

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ (СИСТЕМА ДВУХ ТЕЛ)

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по техническим направлениям подготовки бакалавров

Оренбург
2013

УДК 531.259.1
ББК 22.21я73
К 88

Рецензент – профессор, доктор технических наук В.И. Жаданов

Кудина, Л.И.
К 88 **Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел): методические указания / Л.И. Кудина, А.А.Гаврилов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 33с.**

Методические указания содержат краткие теоретические сведения и рекомендации по решению задач на определение реакций опор составных конструкций методом расчленения, а также варианты заданий для расчетно-графической работы и примеры ее выполнения.

Предназначены для самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по техническим направлениям подготовки бакалавров всех форм обучения, при выполнении расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика». Будут также полезны студентам при самостоятельном изучении курса теоретической механики и подготовке к практическим занятиям по данной теме.

УДК 531.259.1
ББК 22.21я73

©Кудина Л.И.,
Гаврилов А.А., 2013
©ОГУ, 2013

Содержание

1 Краткие теоретические сведения.....	4
1.1 Понятие о статически определенных и статически неопределенных задачах	4
1.2 Определение реакций опор составных конструкций. Метод расчленения.....	5
1.3 Общие рекомендации по решению задач	8
2 Вопросы для самоконтроля	11
3 Задание. Определение реакций составной конструкции (система двух тел).....	12
3.1 Содержание задания.....	12
3.2 Примеры выполнения задания.....	15
3.3 Общие требования к оформлению отчета по расчетно-графической работе	32
4 Литература, рекомендуемая для изучения темы.....	33

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Понятие о статически определенных и статически неопределенных задачах

При решении задач о равновесии несвободного твердого тела (или системы тел) реакции наложенных связей являются наперед неизвестными величинами. Число этих неизвестных зависит от числа и вида наложенных на тело (систему) связей. Соответствующая задача статики может быть решена лишь в том случае, когда число неизвестных реакций связей не превышает числа независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для действующей системы сил.

Задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия сил, называют *статически определенными*, а соответствующие системы тел – *статически определенными*.

Задачи, в которых число неизвестных превышает число уравнений равновесия сил и которые поэтому не могут быть решены методами статики, называют *статически неопределенными*, а соответствующие системы тел – *статически неопределенными*.

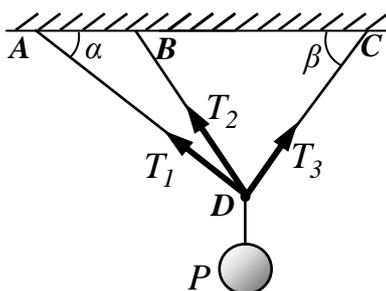


Рисунок 1

Примером статически неопределимой системы может служить груз заданного веса P , подвешенный на трех нитях, расположенных в одной плоскости (рисунок 1). Рассматривая равновесие узла D , можно составить только два независимых уравне-

ния равновесия плоской сходящейся системы сил, а неизвестных реакций в данном случае – три (силы натяжения нитей T_1 , T_2 и T_3). Очевидно, что статическая неопределимость обусловлена наложением лишних (с точки зрения неизменяемости системы) связей, так как в данной задаче для обеспечения равновесия груза при заданных углах α и β , третья нить не нужна.

Для решения статически неопределенных задач нужно отказаться от гипотезы абсолютно твердого, недеформируемого тела и рассмотреть деформации тел, входящих в систему, в данном случае нитей. Задачи подобного рода решаются методами сопротивления материалов и строительной механики.

1.2 Определение реакций опор составных конструкций. Метод расчленения

При решении задач статики нередко возникает необходимость определения реакций опор систем, состоящих из нескольких твердых тел, соединенных между собой какими-либо связями. Такие системы тел называются сочлененными. Примером подобных систем являются составные конструкции, например, многопролетные разрезные балки, трехшарнирные арки и рамы (рисунок 2).

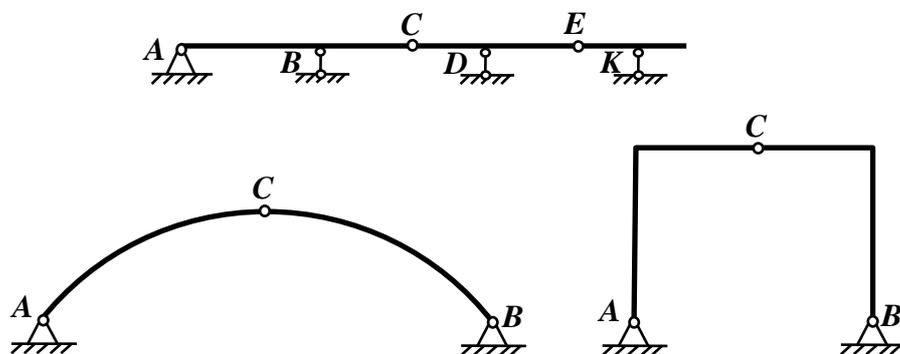


Рисунок 2

Связи, соединяющие между собой отдельные тела системы, принято называть *внутренними*. Связи, соединяющие тела системы с телами, не входящими в нее, называют *внешними*. Так, для многопролетной балки, изображенной на рисунке 2, связи, установленные в точках A , B , D и K – внешние, а шарниры в точках C и E – внутренние. Для арки и рамы внешние связи – шарниры в точках A и B , а шарнир в точке C – внутренняя связь (рисунок 2).

Особенность таких конструкций состоит в том, что после отбрасывания внешних связей (опор) система перестает быть жесткой. Например, если отбросить внешние связи рамы в точках A и B , то части рамы смогут поворачиваться вокруг шарнира C (рисунок 3,а).

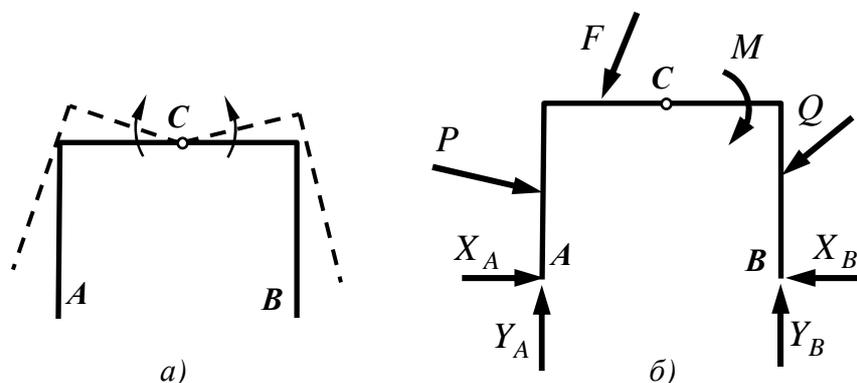


Рисунок 3

На основании принципа отвердевания система сил, действующая на изменяемую систему, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела. Но эти условия, являясь необходимыми, уже не будут достаточными. Иначе говоря, этих условий будет недостаточно для определения всех неизвестных реакций. Например, для произвольной плоской системы сил, действующей на составную раму (рисунок 3,б), можно составить только три независимых уравнения равновесия, в которые будут входить четыре неизвестные реакции X_A , Y_A , X_B и Y_B . Однако, данная задача не является статически неопределенной. Недостающие

уравнения равновесия можно получить, если дополнительно рассмотреть равновесие какой-либо части данной конструкции, например, левой (рисунок 4).

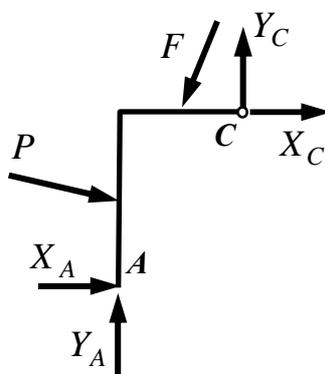


Рисунок 4

Составляя уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, действующей на левую часть рамы, получим еще три уравнения, которые будут содержать только две новые неизвестные реакции X_C и Y_C . Таким образом, всего будет составлено шесть уравнений равновесия с шестью неизвестными X_A , Y_A , X_B , Y_B , X_C и Y_C . Следовательно, данная задача является статически определенной, а рассмотренная составная рама – статически определимой.

Использованный при решении данной задачи прием называется **методом расчленения**. Существует и другой способ его использования для решения подобных задач. Отбрасывая сразу все внешние и внутренние связи, систему разделяют на отдельные тела и рассматривают равновесие каждой части в отдельности (рисунок 5). Решая составленные уравнения равновесия совместно, определяют все неизвестные реакции внутренних и внешних связей. Следует обратить особое внимание на то, что в этом случае на основании аксиомы равенства действия и противодействия реакции внутренних связей на левой и правой частях рамы должны быть попарно равны по величине и противоположны по направлению.

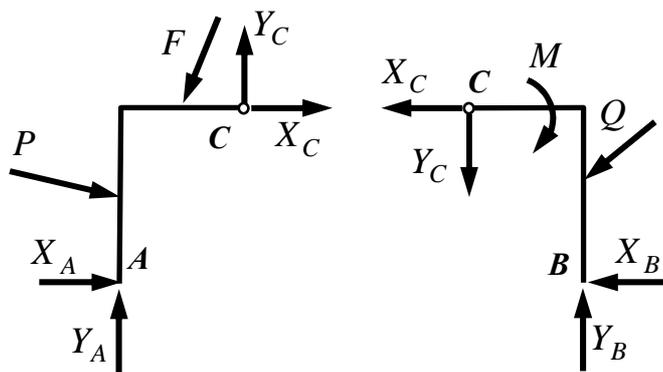


Рисунок 5

Оба рассмотренных способа одинаково можно использовать для решения любой подобной задачи. Вопрос об использовании того или иного способа решается в каждом конкретном случае в зависимости от того, при каком из них составленная система уравнений равновесия решается проще.

Распространяя рассмотренный метод на сочлененную систему n твердых тел, в случае действия произвольной плоской системы сил, можно составить $3n$ уравнений равновесия, из которых можно определить $3n$ неизвестных реакций внешних и внутренних связей. Естественно, что при действии других систем сил, число уравнений равновесия соответственно изменится.

1.3 Общие рекомендации по решению задач

При определении реакций составных конструкций (сочлененной системы двух твердых тел) методом расчленения в зависимости от выбранного способа его применения рекомендуется придерживаться следующей последовательности.

1 способ.

- 1 Освободить конструкцию только от внешних связей.

2 Изобразить на чертеже действующие на систему активные силы и реакции отброшенных внешних связей. *Так как в данном случае внутренние связи не разрушаются, то их реакции на чертеже показывать нельзя.*

3 Рассмотрев равновесие всей конструкции в целом, составить уравнения равновесия действующей на нее системы сил.

4 Затем отбросить внутренние связи системы и дополнительно рассмотреть равновесие какой-либо одной части конструкции. Составить недостающие уравнения равновесия для выбранной части.

5 Проверить статическую определенность задачи. Число составленных уравнений равновесия сил должно быть равно числу входящих в эти уравнения неизвестных величин.

6 Решая составленные уравнения равновесия совместно, определить все входящие в них неизвестные величины, в том числе реакции внешних и внутренних связей системы.

7 Проверить полученное решение задачи, составив уравнения равновесия второй части конструкции и подставив в них найденные значения реакций.

II способ.

1 Освободить систему от всех внешних и внутренних связей, разделив тем самым систему на отдельные твердые тела (части).

2 Изобразить каждую их полученных частей системы на отдельном чертеже и указать действующие на них активные силы и реакции отброшенных внешних и внутренних связей. Следует обратить особое внимание на то, чтобы *реакции внутренних связей на отдельных частях конструкции были попарно равны по величине и противоположны по направлению* (рисунок 5).

3 Рассмотреть равновесие каждой части конструкции по отдельности и составить для каждой уравнения равновесия действующей системы сил.

4 Проверить статическую определенность задачи. Число составленных уравнений равновесия сил должно быть равно числу входящих в эти уравнения неизвестных величин.

5 Решая полученные уравнения равновесия совместно, определить все входящие в них неизвестные величины, в том числе реакции внешних и внутренних связей системы.

6 Проверить полученное решение задачи, составив уравнения равновесия всей системы в целом (без деления на части) и подставив в них найденные значения реакций.

При решении задачи любым выбранным способом необходимо изображать каждое рассматриваемое тело и систему тел на отдельном чертеже с указанием всех действующих активных сил и реакций отброшенных связей.

Деление конструкции на отдельные тела (части) можно проводить только в точках расположения внутренних связей путем их отбрасывания.

На основании принципа освобождаемости от связей на чертеже должны быть показаны реакции только тех *связей, которые были отброшены*. Так для системы, изображенной на рисунке 3б, нельзя показывать на чертеже реакции внутреннего шарнира С, так он не был отброшен.

Для каждой части конструкции и для всей системы в целом может быть выбрана своя система координат и составлена своя форма уравнений равновесия.

При составлении уравнений моментов точку, относительно которой определяются моменты сил, целесообразно выбирать таким образом, чтобы в ней пересекались линии действия как можно большего числа неизвестных сил.

2 Вопросы для самоконтроля

- 1 Какие задачи называются статически определенными? статически неопределенными?
- 2 Сколько неизвестных должно входить в уравнения равновесия сил, произвольно расположенных в одной плоскости, чтобы задача была статически определенной?
- 3 В чем состоит метод решения задач о равновесии системы, состоящей из нескольких твердых тел? Как он называется?
- 4 В чем заключаются различные способы применения метода расчленения к решению задачи о равновесии системы твердых тел?
- 5 Сколько независимых уравнений можно составить для решения задачи о равновесии системы твердых тел при действии сил, произвольно расположенных в одной плоскости?
- 6 Является ли система, показанная на рисунке 6, статически определимой? Почему?

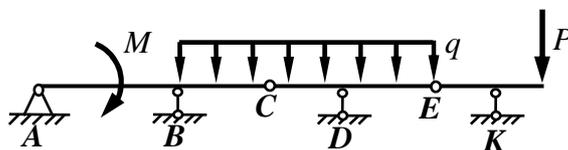


Рисунок 6

- 7 Можно ли систему, изображенную на рисунке 6, рассматривать как систему сочлененных балок AB , BCD и DEK ? Почему?
- 8 Почему реакции внутренних связей не входят в уравнения равновесия всей конструкции в целом?
- 9 Какими должны быть по величине и направлению реакции внутренних связей, действующие на различные части конструкции?
- 10 Можно ли, рассматривая равновесие отдельных частей сочлененной системы, составлять для каждой из них различные формы уравнений равновесия?

3 Задание. Определение реакций составной конструкции (система двух тел)

3.1 Содержание задания

Определить реакции внешних и внутренних связей составной конструкции, состоящей из двух твердых тел, от заданной внешней нагрузки, используя метод расчленения.

Схемы конструкций с действующей внешней нагрузкой показаны на рисунках 7-8.

Исходные данные для решения задания приведены в таблице 1. Нагрузку, величина которой в таблице 1 равна нулю, на схеме не изображать.

Опоры конструкций на рисунках 7-8, не показаны, они устанавливаются в соответствии с выбранным номером условия из таблицы 1. Типы опор и варианты их установки указаны в таблице 2. Конструкция подвижных шарниров исключает отрыв катков от опорной плоскости.

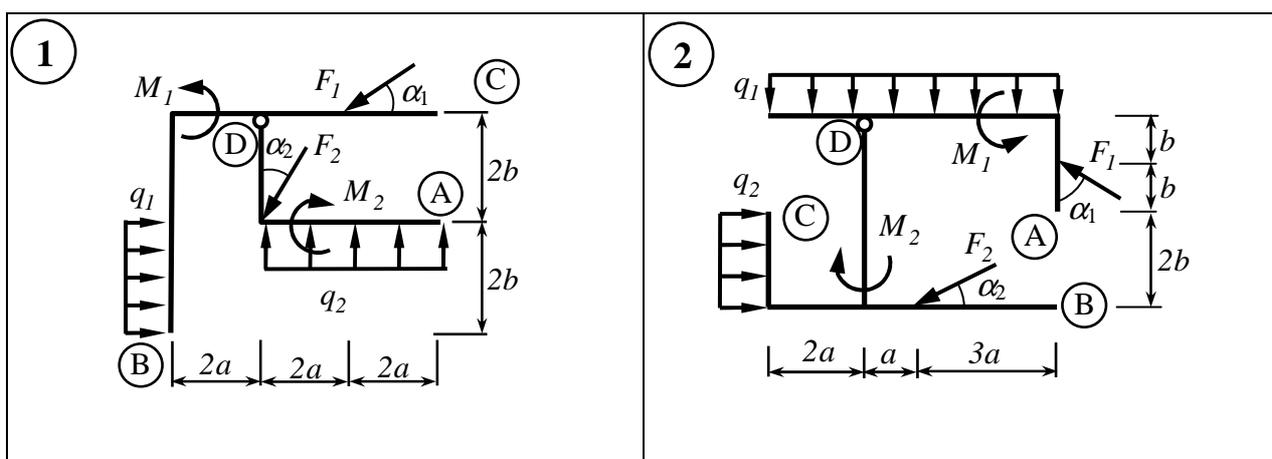


Рисунок 7

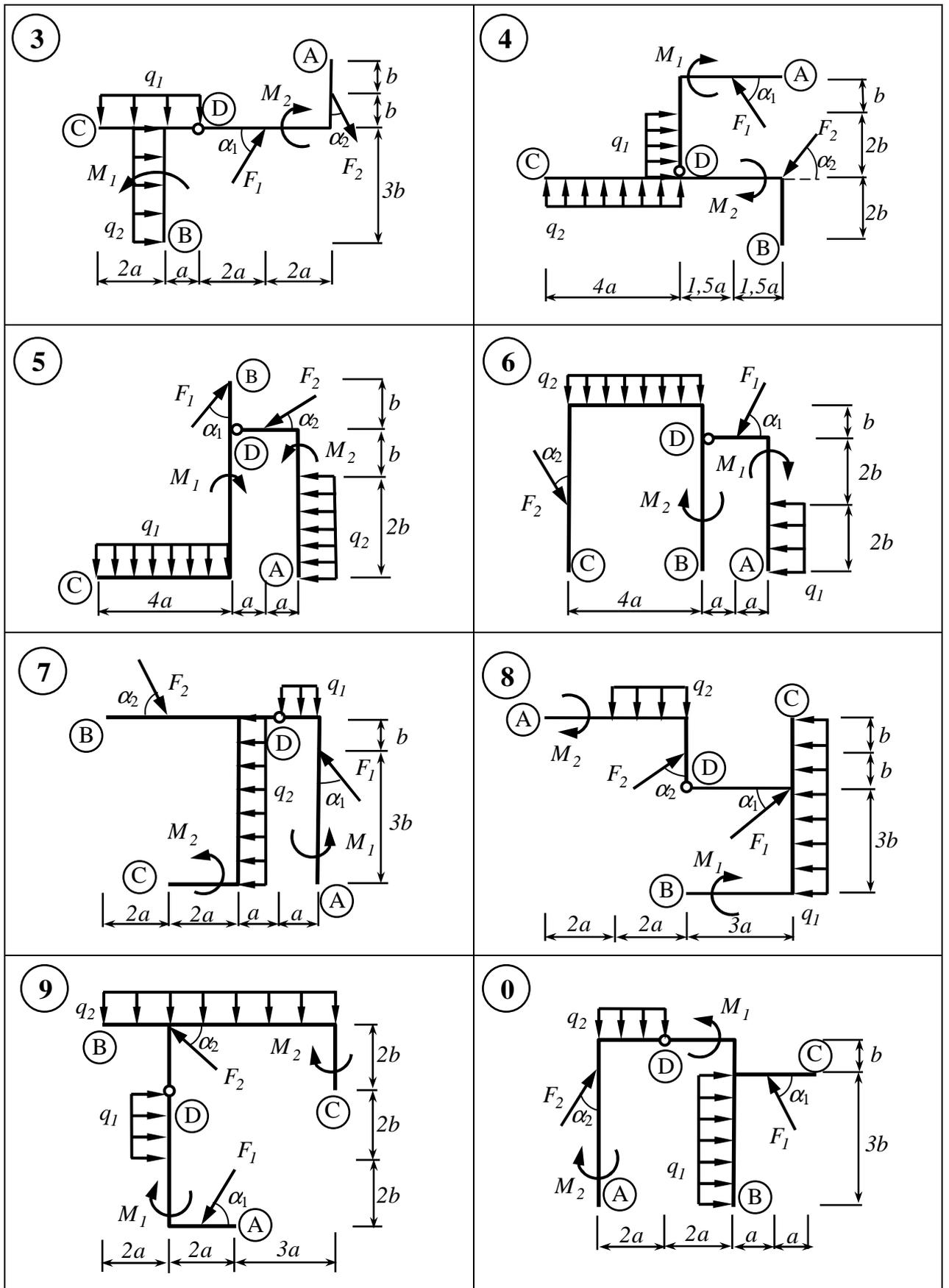
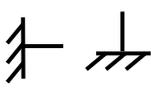
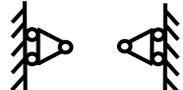
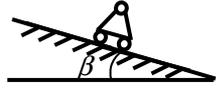


Рисунок 8

Таблица 1 – Исходные данные

Первая цифра шифра	Величина нагрузки						Вторая цифра шифра	Размеры		Углы, град		Точки установки опорных связей						Третья цифра шифра (№ схемы)
	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м		a , м	b , м	α_1	α_2	1 тип	2 тип	3 тип	4 тип	5 тип	β , град	
0	4	0	0	12	5	0	0	1,5	3	15	60	-	A	-	C	B	60	0
1	0	2	10	0	0	8	1	1	2	60	30	A	-	-	-	B	45	1
2	0	4	8	0	12	0	2	1	0,5	75	30	-	A,C	-	-	-	-	2
3	2	0	0	6	3	0	3	3	1,5	30	15	C	-	-	-	A	60	3
4	0	5	4	0	0	6	4	2,5	3	60	75	B	-	-	-	A	45	4
5	5	0	0	8	0	10	5	2	1	30	75	-	A,B	-	-	-	-	5
6	3	0	0	10	0	12	6	0,5	1,5	75	60	-	B	-	A	C	60	6
7	0	2	6	0	4	0	7	1,5	1	15	30	-	C	B	A	-	-	7
8	0	3	12	0	8	0	8	3	2	60	15	A	-	-	-	C	30	8
9	3	0	0	4	0	5	9	2	1,5	30	60	-	C	A	-	B	45	9

Таблица 2

Виды связей и варианты их установки				
1 тип	2 тип	3 тип	4 тип	5 тип
жесткая заделка	неподвижный цилиндрический шарнир	подвижный цилиндрический шарнир на вертикальных направляющих	подвижный цилиндрический шарнир на горизонтальных направляющих	подвижный цилиндрический шарнир на наклонных направляющих
				

3.2 Примеры выполнения задания

Пример 3.2.1

Для конструкции, показанной на рисунке 9, определить реакции внешних и внутренних связей от действующей внешней нагрузки.

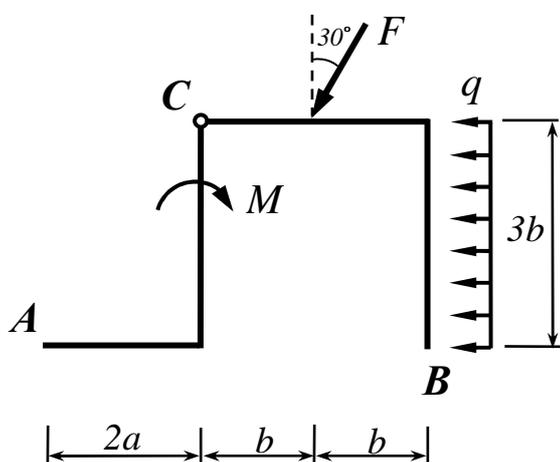


Рисунок 9

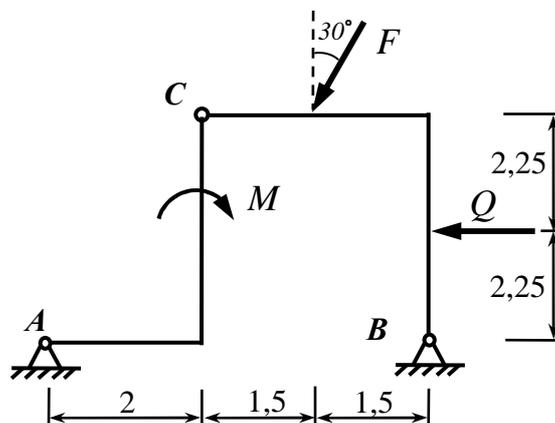


Рисунок 10

Дано: $q = 2 \text{ кН/м}$; $F = 6 \text{ кН}$; $M = 25 \text{ кНм}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 1,5 \text{ м}$.

Накладываемые на раму внешние связи: в т. A и B – связи 2-го типа.

Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot 3b = 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка (рисунок 10).

Рассмотрим равновесие всей конструкции в целом. Воспользуемся принципом освобождения от связей. Мысленно отбросим внешние связи системы (опоры A и B) и заменим их действие реакциями. Так как реакция неподвижного цилиндрического шарнира может иметь произвольное направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, изображаем реакцию каждого из опорных шарниров A и B двумя составляющими X_A, Y_A и X_B, Y_B . Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 30^\circ$ и $F'' = F \sin 30^\circ$ (рисунок 11).

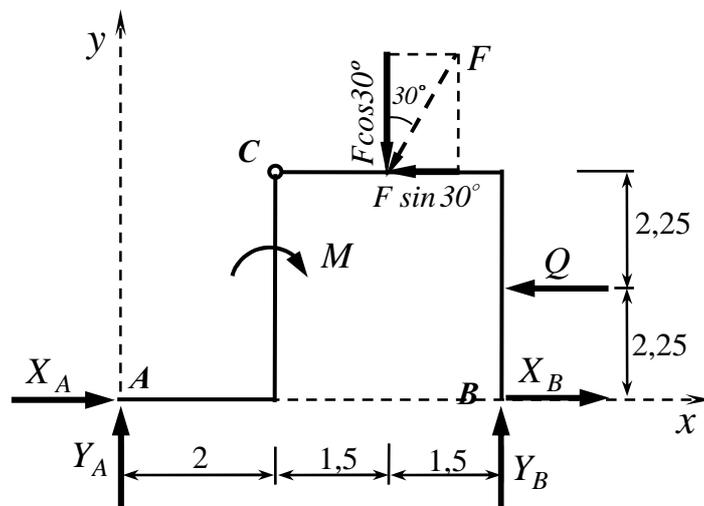


Рисунок 11

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 30^\circ$ и $F'' = F \sin 30^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_B - F \sin 30^\circ - Q = 0, \\ 5Y_B + 2,25Q + 4,5F \sin 30^\circ - 3,5F \cos 30^\circ - M = 0, \\ -5Y_A - M + 4,5F \sin 30^\circ + 1,5F \cos 30^\circ + 2,25Q = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Полученная система трех уравнений равновесия (3.1) содержит четыре неизвестные реакции, поэтому рассмотрим дополнительно равновесие одной из частей конструкции.

Мысленно отбросим внутреннюю связь в шарнире C , разделив тем самым конструкцию на две части, и рассмотрим равновесие левой части рамы под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных связей (рисунок 12).

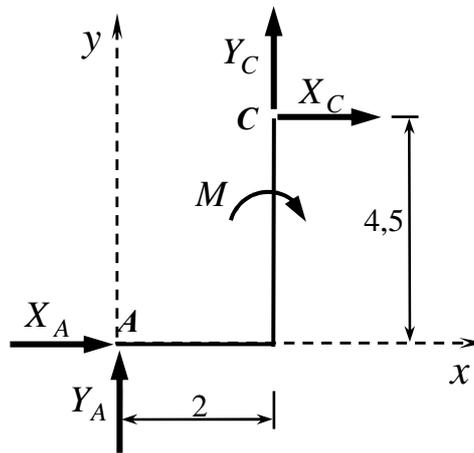


Рисунок 12

Реакции шарнира C изображаем на чертеже двумя составляющими X_C и Y_C . Следует обратить внимание на то, чтобы составляющие реакции шарнира A на рисунке 12 совпадали с соответствующими реакциями, изображенными ранее на рисунке 11.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на левую часть рамы:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_C = 0, \\ Y_A + Y_C = 0, \\ 2Y_C - 4,5X_C - M = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Заметим, что три составленных уравнения (3.2) содержат дополнительно только две новые неизвестные реакции X_C и Y_C . Все остальные неизвестные уже встречались в системе (3.1). Таким образом, шесть составленных уравнений равновесия (3.1)-(3.2) содержат шесть неизвестных реакций X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C и Y_C , следовательно, задача является статически определенной.

Решим полученные системы уравнений равновесия совместно:

$$\begin{cases} X_A + X_B - F \sin 30^\circ - Q = 0, & (1) \\ 5Y_B + 2,25Q + 4,5F \sin 30^\circ - 3,5F \cos 30^\circ - M = 0, & (2) \\ -5Y_A - M + 4,5F \sin 30^\circ + 1,5F \cos 30^\circ + 2,25Q = 0, & (3) \\ X_A + X_C = 0, & (4) \\ Y_A + Y_C = 0, & (5) \\ 2Y_C - 4,5X_C - M = 0. & (6) \end{cases} \quad (3.3)$$

Из второго уравнения системы (3.3) определим реакцию Y_B :

$$Y_B = \frac{-2,25Q - 4,5F \sin 30^\circ + 3,5F \cos 30^\circ + M}{5}.$$

Подставляя известные значения, получим:

$$Y_B = \frac{-2,25 \cdot 9 - 4,5 \cdot 6 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 6 \cdot 0,866 + 25}{5} = 1,89 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения системы (3.3) определим реакцию Y_A :

$$Y_A = \frac{-M + 4,5F \sin 30^\circ + 1,5F \cos 30^\circ + 2,25Q}{5},$$

$$Y_A = \frac{-25 + 4,5 \cdot 6 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 6 \cdot 0,866 + 2,25 \cdot 9}{5} = 3,31 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5) системы (3.3):

$$Y_C = -Y_A = -3,31 \text{ кН}.$$

Зная величину реакции Y_C , из последнего шестого уравнения системы (3.3) определим значение X_C :

$$X_C = \frac{2Y_C - M}{4,5} = \frac{2 \cdot (-3,31) - 25}{4,5} = -7,03 \text{ кН}.$$

Затем из уравнения (4) системы (3.3) найдем:

$$X_A = -X_C = -(-7,03) = 7,03 \text{ кН}.$$

Последнюю неизвестную реакцию X_B определим из уравнения (1) системы (3.3):

$$X_B = F \sin 30^\circ + Q - X_A = 6 \cdot 0,5 + 9 - 7,03 = 4,97 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого рассмотрим равновесие правой части рамы под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных связей (рисунок 13). На правую часть рамы, кроме известных активных сил F и Q действуют реакции отброшенных шарниров X_C , Y_C , X_B и Y_B . Обратим особое

внимание на то, чтобы реакции внешней связи шарнира B совпадали с уже показанными ранее на рисунке 11. Реакции внутренней связи шарнира C также были уже изображены ранее на рисунке 12. Но если ранее реакции X_C и Y_C заменяли действие отброшенной правой части рамы на рассматриваемую левую часть, то теперь, рассматривая равновесие правой части, мы должны заменить реакциями X_C и Y_C действие отброшенной левой части рамы на рассматриваемую правую. Следовательно, на основании аксиомы равенства действия и противодействия эти реакции на правой части рамы должны быть **попарно равно и противоположно направлены** соответствующим реакциям, показанным на левой части рамы.

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

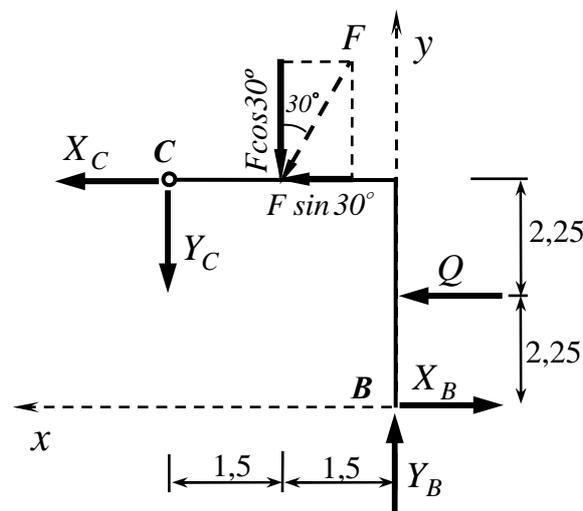


Рисунок 13

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_C(F_{ky}) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_C + Q - X_B + F \sin 30^\circ = 0, \\ -Y_C - F \cos 30^\circ + Y_B = 0, \\ -1,5F \cos 30^\circ - 2,25Q + 3Y_B + 4,5X_B = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям (3.4):

$$\begin{cases} -7,03 + 9 - 4,97 + 6 \cdot 0,5 = 0, \\ -(-3,31) - 6 \cdot 0,866 + 1,89 = 0, \\ -1,5 \cdot 6 \cdot 0,866 - 2,25 \cdot 9 + 3 \cdot 1,89 + 4,5 \cdot 4,97 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия (3.4) выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы:

Таблица 3

X_A , кН	Y_A , кН	X_B , кН	Y_B , кН	X_C , кН	Y_C , кН
7,03	3,31	4,97	1,89	-7,03	-3,31

Пример 3.2.2

Для конструкции, показанной на рисунке 14, определить реакции внешних и внутренних связей от действующей внешней нагрузки.

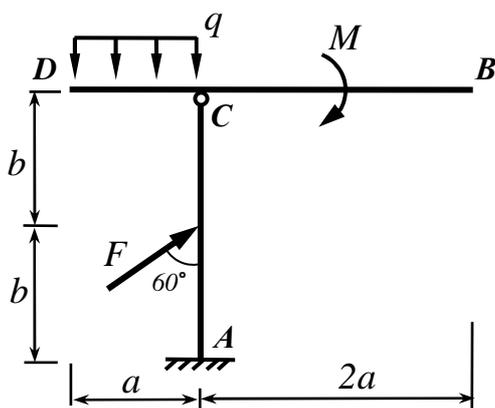


Рисунок 14

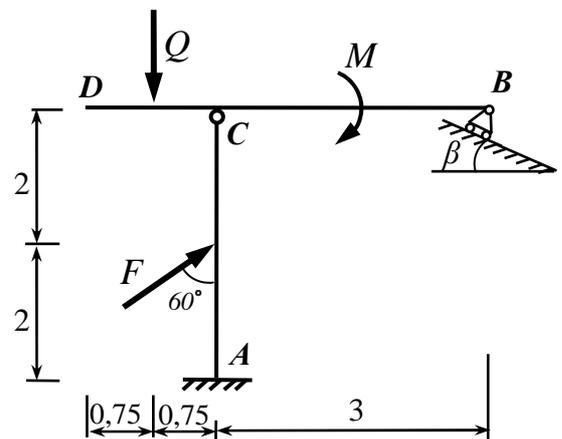


Рисунок 15

Дано: $q = 6$ кН/м; $F = 2$ кН; $M = 20$ кНм; $a = 1,5$ м; $b = 2$ м, $\beta = 30^\circ$.

Накладываемые на раму внешние связи: в т. A – связь 1-го типа, в т. B – связь 5-го типа.

Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot a = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка (рисунок 15).

Воспользуемся принципом освобождения от связей и отбросим все внешние и внутренние связи системы (опоры A , B и внутренний шарнир C), заменив их действие реакциями. Изобразим каждую часть исходной конструкции на отдельном чертеже с указанием всех действующих активных сил и реакций отброшенных связей.

На нижнюю часть рамы AC действуют активная сила F , составляющие реакции жесткой заделки X_A , Y_A и M_A и реакция внутреннего шарнира C , которую изображаем двумя составляющими X_C и Y_C . Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$ (рисунок 16).

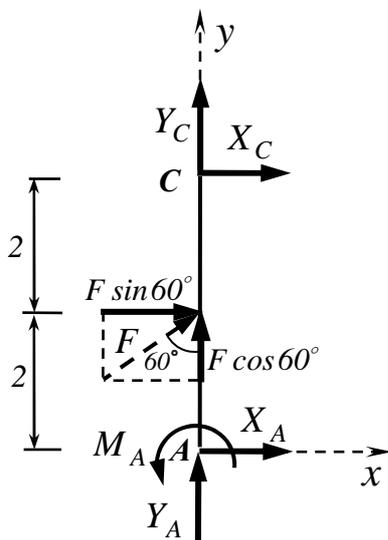


Рисунок 16

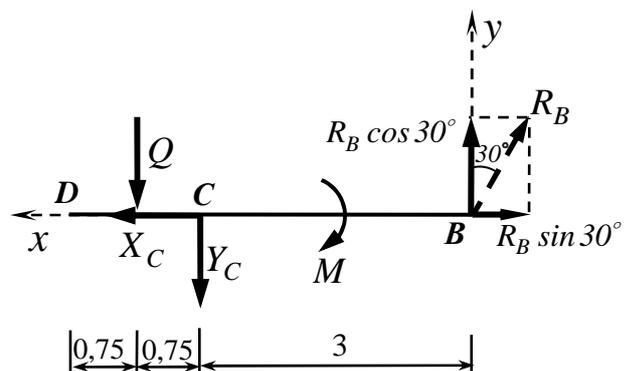


Рисунок 17

На верхнюю часть рамы BCD действуют активная сила Q , пара с моментом M , реакция подвижного шарнира R_B , направленная перпендикулярно опорной по-

верхности шарнира B , и две составляющие реакции внутреннего шарнира C X_C и Y_C (рисунок 17). Реакцию подвижного шарнира R_B раскладываем на перпендикулярные составляющие $R'_B = R_B \cos 30^\circ$ и $R''_B = R_B \sin 30^\circ$. Обращаем особое внимание на то, чтобы составляющие реакции внутренней связи X_C и Y_C , действующие на верхнюю часть рамы BCD , были попарно равны и противоположно направлены соответствующим реакциям внутренней связи, приложенным к нижней части рамы AC (рисунки 16 и 17).

Рассмотрим равновесие нижней части рамы AC (рисунок 16) и составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на эту часть. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки A как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 60^\circ$ и $F'' = F \sin 60^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_C + F \sin 60^\circ = 0, \\ Y_A + Y_C + F \cos 60^\circ = 0, \\ M_A - 2F \sin 60^\circ - 4X_C = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Полученная система трех уравнений равновесия (3.5) содержит пять неизвестных реакций, поэтому рассмотрим дополнительно равновесие второй части конструкции BCD (рисунок 17). При определении момента силы R_B также воспользуемся теоремой Вариньона и определим ее момент относительно выбранной точки C как сумму моментов составляющих сил $R'_B = R_B \cos 30^\circ$ и $R''_B = R_B \sin 30^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} -X_C + R_B \sin 30^\circ = 0, \\ -Q - Y_C + R_B \cos 30^\circ = 0, \\ 0,75Q - M + 3R_B \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Заметим, что три составленных уравнения (3.6) содержат дополнительно только одну новую неизвестную реакцию R_B . Все остальные неизвестные уже встречались в системе (3.5). Таким образом, шесть составленных уравнений равновесия (3.5)-(3.6) содержат шесть неизвестных реакций X_A, Y_A, M_A, R_B, X_C и Y_C , следовательно, задача является статически определенной.

Решим полученные системы уравнений равновесия совместно:

$$\begin{cases} X_A + X_C + F \sin 60^\circ = 0, & (1) \\ Y_A + Y_C + F \cos 60^\circ = 0, & (2) \\ M_A - 2F \sin 60^\circ - 4X_C = 0, & (3) \\ -X_C + R_B \sin 30^\circ = 0, & (4) \\ -Q - Y_C + R_B \cos 30^\circ = 0, & (5) \\ 0,75Q - M + 3R_B \cos 30^\circ = 0. & (6) \end{cases} \quad (3.7)$$

Из последнего уравнения системы (3.7) определим реакцию R_B :

$$R_B = \frac{-0,75Q + M}{3 \cos 30^\circ} = \frac{-0,75 \cdot 9 + 20}{3 \cdot 0,866} = 5,1 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5) системы (3.7) определим реакцию Y_C :

$$Y_C = -Q + R_B \cos 30^\circ = -9 + 5,1 \cdot 0,866 = -4,58 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4) системы (3.7) определим реакцию X_C :

$$X_C = R_B \sin 30^\circ = 5,1 \cdot 0,5 = 2,55 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3) системы (3.7) найдем M_A :

$$M_A = 2F \sin 60^\circ + 4X_C = 2 \cdot 2 \cdot 0,866 + 4 \cdot 2,55 = 13,66 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) системы (3.7) найдем Y_A :

$$Y_A = -Y_C - F \cos 60^\circ = -(-4,58) - 2 \cdot 0,5 = 3,58 \text{ кН}.$$

Неизвестную реакцию X_A определим из уравнения (1) системы (3.7):

$$X_A = -X_C - F \sin 60^\circ = -2,55 - 2 \cdot 0,866 = -4,28 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого рассмотрим равновесие всей рамы (без деления на отдельные части) под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных внешних связей X_A , Y_A , M_A и R_B (рисунок 18). Обратим особое внимание на то, что составляющие реакции внутренней связи шарнира C на рисунке 18 **не показаны**, так как эта связь не была отброшена.

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

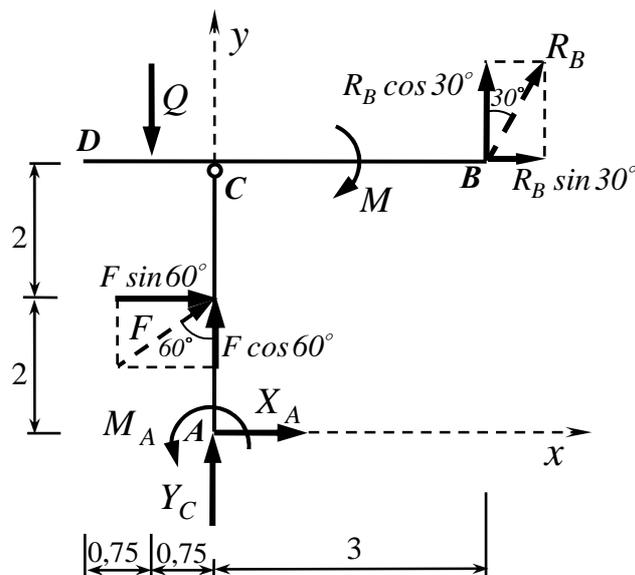


Рисунок 18

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(F_{ky}) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + F \sin 60^\circ + R_B \sin 30^\circ = 0, \\ Y_A + F \cos 60^\circ - Q + R_B \cos 30^\circ = 0, \\ M_A - 2F \sin 60^\circ + 0,75Q - M + 3R_B \cos 30^\circ - 4R_B \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям:

$$\begin{cases} -4,28 + 2 \cdot 0,866 + 5,1 \cdot 0,5 = 0, \\ 3,58 + 2 \cdot 0,5 - 9 + 5,1 \cdot 0,866 = 0, \\ 13,66 - 2 \cdot 2 \cdot 0,866 + 0,75 \cdot 9 - 20 + 3 \cdot 5,1 \cdot 0,866 - 4 \cdot 5,1 \cdot 0,5 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы:

Таблица 4

X_A , кН	Y_A , кН	M_A , кН	R_B , кН	X_C , кН	Y_C , кН
-4,28	3,58	13,66	5,1	2,55	-4,58

Пример 3.2.3

Для конструкции, показанной на рисунке 19, определить реакции внешних и внутренних связей от действующей внешней нагрузки.

Дано: $q = 3$ кН/м; $F = 8$ кН; $M = 24$ кНм; $a = 2$ м; $b = 1,5$ м, $\beta = 45^\circ$.

Накладываемые на раму внешние связи: в т. A – связь 2-го типа, в т. B – связь 4-го типа, в т. C – связь 5-го типа.

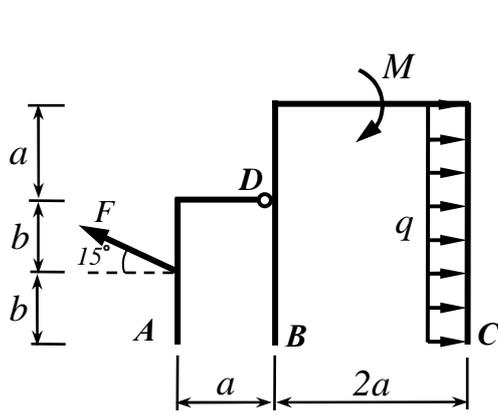


Рисунок 19

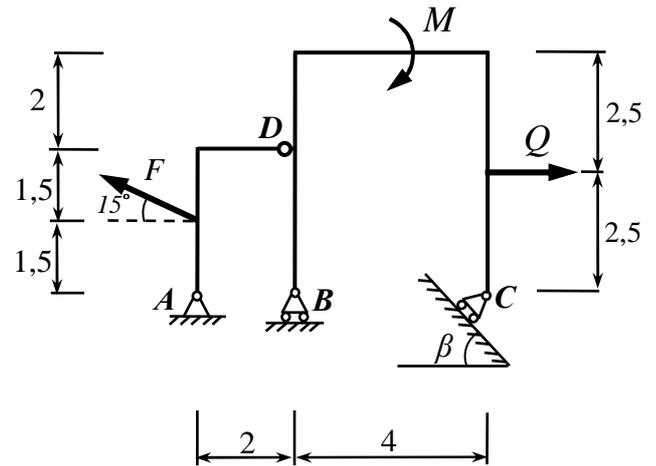


Рисунок 20

Решение.

Изображаем расчетную схему конструкции с указанием внешней нагрузки, всех размеров и устанавливаемых опор. Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot (a + 2b) = 3 \cdot 5 = 15 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка (рисунок 20).

Воспользуемся принципом освобождаемости от связей и отбросим все внешние и внутренние связи системы (опоры A , B , C и внутренний шарнир D), заменив их действие реакциями. Изобразим каждую часть исходной конструкции на отдельном чертеже с указанием всех действующих активных сил и реакций отброшенных связей.

На левую часть рамы AD (рисунок 21) действуют активная сила F , составляющие реакции неподвижного шарнира X_A , Y_A и реакция внутреннего шарнира D , которую изображаем двумя составляющими X_D и Y_D . Внешнюю силу F раскладываем на ее составляющие $F' = F \cos 15^\circ$ и $F'' = F \sin 15^\circ$.

На правую часть рамы BDC (рисунок 22) действуют активная сила Q , пара сил с моментом M , реакции подвижных шарниров R_B и R_C , направленные перпендикулярно опорным поверхностям соответствующих подвижных шарниров B и C , и

две составляющие реакции внутреннего шарнира D X_D и Y_D . Реакцию подвижного шарнира R_C раскладываем на перпендикулярные составляющие $R'_C = R_C \cos 45^\circ$ и $R''_C = R_C \sin 45^\circ$. Обращаем особое внимание на то, чтобы составляющие реакции внутренней связи X_D и Y_D , действующие на правую часть рамы BDC , были попарно равны и противоположно направлены соответствующим реакциям внутренней связи, приложенным к левой части рамы AD (рисунки 21 и 22).

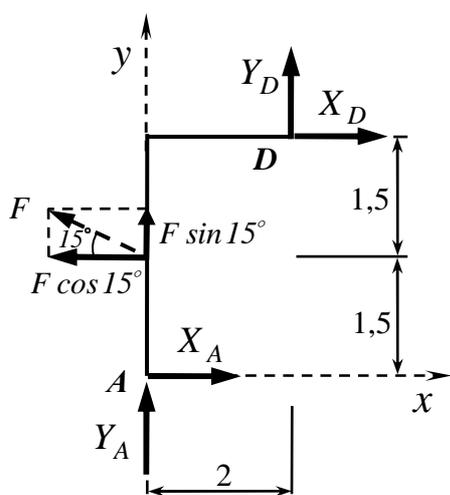


Рисунок 21

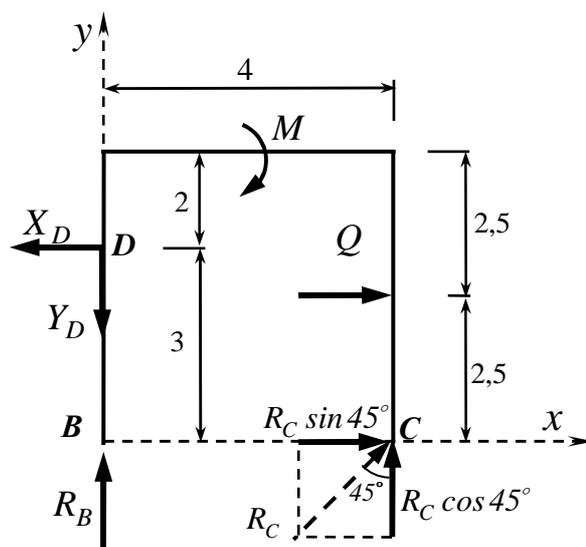


Рисунок 22

Рассмотрим равновесие левой части рамы AD и составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на эту часть. При определении момента силы F воспользуемся теоремой Вариньона, определяя ее момент относительно выбранной точки A как сумму моментов составляющих сил $F' = F \cos 15^\circ$ и $F'' = F \sin 15^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_A(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} X_A + X_D - F \cos 15^\circ = 0, \\ Y_A + Y_D + F \sin 15^\circ = 0, \\ 2Y_D - 3X_D + 1,5F \cos 15^\circ = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Полученная система трех уравнений равновесия (3.8) содержит четыре неизвестные реакции, поэтому рассмотрим дополнительно равновесие второй части конструкции BDC (рисунок 22). При определении момента силы R_C также воспользуемся теоремой Вариньона и определим ее момент относительно выбранной точки как сумму моментов составляющих сил $R'_C = R_C \cos 45^\circ$ и $R''_C = R_C \sin 45^\circ$.

$$\begin{cases} \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_D(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} -Y_D + R_B + R_C \cos 45^\circ = 0, \\ 3X_D + 4R_C \cos 45^\circ - 2,5Q - M = 0, \\ 3R_C \sin 45^\circ + 4R_C \cos 45^\circ + 0,5Q - M = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Заметим, что три составленных уравнения (3.9) содержат дополнительно только две новых неизвестных реакции R_B и R_C . Все остальные неизвестные уже встречались в системе (3.8). Таким образом, шесть составленных уравнений равновесия (3.8)-(3.9) содержат шесть неизвестных реакций X_A , Y_A , R_B , R_C , X_D и Y_D , следовательно, задача является статически определенной.

Решим полученные системы уравнений равновесия совместно:

$$\begin{cases} X_A + X_D - F \cos 15^\circ = 0, & (1) \\ Y_A + Y_D + F \sin 15^\circ = 0, & (2) \\ 2Y_D - 3X_D + 1,5F \cos 15^\circ = 0, & (3) \\ -Y_D + R_B + R_C \cos 45^\circ = 0, & (4) \\ 3X_D + 4R_C \cos 45^\circ - 2,5Q - M = 0, & (5) \\ 3R_C \sin 45^\circ + 4R_C \cos 45^\circ + 0,5Q - M = 0. & (6) \end{cases} \quad (3.10)$$

Из последнего уравнения системы (3.10) определим значение реакции R_C :

$$R_C = \frac{M - 0,5Q}{3 \sin 45^\circ + 4 \cos 45^\circ} = \frac{24 - 0,5 \cdot 15}{7 \cdot 0,707} = 3,33 \text{ кН}.$$

Затем из уравнения (5) системы (3.10) определим реакцию X_D :

$$X_D = \frac{M - 4R_C \cos 45^\circ + 2,5Q}{3} = \frac{24 - 4 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 2,5 \cdot 15}{3} = 17,36 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3) системы (3.10) найдем реакцию Y_D :

$$Y_D = \frac{3X_D - 1,5F \cos 15^\circ}{2} = \frac{3 \cdot 17,36 - 1,5 \cdot 8 \cdot 0,966}{2} = 20,24 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4) системы (3.10) найдем R_B :

$$R_B = Y_D - R_C \cos 45^\circ = 20,24 - 3,33 \cdot 0,707 = 17,89 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) системы (3.10) найдем Y_A :

$$Y_A = -Y_D - F \sin 15^\circ = -20,24 - 8 \cdot 0,259 = -22,31 \text{ кН}.$$

Неизвестную реакцию X_A определим из первого уравнения системы (3.10):

$$X_A = -X_D + F \cos 15^\circ = -17,36 + 8 \cdot 0,966 = -9,63 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи. Для этого рассмотрим равновесие всей рамы (без деления на отдельные части) под действием приложенных активных сил и реакций отброшенных внешних связей X_A , Y_A , R_B и R_C (рисунок 23). Обра-

тим особое внимание на то, что составляющие реакции внутренней связи (шарнира D) на рисунке 23 **не показаны**, так как эта связь не была отброшена.

Составим уравнения равновесия полученной произвольной плоской системы сил:

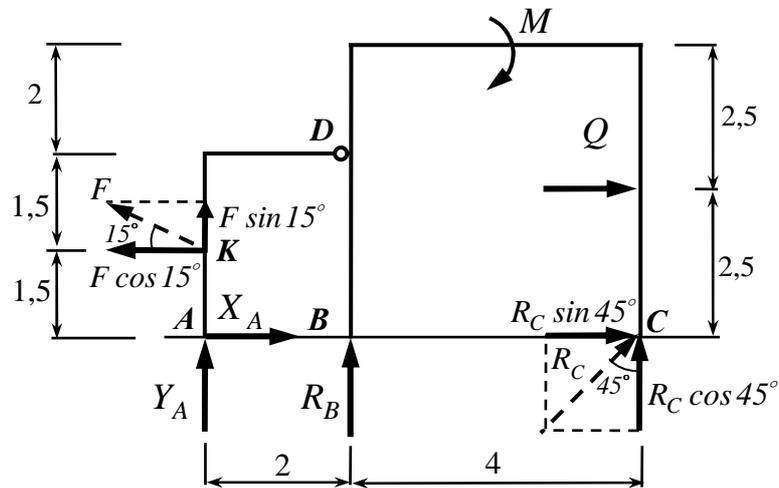


Рисунок 23

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_K(\bar{F}_k) = 0. \end{cases} \begin{cases} 2R_B + 6R_C \cos 45^\circ + 1,5F \cos 15^\circ - 2,5Q - M = 0, \\ -6Y_A - 4R_B - 2,5Q - M + 1,5F \cos 15^\circ - 6F \sin 15^\circ = 0, \\ 1,5X_A + 1,5R_C \sin 45^\circ + 6R_C \cos 45^\circ + 2R_B - Q \cdot 1 - M = 0. \end{cases}$$

Убедимся, что найденные значения реакций удовлетворяют составленным уравнениям:

$$\begin{cases} 2 \cdot 17,89 + 6 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 1,5 \cdot 8 \cdot 0,966 - 2,5 \cdot 15 - 24 = 0, \\ -6 \cdot (-22,31) - 4 \cdot 17,89 - 2,5 \cdot 15 - 24 + 1,5 \cdot 8 \cdot 0,966 - 6 \cdot 8 \cdot 0,259 = 0, \\ 1,5 \cdot (-9,63) + 1,5 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 6 \cdot 3,33 \cdot 0,707 + 2 \cdot 17,89 - 15 - 24 = 0. \end{cases}$$

Уравнения равновесия выполняются, следовательно, реакции рамы определены верно.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы:

Таблица 5

X_A , кН	Y_A , кН	R_B , кН	R_C , кН	X_D , кН	Y_D , кН
-9,63	-22,31	17,89	3,33	17,36	20,24

3.3 Общие требования к оформлению отчета по расчетно-графической работе

Отчет по расчетно-графической работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями СТО 02069024.101 – 2010 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Отчет обязательно должен содержать:

- исходные данные задания;
- расчетные схемы для определения искомых реакций связей с указанием всех действующих на конструкцию активных сил, реакций отброшенных связей, размеров и т.д.
- аналитические уравнения равновесия действующих систем сил, составленные для определения всех реакций связей составной конструкции;
- результаты вычисления реакций ;
- проверку результатов вычисления реакций;
- вывод.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными пояснениями и четкими схемами. Промежуточные и окончательные ответы должны быть записаны с точностью до второго знака с указанием размерностей всех полученных величин.

4 Литература, рекомендуемая для изучения темы

- 1 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
- 2 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.
- 3 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
- 4 Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 320 с.
- 5 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов. В 3 т. Т. II. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1991. – 640 с.
- 6 Кирсанов, М.Н. Решебник: Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.