [\vec{r}\vec{F}_\perp] \quad (2.14)$$

играет роль при нахождении момента M_z относительно оси Z . Аналогичные рассуждения можно провести для момента импульса, т.е.

$$\vec{L}_P = [\vec{r}\vec{P}_\perp]. \quad (2.15)$$

Все сказанное легко обобщается на случай системы нескольких сил и системы нескольких материальных точек.

Так, учитывая материал, изложенный в § 1.11 и § 2.2, легко показать, что момент импульса относительно неподвижной оси равен

$$L_z = I\omega, \quad (2.16)$$

где I – момент инерции твердого тела относительно оси Z ;

ω – угловая скорость.

Подставив выражение (2.16) в уравнение моментов (2.13) относительно оси Z , получим

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Выражение

$$M_z = I \frac{d\omega}{dt} \quad (2.17)$$

представляет собой **основное уравнение** динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

Обратите внимание, что выражение (2.17) напоминает собой уравнение Ньютона. Роль массы играет момент инерции I , роль скорости – угловая

скорость ω , роль силы – момент силы M_z , роль импульса – момент импульса L_z . Продолжая эту аналогию можно показать, что аналогом формулы (1.30), для твердого тела будет иметь место соотношение

$$Md\varphi = -d\Pi. \quad (2.18)$$

Если момент внешних сил относительно оси вращения в выражении (2.17) равен нулю, то момент импульса сохраняется, то есть

$$I\omega = \text{const}.$$

Это утверждение представляет собой **закон сохранения** момента импульса относительно оси вращения.

В общем случае твердое тело участвует как в поступательном, так и вращательном движениях. Поэтому его движение описывается двумя уравнениями: уравнением поступательного движения центра масс и уравнением вращательного движения

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d\vec{V}}{dt} \\ M_z &= I \frac{d\omega}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Зная законы действующих внешних сил, точки их приложения и начальные условия, можно с помощью этих уравнений найти как скорость, так и положение каждой точки твердого тела в любой момент времени, т.е. полностью решить задачу о движении тела.

Часть 2 Электродинамика

Глава 3 Электрическое поле

§ 3.1 Электрическое взаимодействие

Как уже говорилось в главе 1 одним из наиболее важных взаимодействий в природе является электромагнитное взаимодействие. Это взаимодействие обуславливает существование стабильных атомов, связывает атомы в молекулы, играет основную роль во всех физико-химических процессах.

Силы электрического взаимодействия связаны с существованием особой физической характеристики частиц – электрического заряда. Электрический заряд существует в двух видах: как положительный, так и отрицательный. В любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется. Это утверждение выражает закон сохранения электрического заряда.

Если заряженное тело можно считать материальной точкой (частицей), то оно имеет точечный электрический заряд.

Из опыта известно, что сила электрического взаимодействия между точечными зарядами прямо пропорциональна произведению зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей частицы. Это положение называется законом Кулона и записывается в виде

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.1)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная равная $8,85 \cdot 10^{-12}$, Ф/м;
 $\vec{e}_r$ – единичный вектор вдоль направления действия силы.

Из закона Кулона видно, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются друг к другу. Какие заряды считать положительными, а какие – отрицательными безразлично. Принятый в физике выбор является условным, установившимся исторически. Безусловным, как говорилось ранее, является лишь различие знаков зарядов.

В системе СИ за единицу заряда принимается один кулон (1 Кл). Электрический заряд любой системы тел всегда состоит из целого числа **элементарных зарядов**, каждый из которых равен $1,6 \cdot 10^{-19}$, Кл. Принято отрицательный элементарный заряд приписывать электрону, а положительный – протону.

§ 3.2 Напряженность электрического поля

Так как в закон Кулона (3.1) входит произведение зарядов, то сила, действующая на некоторый заряд q со стороны заряда q_0 , может быть записана в виде

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad (3.2)$$

где $\vec{E}$ – вектор, зависящий только от величины заряда q_0 и расстояния r между зарядами.

Вектор $\vec{E}$ – называется напряженностью электрического поля (или просто электрическим полем) создаваемым зарядом q_0 , и равным

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.3)$$

В системе единиц СИ за единицу напряженности поля принимается вольт на метр [В/м]. Из формул (3.2) и (3.3) можно заключить, что сила, испытываемая зарядом q со стороны заряда q_0 , равна произведению заряда q на напряженность поля, создаваемая зарядом q_0 в месте нахождения заряда q .

Таким образом мы приходим к другому способу (отличному от закона Кулона) описания электрического взаимодействия, а именно, мы будем говорить, что частица, обладая зарядом q_0 , создает в окружающем пространстве особое силовое поле – электрическое поле, с которым взаимодействует электрический заряд q , вносимый в поле. Другими словами, заряженные частицы теперь взаимодействуют не непосредственно, как это следует из закона Кулона, а через поле. Напряженность электрического поля в этом случае является силовой характеристикой поля.

Сразу отметим, что в поле, создаваемом неподвижным точечным зарядом q_0 , сила, действующая на вносимый точечный заряд q , не зависит от того, покоится или движется заряд q .

Такие два способа описания представляются здесь имеющими лишь формальное различие. В действительности введение понятия электрического поля имеет отнюдь не формальный характер. Изучение переменных во времени электрических (и магнитных) полей показывает, что они могут существовать в отсутствие электрических зарядов и являются такой же физической реальностью, как и существующие в природе частицы.

Следовательно, можно сказать, что кулоновское взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами осуществляется через электрическое поле. Электрическое поле неподвижных зарядов получило название электростатического поля.

Электрическое поле, создаваемое многими электрическими зарядами, определяется следующими фундаментальным свойством электрических

взаимодействий: электрическое взаимодействие между двумя зарядами не зависит от присутствия третьего заряда.

Отсюда вытекает, что если имеется много заряженных тел, то создаваемое ими электрическое поле равно векторной сумме электрических полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности, то есть

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i} . \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) выражает принцип суперпозиции электрических полей (или принцип независимости действия электрических полей).

Любое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов на частицах из которых состоит тело. Однако для упрощения математических расчетов удобнее считать, что заряды распределены в заряженном теле непрерывно. При переходе к непрерывному распределению вводят понятие о плотности зарядов – объемной ρ , поверхностной σ и линейной τ . По определению,

$$\rho = \frac{dq}{dV}; \quad \sigma = \frac{dq}{dS}; \quad \tau = \frac{dq}{dl}, \quad (3.5)$$

где dq – заряд, заключенный соответственно в объеме dV , на поверхности dS и на длине dl .

С учетом этих распределений формула (3.4) запишется в другом виде. Например, если заряд распределен по объему, то q_i надо заменить на $dq = \rho dV$, а знак суммы – интегралом, тогда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho \vec{e}_r dV}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho r \vec{e}_r dV}{r^3}, \quad (3.6)$$

где интегрирование проводится по всему объему, в котором ρ отлична от нуля.

Таким образом, зная распределение зарядов, мы можем решить задачу о нахождении напряженности электрического поля по формуле (3.4), если распределение дискретно, или по формуле (3.6) и аналогичной ей, если распределение непрерывно. В общем случае расчет достаточно сложен и трудоемок, так как для нахождения вектора $\vec{E}$ надо сначала вычислить его проекции E_x, E_y, E_z , а это по существу три интеграла типа (3.6). Однако, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача существенно облегчается.

В качестве примера решим задачу.

Задача – Тонкий стержень длиной $2l$ равномерно заряжен с линейной плотностью τ . Определить напряженность электрического поля в точке A , лежащей против середины стержня на расстоянии a от него (рисунок 15).

Решение. Рассмотрим элемент стержня dx на расстоянии x от оси (рисунок 15). Заряд элемента $dq = \tau dx$ будем считать точечным. Тогда по формуле (3.3) напряженность поля заряда dq в точке A равно

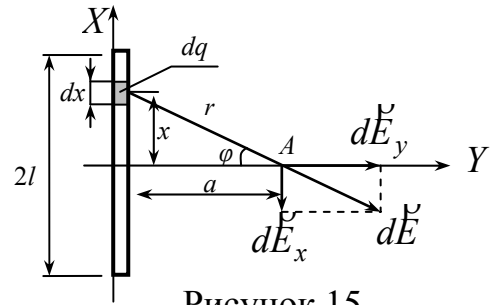


Рисунок 15

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{x^2 + a^2} \vec{e}_r. \quad (3.7)$$

Искомая напряженность поля в точке A равна сумме элементарных напряженностей $d\vec{E}$, созданных в этой точке всеми элементами стержня. Сразу проинтегрировать выражение достаточно сложно, так как векторы $d\vec{E}$ от различных элементов стержня имеют различное направление. Чтобы преодолеть эту сложность воспользуемся соображениями симметрии. Так как поле равномерно заряженного стержня обладает осевой симметрией (по условию задачи) и точка A лежит на одной из осей симметрии (ось Y на рисунке 15), то напряженность электрического поля в точке A направлена вдоль этой оси.

Действительно, при сложении полей от любых двух симметрично расположенных элементов стержня получается поле, направленное вдоль оси симметрии, так как составляющие $d\vec{E}_x$ полей элементов будут равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, при суммировании всех элементарных векторов $d\vec{E}$ достаточно учесть лишь составляющие этих векторов $d\vec{E}_y$, взятых вдоль оси симметрии. Как видно из рисунка

$$d\vec{E}_y = d\vec{E} \cdot \cos \phi,$$

где

$$\cos \phi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \quad (3.8)$$

Таким образом, мы свели задачу к сложению одинаково направленных векторов $d\vec{E}_y$, и искомая напряженность E выразится интегралом

$$E = \int_{-l}^{+l} dE_y = \int_{-l}^{+l} dE \cdot \cos \phi = 2 \int_0^l dE \cdot \cos \phi. \quad (3.9)$$

Подставляя в (3.9) значения dE и $\cos\varphi$ по формулам (3.7) и (3.8) и производя интегрирование, получим

$$E = \frac{\tau l}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{l^2 + a^2}}. \quad (3.10)$$

Так как результирующее поле направлена вдоль оси Y , то окончательное выражение для искомого вектора E запишется в виде

$$\vec{E} = \frac{\tau l}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{l^2 + a^2}} \vec{j}, \quad (3.11)$$

где $\vec{j}$ – единичный вектор вдоль оси Y .

Рассмотрим частные случаи задачи.

Если $a \gg 2l$, то можно пренебречь размерами стержня по сравнению с расстоянием от данной точки, то есть величиной l^2 под знаком корня в выражении (3.10) пренебрегаем.

Другими словами, в данном случае заряд стержня можно считать точечным. Проведя соответствующие по формуле (3.10) с учетом того, что $2\tau l = q$ по условию задачи, получим

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

или в векторной форме

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{j}, \quad (3.12)$$

что совпадает с формулой (3.3) для точечного заряда.

Если $a \ll 2l$, то данная точка находится вблизи тонкого стержня и далеко от его концов, что соответствует бесконечно длинному стержню (нити, цилиндру). Пренебрегая в формуле (3.10) под знаком корня величиной a^2 , получим

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 a}. \quad (3.13)$$

В общем случае электрическое поле, изменяясь от точки к точке как по величине, так и по направлению, имеет сложный характер. Анализ полей во многом упрощается, если их изобразить графически, с помощью силовых линий (или линий вектора $\vec{E}$). Эти линии проводятся так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора $\vec{E}$ в этой точке, а густота линий, то есть число линий, пронизывающих единичную площадку,

перпендикулярную линиям в данной точке, была бы пропорциональна модулю вектора $\vec{E}$. Кроме того, этим линиям приписывают направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{E}$, и они начинаются и заканчиваются на зарядах или одним концом уходят в бесконечность. Так на рисунке 16 представлены силовые линии для точечных положительного и отрицательного зарядов

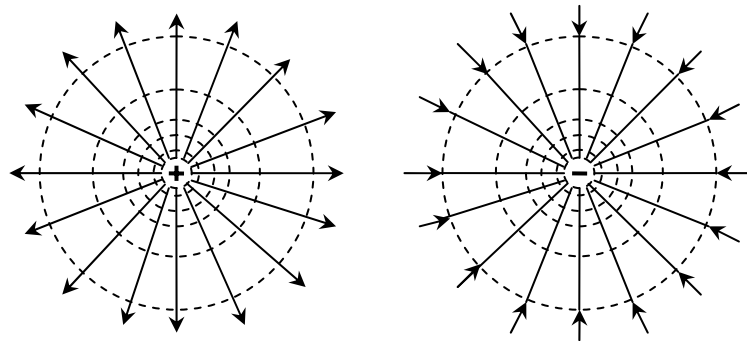


Рисунок 16

На рисунке 17 изображены силовые линии двух равных по модулю точечных зарядов. Рисунок 17а соответствует разноименным зарядам, а рисунок 17б – одноименным (отрицательным) зарядам. Значение пунктирных линий будет рассмотрено в § 3.4.

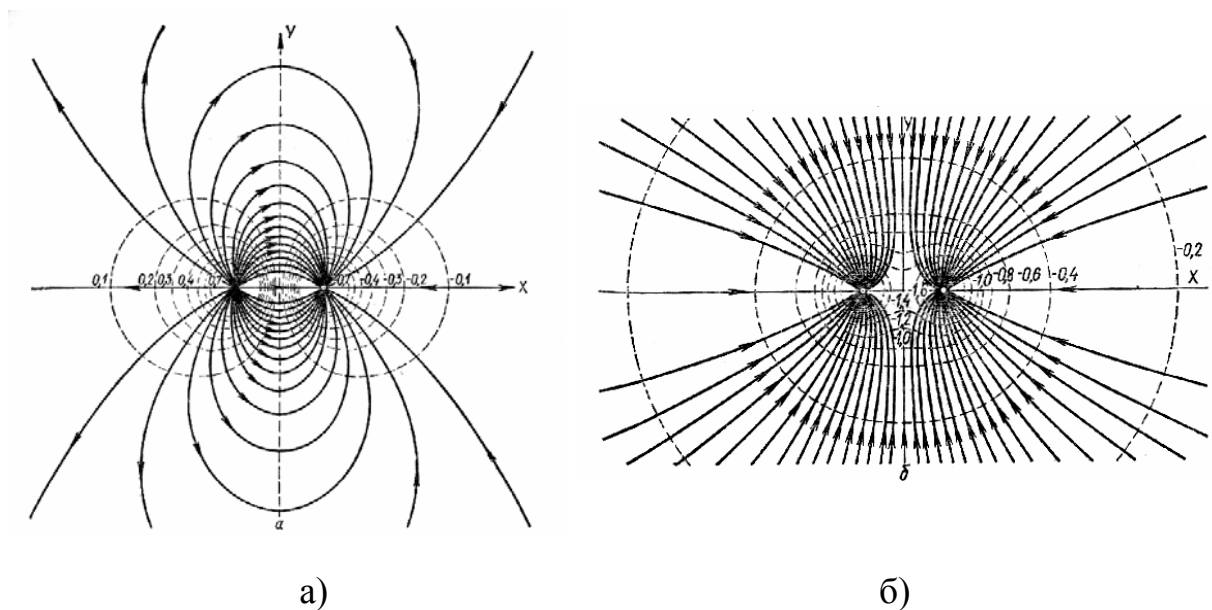


Рисунок 17

§ 3.3 Теорема Гаусса

Введем понятие потока вектора $\vec{E}$ и для наглядности воспользуемся графическим изображением электрического поля. Под потоком вектора $\vec{E}$ будем понимать число силовых линий, проходящих через площадку S , рас-

положенную перпендикулярно силовым линиям. Тогда число линий, пронизывающих элементарную площадку dS , расположенную под углом α к силовым линиям однородного электрического поля $\vec{E}$, определится (согласно рисунку 18) как $E dS \cos \alpha$. Эта величина называется потоком $d\Phi$ вектора $\vec{E}$ через поверхность dS . В более компактном виде она записывается как

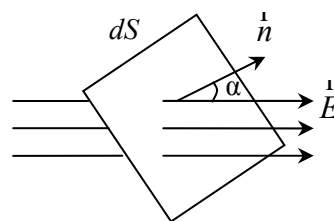


Рисунок 18

$$d\Phi = E_n dS = \vec{E} d\vec{S}, \quad (3.14)$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS ;

$d\vec{S}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью к площадке dS .

Если поверхность произвольная (рисунок 19), то вначале определяется поток через элемент поверхности dS , на участке которого поле можно считать однородным. Поток вектора $\vec{E}$ через всю поверхность определится как

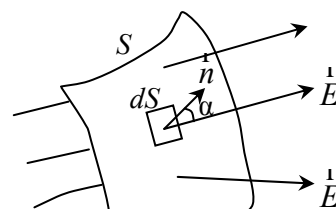


Рисунок 19

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \int_{(S)} E \cos \alpha dS. \quad (3.15)$$

Оказалось, что поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность зависит только от алгебраической суммы зарядов, находящихся внутри этой поверхности, а именно

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{внутр.}}, \quad (3.16)$$

где кружок у интеграла означает, что интегрирование проводится по замкнутой поверхности.

Это утверждение и составляет суть **теоремы Гаусса**, согласно которой поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_0 .

В случае, если заряд распределен непрерывно по объему (или поверхности), выражение (3.16) переписется, с учетом формул (3.5), например для объемной плотности, в виде

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{(V)} \rho dV. \quad (3.17)$$

Если внутри поверхности нет зарядов или алгебраическая сумма зарядов равна нулю, то поток электрического поля через эту поверхность равен нулю.

Теорема Гаусса дает возможность находить электрическое поле, создаваемое сложными заряженными телами, если заряды в них расположены достаточно симметрично, например в случае заряженных плоских, цилиндрических и сферических плоскостей.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 – Определить электрическое поле вблизи бесконечно большой равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью σ .

Из симметрии задачи ясно, что поле на данном расстоянии от плоскости будет однородным (все точки на плоскости равноправны) и все силовые линии будут перпендикулярны к плоскости. Построим теперь цилиндр, ось которого совпадает с направлением поля $\vec{E}$, а основания параллельны плоскости и расположены на одинаковых расстояниях от нее (рисунок 20). Площадь основания цилиндра равна ΔS .

Из построения ясно, что поток вектора $\vec{E}$ через поверхность цилиндра сводится к потоку через его основания, то есть $\Phi = E \cdot 2\Delta S$. Заряд, находящийся внутри поверхности, равен $q = \sigma \Delta S$. Тогда по теореме Гаусса

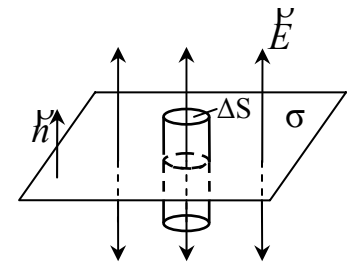


Рисунок 20

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0},$$

отсюда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.18)$$

Таким образом, поле заряженной бесконечной плоскости оказывается не зависящим от расстояния до этой плоскости.

Если взять плоскость конечных размеров, то формула (3.18) будет справедлива только для точек, расстояния которых от краев пластинки намного превышает расстояния от самой пластинки.

Пример 2 – Найдём поле двух параллельных бесконечных плоскостей, заряженных разноименно с одинаковой по величине постоянной поверхностной плотностью σ .

Поле между пластинами легко найти исходя из принципа суперпозиции. Из рисунка 21 видно, что электрические поля $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ внутри имеет одинаковое направление, так что результирующая напряженность равна

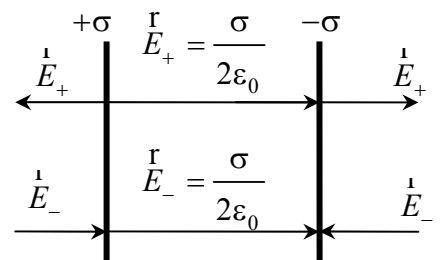


Рисунок 21

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.19)$$

Вне объема, ограниченного пластинами, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю.

В этом случае поле оказывается сосредоточенным между плоскостями. Напряженность поля в любых точках между пластинами одинакова по величине и направлению, то есть поле однородно.

Полученный результат приближенно справедлив и для пластин конечных размеров, если расстояния между пластинами меньше их размеров (плоский конденсатор). В этом случае заметные отклонения поля от однородности наблюдается только вблизи краев пластин.

Пример 3 – Определить электрическое поле вблизи заряженного проводника.

Рассмотрим вначале вопрос о распределении зарядов в проводнике в случае их равновесия. Очевидно, в этом случае напряженность поля внутри проводника равна нулю (рисунок 22). Действительно, если бы в какой-то точке внутри проводника напряженность поля была бы отлична от нуля, то в этой точке наблюдалось бы движение зарядов, существующих внутри проводника. Этого не может быть, так как мы рассматриваем статическую задачу. Но если в любой точке проводника электрическое поле равно нулю, то и интеграл от $\oint \vec{E} d\vec{S}$, взятый по любому замкнутому контуру внутри проводника, также равен нулю. Тогда по теореме Гаусса (3.16) плотность заряда внутри проводника везде равна нулю.

Построим вблизи поверхности заряженного проводника малый цилиндр (рисунок 22) по аналогии с построением, описанным в примере 1. Поток вектора $\vec{E}$, через внутреннюю поверхность цилиндра равен нулю (внутри проводника поля нет), то есть заряды расположены на внешней поверхности проводника. Поток напряженности поля $\vec{E}$ через поверхность цилиндра будет равен потоку только через его основание, находящееся над поверхностью проводника, то есть

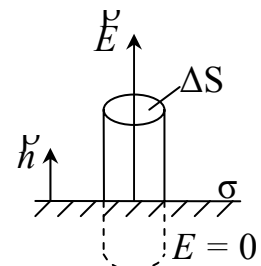


Рисунок 22

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = E \Delta S.$$

Тогда по теореме Гаусса

$$E \Delta S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta S,$$

откуда

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.20)$$

Пример 4 – Найти поле $\vec{E}$ длинного цилиндра радиуса R , заряженного равномерно с поверхностной плотностью σ .

Если длина цилиндра $l \gg R$, то, из соображений симметрии ясно, что поле E будет направлено перпендикулярно к поверхности и радиально от нее. Согласно теореме Гаусса, возьмем замкнутую поверхность в виде коаксиального с заряженной поверхностью цилиндра радиуса r , высотой $h \ll l$ и рассчитаем напряженность через эту поверхность (рисунок 23).

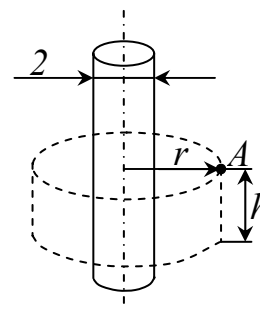


Рисунок 23

Так как поле перпендикулярно оси цилиндра, то поток через основания цилиндра будет равен нулю. Поэтому полный поток поля через рассматриваемую замкнутую поверхность сводится к потоку через боковую поверхность и будет равен

$$\Phi = \int \vec{E} d\vec{S} = E 2\pi r h.$$

По теореме Гаусса

$$E 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma 2\pi R h = \frac{1}{\epsilon_0} \tau h,$$

где $\tau = \sigma 2\pi R$ – линейная плотность заряда, Кл/м.

Из полученного выражения находим, что

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.21)$$

то есть напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным цилиндром, обратно пропорциональна расстоянию от него.

Примечание – Сравните сложность вывода такой же формулы (3.13) при непосредственном расчете поля, с выводом по теореме Гаусса.

Подставив в формулу (3.21) $\tau = \sigma 2\pi R$ и положив в ней $r = R$, получим для напряженности поля в непосредственной близости к поверхности цилиндра значение

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

С помощью принципа суперпозиции легко найти поле двух коаксиальных цилиндров (цилиндрический конденсатор), заряженных с одинаковой по величине, но отличающейся знаком линейной плотностью τ . В этом случае

внутри меньшего и вне большого цилиндров поле отсутствует. В зазоре между цилиндрами величина напряженности поля определится формулой (3.21).

Замечание – Теореме Гаусса можно придать иную форму. Пусть в точке A , плотность электрического заряда равна ρ и напряженность электрического поля $\vec{E}$ (рисунок 24). Рассмотрим теперь малый объем ΔV , внутри которого находится точка A (рисунок 24). Внутри этого объема плотность электрического заряда можно считать постоянной и равной ρ . Тогда заряд внутри объема ΔV равен $\Delta q = \rho \Delta V$. Поток вектора E через поверхность ΔS , окружающую объем ΔV , согласно теореме Гаусса, равен

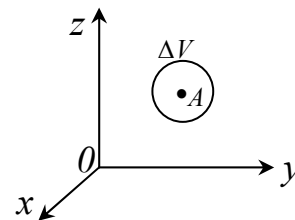


Рисунок 24

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}. \quad (3.22)$$

Если ΔV устремить к нулю, то есть стягивать объем ΔV к точке A , тогда поток Φ также будет стремиться к нулю. Величину, являющуюся пределом отношения Φ к ΔV при $\Delta V \rightarrow 0$, называют дивергенцией поля E и обозначают $\text{div} \vec{E}$. Таким образом, по определению

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{E} d\vec{S}. \quad (3.23)$$

Полученное выражение зависит от выбора системы координат. В декартовых координатах

$$\text{div} \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}.$$

С учетом выражений (3.22) и (3.23), теорему Гаусса можно записать в дифференциальной форме

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.24)$$

Выражение (3.16) называют теоремой Гаусса в интегральной форме, а в виде (3.24) – в дифференциальной форме.

§3.4 Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$. Потенциал

В главе 1 мы показали, что работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю. Из этого утверждения вытекало, что работа таких сил определяется только начальным и конечным положениями частиц и не зависит от формы траектории.

В электрическом поле действуют кулоновские силы, которые являются консервативными. Поэтому, мы можем утверждать, что работа кулоновских сил по замкнутому контуру равна нулю, то есть

$$A = \oint \vec{F} d\vec{l} = q \oint \vec{E} d\vec{l} = 0,$$

или

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (3.25)$$

Это утверждение и называют **теоремой о циркуляции вектора $\vec{E}$** . (Интеграл вида (3.25) называют циркуляцией вектора по замкнутому контуру). Поле, обладающее свойством (3.25), называют потенциальным. Значит, любое электростатическое поле является потенциальным полем.

Если работа сил электростатического поля совершается на конечном участке пути, то она запишется в виде

$$A = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \Pi(\vec{R}_1) - \Pi(\vec{R}_2) = -\Delta \Pi(\vec{R}), \quad (3.26)$$

где $\Pi(\vec{R}_1)$ и $\Pi(\vec{R}_2)$ – потенциальные энергии поля в точках с положением $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$.

Перепишем выражение (3.26) в виде

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi(\vec{R}_1) - \varphi(\vec{R}_2) = -\Delta \varphi(\vec{R}). \quad (3.27)$$

Определенная таким образом функция $\varphi(\vec{R})$ называется потенциалом поля. Из сравнения выражений (3.26) и (3.27) можно сказать, что потенциал – это величина, численно равная потенциальной энергией единичного положительного заряда в данной точке поля.

Формула (3.26) содержит не только определение потенциала, но и способ его нахождения. Для этого достаточно вычислить интеграл $\int \vec{E} d\vec{l}$ по любому пути между двумя точками и представить полученный результат в виде убыли некоторой функции, которая и есть $\varphi(\vec{R})$.

Рассчитаем для примера потенциал неподвижного точечного заряда

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r d\vec{l} = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2}, \quad (3.28)$$

при расчете интеграла учтено, что $\vec{e}_r d\vec{l} = 1 \cdot (d\vec{l})_r = dr$, так как проекция $d\vec{l}$ на вектор $\vec{e}_r$ равна приращению модуля r , то есть dr .

В полученном выражении точку 2 обычно удаляют на бесконечность ($r_2 \rightarrow \infty$), считая, что потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю. Тогда потенциал точечного заряда определится как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (3.29)$$

Замечание – В практической электротехнике за ноль потенциала принимают поверхность Земли.

В системе единиц СИ за единицу потенциала принимают один вольт (В),

$$1 \text{ В} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}.$$

Следует отметить, что принцип суперпозиции справедлив и для системы точечных зарядов. Таким образом потенциал системы неподвижных точечных зарядов будет равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}. \quad (3.30)$$

Если заряды, образующие систему распределены непрерывно, то в случае:

объемного распределения заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho dV}{r}; \quad (3.31)$$

поверхностного распределения заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{\sigma dS}{r}; \quad (3.32)$$

линейного распределения заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(L)} \frac{\tau dl}{r}. \quad (3.33)$$

Из выражения (3.27), записанного для элементарных перемещений $\vec{dl}$,

$$\vec{E} d\vec{l} = -d\varphi, \quad (3.33)$$

легко установить связь между $\vec{E}$ и φ .

Поскольку

$$\vec{E} d\vec{l} = E_l dl = -d\varphi,$$

то

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}, \quad (3.34)$$

то есть проекция напряженности электрического на направление l , равна значению производной потенциала по этому направлению, взятому с обратным знаком. Если брать проекции вектора $\vec{E}$ на направления декартовых осей координат, то

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{d\varphi}{dx}, \\ E_y &= -\frac{d\varphi}{dy}, \\ E_z &= -\frac{d\varphi}{dz}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где в выражениях (3.35) слева стоят проекции вектора $\vec{E}$ на оси. Аналогично можно сказать, что и справа стоят проекции некоторого вектора. С учетом этого можно записать, что

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} \right).$$

Величина, стоящая в скобах называется градиентом потенциала φ ($\text{grad}\varphi$ или $\nabla\varphi$).

Таким образом

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (3.36)$$

то есть напряженность поля $\vec{E}$ равна со знаком минус градиенту потенциала.

Понятие потенциала можно использовать для наглядного представления электрического поля, вводя, наряду с силовыми линиями, поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности). Из определения эквипотенциальной поверхности ясно, что работа вдоль этой поверхности равна нулю (3.27). Следовательно вектор $\vec{E}$ всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности. Эквипотенциальные поверхности удобно проводить так, чтобы разность потенциалов для двух соседних поверхностей была бы одинаковой. Тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно наглядно судить о значении напряженности в разных точках поля. Там, где поверхности расположены гуще, там напряженность поля больше. На рисунках 16 и 17 пунктиром изображены сечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа. Вдоль оси X на рисунке 17 указаны значения потенциала в относительных единицах. Ноль потенциала взят на бесконечности.

Таким образом, хотя электрическое поле однозначно описывается заданием вектора $\vec{E}(\vec{R})$, введение потенциала даёт второй способ описания поля. Сразу отметим, что оба способа однозначно соответствуют друг другу, но второй способ обладает рядом преимуществ.

Зная потенциал $\varphi(\vec{R})$, можно очень просто, согласно формулам (3.26) и (3.27), найти работу сил поля по перемещению точечного заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.37)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы в точках 1 и 2.

Расчет работы сил поля по формуле (3.37) оказывается не только проще, но и порой единственно возможным (когда неизвестно распределение заряда). Во многих случаях оказывается, что для нахождения напряженности $\vec{E}$ электрического поля, легче сначала подсчитать потенциал φ , а затем по формулам (3.34) и (3.35) найти $\vec{E}$, нежели вычислять $\vec{E}$ непосредственно. Действительно, для вычисления φ нужно подсчитать один интеграл, а для вычисления $\vec{E}$ – три (ведь это вектор). Кроме того, интегралы для определения φ проще, чем для E_x, E_y, E_z .

Замечание – Сказанное не касается сравнительно небольшого числа задач с хорошей симметрией. В этих случаях нахождение поля $\vec{E}$ непосредственно или с помощью теоремы Гаусса часто оказывается значительно проще.

§ 3.5 Емкость

Как было установлено в предыдущем параграфе 3.4 разность потенциалов между двумя проводниками по формуле (3.27) равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Так как величина напряженности электрического поля $|\vec{E}|$ пропорциональна заряду (параграф 3.2), то можно сказать, что $\vec{E} = \vec{R}q$, где $\vec{R}$ – вектор, зависящий только от геометрической конфигурации проводников. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q \int_1^2 \vec{R} d\vec{l}.$$

Величина C , равная

$$\frac{1}{C} = \int_1^2 \vec{R} d\vec{l},$$

получила название емкости системы проводников. Следовательно

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}. \quad (3.38)$$

Таким образом емкость C зависит только от конфигурации проводников и от свойств среды, в которых они находятся. В системе единиц СИ емкость выражают в фарадах (Ф):

$$1 \text{ Ф} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{В}}.$$

Практический интерес представляет система из двух проводников, расположенных параллельно друг к другу, к ним обычно относят плоский, цилиндрический и сферический конденсаторы.

Для примера рассчитаем емкость плоского конденсатора (смотри рисунок 21). Если размеры обкладок конденсатора велики по сравнению с расстоянием между ними, то можно пренебречь краевыми эффектами и поле между обкладками считать однородным ($\vec{E} = \text{const}$). Тогда по формулам (3.5) и (3.19)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}.$$

Теперь, согласно формуле (3.27)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 S}, \quad (3.39)$$

отсюда по формуле (3.38)

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d}, \quad (3.40)$$

где d – расстояние между пластинами, м.

Конденсаторы часто соединяют в батареи. Соединение может быть параллельным (рисунок 25) или последовательным (рисунок 26). Применяют также комбинированное соединение.

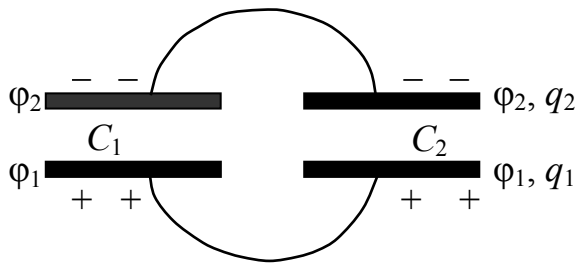


Рисунок 25

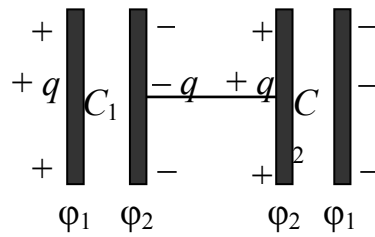


Рисунок 26

Ограничимся ради простоты случаем двух конденсаторов. При параллельном соединении разности потенциалов между обкладками одинаковы, а заряды складываются: $q = q_1 + q_2$. Тогда по формуле (3.38)

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} + \frac{q_2}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_1 + C_2.$$

Если в батарею соединяют параллельно несколько конденсаторов, то

$$C = \sum C_i.$$

При последовательном соединении средние пластины, соединенные между собой, электризуются через влияние, поэтому их заряды равны и противоположны по знаку. Таким образом, заряды на обоих конденсаторах одинаковы. Разности потенциалов складываются

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) = \varphi_1 - \varphi_3.$$

Так как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1}; \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2}; \quad \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{q}{C},$$

то отсюда получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Если параллельно соединяются несколько конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

Параллельное соединение применяется для увеличения емкости батареи конденсаторов. Последовательное соединение используют тогда, когда во избежание пробоя, большую разность потенциалов требуется распределить между несколькими конденсаторами.

§ 3.6 Электрическая энергия

В том, что заряженный конденсатор обладает энергией, нетрудно убедиться. Несложно и измерить величину этой энергии. Для этого достаточно разрядить конденсатор через тонкую проволочку и измерить выделенное джоулево тепло. Рассчитаем энергию заряженного конденсатора. Очевидно, что способ зарядки или разрядки конденсатора на величину энергии не влияет.

Рассмотрим конденсатор, одну из обкладок которого для удобства рассуждений будем считать заземленной. Тогда процесс разрядки конденсатора (заземление обкладки) имеющего заряд q , при разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$, можно представить как последовательный уход элементарных зарядов dq под действием сил электрического поля. Работа, совершаемая при таком элементарном акте, равна $(\varphi_1 - \varphi_2)dq$. По мере разрядки конденсатора работа по переносу каждой следующей порции зарядов в землю будет уменьшаться. Полная работа, которая будет совершена электрическим полем при разрядке конденсатора равна

$$A = \int_q^0 (\varphi_1 - \varphi_2) dq = \int_q^0 \frac{q}{C} dq = -\frac{q^2}{2C}.$$

Поскольку, согласно формуле (3.27), работа равна изменению потенциальной энергии взятой с обратным знаком, то потенциальная энергия заряженного конденсатора будет равна (с учетом (3.38)),

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} C(\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (3.41)$$

Замечание – Учитывая, что конденсатор – это система из двух проводников 1 и 2, заряды которых $q_1 = q$ и $q_2 = -q$, перепишем формулу (3.41) в виде

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2). \quad (3.42)$$

В исходной формуле (3.41) разность потенциалов не зависит от выбора начала отсчета φ . Будем считать, что начало отсчета φ_1 и φ_2 в формуле (3.42) находится в бесконечности. Тогда формулу (3.42) можно рассматривать как суммарную энергию двух неподвижных заряженных проводников.

С учетом принципа суперпозиции, можно показать, что электрическая энергия системы из n неподвижных заряженных проводников равна

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i. \quad (3.43)$$

В проводнике избыточные заряды распределены по его внешней поверхности, так что

$$W = \frac{1}{2} \int_{(S)} \varphi \sigma dS. \quad (3.44)$$

В общем случае произвольной системы заряженных проводников и непроводников, электрическая энергия будет равна

$$W = \int_{(S)} \varphi \sigma dS + \int_{(V)} \varphi \rho dV, \quad (3.45)$$

где σ и ρ – поверхностная и объемная плотности свободных зарядов; φ – потенциал результирующего поля всех свободных и связанных зарядов в точках элементов dS и dV .

Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям системы и по всему заряженному объему тел системы, изготовленных из диэлектриков.

Формулу (3.41) для энергии конденсатора можно выразить через параметры электрического поля в объеме плоского конденсатора. Для этого преобразуем формулу (3.41) с учетом соотношений (3.39) и (3.40) и получим

$$W = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V. \quad (3.46)$$

Из полученного соотношения следует, что объемная плотность энергии электрического поля будет равна

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \quad (3.47)$$

Понятие о плотности энергии электрического поля применимо не только к однородному полю плоского конденсатора, но и к неоднородному полю произвольной конфигурации. Если электрическое поле неоднородно, то его энергия, заключенная в объеме V , выражается в виде интеграла

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{(V)} E^2 dV, \quad (3.48)$$

где $\vec{E}$ – напряженность однородного электрического поля, находящегося в элементарном объеме dV .

***Замечание** – Значение приведенных математических преобразований выходит за рамки формального удобства пользования той или иной формулы. Новое выражение энергии электрического поля (3.48) позволяет говорить не об энергии системы зарядов, создающих поле, а об энергии самого электрического поля и приводит нас к мысли о реальности электрического поля. В рамках изучения постоянных полей эта идея не может быть ни подтверждена, ни опровергнута. Однако, переходя к переменным полям, мы находим прямые доказательства реальности электромагнитного поля, и тогда выведенная формула (3.48) энергии поля (энергии электромагнитной материи) приобретает фундаментальное значение.*

§3.7 Электрическое поле в веществе

До сих пор мы принимали, что электрическое поле, а также электрические заряды находятся в вакууме. Теперь мы кратко рассмотрим какое влияние на электрические явления оказывает присутствие вещества.

Хотя в состав вещества всех тел входят одинаковые по своим свойствам элементарные заряженные частицы, различные тела обладают различными электрическими свойствами и по разному ведут себя во внешнем элек-

трическом поле. Это связано с различным характером движения заряженных частиц в различных телах. В одних телах заряженные частицы под действием внешнего поля могут перемещаться свободно; в других, — частицы находятся в связанном состоянии и под действием внешнего поля происходит лишь относительно небольшое смещение заряженных частиц. В первом случае тело называют проводником, а во втором — диэлектриком.

К числу проводников относятся все металлы, электролиты и ионизированные газы. Диэлектриками являются дистиллированная вода, сера, стекло и другие вещества.

***Замечание** – Не следует полагать, что характер движения заряженных частиц тела, помещенного во внешнее электрическое поле, обусловлен различной степенью связи атомов в проводниках и диэлектриках. В действительности разделение тел на проводники и диэлектрики связано с различной структурой энергетического спектра этих тел, который определяется законами квантовой механики. Мы будем рассматривать только такие свойства этих тел, которые не требуют знания деталей структуры энергетического спектра тела.*

Итак, выясним, к чему приводит движение заряженных частиц тела, помещенного во внешнее электрическое поле (созданное какими-либо стационарными неподвижными зарядами).

Особенно простым этот вопрос является для проводников. В проводниках, под действием внешнего поля, происходит перераспределение электрических зарядов до тех пор, пока электрическое поле, созданное внешними источниками и распределенными внутри зарядами, не станет равным нулю внутри проводника и дальнейшее движение зарядов прекратится. Движение зарядов обязательно должно прекратиться, так как в противном случае проводник, помещенный в электрическое поле, можно было бы использовать для построения вечного двигателя первого рода. Движущиеся заряды совершали бы непрерывную работу, в частности, в проводнике непрерывно выделялось бы тепло, состояние же внешних зарядов, создающих электростатическое поле, не изменялось бы.

Итак, электростатическое поле внутри проводника равно нулю. Отсюда, согласно теореме Гаусса (3.16) следует, что объемная плотность заряда в проводнике равна нулю. Это значит, что заряды в проводнике располагаются только на его поверхности. Вне проводника поле должно быть нормально к его поверхности (смотрите пример 3 в параграфе 3.3), то есть поверхность проводника всегда эквипотенциальна.

Внесение диэлектрика в электрическое поле, также уменьшает в нем внешнее поле, но не до нуля, как в проводниках. Чтобы понять причину уменьшения поля в диэлектрике, отметим, что все атомы и молекулы, из которых состоит диэлектрик, электрически нейтральны, хотя и состоят из электрически заряженных частиц. Если диэлектрик поместить во внешнее электростатическое поле, то оно вызывает смещение зарядов в атомах и молекулах в направлении внешнего поля, что, в свою очередь, приводит к появлению не скомпенсированного заряда на границах диэлектрика. Явле-

ние, связанное с появлением зарядов на границах диэлектрика, называют поляризацией. Её механизм проиллюстрирован на рисунке 27. Атомы и молекулы со смещенными зарядами можно рассматривать как электрические диполи.

Замечания:

1 Диполем называется система из двух точечных зарядов, равных по величине и противоположных по знаку, находящихся на расстоянии l (плечо диполя) друг друга. Произведение положительного заряда на плечо диполя называется электрическим моментом диполя

$$\vec{p} = ql \quad .$$

Вектор $\vec{p}$ направлен по оси диполя от отрицательного заряда к положительному.

Такая модель атома и молекулы достаточно хорошо описывает их электрические свойства и широко используется в физике.

2 Для характеристики явления поляризации в данной точке объема вводят вектор поляризации

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V},$$

как суммарный дипольный момент единицы объема. Вектор поляризации численно равен поверхностной плотности индуцированных зарядов $|\vec{P}| = \sigma'$.

Если взять достаточно малый объем диэлектрика (рисунок 27), то противоположные по знаку заряды соседних диполей будут компенсировать друг друга и действие всех диполей сведется к действию не скомпенсированных на границах объема зарядов $+q'$ и $-q'$. Эти заряды получили название связанных или индуцированных. Как видно из рисунка 27, поле $\vec{E}'$, создаваемое этими зарядами, направлено против внешнего поля $\vec{E}_0$, так что и результирующее поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (3.49)$$

меньше внешнего.

Для примера рассмотрим поле однородного и изотропного диэлектрика, расположенного в плоском конденсаторе, как показано на рисунке 28.

Пусть плотность электрического заряда на пластинах равна σ ($+\sigma, -\sigma$), тогда напряженность электрического поля, создаваемого этими

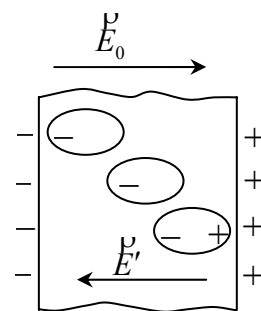


Рисунок 27

зарядами внутри конденсатора, будет $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Внесем в конденсатор диэлектрик. Внутри диэлектрика появятся диполи, в результате чего на поверхностях диэлектрика появятся связанные заряды, с некоторой поверхностной плотностью σ' . Вследствие этого напряженность электрического поля внутри диэлектрика уменьшится (3.49) и станет равной

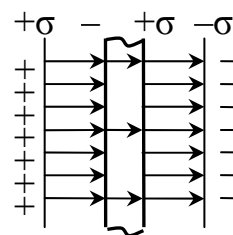


Рисунок 28

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma'). \quad (3.50)$$

Для большинства однородных и изотропных диэлектриков плотность связанных зарядов пропорциональна напряженности электрического поля в нем, то есть

$$\sigma' = \alpha \epsilon_0 \vec{E},$$

или, с учетом замечания, сделанного в этом параграфе

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E},$$

где α — постоянная, называемая диэлектрической восприимчивостью. Подставляя значение σ' в формулу (3.50) получим

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\alpha \epsilon_0}{\epsilon_0} E,$$

отсюда

$$\epsilon_0 E + \alpha \epsilon_0 E = \sigma = \epsilon_0 E_0,$$

или окончательно

$$(1 + \alpha) \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0.$$

Величину $(1 + \alpha)$, стоящую в скобках, называют относительной диэлектрической проницаемостью вещества (или просто диэлектрической проницаемостью) и обозначают буквой ϵ , то есть

$$\epsilon = 1 + \alpha$$

Таким образом, поле в диэлектрике будет равно

$$\epsilon \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0,$$

то есть в ϵ раз слабее, чем поле в вакууме.

На рисунке 28 показано поле в диэлектрике при $\epsilon = 3$.

Введем вектор $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$, который называется вектором электрического смещения. Употребление этого вектора имеет следующий смысл. Если вектор $\vec{E}$ внутри обкладок конденсатора определяется плотностью свободных и связанных зарядов, то вектор $\vec{D}$ определяется только свободными зарядами, находящимися на обкладках конденсатора, то есть $|\vec{D}| = \sigma$.

Таким образом, величина $\vec{D}$ не зависит от того, есть или нет диэлектрик в конденсаторе.

В общем случае расчета электрического поля при наличии диэлектрика, создаваемого произвольным распределением зарядов, так же вводят вектор $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$.

Замечание – Сравнительно легко можно показать, что вектор $\vec{D}$ можно записать в виде

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}. \quad (3.51)$$

Использование вектора $\vec{D}$ позволяет проще записать теорему Гаусса в виде

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (3.52)$$

где q – свободный заряд на обкладках конденсатора.

Выражение для объемной плотности энергии электрического поля в диэлектрике запишется как

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{D}\vec{E}}{2},$$

или, с учетом формулы (3.51)

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}.$$

В этом выражении первое слагаемое совпадает с плотностью энергии в вакууме, второе – дает энергию, идущую на поляризацию диэлектрика.

Следует иметь в виду, что все сказанное в этом параграфе справедливо только в случае однородного, изотропного и безграничного диэлектрика. Нахождение поля зарядов в присутствии ограниченного диэлектрика представляет собой сложную задачу математической физики, аналитическое решение которой известно лишь в нескольких простейших случаях.

Глава 4 Постоянный электрический ток

§ 4.1 Вектор плотности тока

Под электрическим током в проводящей среде понимают направленное движение заряженных частиц под действием электрического поля. Носителями тока в проводящей среде (в проводниках) могут быть электроны (в металлах), ионы (в электролитах) и ионы и электроны (в плазме).

Количественной мерой электрического тока служит сила тока J . Под силой тока понимают заряд, переносимый сквозь рассматриваемую поверхность S в единицу времени

$$J = \frac{dq}{dt}.$$

Единицей силы тока в системе СИ является ампер (А).

Электрический ток может быть неравномерно распределен по поверхности, через которую он протекает. Поэтому для детальной характеристики тока вводят вектор плотности тока $\vec{j}$, модуль которого равен отношению силы тока к площади элементарной площадки, расположенной перпендикулярно движению носителей, то есть

$$j = \frac{dJ}{dS_{\perp}}. \quad (4.1)$$

Направление вектора $\vec{j}$ совпадает с направлением скорости упорядоченного движения положительных носителей.

Из соображений размерности понятно, что

$$\vec{j} = qn\vec{v}, \quad (4.1')$$

где q – заряд частицы;

n – концентрация частиц;

$\vec{v}$ – скорость положительных частиц.

Поле вектора $\vec{j}$ (в общем случае вектор $\vec{j}$ может меняться от точки к точке и зависеть от времени) можно изобразить графически с помощью линий тока (линий вектора $\vec{j}$), которые проводятся аналогично линиям вектора $\vec{E}$.

Зная вектор плотности в любой точке выбранной поверхности S , можно силу тока через эту поверхность представить как поток вектора $\vec{j}$:

$$J = \int \vec{j} d\vec{S}. \quad (4.2)$$

Если внутри проводника выделить какой-то объем, то, в силу закона сохранения заряда, изменение во времени полного заряда, находящегося в объеме, должно равняться току, протекающему через поверхность выделенного объема. Математически это означает, что

$$\oint \mathbf{j}^r dS = -\frac{dq}{dt}, \quad (4.3)$$

откуда, применяя теорему Гаусса, можно записать

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^r = -\frac{d\rho}{dt}. \quad (4.3')$$

Записанные соотношения называются **уравнениями непрерывности**. В случае постоянного тока распределение зарядов в единице объема не зависит от времени, то есть $dq / dt = 0$. Следовательно, для постоянного тока

$$\oint \mathbf{j}^i dS = 0, \quad (4.4)$$

иначе говоря, линии вектора $\mathbf{j}^i$ замкнутые.

Это означает, что в случае постоянного тока электрические цепи должны быть замкнутыми, в отличие от цепей переменного тока.

§ 4.2 Основные законы постоянного тока

Основным законом постоянного тока является экспериментально открытый закон Ома, согласно которому сила тока, протекающего по проводнику, пропорционально разности потенциалов (напряжению) на его концах:

$$J = \frac{1}{R} U, \quad (4.5)$$

где R – электрическое сопротивление проводника, Ом.

Сопротивление R зависит от формы и размеров проводника, от его материала и температуры. (В более общем случае объемного распределения тока уже нельзя говорить о сопротивлении, пока не указаны или расположение подводящих к проводнику проводов, или конфигурация тока в нем).

В простейшем случае однородного цилиндрического проводника сопротивление равно

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.6)$$

где l – длина проводника;

S – площадь поперечного сечения;

ρ – удельное электрическое сопротивление, которое зависит от материала проводника и его температуры.

Удельное сопротивление выражают в омах умноженных на метр (Ом·м).

Пользуясь понятием плотности тока, запишем закон Ома в иной, дифференциальной форме. Рассмотрим элементарный цилиндрический объем линейного проводника с образующими параллельными вектору $\vec{j}$ (значит и вектору $\vec{E}$), как представлено на рисунке 29. Подставляя в закон Ома выражения (3.34), (4.1) и (4.6), запишем

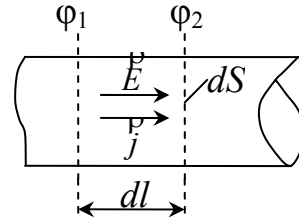


Рисунок 29

$$jdS = \frac{Edl \cdot dS}{\rho dl},$$

и после сокращений получим

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E,$$

или в векторной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (4.7)$$

Величина $\sigma = 1/\rho$ – называется удельной электропроводностью среды. Единицу, обратную ому называют сименсом (См), поэтому единицей удельной проводимости является сименс деленный на метр (См/м).

Соотношение (4.7) называется законом Ома в **дифференциальной форме**.

Для того, чтобы в проводнике существовал электрический ток, необходимо на его концах (рисунок 29) поддерживать постоянную разность потенциалов. Это условие невозможно осуществить только электростатическими силами, так как они приводят к выравниванию потенциалов. Кроме того, электрическая цепь постоянного тока должна быть замкнутой (4.4), это означает, что должно существовать поле $\vec{E}$, циркуляция которого по всей замкнутой цепи должна отличаться от нуля:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$$

Однако это не может быть электростатическим (кулоновским) полем, так как согласно выражению (3.25), циркуляция напряженности электростатического поля по контуру равна нулю. Поэтому необходимо наличие в цепи постоянного тока каких-либо сил не электростатической природы, способных создавать и поддерживать разность потенциалов. Эти силы называют **сторонними**

силами. Для их получения используют источники постоянного тока – гальванические элементы, аккумуляторы, а также генераторы постоянного тока.

Для количественной характеристики сторонних сил вводят понятие поля сторонних сил и его напряженность $\vec{E}^*$. Вектор $\vec{E}^*$ численно равен сторонней силе, действующей на единичный положительный заряд.

Следовательно, если под действием поля $\vec{E}$ в проводнике возникает ток $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, то, очевидно, под полем $\vec{E}$ следует понимать совместное действие кулоновского поля и поля сторонних сил, то есть

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_K + \vec{E}^*). \quad (4.8)$$

Выражение (4.8) представляет собой закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи. Неоднородным участком цепи называют проводящий участок, на котором действуют сторонние силы.

Преобразуем выражение (4.8), для чего умножим обе части равенства на вектор $d\vec{l}$, численно равный длине dl элемента проводника и направленный вдоль вектора $\vec{j}$ плотности тока, после чего проинтегрируем полученное выражение по длине проводника от точки 1 до точки 2.

$$\int_1^2 \vec{j} d\vec{l} = \int_1^2 \sigma \vec{E}_K d\vec{l} + \int_1^2 \sigma \vec{E}^* d\vec{l}.$$

Учтем, что $\vec{j} d\vec{l} = j dl$ (в нашем случае вектора $\vec{j} \parallel d\vec{l}$), а $\sigma = 1/\rho$, запишем полученное выражение в виде

$$J \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 \vec{E}_K d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим физический смысл всех членов, входящих в уравнение (4.9).

В левой части уравнения стоит, согласно формуле (4.6), произведение тока на сопротивление взятого участка цепи. Произведение $JR = U$ – получило название падения напряжения (или просто напряжения) на данном участке цепи.

В правой части уравнения первый член, согласно выражения (3.27) представляет собой разность потенциалов (падение потенциала) на рассматриваемом участке. Вторым интеграл представляет собой электродвижущую силу (ЭДС) $\mathcal{E}$, действующую на данном участке цепи. Эта величина алгебраическая: если ЭДС способствует движению положительных носителей тока в выбранном направлении, то $\mathcal{E} > 0$, если же препятствует, то $\mathcal{E} < 0$. Из соображений размерности ясно, что ЭДС измеряется в вольтах (В).

В результате всего сказанного выше, уравнение (4.9) запишем окончательно в виде

$$RJ = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}. \quad (4.10)$$

Это уравнение выражает закон Ома для неоднородного участка цепи (**интегральная форма записи**).

В случае замкнутого контура $\varphi_1 = \varphi_2$ и уравнение (4.10) примет вид

$$RJ = \mathcal{E}. \quad (4.11)$$

С прохождением тока через проводник, обладающий сопротивлением, неразрывно связано выделение теплоты (нагрев проводников). Эксперимент показал, что если проводники неподвижны и в них не происходят химические превращения, то вся работа сил электрического поля идет на выделение тепла, то есть

$$Q = A,$$

или, согласно формуле (3.37) и выражению $J = q/t$,

$$Q = JUt. \quad (4.12)$$

Последнее соотношение, с учетом закона Ома (4.5) можно записать в виде

$$Q = J^2 Rt, \quad (4.13)$$

которое получило название закона Джоуля-Ленца для участка цепи постоянного тока. Закон Джоуля-Ленца можно записать также в виде

$$Q = \frac{U^2 t}{R}. \quad (4.14)$$

Получим выражение закона Джоуля-Ленца в локальной (**дифференциальной**) форме. Для этого выделим бесконечно малый объем в форме цилиндра с образующей dl параллельной вектору $\vec{j}$ – плотности тока в данном месте. Затем проведем преобразования в формуле (4.13) аналогичные преобразованию при выводе закона Ома в дифференциальной форме, то есть

$$Q = RJ^2 t = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 t = \rho j^2 t dV,$$

где $dV = dSdl$ – объем цилиндра, м^3 .

Разделив полученное выражение на tdV , получим выражение, которое определяет количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника, – **удельную тепловую мощность тока**:

$$w = \rho j^2. \quad (4.15)$$

Формула (4.15) выражает **закон Джоуля-Ленца в дифференциальной (локальной) форме**: удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности электрического тока и удельному сопротивлению среды в данной точке.

Уравнение (4.15) представляет собой наиболее общую форму закона Джоуля-Ленца, применимую к любым проводникам вне зависимости от их формы, однородности и природы сил, возбуждающих электрический ток.

Если на носители тока действуют только электрические силы, то на основании закона Ома, можно (4.15) записать в виде

$$w = j \overset{1}{E} = \sigma E^2, \quad (4.16)$$

или в случае неоднородной проводящей среды

$$w = \rho j^2 = j \left(\overset{r}{E}_k + \overset{r}{E}^* \right). \quad (4.17)$$

Соотношения (4.16) и (4.17) имеют менее общий характер, чем выражение (4.15).

Отметим, что тепловая мощность, согласно формулы (4.13) измеряется в ваттах:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ А}^2 \cdot \text{Ом},$$

а удельная тепловая мощность измеряется в ваттах, деленных на кубический метр (Вт/м^3).

Замечание – В заключении рассмотрим замкнутую цепь, в которой действует электродвижущая сила $\mathcal{E}$ и имеются внешнее сопротивление R и внутреннее (внутри источника) R_i . Сила тока J в такой цепи по закону Ома равна

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}.$$

Используя эту формулу, выразим через $\mathcal{E}$ количество тепла, выделяемое за единицу времени (тепловая мощность w) во внешнем проводнике

$$w_e = J^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_i)^2}, \quad (4.18)$$

$$w_i = J^2 R_i = \frac{\mathcal{E}^2 R_i}{(R + R_i)^2}.$$

Суммарное количество тепла определяется формулой

$$w = w_i + w_e = J^2 (R + R_i) = \frac{\mathcal{E}^2}{R + R_i} = \mathcal{E} J. \quad (4.19)$$

Такую энергию должен ежесекундно поставлять источник ЭДС в электрическую цепь.

Это энергетическое соотношение позволяет несколько иначе понять необходимость сторонней силы для протекания постоянного тока. Так как прохождение тока связано с непрерывным выделением джоулева тепла, то это тепло должно все время поставляться каким-либо внешним источником (работа электростатических сил по замкнутому контуру равна нулю) не-электрического происхождения, то есть аккумулятором, генератором и т.д. Величина ЭДС представляет собой (согласно определению) энергию, доставляемую источником тока при единичной силе тока за единицу времени. Следовательно, роль электрического тока сводится лишь к «переносу» энергии от источника тока до места выделения тепла. Написанная формула (4.18) для w_e позволяет выяснить, при каких условиях тепловая мощность w_e будет максимальной, если ЭДС и сопротивление источника заданы. Из формулы (4.18) легко видеть w_e будет максимальной при равенстве сопротивлений R и R_i . Это максимальное значение будет равно

$$(w_e)_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_i}.$$

(Такое же количество тепла будет выделяться и внутри источника при условии $R = R_i$). Интересно отметить, что коэффициент полезного действия источника тока при максимальном отборе тепловой мощности в нагрузке равен всего 50%, то есть

$$\eta = \frac{(w_e)_{\max}}{w} = \frac{R}{R + R_i} = 0,5,$$

так как $R = R_i$.

*Условие $R = R_i$ — называется **условием согласования**.*

Замечание – Хотя законы Ома и Джоуля-Ленца кажутся достаточно простыми, тем не менее они нуждаются в некотором разъяснении. Если в проводнике на подвижный заряд действует постоянное поле, то заряд, казалось бы, должен непрерывно ускоряться, то есть он не может обладать постоянной скоростью. Между тем, согласно закона Ома, мы получаем при заданном поле $\vec{E}$ конечное значение плотности тока $\vec{j}$, которому соответствует (по формуле $\vec{j} = en\vec{v}$) конечное значение скорости частицы $\langle \vec{v} \rangle$. Ответ в принципе ясен: заряды в проводнике подвижны, но их нельзя считать полностью свободными.

Проще всего это можно разъяснить на примере электролита. Пусть в нем частица с зарядом q и массой m движется под действием поля $\vec{E}$. Если бы частица была свободной, то её движение определялось бы уравнением $m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}$ (то есть вторым законом Ньютона). Но, электролит обладает вязкостью, в следствии чего при движении частицы возникает трение. Сила трения направлена противоположно скорости и равна $\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha\vec{v}$, где α – коэффициент трения (смотрите раздел 1.22 формулу 1.6).

Таким образом, движение частицы определяется уравнением

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{E} - \alpha\vec{v}. \quad (4.20)$$

Это стандартное неоднородное дифференциальное уравнение первой степени. Его решение складывается из решения однородного и неоднородного дифференциальных уравнений и имеет вид

$$\vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E} + \vec{a} e^{-\frac{\alpha}{m}t},$$

где $\vec{a}$ – константа интегрирования.

Её находят из начальных условий. Если в начальный момент времени $t = 0$ скорость частицы равнялась $v_0 = 0$, то, очевидно $\vec{a} = -\frac{q}{\alpha} \vec{E}$ и, следовательно,

$$\vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right). \quad (4.21)$$

Анализ полученного выражения показывает, что с течением времени скорость увеличивается и стремится к предельному значению $\frac{q}{\alpha} \vec{E}$, не зависящему от времени, что соответствует случаю равенства сил поля и сил трения, то есть $q\vec{E} = \alpha\vec{v}$ (рисунок 30). По прошествии времени $\tau = m/\alpha$ после

включения поля (это время называется временем релаксации) скорость будет отличаться от предельного значения на $1/e$ предельного значения. По прошествии времени $2m/\alpha$ это различие будет составлять $1/e^2 \sim 0,1$ предельного значения. Таким образом, скорость очень быстро достигает своего предельного значения $\vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E}$. Подставляя это значение в общее выражение для плотности тока $\vec{j} = qn\vec{v}$, получаем

$$\vec{j} = \frac{q^2 n}{\alpha} \vec{E}.$$

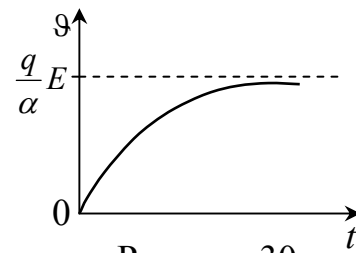


Рисунок 30

Сравним это выражение с законом Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, с учетом того, что $\alpha = \frac{m}{\tau}$, получим

$$\sigma = \frac{q^2 n}{\alpha} = \frac{q^2 n \tau}{m}. \quad (4.22)$$

Следовательно, удельная проводимость определяется в основном концентрацией электронов. В итоге мы показали, что учет сил трения при движении заряженных частиц в проводнике приводит к закону Ома.

Конечно, о трении можно говорить только в случае электролита, хотя закон Ома справедлив и для металла, и для плазмы. В этих проводниках закон Ома возникает не в следствии сил трения, а в результате столкновений заряженных частиц друг с другом и с примесями.

Аналогично, исходя из представления о существовании силы трения, можно объяснить и закон Джоуля-Ленца. Действительно, движение частицы описывается по прежнему уравнением (4.20), а сила сопротивления соотношением $\vec{F}_{тр} = -\alpha \vec{v}$. Опять будем исходить из того, что при равномерном движении $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, то есть сумма всех сил в уравнении (4.20) равна нулю,

$$e\vec{E} = -\vec{F}_{тр} = \alpha \vec{v}. \quad (4.23)$$

Умножая в (4.23) $e\vec{E}$ на элемент пути $d\vec{l} = \vec{v} dt$, найдем работу сил поля $\vec{E}$ над частицей за время dt :

$$dA = e\vec{E} d\vec{l} = e\vec{E} \vec{v} dt.$$

С учетом выражения (4.23), эта работа будет равна

$$dA = -\vec{F}_{mp} d\vec{l} = \alpha \mathfrak{I}^2 dt. \quad (4.24)$$

Но, трение всегда сопровождается выделением тепла, точнее работа силы трения равна количеству тепла, получаемого окружающей средой. Отсюда следует, что работа сил электрического поля полностью переходит в тепло. Иными словами, прохождение постоянного тока сопровождается выделением тепла. Это тепло, отнесенное к одной частице (называется джоулевым теплом) равно $\alpha \mathfrak{I}^2 dt$. Умножая выражение (4.24) на концентрацию частиц n , находим джоулево тепло dQ , выделяемое в единице объема проводника за время dt ,

$$dQ = n\alpha \mathfrak{I}^2 dt. \quad (4.25)$$

Поскольку плотность тока $\vec{j} = qn\vec{\mathfrak{I}}$, а коэффициент удельной электропроводности σ связан с коэффициентом трения соотношением (4.22), то формулу (4.25) перепишем в виде

$$dQ = \frac{1}{\sigma} j^2 dt = \rho j^2 dt.$$

Разделив полученное выражение на время, получим выражение для удельной тепловой мощности тока

$$w_{yd} = \rho j^2 = \sigma E^2,$$

что полностью совпадает с ранее полученным законом Джоуля-Ленца в дифференциальной форме (4.15) и (4.16).

Глава 5 Магнитное поле

§ 5.1 Сила Лоренца. Поле вектора $\vec{B}$

В предыдущих параграфах мы изучили основные законы постоянного тока, как следствие упорядоченного движения зарядов в проводнике под действием сил электрического поля. Однако этим не исчерпываются все явления, связанные с прохождением электрического тока. Опыты показали, что вокруг проводников с током существует еще одно силовое поле – **магнитное поле**, – которое легко обнаружить по силовому действию на движущиеся электрические заряды и другие проводники с током. При этом экспериментально было установлено, что магнитное поле не только действует на движущиеся заряды, но и сами движущиеся заряды создают магнитное поле.

Закон, определяющий силу $\dot{F}_m$, действующую на движущийся точечный заряд q в магнитное поле, получен обобщением экспериментальных данных. Он выражается формулой

$$\dot{F}_m = q[\dot{\mathfrak{B}}], \quad (5.1)$$

где $\dot{B}$ – индукция магнитного поля, Тл.

Таким образом, вектор $\dot{B}$ характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд.

В системе СИ индукция магнитного поля измеряется в единицах тесла (Тл), причем $1\text{Тл} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$.

Отметим, что в электрическом поле $\dot{E}$ на заряд q действует сила $\dot{F}_e = q\dot{E}$. При совместном действии электрического и магнитного полей возникает сила $\dot{F} = \dot{F}_e + \dot{F}_m$, то есть

$$\dot{F} = q\dot{E} + q[\dot{\mathfrak{B}}]. \quad (5.2)$$

Эта сила называется **силой Лоренца**. Если заряд покоится, то согласно (5.1), магнитная составляющая силы Лоренца равна нулю. Сила Лоренца (5.2), как любая сила в механике Ньютона (часть I, раздел 4) не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Между тем магнитная составляющая силы Лоренца меняется при переходе от одной системы к другой (так как $\dot{F}_m$ зависит от скорости $\dot{\mathfrak{B}}$), поэтому должна меняться и электрическая составляющая $q\dot{E}$. Таким образом, разделение полной силы F – сила Лоренца – на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Без указания системы отсчета такое разделение теряет смысл.

По действию силы Лоренца на заряд можно определить величину и направление векторов $\dot{E}$ и $\dot{B}$. Поэтому выражение (5.2) можно рассматривать как определение электрического и магнитного полей. Кстати, в случае электрического поля мы так и делали. Разработан ряд способов измерения поля $\dot{B}$, но все они, в конечном счете, используют явления, в основе которых лежат уравнения (5.1) и (5.2).

Мы уже отмечали, что магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами). В результате обобщения опытных данных был получен закон, определяющий поле $\dot{B}$ точечного заряда q , движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью $\dot{\mathfrak{B}}$. Этот закон записывается в виде

$$\dot{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\dot{\mathfrak{B}}\dot{r}]}{r^3}, \quad (5.3)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, равная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м;

$\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

Конец радиуса вектора $\vec{r}$ неподвижен в данной системе отсчета, а его начало движется со скоростью $\vec{v}$ (рисунок 31), поэтому вектор $\vec{B}$, зависит не только от точки наблюдения A , но и от времени.

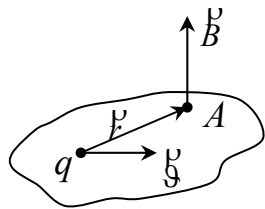


Рисунок 31

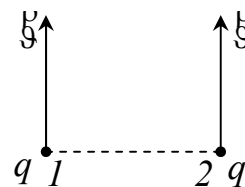


Рисунок 32

Интересно отметить, что поле точечного заряда q описывается такой же по форме формулой (3.3)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}.$$

Используя это выражение, формулу (5.3) запишем в виде

$$\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \left[\vec{v} \times \vec{E} \right] = \frac{[\vec{v} \times \vec{E}]}{c^2}, \quad (5.4)$$

где c – электродинамическая постоянная равная $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, численно совпадающая со скоростью света в вакууме.

Соотношение (5.4) лишний раз подчеркивает, что, если движущиеся заряды создают и электрические и магнитные поля, то между этими полями должна быть взаимосвязь.

Замечание – Давайте найдем отношение сил электрического и магнитного взаимодействия в случае двух достаточно массивных точечных зарядов q , движущихся параллельно друг другу со скоростью $v \ll c$ (рисунок 32).

Согласно формуле (5.1), которая в нашем случае запишется как $F_m = qvB$, и формуле (3.2) $F_e = qE$, где B и E , соответственно, индукция магнитного и напряженность магнитного полей, создаваемых зарядом 1 в месте нахождения заряда 2, запишем отношение $F_m / F_e = vB / E$. В нашем случае, с учетом формулы (5.4) это отношение запишется как

$$\frac{F_m}{F_e} = \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (5.6)$$

Даже для достаточно больших скоростей, например $v = 300$ км/с, это отношение равно 10^{-6} , то есть магнитная часть силы в миллион раз меньше электрической и составляет ничтожную поправку к электрической силе.

Приведенный расчет должен вызвать естественный вопрос – стоит ли изучать такие силы? Оказывается стоит по следующим причинам. Во-первых, в технике мы часто имеем дело с пучками частиц, движущимися почти со скоростями, равными скорости света, и там отношение (5.6) близко к единице. Во – вторых, направленная скорость электронов вдоль проводов в электрических сетях, составляет несколько десятых миллиметра в секунду и отношение $(v/c)^2 \approx 10^{-24}$, то есть совсем ничтожная поправка к электрической силе. Однако все дело в том, что в данном случае магнитная сила – это практически вся действующая сила, так как электрические силы, в результате практически идеального баланса (то есть намного точнее, чем 10^{-24}) отрицательных и положительных зарядов в проводах (проводники электронейтральны), отсутствуют. Так как магнитная сила оказывается по существу единственной, а концентрация зарядов в металлических проводах (порядка 10^{28}) велика, то участие громадного числа зарядов в создании тока компенсирует малость магнитной составляющей силы.

Получим теперь закон, определяющий магнитное поле постоянного тока. Как и в электростатике, будем исходить из принципа суперпозиции. Согласно этому принципу магнитное поле, создаваемое несколькими зарядами или токами равно векторной сумме полей, создаваемых каждым зарядом или током, то есть

$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i. \quad (5.7)$$

Подставим в формулу (5.3) вместо заряда q , заряд $q = \rho dV$, где ρ – объемная плотность заряда, являющегося носителем тока, и учтем, что $\vec{j} = \rho \vec{v}$, согласно формуле (4.1'). Тогда формула запишется в виде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \vec{r}]}{r^3} dV. \quad (5.8)$$

Если ток протекает по проводу сечением ΔS , то

$$jdV = j\Delta S dl = Jdl,$$

где dl – элемент длины провода. Введя вектор $d\vec{l}$ в направлении тока J , перепишем последнее равенство в виде

$$j dV = J d\vec{l}, \quad (5.9)$$

где векторы $j dV$ и $J dl$ называют соответственно **объемным** и **линейным элементами тока**.

Заменим в формуле (5.8) объемный элемент тока на линейный, получим

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J [dl^r]}{r^3}. \quad (5.10)$$

Формулы (5.8) и (5.10) выражают так называемый **закон Био-Савара**. Полное поле B найдется интегрированием выражений (5.8) и (5.10) по всем элементам тока, то есть

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[j^r]}{r^3} dV, \quad (5.11)$$

или

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[dl^r]}{r^3}. \quad (5.12)$$

Расчет индукции магнитного поля тока по формулам (5.11) и (5.12) в случае произвольной конфигурации контура сложен. Однако расчет существенно упрощается, если распределение тока имеет определенную симметрию.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 – Рассмотрим очень длинный прямолинейный провод, по которому течет постоянный ток J . Подводящие ток провода расположены настолько далеко, что их магнитными полями в рассматриваемой области пространства можно пренебречь. Магнитное поле элемента тока $J dl$ задается выражением (5.10). Согласно этой формулы, в произвольной точке A величины dB от всех элементов тока имеют одинаковое направление – перпендикулярно к плоскости рисунка 33. Поэтому сложение векторов dB можно заменить сложением их модулей dB , причем, как следует из рисунка 33 и формулы (5.10),

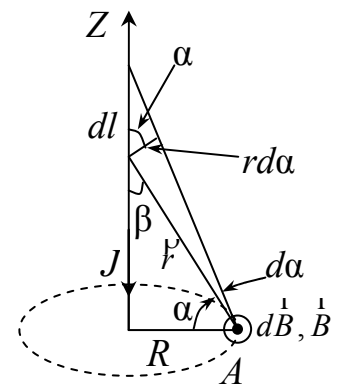


Рисунок 33

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J dl \sin \beta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J dl \cos \alpha}{r^2}.$$

Кроме того из рисунка 33 видно, что $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = R / \cos \alpha$. Поэтому

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J \cos \alpha d\alpha}{R}.$$

Интегрируя это выражение по всем элементам тока, что эквивалентно интегрированию по α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2J}{R}. \quad (5.13)$$

Если считать, что ток направлен вдоль оси Z , тогда поле $\vec{B}$ направлено вдоль оси Y , и окончательно результат можно представить в векторной форме

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2J}{R} \vec{j}. \quad (5.13')$$

Пример 2 – Вычислим индукцию магнитного поля кругового тока на его оси (рисунок 34). Элемент тока $Jd\vec{l}$ создает магнитное поле $d\vec{B}$ перпендикулярное к радиусу-вектору $\vec{r}$. Разложим этот вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: осевую составляющую dB_Z и радиальную – dB_r . При интегрировании по контуру кругового тока радиальные слагающие взаимно уничтожаются. Результирующее поле будет направлено вдоль оси Z , поэтому надо интегрировать взятую по модулю осевую составляющую

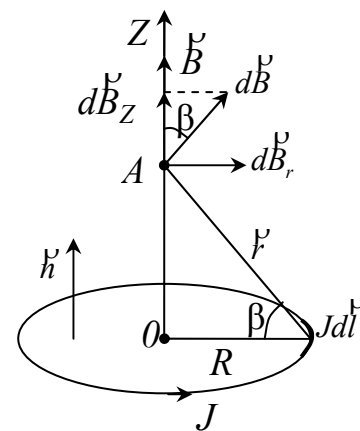


Рисунок 34

$$dB_Z = dB \cos \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Jdl}{r^2} \cos \beta.$$

Интегрируя это выражение по dl (это дает $2\pi R$) и учитывая, что $\cos \beta = R/r$ и $r = (z^2 + R^2)^{1/2}$, получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 J}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (5.14)$$

Из формулы (5.14) следует, что в центре витка с током ($Z = 0$) и на расстоянии ($z \gg R$) модуль вектора $\vec{B}$ равен, соответственно,

$$B_{Z=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi J}{R}; \quad B_{Z \gg R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 J}{z^3}. \quad (5.15)$$

Замечание – В полученной формуле $\pi R^2 = S$, произведение величины тока на площадь контура с током называют **магнитным моментом**, то

есть $\vec{p}_m = JS\vec{n}$. Магнитный момент это вектор, совпадающий по направлению с нормалью к поверхности. Направление нормали к поверхности связано с обходом тока по контуру правилом правого винта (рисунок 34). Так как результирующее поле направлено вдоль оси Z , то окончательно поле $\vec{B}$ запишем в векторном виде

$$\vec{B}_{z=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi J}{R} \vec{r}; \quad (5.15')$$

$$\vec{B}_{z \gg R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 J}{z^3} \vec{r}.$$

§ 5.2 Основные законы магнитного поля

Магнитное поле является векторным полем. Следовательно, для его описания применимы две основные теоремы: теорема Гаусса и теорема о циркуляции (теорема Стокса) вектора $\vec{B}$.

Прежде чем перейти к их рассмотрению, несколько слов о графическом представлении поля $\vec{B}$. Как и электрическое поле, поле $\vec{B}$ можно представить с помощью силовых линий, которые проводят так, чтобы касательная к этим линиям в каждой точке совпадала с направлением вектора $\vec{B}$, а густота линий была бы пропорциональна модулю вектора $\vec{B}$ в данном месте. Полученная с помощью таких линий геометрическая картина поля $\vec{B}$ значительно облегчает анализ некоторых ситуаций.

На основании обобщения экспериментальных данных **теорема Гаусса для поля $\vec{B}$** утверждает, что поток вектора $\vec{B}$ сквозь замкнутую поверхность равен нулю, то есть

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (5.16)$$

Эта теорема фактически выражает тот экспериментальный факт, что линии вектора $\vec{B}$ всегда замкнуты, то есть не имеют ни начала ни конца. Поэтому, число линий вектора $\vec{B}$, выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , всегда равно числу линий, входящих в этот объем, и не зависит от формы поверхности S .

Выражение (5.16) отражает также и тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, на которых начинались бы или заканчивались линии вектора $\vec{B}$. Такие поля называются **вихревыми полями**.

Теорема о циркуляции вектора $\dot{\vec{B}}$ утверждает, что циркуляция вектора $\dot{\vec{B}}$ по произвольному замкнутому контуру равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:

$$\oint \dot{\vec{B}} d\vec{l} = \mu_0 J, \quad (5.17)$$

где $J = \sum J_i$.

Причем ток J_i считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом винта. Ток противоположного направления считается отрицательным. Так на рисунке 35 показано, что J_1 и J_2 положительны, так как их направление совпадает с направлением перемещения правого винта, а ток J_3 – отрицательный. Теорема о циркуляции (5.17) может быть доказана исходя из закона Био-Савара (5.12), что особенно просто получается для длинного прямого тока с использованием формулы (5.13) – предлагаем проделать это самостоятельно.

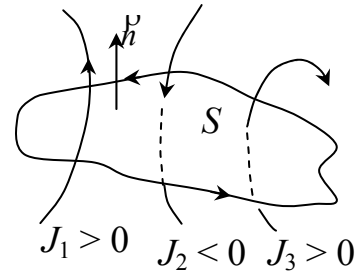


Рисунок 35

В общем случае произвольного тока это очень трудоемкая задача и мы её приводить не будем. Утверждение (5.17) мы будем рассматривать как постулат, проверенный экспериментом. В системе единиц СИ для упрощения расчетов (особенно при наличии магнитных сред) вводят вектор напряженности магнитного поля $\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{B}} / \mu_0$. Введение вектора $\dot{\vec{H}}$ позволяет переписать формулу (5.17) в виде

$$\oint \dot{\vec{H}} d\vec{l} = J. \quad (5.17')$$

Так как ток можно представить в виде $J = \int_S \dot{\vec{j}} d\vec{S}$, где интеграл берется по произвольной поверхности, натянутой на контур, то выражение (5.17) можно записать в более общем виде

$$\oint \dot{\vec{B}} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \dot{\vec{j}} d\vec{S}. \quad (5.18)$$

С помощью уравнений (5.16) и (5.17) можно полностью описать магнитное поле постоянного тока, поэтому эти уравнения часто называют **основными законами магнитного поля**.

Для лучшего понимания роли основных уравнений рассмотрим несколько примеров расчета поля $\vec{B}$.

Пример – Рассчитаем поле $\dot{\vec{B}}$ внутри и снаружи длинного прямого провода, имеющего круглое сечение радиуса R , по которому протекает ток J .

Из симметрии задачи следует, что линии $\vec{B}$ должны иметь вид окружностей с центром на оси провода, причем модуль вектора $\vec{B}$ будет одинаков во всех точках на одинаковом расстоянии r_2 от оси провода. Тогда, по формуле (5.17) для круглого контура (рисунок 36), получим $B \cdot 2\pi r = \mu_0 J$, откуда следует, что вне провода

$$B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r_2}, \quad (5.19)$$

где $r_2 \geq R$.

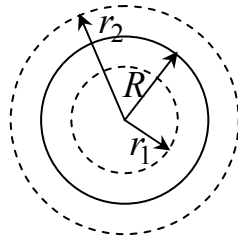


Рисунок 36

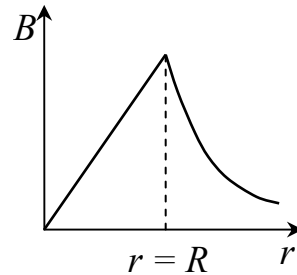


Рисунок 37

Внутри провода из тех же соображений симметрии следует, что линии вектора $\vec{B}$ так же являются окружностями. По теореме о циркуляции вектора $\vec{B}$ получим $B 2\pi r_1 = \mu_0 J_{r_1}$, где $J_{r_1} = J (r_1 / R)^2$ – ток, охватываемый окружностью радиуса r_1 . В итоге получим

$$B = \frac{\mu_0 J r_1}{2\pi R^2}, \quad (5.20)$$

где $r_1 \leq R$.

Если провод имеет вид трубки, то снаружи поле $\vec{B}$ определяется формулой (5.19), а внутри – магнитного поля нет, в соответствии с формулой (5.20).

Пример – Магнитное поле длинного соленоида.

Длинный соленоид представляет собой длинную катушку с намотанной на него проволокой, по которой протекает ток J . Поставим условие, что намотка проводника на катушке плотная, то есть витки провода плотно прилегают друг к другу, и шаг винтовой линии мал, что всегда выполнимо для тонкого провода и малого сечения катушки. Если выполнены указанные условия, то каждый виток можно приближенно заменить замкнутым витком. Будем считать, что на единицу длины соленоида приходится n витков (рисунок 38).

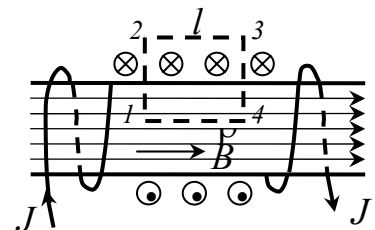


Рисунок 38

Из соображений симметрии ясно, что линии $\vec{B}$ внутри соленоида направлены вдоль его оси, причем вектор $\vec{B}$ составляет с направлением тока правовинтовую систему. Все это говорит о не-

обходимости выбрать для расчета прямоугольный контур как показано на рисунке 38. Участки 1-2 и 3-4 расположены перпендикулярно вектору $\vec{B}$, следовательно при расчете циркуляция вектора $\vec{B}$ на этих участках даст ноль. На участке 2-3, как показывает опыт, поле практически равно нулю. Тогда циркуляция вектора $\vec{B}$ по контуру равна $B l_{41}$, и контур охватывает ток $n l_{41} J$. Согласно теореме о циркуляции $B l = \mu_0 n l J$, откуда поле внутри соленоида будет равно

$$B = \mu_0 n J, \quad (5.21)$$

то есть поле внутри длинного соленоида однородно (за исключением области вблизи торцов). Произведение $n J$ – называют **числом ампер-витков**.

Таким образом, теорема о циркуляции позволяет более просто рассчитывать поле вектора $\vec{B}$, когда вычисление удастся свести к произведению $\vec{B}$ на длину контура (или его часть). Во всех других случаях расчет поля $\vec{B}$ приходится проводить с помощью закона Био-Савара, что значительно сложнее.

По аналогии с электростатическим полем, законы магнитного поля можно записать в дифференциальной форме.

Так теорема Гаусса (5.16) для вектора $\vec{B}$ в дифференциальной форме имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5.22)$$

или, с использованием оператора ∇ (набла)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (5.22')$$

Это означает, что дивергенция поля $\vec{B}$ всюду равна нулю, то есть (повторяем) магнитное поле не имеет источников (магнитных зарядов). Магнитное поле порождается не магнитными зарядами (в природе их нет), а электрическими токами.

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме записывается в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}, \\ \text{или} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Замечание – Представим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ в дифференциальной форме для чего выражение (5.17) перепишем следующим образом

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 J = \mu_0 j \Delta S.$$

Полученное выражение разделим на ΔS и устремим $\Delta S \rightarrow 0$, то есть

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} d\vec{l}}{\Delta S} = \mu_0 \vec{j}. \quad (5.24)$$

Вектор, длина которого равна данному пределу, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока $\vec{j}$, называется ротором вектора $\vec{B}$ и записывается $\text{rot } \vec{B}$, или в символическом виде $\nabla \times \vec{B}$.

Выражения (5.23) можно записать в проекциях на оси координат (например декартовых)

$$\left. \begin{aligned} (\text{rot } \vec{B})_x &= \frac{dB_z}{dy} - \frac{dB_y}{dz} = \mu_0 j_x; \\ (\text{rot } \vec{B})_y &= \frac{dB_x}{dz} - \frac{dB_z}{dx} = \mu_0 j_y; \\ (\text{rot } \vec{B})_z &= \frac{dB_y}{dx} - \frac{dB_x}{dy} = \mu_0 j_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

В заключении сравним формулы для дивергенции и ротора магнитного поля с аналогичными формулами электростатического поля (3.24) и (3.25):

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}; & \text{div } \vec{B} &= 0; \\ \text{rot } \vec{E} &= 0; & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

Из сопоставления формул видно, что электростатические и магнитные поля имеют различный характер. Ротор электростатического поля равен нулю; следовательно, электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано скалярным потенциалом ϕ , который связан с полем $\vec{E}$ соотношением (3.36) $\vec{E} = -\text{grad } \phi$. Ротор магнитного поля в точке, где есть ток, отличен от нуля. Поле, у которого ротор отличен от нуля, называется **вихревым полем**. Такому полю нельзя приписать скалярный потенциал, связанный с полем $\vec{B}$ соотношением аналогичным (3.36). Такой потенциал не был бы однозначным, так как при каждом полном обходе контура он получал бы приращение $\mu_0 J$. Тем не менее, магнитное поле можно характеризовать векторным потенциалом, который вводят исходя из следующих соображений. Поскольку дивергенция вектора $\vec{B}$ всегда равна нулю, то вектор $\vec{B}$ можно представить в виде ротора некоторой функции $\vec{A}$, а именно

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Функция $\vec{A}$ – называется **векторным потенциалом** магнитного поля. Необходимость введения векторного потенциала и его рассмотрение выходит за рамки нашего курса.

§ 5.3 Закон Ампера

Если проводник с током помещен в магнитное поле, то согласно формуле (5.1), на каждый носитель тока действует сила. В результате магнитное поле должно действовать с некоторой силой на весь проводник с током. Определим эту силу.

Будем считать, что объемная плотность носителей тока (электроны в металле) в проводнике равна ρ . Тогда в элементе объема dV находится заряд $q = \rho dV$, и на него будет действовать сила (5.1) равная

$$d\vec{F} = q [\vec{\nabla} \vec{B}] = \rho [\vec{\nabla} \vec{B}] dV.$$

Поскольку $\vec{j} = \rho \vec{\nabla}$, то

$$d\vec{F} = [\vec{j} \vec{B}] dV. \quad (5.26)$$

Так как $\vec{j} dV = J d\vec{l}$, то формулу (5.26) можно записать как

$$d\vec{F} = J [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (5.27)$$

Формулы (5.26) и (5.27) выражают закон Ампера. Интегрируя эти выражения по элементам тока (объемным или линейным), можно найти магнитную силу, действующую на весь проводник или его участок. В случае прямого тока, расположенного в магнитном поле, сила Ампера равна

$$F = J B \sin \alpha, \quad (5.28)$$

где α – угол между проводником и полем $\vec{B}$.

Если в магнитное поле помещен замкнутый контур с током, то на него будет действовать момент сил, равный (примем это без доказательства)

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]. \quad (5.29)$$

Если на проводник с током действуют силы Ампера, то под действием этих сил он (проводник) будет перемещаться. При перемещении силы Ампера будут совершать работу.

Рассмотрим контур с током (рисунок 39) в котором участок $a-b$ длиной l может скользить по проводам. Контур помещен в однородное магнитное поле $\vec{B}$, как показано на рисунке. Под действием амперовой силы равной (в данном случае) $F = IlB$ перемычка $a-b$ переместится на расстояние dx . При перемещении амперова сила совершает работу

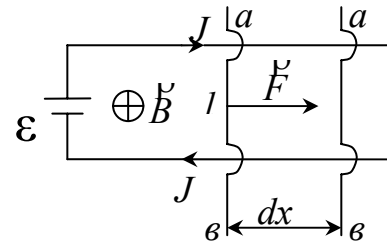


Рисунок 39

$$dA = Fdx = JBldx = JBdS = Jd\Phi, \quad (5.30)$$

где $dS = ldx$ – приращение площади, ограниченной контуром, m^2 ;

$d\Phi$ – приращение магнитного потока через контур при данном перемещении, Вб.

Полученная формула (5.30) является универсальной, то есть она справедлива и в неоднородных полях. Для нахождения полной работы сил Ампера, выражение (5.30) нужно проинтегрировать от начального до конечного положения перемещения, то есть

$$A = \int_1^2 Jd\Phi. \quad (5.31)$$

Если при перемещении поддерживать ток постоянным, то

$$\Phi = J(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (5.32)$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки через контур в начальном и конечном положениях.

Следует отметить, что работа (5.30) совершается не за счет магнитного поля, а за счет источника, поддерживающего ток в контуре.

§ 5.4 Магнитное поле в веществе. Магнетики

Если в магнитное поле, образованное токами в проводах, внести то или иное вещество, то поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является **магнетиком**, то есть способно под действием магнитного поля намагничиваться, и приобретать магнитный момент. Намагниченное

вещество создает свое магнитное поле $\dot{B}'$, которое вместе с исходным полем $\dot{B}_0$, обусловленным токами проводимости, создает результирующее поле

$$\dot{B} = \dot{B}_0 + \dot{B}'. \quad (5.33)$$

Механизм намагничивания заключается в существовании у атомов и молекул собственных магнитных моментов. Каждому магнитному моменту соответствует элементарный ток, создающий в окружающем пространстве магнитное поле. В отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов и молекул ориентированы беспорядочно, поэтому их суммарный момент равен нулю. Если вещество поместить во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля магнитные моменты атомов и молекул приобретают преимущественную ориентацию в направлении внешнего поля – вещество намагничивается. Степень намагниченности магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют **намагниченностью** и обозначают буквой $\dot{J}$. По определению

$$\dot{J} = \frac{1}{V} \sum \dot{p}_m, \quad (5.34)$$

где p_m – магнитный момент отдельного атома или молекулы.

В системе СИ намагниченность измеряется в амперах на метр (А/м). В большинстве случаев, как показывает опыт, $\dot{B}'$ пропорциональна $\dot{B}_0$:

$$\dot{B}' = \chi \dot{B}_0, \quad (5.35)$$

где χ – безразмерная величина, называемая **магнитной восприимчивостью вещества**.

Тогда полная индукция в веществе будет равна

$$\dot{B} = \dot{B}_0 + \dot{B}' = \dot{B}_0 (1 + \chi) = \mu \dot{B}_0,$$

где μ – называется магнитной проницаемостью и является безразмерной величиной.

Таким образом, величина μ показывает во сколько раз увеличивается магнитная индукция $\dot{B}$ при заполнении магнетиком всего пространства, занимаемого полем. Внесение в магнитное поле ограниченных тел (то есть не занимающих весь объем магнитного поля) искажает линии индукции магнитного поля, что существенно усложняет расчеты полей. Для упрощения расчетов (как уже говорилось в разделе 5.2) введем вспомогательный вектор $\dot{H}$ равный

$$\dot{B} = \mu \mu_0 \dot{H}, \quad (5.36)$$

Вектор $\dot{H}$ называют **напряженностью магнитного поля**. Смысл введения вектора $\dot{H}$ состоит в том, что его поле не зависит от вносимого в него (поле) магнетика. Действительно, разделим обе части равенства (5.36) на μ_0 и получим

$$\dot{H} = \dot{H}_0.$$

Это значит, что поле $\dot{H}$ в магнетике не зависит от распределения магнитных моментов атомов и молекул вещества, а определяется только токами проводимости, создающими внешнее поле. При этом расчет магнитных полей существенно упрощается.

В заключении отметим, что в случае однородного магнетика вектор намагниченности связан с напряженностью магнитного поля соотношением

$$\dot{J} = \chi \dot{H}. \quad (5.37)$$

Как уже говорилось χ – безразмерная величина характерная для данного магнетика. Магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной. Соответственно магнетики, подчиняющиеся соотношению (5.37), подразделяются на **парамагнетики** ($\chi > 0$) и **диамагнетики** ($\chi < 0$). У парамагнетиков $\dot{J} \uparrow \uparrow \dot{H}$, у диамагнетиков $\dot{J} \downarrow \uparrow \dot{H}$. И те и другие являются слабомагнитными веществами. Типичными представителями парамагнетиков является платина и различные соли; диамагнетиков – медь, вода, сверхпроводники – для них величина магнитной проницаемости близка к единице. Кроме диамагнетиков и парамагнетиков существуют еще **ферромагнетики**, у которых зависимость $\dot{J}(\dot{H})$ имеет весьма сложный и нелинейный характер. Это приводит к тому, что величина магнитной проницаемости у них велика и может в сотни и тысячи раз быть больше единицы.

Таким образом, для описания магнитных явлений используются два вектора: вектор магнитной индукции $\dot{B}$ и вектор напряженности магнитного поля $\dot{H}$. Между векторами $\dot{B}$, $\dot{H}$ и $\dot{J}$ существует простая связь

$$\dot{B} / \mu_0 - \dot{J} = \dot{H}.$$

Как для вектора $\dot{B}$, так и для вектора $\dot{H}$ справедлива теорема о циркуляции:

$$\oint \dot{B} d\vec{l} = \mu_0 (J + J'),$$

$$\oint \dot{H} d\vec{l} = J,$$

где J и J' – токи проводимости и элементарные токи намагничивания.

В дифференциальной форме эти уравнения имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}'),$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

§ 5.5 Электромагнитная индукция

В 1831 г. М.Фарадеем было сделано одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике – явление **электромагнитной индукции**. Суть явления заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток – его называют **индукционным током**. Опыты Фарадея хорошо известны из школьного курса физики, и мы не будем на них останавливаться. Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$. При этом возникающая ЭДС $\mathcal{E}_i$ совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока Φ , а определяется лишь скоростью его изменения, то есть

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.38)$$

где $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, Вб.

Знак минус в формуле отражает правило Ленца, согласно которому индукционный ток (а значит и ЭДС индукции) всегда направлен так, что своим магнитным полем противодействует причине, его вызывающей. Правило Ленца выражает существенный физический факт – стремление любой системы противодействовать изменению ее состояния (электромагнитная инерция).

Если ЭДС индукции создается в замкнутом проводящем контуре с сопротивлением R , то в нем возникает сила тока, имеющая мгновенное значение

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Полный заряд, протекающий по контуру за все время изменения магнитного потока, равен

$$q = \int_0^t J dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_0}^{\Phi_k} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_0 - \Phi_k).$$

Обратите внимание, что заряд зависит не от скорости изменения магнитного потока, а лишь от величины его изменения.

Теперь рассмотрим физические причины, приводящие к возникновению ЭДС индукции. Для этого запишем более подробно выражение (5.38), то есть

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} \int_S \vec{r} - B \frac{dS}{dt}. \quad (5.39)$$

Из выражения (5.39) следует (как уже говорилось выше), что магнитный поток может изменяться со временем как за счет переменного со временем магнитного поля, так и в однородном поле, за счет изменения со временем площади поверхности контура.

Появление ЭДС индукции за счет второго слагаемого можно трактовать как результат появления силы Лоренца. Действительно, обратимся к опыту, схема которого представлена на рисунке 40. На схеме контур с подвижной перемычкой 1-2 расположен в однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном плоскости рисунка и направленном за плоскость рисунка. Начнем двигать перемычку 1-2 со скоростью $\vec{v}$. С такой же скоростью начнут двигаться и носители тока в перемычке – электроны. В результате на электроны будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F} = -q[\vec{v}\vec{B}]$, электроны начнут перемещаться вниз и по перемычке пойдет ток направленный вверх. Перераспределившиеся заряды создадут электрическое поле, которое вызовет ток и в остальных участках контура. В данном случае магнитная составляющая силы Лоренца играет роль сторонней силы и ей соответствует стороннее поле $\vec{E}^* = \vec{F} / (-q) = [\vec{v}\vec{B}]$. Согласно определению ЭДС (4.9) запишем

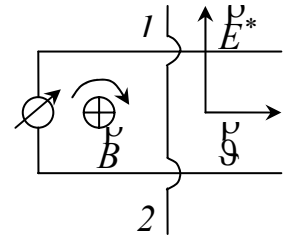


Рисунок 40

$$\mathcal{E}_i = \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{l},$$

что для нашего случая означает

$$\mathcal{E}_i = -vBl. \quad (5.40)$$

Знак минус появился в соответствии с принятым правилом знаков: в соответствии с рисунком 40 правый винт вращается по часовой стрелке, при этом стороннее поле направлено против положительного направления обхода контура. Произведение $v l$ в выражении (5.40) даст приращение площади, ограниченной контуром, в единицу времени, поэтому произведение

$$\mathcal{E}_i = -vBl = -B \frac{dS}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Итак, возбуждение ЭДС индукции при изменении площади поверхности контура в постоянном магнитном поле объясняется действием силы Лоренца.

Вернемся к формуле (5.39), первое слагаемое в ней утверждает, что изменяющее во времени магнитное поле вызывает в неподвижном контуре появление сторонних сил. Очевидно, что это не магнитные силы $\dot{\vec{F}} = [\dot{\vec{v}}\vec{B}]$, так как они не действуют на неподвижные заряды. Остаются только электрические силы. Следовательно мы должны заключить, что появляющийся в контуре индукционный ток обусловлен возникающим в нем электрическим полем $\dot{\vec{E}}$. Однако это поле $\dot{\vec{E}}$ не имеет источников (зарядов) и его силовые линии будут замкнутыми, то есть появившееся электрическое поле будет вихревым. Легко показать, что напряженность этого поля будет равна $\dot{\vec{E}} = [\dot{\vec{v}}\vec{B}]$ и его циркуляция по замкнутому контуру отлична от нуля. Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля независимо от наличия проводящего контура, контур играет лишь роль индикатора, то есть позволяет обнаружить по возникающему в нем индукционному току существование этого электрического поля. В этом состоит **обобщенный закон электромагнитной индукции**. Математически он записывается в виде

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}, \quad (5.41)$$

а в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt},$$

или

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}.$$

Замечание – Итак для объяснения закона электромагнитной индукции пришлось использовать два разных явления: для движущегося контура – силу Лоренца; а для меняющегося во времени поля $d\vec{B}/dt$ – представление о возникающем вихревом электрическом поле. Оба эти явления независимы друг от друга, и тем не менее, ЭДС индукции в контуре всегда равна скорости изменения магнитного потока сквозь контур. В физике это единственный случай, когда бы простой и точный общий закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах двух различных явлений.

Из явления электромагнитной индукции следует, что протекание переменного тока по электрической цепи неизбежно сопровождается индукционными явлениями. Действительно, переменной силе тока соответствует переменный магнитный поток Φ , который пересекает электрическую цепь и вызывает появление ЭДС индукции. Явление появления ЭДС индукции в контуре

при протекании по нему переменного тока получило название – **самоиндукции**.

Из определения потока вектора $\vec{B}$ и закона Био-Савара (5.10) следует, что величина магнитного потока всегда пропорциональна силе тока, то есть

$$\Phi = LJ, \quad (5.42)$$

где L – коэффициент, называемый **индуктивностью** контура, Гн.

Индуктивность L зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств среды внутри контура. Если контур жесткий и в нем нет ферромагнетиков, индуктивность будет величиной постоянной, не зависящей от силы тока в контуре. Единицей индуктивности является **генри** (Гн). Согласно (5.42) индуктивностью 1 Гн обладает контур, магнитный поток которого при токе 1 А равен 1 Вб, то есть $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$, где Вб (вебер) единица измерения магнитного потока в системе СИ.

Таким образом, при изменении силы тока, в контуре возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s$ равная

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (5.43)$$

В формуле (5.43) учтено, что величина $L = \text{const}$, то есть контур жесткий и в нем нет ферромагнетиков. Знак минус в формуле (5.43), как и в формуле (5.38) характеризует правило Ленца, то есть ЭДС самоиндукции стремится сохранить ток в контуре неизменным: она противодействует току, когда он увеличивается; и поддерживает ток, когда он уменьшается. Другими словами, в явлениях самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить магнитный поток постоянным.

§ 5.6 Энергия магнитного поля

Закон Ома, связывающий ЭДС и силу постоянного тока в замкнутом контуре, остается в силе и для мгновенных значений переменных токов и напряжений, если только их изменения происходят не слишком быстро. Это значит, что, если за время $\tau = l/c$ (c – скорость света), необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются **квазистационарными**. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности запишется следующим образом:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

где T – период изменения тока.

Например, ток промышленной частоты ($\nu = 50$ Гц) квазистационарен для цепей длиной до ~ 100 км.

В соответствии с вышеизложенным, в замкнутом контуре произведение силы тока на полное сопротивление цепи будет в каждый момент времени иметь значение

$$JR = \mathcal{E}^* + \mathcal{E}_s = \mathcal{E}^* - L \frac{dJ}{dt}.$$

Найдем элементарную работу, которую совершают сторонние силы (то есть источник $\mathcal{E}^*$) за время dt . Для этого умножим предыдущее равенство на Jdt и получим

$$J^2 R dt = \mathcal{E}^* J dt - L J dJ. \quad (5.44)$$

В этом выражении: величина $J^2 R dt$ представляет собой джоулево тепло, выделившееся в проводнике; величина $\mathcal{E}^* J dt$ представляет собой работу сторонних сил.

Перепишем выражение (5.44) в виде более удобном для анализа, и учтем, что согласно формуле (5.42) $d\Phi = L dJ$, тогда

$$\mathcal{E}^* J dt = J^2 R dt + J d\Phi. \quad (5.45)$$

В этом выражении величина $J d\Phi$ представляет собой работу тока (5.30).

Таким образом, работа источника тока идет на выделение джоулева тепла и дополнительную работу, совершаемую против ЭДС самоиндукции (смотрите правило Ленца). Выражение (5.45) представляет собой закон сохранения энергии из которого следует, что любая работа идет на приращение какого-то вида энергии. В нашем случае часть работы источника идет на увеличение внутренней энергии проводника (выделение джоулева тепла), а другая часть идет на изменение **магнитной энергии тока**. Численное значение магнитной энергии тока можно получить интегрируя выражение для дополнительной работы

$$A = \int J d\Phi = \int L J dJ = \frac{L J^2}{2}. \quad (5.46)$$

Выражение

$$W = \frac{L J^2}{2}. \quad (5.47)$$

определяет магнитную энергию тока или **собственную энергию тока**.

Формулу (5.47) можно (как и в случае электрического поля) выразить непосредственно через магнитную индукцию $\vec{B}$.

Возьмем длинный соленоид, индуктивность которого равна

$$L = \mu\mu_0 \left(\frac{N}{l} \right)^2 V. \quad (5.48)$$

где $\frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины соленоида;

V – объем пространства внутри соленоида.

Подставляя (5.48) в формулу (5.47) для собственной энергии тока, получим

$$W_m = \frac{\mu\mu_0 \left(\frac{N}{l} \right)^2 J^2}{2} V. \quad (5.49)$$

Согласно формуле (5.21), выражение (5.49) перепишем в виде

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} V. \quad (5.50)$$

Формула (5.50) выражает энергию однородного магнитного поля, заполняющего объем V (в нашем случае объем соленоида). В общем случае (при отсутствии ферромагнетиков) энергию магнитного поля можно определить по формуле

$$W = \int \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV, \quad (5.51)$$

где подынтегральное выражение имеет смысл объемной плотности энергии однородного магнитного поля в элементе объема dV , Дж/м³.

Как и в случае электрического поля, мы можем сделать вывод, что магнитная энергия локализована в пространстве, занимаемом магнитным полем.

§ 5.7 Ток смещения

Теория электромагнитного поля, начала которой были заложены М.Фарадеем, математически была завершена Д.Максвеллом. Одной из важнейших идей, выдвинутых Максвеллом, была мысль о необходимости симметрии во взаимосвязи магнитного и электрического полей. То есть, если меняющееся во времени магнитное поле создаёт электрическое поле, следует

ожидать, что и меняющееся во времени электрическое поле создаст магнитное поле.

Сейчас, в наше время, к этой идее можно прийти разными путями, но во времена Максвелла, когда не имелось никаких экспериментальных данных для этой мысли, это была поистине гениальная идея.

Мы будем исходить из следующих рассуждений, что согласно теореме о циркуляции вектора $\dot{H}$ (5.17')

$$\oint \dot{H} d\vec{l} = \int \dot{j} dS.$$

Используем эту теорему к случаю разрядки заряженного конденсатора на внешнее сопротивление (рисунок 41). В качестве контура Γ возьмем кривую, охватывающую провод. На контур Γ натянем две равноправные (согласно теореме) поверхности S и S' . При этом через поверхность S протекает ток, а через поверхность S' нет. Получается, что теорема о циркуляции зависит от выбора поверхности, чего явно не может быть.

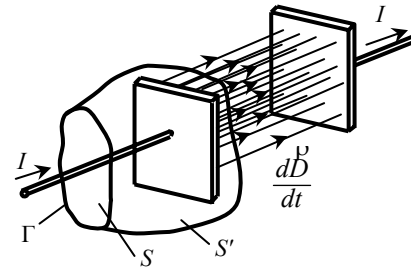


Рисунок 41

В то же время, в процессе разрядки (или зарядки) конденсатора электрическое поле в конденсаторе через поверхность S' будет меняться со временем. По теореме Гаусса $\oint \vec{D} d\vec{S} = q$, откуда изменение поля $\vec{D}$ во времени можно записать в виде:

$$\oint \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}. \quad (5.52)$$

С другой стороны, согласно уравнению непрерывности (4.3)

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (5.53)$$

Из выражений (5.52) и (5.53) следует, что

$$\oint \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S} = 0. \quad (5.54)$$

Из (5.54) видно, что кроме плотности тока проводимости $\vec{j}$, имеется еще слагаемое $d\vec{D}/dt$, имеющее размерность плотности тока. Напомним, что

$|\dot{\vec{D}}| = \sigma$, то есть имеет размерность поверхностной плотности заряда. Максвелл назвал это слагаемое **плотностью тока смещения**:

$$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (5.55)$$

Сумму токов проводимости и токов смещения называют **полным током**.

Введение полного тока устраняет трудность, связанную с зависимостью циркуляции вектора $\vec{H}$ от выбора поверхности, натягиваемой на контур. Для этого достаточно в теореме о циркуляции ввести полный ток, то есть

$$J_{полн} = \int \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}. \quad (5.56)$$

Согласно (5.54) линии полного тока являются непрерывными, то есть замкнутыми сами на себя. Следовательно, электрические цепи по полному току (как и цепи постоянного тока) являются замкнутыми. Таким образом, в отличие от токов проводимости, ток смещения не связан с перемещением или изменением состояния каких-либо частиц, а определяется только быстротой изменения электрического поля.

Замечания:

1 Теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, установленную для постоянного тока, можно обобщить для произвольного случая и записать в виде

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}. \quad (5.57)$$

В таком виде теорему часто называют **законом полного тока**, который справедлив всегда, так как подтверждается во всех без исключения опытах.

2 Следует иметь в виду, что ток смещения эквивалентен току проводимости только в отношении способности создавать магнитное поле.

§ 5.8 Система уравнений Максвелла

С введением токов смещения теория электромагнитного поля была завершена. Обобщив все известные опытные факты и законы электродинамики, Максвелл смог написать систему фундаментальных уравнений электродинамики. Таких уравнений четыре, и в интегральной форме они имеют вид

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}, \quad \oint \vec{D} d\vec{S} = \int \rho dV, \quad (5.58)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \left(\vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}, \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (5.59)$$

Уравнения (5.58) представляют собой обобщенный закон электромагнитной индукции и теорему Гаусса для электростатического поля. Эти уравнения говорят о том, что электрическое поле может возникать по двум причинам: во-первых, его источниками являются заряды (теорема Гаусса); во-вторых, электрическое поле образуется всегда, когда происходит изменение во времени магнитного поля.

Уравнения (5.59) представляют собой закон полного тока и теорему Гаусса для магнитного поля. Эти уравнения утверждают, что магнитное поле является вихревым и образуется только при наличии или электрических токов, или изменяющего во времени электрического поля, или того и другого одновременно. Никаких источников магнитного поля, то есть (по аналогии с электрическим полем) магнитных зарядов в природе не существует.

Из первых уравнений (5.58) и (5.59) следует, что электрические и магнитные нельзя рассматривать как независимые. Имеет смысл лишь их совокупность – **электромагнитное поле**.

Уравнения Максвелла можно представить и в дифференциальной форме, а именно:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (5.60)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5.61)$$

Фундаментальные уравнения Максвелла еще не составляют всей системы уравнений электромагнитного поля. Уравнения Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие свойства среды. Эти соотношения называют **материальными уравнениями**. Для изотропных сред, не содержащих сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, материальные уравнения имеют вид

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{E}^* \right). \quad (5.62)$$

где ϵ , μ , σ – известные постоянные, характеризующие электрические и магнитные свойства среды.

Из уравнений Максвелла можно получить все основные законы электродинамики: закон сохранения заряда, уравнение непрерывности и т.д. Из уравнений Максвелла вытекает, что электромагнитное поле может распространяться в пространстве. Уравнения Максвелла лежат в основе всей электротехники и радиотехники с ее многочисленными разветвлениями (телевидение, радиолокация и т.д.) В известной степени они являются фундаментальными уравнениями классической оптики; так все законы распространения света (переменного электромагнитного поля) в вакууме и прозрачных средах и другие законы поведения света в поглощающих средах могут быть получены из уравнений Максвелла.

В заключение отметим, что уравнения Максвелла, наряду с законами Ньютона и законом всемирного тяготения, являются фундаментальными уравнениями классической физики.

Часть 3 Колебания и волны

Глава 6. Колебания

§ 6.1 Гармонические колебания

Движение, которое повторяется через равные промежутки времени, называется периодическим. Такой промежуток времени называется **периодом** движения. Если величина T – период движения, то в моменты времени t и $t + T$ движущаяся частица имеет одно и то же положение и одну и ту же скорость.

Величина обратная периоду называется **частотой**. Частота, которую обозначают буквой ν , равна

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (6.1)$$

определяет, сколько раз в секунду повторяется движение. Частота имеет размерность 1/с. Единица измерения частоты, соответствующая периоду $T = 1$ с, называется герцем (Гц): $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Очевидно, что существует бесчисленное множество различных видов периодического движения. Простейшими периодическими функциями являются тригонометрические функции синус и косинус. Поэтому простейшим периодическим движением будет движение, при котором координаты материальной точки (смещение точки от положения равновесия) изменяются по закону

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega_0 t + \alpha) \\ \text{и} \\ x &= A \sin(\omega_0 t + \alpha), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где A , ω_0 , α – некоторые постоянные величины.

Такое периодическое движение называется **гармоническим колебательным движением**.

Величины A и ω_0 имеют простой физический смысл. Так как значение косинуса (или синуса) повторяется через угол равный 2π , то период движения T связан с ω_0 соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Отсюда видно, что ω_0 отличается множителем 2π от частоты ν :

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \quad (6.3)$$

Величину ω называют **циклической** (круговой) частотой.

В физике для характеристики колебаний обычно пользуются именно этой величиной (6.3) и часто говорят о ней просто как о частоте.

Так как максимальное значение косинуса (синуса) равно единице, то максимальное значение координаты x в выражении (6.2) равно A . Это максимальное значение называется **амплитудой** колебания. Величина x изменяется в пределах от $-A$ до A .

Аргумент косинуса (синуса) $\omega t + \alpha$ носит название **фазы** колебания, где α – **начальная фаза**.

Для удобства, в дальнейшем гармоническое колебание мы будем описывать через функцию косинуса.

Скорость частицы в гармоническом движении равна

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (6.4)$$

то есть изменяется также по гармоническому закону. Записав выражение (6.4) в виде

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

мы можем сказать, что изменение скорости «опережает по фазе» изменение координаты на величину $\pi/2$. Амплитуда скорости равна $A\omega_0$, то есть произведение амплитуды смещения на частоту ω_0 .

Ускорение частицы в гармоническом движении равно

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (6.5)$$

Из выражения (6.5) видно, что ускорение изменяется по такому же закону, что и координата частицы, но отличается от нее по фазе на π . Сопоставив (6.2) и (6.5), видим, что $a = -\omega_0^2 x$, или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.6)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка называют **уравнением гармонического осциллятора**.

Замечание – В физике, электротехнике вводят обозначение $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$,

$\frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$. В соответствии с этим уравнение (6.6) записывают в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.6')$$

Решением уравнения (6.6) являются выражения (6.2) или их сумма.

Величина силы, действующая на частицу определяется как

$$F = ma = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x. \quad (6.7)$$

Таким образом, для того чтобы частица совершала гармонические колебания, действующая на нее сила должна быть пропорциональна величине смещения частицы и направлена в сторону, противоположную этому смещению. Для примера: сила, действующая на тело со стороны не очень сильно растянутой (или сжатой) пружины, пропорционально ее удлинению (или укорочению) и всегда направлена так, что пружина стремится принять свою первоначальную длину. Такую силу часто называют **восстанавливающей** силой.

Замечание – Пропорциональная зависимость силы от положения частицы встречается в физических задачах очень часто. Если какое-либо тело находится в положении устойчивого равновесия (пусть это будет точка $x = 0$) и мы немного сместим его из этого положения в ту или другую сторону, то возникнет сила F , стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Как функция положения тела сила $F = F(x)$ изобразится некоторой кривой, пересекающей начало координат: в точке $x = 0$ сила $F = 0$, а по обе стороны от этой точки она (сила) имеет противоположные знаки. В небольшом интервале значений x эта кривая может быть приближенно представлена отрезком прямой линии, так что сила будет пропорциональной отклонению x . Таким образом, если тело испытало небольшое отклонение от положения равновесия, после чего было предоставлено самому себе, то при его возвращении в положение равновесия возникнут гармонические колебания.

Движения, при которых тело незначительно смещается относительно положения равновесия, называются **малыми колебаниями**. Малые колебания всегда являются гармоническими колебаниями. Частота этих колебаний определяется жесткостью закрепления тела, характеризующей связь между силой и смещением. Если сила связана со смещением соотношением

$$F = -kx, \quad (6.8)$$

где k – коэффициент упругости, в случае пружины его называют жесткостью, Н/м,

то из сравнения выражений (6.7) и (6.8) следует, что частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.9)$$

Отметим, что частота колебаний зависит только от свойств колеблющейся системы (коэффициента упругости и массы – в случае системы груз-пружина), но не от амплитуды. Это очень важное свойство малых колебаний. Напротив, амплитуда колебаний определяется не свойствами самой системы, а начальными условиями ее движения, т.е. начальным «толчком», выводящим систему из состояния покоя. Колебания системы, возникающие в результате начального толчка, после которого система представлена самой себе, называют **собственными колебаниями**.

Потенциальную энергию Π колеблющейся частицы легко найти из соотношения (1.30)

$$\frac{d\Pi}{dx} = -F = kx.$$

Отсюда

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} + \text{const}.$$

Выбрав постоянную тока, чтобы потенциальная энергия была равна нулю в положении равновесия ($x = 0$), получим

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}, \quad (6.10)$$

то есть потенциальная энергия пропорциональна квадрату смещения частицы.

Складывая потенциальную энергию с кинетической, найдем полную энергию колеблющейся частицы

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t + \alpha),$$

или

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{k^2}{2} A^2. \quad (6.11)$$

Таким образом, полная энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Обратите внимание на то, что кинетическая и потенциальные энергии изменяются как $\sin^2(\omega t + \alpha)$ и $\cos^2(\omega t + \alpha)$, так что когда одна из них увеличивается, другая – уменьшается. Другими словами, процесс колебаний связан с периодическим переходом потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Средние (за период колебания) значения потенциальной и кинетической энергий одинаковы и каждое из них равно $E / 2$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 – Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из тяжелой материальной точки, подвешенной на длинной не-

весомой нерастяжимой нити и колеблющейся под действием силы тяжести (рисунок 42). Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Если маятник отклонен от положения равновесия на небольшой угол φ ($\sim 4^\circ \dots 7^\circ$), то возникает момент силы тяжести M , стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Проекция этого момента на ось Z (ось Z направлена перпендикулярно плоскости чертежа) запишется как

$$M_z = -mgl \sin \varphi.$$

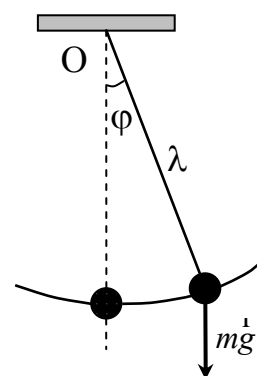


Рисунок 42

Замечание – Угол φ рассматривается в этой задаче как вектор, связанный с направлением поворота правилом правого винта (это допустимо при малых углах φ). Отсюда противоположность знаков при M_z и $\dot{\varphi}$ объясняется тем, что векторы $\dot{M}$ и $\dot{\varphi}$ противоположны.

Тогда уравнение динамики вращательного движения (2.17), в нашем случае, запишется в виде

$$J\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad (6.12)$$

где J – момент инерции математического маятника, относительно оси, проходящей через точку подвеса O , и равный $J = ml^2$.

С учетом того, что при малых φ $\sin \varphi \approx \varphi$, выражение (6.12) перепишем в виде

$$J\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0,$$

или, так как $J = ml^2$,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \quad (6.13)$$

Выражение (6.13) аналогично уравнению (6.6) гармонического осциллятора. Следовательно, решением уравнения (6.13) будет выражение

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = g/l$ – частота собственных колебаний математического маятника.

Таким образом, математический маятник совершает гармонические колебания с частотой ω_0 и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.14)$$

Пример 2 – Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс C тела (рисунок 43). Маятник совершает свободные колебания под действием силы тяжести. Проекция момента силы тяжести на ось Z равна $M_z = -mga \sin \varphi$. Повторяя рассуждения сделанные для математического маятника, запишем уравнение движения в виде

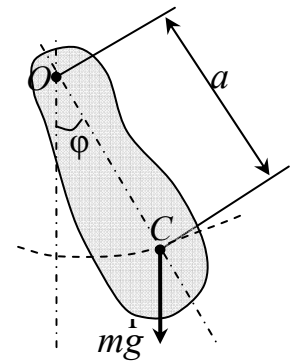


Рисунок 43

$$J \ddot{\varphi} + mga \varphi = 0, \quad (6.15)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J} \varphi = 0. \quad (6.16)$$

Полученное выражение аналогично уравнению (6.6) гармонического осциллятора. Следовательно, колебания физического маятника будут гармоническими с частотой ω_0 и периодом T равными

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (6.17)$$

Величина $l_{np} = \frac{J}{ma}$ – называется **приведенной длиной физического маятника**. Сравнивая формулы (6.14) и (6.17), видим, что если приведенная длина физического маятника равна длине математического маятника, то их периоды колебаний будут совпадать. Следовательно, **приведенная длина физического маятника** – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебания данного физического маятника.

Отметим, что, если решать уравнение движения маятника (6.12), то период колебания математического (или физического) маятника будет зависеть от амплитуды φ_0 :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + K \right].$$

Изменение значения T при увеличении φ_0 до 15° не превосходит 0,5%.

Иногда для описания колебаний системы удобнее воспользоваться не основными уравнениями динамики, а законом сохранения энергии.

Пример 3 – Рассмотрим идеальный колебательный контур, состоящий из конденсатора C и катушки индуктивности L (рисунок 44). При замыкании

на катушку индуктивности предварительно заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда и тока. Энергия этого контура складывается в каждый момент времени из электрической энергии поля, сосредоточенного между обкладками конденсатора, и энергии магнитного поля, сосредоточенного главным образом внутри катушки индуктивности. Потерями энергии на джоулево тепло мы будем пренебрегать, т.к. контур идеальный. В этом случае закон сохранения энергии требует выполнения равенства

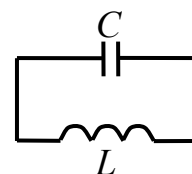


Рисунок 44

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L J^2 = \text{const}. \quad (6.18)$$

Отсюда, скорость изменения энергии

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q}{C} \dot{q} + L J \dot{J} = 0. \quad (6.19)$$

Учитывая, что $\dot{q} = J$, и $\dot{J} = \ddot{q}$, выражение (6.19) перепишем в виде

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

или

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) аналогично (по форме записи) уравнению (6.6), т.е. описывает колебания гармонического осциллятора. Его решением будет выражение

$$q = q_0 \cos \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$.

Соответственно, ток будет совершать колебания по закону

$$J = \dot{q} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = J_0 \cos(\omega_0 t + \pi / 2).$$

Таким образом колебания заряда (на обкладках конденсатора) и тока (в катушке индуктивности) происходят по гармоническому закону, но со сдвигом по фазе на $\pi / 2$.

§ 6.2 Затухающие колебания

В любой реальной колебательной системе есть силы сопротивления (трения), действие которых приводит к уменьшению амплитуды колебаний. Рассмотрим случай, когда сила сопротивления пропорциональна скорости (1.23). Это, кстати, чаще всего встречающийся случай. Таким образом, на тело действуют квазиупругая сила (это сила по своему действию аналогичная упругой силе, т.е. пропорциональна смещению) и сила сопротивления $F = -\alpha \dot{x}$. Уравнение движения в этом случае запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}, \quad (6.21)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.22)$$

где $\beta = \alpha / 2m$, $\omega_0^2 = k / m$.

Уравнение (6.22) описывает затухающие колебания, при условии $\beta < \omega_0$. Его решение имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (6.23)$$

где

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (6.24)$$

На рисунке 45 представлен график зависимости смещения от времени при затухающих колебаниях.

Частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (6.25)$$

Степень убывания амплитуды определяется величиной β , которую называют **коэффициентом затухания**. За время в $\tau = 1/\beta$ амплитуда уменьшается в e раз. Это время называют **временем релаксации** колебаний. Мы считаем, что сопротивление незначительно, т.е. величина β маленькая. Из этого вытекает, что время τ много больше периода колебаний $T = 2\pi/\omega$, и за время релаксации произойдет большое число колебаний $n = \tau/T$. Величину обратную n называют **логарифмическим декрементом** затухания

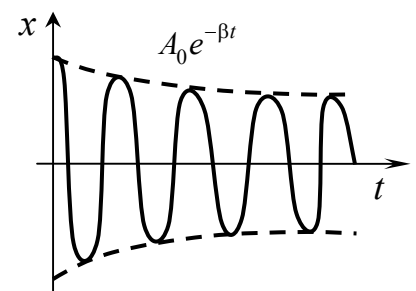


Рисунок 45

$$\lambda = \beta T. \quad (6.26)$$

Из формулы (6.25) видно, что сопротивление влияет и на частоту колебаний. Замедляя движение, оно уменьшает частоту колебаний. Однако при малом коэффициенте затухания, в течении времени релаксации, этим изменением можно пренебречь, что мы и сделали, считая затухающие колебания гармоническими. При большом затухании ($\omega_0 < \beta$) замедление движения произойдет без колебаний, как говорят **апериодически**.

Замечание – Интересен случай $\omega_0 = \beta$, когда колебания находятся на грани апериодичности. В этом случае колебательная система быстрее всего успокаивается. Отсюда находят величину критического сопротивления для амортизаторов.

§ 6.3 Вынужденные колебания. Резонанс

Свободные колебания реальной системы являются затухающими из-за действия в ней (системе) сил сопротивления (трения). Чтобы возбудить в системе незатухающие колебания необходимо компенсировать силы сопротивления. Такую компенсацию можно осуществить за счет внешней силы F , изменяющейся, в простейшем и наиболее важном случае, по гармоническому закону $F = F_0 \cos \omega t$. Возникающие при этом колебания называют **вынужденными** колебаниями. В этом случае основное уравнение динамики примет вид

$$m\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.27)$$

Рассмотрим это движение с физической точки зрения, считая начальным моментом состояния покоя. В начальный момент времени работа внешней силы больше энергии, которая расходуется на трение (например при раскачивании качелей). При этом кинетическая энергия и амплитуда колебаний системы будут возрастать (рисунок 46) до тех пор, пока вся сообщаемая внешней силой энергия не будет расходоваться на преодоление трения. С этого момента устанавливается равновесие, при котором сумма кинетической и потенциальной энергий оказывается постоянной. Это условие характеризует **стационарное состояние** системы. Таким образом, движение системы будет происходить по гармоническому закону с частотой, равной частоте вынуждающей силы, но вследствие инерции системы её колебания будут отставать по фазе по отношению к мгновенному значению внешней периодической силы:

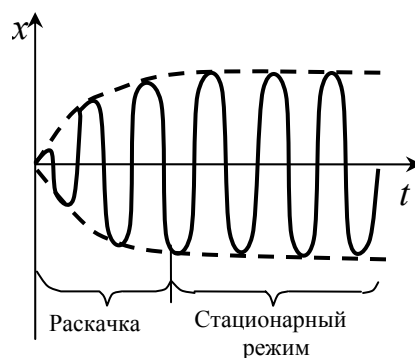


Рисунок 46

$$x = B \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.28)$$

Соответственно скорость и ускорение запишутся как

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega B \sin(\omega t - \alpha), \\ a &= -\omega^2 B \cos(\omega t - \alpha). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Для того, чтобы найти амплитуду B и фазовый сдвиг α , подставим выражения (6.28) и (6.29) в уравнение (6.27)

$$-\omega^2 B \cos(\omega t - \alpha) - 2\beta\omega \sin(\omega t - \alpha) + \omega_0^2 B \cos(\omega t - \alpha) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.30)$$

Положим, что

$$\frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t - \alpha + \alpha) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t - \alpha) \cos \alpha - \frac{F_0}{m} \sin(\omega t - \alpha) \sin \alpha. \quad (6.31)$$

Сравнивая выражения (6.30) и (6.31) видим, что они будут равны, если равны коэффициенты, стоящие, соответственно, перед членами, содержащими $\cos(\omega t - \alpha)$ и $\sin(\omega t - \alpha)$, то есть

$$-B\omega^2 + \omega_0^2 B = \frac{F_0}{m} \cos \alpha, \quad (6.32)$$

и

$$-2\beta\omega B = -\frac{F_0}{m} \sin \alpha.$$

После простых преобразований выражений (6.32), получим, что

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (6.33)$$

и

$$\tan \alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.34)$$

Из полученных выражений видно, что амплитуда колебаний и отставание смещения по фазе от вынуждающей силы определяются свойствами самого осциллятора и вынуждающей силой, но не начальными условиями.

Из выражения (6.33) видно, что амплитуда колебания проходит через максимум, когда частота вынужденных колебаний совпадает с частотой соб-

ственных колебаний системы ($\omega = \omega_0$). Это явление называют **резонансом**. Максимальное значение амплитуды равно

$$B_{\max} = \frac{F_0}{2m\omega_0\beta} . \quad (6.35)$$

На рисунке 47 представлены резонансные кривые для разных значений β . Несовпадение на графике резонансной частоты с собственной частотой объясняется зависимостью резонансной частоты от коэффициента затухания, а именно

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (6.36)$$

Величина $B_{\text{ст}} = F_0 / m\omega_0^2$ – это статическая амплитуда, она получается из формулы (6.33) при $\omega = 0$.

Интересно сравнить $B_{\max}$ при резонансе со статическим смещением под действием постоянной силы F_0 . Возьмем отношение резонансного смещения к статическому

$$\frac{B_{\max}}{B_{\text{ст}}} = \frac{\omega_0}{2\beta} . \quad (6.37)$$

Из выражения (6.37) видно, что для систем с малым затуханием это отношение может быть очень большим. Это обстоятельство объясняет огромное значение явления резонанса в физике и технике. Им широко пользуются, если хотят усилить колебания, и всячески избегают, если резонанс может привести к нежелательному росту колебаний.

Замечание – Происхождение резонансного усиления колебаний легко понять, если обратить внимание на соотношение между фазой вынуждающей силы $F_{\text{вн}}$ и фазой скорости $\dot{x}$. При $\omega \neq \omega_0$ между ними существует некоторый сдвиг по фазе α . Поэтому в течении некоторой доли периода сила $F_{\text{вн}}$ не совпадает по направлению со скоростью, т.е. будет стремиться как бы замедлить движение, вместо того, чтобы ускорять его. При резонансе ($\omega = \omega_0$) сдвиг по фазе $\alpha = \pi/2$ (что следует из выражения 6.34), при этом фазы внешней силы и скорости (смотри выражения для внешней силы и скорости) совпадают, при этом сила всегда действует в направлении движения, постоянно усиливая его. Да и сама амплитуда скорости равная $B\omega$ при резонансе имеет максимум. Для анализа резонансных кривых, представленных на рисунке 47, преобразуем формулу (6.33). Вблизи резонанса

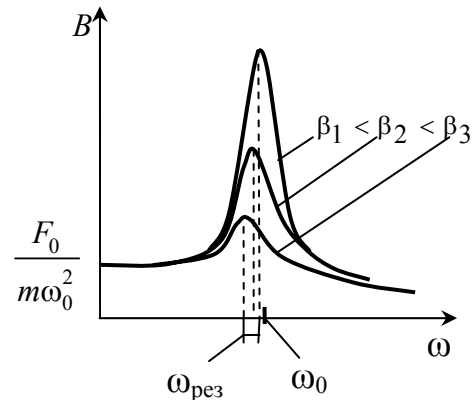


Рисунок 47

разность $|\omega_0 - \omega|$ мала по сравнению с самой резонансной частотой $\omega = \omega_0$. Тогда в знаменателе формулы (6.33) написав $(\omega_0^2 - \omega^2) = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)$, мы можем заменить сумму $\omega = \omega_0$ на $2\omega_0$, а также заменить ω на ω_0 в члене $4\beta^2\omega_0^2$. В результате получим

$$B = \frac{F_0}{2m\omega_0 \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}}.$$

Эту формулу, с учетом выражения (6.35), перепишем в виде

$$B = \frac{B_{\max}\beta}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}}. \quad (6.38)$$

На рисунке 48 изображены отвечающие этой формуле резонансные кривые.

До тех пор, пока абсолютная величина разности $\omega - \omega_0$ мала по сравнению с β , т.е. $|\omega_0 - \omega| \ll \beta$, амплитуда B мало отличается от своего максимального значения. Существенное уменьшение амплитуды наступает при $|\omega_0 - \omega| \sim \beta$. На этом основании говорят, что «ширина» резонансной кривой порядка величины β . Высота же максимума (при заданном F_0) обратно пропорциональна β . Поэтому чем меньше затухание, тем острее резонансный максимум, т.е. тем выше и уже резонансная кривая.

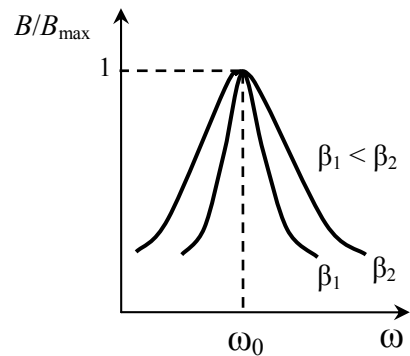


Рисунок 48

Глава 7 Уравнение волны, волновое движение

§ 7.1 Математическое описание незатухающей волны

Волну можно определить как колебание, распространяющееся в пространстве от точки к точке. Следовательно, колебание точек среды является функцией пространственных координат и времени: $\xi = \xi(x, y, z, t)$. Один из самых простых способов демонстрации волнового движения – взять свободный конец длинной веревки, второй конец которой закреплен, и дернуть его вверх и вниз. Вдоль веревки побегут «горбы» и «впадины» волн, и, если бы веревка была бесконечно длинной, такие волны можно назвать **бегущими волнами** – так называются волны, распространяющиеся в неограниченной

среде, где нет отражения (рисунок 49). Для простоты совместим растянутый шнур с осью X , тогда распространение колебания вдоль оси X опишется функцией $\xi(x, t)$. На рисунке 49 изображено колебание ξ как функция x в момент времени $t = 0$ и t . В момент времени $t = 0$ имеем $\xi(x, 0) \equiv f(x')$ (функция дана, если известен ее вид). Если колебание распространяется со скоростью ϑ , то $x' = x - \vartheta t$. Сравнивая соответствующие смещения колеблющихся точек видим, что $\xi(x, t) = f(x') = f(x - \vartheta t)$. Таким образом, колебание, распространяющееся в положительном направлении оси X , определяется выражением

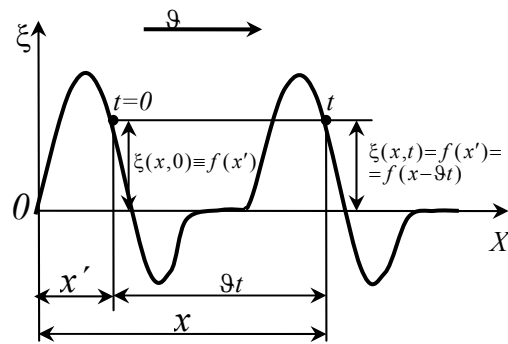


Рисунок 49

$$\xi(x, t) = f(x - \vartheta t), \quad (7.1)$$

которое называют **уравнением волны**.

Понятно, что если колебание распространяется в отрицательном направлении оси X , то уравнение волны запишется как

$$\xi(x, t) = f(x + \vartheta t). \quad (7.1')$$

Преобразуем выражение (7.1) следующим образом:

$$\xi(x, t) = f(x - \vartheta t) = f\left[-\vartheta\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)\right] = F\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right).$$

Мы получим другое математическое выражение,

$$\xi(x, t) = F\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right), \quad (7.2)$$

эквивалентное выражению (7.1).

Таким образом, любая функция от аргумента $(x - \vartheta t)$ или $\left(t - \frac{x}{\vartheta}\right)$ выражает распространение колебания со скоростью ϑ .

Замечание – В первой записи (7.1) величина ϑt представляет собой расстояние. Таким образом, для того чтобы два наблюдателя, измеряя смещение в момент времени, соответственно равные $t = 0$ и t (рисунок 49), получили бы одинаковые значения функции смещения ξ необходимо, чтобы они находились на расстоянии ϑt друг от друга. Во втором случае (7.2) величина x / ϑ представляет собой время. Следовательно, до второго наблю-

дателя, измеряющего смещение ξ в точке x , смещение с тем же значением $\xi(x, 0)$ дойдет с опозданием на время равное x / v .

Величина $\varphi = (x - vt)$ – называется **фазой** волны. Поверхность волны, во всех точках которой колебания имеют одинаковую фазу называют **волновой поверхностью**.

По своей природе колебание может быть упругим (изменение давления в упругой среде), электрическим (тогда ξ представляет собой электрическую составляющую электромагнитного поля), или любой другой физической величиной.

§ 7.2 Гармонические волны

Существует, очевидно, бесчисленное множество периодических волн. Особую роль среди них играет **гармоническая волна**. Уравнение гармонической волны имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= A \cos \omega(t - x / v), \\ \text{или} \\ f(x, t) &= A \sin \omega(t - x / v), \end{aligned} \tag{7.3}$$

где A – амплитуда колебания;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая (круговая) частота колебания.

Эта волна, как видно из формул (7.3), периодична во времени и пространстве, поскольку сама функция $f(x, t)$ периодична и ее период равен 2π . Из периодичности функции во времени $\omega \Delta t = 2\pi$ находим, что $\Delta t = 2\pi / \omega$. Этот промежуток времени называют **периодом колебания**:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{7.4}$$

Из периодичности функции в пространстве $\omega \Delta x / v = 2\pi$ находим, с учетом (7.4), что $\Delta x = 2\pi v / \omega = vT$. Расстояние Δx называют **длиной волны** и обозначают буквой λ . Таким образом, длина волны – это расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебания T :

$$\lambda = vT. \tag{7.5}$$

Обычно уравнения гармонической волны записывают в более удобном и простом виде. Для этого в выражениях (7.3) внесем ω в скобки и получим

$$\omega t - \omega x / \vartheta = \omega t - kx,$$

где $k = \omega / \vartheta = 2\pi / T\vartheta = 2\pi / \lambda$.

Величину $k = 2\pi/\lambda$ называют **волновым числом**. С учетом сказанного выражения (7.3) перепишем в виде

$$f(x, t) = A \cos(\omega t - kx),$$

или

$$f(x, t) = A \sin(\omega t - kx).$$

(7.6)

Скорость ϑ , входящая в выражения фазы в формулах (7.1), (7.2) и (7.3), называется фазовой скоростью. Она характеризует скорость, с которой перемещается определенное значение фазы волны. Сама фаза, как известно, характеризует состояние движения частиц среды при прохождении волны. Следовательно, состояние частиц при прохождении волны будет одинаковым если они колеблются в одной фазе, т.е.

$$\varphi = x - \vartheta t = \text{const}.$$

Дифференцируя это выражение получим, что

$$\vartheta = \frac{dx}{dt}.$$

(7.7)

В самом общем случае волновым движением может быть охвачена область трехмерного пространства. Геометрическое место точек, до которых в данный момент времени дошла волна называется **волновым фронтом**. За направление распространения волны в пространстве принимают нормаль к волновому фронту. Направление нормали к волновому фронту часто называют **лучами**. Если среда однородна и изотропна и волна излучается в какой-либо точке среды (например, взрыв мины), то волновой фронт ее будет сферическим. **Сферическими волнами** называют волны, поверхности одинаковой фазы которых представляют собой сферы. Если излучатель волны имеет вид линии (взрыв тонкой проволочки), то возникает **цилиндрическая волна**, распространяющаяся по радиусам цилиндра. Вдали от источника излучения небольшой участок сферической (цилиндрической) волны практически является плоским. В этом случае рассматриваемая часть волны называется **плоской волной**. Ее математическое описание наиболее просто и совпадает с описанием одномерной волны. Разные волновые поверхности представлены на рисунке 50. Уравнения указанных выше волн запишутся в виде:

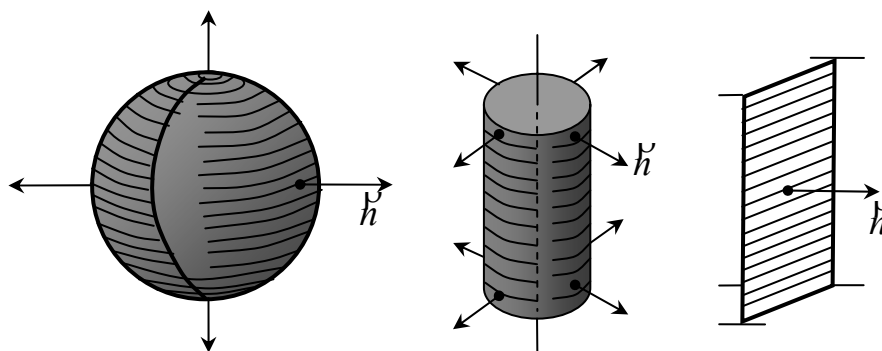


Рисунок 50

сферическая волна

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr);$$

цилиндрическая волна

$$\xi(r, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr); \quad (7.8)$$

плоская волна

$$\xi(r, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\mathbf{r}}{k}\right).$$

Замечания

1 Если плоская волна распространяется в произвольном направлении, характеризуемом единичным вектором $\mathbf{n}$ (рисунок 51), то $\xi(x, y, z, t) = \xi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{n}\mathbf{r} - \vartheta t)$, где $OP = \mathbf{n}\mathbf{r}$ играет роль смещения в выражении (7.1), поэтому фаза $(x - \vartheta t)$ записывается в виде $(\mathbf{n}\mathbf{r} - \vartheta t)$. Для гармонической волны (7.3) $\cos \omega(t - \mathbf{n}\mathbf{r} / \vartheta) = \cos(\omega t - \mathbf{r}\mathbf{n}\omega / \vartheta)$.

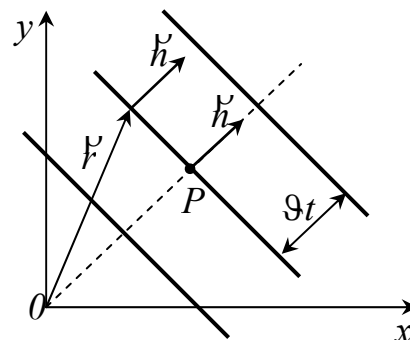


Рисунок 51

$$\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos\left(\omega t - \frac{\mathbf{r}}{k}\right), \quad (7.9)$$

где $\mathbf{k}$ — **волновой вектор** равный

$$\mathbf{k} = \left(\frac{\omega}{\vartheta}\right) \mathbf{n} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \mathbf{n}. \quad (7.10)$$

2 В уравнениях для сферической и цилиндрической волн, мы вместо волнового вектора $\mathbf{k}$ поставили волновое число k , потому что для этих волн направление распространения волны совпадает с направлением $\mathbf{k}$.

§ 7.3 Поток энергии

Волновое движение переносит энергию из одного места пространства в другое. При этом все точки среды, участвующие в передаче энергии, колеблются около своих положений равновесия, а в направлении движения волны не смещаются. Чтобы привести точки среды в колебательное движение при распространении волны, необходимо совершить работу. Эта работа совершается за счет энергии, которая передается волной по мере ее продвижения от точки к точке. Другими словами, при распространении волны точки среды передают энергию друг другу. Сравнительно легко можно показать, что для гармонической волны $f(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ объемная плотность энергии, то есть энергия отнесенная к единице объема будет равна

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad (7.11)$$

где ρ – плотность, то есть масса единицы объема, кг/м^3 .

На практике нас обычно интересует среднее за период колебание (или за время много большее периода колебаний) значение плотности энергии. Усредняя выражение (7.11) получим

$$\langle w \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, \quad (7.12)$$

поскольку среднее значение квадрата синуса равно $1/2$. Эта энергия распространяется в среде со скоростью ϑ .

Так как энергия перемещается в среде вместе с колебанием, вводят понятие **потока энергии** Φ . Поток энергии Φ – это количество энергии переносимое волной через некоторую поверхность за единицу времени

$$\Phi = \frac{dW}{dt}, \quad (7.13)$$

где dW – энергия переносимая волной за время dt .

Как видно из соотношения (7.13) поток энергии измеряется в ваттах (Вт), то есть совпадает с размерностью мощности. Поток энергии в разных точках среды обладает различной интенсивностью. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится векторная величина, называемая **плотностью потока энергии** $\vec{j}$. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия, т.е. $j = d\Phi / dS_{\perp}$. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии. Можно показать, что

$$\overset{1}{j} = w\overset{1}{\mathfrak{G}}, \quad (7.14)$$

где $\overset{1}{\mathfrak{G}}$ – вектор, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны (и переноса энергии).

Вектор плотности потока энергии $\overset{1}{j}$ был впервые введен русским физиком Н.А.Умовым, поэтому его часто называют **вектором Умова**.

***Замечание** – В оптике, акустике, фотометрии и т.д. часто используют понятие **интенсивности волны**. Под интенсивностью волны в данной точке понимают среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной. С использованием формул (7.12) и (7.14) выражение для интенсивности волны запишется в виде*

$$J = \langle \overset{r}{j} \rangle = \langle w \rangle \overset{r}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \overset{r}{\mathfrak{G}}. \quad (7.15)$$

Зная вектор Умова во всех точках интересующей нас поверхности S , можно найти полный поток энергии через эту поверхность как

$$\Phi = \int_{(S)} \overset{1}{j} d\overset{1}{S}. \quad (7.16)$$

Если оставить без внимания потери энергии, происходящие при движении плоской волны, то можно утверждать необходимость равенства потока энергии, проходящего через последовательные положения поверхностей равной фазы. Поэтому интенсивность плоской волны не будет меняться в процессе ее распространения. В случае сферической волны поверхность равной фазы увеличивается пропорционально квадрату расстояния, а в случае цилиндрической волны – пропорционально первой степени расстояния. Следовательно, интенсивность сферической волны будет изменяться обратно пропорционально квадрату расстояния, а в случае цилиндрической волны – обратно пропорционально первой степени расстояния, т.к. только в этом случае будет выполняться закон сохранения энергии.

В заключении отметим, что если среда обладает заметным поглощением, то интенсивность ее будет уменьшаться в соответствии с экспоненциальным законом

$$J = J_0 e^{-\mu x}, \quad (7.17)$$

где μ – коэффициент поглощения, м^{-1} .

§ 7.4 Волновое уравнение

При распространении волны в однородной среде со слабым затуханием ее параметры могут меняться от точки к точке и зависеть от времени. Как и в механике, в области волновых процессов существует уравнения, являющиеся обобщенным выражением волн, независимо от их конкретного вида. Это дифференциальные уравнения в частных производных, связывающие изменения функций, характеризующих волну, во времени и пространстве. Запишем это уравнение для волн типа $\xi = F(t - x / \vartheta)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (7.18)$$

Уравнение (7.18) – это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Ему удовлетворяют как уравнения вида (7.2), так и общее решение

$$\xi = F_1(t - x / \vartheta) + F_2(t + x / \vartheta), \quad (7.19)$$

где F_1 и F_2 – произвольные функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположных направлениях оси X .

Обобщение уравнения (7.18) на трехмерный случай приводит к волновому уравнению вида

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (7.20)$$

Волновые уравнения (7.18) и (7.20) играют важную роль в теории волновых процессов. В частности, если, исходя из законов механики или электродинамики при изучении какого либо явления, мы приходим к уравнению вида (7.20), то сразу можем утверждать, что имеем дело с волновым процессом, скорость распространения ϑ которого легко определить из сопоставления полученного уравнения с уравнением (7.20). Если мы рассматриваем гармоническую волну типа (7.3), то уравнение (7.20) запишется как

$$\nabla^2 \xi + k^2 \xi = 0, \quad (7.21)$$

где k – волновое число.

Вывод уравнения (7.21) предлагаем проделать самостоятельно. Уравнение (7.21) также называют волновым уравнением. Именно оно представляет наибольший интерес при решении многих физических задач, т.к. дает только гармоническое решение.

Замечание – Любую периодическую волну, представляющую интерес в физике и технике, всегда можно представить в виде суммы конечного (или бесконечного) числа гармонических процессов с частотами ω , 2ω , 3ω и так далее. Эта сумма называется рядом Фурье, по имени французского математика Ш.Фурье. Следовательно, изучив закономерности, связанные с движением плоской гармонической волны, мы можем обобщить их (с некоторыми оговорками) на волны сложной формы.

§ 7.5 Электромагнитные волны

Из уравнений Максвелла (5.58 ÷ 5.61) вытекает важный вывод о существовании электромагнитных волн, которые распространяются в вакууме со скоростью c – равной скорости света. Докажем это. Напишем уравнения Максвелла для однородной нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($j = 0$) среды с постоянными электрической ϵ и магнитной μ проницаемостями. В этом случае

$$\dot{D} = \epsilon\epsilon_0 \dot{E}, \quad \dot{B} = \mu\mu_0 \dot{H}. \quad (7.22)$$

и

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial t} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \dot{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \dot{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \dot{H}}{\partial t}.$$

С учетом этих условий уравнения Максвелла (5.60) и (5.61) примут вид:

$$\text{rot } \overset{\text{r}}{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \dot{H}}{\partial t}, \quad (7.23)$$

$$\text{rot } \overset{\text{r}}{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \dot{E}}{\partial t}, \quad (7.24)$$

$$\text{div } \dot{E} = 0, \quad (7.25)$$

$$\text{div } \dot{H} = 0. \quad (7.26)$$

Продифференцируем выражение (7.23) по времени и учтем, что запись $\text{rot } \dot{E}$ и $\nabla \times \dot{E}$ – тождественны, тогда

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \overset{\text{r}}{E}) = \nabla \times \frac{\partial \dot{E}}{\partial t}. \quad (7.27)$$

Подставим в (7.27) выражение (7.24) и получим

$$-\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}}{\partial t^2} = \nabla \times (\nabla \times \dot{\vec{H}}). \quad (7.28)$$

Двойное векторное произведение расписывается как

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\vec{H}}) = \nabla (\nabla \cdot \dot{\vec{H}}) - (\nabla \cdot \nabla) \dot{\vec{H}} = -\nabla^2 \dot{\vec{H}}, \quad (7.29)$$

так как согласно (7.26) $\nabla \cdot \dot{\vec{H}} \equiv \text{div } \dot{\vec{H}} = 0$. Подставив (7.29) в (7.28) мы приходим к волновому уравнению вида (7.20) для вектора $\dot{\vec{H}}$:

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}}{\partial t^2}.$$

Аналогично получается уравнение и для вектора $\dot{\vec{E}}$.

Таким образом, мы приходим к идентичным волновым уравнениям для векторов $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{\vec{E}} &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \dot{\vec{H}} &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \dot{\vec{H}}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Заметим, что уравнения (7.30) неразрывно связаны друг с другом, так как они получены из уравнений (7.23) и (7.24), каждое из которых содержит $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$.

Любая функция, удовлетворяющая уравнениям (7.30), описывает некоторую волну, причем коэффициент перед второй производной по времени, есть величина обратная квадрату скорости $\mathfrak{V}$ распространения волны. Таким образом, уравнения (7.30) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (7.31)$$

Для вакуума ($\varepsilon = \mu = 1$) по этой формуле получается

$$\mathfrak{V} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, в вакууме фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света. Это и дало основание Максвеллу предположить задолго до экспериментального подтверждения, что свет представляет собой электромагнитные волны.

§ 7.6 Плоская электромагнитная волна

Установим основные свойства электромагнитных волн на примере плоской волны, то есть будем считать, что решением уравнений (7.30) являются волны типа:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right), \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right).\end{aligned}\tag{7.32}$$

В электромагнитной волне, как это следует из уравнений Максвелла, обязательно присутствуют оба вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Причем, как вытекает из уравнений (7.25) и (7.26), электромагнитные волны **поперечны**. Поперечность означает, что в волне колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ происходят перпендикулярно волновому вектору $\vec{k}$ распространения волны, т.е.

$$\left(\vec{k} \cdot \vec{E}\right) = \left(\vec{k} \cdot \vec{H}\right) = 0.\tag{7.33}$$

Кроме того, из уравнений (7.23), (7.24) и соотношения (7.10) вытекает, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны не только вектору $\vec{k}$ (поперечность), но и друг другу, то есть

$$\left(\vec{E} \cdot \vec{H}\right) = 0.\tag{7.34}$$

Замечание – Доказательство соотношений (7.33) и (7.34) предлагаем провести самостоятельно, путем прямой подстановки уравнений (7.32) в соответствующие уравнения Максвелла.

В дальнейшем изложении будем считать, что волна распространяется в направлении оси X , а вектора $\vec{E}$ и $\vec{H}$, направлены, соответственно вдоль осей Y и Z . С учетом этого в соотношениях (7.32) знак вектора можно не писать. Поэтому уравнения плоской бегущей гармонической волны записывают как

$$\begin{aligned}E &= E_0 \cos(\omega t - kx), \\ H &= H_0 \cos(\omega t - kx).\end{aligned}\tag{7.35}$$

Такую волну называют – **монохроматической волной**. На рисунке 52 показаны направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и сама плоская гармоническая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси X . Из уравнений Максвелла и волновых уравнений (7.30) следует, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в одинаковой фазе. Между мгновенными значениями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ существует связь (параграф 5.5) $\vec{E} = \left[\frac{1}{\epsilon} \nabla \vec{B} \right]$, или с учетом (7.31) и (5.62)

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H. \quad (7.36)$$

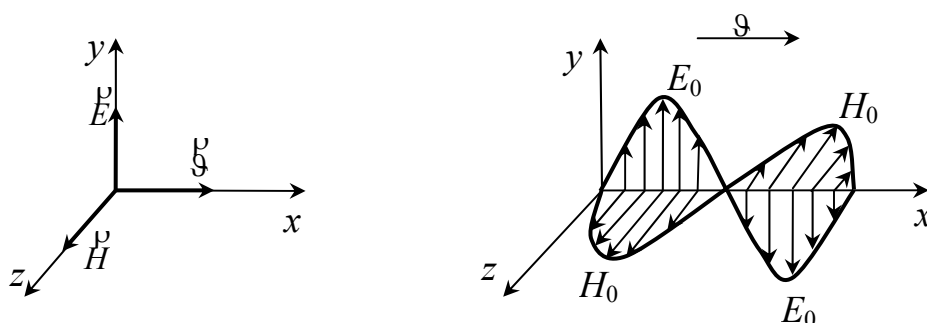


Рисунок 52

Последнее соотношение означает, что величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (или B) одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль, то есть колеблются в одинаковой фазе.

§ 7.7 Энергия электромагнитной волны. Поток энергии

Как и всякая волна, электромагнитная волна переносит энергию. Плотность потока энергии можно найти с помощью формулы (7.14). Формально можно считать, что энергия в электромагнитной волне равна сумме энергий электрического и магнитного полей, так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке пространства колеблются в одной фазе.

Замечание – Сказанное справедливо только для непроводящей среды. В проводящей среде фазы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не совпадают.

Из сказанного следует, что электромагнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (7.37)$$

Поскольку векторы $\dot{E}$ и $\dot{H}$ колеблются в одинаковой фазе, то для них справедливо соотношение (7.36). Поэтому плотности энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинаковы: $w_E = w_H$. Следовательно можно написать, что

$$w = 2w_E = \varepsilon\varepsilon_0 E^2. \quad (7.38)$$

С учетом выражения (7.36) формуле (7.38) можно придать другой вид:

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{1}{\vartheta} EH. \quad (7.39)$$

Умножив найденное выражение для w на скорость волны ϑ , получим, согласно формуле (6.14), модуль вектора плотности потока энергии

$$\Pi = w\vartheta = EH. \quad (7.40)$$

Векторы $\dot{E}$ и $\dot{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Следовательно, вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить в виде

$$\dot{\Pi} = \left[\dot{E} \dot{H} \right], \quad (7.41)$$

Вектор $\dot{\Pi}$ получил название вектора Пойтинга.

Замечание – В случае бегущей гармонической электромагнитной волны, как следует из соотношений (7.39) и (7.40)

$$\Pi = w\vartheta = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx), \quad (7.42)$$

где учтено, что скорость ϑ определяется соотношением (7.31).

Интенсивность J такой волны равна, по определению, среднему значению плотности потока энергии: $J = \langle \Pi \rangle$. Тогда, усредняя выражение (7.42) по времени, получим

$$J = \langle \Pi \rangle = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_0^2 / 2. \quad (7.43)$$

Замечание – Под интенсивностью света, т.е. рассматриваемых в оптике электромагнитных волн, понимают просто квадрат амплитуды колебаний напряженности $\dot{E}$ поля световой волны.

Исходя из закона сохранения энергии, мы должны заключить, что если в какой-то определенной области пространства энергия уменьшается, то это может происходить только за счет ее «вытекания» через границы рассматриваемой области (среда считается неподвижной). Используя уравнения

Максвелла можно строго доказать теорему Пойтинга для убыли электромагнитной энергии внутри некоторого объема пространства:

$$-\frac{dW}{dt} = (A - Q) + \oint \vec{P} d\vec{S}. \quad (7.44)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (7.44), есть поток вектора $\vec{P}$. Так как при удалении от источников поля величины напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ убывают достаточно быстро, то поток вектора Пойтинга обращается в нуль, если речь идет о всем пространстве. В этом случае теорема утверждает: изменение электромагнитной энергии равно избытку работы сторонних сил P над выделением тепла Q .

Однако наибольший интерес представляет применение теоремы Пойтинга к конечному объему, когда поток вектора Пойтинга отличен от нуля. Будем считать, что рассматриваемый объем не содержит токов и зарядов, тогда равенство (7.44) примет вид

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \vec{P} d\vec{S}. \quad (7.45)$$

Уравнение (7.45) выражает следующее фундаментальное обстоятельство: изменение электромагнитной энергии внутри какого-либо объема сопровождается «вытеканием» или «втеканием» в этот объем электромагнитной энергии.

По сути дела, теорема Пойтинга является необходимым следствием закона сохранения энергии и предположения о локализации в пространстве электромагнитной энергии.

§ 7.8 Световая волна и ее характеристики

В зависимости от длины волны (частоты) электромагнитные волны условно разделяют на диапазоны: низкочастотные электрические ($0 \dots 10^5$ м), радиоволны ($10^5 \dots 10^6$ м), оптический ($3 \cdot 10^{-4} \dots 1,3 \cdot 10^{-10}$ м), рентгеновский ($2 \cdot 10^{-8} \dots 10^{-12}$ м), гамма ($10^{-12} \dots$ менее 10^{-13} м). Мы рассмотрим, в основном, оптический диапазон длин волн, который подразделяют на

инфракрасное излучение	$\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ К } 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м,}$
видимое излучение (свет)	$\lambda = 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ К } 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ м,}$
ультрафиолетовое излучение	$\lambda = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ К } 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$

В видимом диапазоне действие света на приемники (фотоприемники) излучения сильно зависит от длины волн. Эта зависимость называется **спектральной характеристикой** фотоприемника. Спектральная чувствитель-

ность человеческого глаза характеризуется кривой **видности**, ее график представлен на рисунке 53. Величина V_λ называется **относительной спектральной чувствительностью**. Глаз наиболее чувствителен к свету с длиной волны 555 нм (желто-зеленая часть спектра).

Замечание – Интересно отметить, что Солнце является желто-зеленой звездой с максимумом излучения (в видимой части спектра) приходящимся на $\lambda = 555$ нм.

Для этой длины волны принято считать $V_\lambda = 1$. При одинаковом потоке энергии, оценивая зрительно, интенсивность света других волн оказывается меньшей. Вне интервала видимого диапазона длин волн $V_\lambda = 0$. Для характеристики интенсивности света с учетом его способности вызывать зрительное ощущение (что определяет функция V_λ) вводят понятие **светового потока** Φ . Международная комиссия определила световой поток как поток лучистой энергии, оцениваемый по зрительному ощущению, т.е.

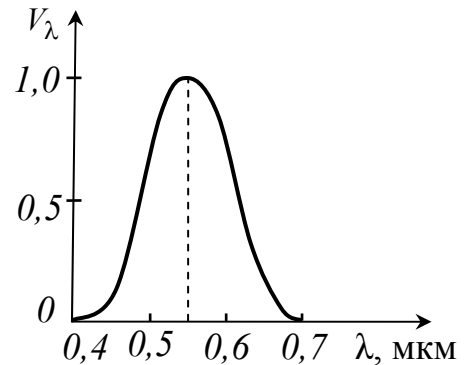


Рисунок 53

$$\Phi = V_\lambda \Phi_0, \quad (7.46)$$

где Φ_0 – падающий на глаз поток лучистой энергии.

Таким образом световой поток измеряется в ваттах (Вт). На основании введенного светового потока строится вся система фотометрических понятий и величин.

Электромагнитная волна характеризуется векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Поскольку все действия света связаны с вектором $\vec{E}$ (все фотоприемники и глаз регулируют только на вектор $\vec{E}$), принято говорить о векторе $\vec{E}$ как о **световом векторе**. Модуль амплитуды светового вектора мы будем обозначать буквой A , иногда E_0 .

Оптическая среда характеризуется показателем преломления n , который определяется соотношением

$$n = \frac{c}{\vartheta}, \quad (7.47)$$

где ϑ – фазовая скорость света в данной среде;

c – скорость света в вакууме.

Из сравнения (7.47) с формулой (7.31) видно, что

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \quad (7.48)$$

это справедливо для подавляющего большинства прозрачных веществ, у которых $\mu \approx 1$ в видимом диапазоне.

Формула (7.48) связывает оптические свойства вещества с его электрическими свойствами. Сразу отметим, эксперимент показал, что ε (а значит и n) зависят от частоты электромагнитной волны. Зависимость $\varepsilon(\omega)$ или $n(\omega)$ получила название **дисперсии света**.

Показатель преломления n характеризует **оптическую плотность** среды. Среду с большим показателем преломления называют оптически более плотной. В веществе длина волны $\lambda' = \vartheta / \nu = c / n\nu = \lambda / n$. Таким образом, длина волны в среде с показателем преломления n равна

$$\lambda' = \lambda / n,$$

где λ — длина волны в вакууме.

Световую волну характеризуют **интенсивностью** J — это модуль среднего по времени значения плотности потока энергии (7.43), то есть

$$J = \langle S \rangle : EH. \quad (7.49)$$

Согласно отношения (7.36), $H \sim \sqrt{\varepsilon}E = nE$, запишем формулу (7.49) в виде

$$J \sim nE^2 = nA^2. \quad (7.50)$$

Линии, перпендикулярные волновым поверхностям, называют лучами. Вектор Пойтинга направлен в каждой точке по касательной к лучу. Последнее справедливо только в изотропных средах.

Световые волны являются электромагнитными волнами, поэтому они поперечны. Однако обычно они (волны) не обнаруживают ассиметрии относительно направления распространения. Это связано с тем, что в свете, испускаемом обычными источниками (например, лампа накаливания) колебания светового вектора происходят случайным образом в самых разных направлениях, перпендикулярных направлению распространения. При этом модуль светового вектора остается неизменным. Такой свет называют естественным. Условно естественный свет изображают как на рисунке 54, где на-

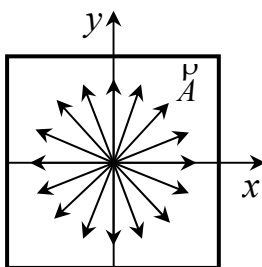


Рисунок 54

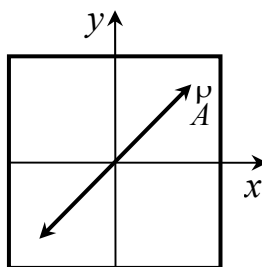


Рисунок 55

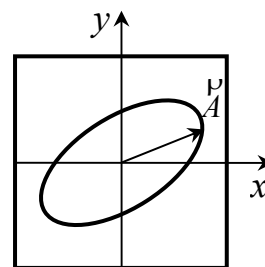


Рисунок 56

правление распространения волны перпендикулярно плоскости рисунку. Свет, в котором направление колебаний светового вектора упорядоченно каким-либо образом, называют **поляризованным**. Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, то свет называют **плоско-** (или **линейно**) **поляризованным** (рисунок 55). Если конец светового вектора описывает эллипс (рисунок 56), то такой свет называют **эллиптически поляризованным** (в частности, поляризованным по кругу).

Особо нужно отметить сравнительно новый источник света – лазер, который дает плоско-поляризованный свет с высокой степенью монохроматичности.

§ 7.9 Интерференция

Явление интерференции возникает при сложении волн и приводит к перераспределению энергии (в пространстве) в месте ее (интерференции) наблюдения.

Для понимания сути явления и условий наблюдения интерференционной картины рассмотрим сложение двух волн одинаковой частоты. Пусть эти волны возбуждают в некоторой точке пространство колебания одинакового направления:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

и

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

При сложении гармонических колебаний одинаковой частоты мы получим снова гармоническое колебание с амплитудой A равной

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (7.51)$$

***Замечание** – Этот результат, проще всего получить применив метод **векторных диаграмм**, основанной на формальной аналогии в записи гармонического колебания и проекции вектора, например, на ось X . Сущность его (метода) в том, что амплитуду A и фазу результирующего вектора находят путем сложения векторов (рисунок 57). Для вектора A_1 (на рисунке 57) берется равной амплитуде колебания x_1 , а длина вектора A_2 равна амплитуде колебания x_2 , угол α_1 равен начальной фазе колебания x_1 , а угол α_2 равен начальной фазе колебания x_2 . Текущее время t считается при этом постоянным и обычно принимается равным 0. Величины A и δ определяются длиной результирующего вектора и углом его наклона к оси X . Из полученного треугольника по теореме косинусов сразу приходим к выражению (7.51).*

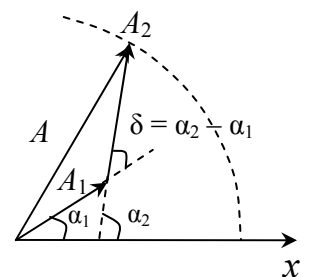


Рисунок 57

Если оба колебания не согласованы друг с другом, т.е. разность фаз $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ как-то изменяется во времени, то такие колебания называются **некогерентными**. В том случае, если δ непрерывно изменяется, причем так, что принимает с равной вероятностью любые значения (среднее по времени значение $\langle \cos \delta \rangle = 0$), последнее слагаемое в формуле (7.51) обращается в нуль. Принимая во внимание соотношение (7.50), запишем формулу (7.51) в виде

$$J = J_1 + J_2. \quad (7.52)$$

Это значит, что в данном случае интенсивность результирующего колебания равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности.

Если же разность фаз δ постоянна во времени, то такие колебания (и волны) называют **когерентными** (согласованными). В этом случае интенсивность результирующего колебания, согласно формул (7.50) и (7.51), запишется как

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta. \quad (7.53)$$

Последнее слагаемое в этой формуле и в формуле (7.51) называют **интерференционным членом**.

Рассмотрим его влияние на результирующую интенсивность. В точках пространства, где $\cos \delta > 0$, $J > J_1 + J_2$; там же, где $\cos \delta < 0$, $J < J_1 + J_2$. Другими словами, при сложении когерентных волн происходит перераспределение интенсивности J в пространстве: в одних местах возникают максимумы, в других – минимумы интенсивности. Это явление (как мы уже отметили в начале параграфа) называют **интерференцией** волн. Особенно отчетливо (контрастно) интерференция проявляется, если $J_1 = J_2$. Тогда, согласно (7.53) $J = 4J_1$ в максимумах и $J = 0$ в минимумах. Для некогерентных волн при $J_1 = J_2$ интенсивность J всюду одинакова и, согласно (7.52), $J = 2J_1$.

Из повседневного опыта известно, что при наложении света от двух независимых источников (от двух электрических лампочек накаливания) никогда не удастся наблюдать явление интерференции. Увеличение числа лампочек приводит только к увеличению освещенности. Отсюда следует, что световые волны, излучаемые от независимых источников света, всегда некогерентны.

Причины, указанной закономерности, кроются в самом механизме испускания света атомами. Известно, что возбужденный атом переходит в нормальное (невозбужденное) состояние за промежуток времени $\tau \sim 10^{-8}$ с. При этом энергия излучается в виде световой волны. Через некоторое время атом снова может прийти в возбужденное и процесс излучения света повторится. Такое прерывистое излучение света атомами в виде отдельных кратковременных импульсов – цугов волн – характерно для любого источника света не

зависимо от специфических особенностей тех процессов, которые происходят в источнике и вызывают возбуждение. Каждый цуг волн имеет ограниченную протяженность в пространстве, а именно $\Delta x = c\tau$, т.е. составляет длину 1...10 м. В следствии этого, а также уменьшения амплитуды из-за затухания, цуг волн отличается от монохроматической волны, которая по определению, имеет неизменную амплитуду и неограниченна в пространстве. Таким образом, реальная волна не является монохроматической.

Замечание – Методами спектрального анализа можно показать, что реальная волна обладает конечным спектром частот $\Delta\omega$, т.е. включает частоты от $\omega - \Delta\omega/2$ до $\omega + \Delta\omega/2$. Промежуток времени $\tau_{\text{ког}}$, в течение которого разность фаз колебаний, соответствующих волнам с циклическими частотами $\omega - \Delta\omega/2$ и $\omega + \Delta\omega/2$ изменяется на 2π называется **временем когерентности** немонохроматической волны, т.е.

$$\tau_{\text{ког}} = 2\pi / \Delta\omega. \quad (7.54)$$

Это название связано с тем, что реальную немонохроматическую волну, можно приближенно считать монохроматической с частотой ω в течении промежутка времени $\Delta t \ll \tau_{\text{ког}}$. Отсюда, расстояние $l_{\text{ког}}$ на которое распространяется волна за время $\tau_{\text{ког}}$, с фазовой скоростью ϑ и частотой ω называется **длиной когерентности**, т.е.

$$l_{\text{ког}} = \vartheta \tau_{\text{ког}} = 2\pi\vartheta / \Delta\omega. \quad (7.55)$$

Чем ближе световая волна к монохроматической, тем меньше ширина $\Delta\omega$ спектра ее частот и тем больше ее время существования и длина когерентности. (Отметим, что степень монохроматичности определяется как $\Delta\lambda / \lambda$). Например, для видимого солнечного света, имеющего сплошной спектр частот от $4 \cdot 10^{14}$ до $8 \cdot 10^{14}$ Гц, $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-14}$ с и $l_{\text{ког}} \sim 10^{-6}$ м. Для желтых лучей натрия (обладающих большой степенью монохроматичности) длина когерентности составляет 0,12 м, если источником являются пары натрия, в которых поддерживается постоянный разряд при комнатной температуре и низком давлении. Еще большей длиной когерентности обладают лазеры. Например, для гелий-неоновых лазеров непрерывного действия $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-5}$ с, а $l_{\text{ког}} \sim 10^3$ м.

И, тем не менее, когерентные световые волны можно получить даже от обычных источников света. Общий принцип их получения таков: волну, излучаемую одним источником света, разделяют тем или иным способом на две (или более) части и затем накладывают друг на друга. Деление волны осуществляют за счет отражений (или преломлений) в стеклянных пластинках, линзах, призмах или зеркалах. Если разность расстояний этих волн до места их наблюдения не превышает длины когерентности, то изменения фа-

зы в этих волнах происходят когерентно (согласованно), и мы будем наблюдать интерференционную картину.

Рассмотрим интерференцию волн (рисунок 58), полученных от источника S , представляющего собой узкую щель. Цилиндрическая волновая поверхность делится на 2-х узких близких щелях, которые можно считать новыми источниками света. Щели S_1 и S_2 находятся на расстоянии d друг от друга и будут давать когерентные волны, которые полу-

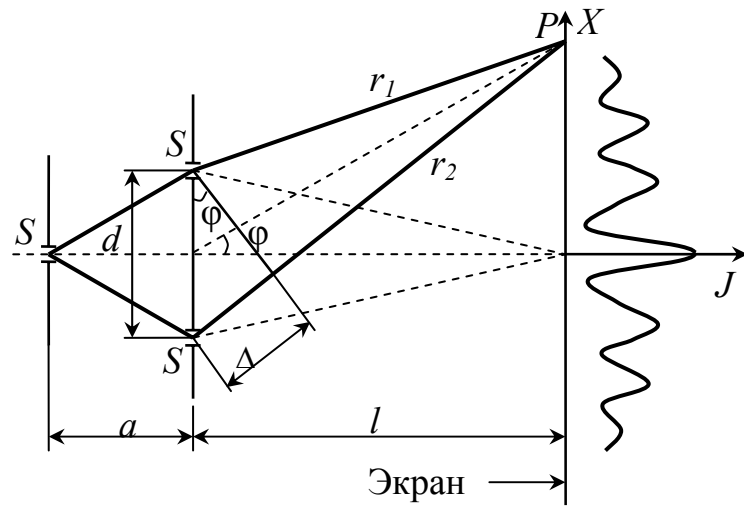


Рисунок 58

чены делением волновой поверхности источника S . Интерференционная картина будет наблюдаться в любой точке области наложения лучей на экране. Экран расположен параллельно щелям и находится от них на расстоянии l , причем l намного больше d , т.е. $l \gg d$. Расчет интерференционной картины сводится к расчету распределения интенсивности света на экране и определению ширины интерференционной полосы. Интенсивность в произвольной точке P экрана определяется выражением (7.51), полученным для двух монохроматических волн. В нашем случае амплитуды источников S_1 и S_2 одинаковые, поэтому (7.51) перепишем

$$A^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos \delta = 2A^2 (1 + \cos \delta) = 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (7.56)$$

Из выражения (7.56) видно, что интенсивность будет зависеть только от разности фаз складываемых в точке P колебаний, а именно

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1), \quad (7.57)$$

где $\Delta = r_2 - r_1$ – разность путей проходимых волнами до точки P .

Сразу отметим, что волны от источников S_1 и S_2 могут распространяться в разных средах. Тогда разность фаз определяется как

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (r_2 n_2 - r_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

где λ_0 – длина волны в вакууме;

$L = nr$ – оптическая длина пути.

Определяя расстояние глазами (оптическими приборами) мы измеряем оптическую длину пути.

Из рисунка 51 видно, что

$$\Delta = r_2 - r_1 = d \sin \theta = d \frac{x}{l}, \quad (7.58)$$

и, следовательно,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{x}{l}. \quad (7.59)$$

Согласно выражения (7.56), интенсивность будет максимальной, равной $4A_2$, если $\cos^2 \frac{\delta}{2} = 1$, т.е. когда разность хода волн равна

$$\Delta = d \frac{x}{l} = 0, \pm \lambda, \pm 2\lambda, \dots \pm m\lambda, \quad (7.60)$$

где m – порядок интерференции.

В этом случае (7.60) волны в исследуемую точку будут приходить в одинаковой фазе.

Интенсивность будет равна нулю ($J = 0$), если $\cos^2 \frac{\delta}{2} = 0$, то есть когда

$$\Delta = d \frac{x}{l} = \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda. \quad (7.61)$$

Таким образом, в точках, для которых разность хода равна полуцелому числу длин волн, образуются минимумы интенсивности. В этом случае (7.61) волны приходят в исследуемую точку в противофазе.

В формуле (7.56) мы предполагали, что волны идеально монохроматичны. Поэтому реальное распределение интенсивности, представленное на рисунке 51, отличается от распределения (7.56) по закону пропорциональному $\cos^2 \frac{\delta}{2}$.

Расстояние между соседними максимумами (или минимумами), называется **шириной интерференционной полосы**, равно

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = [(n+1) - n] \cdot \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda l}{d}. \quad (7.62)$$

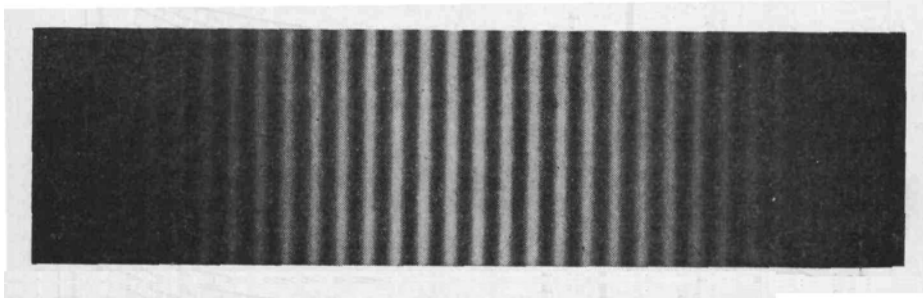


Рисунок 58

Как видно, ширина полосы не зависит от порядка интерференции. Измерив это расстояние, а также параметры схемы l и d , по формуле (7.62) можно определить длину волны, что и представляет интерес для практических нужд. На фотографии представлена картина интерференции света, полученная по схеме, представленной на рисунке 58.

Замечание – Получение контрастной интерференционной картины существенно зависит от размеров источника S , т.к. на ширине щели S располагается множество атомов, излучающих световые волны со случайным распределением фаз. Это приводит к тому, что вторичные источники S_1 и S_2 станут некогерентными (рисунок 59). Сказанное позволяет говорить о **ширине когерентности**. Под шириной когерентности понимают расстояние между точками поверхности, перпендикулярное направлению волны от источника S , на котором случайные изменения фазы становятся равными π . Определим величину $h_{\text{ког.}}$. Щели S_1 и S_2 станут некогерентными источниками при $h_{\text{ког.}} \approx d$, где d – расстояние между щелями. Кроме того, известно, что интерференционная картина исчезнет если ширина щели S , равная b , будет равна ширине полосы $\Delta x = \lambda l / d$. Из этих рассуждений следует, что

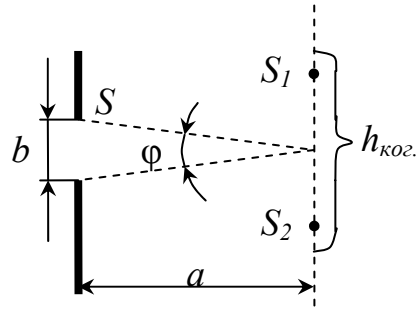


Рисунок 59

$$h_{\text{ког.}} \approx d = \frac{\lambda l}{\Delta x} \approx \frac{\lambda l}{b} = \lambda / (b / l) = \lambda / \phi,$$

где ϕ – угловая ширина источника S относительно диафрагмы с двумя щелями;

кроме того принято что $a = l$.

Итак, ширина когерентности определится как

$$h_{\text{ког.}} \approx \lambda / \phi. \quad (7.63)$$

Таким образом расстояние между щелями должно быть меньше ширины когерентности, т.е. $d < h_{\text{ког.}}$. Если в качестве источника S использовать непосредственно Солнце (его угловой размер $\phi \approx 0,01$ рад и $\lambda = 0,5$ мкм),

то ширина когерентности, согласно (7.63) $h_{\text{ког}} = 0,05$ мм. Для получения интерференционной картины от двух щелей от такого источника расстояние между щелями должно быть меньше 0,05 мм, что сделать практически невозможно. Таким образом, Солнце, как источник в данном случае не подходит.

Если источник света S имеет сложный состав (белый свет), то интерференционные максимумы, соответствующие различным длинам волн, будут сдвинуты относительно друг друга и полосы интерференции окажутся окрашенными.

Для получения более контрастной интерференционной картины используют многолучевую интерференцию. В этом случае когерентные волны получают за счет многократных отражений в тонких пластинах. Расчет интерференционной картины, в принципе, полностью аналогичен уже рассмотренному. Желающих узнать больше мы отсылаем к соответствующим руководствам или предлагаем проделать самостоятельно.

Явление интерференции нашло широкое применение в науке и технике. Методами интерференции определяют не только длины волн, но также и размеры предметов, чистоту обработки поверхности тел, измеряют расстояния до удаленных объектов (в основном в астрономии).

§ 7.10 Дифракция

Дифракцией называют совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики. В частности, дифракция приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Если с огибанием звуковыми волнами препятствий мы сталкиваемся ежедневно, то для наблюдения дифракции световых волн необходимо создание специальных условий. Это связано с тем, что размер дифракционной картины сильно зависят (мы это покажем в дальнейшем) от соотношения размеров препятствия и длины волны.

Замечание – Явление дифракции для своего объяснения и количественного расчета не требует никаких новых принципов. Всякая дифракционная задача, если ее рассматривать строго, сводится к нахождению решения уравнений Максвелла, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям. Однако, в строгой постановке, дифракционные задачи, ввиду их сложности, допускают аналитические решения лишь в простейших идеализированных случаях. В оптике значительно большее значение имеют нестрогие методы решения дифракционных задач, основанные на принципе Гюйгенса, в обобщенной формулировке Френеля (или Кирхгофа), дающие хорошее совпадение с опытом.

Явление дифракции можно объяснить на основании, известного Вам из школьного курса физики, принципа Гюйгенса. Принцип Гюйгенса дает способ построения фронта волны в момент времени $t + \Delta t$ по известному положению фронта в момент времени t .

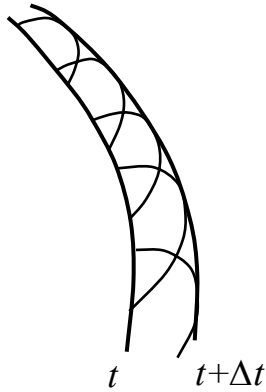


Рисунок 60

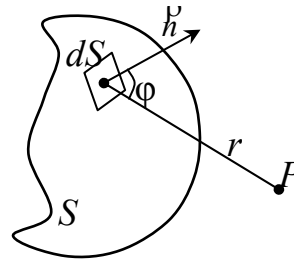


Рисунок 61

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных сферических волн. Огибающая этих волн дает положение фронта в следующий момент времени (рисунок 60). Отметим, что на рисунке 53 среда предполагается неоднородной, т.к. скорость волны в нижней части рисунка 53 больше чем в верхней. В таком виде принцип Гюйгенса даст способ геометрического построения волновых фронтов, но не позволяет рассчитывать амплитуду (а значит и интенсивность) волны в месте наблюдения. Френель дополнил метод принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства. Пусть S (рисунок 61) представляет собой одну из волновых поверхностей световой волны, распространяющегося от некоторого источника (или нескольких источников). Амплитуда светового колебания в точке P , лежащей перед этой поверхностью, находится, согласно Френелю, из следующих соображений. Каждый элемент поверхности служит источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента dS . Амплитуда сферической волны убывает с расстоянием по закону $1/r$ (7.8). Следовательно, от каждого участка dS волновой поверхности в точку P приходит колебание

$$d\xi = k(\varphi) \frac{A_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0), \quad (7.64)$$

где $(\omega t + \alpha_0)$ – фаза колебания в месте расположения волновой поверхности S (по определению, это поверхность постоянной фазы);

k – волновое число, r – расстояние от элемента dS до точки P ;

A_0 – амплитуда светового колебания в том месте, где находится элемент dS ;

$k(\varphi)$ – коэффициент убывающий с увеличением угла φ между нормалью $\hat{n}$ к элементу dS и направлением от dS к точке P и обращающийся в нуль при $\varphi = \pi/2$.

Результирующее колебание в точке P представляет собой суперпозицию колебаний (7.64), взятых для всей поверхности S :

$$\xi = \int_{(S)} k(\varphi) \frac{A_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0) dS. \quad (7.65)$$

Формула (7.65) представляет собой математическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля. Конечно, вычисление по формуле (7.65) представляют собой, в общем случае, очень трудную математическую задачу. Однако, в случаях преград, имеющих некоторую симметрию, решение не представляет собой серьезных сложностей.

Различают два случая дифракции света. Если источник света и точка наблюдения P расположены от препятствия настолько далеко, что лучи, падающие на препятствие, и лучи, идущие в точку P , образуют практически параллельные пучки, говорят о **дифракции Фраунгофера** или о дифракции в параллельных лучах. Во всех остальных случаях говорят о **дифракции Френеля**. При дифракции Френеля на экране получают «дифракционное изображение» препятствия, а при дифракции Фраунгофера – «дифракционное изображение» источника света.

Дифракционные явления Фраунгофера имеют в оптике значительно большее практическое значение, чем дифракция Френеля. Дифракцию Фраунгофера наблюдают, поместив одну линзу за источником света, а другую линзу перед точкой наблюдения так, чтобы источник света и точка наблюдения находились в фокальной плоскости соответствующих линз; между линзами размещают препятствия, на которых возникает дифракция.

Рассмотрим более подробно дифракцию Фраунгофера на примере бесконечно длинной узкой щели (практически достаточно, чтобы длина щели была намного больше ее ширины).

Пусть на бесконечно длинную щель (рисунок 62), расположенную перпендикулярно плоскости рисунка, падает плоская монохроматическая волна. Поместим за щелью шириной b собирательную линзу L , а в фокальной плоскости линзы L экран $\mathcal{E}$. Согласно принципа Гюйгенса-Френеля разобьем падающую волну на элементарные полоски шириной dx , которые являются источниками вторичных плоских волн. Волны от различных элементов dx , посылаемые под углом φ к оптической оси линзы, соберутся в точке P . В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля, амплитуда волны, посылаемой каждой зоной будет пропорционально ее площади, т.е. пропорциональна dx (длина всех элементарных полосок одинакова), и будет равна $dS = c dx$. Коэффициент c определится из условия, что по направлению $\varphi = 0$ амплитуда волны, посылаемой всей щелью равна A_0 , т.е. $cb = A_0$ или $c = A_0/b$. Отсюда колебание от любого элемента щели запишется как

$$dS = \frac{A_0}{b} dx \cos \omega t. \quad (7.66)$$

Волны от различных элементов придут в точку P с разными фазами. Если разность хода отсчитывать от края щели (точка 0), то волны, посланные другими элементами, будут проходить пути на величину $\Delta = x \sin \varphi$ большие и, следовательно, будут сдвинуты по фазе на величину $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$. Если фазу колебания в точке 0 считать равной ωt , то фаза колебания, создаваемая зоной с координатой x , будет равна

$$\omega t - 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi,$$

где λ — длина волны в данной среде.

Таким образом, колебание, создаваемое волной от элементарной зоны с координатой x в точке P , запишется, согласно формуле (7.66) в виде

$$dS = \frac{A_0}{b} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) dx. \quad (7.67)$$

Замечание — В формуле (7.66) будем считать углы φ небольшими, поэтому коэффициент $k(\varphi)$ в формуле (7.65) можно считать равным единице. Кроме того напомним, что линза не вносит дополнительной разности хода.

Результирующее колебание, создаваемое в точке P всей щелью, найдем, проинтегрировав dS по ширине щели:

$$S_\varphi = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi \right) dx = \left[A_0 \frac{\sin \left[(\pi / \lambda) b \sin \varphi \right]}{(\pi / \lambda) b \sin \varphi} \right] \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right). \quad (7.68)$$

Предлагаем проделать интегрирование выражения (7.68) самостоятельно, воспользовавшись заменой переменных, а именно

$$z = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi$$

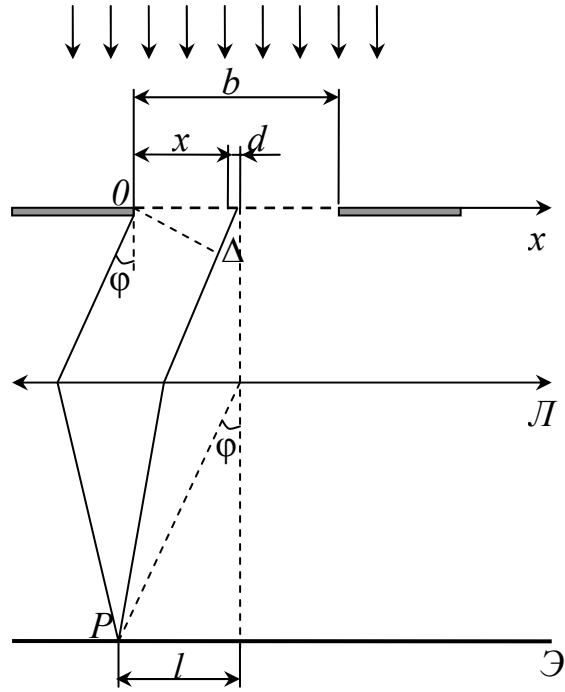


Рисунок 62

и

$$dz = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi dx.$$

Таким образом, результирующая волна, идущая в направлении φ , создает в точке P колебание с амплитудой

$$A_{\varphi} = A_0 \frac{\sin[(\pi/\lambda)b \sin \varphi]}{(\pi/\lambda)b \sin \varphi}, \quad (7.69)$$

соответственно, интенсивность в точке P будет равна

$$J_{\varphi} = J_0 \frac{\sin^2[(\pi/\lambda)b \sin \varphi]}{[(\pi/\lambda)b \sin \varphi]^2}. \quad (7.70)$$

Обычно вводят обозначение $(\pi/\lambda)b \sin \varphi = \alpha$ и выражение (7.70) записывают в виде

$$J_{\varphi} = J_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}. \quad (7.71)$$

График функций, даваемый формулой (7.70), приведен на рисунке 63. Из формулы (7.70) и рисунка 63 видно, что максимум интенсивности находится в середине дифракционной картины, т.е. на оси симметрии щели. Этот результат очевиден, т.к. при $\varphi = 0$, колебания от всех элементарных полосок приходят в точку P в одной фазе. Поэтому результирующая интенсивность света на экране Э будет равно интенсивности создаваемой всей щелью $J_{\varphi 0} = A_0^2 = J_0$. При значениях φ , удовлетворяющих условию: $(\pi/\lambda)b \sin \varphi = \pm n\pi$, т.е. в случае, если

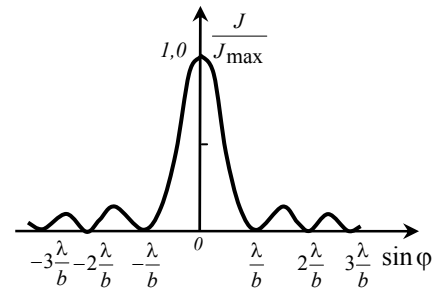


Рисунок 63

$$b \sin \varphi = \pm n\lambda, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.72)$$

интенсивность J_{φ} обращается в нуль. Таким образом, условие (7.72) определяет положение минимумов интенсивности.

Замечание – Положения максимумов мы находить не будем, т.к. интенсивность уже первого максимума (как показывает соответствующий расчет) составляет от первого максимума величину $J_1 = 0,045J_0$. Другими

словами, практически вся интенсивность при дифракции на щели сосредоточена в центральном максимуме.

Следует отметить, что обычно дифрагирующий объект располагают непосредственно на линзе, что совершенно не изменит хода проведенных нами рассуждений. Кроме того, в большинстве экспериментов рассматриваются малые углы дифракции φ . Поэтому, заменяя на схеме (рисунок 63) $\sin\varphi$ на $\operatorname{tg}\varphi$ найдем, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{f}, \quad (7.73)$$

где l – расстояние от точки наблюдения на экране до центра дифракционной картины;

f – расстояние от щели до экрана, оно практически равняется фокусному расстоянию линзы.

Подставляя выражение (7.73) в формулу (7.72) найдем линейное положение первого минимума на экране

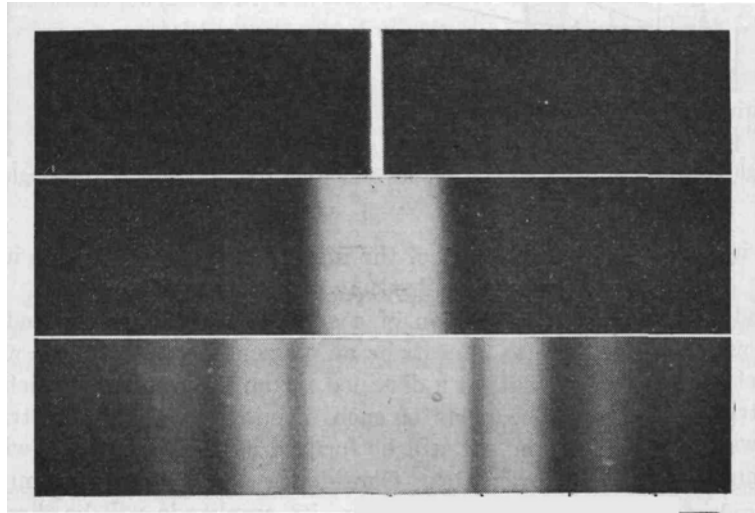
$$l = \frac{\lambda f}{b}. \quad (7.74)$$

Пример – Дифракция света ($\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м) хорошо наблюдается в лабораторных условиях, если брать щель шириной порядка 0,1 см и расстояние $f \approx 2$ м между экраном и щелью. При этих цифрах $l = 1$ мм – эффект будет отчетливо виден.

Видимые лучи будут давать заметную дифракцию от теннисного мяча ($b = 5$ см), но на большом расстоянии. Так при $f = 100$ м и длине волны $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м, $l = 1$ мм, т.е. дифракция будет также видна.

В соответствующих уравнению (7.73) условиях дифракцию можно наблюдать и для радиоволн.

Таким образом, если величины f и λ фиксированы, то дифракционная картина будет существенно зависеть от ширины щели. Если щель велика, то $l \rightarrow 0$, т.е. изображение щели на экране будет четким. По мере уменьшения щели дифракционная картина начинает проявляться и первый дифракционный минимум все больше отодвигается от центра картины. Наконец, щель станет столь малой, что наше приближение малых углов дифракции (замена $\sin\varphi$ на $\operatorname{tg}\varphi$) станет неверным, Так изображение щели на экране расплывается когда длина волны и размер щели сравняются. В этом случае щель будет давать вторичное излучение как единый источник, интерференция элементарных волн исчезнет, и от щели будет расходиться во все стороны элементарная волна. На фотографии приведены картины дифракции на щелях разной ширины при фиксированных $f = 1$ м, $\lambda = 435,8$ нм.



В целом ряде приборов (телескопы, фотоаппараты и т.д.) приходится учитывать дифракцию на круглых отверстиях. Общие закономерности расчета дифракционной картины в этом случае не меняются, но приходится прибегать к специальным цилиндрическим функциям. При дифракции от круглого отверстия (диска) или иной неоднородности круглой формы наблюдаются концентрические кольца с минимальным диаметром первого темного кольца равным $1,22\lambda f / D$, где D – диаметр отверстия, что соответствует условию первого минимума $D \sin \varphi = 1,22\lambda$.

Так как дифракционные картины имеют максимумы в различных местах для разных длин волн, то при дифракции белого света возникает разложение в спектр. В следствии этого дифракционная картина от щели или отверстий будет иметь радужную окраску.

Большое практическое значение имеет дифракция, наблюдаемая при прохождении света через плоскую **дифракционную решетку**, представляющих собой систему параллельных щелей равной ширины, разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками.

Допустим, что на решетку нормально к ее поверхности падает плоская монохроматическая волна. Требуется найти распределение интенсивности света J_φ , распространяющегося в направлении, составляющем угол φ с нормалью к плоскости решетки (рисунок 64). Итак, имеется периодическая структура из N параллельных щелей (для простоты рисунка на чертеже показаны только четыре щели) с шириной щели, равной b , и расстоянием между соседними щелями, равным d . Расстояние d – называют **постоянной** (или периодом) дифракционной решетки. Дифракционные картины, создаваемые каждой щелью в отдельности мы уже разобрали (7.70). Однако, поскольку волны, идущие от всех щелей когерентны, по условию задачи, необходимо также учесть интерференцию между N пучками. Несложные расчеты, аналогичные вычислениям интенсивности для дифракции от одной щели, дают для дифракционной решетки с N щелями распределение интенсивности в зависимости от угла в виде

$$J_{\varphi} = J_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2, \quad (7.75)$$

где $\alpha = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi$; $\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi$.

Множители $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$ и $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$ в (7.75) выражают, соответственно,

распределение интенсивности для дифракции плоской волны на каждой щели и интерференцию между световыми пучками, исходящими от каждой щели.

Исследуем вначале интерференцию N пучков (распределение интенсивности от одной щели мы уже рассматривали), т.е. посмотрим как меняется множитель $(\sin N\beta / \sin \beta)^2$ в зависимости от угла φ . Из рисунка 64 видно, что величина $d \sin \varphi$ равна разности хода Δ между волнами, испускаемые двумя соответствующими точками соседних щелей. Если она равна целому числу волн, то колебания усилят друг друга. Поэтому положив

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (7.76)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ порядок дифракции;

Посмотрим, во что обращается исследуемый множитель. Итак, имеем $\beta = (\pi d \sin \varphi) / \lambda = m\pi$, $\sin N\beta = 0$ и $\sin \beta = 0$. Известно, что $\lim_{\sin \beta \rightarrow 0} \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right| = N$ и, следовательно,

$$(J_{\varphi})_{\max} = J_0 (\sin \alpha / \alpha)^2 N^2. \quad (7.77)$$

Полученный результат заслуживает внимательного рассмотрения. При выполнении условия (7.76) – условия максимума интенсивности – интенсивность света дифрагировавшего на системе из N щелей возрастает не в N раз по сравнению с интенсивностью света, прошедшего через каждую щель, а в N^2 раз. Резкое возрастание интенсивности в нулевом и остальных максимумах прямой результат интерференции дифрагировавших пучков и объясняется перераспределением света – максимумы делаются более узкими. Максимумы, возникающие при выполнении условия (7.76) называются

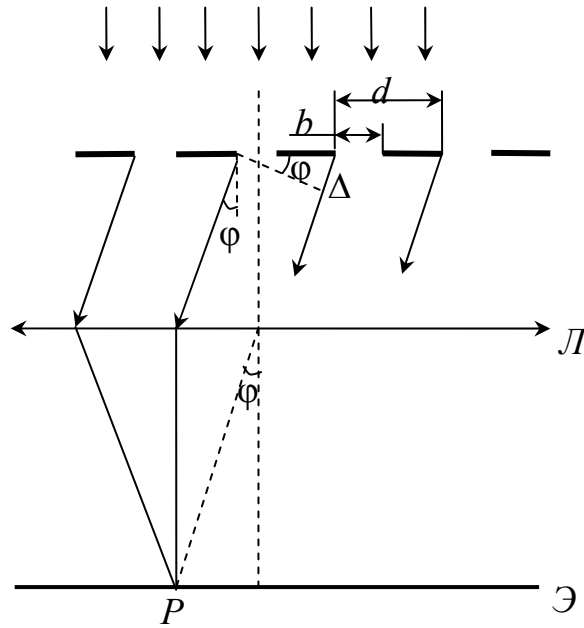


Рисунок 64

главными максимумами. Естественно, что между главными максимумами должны возникнуть $N - 1$ минимумов, где $\sin N\beta = 0$, а $\sin\beta \neq 0$. Между этими минимумами должны находиться побочные (дополнительные) максимумы, интенсивность света в которых при достаточно большом N пренебрежимо мала по сравнению с интенсивностью главных максимумов. Таким образом, чем больше N , тем больше расстояние между главными максимумами. Множитель $(\sin \alpha / \alpha)$ в формуле (7.77), характеризующий распределение интенсивности на каждой щели, уменьшает величину главных максимумов, накладываясь на второй член (обычно говорят модулируя) в выражении (7.75). Для наглядности влияния членов $\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$ и $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta}\right)^2$ на дифракционную картину

на рисунке 65 приведены рассчитанные для $N = 6$ графики зависимости интенсивности от угла φ . На рисунке 65 изображены: верхний рисунок – максимумы, вызванные интерференцией шести пучков; средний – распределение

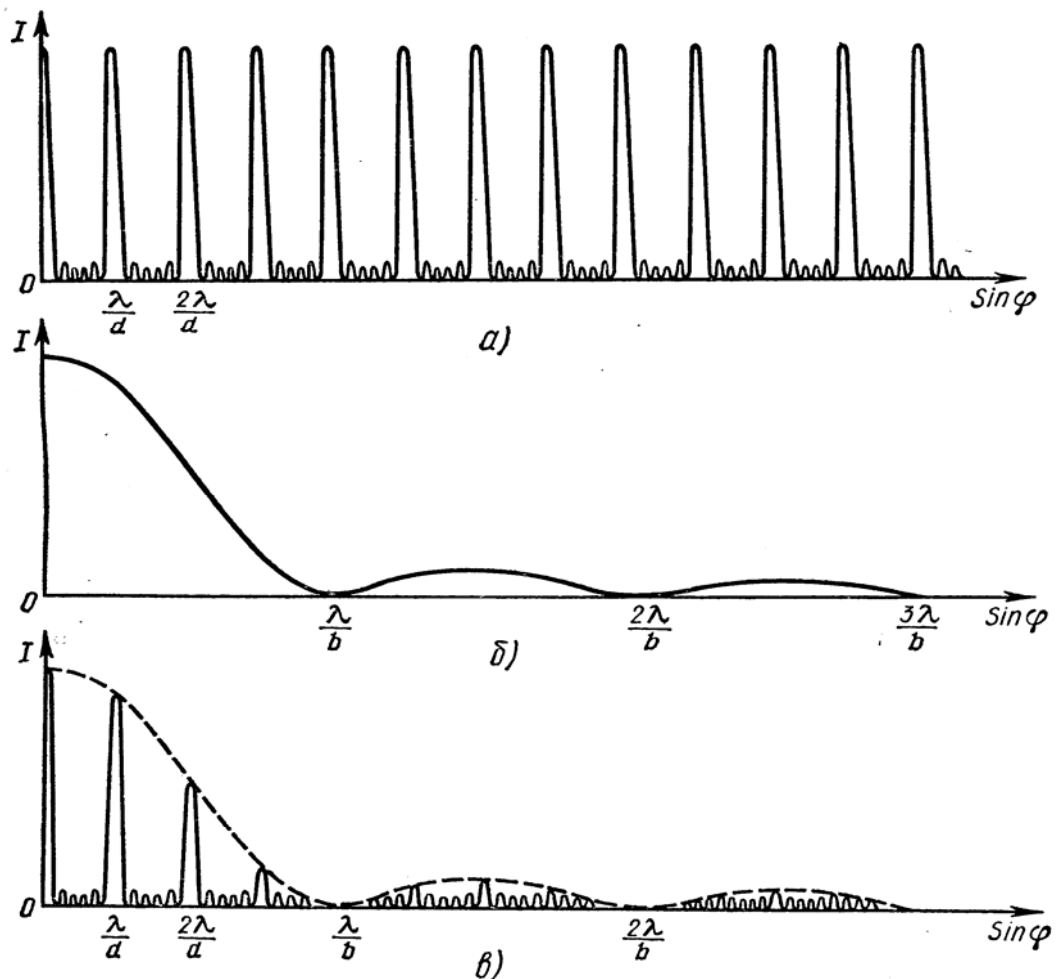
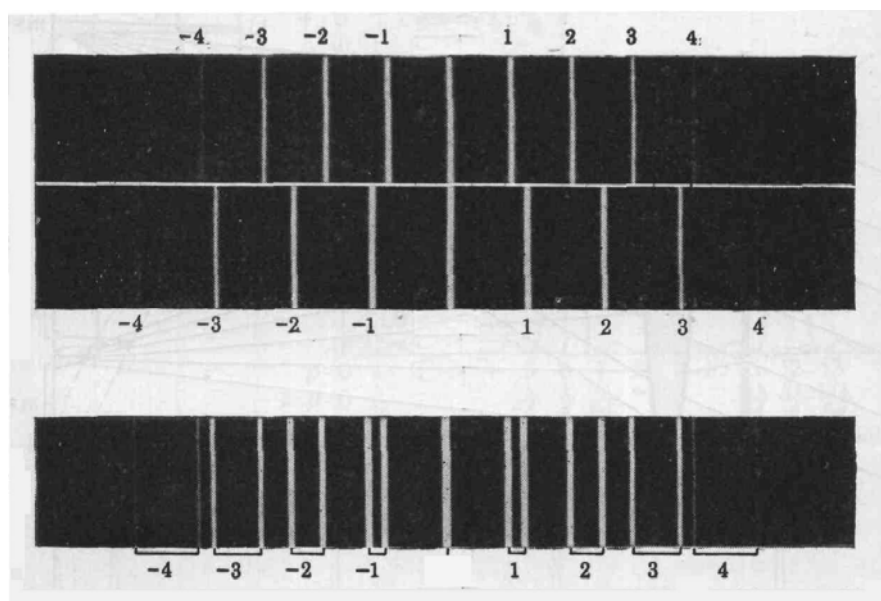


Рисунок 65

интенсивности для дифракции на одной щели; нижний – распределение интенсивности в максимумах, обусловленное произведением обоих членов. (В сторону отрицательных значений $\sin \varphi$, график имеет симметричный вид).

Положение главных максимумов зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ($m = 0$), разложатся в спектр, причем фиолетовая часть будет обращена к центру дифракционной картины, красная – наружу. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава оптического и рентгеновского излучений (определение длин волн и интенсивностей всех монохроматических компонентов излучения).

Таким образом, дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор. На фотографии для наглядности представлены снимки спектров двух длин волн $\lambda_1 = 400$ нм и $\lambda_2 = 500$ нм по отдельности (верхние два снимка) и вместе (нижний снимок). Цифрами обозначены порядки дифракции.



В настоящее время для изучения спектров оптического диапазона используют решетки с очень большим числом штрихов на единицу длины (300, 600, 1200, 1800 и даже 2400 штрихов на 1 мм при общей полезной длине до 2 см). Они различаются также формой, материалом поверхности и профилем штрихов. Так ступенчатый профиль штрихов решетки позволяет концентрировать основную часть падающей энергии в направлении одного определенного ненулевого максимума.

В заключении темы отметим, что все сказанное для решетки справедливо и в области радиоволн. Излучающие дипольные антенны направленного действия рассчитывают и работают аналогично дифракционной решетке.

Часть 4 Физика тепловых явлений

Глава 8 Теплота

§ 8.1 Температура

Во всех существующих в природе телах происходит постоянное движение составляющих эти тела частиц. Это движение универсально: движутся молекулы, движутся атомы внутри молекул. Характерной чертой этого движения является его беспорядочность (хаотичность). Об этом движении говорят как о **тепловом движении**. В нем заключена природа тепловых явлений.

Хотя обычно, говоря о тепловом движении, имеют в виду движение происходящее в микроскопических масштабах, но ему подвержены также и макрочастицы. Хорошо известным примером является броуновское движение – хаотическое движение взвешенных в жидкости мелких пылинок, которое можно наблюдать в микроскоп.

Если привести в соприкосновение два тела, то атомы этих тел, сталкиваясь между собой, будут передавать друг другу энергию. Таким образом, при соприкосновении двух тел энергия переходит от одного тела к другому. Тело, которое при этом теряет энергию, называют более нагретым. Такой переход энергии продолжается до тех пор, пока не установится определенное состояние, называемое состоянием **теплового равновесия**.

Для характеристики степени нагретости тел служит понятие **температуры**. Любой метод измерения температуры требует **наличия** температурной шкалы. В физике в качестве температурной шкалы используется **термодинамическая** или **абсолютная шкала** температур.

Точное определение термодинамической шкалы связано с наиболее общими тепловыми свойствами всех тел и требует глубокого теоретического анализа, выходящего за рамки данного курса. Вместо этого мы охарактеризуем эту шкалу по некоторым ее вторичным свойствам.

Физическое определение температуры должно основываться на такой физической величине, характеризующей состояние тела, которая была бы автоматически одинаковой у любых двух тел, находящихся в тепловом равновесии друг с другом. Этим свойством обладает **средняя кинетическая энергия** поступательного движения частиц (атомов или молекул). Если средние значения энергии частиц двух тел одинаковы, то хотя при соприкосновении этих тел отдельные их частицы и будут обмениваться энергией, но никакого суммарного перехода энергии из одного тела в другое происходить не будет. По этой причине средняя кинетическая энергия поступательного движения частиц внутри тела может быть выбрана в качестве измерителя температуры. Принято определять температуру как $2/3$ от этой энергии, то есть

$$\theta = \frac{2}{3} \frac{\langle m\vartheta^2 \rangle}{2} = \frac{1}{3} \langle m\vartheta^2 \rangle. \quad (8.1)$$

Согласно данному определению температура измеряется в тех же единицах, что энергия, например в джоулях. Однако, как единица измерения температуры джоуль очень неудобен, потому что энергия теплового движения частиц фактически ничтожна по сравнению с джоулем, и непосредственное измерение температуры как энергии частиц практически очень затруднительно.

По этим причинам в физике пользуются практически удобной условной единицей измерения температуры – **градусом**. Градус определяется как одна сотая часть разности между температурами кипения и замерзания чистой воды при нормальном атмосферном давлении. Переводной коэффициент, определяющий, какая часть джоуля содержится в одном градусе, называется **постоянной Больцмана** и обозначается буквой k , то есть

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

В дальнейшем мы будем обозначать буквой T температуру измеренную в градусах. Измеренная в джоулях температура равна

$$\theta = kT = \frac{1}{3} \langle m\vartheta^2 \rangle = \frac{2}{3} \left\langle \frac{m\vartheta^2}{2} \right\rangle. \quad (8.2)$$

Мы уже говорили, что определенная таким образом шкала температур называется абсолютной. Нулем температуры в этой шкале является температура, при которой тепловое движение прекращается. Шкалу абсолютной температуры, отсчитываемую от этого **абсолютного нуля**, называют также **шкалой Кельвина**, градусы этой шкалы измеряют в Кельвинах и обозначают буквой К.

В технике и быту применяется другая шкала, в которой температуру отсчитывают от точки замерзания воды, условно приписывая этой точке температуру равную нулю. Такую шкалу называют шкалой Цельсия, градусы в этой шкале измеряют в градусах Цельсия и обозначают °С. Величина одного градуса по шкале Кельвина и шкале Цельсия совпадают.

Для перевода температуры из одной шкалы в другую необходимо знать, чему равна абсолютная температура точки замерзания воды. По современным измерениям эта температура равна 273,15 К. Другими словами, по шкале Цельсия абсолютный нуль лежит при температуре –273,15 °С. Таким образом, температура T по шкале Кельвина связана с температурой t° по шкале Цельсия соотношением

$$T = t^\circ + 273,15.$$

Замечание – Полезно знать некоторые величины характеризующие градус. Так суммарная кинетическая энергия частиц одного моля вещества соответствующая одному градусу равна

$$kN_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 8,31 \text{ Дж},$$

где N_0 – число Авогадро, моль⁻¹.

В атомной физике энергию измеряют в электрон-вольтах. Переводной коэффициент между градусом и электрон-вольтom равен

$$1 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = \frac{1,60 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \text{ К} = 11600 \text{ К}.$$

Часто говорят, что эксперимент проведен при комнатной температуре, подразумевая под этим температуру 20 °С (то есть $\approx 293 \text{ К}$), что соответствует примерно 1/40 эВ.

Для характеристики скорости теплового движения воспользуемся формулой (8.2)

$$\vartheta_T = \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (8.3)$$

Полученную скорость называют **тепловой скоростью** и обозначают ϑ_T . Если применять формулу (8.3) к молекулам, то ей удобнее придать другой вид, умножив и разделив подкоренное выражение на число Авогадро, то есть

$$\vartheta_T = \sqrt{\frac{3N_0kT}{mN_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Так тепловая скорость молекул водорода ($\mu = 2$) при комнатной температуре равна приблизительно 2 км/с.

Из формулы (8.3) видно, что тепловая скорость пропорциональна квадратному корню из температуры и обратно пропорциональна квадратному корню из массы частицы. Отсюда вытекает, что тепловое движение очень интенсивное для молекул, еще заметно для микрочастиц, совершающих броуновское движение, и совершенно незаметно для массивных тел.

Замечание – Вернемся к определению температуры. Необходимо подчеркнуть, что это определение основано на классической механике. Количественная связь между температурой и энергией теплового движения (8.1), (8.2) справедлива лишь постольку, поскольку это движение может быть описано классической механикой. По мере уменьшения температуры уменьшается энергия частиц, и условия применимости классической механи-

ки рано или поздно нарушаются, и классическая механика должна быть заменена квантовой механикой. Это происходит тем раньше, чем меньше масса частицы и чем в большей степени ее движение ограничено действующими на нее силами. Так свое поступательное движение молекулы газа совершают практически как свободные частицы, и это движение всегда может рассматриваться с позиций классической механики. Движение же атомов внутри молекул имеет характер малых колебаний в «потенциальной яме» возле определенных положений равновесия. Неприменимость классической механики к такому движению проявляется довольно быстро.

Ранее мы сказали, что при температуре абсолютного нуля тепловое движение прекращается. Однако это не означает, что прекращается вообще всякое движение частиц внутри тела. Согласно квантовой механике движение частиц никогда не прекращается полностью. Даже при абсолютном нуле должно сохраниться некоторое колебательное движение атомов внутри молекул, или колебания атомов вокруг узлов кристаллической решетки твердого тела. Это движение, его называют **нулевыми колебаниями**, представляет собой квантовое явление. Наиболее ярким примером «нулевого движения», полностью сохраняющегося и при абсолютном нуле, является движение электронов в атомах. Внутриатомное движение электронов всегда имеет чисто квантовый характер.

§ 8.2 Давление

Благодаря тепловому движению своих частиц газ (или жидкость) оказывает давление на стенки заключающего его сосуда. Молекулы газа, сталкиваясь со стенками сосуда, передают им некоторый импульс. Изменение импульса в единицу времени определяет действующую на стенку силу. Если отнести силу, действующую со стороны газа (или жидкости), к единице поверхности стенки, то мы получим величину **давления**, оказываемого на стенку сосуда. Отсюда, обозначив давление буквой p , запишем

$$p = \frac{F}{S}.$$

Размерность давления в системе СИ определяется как

$$[p] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right].$$

За единицу давления принимают один паскаль (Па):

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

В физике и технике до сих пор пользуются еще рядом внесистемных единиц давления. Так давление, при котором на площадь в 1 см^2 действует сила в 1 кГ , называется **технической атмосферой** (ат):

$$1 \text{ ат} = 1 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

В отличие от этого определения **нормальной атмосферой** (атм) называют давление столба ртути 760 мм (при стандартном значении ускорения силы тяжести); эта единица равна

$$1 \text{ атм} = 1,033 \text{ ат} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Укажем также, что давление, соответствующее 1 мм ртутного столба, равно

$$1 \text{ мм.рт.ст.} = 133 \text{ Па}.$$

В обычных условиях давление внутри тела направлено так, как если бы тело стремилось расшириться, то есть считается положительным. В параграфе 8.1 мы говорили, что тепловое равновесие, между соприкасающимися телами, наступает при выравнивании температур обоих тел. Теперь мы можем прибавить, что в состоянии теплового равновесия должны быть одинаковыми не только температуры всех соприкасающихся тел, но и их давления.

Замечание – Тела могут находиться и в состояниях с отрицательными давлениями. В таких состояниях тело как бы «растянуто» и потому стремится сжаться. Такое состояние можно осуществить поместив жидкость в открытый с обеих сторон стеклянный капилляр, который подвергается быстрому вращению вокруг своей середины. Растягиваемая центробежными силами, жидкость, при достижении определенной скорости, «разрывается» и выбрасывается из капилляра. Этим методом удается достигнуть больших отрицательных давлений: у воды (при комнатной температуре) до 280 атм , у спирта – до 40 атм , у бензола – до 160 атм и т.д. Можно сказать, что эти значения характеризуют «прочность» жидкости на разрыв.

§ 8.3 Уравнение состояния

Свойства тел, рассматриваемых не вдаваясь в детали их молекулярной структуры (с которыми эти свойства в действительности связаны), называют **макроскопическими свойствами**. Температура, давление и объем (мы будем обозначать его буквой V) являются важнейшими величинами, характеризую-

щими макроскопическое состояние тел. Эти величины (p , T , V) называют **термодинамическими параметрами**, они характеризуют состояние системы. Однако эти три параметра не являются независимыми. Очевидно, что если некоторое количество газа заключено в сосуде объемом V , при определенной температуре T , то он автоматически будет находиться под определенным давлением p . Изменив объем и температуру, мы тем самым изменим и давление.

Таким образом, из трех величин p , T , V лишь две могут быть заданы произвольно, а третья определится как функция первых двух. Можно сказать, что тепловые свойства полностью определяются заданием каких – либо двух параметров из трех.

Функциональная зависимость $f = (p, T, V) = 0$, связывающая друг с другом давление, объем и температуру, **называется уравнением состояния** данного тела и является одним из важнейших соотношений, характеризующих его тепловые свойства. Установить теоретически вид этой функциональной зависимости можно лишь для самых простых состояний вещества (например идеального газа). Поэтому на практике прибегают к экспериментальным измерениям, результаты которых представляют в виде графиков. Так как речь идет о взаимозависимости трех величин, то необходимо строить некоторые поверхности в трехмерной системе координат, на осях которой откладывались бы величины p , T , V . Поскольку пространственное построение на практике неудобно, ограничиваются построением плоских графиков, изображая на них кривые, представляющие собой сечения трехмерной поверхности рядом плоскостей, параллельных одной из координатных плоскостей. Так, пересекая поверхность плоскостями, параллельными координатной плоскости p , V (то есть перпендикулярной оси T), мы получим семейство кривых, изображающих зависимость давления от объема при различных значениях температуры. Такие кривые называются **изотермами**. Аналогичным образом можно построить семейство **изобар** – кривых, изображающих зависимость V от T при заданных значениях p , и семейство **изохор** – кривых зависимости p от T при заданных значениях V .

§ 8.4 Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа

Наиболее простыми тепловыми свойствами обладает газ, который настолько разрежен, что взаимодействием между его молекулами практически можно пренебречь. При этом сами молекулы, вследствие разреженности газа, можно считать материальными точками. Скорости молекул как по модулю, так и по направлению могут быть любыми; изменение их происходит непрерывно. Модель газа с указанными свойствами называется идеальным газом.

Замечание – *Не следует думать, что взаимодействие между молекулами идеального газа вовсе отсутствует. Напротив, его молекулы (хоть и редко) сталкиваются друг с другом и эти столкновения существенны для установления в газе **равновесного состояния**, то есть состояния при кото-*

ром термодинамические параметры имеют определенные и постоянные значения в любой части объема, занимаемого газом, при неизменных внешних условиях.

Выведем уравнение состояния идеального газа, то есть зависимость между его давлением, объемом и температурой.

Пусть газ помещен в сосуд имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Будем считать, что стенки сосуда являются «идеально гладкими», и что взаимодействие молекул газа со стенками носит характер абсолютно упругого удара. На рисунке 66 показано упругое взаимодействие молекулы со стенкой сосуда и ее движение между стенками.

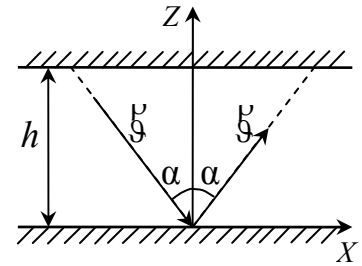


Рисунок 66

Указанные предположения делаются для простоты. Очевидно, что внутренние свойства газа не могут зависеть ни от формы сосуда, ни от свойств его стенок.

Определим давление газа на одну из граней параллелепипеда. Для этого определим импульс, передаваемый этой грани за 1 секунду сталкивающимися с ней молекулами. Так как при столкновении меняется только перпендикулярная составляющая скорости ϑ_z , то импульс, передаваемый при одном столкновении равен $m\vartheta_z - (-m\vartheta_z) = 2m\vartheta_z$, где m – масса молекулы. Двигаясь как свободная, молекула проходит расстояние между соседними стенками за время $t = h / \vartheta_z$, так что она вернется к первой стенке через время $2h / \vartheta_z$. Следовательно, за 1 секунду каждая молекула сталкивается с данной стенкой $\vartheta_z / 2h$ раз и передает ей импульс, равный $2m\vartheta_z \frac{\vartheta_z}{2h} = m\vartheta_z^2 / h$. Полная сила F_z , действующая на стенку, есть импульс, получаемый ею за 1 секунду от всех молекул газа, то есть

$$F_z = \frac{1}{h} \sum m\vartheta_z^2 = \frac{N}{h} \langle m\vartheta_z^2 \rangle.$$

Так как все направления по отношению к самому газу совершенно равноценны, то $\langle m\vartheta_x^2 \rangle = \langle m\vartheta_y^2 \rangle = \langle m\vartheta_z^2 \rangle$ и, поскольку $\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2 = \vartheta^2$, то

$$\langle m\vartheta_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle m\vartheta^2 \rangle.$$

Таким образом, имеем

$$F_z = \frac{1}{h} \frac{N}{3} \langle m\vartheta^2 \rangle.$$

Заменяя F_z на pS ,

где p – давление газа;

S – площадь грани.

Замечая, что $hS = V$ – объем параллелепипеда, получим

$$pV = \frac{1}{3} N \langle m \vartheta^2 \rangle = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{m \vartheta^2}{2} \right\rangle. \quad (8.4)$$

Так как по определению температуры (8.2) среднее значение кинетической энергии молекулы равно $\frac{3}{2} kT$, то подставляя $\frac{3}{2} kT$ в (8.4) окончательно получим следующее **уравнение состояния идеального газа**:

$$pV = NkT. \quad (8.5)$$

Выражение (8.5) часто записывают в виде

$$p = nkT, \quad (8.6)$$

где $n = N / V$ – концентрация частиц.

Уравнения (8.4) и (8.5) имеют универсальный характер – в них не входят никакие величины, которые бы зависели от природы газа. Это обстоятельство является естественным результатом пренебрежения взаимодействием между молекулами, лишаящего газ его «индивидуальности». Поэтому если взять два различных идеальных газа, находящихся в одинаковых объемах при одинаковых давлениях и температурах, то количество молекул в обоих газах будут одинаковыми, – это так называемый **закон Авогадро**.

В частности, в кубическом сантиметре любого идеального газа при нормальных условиях, то есть при температуре 0 °С и давлении в 1 атм., содержится

$$L = \frac{pV}{kT} = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ молекул},$$

*это число называют **числом Лошмидта**.*

При выводе уравнения состояния идеального газа мы пренебрегли «индивидуальностью» молекул, входящих в состав идеального газа. Поэтому уравнение (8.4) пригодно и для случая, когда газ представляет собой смесь идеальных газов. Для этого нужно в уравнении (8.4) под N понимать число молекул разных сортов, то есть

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_i + \dots, \quad (8.7)$$

где N_i – число молекул i -го сорта.

Перепишав уравнение состояния идеального газа с учетом соотношения (8.6), мы приходим к выводу, что

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (8.8)$$

Таким образом, давление смеси газов равно сумме тех давлений, которые производили бы отдельные газы смеси, занимая весь объем. Это утверждение носит название **закона Дальтона**, а давления $p_1, p_2, \dots$ называются **парциальными давлениями**.

Понятие «идеальный газ» часто применяют в широком смысле, понимая под этим любую систему частиц, для которой справедливо сказанное выше определение. При таком употреблении понятие «идеальный газ» может описывать свойства совокупности частиц любой природы: фотонов, электронов, фононов и так далее.

*В этом плане рассмотрим давление фотонного газа. Если скорость частиц газа сравнима со скоростью света, то такой газ называется **релятивистским**. В земных условиях такой случай осуществляется только для **фотонного газа**, то есть газа, состоящего из фотонов, хаотически движущихся во всевозможных направлениях. Фотонный газ всегда релятивистский, поскольку фотоны всегда движутся со скоростью света.*

Допустим, что имеется полость, стенки которой изготовлены из произвольного материала, и поддерживаются при постоянной температуре. Стенки излучают и поглощают фотоны, в результате чего в полости образуется фотонный газ. Каждый фотон, поглощаясь стенкой или отражаясь от нее, передает ей некоторый импульс. При излучении фотона стенка испытывает отдачу. В результате этих процессов возникает давление фотонного газа на стенки полости. Фотонный газ предполагается изотропным, поэтому для вычисления давления фотонного газа на стенку сосуда можно воспользоваться общей формулой (8.4),

$$pV = \frac{1}{3} \langle m \vartheta^2 \rangle.$$

Энергия фотона ε связана с его импульсом соотношением

$$p = \varepsilon / c,$$

где скорость фотона равна скорости света ($\vartheta = c$).

Поэтому из формулы (8.4) следует, что

$$pV = \frac{1}{3} \langle N \varepsilon \rangle = \frac{1}{3} \langle E \rangle. \quad (8.9)$$

§ 8.5 Идеальный газ во внешнем силовом поле

При выводе основного уравнения кинетической теории газов предполагалось, что на молекулы газа не действуют внешние силы, поэтому молекулы газа равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа (например, атмосферные газы) находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Так как на молекулы газа в этом случае действуют силы тяготения, то давление газа будет меняться от точки к точке.

Выведем закон изменения давления с высотой. При этом будем предполагать, что поле тяготения Земли однородно по направлению и температура газа постоянна во всем объеме, то есть не зависит от высоты.

Пусть силы внешнего поля имеют неизменное направление, которое направлено вдоль оси Z (рисунок 67). Возьмем две площадки с площадью $S = 1 \text{ м}^2$, ориентированные перпендикулярно оси Z и находящихся на расстоянии dz друг от друга. Если давления газа на обеих площадках равны p и $p + dp$, то разность давлений должна равняться суммарной силе, действующей на частицы газа, заключенные в объеме параллелепипеда с основанием $S = 1 \text{ м}^2$ и высотой dz (рисунок 67). Эта сила равна

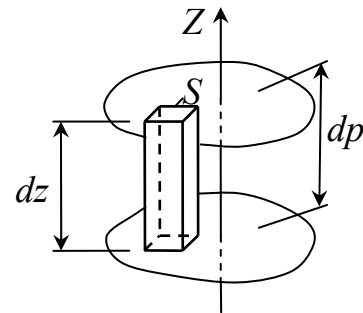


Рисунок 67

$$Fndz ,$$

где n – концентрация молекул (то есть их число в единице объема);

F – сила, действующая на одну молекулу в точке с координатой z . Поэтому

$$dp = nFdz . \quad (8.10)$$

Так как сила F связана с потенциальной энергией молекулы $\Pi(z)$ соотношением $F = -\frac{d\Pi}{dz}$, перепишем выражение (8.10) в виде

$$dp = -ndz \frac{d\Pi}{dz} = -nd\Pi . \quad (8.11)$$

Учитывая, что газ идеальный и для него справедливо уравнение (8.6) $p = nkT$, перепишем выражение (8.11), заменив в нем n , согласно выражения (8.6),

$$dp = -p \frac{d\Pi}{kT} .$$

Преобразуем полученное выражение, разделив в нем переменные,

$$\frac{dp}{p} = d(\ln p) = -\frac{d\Pi}{kT}. \quad (8.12)$$

Из (8.12) следует, что

$$\ln p = -\frac{\Pi}{kT} + \text{const},$$

и окончательно

$$p = p_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}, \quad (8.13)$$

где p_0 – давление в точке $Z = 0$, то есть на уровне Земли, в нашем случае.

Вблизи поверхности Земли потенциальная энергия молекулы на высоте Z равна $\Pi = mgz$, где m – масса молекулы. Поэтому, если считать $T = \text{const}$ (то есть не зависящей от высоты), то давление p на высоте Z будет связано с давлением p_0 на поверхности Земли соотношением

$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \quad (8.14)$$

Формулу (8.14) называют **барометрической формулой**. Обычно ее удобнее представлять в виде

$$p = p_0 e^{-\mu gz / RT}, \quad (8.15)$$

где μ – молярная масса газа;

R – газовая постоянная.

Замечание – Следует иметь в виду, что применимость барометрической формулы к реальной атмосфере довольно ограничена, поскольку атмосфера в действительности не находится в тепловом равновесии и ее температура меняется с высотой.

Поскольку, согласно уравнению кинетической теории газов (8.6), давление отличается от концентрации газов постоянным множителем kT , то для концентрации справедливо аналогичное (8.14) соотношение

$$n = n_0 e^{-\Pi / kT}, \quad (8.16)$$

где n_0 – концентрация молекул в точке, где $Z = 0$.

Выражение (8.16) называется **распределением Больцмана** во внешнем силовом поле. Из него следует, что при постоянной температуре, концентрация газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Следует иметь в виду, что если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического движения, то распределение Больцмана справедливо в любом внешнем потенциальном поле.

§ 8.6 Распределение Максвелла

При выводе основного уравнения кинетической теории идеального газа, мы предположили, что скорости молекул могут быть произвольными. Введенная нами тепловая скорость представляет собой некоторую среднюю характеристику теплового движения частиц. В действительности различные молекулы движутся с различными скоростями и можно поставить вопрос о распределении молекул газа по абсолютным значениям скоростей, вне зависимости от их направления. Эта задача впервые была решена Дж. Максвеллом.

При выводе закона о распределении молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа N тождественных молекул, находящихся в тепловом равновесии. Кроме того предполагалось, что силовые поля на газ не действуют. Ход рассуждений Максвелла довольно сложен, мы ограничимся рассмотрением физического смысла распределения Максвелла и некоторых следствий из него.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(\vartheta)$, называемой **функцией распределения молекул по скоростям**. Уточним смысл этой функции. Если разбить весь диапазон скоростей на малые интервалы $d\vartheta$, то на каждый такой интервал скоростей будет приходиться некоторое число молекул $d[N(\vartheta)]$, имеющих скорости, лежащие в этом интервале. Функция $f(\vartheta)$ определяет относительное число молекул $d[N(\vartheta)]/N$, скорости которых лежат в интервале от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, то есть

$$f(\vartheta) = \frac{d[N(\vartheta)]}{Nd\vartheta}. \quad (8.17)$$

Согласно Максвеллу, функция $f(\vartheta)$, определяющая **закон распределения** молекул идеального газа по скоростям, имеет вид

$$f(\vartheta) = A\vartheta^2 e^{-m\vartheta^2/(2kT)}, \quad (8.18)$$

где величина $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$ — представляет собой постоянную величину.

График этой функции представлен на рисунке 68. Функция обращается в нуль при $\vartheta = 0$ и при $\vartheta \rightarrow \infty$, так как неподвижных и движущихся бесконечно быстро молекул не бывает. Она имеет максимум при

$$\vartheta = \vartheta_{\epsilon} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (8.19)$$

Эта скорость называется **наиболее вероятной скоростью**, она несколько меньше введенной ранее (8.3) тепловой (или среднеквадратичной) скорости.

Поскольку разные молекулы имеют различные скорости, то при определении средних характеристик существенно, какая именно величина подвергается усреднению. С помощью распределения Максвелла можно показать, что скорости характеризующие состояние газа это:

наиболее вероятная $\vartheta_{\epsilon} = \sqrt{2kT / m}$;

средняя арифметическая $\langle \vartheta \rangle = \sqrt{8kT / \pi m} = 1,33\vartheta_{\epsilon}$;

тепловая скорость $\vartheta_T = \sqrt{3kT / m} = 1,22\vartheta_{\epsilon}$.

Эти три скорости отличаются друг от друга численными множителями порядка единицы. Поэтому каждая из них может быть использована для общего представления о скоростях теплового движения молекул.

Относительное число молекул $d[N(\vartheta)] / N$, скорости которых лежат в интервале скоростей $d\vartheta$, находится как площадь под кривой функции распределения. На рисунке 68 эта площадь заштрихована. Площадь, ограниченная всей кривой распределения и осью абсцисс, равна единице, что следует из физического смысла самой функции и формулы (8.17). Это означает, что функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} f(\vartheta) d\vartheta = 1. \quad (8.20)$$

Выражение (8.20) называется **условием нормировки**. Следует отметить, что согласно распределению Максвелла не имеет смысла говорить сколько молекул газа имеют вполне определенную скорость. Речь может идти только о среднем числе молекул в некотором интервале. Сказанное отчетливо видно на рисунке 68, где при стремлении $d\vartheta$ к нулю, площадь под кривой распределения также стремится к нулю, а это означает, что число молекул стремится к нулю. Таким образом, среднее число молекул со строго определенной скоростью ϑ равна нулю.

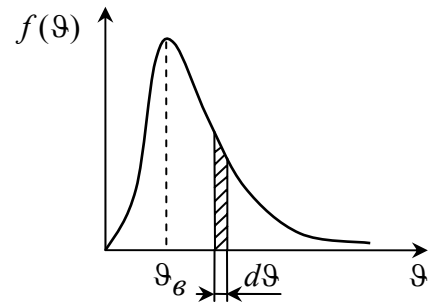


Рисунок 68

Замечания

1 Условие максимума функции $f(\vartheta)$ запишется в виде

$$\frac{d}{d\vartheta^2} \left(\vartheta^2 e^{-m\vartheta^2/2kT} \right) = 0.$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\left(1 - \frac{m}{2kT} \vartheta^2 \right) e^{-m\vartheta^2/2kT} = 0. \quad (8.21)$$

Следовательно функция $f(\vartheta)$ будет максимальна при

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Второе решение уравнения (8.21) $\vartheta = \infty$, даст минимальное значение функции $f(\vartheta)$.

2 Согласно определению, средняя (по модулю) скорость находится из выражения

$$\langle \vartheta \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty \vartheta d[N(\vartheta)] = \int_0^\infty \vartheta f(\vartheta) d\vartheta. \quad (8.22)$$

Подставляя в (8.22) значение $f(\vartheta)$ из (8.18) получим интеграл, который легко решается по частям.

3 Тепловая (или среднеквадратичная) скорость по определению равна

$$\vartheta_T = \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \left[\int_0^\infty \vartheta^2 f(\vartheta) d\vartheta \right]^{1/2}. \quad (8.23)$$

Решая этот интеграл по частям, мы приходим к табличному интегралу Пуассона.

Решение интегралов (8.22) и (8.23) мы предлагаем проделать самостоятельно.

4 Следует иметь в виду, что для различных расчетов удобнее ввести относительную скорость равную

$$u = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}.$$

При этом формула (8.18) приводится к виду

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}, \quad (8.24)$$

не зависящему ни от рода газа, ни от температуры.

Следует подчеркнуть, что распределение Максвелла основано на классической механике. Поэтому его справедливость в такой же мере ограничена квантовыми явлениями, как и вообще применимость классической механики к тепловому движению.

§ 8.7 Работа и количество теплоты. I закон термодинамики

В предыдущих параграфах мы определили три термодинамических параметра, выяснили их физическую природу и установили функциональную связь между ними в случае идеального газа.

Так при любом изменении объема, тело перемещает окружающие тела, то есть совершает работу.

Рассмотрим, например газ, находящийся перед поршнем в цилиндрическом сосуде (рисунок 69). Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние dh , то он производит над ним работу dA , равную произведению

$$Fdh,$$

где F – сила, действующая на поршень со стороны газа.

Но, по определению

$$F = pS,$$

где p – давление газа;

S – площадь поршня.

Поэтому $dA = pSdh$. Замечая, что произведение Sdh есть увеличение объема газа dV , окончательно находим

$$dA = pdV. \quad (8.25)$$

Формула (8.25) определяет элементарную работу при бесконечно малом изменении объема газа. Причем работа зависит только от давления тела и общего изменения его объема, но не зависит от его формы. (Сразу оговорим, что высказанное утверждение не относится к твердым телам). Посколь-

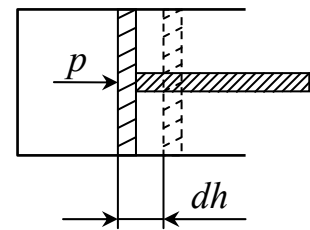


Рисунок 69

ку при движении поршня в цилиндре давление может меняться, то работа, совершаемая газом при конечных изменениях объема (например, от V_1 до V_2), должна быть представлена в виде интеграла

$$A = \int_{V_1}^V p dV. \quad (8.26)$$

Принято считать работу положительной при расширении тела ($dV > 0$), то есть когда система совершает работу над окружающими телами. Напротив, при сжатии системы ($dV < 0$), то есть когда работа совершается над системой со стороны окружающих тел, работа считается отрицательной.

Произведенная в том или ином процессе работа допускает наглядную геометрическую интерпретацию, если изобразить процесс графически с помощью кривой в координатах p, V . Пусть, например, изменение давления газа при его расширении изображается кривой 1-2 (рисунок 70). При увеличении объема на dV , совершаемая газом работа равна $p dV$, то есть площади заштрихованного бесконечно малого участка. Поэтому полная работа, совершаемого газом при его расширении от объема V_1 до объема V_2 изобразится площадью 1 – 2 – V_2 – V_1 , заключенной под кривой, ограниченной двумя вертикальными линиями. Другими словами, площадь диаграммы сразу дает работу, совершаемую газом в рассматриваемом процессе.

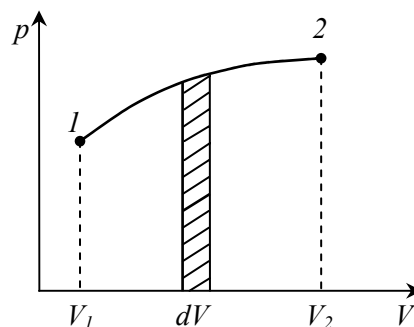


Рисунок 70

Часто приходится иметь дело с **круговыми процессами** или **циклами** (рисунок 71), в результате которых система возвращается в исходное состояние. Направление протекания процессов в цикле указывается на диаграмме стрелкой. Так на участке $1a2$ газ расширяется, а на участке $2b1$ — сжимается. Работа, произведенная газом в этом случае, равна разности площадей под кривыми расширения и сжатия газа, то есть изображается заштрихованной на рисунке 71 площадью, заключенной внутри замкнутой кривой. Особо отметим, что площадь под кривыми, представленными на рисунках 70 и 71 зависит от вида кривой, то есть от процесса.

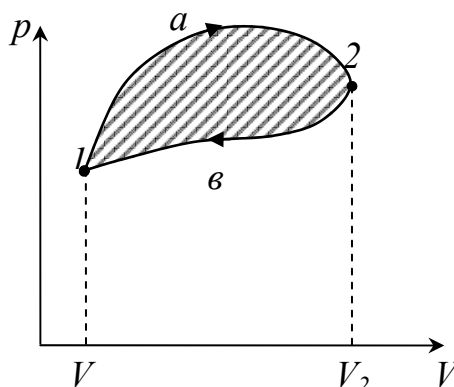


Рисунок 71

Наиболее просто полная работа, производимая газом при расширении (или сжатии) выражается в случае изобарического процесса ($p = \text{const}$). В соответствии с формулой (8.26), работа при изобарическом процессе будет равняться

$$A = p(V_2 - V_1). \quad (8.27)$$

Определим еще работу совершенную при изотермическом процессе ($T = \text{const}$) расширении одного моля идеального газа. Исходя из формулы (8.25) и уравнения состояния идеального газа (8.5), запишем

$$dA = pdV = \frac{RT}{V}dV = RTd(\ln V). \quad (8.28)$$

Так как температура T по определению процесса остается постоянной, то выражение (8.28) можно переписать в виде

$$dA = d(RT \ln V). \quad (8.29)$$

Из (8.29) следует, что работа A равна разности значений величины $RT \ln V$ в конце и в начале процесса, то есть

$$A = RT(\ln V_2 - \ln V_1) = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.30)$$

Если тело не получает извне никакой энергии, то работа при расширении происходит за счет его **внутренней энергии**. **Внутренняя энергия**, обозначим ее буквой E , включает в себя кинетическую энергию теплового движения атомов вещества и потенциальную энергию их взаимодействия друг с другом. В случае идеального газа, внутренняя энергия определяется только кинетической энергией частиц газа. Характерная особенность внутренней энергии состоит в том, что она является **функцией состояния** и не зависит от того, каким путем мы привели систему в данное состояние. При изменении состояния приращение внутренней энергии dE определяется только конечным и начальным состояниями и не зависит от вида процесса, который перевел систему из одного состояния в другое.

Однако изменение внутренней энергии тела при некотором процессе, вообще говоря, не совпадает с произведенной работой. Дело в том, что тело может получать (или отдавать) энергию путем ее непосредственного перехода от других тел при контакте. Кроме того, передача энергии может происходить и через излучение. Получаемую таким образом энергию называют **количеством тепла**. Мы будем считать эту величину положительной, если тело получает тепло, и отрицательной, если оно отдает тепло. В системе единиц СИ, количество тепла измеряется в джоулях. Однако, при тепловых измерениях в качестве единицы количества теплоты сохранилась особая единица энергии – калория. Приблизительное соотношение между калорией и джоулем таково

$$1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж}.$$

В параграфе 8.1 мы определили теплоту как энергию которой обмениваются тела при теплообмене, то есть за счет молекулярных взаимодействий. Как видно из определения теплота определяет характер протекания процесса теплообмена, но не состояние самой системы. Другими словами, количество теплоты, как и работа, зависит от вида процесса и не является функцией состояния системы. Еще раз подчеркнем, что о количестве теплоты можно говорить только в процессе теплообмена; состояние же системы характеризуется только ее внутренней энергией.

Из всего сказанного выше вытекает, что бесконечно малое изменение внутренней энергии складывается из двух частей: она возрастает за счет полученного телом количества тепла dQ и убывает за счет произведенной телом работы dA , то есть

$$dE = dQ - dA \quad (8.31)$$

или

$$dE = dQ - pdV. \quad (8.32)$$

Написанные соотношения выражают собой закон сохранения энергии при тепловых процессах или **первый закон термодинамики**. Обычно его записывают в виде

$$dQ = dE + dA \quad (8.33)$$

и говорят, что количество теплоты, полученное системой в процессе теплопередачи, равно сумме изменения внутренней энергии и работы, совершенной системой против внешних сил.

Еще раз отметим, что в выражении (8.33) только внутренняя энергия E является **функцией состояния** (в каждом определенном состоянии тело обладает определенной энергией), поэтому и полное изменение энергии тела при процессе является величиной, зависящей лишь от конечного и начального состояний (то есть от разности $E_2 - E_1$ энергий в этих конечных состояниях). Разделение же этого изменения на количество тепла Q и работу A неоднозначно и зависит от пути перехода (то есть от вида процесса) из начального в конечное состояния. В частности, при круговом процессе (рисунок 71) полное изменение внутренней энергии равно нулю, а поглощенное телом количество тепла Q и произведенная им работа A отличны от нуля. Из сказанного, на основании I закона термодинамики (8.31), можно записать, что для кругового процесса

$$A = Q.$$

Последнее равенство утверждает, что нельзя построить тепловой двигатель, работающий по замкнутому циклу, который совершал бы работу большую, чем подводимое к нему количество теплоты. Исторически такой двигатель называется **вечным двигателем I рода**.

§ 8.8 Теплоемкость. Теплоемкость идеального газа

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из первого закона термодинамики.

Если при поглощении количества тепла dQ температура тела повышается на dT , то отношение

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (8.34)$$

называют **теплоемкостью** тела. Но, поскольку величина dQ зависит от процесса, такое определение само по себе недостаточно, так как необходимо еще указать, что происходит с другими, помимо температуры, свойствами тел. В связи с этой неоднозначностью возможны и различные определения теплоемкости.

Наиболее употребительны в физике так называемые **теплоемкость при постоянном объеме** C_V и **теплоемкость при постоянном давлении** C_p , определяющие количество тепла при нагревании тела в условиях, когда поддерживаются неизменными, соответственно, его объем и давление. Таким образом, теплоемкость является функцией процесса.

*Мы будем пользоваться в основном **молярной теплоемкостью** C , то есть теплоемкостью отнесенной к молю вещества. В системе единиц СИ молярная теплоемкость имеет размерность, $[Дж / (моль \cdot K)]$. В таблицах обычно указывают **удельную теплоемкость**, то есть теплоемкость отнесенную к единице массы вещества $[Дж / (кг \cdot K)]$. Ее обозначают буквой c .*

Если при нагревании объем остается постоянным (изохорический процесс) то, согласно I закона термодинамики, $dQ = dE$, то есть все сообщаемое телу тепло идет на увеличение его внутренней энергии. Поэтому мы можем записать

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (8.35)$$

Такая форма записи подчеркивает, что при дифференцировании объем V считается постоянным (это так называемая в математике **частная производная**).

Если при нагревании газа остается постоянным давление, то сообщаемое тепло (согласно **I закона термодинамики**) идет не только на увеличение внутренней энергии, но и на совершение работы. В этом случае можно записать, что

$$dQ = dE + pdV = d(E + pV), \quad (8.36)$$

так как $p = const$.

Из соотношения (8.36) следует, что изменение количества тепла оказывается равным изменению величины

$$W = E + pV, \quad (8.37)$$

которая называется **энтальпией** (или **тепловой функцией**), которая наряду с энергией, является определенной функцией состояния тела. Таким образом, теплоемкость при постоянном давлении вычисляется по формуле

$$C_p = \left(\frac{\partial W}{\partial T} \right)_p. \quad (8.38)$$

Рассмотрим физическую природу введенных величин на примере идеального газа.

Поскольку молекулы идеального газа предполагаются не взаимодействующими друг с другом, то изменение их среднего взаимного расстояния при изменении объема газа не может сказаться на его внутренней энергии. Другими словами, внутренняя энергия идеального газа, зависит от температуры, но не от объема и давления. Отсюда следует, что и теплоемкость газа $C_V = dE / dT$ тоже зависит только от температуры. То же самое относится и к теплоемкости $C_p = dW / dT$, причем между обеими теплоемкостями существует простая связь.

Будем рассматривать (здесь и в дальнейшем) один моль газа. В силу уравнения состояния $pV = RT$ и выражение (8.37)

$$W = E + pV = E + RT.$$

Продифференцировав это равенство по температуре, согласно формул (8.35) и (8.38), получим

$$C_p = C_V + R. \quad (8.39)$$

Напомним, что газовая постоянная R равна

$$R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 2 \frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Легко найти теплоемкость одноатомного газа. В этом случае внутренняя энергия газа представляет собой просто сумму кинетических энергий поступательного движения его частиц. Поскольку, согласно определению температуры средняя кинетическая энергия одной частицы равна $\frac{3}{2}kT$, то внутренняя энергия одного моля газа равна

$$E = \frac{3}{2} N_0 kT = \frac{3}{2} RT, \quad (8.40)$$

где N_0 – число Авогадро.

Поэтому теплоемкости равны, согласно (8.5) и (8.39)

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad \text{и} \quad C_P = \frac{5}{2} R. \quad (8.41)$$

Особо отметим, что полученные значения теплоемкости вообще не зависят от температуры.

Более сложное происхождение имеют теплоемкости многоатомных газов. Их внутренняя энергия складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движений молекул и из энергии колеблющихся внутри молекулы атомов. Каждый из этих трех видов движения вносит свой вклад в теплоемкость.

Так двухатомная молекула обычно моделируется в виде «гантели» и, следовательно, обладает 5 степенями свободы: тремя поступательными движениями как целого и двумя вращательными, вокруг осей перпендикулярных оси «гантели». Трех и более атомная молекула обладает 6 степенями свободы: тремя поступательными и тремя вращательными вокруг осей, проходящих через центр масс системы.

Напомним, что под степенью свободы понимают минимальное число независимых координат однозначно определяющих положение тела в пространстве.

Вернемся к определению температуры. Поскольку при поступательном движении молекула газа обладает тремя степенями свободы, то, по формуле (8.2), можно сказать, что на каждую из них приходится средняя кинетическая энергия $\frac{kT}{2}$. Согласно классической механике такой результат получается для всех вообще степеней свободы молекулы, связанных как с поступательным движением, так и с ее вращением и с колебаниями атомов в молекуле. При этом на колебательную степень свободы должны приходиться в среднем по две половинки kT – одна в виде кинетической и одна в виде потенциальной энергий (так как их средние значения одинаковы).

Таким образом, средняя энергия молекулы равна

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (8.42)$$

где i – сумма числа поступательных ($Z_{\text{пост}}$), вращательных ($Z_{\text{вр}}$) и удвоенного числа колебательных ($Z_{\text{кол}}$) степеней свободы:

$$i = Z_{\text{пост}} + Z_{\text{вр}} + 2Z_{\text{кол}}. \quad (8.43)$$

Учитывая формулы (8.35), (8.39) и (8.40), получим выражения для молярных теплоемкостей

$$C_V = \frac{i}{2}R \quad \text{и} \quad C_P = \frac{i+2}{2}R. \quad (8.44)$$

Замечание – В результате, согласно законов классической механики, мы получим, что любой газ должен обладать постоянной, не зависящей от температуры, теплоемкостью, определяющейся только числом степеней свободы молекулы. Однако экспериментально в широком интервале температур это не подтверждается. Дело в том, что колебательное движение атомов в молекуле имеет характер «нулевых колебаний» (смотрите замечания к параграфу 8.1) не только при низких температурах, но и при довольно высоких температурах. Причина этого заключается в сравнительно большой величине энергии нулевых колебаний. «Нулевая» же энергия по своей сути не зависит от температуры и поэтому не сказывается на теплоемкости. Так у молекул двухатомных газов (водород, кислород, азот и другие) внутримолекулярные колебания атомов полностью «включаются» в движение лишь при температурах порядка нескольких тысяч градусов. При меньших температурах их вклад в теплоемкость быстро уменьшается и при комнатных температурах практически отсутствует.

«Нулевая» энергия вращения молекул очень мала. Поэтому классическая механика становится применимой к этому движению очень рано: для двухатомных молекул уже при нескольких Кельвин (за исключением водорода, где требуется температура около 80 K).

Таким образом, в области комнатных температур теплоемкость двухатомных молекул связана лишь с поступательным и вращательным движениями молекул и очень близка к своему теоретическому (основанному на классической механике) постоянному значению

$$C_V = \frac{5}{2}R \quad \text{и} \quad C_P = \frac{7}{2}R.$$

Кстати, интересно отметить, что в «квантовой области» средние значения энергии теплового вращательного и колебательного движений (а значит и теплоемкость газа) оказываются зависящими не только от температуры, но и от «индивидуальных» свойств молекулы: ее моментов инерции и частот колебаний. Именно по этой причине эти энергии, в отличие от энергии поступательного движения, не могут служить для прямого определения температуры.

Еще более сложный характер имеет теплоемкость многоатомных газов. Атомы в многоатомной молекуле могут совершать различные типы колебаний с различными «нулевыми» энергиями. По мере повышения температуры эти колебания одно за другим постепенно «включаются» в тепловое

движение, соответственно чему возрастает теплоемкость газа. До полного включения всех типов колебаний дело может вообще не дойти, поскольку при высоких температурах может наступить распад молекул.

Отметим, что все сказанное относится к идеальному газу. При сильных сжатиях, когда свойства газа начинают заметно отличаться от свойств идеального газа, меняется также и его теплоемкость за счет вклада, вносимого во внутреннюю энергию газа взаимодействием молекул друг с другом.

§ 8.9 Теплоемкость твердых тел

Теплоемкость твердого тела связана с энергией атомов, совершающих малые колебания около своих положений равновесия. Колебание вдоль произвольного направления можно разложить на колебания вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. Поэтому каждому атому в твердом теле следует приписывать три колебательные степени свободы. При этом на каждую колебательную степень свободы приходится средняя энергия равная kT (по $\frac{kT}{2}$ от средней кинетической и от средней потенциальной энергий). Число атомов в одном моле твердого тела совпадает, в случае химически простых веществ, с числом Авогадро. Ограничившись рассмотрением химически простых веществ, для одного моля атомов получим внутреннюю энергию равную

$$E = N_0 3kT = 3RT.$$

Отсюда молярная теплоемкость твердого тела при постоянном объеме будет равна

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = 3R. \quad (8.45)$$

Так как объем твердых тел при нагревании мало меняется, то теплоемкость при постоянном давлении незначительно отличается от теплоемкости при постоянном объеме, то есть $C_p \approx C_V$, то можно говорить просто о теплоемкости твердого тела.

Итак, согласно (8.45) теплоемкость моля химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова и равна $3R$. Это утверждение составляет содержание **закона Дюлонга и Пти**, установленного опытным путем. Закон хорошо выполняется для целого ряда веществ при комнатных температурах. Однако для сколько ни будь сложных соединений при повышении температуры практически никогда не выполняется, так как вещество раньше плавится или разлагается.

При понижении температуры теплоемкость твердого тела уменьшается и стремится к нулю при T стремящемся абсолютному нулю температуры по закону $C \sim T^3$. Это является следствием общего утверждения (называемого **теоремой Нернста**, а иногда III законом термодинамики), согласно которому при достаточно низких температурах все характеризующие твердое тело величины перестают зависеть от температуры.

В частности, при приближении к абсолютному нулю перестают зависеть от температуры энергия и энтальпия тела. Поэтому стремятся к нулю теплоемкости C_p и C_V , являющиеся производными от этих величин по температуре.

В заключении отметим, что строгая теория теплоемкости твердых тел была создана на основе квантовой теории трудами Эйнштейна и Дебая.

Глава 9 Тепловые процессы

§ 9.1 Тепловой процесс

Изучая механику, мы определили процесс как любое изменение состояния системы. Состояние системы в термодинамике определяется тремя термодинамическими параметрами (p , V , T). Если в системе эти параметры имеют определенные и постоянные значения при неизменных внешних условиях, то такая система называется **равновесной**. При изменении внешних условий система будет выведена из состояния равновесия. Однако спустя некоторый промежуток времени система вернется в равновесное состояние, вообще говоря, отличное от исходного. Этот промежуток времени называется **временем релаксации** и обозначается буквой τ .

Всякое изменение хотя бы одного термодинамического параметра называется **тепловым** или **термодинамическим процессом**. Все тепловые процессы разделяются на равновесные и неравновесные.

Процесс называется равновесным, если состояние системы в каждый момент времени с требуемой точностью является равновесным. Происходит только последовательная смена во времени одних равновесных состояний другими.

Равновесный процесс может происходить только при достаточно медленном изменении внешних условий. Условие медленности равновесного процесса состоит в том, что время релаксации τ должно быть пренебрежимо мало по сравнению со временем t изменения внешних условий, то есть

$$\tau / t \ll 1. \quad (9.1)$$

Важнейшим свойством всякого равновесного процесса является его обратимость во времени. Обратимость означает возможность возвращения

системы в первоначальное состояние через те же промежуточные состояния, которые в первоначальном процессе были пройдены.

Замечание – *Равновесный процесс обратим только для изотропных систем. Для анизотропных систем это условие может не выполняться.*

Так как при равновесном процессе в каждый момент времени система находится в состоянии теплового равновесия, то такой процесс можно изобразить графически, что мы и делали вводя понятие работы (смотрите параграф 8.7).

Если процесс не является медленным, в том смысле, который был отмечен выше, то он является **неравновесным**. Неравновесным, называется процесс, при котором хотя бы одно из состояний, проходимых системой, является неравновесным. Все неравновесные процессы необратимы.

В отличие от равновесных процессов, неравновесные процессы нельзя изобразить графически. Дело в том, что неравновесное состояние не может быть однозначно охарактеризовано значениями параметров, относящихся ко всей системе в целом. Например, нельзя сказать, что неравномерно нагретое тело имеет определенную температуру T . Поэтому неравновесному состоянию нельзя сопоставить точку на диаграмме, а неравновесному процессу – кривую.

Ряд тепловых процессов выделяют в особую группу изопроцессов: изотермический, изобарический и изохорический. В этих процессах один из термодинамических параметров остается постоянным. Частично эти процессы мы разобрали в предыдущих параграфах, более детально мы предлагаем Вам разобрать самостоятельно, повторив материал школьного курса физики.

§ 9.2 Адиабатический процесс

Для лучшего понимания сути адиабатического и других тепловых процессов рассмотрим самый простой процесс – расширение идеального газа в пустоту. Представим себе некоторый сосуд, разделенный перегородкой на две части (рисунок 72). Пусть газ вначале находится в части II сосуда, а в I – пустота. Если мы откроем перегородку, то газ займет весь сосуд. Так как расширяясь газ не совершает работу (нет внешних сил), то его внутренняя энергия остается без изменения, то есть

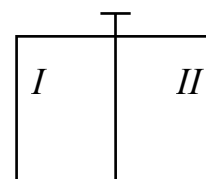


Рисунок 72

$$E_1 = E_2. \quad (9.2)$$

Так как внутренняя энергия зависит только от температуры, то из равенства (9.2) следует также постоянство температуры при расширении идеального газа в пустоту. Температура газов далеких от идеального при расширении в пустоту будет изменяться. Забегая вперед, отметим, что рассмотрен-

ный процесс расширения газа в пустоту является необратимым процессом, то есть неравновесным.

Очень сильно отличается от расширения газа в пустоту другой процесс расширения газа, называемый **адиабатическим**. Этот процесс играет важную роль в физике и технике, поэтому мы рассмотрим его подробно.

Для адиабатического процесса характерно: что газ все время находится под внешним давлением, равным упругости самого газа, и в течение всего процесса газ остается теплоизолированным от внешней среды, то есть не отдает и не получает тепло. Наиболее просто представить себе адиабатическое расширение (или сжатие) газа, находящегося в теплоизолированном цилиндрическом сосуде с поршнем. При достаточно медленном выдвигании поршня газ будет расширяться, следуя за поршнем и имея в каждый момент времени давление соответствующее занимаемому им в этот момент общему объему, то есть в газе будет успевать устанавливаться тепловое равновесие, соответствующее мгновенному положению поршня. Следовательно, адиабатический процесс будет равновесным процессом.

Напротив, при слишком быстром выдвигании поршня газ не будет успевать следовать за поршнем и перед поршнем возникнет область пониженного давления, в которую будет расширяться газ. Другими словами возникнет процесс типа расширения газа в пустоту, а это уже не адиабатический процесс.

Очевидно, что при слишком быстром выдвигании поршня перед ним возникнет область повышенного давления, то есть процесс опять не будет соответствовать условию адиабатичности.

С практической точки зрения условие медленности в адиабатическом процессе выполняется очень легко. Анализ показывает, что оно нарушается лишь при скорости движения поршня сравнимой со скоростью распространения звука в данном газе. Поэтому при практическом осуществлении адиабатического процесса на первый план выдвигается условие теплоизоляции, требующее «достаточной быстроты» процесса (в технике адиабатический процесс носит «взрывной» характер), чтобы за время его протекания газ не успел обменяться теплом с окружающей средой. Понятно, что это условие вполне совместимо с поставленным выше условием «достаточной медленности, так как оно зависит от тщательности теплоизоляции цилиндра и не связано с самой природой адиабатического процесса. По этой причине в физике адиабатический процесс характеризуют в первую очередь как равновесный процесс (то есть процесс протекающий «достаточно медленно»), что имеет принципиальный характер.

Итак, при адиабатическом процессе уже нельзя утверждать, что внутренняя энергия газа остается постоянной, поскольку газ совершает при своем расширении работу (или, при сжатии над ним совершается работа). Общее уравнение адиабатического процесса получим из I закона термодинамики (8.33), положив в нем количество тепла dQ равным нулю, то есть

$$dE + pdV = 0. \quad (9.3)$$

Уравнение адиабаты можно представить тремя соотношениями

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const},$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

$$pV^{\gamma} = \text{const}.$$

Последнее из них называют уравнением **Пуассона**. Использование одного из указанных уравнений определяется условиями конкретной задачи.

Докажем это, применив уравнение (9.3) к адиабатическому расширению (или сжатию) идеального газа. Как и раньше, для простоты будем относить все величины к одному молю газа.

Поскольку энергия идеального газа есть функция только его температуры, то с учетом формулы (8.35) перепишем уравнение адиабатического процесса в виде

$$C_V dT + p dV = 0. \quad (9.4)$$

Подставив в (9.4) $p = RT/V$ и разделив все равенство на T , получим соотношение

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0. \quad (9.5)$$

Считая теплоемкость газа постоянной в интересующем нас интервале температур (напомним, что для одноатомных газов это справедливо всегда, а для двухатомных газов справедливо в значительном интервале температур), перепишем (9.5) в виде

$$d(C_V \ln T + R \ln V) = 0,$$

откуда

$$C_V \ln T + R \ln V = \text{const},$$

или, после потенцирования,

$$T^{C_V} V^R = \text{const}. \quad (9.6)$$

Возводя выражение (9.6) в степень $1/C_V$ и учитывая, что $C_p - C_V = R$, перепишем его в окончательном виде:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (9.7)$$

где $\gamma = C_p / C_v$ – называется постоянной адиабаты.

Комбинируя формулу (9.7) с формулой $pV = RT$, можно получить аналогичные соотношения, связывающие температуру и давление при адиабатическом процессе,

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}, \quad (9.8)$$

и

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \quad (9.9)$$

Соотношение (9.9) обычно называют **уравнением адиабаты**.

Так как уравнение адиабаты похоже на уравнение изотермы, то интересно их сравнить (рисунок 73). Адиабата 1 проходит круче, чем пересекающая ее изотерма 2. Действительно при адиабатическом сжатии (расширении), давление возрастает (уменьшается) обратно пропорционально V^{γ} , то есть по более быстрому закону (так как всегда $\gamma > 1$). С физической точки зрения это вполне понятно, так как при адиабатическом сжатии газ нагревается, что приводит к увеличению давления а при изотермическом – температура не меняется.

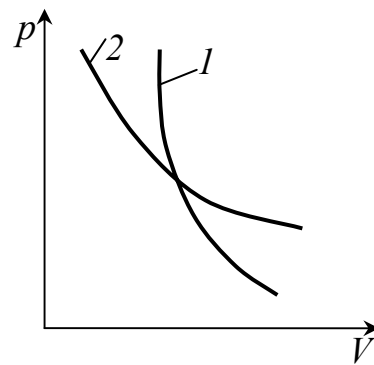


Рисунок 73

Замечание – Отметим, что любая из кривых, отображающих один из изопроцессов, пересекается со всеми кривыми, отображающими другие изопроцессы.

Работу при адиабатическом процессе считают по формуле (8.26). Чтобы не считать интеграл, мы воспользуемся соотношениями (8.25) и (9.4), а именно:

$$dA = pdV = -dE.$$

Следовательно, с учетом (8.35)

$$A = C_v (T_1 - T_2). \quad (9.10)$$

Используя уравнение (9.7), получим

$$A = C_v T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

и окончательно

$$A = \frac{RT}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Все изопроцессы, включая адиабатический, составляют часть так называемых **политропных процессов** – процессов протекающих в системах с постоянной теплоемкостью C . Применяя I закон термодинамики к политропным процессам, можно получить уравнение политропы.

Действительно, для одного моля газа имеем:

$$CdT = C_V dT + pdV. \quad (9.11)$$

Продифференцировав уравнение состояния $pV = RT$, найдем, что

$$pdV + Vdp = RdT. \quad (9.12)$$

Исключая из уравнений (9.11) и (9.12) температуру и приводя подобные члены, получим

$$pdV(C_p - C) = Vdp(C - C_V). \quad (9.13)$$

Введем обозначение

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \quad (9.14)$$

и подставив его в (9.13), приведем его к виду

$$\frac{dp}{p} + n \frac{dV}{V} = 0. \quad (9.15)$$

После интегрирования (9.15) получим **уравнение политропы:**

$$pV^n = \text{const}. \quad (9.16)$$

По аналогии с выводом уравнений (9.7) и (9.8), уравнение (9.16) можно записать в виде

$$Tp^{\frac{n-1}{n}} = \text{const},$$

и

$$TV^{n-1} = \text{const}.$$

Теплоемкость в политропном процессе найдем, преобразовав соотношение (9.14) к виду

$$C = \frac{nC_V - C_p}{n - 1}. \quad (9.17)$$

§ 9.3 Стационарный поток

Значительный интерес представляют процессы, при которых газ (или жидкость) стационарно переходит от одного давления к другому давлению без теплового обмена с окружающей средой.

Стационарность процесса означает, что оба давления остаются неизменными в продолжении всего перехода.

Такой переход сопровождается, вообще говоря, течением газа (или жидкости) с отличной от нуля скоростью движения. Однако, эту скорость можно искусственно сделать очень малой, если газ будет переходить от одного давления к другому через препятствие, создающее большое трение. Роль такого препятствия может играть, например, пористая перегородка или маленькое отверстие.

Стационарный переход теплоизолированного газа от одного давления к другому, происходящий в условиях, когда газ в процессе перехода не приобретает сколько-нибудь значительной скорости, называется **процессом Джоуля-Томсона**.

Схематически процесс Джоуля-Томсона можно представить как переход газа, находящегося в цилиндрическом сосуде, через пористую перегородку Π (рисунок 74) от объема V_1 к объему V_2 . Постоянство давлений по обе стороны перегородки Π достигается с помощью двух поршней, поддерживающих нужные давления p_1 и p_2 .

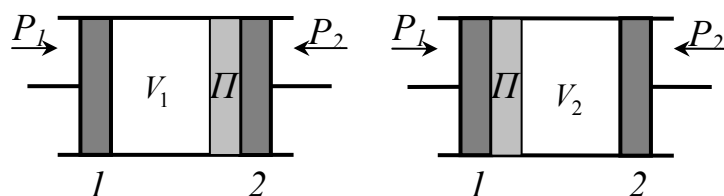


Рисунок 74

Пусть вначале газ занимает объем V_1 между поршнем 1 и перегородкой Π . Будем вдвигать поршень 1 и выдвигать поршень 2, сохраняя действующие на поршни давления p_1 и p_2 постоянными. В результате газ, просачиваясь с малой скоростью через пористую перегородку, займет объем V_2 между перегородкой и поршнем 2 и будет находиться под давлением p_2 . Поскольку в данном процессе отсутствует теплообмен с окружающей средой,

то работа, производимая поршнями, будет равна изменению внутренней энергии газа. Так как давления газа p_1 и p_2 остаются в течении процесса постоянными, то суммарная работа, произведенная поршнями над газом (с учетом соотношения (8.27)), равна $p_1 V_1 - p_2 V_2$. Поскольку работа произведена за счет приращения внутренней энергии газа, то можно записать, что

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = E_2 - E_1,$$

или

$$E_1 + p_1 V_1 = E_2 + p_2 V_2,$$

то есть

$$W_1 = W_2. \quad (9.18)$$

Таким образом, в процессе Джоуля-Томсона сохраняется энтальпия. Для идеального газа энтальпия, как и энергия, зависит только от температуры. Поэтому из (9.18) следует равенство температур. Таким образом, если процессу Джоуля-Томсона подвергается идеальный газ, то его температура не изменяется.

У реальных газов в процессе Джоуля-Томсона температура меняется и очень значительно. Например, воздух, расширяясь при комнатной температуре от давления 200 атм до давления в 1 атм, охлаждается на 40° .

*При достаточно высоких температурах все газы при расширении в процессе Джоуля-Томсона нагреваются, а при более низких температурах (и не слишком больших давлениях) – охлаждаются, так что существует температура (она называется **точкой инверсии**), начиная с которой изменение температуры меняет свой знак. Положение точки инверсии зависит от давления и различно для разных газов.*

Изменение температуры в процессе Джоуля-Томсона широко используется в технике для сжижения газов. При этом для снижения скорости газа пользуются узким отверстием (так называемым дроссельным вентилем) и называют весь процесс дросселированием.

Результаты, полученные при рассмотрении процесса Джоуля-Томсона, легко обобщить и на случай любого стационарного теплоизолированного потока газа (или жидкости), движущегося **с отличной от нуля скоростью**. Но теперь уже нельзя пренебрегать кинетической энергией движущегося газа. Производимая газом работа идет не только на увеличение его внутренней энергии, но и на кинетическую энергию его движения как целого. Иными словами, для стационарного потока газа (или жидкости) движущегося с конечной скоростью, выполняется соотношение

$$\frac{m v^2}{2} + E + pV = const$$

или

$$\frac{m\vartheta^2}{2} + W = const. \quad (9.19)$$

Написанное уравнение (9.19) означает, что величина $\left(\frac{m\vartheta^2}{2} + W\right)$ для данного количества вещества одинакова, в каком бы месте потока это вещество не находилось.

Если необходимо учесть потенциальную энергию жидкости в поле тяжести (для газа вес не играет существенной роли), то выражение (9.19) надо записать в виде

$$\frac{m\vartheta^2}{2} + mgz + E + pV = const, \quad (9.20)$$

где z – высота, на которой находится данное место потока, м.

Далее будем считать, что движение потока не сопровождается сколько-нибудь заметным трением как внутри самого движущегося вещества, так и со стороны каких-либо внешних препятствий (то есть случай определенным образом противоположный процессу Джоуля-Томсона, где трение играло существенную роль). В этих условиях можно считать, что теплоизолированным от внешней среды является не только поток в целом, но и движение каждого отдельного участка вещества в потоке; при наличии трения это было бы не так, поскольку тепло от трения выделялось бы внутри потока. Другими словами, можно считать, что в процессе движения каждый участок вещества расширяется (или сжимается) адиабатически.

Для примера, рассмотрим, в этих условиях, вытекание газа из сосуда, в котором он находится при давлении p , отличном от атмосферного давления p_0 . Если вытекание происходит через достаточно маленькое отверстие, то скорость движения газа внутри сосуда можно считать равной нулю. Скорость же вытекающей жидкости ϑ_0 определится равенством

$$W_0 + \frac{\vartheta_0^2}{2} = W, \quad (9.21)$$

где m – масса газа равная единице;

W и W_0 – величины энтальпии внутри сосуда и в вытекающей струе газа.

Если газ идеальный, то, согласно формуле (8.38), можно считать $dW = C_p dT$, откуда следует, что $W - W_0 = C_p (T - T_0)$, и тогда из выражения (9.21) получим

$$\vartheta_0^2 = 2C_p (T - T_0). \quad (9.22)$$

Температуру T_0 , в вытекающей струе, можно определить из соотношения (9.8), согласно которому

$$T_0 = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (9.23)$$

Подставляя (9.23) в формулу (9.22), получим выражение, определяющее скорость истечения газа

$$\vartheta_0^2 = 2C_p T \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]. \quad (9.24)$$

Все жидкости малосжимаемы, поэтому течение жидкостей не сопровождается заметным изменением их объема, то есть текущую жидкость можно рассматривать как несжимаемую, обладающую постоянной плотностью.

Уравнение стационарного течения (без трения) такой жидкости выглядит особенно просто. В этом случае общее уравнение адиабатического процесса ($dE + pdV = 0$) сводится просто к $dE = 0$, так как $dV = 0$, в силу несжимаемости жидкости. Другими словами энергия E остается постоянной, поэтому ее можно просто убрать из выражения (9.20) и записать

$$\frac{m\vartheta^2}{2} + pV + mgz = \text{const}. \quad (9.25)$$

Разделив уравнение (9.25) на массу и учитывая, что отношение m/V есть плотность жидкости ρ , найдем окончательно, что вдоль теплоизолированного стационарного потока несжимаемой жидкости, движущейся без трения, остается постоянной следующая величина

$$\frac{\vartheta^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (9.26)$$

Выражение (9.26) называется **уравнением Бернулли**.

Для примера рассмотрим движение жидкости по трубе переменного сечения, расположенной горизонтально. В этом случае влияние силы тяжести можно не учитывать и записать уравнение Бернулли в виде

$$\frac{\vartheta^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\vartheta_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}, \quad (9.27)$$

где ϑ_0 и ϑ – скорости течения в каких-либо двух сечениях трубы;
 p_0 и p – соответственно давления в этих сечениях.

Если площади этих сечений равны S_0 и S , то объем жидкости, проходящий через них в единицу времени будут равны $\vartheta_0 S$ и ϑS , а так как жидкость несжимаема, то $\vartheta_0 S = \vartheta S$, откуда

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{S_0}{S}, \quad (9.28)$$

то есть скорости обратно пропорциональны площади сечений.

Подставляя (9.28) в уравнение (9.27), получим соотношение, связывающее давление с площадью сечения

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}(\vartheta_0^2 - \vartheta^2) = p_0 + \frac{\rho \vartheta_0^2}{2} \left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right). \quad (9.29)$$

Из этого соотношения видно, что в более широких местах трубы давление больше, чем в узких.

§ 9.4 Необратимость тепловых процессов. II закон термодинамики

Механическое движение материальных тел, отличается следующим замечательным свойством: каково бы ни было движение тела, всегда возможно обратное движение, при котором тело проходит те же точки пространства с теми же скоростями, что и в прямом движении. Например, тело брошено в поле тяжести под углом к горизонту. Описав определенную траекторию, оно упадет на Землю в каком-то месте. Если теперь бросить это тело из этого места под тем же углом, под которым оно упало, и с той же скоростью, то тело опишет ту же траекторию, только в обратном направлении, и упадет в первоначальном месте (конечно при условии, что сопротивлением воздуха можно пренебречь). Аналогичные рассуждения можно провести и для колебания, например, математического маятника.

Обратимость механических движений связана с их симметричностью по отношению к изменению знака времени, что вытекает из самих уравнений движения. Так при изменении знака времени меняет знак скорость тела, входящее же в уравнение движения ускорение сохраняет свой знак.

Совершенно иная ситуация имеет место у тепловых явлений. Если происходит какой-либо тепловой процесс, то обратный процесс (то есть процесс, при котором проходятся те же тепловые состояния, но только в обратном порядке) как правило невозможен. Другими словами, тепловые процессы являются, вообще говоря, **необратимыми**.

Например, если привести в соприкосновение два тела с различной температурой, то более нагретое тело будет отдавать тепло менее нагретому,

но обратный процесс (то есть самопроизвольный непосредственный переход тепла от менее нагретого к более нагретому телу) никогда не происходит.

Столь же необратимым является, описанный выше, процесс расширения газа в пустоту. Газ распространившись при вынужденной перегородке на весь объем сосуда, уже никогда, без постороннего вмешательства, не соберется вновь в одной половине сосуда.

Опыт показывает, что всякая предоставленная самой себе система тел стремится перейти в состояние теплового равновесия, в котором тела покоятся относительно друг друга, обладая одинаковыми температурами и давлениями. Достигнув этого состояния, система сама по себе из него уже не выйдет. Иначе говоря, все тепловые явления, сопровождающиеся процессами приближения к тепловому равновесию, необратимы.

Так необратимы все процессы сопровождающиеся трением между движущимися телами. Трение вызывает постепенное замедление движения (так как кинетическая энергия переходит в тепло), вплоть до остановки, что соответствует состоянию равновесия. По этой же причине, в частности, необратим процесс Джоуля-Томсона, в котором газ проходит через препятствие с большим трением.

Вообще говоря, в этой или иной степени необратимы все происходящие в природе тепловые процессы. Однако в некоторых случаях степень необратимости может быть настолько малой, что процесс, с достаточной точностью, можно считать обратимым.

Примером процесса в высокой степени обратимого (в идеале вполне обратимого) является рассмотренный нами адиабатический процесс. Условие теплоизоляции исключает непосредственный теплообмен с окружающей средой, а «достаточная медленность» движения поршня обеспечивает отсутствие необратимого процесса расширения газа в пустоту, который возник бы из-за слишком быстрого выдвигаемого поршня (в этом и состоит смысл данного условия). Разумеется, на практике и в этом случае всегда останутся какие-то источники необратимости (несовершенство теплоизоляции, трение при движении поршня).

Замечание – *Еще раз подчеркнем, что «медленность» является характерной особенностью обратимых процессов. Процесс должен быть настолько медленным, чтобы участвующие в нем тела успевали в каждый момент времени оказаться в состоянии равновесия, соответствующем имеющимся в этот момент внешним условиям. Так, в рассмотренном примере адиабатического расширения, газ должен успевать следовать за поршнем, оставаясь в равновесном состоянии. Полная обратимость могла бы быть достигнута лишь в идеальном случае бесконечно медленного процесса, поэтому всякий реальный процесс, происходящий с конечной скоростью, не может быть полностью обратимым.*

Мы уже говорили, что в системе тел, находящихся в тепловом равновесии, без внешнего вмешательства никаких процессов происходить не может. Это обстоятельство имеет и другой аспект: **с помощью тел, находящихся в тепловом равновесии, невозможно произвести никакой работы**

(так как работа связана с механическим движением, то есть с переходом энергии в кинетическую энергию тел).

Это важное утверждение о невозможности получения работы за счет энергии тел, находящихся в тепловом равновесии, называется **вторым законом термодинамики**. Существуют и другие формулировки II закона термодинамики, но, из-за краткости курса, мы их приводить и разбирать не будем.

Мы постоянно окружены значительными запасами тепловой энергии, находящейся в состоянии, близком к равновесию (например, энергия Мирового океана). Двигатель, работающий только за счет этой энергии был бы практически «вечным двигателем».

Второй закон термодинамики исключает возможность построения такого, как говорят, «вечного двигателя второго рода», подобно тому, как первый закон термодинамики исключает возможность построения «вечного двигателя первого рода», который бы совершал работу «из ничего», без внешнего источника.

§ 9.5 Природа необратимости тепловых процессов

Все тепловые явления в конечном итоге сводятся к механическому движению атомов и молекул тела. Поэтому необратимость тепловых процессов на первый взгляд находится в противоречии с обратимостью механических движений. На самом деле это противоречие только кажущееся.

Пусть какое-нибудь тело скользит по поверхности другого тела. Благодаря трению это движение будет постепенно замедляться и, в конце концов, прекратится, то есть система придет в состояние теплового равновесия. Кинетическая энергия движущегося тела перейдет в тепло, то есть в кинетическую энергию хаотического движения молекул обоих тел. Очевидно, что этот переход энергии в тепло может осуществиться бесчисленным множеством способов: кинетическая энергия движения тела как целого может распределиться между колоссальным числом молекул огромным числом способов. Другими словами, состояние равновесия, в котором макроскопическое движение отсутствует, может осуществиться неизмеримо большим числом способов, чем состояние, в котором значительная энергия сконцентрирована в виде кинетической энергии упорядоченного движения – движения тела как целого.

Таким образом, переход из неравновесного состояния в равновесное представляет собой переход из состояния, которое может осуществиться меньшим числом способов, в состояние, которое может осуществиться несравненно большим числом способов. Очевидно, что наиболее вероятным будет то состояние тела (или системы тел), которое может осуществиться наибольшим числом способов, – это и будет состояние теплового равновесия. Поэтому, если предоставленная самой себе (то есть замкнутая) система в некоторый момент времени не находится в состоянии равновесия, то в после-

дующее время наиболее вероятным будет переход ее к состоянию равновесия, которое может осуществиться несравненно большим числом способов. И наоборот, если замкнутая система пришла в состояние теплового равновесия, то совершенно невероятен будет самопроизвольный выход системы из этого состояния.

Таким образом, необратимость тепловых процессов имеет **вероятностный характер**. Самопроизвольный переход тела из равновесного состояния в неравновесное, строго говоря, не невозможен, а лишь менее вероятен, чем переход из неравновесного состояния в равновесное. В конечном итоге необратимость тепловых процессов обуславливается колоссальным числом молекул, из которых состоит тело.

Представление о том, насколько маловероятно самопроизвольное отклонение тела из состояния равновесия, можно получить на примере расширения газа в пустоту. Пусть газ первоначально находится в одной половине сосуда (рисунок 72). Тогда после открытия перегородки, он (газ) равномерно распределится по всему объему. Обратный переход газа в одну половину сосуда, без постороннего вмешательства никогда не произойдет. Причину такого явления легко объяснить. Действительно, если в сосуде одна молекула, то в своем движении она, в среднем, проводит одинаковое время как в первой, так и во второй половине сосуда. Можно сказать, что вероятность ее нахождения в каждой из половин сосуда равна $\frac{1}{2}$, то есть имеется всего два способа размещения одной молекулы в сосуде (или в первой, или во второй половине). Если газ идеальный, то его молекулы движутся независимо друг от друга. Поэтому, если мы имеем две молекулы в сосуде, то вероятность их нахождения в одной половине сосуда составляет $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Другими словами

имеются четыре способа размещения двух молекул по двум половинам сосуда. Аналогичные рассуждения можно провести и для четырех молекул. В этом случае вероятность нахождения всех молекул в одной половине сосуда равна $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Таким образом, существуют 16 способов распределения 4 молекул по объему сосуда, которые, благодаря хаотичному движению, встречаются одинаково часто. Нужное нам распределение, при котором все четыре молекулы окажутся снова во II половине сосуда, встречается 16 раз реже остальных распределений. Однако, при большой скорости движения молекул, нам, очевидно, придется не очень долго ждать, чтобы расширившийся газ (из четырех молекул) «сам собою» снова сжался. Естественно, такое возможно только при очень малом числе молекул.

Легко показать, продолжая нашу аналогию, что общее число способов распределения из N молекул по двум половинам сосуда равно 2^N . При этом только одно распределение соответствует случаю, когда все N молекул соберутся во II половине сосуда, вероятность этого события равна 2^{-N} . Если считать объем II половины сосуда равным 1 см^3 , то в нем, при нормальных условиях, будет находиться приблизительно $3 \cdot 10^{19}$ молекул. Согласно проведенно-

му рассуждению, число способов распределения такого количества молекул составит $2^{3 \cdot 10^{19}}$, из которых нас интересует только одно, которое может осуществиться с вероятностью $2^{-3 \cdot 10^{19}}$. Другими словами, можно сказать, что такое событие можно было бы наблюдать примерно один раз в течении промежутка времени равного $2^{3 \cdot 10^{19}}$ – в данном случае безразлично секунд или лет, так как даже продолжительность существования Земли мала по сравнению с этим промежутком времени.

Из приведенных рассуждений ясно видно, что возможность самопроизвольной обратимости теплового процесса имеет, по существу, чисто абстрактный характер; вероятность ее столь мала, что тепловые процессы в принципе необратимы.

Однако вероятностная природа необратимости проявляется в том, что в природе все же происходят самопроизвольные отклонения от положения равновесия, хотя и весьма ничтожные и кратковременные. Такие отклонения получили название **флуктуаций**. Благодаря флуктуациям, например, температура и плотность в различных небольших участках находящегося в равновесии тела не остаются точно постоянными, а испытывают некоторые, хотя и весьма ничтожные колебания. Так температура одного миллиграмма воды, находящегося в равновесии при комнатной температуре, будет испытывать колебания температуры порядка 10^{-8} градуса. Флуктуации плотности газа в атмосфере приводят к рассеянию света (на образующихся неоднородностях), чем и объясняется синий цвет неба. Кроме того существуют еще ряд явлений, в которых флуктуации играют существенную роль.

§ 9.6 Энтропия

Количественной характеристикой теплового состояния тела, описывающей его стремление переходить в другие состояния, является число микроскопических способов, которым это состояние может быть осуществлено. Это число способов называют **статистическим весом** состояния и обозначают буквой w . Как мы уже говорили, тело, представленное самому себе, стремится перейти в состояние с большим статистическим весом. Принято пользоваться не самим числом w , а его логарифмом, который умножают на постоянную Больцмана k . Определенную таким образом величину

$$S = k \ln w, \quad (9.30)$$

называют **энтропией** тела. Формула (9.30) называется формулой Больцмана.

Число способов w , которым может осуществляться состояние системы из двух тел, равно произведению чисел способов w_1 и w_2 , которыми могут

быть осуществлены состояния каждого из этих тел в отдельности, то есть $w = w_1 w_2$. Поэтому

$$S = k \ln w = k \ln w_1 + k \ln w_2 = S_1 + S_2. \quad (9.31)$$

Таким образом, энтропия сложной системы равна сумме энтропий ее частей (именно для достижения этого свойства и служит логарифм в определении энтропии).

Закон, определяющий направление тепловых процессов, можно сформулировать как **закон возрастания энтропии**: при всех происходящих в замкнутой системе тепловых процессах энтропия системы возрастает, при этом максимально возможное значение энтропии замкнутой системы достигается в состоянии теплового равновесия. Высказанное утверждение является более точной количественной формулировкой **второго закона термодинамики**. Этот закон был открыт Клаузиусом, а его молекулярно-кинетическое истолкование было дано Больцманом.

Можно сказать, что всякий процесс, при котором энтропия замкнутой системы тел возрастает, является необратимым; чем больше возрастание энтропии, тем больше степень необратимости. В идеальном случае полностью обратимого процесса энтропия замкнутой системы остается постоянной.

Более глубокий теоретический анализ позволяет установить соотношение, являющееся основной для термодинамических применений понятия энтропии. Это соотношение связывает изменение энтропии тела, при бесконечно малом обратимом изменении его состояния, с количеством тепла dQ получаемого им (телом) в этом процессе (речь идет о незамкнутой системе, так что обратимость процесса не требует постоянства его энтропии). Оно имеет вид

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (9.32)$$

где T – температура тела.

Поскольку выражение (9.32) дает нам лишь изменение энтропии то сама энтропия данного состояния определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной:

$$S = \int_0^A \frac{dQ}{T} + S_0, \quad (9.33)$$

где интеграл берется по пути обратимого перехода из некоторого состояния, выбранного за нулевое, в состояние A .

Для определения абсолютных значений энтропии надо знать значение S_0 , хотя бы для какой ни будь одной температуры. Это значение S_0 энтропии

определяет теорема Нернста (смотрите параграф 8.9). Согласно этой теореме **энтропия любого вещества при температуре абсолютного нуля равно нулю**, то есть $S_0 = 0$.

С учетом выражения (9.32) можно записать I закон термодинамики (8.33) в виде

$$TdS = dU + pdV, \quad (9.34)$$

которое наиболее удобно при термодинамических расчетах.

Замечание – Формально, выражение (9.32) можно получить из выражения I закона термодинамики для адиабатического процесса

$$dE + pdV = 0.$$

Разделим это выражение на температуру T и, применяя уравнение $pV = RT$, приведем уравнение адиабатического процесса к виду

$$\frac{dE}{T} + R \frac{dV}{V} = 0,$$

учитывая, что $dE = C_V dT$, окончательно получим

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0. \quad (9.35)$$

Левая часть, полученного выражения, является полным дифференциалом новой функции состояния

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0. \quad (9.36)$$

Интегрируя, получим

$$S = C_V \ln T + R \ln V + const, \quad (9.37)$$

или, используя уравнение $pV = RT$,

$$S = C_p \ln T + R \ln p + const. \quad (9.38)$$

Разумеется выражения (9.37) и (9.38) равноценны и справедливы только для идеального газа. (Как найти значение $const$ мы указали в предыдущем параграфе). Понятно, что энтропия может быть введена и для других состояний вещества, однако при этом она будет выражаться другими соотношениями, вообще говоря более сложными.

Выражение (9.34) можно также получить формальным делением выражения I закона термодинамики на T , то есть

$$\frac{dQ}{T} = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T}. \quad (9.39)$$

Сравнивая полученное выражение с (9.36), можем записать, что

$$\frac{dQ}{T} = dS.$$

Величину $\frac{dQ}{T}$ — называют **приведенной теплотой**;

T — здесь температура, при которой происходит теплообмен.

Таким образом, изменение энтропии в обратимом процессе определяется приведенной теплотой. Поскольку энтропия является полным дифференциалом, то для кругового обратимого процесса

$$\oint \frac{dQ}{T} = \oint dS = 0. \quad (9.40)$$

Для конечного обратимого процесса получается, что

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1, \quad (9.41)$$

независимо от пути перехода от точки 1 до точки 2.

Все реальные процессы всегда необратимы (хотя бы потому, что идут с конечной скоростью). Поэтому равенство (9.41) надо для них заменить неравенством

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} < \Delta S, \quad (9.42)$$

а для кругового необратимого процесса

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0. \quad (9.43)$$

Таким образом, как уже говорилось, при реальных процессах энтропия замкнутой системы возрастает. Это утверждение, и связанное с ним соотношение (9.42) можно возвести в принцип, который называют II зако-

ном термодинамики в формулировке Больцмана. Как мы уже говорили, есть еще ряд эквивалентных формулировок II закона термодинамики.

В заключение отметим, что с самого начала понятие энтропии было поставлено в прямую связь с необратимостью процессов. Действительно, все самопроизвольно протекающие процессы в природе – от теплообмена до химических реакций – протекают так, что энтропия возрастает. Необходимо специальное взаимодействие с окружающей средой, чтобы препятствовать возрастанию энтропии в макросистеме. Наиболее ярким примером в этом плане могут служить все живые существа.

§ 9.7 Цикл Карно

Одним из приложений термодинамики, чрезвычайно важным для практики, является теория тепловых машин. Под тепловой машиной обычно понимают устройство, позволяющее преобразовать некоторую часть внутренней энергии тела в работу.

Мы уже подробно разобрали, что работу можно произвести только с помощью системы тел, не находящихся в тепловом равновесии друг с другом.

Представим себе систему из двух тел нагретых до разной температуры. Если мы просто соединим оба тела, то тепло перейдет от горячего тела к холодному, но при этом никакой работы не получим. Этот пример, как мы уже не раз говорили, демонстрирует общее правило – необратимые процессы препятствуют совершению работы. Если мы хотим получить работу за счет имеющихся в нашем распоряжение тел, то должны вести процесс по возможности обратимым образом, избегая всяких необратимых процессов.

Возвращаясь к нашей системе двух тел, обозначим их температуры T_1 и T_2 (пусть $T_1 > T_2$) и будем называть более нагретое тело **нагревателем**, а более холодное – **холодильником**. Поскольку непосредственный обмен между этими телами недопустим, то, для получения работы, поместим между ними вспомогательное тело, которое назовем **рабочим телом**. В качестве этого тела можно представить себе газ в цилиндре. Будем считать теплоемкости нагревателя и холодильника очень большими. Это означает, что получение или отдача ими (холодильником и нагревателем) небольшого количества тепла не изменяет их температуры.

Изобразим происходящий с рабочим телом процесс на диаграмме pV (рисунок 75). Пусть газ первоначально находился при температуре нагревателя T_1 и его состояние на диаграмме изображалось точкой I . Приведем рабочее тело с соприкосновением с нагревателем и будем расширять газ. При этом газ получает от нагревателя некоторое количество тепла Q_1 , оставаясь все время при температуре T_1 нагревателя. (Мы уже отметили, что теплоемкость нагревателя настолько велика, что, отдавая рабочему телу некоторое небольшое количества тепла, он не изменит своей температуры). Таким обра-

зом, газ изотермически расширяется обратимым способом, поскольку переход тепла происходит между телами с одинаковой температурой.

Замечание – Строго говоря, при получении тепла температура рабочего тела должна быть на бесконечно малую величину меньше температуры нагревателя (иначе тепло просто не перейдет от нагревателя к рабочему телу). Следовательно, изотермический процесс, в данном случае, можно считать в высокой степени обратимым.

На диаграмме процесс изотермического расширения представлен участком 1–2.

Отсоединим теперь рабочее тело от нагревателя, теплоизолируем его и подвергнем дальнейшему адиабатическому расширению. (Напомним, что адиабатический процесс является в высокой степени обратимым). При таком расширении газ охлаждается, и мы будем вести расширение до тех пор, пока температура газа не упадет до температуры холодильника T_2 . Этот процесс изображается на диаграмме более крутым участком 2–3, так как при адиабатическом расширении давление падает быстрее, чем при изотермическом расширении.

Далее приведем рабочее тело в соприкосновение с холодильником, который, согласно поставленному условию, обладает большой теплоемкостью, и подвергнем газ изотермическому сжатию при температуре T_2 , при котором газ отдает некоторое количество тепла холодильнику. Согласно приведенным выше рассуждениям, процесс изотермического сжатия будет обратимым процессом. На диаграмме этот процесс представлен участком 3–4. Наконец, отсоединив рабочее тело от холодильника и подвергнув его адиабатическому сжатию (участок 4–1 на диаграмме), вернем его в исходное состояние. Для этого нужно просто должным образом подобрать точку 4, то есть объем до которого нужно доводить изотермическое сжатие 3–4.

Таким образом, рабочее тело совершило круговой процесс, возвратившись в исходное состояние, произведя при этом работу, изображающуюся площадью криволинейного четырехугольника 1–2–3–4 на рисунке 75. Совершение этой работы произошло за счет того, что в процессе 1–2 рабочее тело получило от нагревателя большее количество тепла, чем оно отдало холодильнику при переходе из состояния 3 в состояние 4. Все этапы этого кругового процесса обратимы, поэтому произведенная работа будет максимально возможной в сравнении с другими циклами в заданном интервале температур нагревателя и холодильника.

Описанный выше процесс называется **идеальным циклом Карно**, а работающую по этому циклу машину называют машиной Карно. Цикл Карно показывает, что, в принципе, при наличии двух тел с различной температурой можно совершать работу обратимым образом. Будучи максимально возможной, эта работа не зависит от свойств рабочего тела.

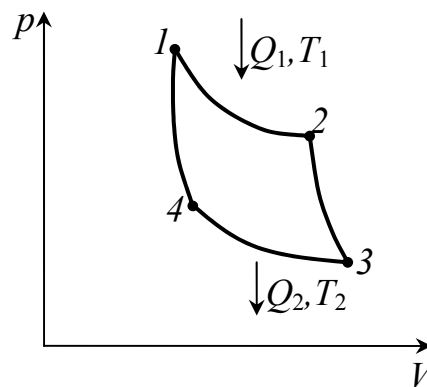


Рисунок 75

Отношение произведенной работы к количеству энергии, взятой у нагревателя называется **коэффициентом полезного действия (к.п.д) тепловой машины**. Из сказанного выше ясно, что к.п.д. цикла Карно является наибольшим для любой тепловой машины, работающей при заданных температурах нагревателя и холодильника. Легко доказать, что к.п.д. машины Карно равен:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (9.44)$$

Действительно, условие обратимости процесса, сводится к требованию постоянства энтропии системы, то есть к постоянству суммы энтропий нагревателя S_1 и холодильника S_2

Если в этом цикле нагреватель отдает малое количество тепла ΔQ_1 , а холодильник получает малое количество тепла ΔQ_2 , то согласно 2 закона термодинамики для обратимого цикла (9.40), имеем

$$dS_1 + dS_2 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} - \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0,$$

откуда

$$\Delta Q_2 = \frac{T_2}{T_1} \Delta Q_1 \quad (9.45)$$

Работа, производимая при одном цикле равна $A = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$, поэтому к.п.д. цикла, с учетом (9.45) равен

$$\eta_{\max} = \frac{A}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Таким образом, **даже в идеальном пределе полностью обратимой работы тепловой машины ее к.п.д. меньше единицы**. Доля $\frac{T_2}{T_1}$ энергии, отдаваемой нагревателем, бесполезно переходит в виде тепла к холодильнику. Температурой T_2 является обычно температура окружающего воздуха, так что она не может быть понижена. Поэтому в технике, для уменьшения доли бесполезно затрачиваемой энергии, стремятся добиться работы двигателя, по возможности при более высокой температуре T_1 .

Коэффициент полезного действия реальной тепловой машины всегда меньше, чем $\eta_{\max}$, из-за неизбежно происходящих в ней необратимых процессов. Характеристикой степени совершенства двигателя, то есть его близости к идеальному, может служить величина $\eta/\eta_{\max}$ — отношение к.п.д. реального двигателя к к.п.д. идеальной машины, при равных температурах нагревателя и холодильника сравниваемых двигателей.

Часть 5 Атомные процессы

Глава 10 Квантовая природа излучения

§ 10.1 Тепловое излучение и его закономерности

Любое излучение электромагнитных волн происходит за счет энергии возбуждения атомов и молекул вещества. Самым распространенным видом излучения, является **тепловое излучение**, обусловленное нагреванием тел. Тепловое излучение имеет место при любой температуре. При сравнительно низких (для металлов это 600...700 °С) излучаются практически лишь длинные (инфракрасные) электромагнитные волны. При дальнейшем увеличении температуры излучаются электромагнитные волны видимого и ультрафиолетового диапазона длин волн.

Окружим излучающее тело непроницаемой оболочкой с идеально отражающей поверхностью (рисунок 76). Воздух из оболочки удалим. Отраженное оболочкой излучение, упав на тело, поглотится им (частично или полностью). Таким образом будет происходить непрерывный обмен энергией между телом и заполняющим оболочку излучением. Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны, то состояние системы «тело – излучение» будет равновесным. Опыт показывает, что тепловое излучение – единственный вид излучения, которое может находиться в равновесии с излучающими телами. К равновесным состояниям применимы законы термодинамики, поэтому тепловое излучение должно подчиняться некоторым общим закономерностям, вытекающим из принципов термодинамики.

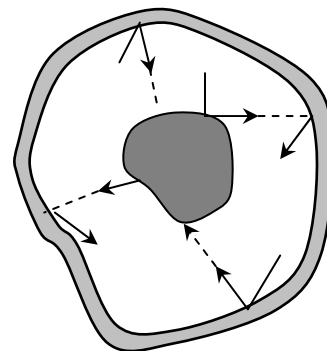


Рисунок 76

Прежде чем обсуждать законы теплового излучения, введем необходимые определения.

Для количественной характеристики теплового излучения мы будем пользоваться величиной потока энергии, измеряемого в ваттах, то есть мощностью излучения.

***Замечание** – Для измерения светового потока (излучения видимого глазом) пользуются специальными фотометрическими единицами. О связи потока энергии со световым потоком мы говорили в параграфе 7.7.*

Поток энергии, испускаемый наружу единицей поверхности тела во всем диапазоне длин волн по всем направлениям называется **энергетической светимостью** и обозначается буквой R_T . Энергетическая светимость измеряется в Вт/м². Для описания распределения энергии в спектре излучения (то есть распределения энергии по длинам (или частотам) волн) введем величину

испускающей способности тела (или спектральной плотности энергетической светимости). Эта величина зависит от частоты и температуры и обозначается буквой $r_{\omega,T}$. Испускающая способность тела измеряется в Вт/Гц и связана с энергетической светимостью соотношением

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega,T} d\omega. \quad (10.1)$$

Замечание – В теоретической физике испускающую способность $r_{\omega,T}$ – берут как функцию частоты. В экспериментальной физике обычно используют $r_{\lambda,T}$, то есть берут распределение энергии по длинам волн. Размерность $r_{\lambda,T}$ равна Вт/м³.

Теперь введем **поглощательную способность** тела как функцию $a_{\omega,T}$, определяющую отношение потока энергии, поглощаемой элементом поверхности тела $d\Phi'$, к падающему на него потоку энергии $d\Phi$ в интервале частот $d\omega$, то есть

$$a_{\omega,T} = \frac{d\Phi'_{\omega}}{d\Phi_{\omega}}. \quad (10.2)$$

Поглощательная способность тела, как следует из определения, величина безразмерная.

Между испускающей и поглощательной способностями любого тела имеется универсальная связь, а именно

$$\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = f(\omega, T). \quad (10.3)$$

Соотношение (10.3) выражает закон Кирхгофа, который формулируется следующим образом:

Отношение испускающей и поглощательной способностей не зависит от природы тела и является универсальной функцией длины волны и температуры.

Функция $f(\omega, T)$ имеет простой физический смысл. Пусть некоторое тело обладает способностью полностью поглощать электромагнитное излучение любой частоты. Для такого тела $a_{\omega,T} = 1$ и, следовательно, испускающая способность этого тела просто равна функции Кирхгофа:

$$r_{\omega,T} = f(\omega, T). \quad (10.4)$$

Тело, полностью поглощающее электромагнитное излучение любой длины волны, называется **абсолютно черным телом**. Таким образом, функция Кирхгофа определяет распределение энергии в спектре абсолютно черного тела. Следует иметь в виду, что абсолютно черных тел в природе нет, однако такие тела, как сажа, черный бархат и некоторые другие, в видимом диапазоне частот близки к ним. Идеальной моделью абсолютно черного тела является замкнутая полость с маленьким отверстием (рисунок 77). Излучение, прошедшее через отверстие в полость, из-за многократных отражений полностью поглотится стенками полости. Согласно закону Кирхгофа испускательная способность такой полости будет близка к функции $f(\omega, T)$. Другими словами, если стенки поддерживать при определенной температуре, то из отверстия выходит излучение, близкое по спектральному составу к излучению абсолютно черного тела.

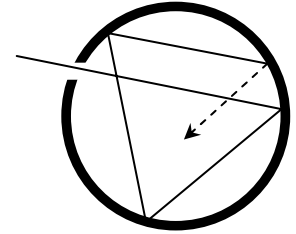


Рисунок 77

Разлагая это излучение в спектр и измеряя интенсивность различных участков спектра, можно экспериментально найти вид функции $f(\omega, T)$ или $f(\lambda, T)$. Результаты таких экспериментов в диапазоне длин волн 1...5 мкм представлены на рисунке 78. Разные кривые относятся к разным значениям температуры абсолютно черного тела. Площадь, охватываемая кривой, дает энергетическую светимость абсолютно черного тела при соответствующей температуре. Из рисунка 78 видно, что энергетическая светимость R_T абсолютно черного тела увеличивается с увеличением температуры, а максимум испускательной способности с увеличением температуры смещается в сторону более коротких длин волн. Теоретическими и экспериментальными работами было установлено, что

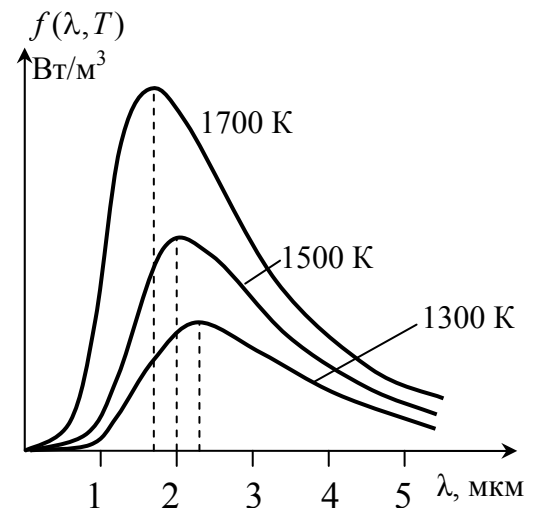


Рисунок 78

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega, T} d\omega = \sigma T^4, \quad (10.5)$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-6}$ Вт/(м²·К⁴) и называется постоянной Стефана-Больцмана, и

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (10.6)$$

где $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К = $2,90 \cdot 10^7$, Å·К и называется постоянной Вина.

Выражение (10.5) называется **законом Стефана-Больцмана**, который утверждает, что энергетическая светимость абсолютно черного тела растет пропорционально четвертой степени температуры. Соотношение (10.6) носит название **закона Вина** и утверждает, что длина волны $\lambda_{\max}$, на которую приходится максимум излучения абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре абсолютно черного тела.

Следовательно, если нам будет известен вид функции Кирхгофа, то используя формулы (10.5) и (10.6), мы сможем измерять температуры раскаленных тел бесконтактным способом. Для этого необходимо, чтобы спектральный состав исследуемого тела совпадал со спектральным составом абсолютно черного тела.

Еще в конце 18 века была сконструирована лампа накаливания с угольным стержнем (А.Н.Лодыгин, 1872 г.) изобретена дуговая лампа (П.Н.Яблочков, 1876 г.), получен патент на лампу накаливания с вольфрамовой нитью (А.Н.Лодыгин, 1894 г.). Широкое развитие металлургии, источников света, развитие спектрального анализа потребовали от физиков теоретического объяснения и нахождения формулы распределения энергии в спектре абсолютно черного тела. Однако объяснить вид кривой распределения энергии в спектре абсолютно черного тела на основании законов термодинамики и электродинамики не удавалось.

Выход из трудностей, возникших в проблеме теплового излучения был найден выдающимся физиком Максом Планком в 1900 г. Для этого ему пришлось ввести **квантовую гипотезу**, согласно которой атомы (осцилляторы) абсолютно черного тела изменяют свою энергию дискретно, пропорционально некоторой элементарной порции, то есть кванту энергии равному

$$\varepsilon_0 = h\nu, \quad (10.7)$$

где h – постоянная Планка равная $6,626 \cdot 10^{-34}$, Дж·с;
 ν – частота излучения.

Согласно Планку, излучающее тело всегда испускает энергию ε равную (для любой частоты)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 n, \quad (10.7')$$

где n – любое целое положительное число.

Для создания правильной теории теплового излучения и теоретического вывода функции Кирхгофа, Планк использовал статистический метод Больцмана и идею о дискретном характере испускания света. На основе своих идей, Планк получил формулу испускательной способности абсолютно черного тела:

$$f(\omega, T) = \frac{h\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1}, \quad (10.8)$$

где $h = h / 2\pi$ – также носит название постоянной Планка.

Полученное Планком выражение (10.8) для испускательной способности абсолютно черного тела хорошо согласуется с экспериментом и позволила объяснить все особенности излучения абсолютно черного тела.

***Замечание** – В своей теории теплового излучения Планк пытался сохранить связь с электромагнитной теорией света, в которой считалось, что распространение и поглощение света происходят непрерывно и все явления, связанные с распространением и поглощением электромагнитных волн, должны подчиняться закону классической волновой оптики. Тем не менее, идея Планка о дискретном характере процессов испускания света оказала громадное влияние на все дальнейшее развитие физики. До Планка считалось, что энергия любого тела может изменяться непрерывно. Предполагалось, что тело может приобретать и терять энергию в любых произвольных количествах. Вообще в классической физике считалось незыблемым, что все физические процессы явления должны быть непрерывными.*

Идеи Планка означали отказ от принятых в классической физике представлений о непрерывном протекании процессов и явлений в природе и послужили основой для создания квантовой электродинамики и квантовой механики.

§ 10.2 Фотоэффект. Квантовые свойства излучения

В параграфах 6.2 и 7.7 мы указывали, что изменение интенсивности волны проходящей через поглощающую среду происходит по закону

$$J = J_0 e^{-\mu x}. \quad (10.9)$$

При этом неявно предполагалось, что все точки, которых в некоторый момент времени достигает волновой фронт, участвуют в процессе поглощения. Однако имеется ряд факторов, свидетельствующих о том, что в действительности дело обстоит не так просто. Существуют эффекты, совершенно необъяснимые с волновой точки зрения. К ним относится фотоэлектрический эффект, впервые замеченный Герцем и позже изученный А.Г.Столетовым и рядом других ученых.

Для количественного изучения фотоэлектрического эффекта – вырывания электронов с поверхности металлов под действием света – применяется схема, представленная на рисунке 79. Световой поток Φ падает на катод K , изготовленный из исследуемого материала. Электроны, вылетающие из катода, перемещаются под действием электрического поля к аноду A . В результате в цепи фотоэлемента течет фототок, измеряемый гальванометром G . Напряжение между анодом и катодом можно менять потенциометром P , где точка 0 – точка нулевого потенциала (средняя точка).

На рисунке 80 приведено семейство вольтамперных характеристик фотоэлемента, снятых при одной и той же частоте ω , но при различных потоках (интенсивностях) света $\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$. Характер кривых объясняется следующим образом. Электроны вылетают из катода с различными по величине скоростями, о чем говорит пологий характер кривых (рисунок 80) и то, что при $U = 0$ лишь часть испущенных, обладающих достаточно большими скоростями, электронов достигает анода. Максимальный ток J_n (ток насыщения) определяется напряжением U , при котором все вылетевшие электроны достигают анода, то есть

$$J_n = en,$$

где n – число электронов испускаемых катодом за 1 с.

Фототок становится равным нулю при некотором отрицательном напряжении U_3 . Обратите внимание, что U_3 одинаково для всех кривых на рисунке 80, что говорит о том, что максимальная скорость $\vartheta_{\max}$, вырывааемых светом электронов не зависит от интенсивности света. Действительно, так как

$$\frac{m\vartheta_{\max}^2}{2} = eU_3,$$

то

$$\vartheta_{\max} = \sqrt{\frac{2eU_3}{m}}. \quad (10.10)$$

Если освещать катод светом различной частоты, то эксперимент показывает (рисунок 81), что большей частоте, соответствует большее задерживающее напряжение U_3 , то есть большая кинетическая энергия фотоэлектронов. Кроме того, оказалось, что для каждого вещества существует некоторая минимальная частота ω_0 света, ниже которой фотоэффект невозможен. Этой частоте соответствует длина волны, которая называется **красной границей** фотоэффекта.

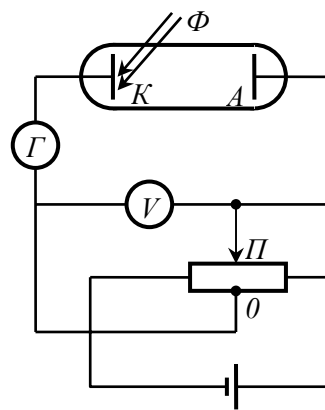


Рисунок 79

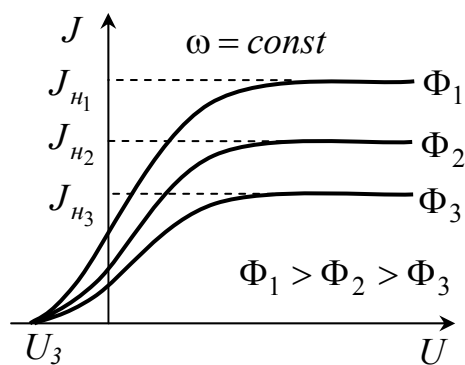


Рисунок 80

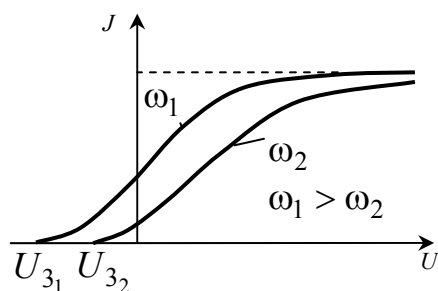


Рисунок 81

Результаты экспериментов можно обобщить в виде нескольких закономерностей:

1) сила фототока насыщения пропорциональна падающему световому потоку при неизменном спектральном составе (это утверждение называется **закон Столетова**);

2) максимальная начальная скорость (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой;

3) для каждого вещества существует красная граница фотоэффекта, то есть минимальная частота света, ниже которой фотоэффект невозможен.

С волновой точки зрения понятен лишь закон Столетова: чем больше интенсивность падающего света, тем больше поглощенная энергия и тем больше электронов получают энергию достаточную для вырывания из катода. Вторая и третья закономерности фотоэффекта законами классической физики не объясняются.

Эйнштейн, развивая идеи Планка, показал, что закономерности фотоэффекта можно объяснить, если считать что свет (не только поглощается и излучается квантами) распространяется отдельными порциями – квантами света, или, как их позднее назвали, фотонами. При этом энергия отдельного фотона равнялась $h\nu$. Исходя из этой гипотезы, легко объяснить все закономерности фотоэффекта. Действительно, с электроном в металле взаимодействует только один фотон, который передает электрону всю энергию. Полученная электроном энергия частично расходуется на работу выхода A электрона из металла, а частично идет на сообщение электрону кинетической энергии. Таким образом,

$$h\nu = A + \frac{m v_{\max}^2}{2}. \quad (10.10)$$

Это уравнение фотоэффекта, полученное Эйнштейном, представляет собой закон сохранения энергии и хорошо соответствует всем экспериментальным фактам. В дальнейшем квантовая природа электромагнитного излучения была подтверждена многочисленными экспериментами. Среди них стоит отметить опыты С.И.Вавилова по флуктуациям светового потока, и опыты А.Ф.Иоффе и Н.И.Добронравова по доказательству практической безинерционности фотоэффекта.

***Замечание** – В рассмотренном явлении фотоэффекта электрон получает энергию от одного фотона. Такие процессы называют **однофотонными**. С появлением мощных лазеров удалось осуществить **многофотонные** процессы. В частности, наблюдался многофотонный фотоэффект, при котором электрон, вылетающий из металла, получал энергию не от одного, а от N фотонов ($N = 2 \dots 7$). В этом случае уравнение Эйнштейна запишется в виде*

$$N h\nu = A + \frac{m v_{\max}^2}{2}. \quad (10.11)$$

Соответственно красная граница фотоэффекта смещается в сторону более длинных волн ($\lambda_{\text{кр}}$ увеличится в N раз).

Таким образом мы приходим к выводу, что свет обнаруживает **корпускулярно-волновой дуализм** (двойственность): в одних явлениях проявляется его волновая природа (интерференция, дифракция), и он ведет себя как электромагнитная волна; в других явлениях (фотоэффект, эффект Комптона) проявляется его корпускулярная природа, и он ведет себя как поток фотонов.

Правила «перевода» с корпускулярного языка на волновой и обратно состоят в следующем: электромагнитная волна с длиной волны λ и интенсивностью J может проявить себя как поток фотонов с частотой

$$\nu = c / \lambda$$

и интенсивностью

$$J = N h \nu ,$$

где N – число фотонов, приходящих в единицу времени на единицу площади. Направление движения фронта волны есть направление движения фотонов.

***Замечание** – На примере фотона мы впервые столкнулись с возможностью сочетания в микрочастице противоречивых свойств нашего большого мира. Конечно, в макром мире частица – это частица, а волна – это волна. Частица занимает ограниченную область пространства и движется по определенной траектории, волна распределена в пространстве непрерывно и энергия передается, в той или иной доле, всеми точками пространства. Совместить эти два представления в макром мире нельзя. Но мы не имеем права навязывать поведение макротел частицам микромира.*

Познание микромира, которое мы рассмотрели на примерах теплового излучения и фотоэффекта, состоит не в создании модели, похожей на знакомые глазу человека картины. Процесс познания состоит в изучении закономерностей явления, нахождении объективно существующих причинных связей между явлениями. Именно таким путем происходит становление сложной картины микромира, к изучению которой мы переходим, сущность которой не укладывается ни в какие модели, заимствованные из мира макротел.

§ 10.3 Волновые свойства микрочастиц

В предшествующих главах было показано, что свет, в зависимости от условий его изучения проявляет как волновые, так и корпускулярные свойства.

В 1924 г. Луи де-Бройль пришел к заключению, что если свет обладает волновыми и корпускулярными свойствами, то и частицы вещества могут

обладать, кроме корпускулярных, и волновыми свойствами. Известно, что фотон обладает энергией

$$E = h\omega$$

и импульсом

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{2\pi h}{\lambda}.$$

Де-Бройль, по аналогии, предположил, что любой частице вещества массой m , движущейся со скоростью ϑ , можно сопоставить волновой процесс, длина волны которого равна

$$\lambda = \frac{2\pi h}{p} = \frac{2\pi h}{m\vartheta}. \quad (10.12)$$

Это соотношение получило название **формулы де-Бройля**, а λ – **дебройлевской длины волны частицы** с импульсом p . Связь между энергией частицы E и частотой ω дебройлевской волны задается соотношением

$$E = h\omega. \quad (10.13)$$

***Замечание** – В принципе энергия E всегда определена с точностью до прибавления произвольной постоянной, следовательно частота ω является принципиально ненаблюдаемой величиной (в отличие от дебройлевской длины волны).*

Волна де-Бройля представляет собой плоскую монохроматическую волну, которая имеет вид:

$$\Psi = ae^{-i(\omega t - kr)} \quad (10.14)$$

и соответствует свободному равномерному движению частицы. С учетом соотношений (10.12) и (10.13) выражение (10.14) можно переписать в виде

$$\Psi = ae^{(i/h)(px - Et)}. \quad (10.14')$$

Чтобы подтвердить (или опровергнуть) гипотезу де-Бройля необходимо было поставить эксперимент, в котором однозначно проявились бы волновые свойства частиц, то есть поставить опыты по интерференции и дифракции частиц. Такие опыты были впервые поставлены Девиссоном и Джермером. Идея их опытов заключалась в следующем. Если пучок электронов обладает волновыми свойствами, то можно ожидать (даже не зная механизма отражения этих волн), что их отражение от кристалла будет иметь такой же характер, как и отражение от кристаллов рентгеновских лучей.

Для определения длины волны электрона воспользуемся формулой (10.12). Кинетическая энергия электрона равна

$$\frac{m\vartheta^2}{2} = eU, \quad (10.15)$$

где U – ускоряющее напряжение.

Сопоставляя формулы (10.12) и (10.15), получим, что

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}}, \quad (10.16)$$

где λ выражается в ангстремах.

Таким образом, меняя ускоряющее напряжение U , можно получать различные длины электронных волн.

Анализируя получаемые интерференционные картины для электронов и рентгеновских лучей, Дэвиссон и Джермер определяли длину волну электрона и сравнивали ее с расчетной формулой (10.16). Совпадение было настолько убедительным, что опыты Дэвиссона и Джермера можно считать подтверждением гипотезы де-Бройля. В дальнейшем гипотеза де-Бройля получила подтверждение в опытах А.С.Тартаковского по дифракции электронного пучка при прохождении через металлическую фольгу.

Итак, пучок электронов может вести себя как волны с длиной $\lambda = 2\pi h / p$. Остается вопрос, являются ли результаты проведенных экспериментов типичными для совокупности большого числа электронов или волновые свойства присущи отдельному электрону? Ответом на этот вопрос дали опыты советских физиков Л.М.Бибермана, Н.Г.Сушкина и В.А.Фабриканта по дифракции электронного пучка очень малой интенсивности. Интенсивность пучка электронов была настолько слабой, что можно было утверждать, что электроны проходили через кристалл заведомо поодиночке. При достаточной экспозиции была получена дифракционная картина, ничем не отличающаяся от той, которая наблюдается при обычной интенсивности электронного пучка. Таким образом, было доказано, что волновые свойства присущи отдельному электрону.

Двойственное поведение электрона не является особенностью именно этой частицы. Позже дифракцию наблюдали и для более тяжелых заряженных частиц – протонов, ионов гелия и других, а также и для нейтральных атомов, причем соотношение (10.12) хорошо подтверждалось.

§ 10.4 Уравнение Шредингера

Поскольку микрочастицам можно сопоставить некоторую длину волны, то, естественно, возникла проблема поиска уравнения, которое описывало бы движение микрочастиц в силовых полях с учетом их волновых свойств.

Такое уравнение было найдено Э. Шредингером и носит его имя. Шредингер сопоставил движению микрочастицы комплексную функцию координат и времени, которую он назвал волновой функцией. Эта функция обозначается греческой буквой «пси» (ψ или Ψ) и получила название **пси-функция**. Пси-функция характеризует состояние микрочастицы. Вид функции получается из решения уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi + \Pi(\vec{r},t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (10.17)$$

где m – масса частицы;

$\Pi(\vec{r},t)$ – потенциальная энергия силового поля, в котором движется частица;

i – мнимая единица;

∇^2 – оператор Лапласа.

Результат действия этого оператора на функцию Ψ (или некоторую другую функцию) запишется в декартовых координатах как

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \quad (10.18)$$

Из уравнения (10.17) следует, что вид пси-функции определяется функцией $\Pi(\vec{r},t)$, то есть в конечном счете характером сил, действующих на частицу.

Уравнение Шредингера (10.17) – это **основное уравнение нерелятивистской квантовой механики**. Данное уравнение является новым фундаментальным законом, который не выводится из других соотношений. Справедливость уравнения Шредингера установлена тем, что все вытекающие из него следствия подтверждены экспериментом.

В дальнейшем, рассматривая уравнение (10.17), мы ограничимся рассмотрением потенциальных силовых полей, для которых $\Pi(\vec{r})$ не зависит явно от времени. Такие силовые поля получили названия стационарных. В этом случае решение уравнения Шредингера распадается на два множителя, один из которых зависит только от координат, другой только от времени:

$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})e^{-i(E/\hbar)t}. \quad (10.19)$$

В этом выражении E – полная энергия частицы, которая в случае стационарного поля остается постоянной. Подставляя (10.19) в (10.17) и сокращая общий множитель $e^{-i(E/\hbar)t}$ получим дифференциальное уравнение, определяющее функцию ψ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \Pi\psi = E\psi. \quad (10.20)$$

Уравнение (10.20) называется **уравнением Шредингера для стационарных состояний**. Уравнение (10.20) обычно пишут в виде

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \Pi)\psi = 0. \quad (10.21)$$

Уравнения вида (10.20) и (10.21) мы будем называть, для краткости, просто уравнением Шредингера.

***Замечание** – К уравнению Шредингера (10.21) можно прийти используя уже известное нам волновое уравнение (7.21)*

$$\nabla^2\xi + \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\xi = 0.$$

Если в этом уравнении под функцией ξ понимать волну де-Бройля в виде $\Psi = ae^{ikx}$, и заменить λ выражением (10.12), выразив скорость частицы через ее энергию. А именно, если частица движется в силовом поле с потенциальной энергией Π и обладает полной энергией E , то

$$\frac{m\vartheta^2}{2} = E - \Pi \quad \text{и} \quad \vartheta^2 = \frac{2}{m}(E - \Pi).$$

Подставляя эти выражения в волновое уравнение, получим

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \Pi)\psi = 0,$$

то есть уравнение (10.21). Проведенная подстановка не является выводом уравнения Шредингера, а является своего рода иллюстрацией догадки, приведшей к открытию этого уравнения.

Уравнение Шредингера (10.21) является дифференциальным уравнением второго порядка, которое в принципе позволяет найти пси-функцию, сопоставляемую с микрочастицей, во всех точках рассматриваемого пространства. При этом пси-функция должна удовлетворять стандартным условиям, то есть она должна быть однозначной, конечной и непрерывной во всем рассматриваемом пространстве. Эти стандартные (или естественные условия) имеют в квантовой механике огромное значение. Кроме того, свойства решений уравнения Шредингера таковы, что решения удовлетворяют этим требованиям только при определенных дискретных значениях энергии, входящей в уравнение в качестве параметра.

§ 10.5 Физический смысл пси-функции

Справедливость уравнения Шредингера проверяется с помощью основного утверждения данного Борном. Согласно Борну квадрат модуля пси-функции (интенсивность Ψ -волны) определяет вероятность dP того, что частица будет обнаружена в пределах объема dV , то есть

$$dP = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* dV, \quad (10.22)$$

где Ψ^* – комплексно-сопряженная функция.

Отсюда **плотность вероятности**, то есть вероятность нахождения микрочастицы в единице объема,

$$\frac{dP}{dV} = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*. \quad (10.23)$$

Эта величина является экспериментально наблюдаемой, в то время как сама амплитуда пси-функции не доступна наблюдению (аналогично векторам напряженности в электромагнитной волне).

Пси-функция, вообще говоря, определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Это не влияет на описание состояния частицы. Обычно пси-функцию выбирают так, чтобы она удовлетворяла **условию нормировки**:

$$\int |\Psi|^2 dV = \int \Psi\Psi^* dV = 1, \quad (10.24)$$

причем интеграл берется по всей области, где пси-функция отлична от нуля. Условие нормировки (10.24) означает, что в рассматриваемой области частица находится с достоверностью. Пси-функцию удовлетворяющую условию (10.24) называют нормированной.

В случае стационарного силового поля пси-функция имеет вид (10.19). Соответственно

$$\Psi\Psi^* = \psi e^{-i(E/\hbar)t} \cdot \psi^* e^{i(E/\hbar)t} = \psi\psi^*,$$

то есть плотность вероятности от времени не зависит. По этой причине состояния, описываемые пси-функциями вида (10.19) и были названы стационарными.

Из смысла пси-функции вытекает, что квантовая механика имеет статистический смысл. Она не позволяет определить местонахождение частицы в пространстве или траекторию ее движения, а определяет лишь вероятность нахождения частицы в данной точке пространства. Таким образом, в приме-

нении к микрочастицам понятия определенного местоположения и траектории, как уже говорилось, просто теряют смысл.

§ 10.6 Принцип неопределенности

Из сказанного в предыдущем параграфе вытекает вопрос: значит ли, что становятся бессмысленными любые суждения о координатах, скоростях и других динамических величинах характеризующих движение частиц? На этот вопрос дает ответ так называемый **принцип неопределенности** установленный немецким физиком Гейзенбергом и носящий его имя. Этот принцип указывает, в каких пределах можно пользоваться классическим описанием микрочастицы.

Количественные соотношения, выражающие этот принцип в конкретных случаях, называют **соотношениями неопределенностей**.

Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей.

Первое из них ограничивает точности одновременного измерения координат и соответствующих проекций импульса частицы. Например, для проекции на ось x оно выглядит так:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h. \quad (10.25)$$

Второе соотношение устанавливает неопределенность измерения энергии ΔE за данный промежуток времени Δt :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h. \quad (10.26)$$

Соотношение (10.25) утверждает, что если положение частицы (например по оси x) известно с неопределенностью Δx , то в тот же момент проекцию импульса частицы на эту ось можно измерить только с неопределенностью $\Delta p_x \approx h / \Delta x$.

Заметим, что эти ограничения не касаются одновременного измерения координаты частицы и ее импульса по разным осям, то есть величины x и p_y , y и p_z и так далее могут иметь одновременно точные значения.

Другими словами, соотношение (10.25) устанавливает принципиальный предел, с которым состояние частицы можно характеризовать «классически», то есть координатой x и проекцией p_x (или траекторией).

Особо подчеркнем, что соотношение (10.25) отражает тот факт, что в природе **объективно не существует** состояния частицы с точно определенными значениями обеих переменных, x и p_x . Но, поскольку измерения проводятся с помощью макроскопических приборов, мы вынуждены приписывать частицам не свойственные им классические переменные. Издержки такого подхода и выражают соотношения неопределенностей. После того, как выяс-

нилась необходимость описывать поведение частиц волновыми функциями, соотношения неопределенностей возникают естественным образом – как математическое следствие теории.

Если считать принцип неопределенности универсальным (то есть справедливым и для макроскопических тел), то мы имеем право поставить вопрос, как скажется соотношение неопределенностей на движение макроскопического тела?

Возьмем маленький шарик с массой $m = 1$ г. и определим его положение с точностью до размера атома, то есть $\Delta x \approx 10^{-8}$ см (современная микроскопия позволяет это сделать). Тогда неопределенность скорости шарика $\Delta v_x = \Delta p / m \approx (h / \Delta x) / m \approx 10^{-19}$ см/с. Такая величина недоступна никакому измерению, а поэтому и отступление от классического описания совершенно несущественно. Другими словами, даже для такого маленького шарика понятие траектории применимо с высокой степенью точности.

Совершенно иначе обстоит дело с движением электрона в атоме. Для электрона, как следует из соотношения неопределенности,

$$\Delta x \cdot \Delta v_x > h / m \approx 1 \text{ см}^2/\text{с}. \quad (10.27)$$

Электрон находится внутри атома, то есть погрешность измерения координаты не должна превышать размера атома (10^{-8} см), то есть $\Delta x \approx x$. Исходя из соотношения (10.27) найдем, что $\Delta v_x \approx 10^8$ см/с, то есть совпадает (а при точном расчете превышает) по порядку величины со скоростью электрона в атоме. Таким образом, поскольку $\Delta v_x \approx v$, суждения о скорости электрона могут иметь лишь самый общий характер. При таких условиях представление о движении электрона в атоме классическим орбитам теряет смысл. Поэтому квантовая механика при описании движений электронов в атоме отказалась от понятия траектории – этому понятию здесь реально ничего не соответствует. Сказанное справедливо и для других элементарных частиц при их движении в очень маленьких областях пространства.

Вместе с тем, при определенных условиях движение микрочастиц можно рассматривать классически, то есть как движение по траектории. Так происходит, например, при движении заряженных частиц в электромагнитных полях (в электронно-лучевых трубках, ускорителях и др.). Эти движения можно рассматривать классически (по законам Ньютона), поскольку для них ограничения, обусловленные соотношением неопределенностей, пренебрежимо малы по сравнению с самими величинами (координатами и импульсом).

Принцип неопределенности позволяет также рассмотреть вопрос о возможности одновременного задания всех координат или одновременного задания всех трех проекций импульса. Мы специально выделяем это обстоятельство, хотя, казалось бы, всегда можно найти три проекции любого вектора. Детальное рассмотрение показывает, что это не так. Примером вектора, три проекции которого не могут быть определены, может служить момент

импульса, $\dot{\vec{L}} = [\vec{r} \vec{p}]$ (смотрите параграф 1.11). Если мы имеем дело с «обычной» частицей, то, разумеется, мы можем всегда определить три проекции момента импульса L_x , L_y , и L_z поскольку можно проследить за траекторией частицы. Для микрочастицы подобное определение невозможно, а одновременное задание всех трех проекций момента импульса бессмысленно. Действительно, допустим обратное, все три проекции вектора $\dot{\vec{L}}$ известны. Но тогда по трем проекциям можно построить и вектор момента импульса. Если это сделано, то этим определена плоскость, в которой движется частица. Но если известна эта плоскость, то мы в точности знаем координату вдоль оси Z и одновременно отмечаем, что импульс частицы вдоль этой оси равняется нулю (согласно определению вектора $\dot{\vec{L}}$). Это противоречит соотношению неопределенностей (10.25). Таким образом, для микрочастицы характерна невозможность определения трех проекций ее момента импульса. Согласно принципа неопределенности для момента импульса частицы одновременно можно задать только одну из проекций (обычно выбирают L_z) и длину вектора $\dot{\vec{L}}$, то есть его модуль.

Замечание – Из этого правила имеется одно исключение: для микрочастицы может быть установлено полное отсутствие вращения, то есть равенство нулю самого вектора момента импульса, а значит и одновременное равенство нулю всех трех его проекций.

Рассмотрим второе соотношение (10.26) принципа неопределенностей, а именно

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar.$$

В этом соотношении под Δt подразумевается время, в течение которого микрочастица обладает энергией $E \pm \Delta E$. Неопределенность энергии микрочастицы определяется временем ее пребывания в этом энергетическом состоянии. Существенных значений неопределенность может достигнуть лишь в тех случаях, когда время пребывания на данном энергетическом уровне начнет определяться ничтожными долями секунды. Так атомный электрон находится сколь угодно долго на своем самом низком (основном) энергетическом уровне. Поэтому энергия основного состояния фиксирована вполне жестко. В то же время на более высоком (возбужденном) уровне атомный электрон задерживается недолго. Отсюда его энергия в возбужденном состоянии будет равно $E \pm \Delta E$. Поэтому частота, излученная атомом, при переходе с более высокого на более низкий энергетический уровень, не может быть строго определенной, а лежит в пределах $\omega \pm \Delta E / \hbar$. Это и наблюдается в эксперименте – спектральные линии обладают конечной шириной, чем и пользуются для определения, так называемого, времени жизни атома в возбужденном состоянии. Сказанное относится к любой нестабильной системе. Если время ее жизни до распада Δt , то из-за конечности этого времени энергия системы имеет неустранимую неопределенность, не меньшую, чем $\Delta E \approx \hbar / \Delta t$.

В заключении рассматриваемого вопроса отметим, что принцип неопределенности позволяет решать многие задачи и предсказывать основные черты многих физических явлений.

§ 10.7 Частица в прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». Квантование энергии

Рассматривая уравнение Шредингера мы указали, что оно позволяет найти пси-функцию данного состояния и, следовательно, определить вероятность нахождения частицы в любой точке пространства. Далее, так как в уравнение Шредингера входит в качестве параметра энергия E , то уравнение вида (10.21) имеют решения, удовлетворяющие стандартным условиям, лишь при избранных значениях E . Эти избранные значения называются **собственными значениями** энергии. Пси-функции, соответствующие собственным значениям E , называются **собственными функциями**. Нахождение собственных значений и собственных функций представляет собой, как правило, очень сложную математическую задачу.

Мы рассмотрим пример, в котором уравнение Шредингера (10.21) можно решать сравнительно просто. В качестве примера рассмотрим случай, когда движение частицы (например электрона) происходит только вдоль оси x и ограничено двумя непроницаемыми для частицы стенками с координатами: $x = 0$ и $x = l$. Потенциальная энергия Π в этом случае имеет вид представленный на рисунке 82, то есть $\Pi = 0$ при $0 \leq x \leq l$, и обращается в бесконечность при $x < 0$ и $x > l$. Вид кривой потенциальной энергии на рисунке 82 получил название бесконечно глубокой «потенциальной ямы».

Если бы к электрону были применимы законы Ньютона, то такой электрон двигался бы непрерывно сначала в одну сторону ямы, упруго отражался бы от стенки, затем двигался в обратную сторону и так далее. С точки зрения механики Ньютона иначе и быть не может, так как при $\Pi = 0$, кинетическая энергия $m\vartheta^2/2$ будет постоянной. Итак, по поводу возможных движений в потенциальной яме «обычной» частицы можно сделать следующее заключение. В «яме» возможно движение с любой кинетической энергией $m\vartheta^2/2$, кроме того частица может покоиться в любой точке на дне

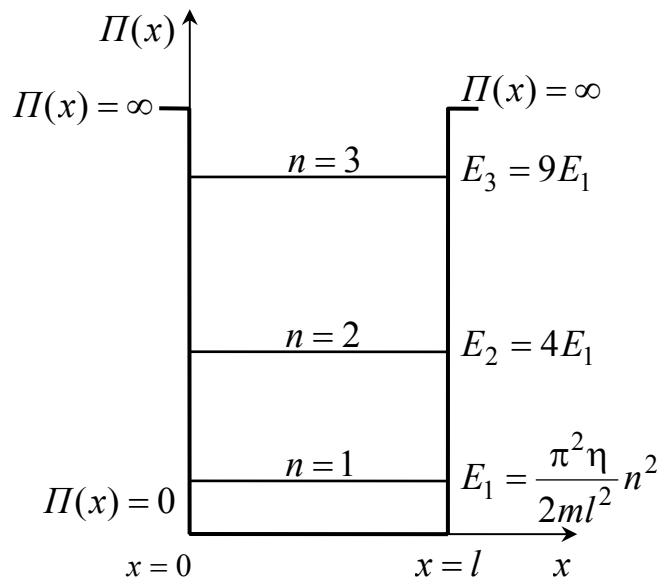


Рисунок 82

движений в потенциальной яме «обычной» частицы можно сделать следующее заключение. В «яме» возможно движение с любой кинетической энергией $m\vartheta^2/2$, кроме того частица может покоиться в любой точке на дне

«ямы». Для каждой данной энергии движение будет равномерным то в одну, то в другую сторону, причем на стенках ямы скорость будет меняться скачком по направлению. Теперь рассмотрим движение электрона с квантово-механической точки зрения.

В этом случае движение электрона будет задаваться уравнением (10.21). Однако, при условии одновременного движения вдоль оси x и равенства нулю потенциальной энергии ($U = 0$), формула (10.21) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (10.28)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (10.29)$$

и перепишем (10.28) в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0. \quad (10.30)$$

Этому уравнению удовлетворяют значения синуса и косинуса от аргумента kx , то есть

$$\psi = A \begin{cases} \cos kx \\ \sin kx \end{cases}.$$

Из естественных условий, накладываемых на пси-функцию следует, $\Psi(x) = 0$ на границах ямы, в точках $x = 0$ и $x = l$, где потенциальная энергия обращается в бесконечность, то есть за стенки «ямы» электрон не проникает. Этим условиям удовлетворяет значение синуса, то есть

$$\psi(x) = A \sin kx,$$

так как $\psi(0) = A \sin 0 = 0$, что удовлетворяет граничным условиям. С другой стороны, согласно граничным условиям,

$$\psi(l) = A \sin kl = 0,$$

что возможно в случае, если

$$kl = \pm \pi n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.30)$$

Значение $n = 0$ отпадает, так как при этом $\Psi(x) \equiv 0$, то есть частицы вообще нет. Сравнивая выражения (10.29) и (10.30) найдем, что

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (10.31)$$

то есть энергия оказалась квантовой и ее спектр дискретный (рисунок 82).

Замечание – Из выражений (10.31) и (10.12) легко показать, что $k = 2\pi / \lambda$. Следовательно, согласно (10.30)

$$\frac{2\pi}{\lambda} l = \pi n$$

или

$$\lambda = \frac{2l}{n}. \quad (10.32)$$

Таким образом, длина волны может принимать значения: $2l, l, \frac{2a}{3}, \frac{a}{2}, \dots$. Из этого следует, что ψ – функция представляет собой амплитуду стоячей волны, и вся рассматриваемая задача формально имеет много общего с задачей колебания стержня или струны. Последнее хорошо видно на рисунке 83.

Находясь на данном энергетическом уровне, электрон имеет импульс, который легко найти из соотношения (10.12)

$$p = \frac{2\pi \hbar}{\lambda} = \hbar k = \frac{\pi \hbar}{l} n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.33)$$

и который также будет квантованным.

Движение электрона описывается набором собственных пси-функций

$$\psi_n = A \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Коэффициент A легко найти из условия нормировки, которое, в нашем случае имеет вид

$$A^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = 1.$$

Это табличный интеграл, его значение равно $l/2$, поэтому

$$A = \sqrt{2/l}.$$

Значение ψ^2 , то есть плотность вероятности нахождения электрона в том или ином месте «ямы», равно

$$\psi^2 = A^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (10.34)$$

Особо отметим, что каждому энергетическому уровню соответствует своя (того же номера n) собственная функция.

На рисунке 83 показана пси-функция и ее квадрат для первых трех энергетических уровней электрона, находящегося в «потенциальной яме». Квантовая механика приводит к выводу, что электрон бывает не одинаково часто в разных точках пространства дна «ямы». Если энергия электрона наименьшая (он находится на основном уровне, $n = 1$), то чаще всего мы встретим его в середине дна «ямы». Если электрон находится в состоянии с $n = 2$, то он никогда не бывает в середине дна «ямы», а чаще всего в местах максимума ψ^2 -функции. Кривые ψ_n^2 дают ясное представление о тех местах, где бывает электрон.

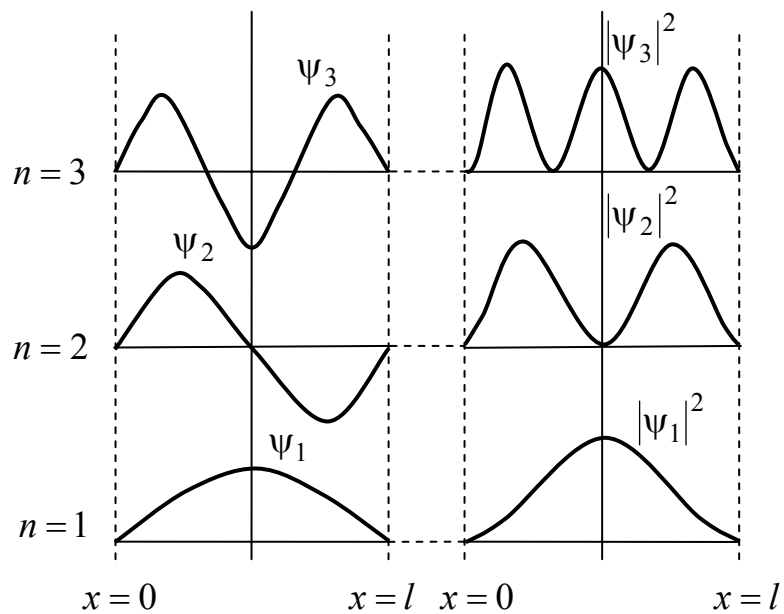


Рисунок 83

Проанализируем полученные результаты в отношении движения электрона в «потенциальной яме». В «яме» возможно движение лишь с дискретным набором значений энергии $E_1, E_2, E_3, \dots$. Сведения о характере движения электрона при определенной энергии указываются квадратом пси-функции. Зная $\psi^2(x)$, можно узнать в каких точках дна «ямы» электрон бывает чаще, а в каких – реже. Интервал между разрешенными энергетическими состояниями (10.31) уменьшается, когда увеличивается масса частицы или ширина «потенциальной ямы». В случае частиц с большой массой и систем с большими размерами разрешенные энергетические состояния практически сливаются и энергию можно считать не квантовой.

Пример – Рассмотрим энергию молекулы кислородного газа при комнатной температуре, то есть величину E порядка 10^{-20} Дж. Подставляя в

формулу (10.31) значения $l = 100$ нм (длина свободного пробега молекулы в газе), $m = 5,4 \cdot 10^{-30}$ кг. Найдём на каком энергетическом уровне n будет находиться молекула O_2 . Вычисления дают $n = 1000$. Совершенно ясно, что на $n = 1001$, энергия практически останется неизменной, так как в нашем случае

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n \approx 10^{-24} n, \text{ Дж.}$$

Такие густо расположенные энергетические уровни будут практически восприниматься как сплошной спектр энергии. Поэтому, хотя квантование энергии в принципе имеет место, но на характере движения молекул это уже не будет сказываться

При этом кривая ψ_n^2 будет иметь огромное число чередующихся, близко расположенных максимумов и минимумов, и мы практически можем утверждать, что вероятность пребывания микрочастицы одинакова для всех точек ямы.

Следовательно, при переходе от атомных масштабов к макроскопическим результаты квантовой механики переходят в результаты классической механики. Это происходит всегда, когда энергия частицы соответствует большому квантовому числу n .

Мы пришли к важному принципу квантовой механики: при больших квантовых числах результаты квантовой механики совпадают с механикой «обычных» частиц. Это значит, что при больших квантовых числах n понятие траектории частицы и другие особенности, свойственные «обычной» частице, применимы и к микрочастице.

В заключении отметим ещё одну особенность свойственную только микрочастицам.

Вернёмся к началу параграфа, где мы указали, что обычная частица может покоиться на дне «ямы», то есть (в нашем случае) её минимальная энергия будет равна нулю. В тоже время, для электрона мы получили, что его минимальная энергия отлична от нуля и равна, согласно (10.31),

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2}.$$

Это так называемая **нулевая энергия**. Наличие нулевой энергии у электрона (или других микрочастиц) означает, что они никогда не прекращают движения. Строгая теория показывает, что даже при абсолютном нуле температуры микрочастицы обладают определенной нулевой энергией, существенно различной в зависимости от характера поля сил, в котором находится микрочастица.

Пример – Пусть $l = 1 \cdot 10^{-10}$ м (характерный атомный размер). Тогда нулевая энергия электрона в «потенциальной яме» будет

$$E_0 = \frac{h^2 \pi^2}{2ml^2} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 3,14^2}{2 \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-20}} = 6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 37 \text{ эВ}.$$

Это очень большая энергия. В параграфе 8.1 мы указывали, что один электроно-вольт эквивалентен нагреву до 11600 К.

Замечание – *Существование конечной минимальной энергии непосредственно связано с принципом неопределенности Гейзенберга*

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h.$$

Действительно, неопределенность положения частицы Δx равна l . Что же касается импульса частицы, то он может быть направлен только или к одной или другой стенке «ямы», значит его проекция на ось x меняется от $-p_x$ до $+p_x$. Из этого получаем, что неопределенность в импульсе равна

$$\Delta p_x = 2p.$$

Следовательно,

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = l \cdot 2p \approx h,$$

или

$$p \approx \frac{h}{2l}.$$

При $P(x) = 0$, мы получили

$$E = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{h^2}{8ml^2} = \frac{h^2 \pi^2}{2ml^2},$$

что совпадает с приведенным выше выражением для нулевой энергии.

Мы уделили относительно много внимания движению электрона (микрочастицы) в бесконечно глубокой «потенциальной яме». На этом простейшем примере было легко показать основные черты квантовомеханического метода рассмотрения задач. Если электрон (или другая микрочастица) может совершать движение в ограниченном объеме, то характерные особенности решения уравнения Шредингера сохраняются, какую бы форму ни имела в этой области потенциальная кривая. Во всех случаях «потенциальную яму» можно пересечь некоторым количеством горизонтальных прямых – возможных энергетических уровней. В принципе уравнение Шредингера позволяет вычислить эти значения энергии, если только задана форма «потенциальной ямы». Самый низкий уровень дает нулевую энергию микрочастицы для данной «потенциальной ямы».

Для каждого энергетического уровня номера n квантовая механика устанавливает вид волновых функций $\psi_n(x, y, z)$. Величина $\psi_n^2(x, y, z)$ даст плотности вероятность нахождения частицы в данной точке пространства, если энергия микрочастицы есть E_n . Так как за время измерения микрочастица успеет многократно побывать во всех точках пространства, то $\psi_n^2(x, y, z)$ можно рассматривать как плотность «облака микрочастицы». Электронное облако, окружающее атомное ядро, есть нечто вроде фотографии атома, снятой с длительной экспозицией.

***Замечание:** Пси-функция является амплитудой волны, сопоставляемой микрочастице. В разобранным примере электрона, находящегося в «потенциальной яме», это были стоячие волны и каждому уровню соответствовала своя длина волны λ . В общем случае произвольной потенциальной кривой $\Pi(x, y, z)$, стоячие волны, соответствующие данному состоянию n , будут весьма своеобразны. Их длина волны*

$$\lambda = \frac{h\pi}{\sqrt{2m(E - \Pi)}}$$

будет разной в различных точках пространства, в соответствии с ходом потенциальной кривой $\Pi(x, y, z)$. Для более или менее сложных примеров сходство пси-функции с амплитудой стоячей волны (в привычном смысле этого слова) становится весьма отдаленным.

Теория и опыт показали, что в ряде случаев одному значению энергии E_n могут соответствовать несколько собственных пси-функций. Это происходит, если при одной энергии возможны состояния микрочастицы, отличающиеся другой физической величиной (например, моментом импульса). Такие состояния называют **вырожденными** состояниями. Виды ψ^2 -облаков таких состояний могут радикально различаться.

Если найдены уровни энергии и вычислены собственные пси-функции для всех уровней, то этим исчерпывающим образом решена задача о движении микрочастицы в «потенциальной яме» данного вида. Зная решение уравнения Шредингера, можно предсказать результат того или иного экспериментального измерения.

§ 10.8 Атом водорода в квантовой механике

Атом водорода представляет собой простейшую систему, состоящую из электрона с зарядом e , который движется в кулоновском поле ядра (протона) с таким же по величине зарядом.

Замечание – Если ядро имеет заряд Ze (Z – целое число), то такую систему называют **водородоподобной**. При $Z = 1$ это атом водорода, при $Z = 2$ – однократно ионизированный атом гелия – ион He^+ , при $Z = 3$ – двукратно ионизированный атом лития – ион Li^{++} и т.д.

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром в такой системе равна

$$П(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (10.35)$$

где для атома водорода $Z = 1$.

В этом случае уравнение Шредингера запишется в виде

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (10.36)$$

где m_e – масса электрона.

Поле (10.35), в котором движется электрон, является центрально – симметричным, поэтому для его решения используются сферические координаты: r, θ, ϕ . Мы не будем записывать уравнение (10.36) в сферических координатах и заниматься его решением, так как оно довольно громоздко и выходит за рамки нашего курса. Мы остановимся лишь на сути процесса решения и на анализе окончательных результатов.

Итак, уравнение (10.36), записанное в сферических координатах, решается методом разделения переменных с учетом естественных требований, налагаемых на пси-функцию: она должна быть однозначной, конечной и непрерывной. В процессе решения получается, что этим требованиям можно удовлетворить при любых положительных значениях E и при дискретных отрицательных значениях энергии, равных

$$E = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (10.37)$$

где n – главное квантовое число.

Таким образом, как и в случае «потенциальной ямы» с бесконечно высокими стенками, решение уравнения Шредингера для атома водорода приводит к появлению дискретных энергетических уровней. Возможные значения энергий $E_1, E_2, E_3 \dots$ показаны на рисунке 84 в виде горизонтальных прямых. Самый нижний уровень E_1 , соответствующей минимальной энергии называется **основным**, все остальные уровни называются возбужденными. При $E < 0$ движение электрона является связанным с ядром, и он находится внутри гиперболической «потенциальной ямы». Из рисунка следует, что по

мере роста главного квантового числа n энергетические уровни сближаются и при $n = \infty$, $E_\infty = 0$.

Замечание – Атом является своеобразным вариантом «потенциальной ямы». Это яма без дна с расходящимися, по гиперболическому закону, краями (10.35). Электрон внутри атома обладает отрицательной потенциальной энергией, поскольку минимальное значение потенциальной энергии стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$, а максимальное значение равно нулю при $r \rightarrow \infty$.

Другими словами, начало отсчета потенциальной энергии выбрано так, что энергия электрона отрицательна. Достоинство такого выбора начала отсчета состоит в том, что для разных атомов, одинаковое значение потенциальная энергия имеет только при $r \rightarrow \infty$. Естественно, это общее значение выбрать за нуль.

Находясь в основном состоянии (то есть находясь на уровне E_1), электрон, согласно соотношению (10.37), обладает минимальной энергией

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} = -13,6 \text{ эВ.} \quad (10.38)$$

При $E > 0$ движение электрона становится свободным (заштрихованная область на рисунке 84), что соответствует **ионизированному** атому. Для того, чтобы электрон удалить из атома, ему надо сообщить энергию, большую, чем энергия E_1 . Таким образом, **энергия ионизации** будет численно равно работе $A = E_\infty - E_1$, то есть 13,6 эВ.

Замечание – Принято определять работу отрыва электрона от атома с помощью потенциала ионизации. Для атома водорода

$$U_{\text{ион}} = \frac{E_1}{e} = 13,6 \text{ В.}$$

Причина названия следующая. Предположим, что вырывание электрона из атома водорода происходит под действием пучка электронов. Чтобы ионизировать атом водорода, надо разогнать электроны, играющие роль «снарядов», по крайней мере до энергии $eU = E_1$. Следовательно, U есть разность потенциалов, до которой надо разогнать электрон, чтобы при ударе об атом водорода он сумел вызвать ионизацию.

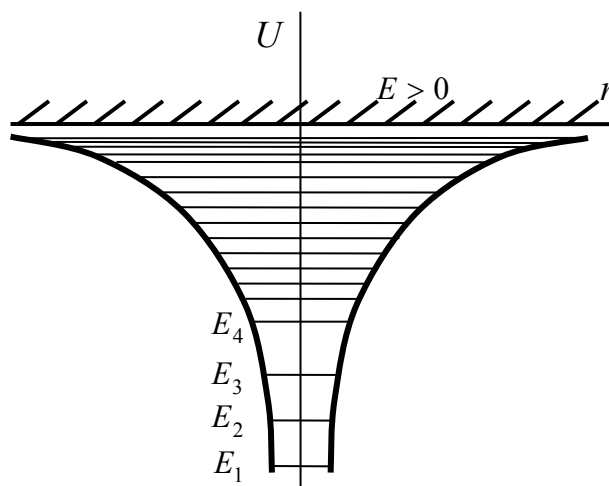


Рисунок 84

Решение уравнения Шредингера (10.36) позволяет найти не только все энергетические уровни E_n атома водорода, но и все собственные функции $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, определяемые тремя квантовыми числами: главным n , азимутальным (орбитальным) l и магнитным m .

Главное квантовое число n совпадает с номером уровня энергии, причем, согласно соотношения (10.37), энергия электрона зависит только от главного квантового числа. Следовательно, каждому собственному значению энергии E_n (кроме E_1) соответствует несколько собственных функций $\Psi_{n,l,m}$, отличающихся значениями квантовых чисел l и m . Итак, в основном состоянии с энергией E_1 электрон характеризуется одной функцией Ψ_1 . Возбужденные состояния, оказываются вырожденными, причем n^2 -кратно. Этот термин означает, что энергии E_2 – соответствуют четыре пси-функции, энергии E_3 – девять и т.д. Каждое из этих состояний может реально осуществиться.

Решение уравнения Шредингера для атома водорода показывает, что состояния с одним и тем же значением энергии E_n могут отличаться величиной момента импульса электрона, а также значением проекции момента импульса на какое – либо направление (обычно за это направление выбирают ось Z , которое выделяется среди других только тем, что мы его выбрали).

Результат решения уравнения Шредингера для атома водорода показывает, что момент импульса электрона имеет дискретный ряд значений, которые даются формулой

$$L = \sqrt{l(l+1)} \, h, \quad (10.39)$$

где l – азимутальное квантовое число, которое может принимать целые значения от 0 до $n - 1$, если электрон находится на n -ом уровне.

Далее, решение уравнения Шредингера показывает, что по отношению к избранному направлению Z момент импульса $\vec{L}$ может быть ориентирован лишь таким способом, чтобы

$$L_Z = \pm m h, \quad (10.40)$$

где m – магнитное квантовое число, которое может принимать целочисленные значения от $-l$ до $+l$, включая ноль.

Напомним, что в соответствии с принципом неопределенности (смотрите параграф 10.6) значения L и L_Z исчерпывает возможные сведения о моменте импульса, другими словами, имеет смысл одновременное задание только этих двух величин.

В атомной физике состояния электрона со значениями $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ обозначают соответственно буквами $s, p, d, f, \dots$. Число впереди буквы используют для указания главного квантового числа. Например $3p$ – это состояние с $n = 3$ и $l = 1$. Соответственно (по терминологии заимствованной из спектроскопии) говорят об s -электронах, p -электронах и т.д. В нижеприве-

денной таблице 1 показаны возможные состояния электрона в атоме водорода для $n = 1, 2$ и 3 .

Таблица 1

Уровень энергии E_n	n	l	Обозначение состояния	m
E_1	1	0	$1s$	0
E_2	2	0 1	$2s$ $2p$	0 -1, 0, +1
E_3	3	0 1 2	$3s$ $3p$ $3d$	0 -1, 0, +1 -2, -1, 0, +1, +2

Из таблицы четко видно n^2 -кратное вырождение возбужденных состояний. Чтобы квантовые числа стали играть роль, нужно «снять вырождение», то есть добиться такого положения, при котором состояния с разным моментом импульса соответствовала бы разная энергия. Для атомов водорода это можно сделать, помещая их в магнитное поле. У других атомов вырождение снимается взаимодействием электронов.

§ 10.9 Распределение плотности вероятности

Мы уже неоднократно говорили, что в квантовой теории имеет смысл лишь состояние (ψ -функция) и вероятность местонахождения электрона в том или ином месте атома. Для наглядности вводят представление об электронном облаке (смотрите параграф 10.7), плотность распределения которого пропорциональна в каждой точке плотности вероятности dP / dV местонахождения электрона в этой точке.

Уравнение Шредингера дает состояние, описываемое собственной функцией $\psi = \psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$ и характеризуемое тройкой квантовых чисел n, l, m .

Рассмотрим $1s$ -состояние. В этом состоянии квантовые числа $l = 0$, $m = 0$, значит для n имеется лишь одна Ψ_{1s} -функция. Равенство $l = 0$ говорит об отсутствии у электрона момента импульса, что говорит об отсутствии предпочтительных направлений, то есть сферической симметрии электронного облака. Следовательно, пси-функция в $1s$ -состоянии будет зависеть только от r

$$\psi_{1s} \sim e^{-\alpha r}. \quad (10.41)$$

Благодаря сферической симметрии вероятность нахождения электрона на расстоянии r от ядра одинакова по всем направлениям. Поэтому в качестве элемента объема dV возьмем сферический слой толщиной dr и радиусом r , то есть $dV = 4\pi r^2 dr$. Тогда плотность вероятности нахождения электрона в сферическом слое единичной толщины вблизи радиуса r запишется в виде

$$\frac{dP}{dV} = Ar^2 e^{-2\alpha r} \sim r^2 e^{-2\alpha r}. \quad (10.42)$$

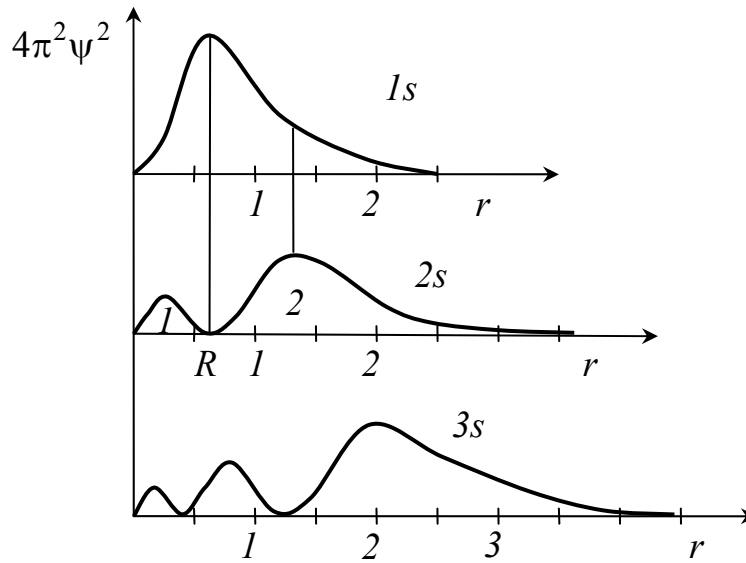


Рисунок 85

На рисунке 85 приведены кривые радиального распределения плотности вероятности электронного облака для пси-функций: $\psi_{1s}, \psi_{2s}, \psi_{3s}$. По оси ординат отложена величина $4\pi r^2 \psi^2$, называемая радиальной плотностью вероятности пребывания электрона в шаровом слое между радиусами r и $r + dr$. Кривые радиальной плотности показывают, что в состоянии $1s$ с наибольшей вероятностью электрон находится на расстоянии $0,53r$ от ядра. Остальные слои пространства посещаются реже. Следовательно, атом водорода в нормальном состоянии можно образно представить в виде положительного заряда (ядра), локализованного в центре атома, окруженного сферически распределенным отрицательным зарядом. На достаточно большом расстоянии плотность отрицательного заряда стремится к нулю; в слоях с радиусом вблизи $0,53r$ слоевая плотность распределения заряда максимальна, а слои вблизи ядра электрон «посещает» редко. В состоянии $2s$ имеются два максимума плотности вероятности, то есть электрон может находиться в двух сферических слоях 1 и 2, разделенных поверхностью радиуса R , в точках которой вероятность встретить электрон равняется нулю. Слой 1 перекрывается с областью распределения $1s$ -состояния. Однако $2s$ -электрон проводит ос-

новное время в слое 2, который находится на значительно большем расстоянии от ядра. Наконец, в состоянии $3s$ имеется три максимума, из которых наиболее «посещаемый» является дальний. С возрастанием главного квантового числа n электронное облако расплывается.

Замечание – Следует обратить внимание на то, что пространственное распределение в электронном облаке атома можно характеризовать либо квадратом модуля пси-функции $|\psi(r)|^2$, либо величиной $4\pi r^2 |\psi(r)|^2$. Первое выражение определяет плотность вероятности нахождения электрона в единице объема, второе – плотность в сферическом слое единичной толщины, что является более выразительным и физически содержательным.

Совершенно иначе выглядят функции $2p$ -состояний. Значению $l = 1$ могут соответствовать три значения $m = 0, -1, +1$. Представление о конфигурациях электронного облака дает рисунок 86.

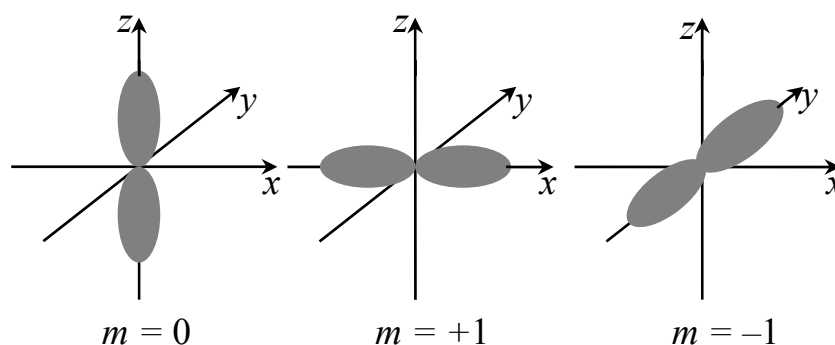


Рисунок 86

При $m = 0$ длинная ось располагается вдоль выделенного направления z , при $m = \pm 1$ – перпендикулярно к нему. Очевидно, что состояния с $m = \pm 1$ имеет смысл различать лишь когда они присутствуют вместе. Рисунок 86 дает некоторое общее представление о симметрии электронного облака $2p$ – состояния. Картина в общих чертах одинакова для всех p -состояний. Различие в главном квантовом числе сводится лишь к измерению характера радиального спада плотности (чем больше n , тем сильнее растянется картина).

§ 10.10 Спектр атома водорода

Самым простым спектром является спектр излучения атома водорода. Его простота физически связана с наличием в атоме только одного электрона, а математически с тем, что положения энергетических уровней зависят только от главного квантового числа n .

Спектр атома водорода состоит из отдельных тонких спектральных линий (линейный спектр), положение которых на шкале частот связано с по-

ложением соответствующих энергетических уровней в энергетическом спектре атома (рисунок 87). Энергетические уровни построены с помощью формулы (10.38), которую запишем в виде

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{13,6}{n^2}, \text{ эВ.} \quad (10.43)$$

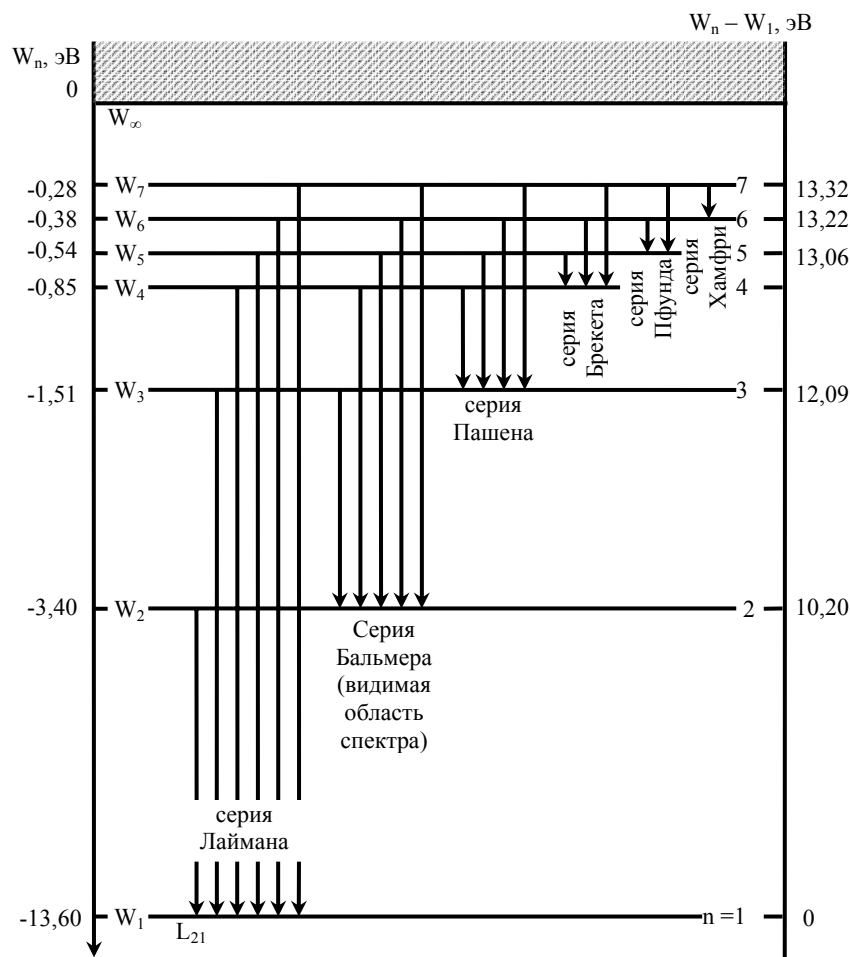


Рисунок 87

Как мы уже отмечали, состояние атома водорода, в котором электрон обладает энергией $E_1 = -13,6$ эВ называется основным (или нормальным) и является стационарным. Атом, не подверженный внешнему воздействию, может находиться в основном состоянии неопределенно долго. Энергетический уровень при этом является бесконечно тонким согласно принципу неопределенностей (10.26), так как $\Delta t \rightarrow \infty$, то $\Delta E \rightarrow 0$. Все остальные энергетические состояния $E_2, E_3, \dots$ называются возбужденными, так как возникают под внешним воздействием и могут существовать ограниченное время Δt . Поэтому возбужденный энергетический уровень несколько «размыт», то есть имеет ширину $\Delta E \approx \hbar / \Delta t$.

Возбужденный атом в среднем через время Δt самопроизвольно (спонтанно) переходит в нормальное (или в другое, энергетически более низ-

кое, чем исходное) состояние. Высвобождающаяся при этом энергия испускается атомом в виде кванта электромагнитного излучения

$$\hbar\omega = E_m - E_n, \quad (10.44)$$

где E_m – энергия возбужденного состояния;

E_n – энергия возбужденного или основного состояния, причем $E_m > E_n$.

Подставляя (10.43) в (10.44) и учитывая, что $\omega = 2\pi\nu$, получим

$$\nu = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (10.45)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$;

$m = n + 1, n + 2, \dots$;

величина $\frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, получило название постоянной

Ридберга и обозначается буквой R .

Замечание: В спектроскопии, частоту выражают в обратных сантиметрах, соответственно используют постоянную Ридберга в виде $R' = R / 2\pi c = 109740 \text{ см}^{-1}$. Выражение (10.45) позволяет объяснить особенности спектра атома водорода.

Основной особенностью спектра атома водорода является тот факт, что спектр состоит из серий закономерно группирующихся линий, что и отражено в соотношении (10.45) и показано на рисунке 87. Указанные серии были открыты экспериментально, до создания квантовой механики, в видимой (Бальмер И. – 1885 г.), в ультрафиолетовой (Лайман Т. – 1906 г.) и в инфракрасных областях спектра (Пашен Ф. – 1909, Брекета, Пфунта).

Из формулы следует, что серия Лаймана возникает при переходе с любого возбужденного уровня на основной; серия Бальмера при переходе с любого возбужденного на уровень с $n = 2$, и т.д. При этом результаты эксперимента хорошо совпадают с рассчитанными по формуле (10.45). На рисунке 88 приведена фотография видимой серии Бальмера.

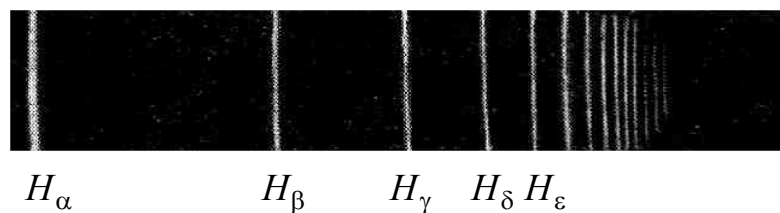


Рисунок 88

Измеренные длины волн в этой серии равны: $H_{\alpha} = 6563 \text{ \AA}$, $H_{\beta} = 4861 \text{ \AA}$, $H_{\gamma} = 4340 \text{ \AA}$, $H_{\delta} = 4102 \text{ \AA}$, $H_{\varepsilon} = 3970 \text{ \AA}$. В то же время, рассчитанные по формуле (10.45) длины волн этой серии соответственно равны $\lambda_3 = 6562,80 \text{ \AA}$, $\lambda_4 = 4861,38 \text{ \AA}$, $\lambda_5 = 4340,51 \text{ \AA}$, $\lambda_6 = 4101,78 \text{ \AA}$, $\lambda_7 = 3970,11 \text{ \AA}$. Результаты показывают хорошее совпадение, расхождение теоретических цифр не превышает пяти единиц в последней цифре.

Кстати, на фотографии хорошо заметно сближение линий по мере роста числа m .

Следует отметить некоторые особенности использования схемы уровней энергии, представленной на рисунке 86.

Известно, что испускание и поглощение излучения происходит при переходах электрона с одного уровня на другой. В квантовой механике доказывается, что для азимутального квантового числа l имеется правило отбора

$$\Delta l = \pm 1. \quad (10.46)$$

Это означает, что возможны только такие переходы, при которых l изменяется на единицу.

Правило обусловлено наличием у фотона собственного момента импульса (спина), равного примерно $\hbar$. При испускании фотон уносит из атома этот момент, а при поглощении привносит, так что правило отбора (10.46) является следствием закона сохранения импульса.

С учетом сказанного, более удобно пользоваться схемой уровней энергии, представленной на рисунке 89, так как на этой схеме (правда частично) отражено вырождение уровней и показаны переходы с учетом правила отбора.

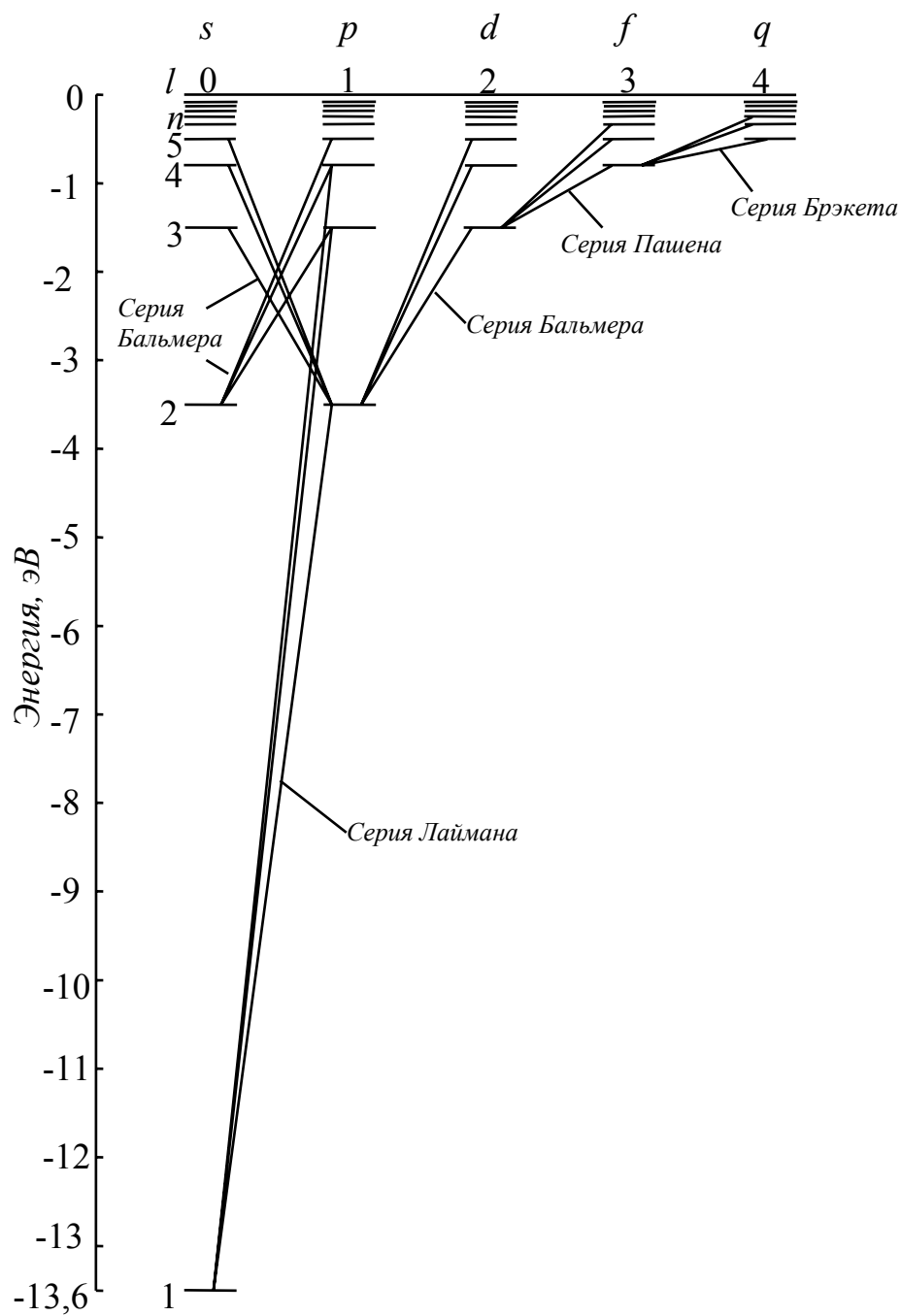


Рисунок 89

§ 10.11 Спин электрона

Исследование спектров щелочных металлов при помощи приборов с большой разрешающей силой показало, что спектральные линии этих спектров расщепляются на две, то есть каждая линия является двойной (дуплет). Структура спектра, отражающая расщепление спектральных линий на компоненты, называется тонкой структурой. Сложные линии различных элемен-

тов (не обязательно щелочных металлов), получили название мультиплетов, то есть их спектральные линии могут расщепляться на две, три, четыре и более компонент.

Расщепление спектральных линий является следствием расщепления самих энергетических уровней. Для объяснения расщепления энергетических уровней была выдвинута гипотеза (Гаудсмит и Уленбек, 1925 г.) о том, что электрон обладает собственным моментом импульса L_s , не связанным с движением электрона в пространстве. Этот собственный момент импульса получил название **спина**. В дальнейшем эта гипотеза была подтверждена большим количеством экспериментальных фактов. Кроме того, было установлено, что наличие спина и все его свойства вытекают из релятивистского уравнения квантовой механики, установленного Дираком. Таким образом, выяснилось, что спин электрона характеризует внутреннее свойство электрона (подобно массе и заряду) и является свойством одновременно квантовым и релятивистским. Кстати, отметим, что спином обладают также протоны, нейтроны, фотоны и другие элементарные частицы (за исключением мезонов, так как их спин равен нулю).

Величина собственного момента импульса электрона и его проекция на ось определяются в соответствии с правилами квантовой механики (смотрите соотношения (10.39) и (10.40)) так называемым **спиновым квантовым числом s** равным $\frac{1}{2}$, тогда

$$m_s = \pm s = \pm 1/2.$$

Таким образом, состояние электрона в атоме будет определяться четверкой чисел n, l, m, m_s , причем m_s принимает только два значения. Поэтому (возвращаясь к параграфу 10.7 и представленной в нем таблице распределения электрона по состояниям) в состояниях с данным значением n в атоме могут находиться не более $2n^2$ электронов.

§ 10.12 Принцип Паули. Заполнение электронных оболочек

Переходя к многоэлектронным системам необходимо отметить еще одну квантово – механическую особенность микрочастиц. Так, все электроны в атоме имеют одинаковые физические свойства: массу, электрический заряд, спин и другие внутренние характеристики (например, квантовые числа) – такие частицы называются **тождественными**. Необычные свойства тождественных частиц проявляются в фундаментальном принципе квантовой механики – **принципе неразличимости тождественных частиц**. Согласно этому принципу такие частицы различить экспериментально невозможно.

Замечание: В классической механике одинаковые частицы можно различить по положению в пространстве и импульсам (кроме того их мож-

но пронумеровать или покрасить), то есть проследить их траектории. В этом плане классические частицы обладают индивидуальностью, поэтому классическая механика систем из одинаковых частиц принципиально не отличается от классической механики систем из разных частиц.

Основываясь на указанном принципе и ряде опытных данных В. Паули сформулировал принцип, согласно которому в любой системе тождественных частиц с полуцелым спином две из них не могут одновременно находиться в одинаковом состоянии.

Другими словами, в одном и том же атоме не может быть даже двух электронов с одинаковым набором четырех квантовых чисел n, l, m, m_s , то есть два электрона находящиеся в одном и том же атоме, различаются значениями по крайней мере одного квантового числа.

Напомним, состояние каждого электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами:

главным n ($n = 1, 2, 3, \dots$),

азимутальным l ($l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$),

магнитным m ($m = -l, 0, +l$),

спиновым m_s $\left(m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Поэтому в состояниях с данным значением n , в атоме может находиться не более $2n^2$ электронов.

Совокупность электронов, имеющих одинаковые значения квантового числа n , образуют слои. Обычно слой обозначают заглавными латинскими буквами $K, L, M, N, \dots$ в порядке следования квантовых чисел n . Слои состоят из одной или нескольких оболочек, которые заполняются согласно принципу Паули, при этом максимальное число электронов в $s, p, d, \dots$ оболочках равно, соответственно 2, 6, 10, 14, ..., получаемых по формуле $2(2l + 1)$.

Таким образом, при заполнении электронных оболочек сложных атомов пользуются в основном принципом Паули.

Однако, следует иметь в виду, что у многоэлектронных атомов снимается вырождение по квантовым числам, за счет взаимодействия электрона в атоме. Следовательно, энергия будет зависеть и от других квантовых чисел n, l, m, m_s , причём в большей степени от квантовых чисел n и l . Энергия состояния сильнее возрастает с увеличением числа n , чем с увеличением числа l , поэтому, как правило, состояние с большим n обладает, независимо от значения l , большей энергией. Поэтому, наряду с принципом Паули, мы должны также учесть, что атом в невозбужденном состоянии, должен обладать минимумом энергии. Это второй принцип, который используется при заполнении электронных оболочек.

В свете данных об электронном строении атомов становятся ясными закономерности периодической системы Д.И. Менделеева. Начнем с атома водорода, имеющего один электрон. Каждый последующий атом будем получать, увеличивая заряд ядра предыдущего атома на единицу и добавляя

один электрон, который мы будем помещать в доступное ему, согласно принципа Паули, место с наименьшей энергией.

В атоме водорода имеется в основном состоянии один $1s$ -электрон с произвольной ориентацией спина. Следующий элемент гелий имеет удвоенный заряд и два электрона, которые могут оба находиться в $1s$ -оболочке, но с противоположной ориентацией спинов. На этом заканчивается заполнение K -слоя. Далее, начиная с элемента лития застраивается в начале $2s$ -оболочка (на ней 2 электрона), а затем $2p$ -оболочка. Этот процесс будет происходить до атома неона, пока не заполнится вся $2p$ -оболочка шестью электронами. Таким образом в слое L будет находиться 8 электронов. Далее заполнение оболочек и слоев будет повторяться и заканчиваться на инертных газах. Однако, уже начиная с девятнадцатого элемента, последовательность в заполнении оболочек начнет нарушаться. У калия последний электрон разместится не на $3d$ -оболочке, как должно быть согласно принципа Паули, а на уровне $4s$. Следующий по порядку элемент, кальций, также получит электрон на уровень $4s$, а с 21 элемента, скандия, начнется застройка $3d$ -оболочки. Число электронов в оболочках и порядок их застройки изменился. Оказалось, что у хрома энергетически невыгодно иметь два $4s$ -электрона, поэтому оказались не застроенными $3d$ и $4s$ -оболочки. Не имеет смысла рассматривать все аномалии в заполнении слоев и оболочек. Для нас важен сам факт, что открытая Д.И. Менделеевым периодичность в химических свойствах элементов объясняется повторяемостью в структуре внешних оболочек у атомов элементов, то есть поведением внешних валентных электронов. Элементы со сходными свойствами приведены в столбцах периодической системы. Так первый столбец состоит из водорода и щелочных металлов. Все эти элементы имеют во внешней оболочке один s -электрон. Следующий столбец состоит из щелочноземельных элементов и все они имеют во внешней оболочке два s -электрона. Седьмой столбец (галогиды) имеет во внешней $5s$ -электроны; а восьмой столбец (инертные газы) имеет полностью застроенные s -оболочки.

Все указанные особенности в заполнение электронных оболочек, выясненные чисто физическими методами исследования (спектральный анализ, измерение магнитных моментов и т.д), помогли не только понять периодический закон Д.И.Менделеева, но и глубже разобраться в химических особенностях того или иного атома.

Список использованных источников

1 Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5 кн. Кн.3. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие для втузов /И.В.Савельев. - М: ООО «Издательство Астрель», 2003.-208с.

2 Сивухин, Д.В. Общий курс физики. В 5 кн. Кн.4. Оптика: учебное пособие для вузов / Д.В. Сивухин. – М: Издательство «Наука», 1980. – 752с.

3 Курс физики: учебник для вузов. В 2 т. /Под редакцией В.Н.Лозовского. – СПб.: Издательство «Лань», 2007.-Т.2 – 592с.

4 Ландау, Л.Д. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика / Л.Д.Ландау, Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. – М., 1965. – 384с.