Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»
(ОГУ)

*О.С. Карымова, И.С. Якиманская*

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 030300.62 Психология

Издание 5-е, исправленное и дополненное

Оренбург
2012

*УДК 159.9.015 (075.8)*
*ББК 88.4я73+22.17я73*
*К27*

**Рецензенты**
доктор психологических наук, доцент Г.А. Епанчинцева
кандидат физико- математических наук, доцент Н.Н. Щипкова

***Карымова, О.С.***
*К27 Математические методы в психологии: учебное пособие / О.С. Карымова, И.С.Якиманская; Оренбургский гос.университет.- Изд. 5-е, испр. и дополн.— Оренбург: ОГУ, 2012. — 169 с.: ил.*

Пособие содержит краткий обзор методов и приемов первичной статистической обработки результатов психолого-педагогических экспериментов и наблюдений. Методы рассматриваются на примерах и сопровождаются процедурой расчета и графическими иллюстрациями.
В пособие так же имеются методические рекомендации и материал по организации занятий по дисциплине «Математические методы в психологии».
Предназначено для студентов - психологов, школьных психологов, других специалистов психологических дисциплин.

*УДК 159.9.015*
*ББК 88.4я73+22.17я73*

## Содержание

# Введение

Ни одно психологическое научное исследование не обходится без математики, что собственно позволяет говорить о психологии, как о точной науке. «Дружба» психологии с математическим числом обеспечивает возможность получать великолепные открытия в области закономерностей, особенностей и возможностей психики человека.

Однако, для студента-психолога, поступившего на гуманитарный факультет, математические методы в психологии являются достаточно сложной дисциплиной. В связи с этим, данное пособие неоднократно перерабатывалось авторами, с целью сделать содержание более понятным и простым, а также предоставить возможность тренироваться в решении задач во время учебных занятий. Данное пособие содержит в себе не только теоретический блок, но и блок для самопроверки и методических рекомендаций для преподавателей.

Математические методы в психологии, как дисциплина входит в число общепрофессиональных, включенных в учебный план в соответствии с ФГОС ВПО, по решению методической комиссии по направлению подготовки 030300.62 – «Психология».

Основная цель курса для студента: изучение основных понятий и способов математической обработки и моделирования фактов, описывающих психику человека и животных, а также различных подходов к ним.

В результате изучения данной дисциплины студент сможет самостоятельно спланировать эксперимент, провести его, обработать полученные данные с помощью статистических методов и дать интерпретацию результатов.

Учитывая общую логику курса, материал данного пособия представлен следующим образом. Основные четыре блока представлены в 10 главах, содержащих теоретический материал и практикумы-примеры решения задач. В конце каждой главы даны вопросы и задания для самопроверки. Помимо этого, в конце учебного пособия представлены методические рекомендации для преподавателей, которые содержат примерный тематический план лекционных, практических занятий; варианты контрольных работ и вопросы к экзамену. Дан глоссарий основных понятий, используемых при работе с математическими методами.

Авторы заранее благодарны за все критические замечания и предложения по поводу публикуемого материала.

## Глава 1

## Измерения и измерительные шкалы

Многим студентам кажется, что психология – гуманитарная наука, после поступления на факультет они планируют забыть математику и никогда к ней не возвращаться. Большая ошибка! Математика – мать всех наук, в процессе психологической деятельности мы часто обращаемся к моделям и схемам, и именно их структура дает нам возможность поблагодарить математику.

Вспомним классификацию методов Б.Г. Ананьева [7]. Буквально в каждой группе присутствует обращение к математике. Первая группа – организационные методы – подразумевают выбор логики эксперимента, что с чем мы будем сравнивать, взаимосвязь чего с чем находить, проверяя исследовательские гипотезы. Основная модель экспериментальной процедуры закладывается именно с помощью этих методов.

Вторая группа – эмпирические методы – предназначены для получения научных фактов на определенном пространстве. Именно здесь психологи занимаются измерением непосредственно. Наши методы – анкеты, тесты, наблюдения – своеобразная линейка, помогающая исследователям накапливать необходимую информацию в одних и тех же или близких координатах.

Процесс измерения лежит в основе любой эмпирической науки. Беглый взгляд на историю показывает, что совершенствование принципов и техники измерения было основным фактором, обеспечивающим ее движение вперед.

Причем в психологии существует некоторая особенность: любой психолог стоит перед проблемой выбора метода. В первую очередь его интересует объективность, валидность, надежность методики исследования.

Под *валидностью* методики понимается адекватность ее предмету исследования, количественно валидность определяется путем установления взаимосвязи между результатами, полученными с помощью данной методики, и каким-либо внешним критерием.

Под *надежностью* понимается точность проведенных с помощью методики измерений.

*Объективность* методики характеризует степень независимости результатов наблюдения и эксперимента от пользователя.

Третья группа методов – методы обработки, здесь множество полученных фактов с помощью математико-статистических процедур и качественного анализа сводятся в единую и гармоничную картину научной теории.

И, наконец, четвертая группа – методы интерпретации – попытки объяснения найденных закономерностей, построения связей выдвинутых и подтвердившихся гипотез, объяснение латентных (скрытых) переменных, формулировка выводов.

Что же такое измерение? Наиболее понятные, по нашему мнению, определения предложены Б. Ортом: «Измерение есть определение степени выраженности какого-либо свойства предмета» [5], или С. Стивенсом: «процесс приписывания психологическим явлениям чисел так, чтобы в отношениях чисел отображались отношения между измеряемыми явлениями»[12]. При этом измерение осуществляется в процессе шкалирования — установления связи между числами и предметами, которые имеют измеряемые свойства. Другими словами, измерение – это приписывание числовых форм объектам.

Необходимо заметить, что в психологии, да и в других науках существуют несколько степеней точности измерения. Ведь можно просто сказать, успевающий или неуспевающий этот ученик, можно оценить его по пятибалльной системе, а можно измерить его коэффициент интеллекта.

Все эти степени точности, уровни измерений носят названия шкал.

Четырем уровням соответствуют четыре шкалы:

1. Номинальная шкала.

2. Порядковая или ранговая шкала.

3. Шкала интервалов.

4. Шкала отношений или пропорций.

Остановимся более подробно на характеристике этих видов шкал.

*Номинальная (номинативная) шкала* — это самый простой уровень измерений. В этой шкале даже числа редко используются, а если и используются то как шифр (имя). Основная цель шкалы — установить подобие или различие объектов по какому-либо признаку, можно сказать, что она устанавливает однородность признаков. Номинативная шкала – это шкала, в которой не выражены количественные характеристики объектов. Эта шкала используется для классификации объектов. Следует подчеркнуть, что совершенно неважно, что будет использоваться в качестве имени – цифры, буква, знаки, условные обозначения или картинки. Важно, что бы одно имя не присваивалось двум разным объектам.

Признаки, однородность которых устанавливается, могут быть различными: пол (мужской — женский), возраст, национальность и др. Вся выборка делится по одному такому признаку и затем подсчитывается количество объектов в группах. При этом каждый объект должен быть однозначно отнесен к какой-либо категории.

Например: в классе 20 детей имеют полные семьи, восемь детей имеют только мать, трое — только отца, один ребенок воспитывается опекунами.

Здесь мы разделили детей по категории полной семьи и выделили четыре варианта этой категории. Следует заметить, что в номинальных шкалах все категории, как правило, имеют имена, поэтому их еще называют *шкалами наименований*. В примере мы подсчитали частоту встречаемости каждой из выделенных категорий. Это качественная характеристика данного вида шкал. Причем наиболее часто встречающаяся категория, в нашем случае

— полная семья, считается основной тенденцией выборки и носит название модальной величины, или моды.

Основная задача номинальной шкалы разделить эмпирические данные по какому-либо признаку. Переход к другим шкалам невозможен без решения вопроса о том, к каким объектам будут относиться получаемые данные. Наделение объектов именами дает возможность к выявлению сходств и различий между ними. Например, расположить объекты в порядке возрастания или убывания определенного признака: больше, меньше, быстрее, медленнее, вкуснее, ярче и т.д. В этом случае мы говори о порядковой шкале.

*Порядковая* или *ранговая* шкала указывает последовательность носителей признака и направление степени выраженности. Этот вид шкал используется в школе при оценке знаний учащихся. Учитель оценивает, определяет место в ряду каждого ученика. Вася очень хорошо ответил — отлично, Петя немного хуже — хорошо, Лида еще хуже — удовлетворительно, а Паша — хуже всех — плохо. Здесь ясно видна последовательность носителей признака успешности ответа: Вася — 1, Петя — 2, Лида — 3, Паша — 4 и т.д. Причем степень выраженности признака уменьшается от первого места к последнему.

Но интервалы, разделяющие этих детей, могут быть различны по величине: нельзя сказать, что Вася знает в два раза больше Паши, можно лишь точно говорить о месте в ряду. Именно поэтому в шкалах такого типа нельзя вычислять среднее арифметическое. Таким образом, выбор чисел, используемых в шкале порядка, в известных пределах произволен. Числа могут быть любыми, но они должны подчиняться основному требованию: объекту с большей выраженностью определенного признака должно быть приписано большое число. Ведущая тенденция такой шкалы характеризуется с помощью серединного значения (в шкале оценок — удовлетворительно), которое называется *медианой*.

*Порядковые шкалы* достаточно широко используются в психологии. Многие методы статистики были разработаны специально для этой шкалы. Самая популярная процедура, связанная с данной шкалой – *процедура ранжирования*. Под ранжированием понимают расположение членов ряда в возрастающем или убывающем порядке. Ранжирование – это процедура определения места, которое должен занять данный результат в упорядоченной последовательности всех результатов. Ранжировать можно несколькими способами.

Чаще ранжирование идет по направлению убывания каких-либо значений. Тогда наивысший ранг, первый, получает обладатель наибольшего значения

*Пример1* - Распределения мест у спортсменов: первое место – кто набрал больше очков, второе – кто чуть меньше, ну и третье – кто меньше, чем второй и т.д.

*Пример 2* - *С*писки поступивших абитуриентов составляются по сумме баллов, набранных при сдаче единого государственного экзамена. Набравший большее количество баллов является первым в списках на зачисление и т.д.

Таблица 1- Пример ранжирования

| Сумма баллов | 200 | 198 | 197 | 187 | 184 | 183 | 170 | 169 | 165 | 160 | 154 | 153 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ранг | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Самое интересное, заключается в том, что присваемые ранги идут по-порядку, а разница между количеством баллов может быть разная. Как видно из примера, ранги отличаются друг от друга с постоянным интервалом, а интервал между суммой баллов может колебаться от 1 до 10. В этом заключается особенность шкалы порядка: можно определить порядок следования результатов, но нельзя определить насколько один результат отличается от другого.

Нужно отметить, что при ранжировании возникают сложности, когда значения повторяются. В этом случае мы говорим о связанных рангах.

Например, 5 абитуриентов набрали одинаковые суммы баллов. Как видно из примера 2 кандидата набрали по 198 баллов, 3 кандидата – по 170 баллов.

Таблица 2- Пример ранжирования с одинаковыми значениями в распределении

| Сумма баллов | 200 | **198** | **198** | 187 | 184 | 183 | **170** | **170** | **170** | 160 | 154 | 153 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ранг | 1 | **2,5** | **2,5** | 4 | 5 | 6 | **8** | **8** | **8** | 10 | 11 | 12 | 13 |

При ранжировании ранги совпадающих значений не должны отличаться друг от друга (например, спортсмены – бегуны, пробежавшие на одинаковый результат, но лучший относительно других бегунов, то эти бегуны делят 1 и 2 место между собой).

Таким образом, если среди ранжируемых результатов встречаются группы одинаковых значений, ранг внутри каждой из таких групп определяется как среднее арифметическое тех рангов, которые имели бы результаты, будь они отличными друг от друга:

$$2+3/2 = 2,5 \qquad 7+8+9/3 = 8$$

Процедура ранжирования лежит в основе многих непараметрических методов статистики, поэтому желательно владеть навыками ранжирования.

Следует отметить, что в ряде случаев возможно упорядочить объекты или их свойства таким образом, что возможно определить интервалы между ними. Такое, т.е., равные интервалы могут быть только в *шкале интервалов,* но в ней устанавливается произвольно ноль (начало) шкалы, величина единиц измерения, в которых ведется подсчет, направление. Шкала интервалов основана на предположении о равенстве разностей степеней выраженности психологического свойства у двух объектов разности двух чисел, приписанных этим объектам по данному свойству.

Например, произвольно устанавливается точка отсчета в тщательно сконструированных и стандартизированных тестах интеллекта. Нам неизвестна абсолютная точка отсчета — даже если при выполнении теста ни одна задача не была решена, психолог с полной уверенностью не может сказать, что интеллекта нет вообще, умственное развитие равно нулю.

Шкала интервалов не позволяет утверждать, будто *А.*, чей коэффициент интеллекта составляет 140, в два раза более развит, чем Б., коэффициент интеллекта которого равен 70. Мы знаем лишь, что разность между показателями 140 и 70 столь же велика, как и между показателями 130 и 60.

Шкала интервалов, таким образом, является достаточно точной и для нее можно вычислять среднее арифметическое как основную характеристику.

Таким образом, шкала интервалов характеризуется:

1. Выбор точки отсчета (нуль шкалы).
2. Выбор единицы измерения (величина интервала).
3. Выбор направления отсчета.
4. Отсутствие возможности сравнивать отношения измеряемых признаков с целью выяснить: во сколько больше, меньше и т.д.
5. Во многих интервальных шкалах есть отрицательные значения (например, отрицательная температура).

*Шкала отношений* позволяет делать выводы о пропорциях. Здесь мы можем сказать — в два раза больше, в три раза меньше и пр. В этой шкале имеется естественное, непроизвольно выбранное начало отсчета.

Примером такой шкалы является шкала мер длины, веса. Если рост мальчика составляет 2 м, то этот мальчик в два раза выше девочки ростом 1 м. Шкала отношений позволяет делать выводы о тождественности отношений, с ее помощью могут производиться все статистические подсчеты. Но в измерении психологических признаков мы редко достигаем уровня шкалы отношений, в лучшем случае— шкалы интервалов. Первые две измерительных шкалы – неметрические, ведь они непосредственно чисел не приписывают. Метрические шкалы - интервалов и отношений, здесь используются числа.

Реальный психологический тест часто содержит в себе несколько типов шкал. Например, отдельный вопрос теста Айзенка имеет дихотомическую номинативную шкалу (можно ответить "да" или "нет"), суммирование ответов производится в соответствии с предположением шкалы интервалов. Для получения более точного представления о свойствах испытуемых, измеренных в шкалах интервалов, психологи используют дополнительные типы шкал, которые по смыслу являются преобразованиями; первичных ("сырых") оценок — это так называемые шкалы стандартизации, на них мы остановимся позднее.

Возможны преобразования из одной шкалы в другую[13]. Результаты, полученные по шкале интервалов, могут быть преобразованы в ранги или переведены в номинативную шкалу. Рассмотрим, например, "сырые" результаты шести испытуемых по шкале экстраверсии-интроверсии теста Айзенка (таблица 3).

Таблица 3- Данные по тесту Айзенка в разных измерительных шкалах

| Испытуемые | Шкала интервалов | Шкала рангов | Номинативная шкала |
|---|---|---|---|
| А. | 20 | 5 | Э |
| Б. | 15 | 4 | Э |
| В. | 22 | 6 | Э |
| Г. | 9 | 3 | И |
| Д. | 3 | 1 | И |
| Е. | 4 | 2 | И |

Первый столбец — имена испытуемых, второй столбец — балл за выраженность качества (реализована шкала интервалов), третий столбец — в соответствии с исходным баллом испытуемым приписаны ранги (первый ранг получает испытуемый, имеющий наименьший балл, второй ранг — испытуемый, имеющий следующий по величине балл, и т.д.), четвертый столбец — в соответствии с исходными баллами испытуемые распределены на два класса: интроверты (И) — баллы от 0 до 12, экстраверты (Э) — от 13 до 24. Отметим, что каждый раз при переходе от одной шкалы к другой теряется часть информации об испытуемых. Так, при ранжировании оказываются следующими друг за другом испытуемые Д. и Е., имеющие различие "сырых" оценок в один балл, и испытуемые Б. и Г., имеющие различие "сырых" оценок в шесть баллов. При распределении испытуемых по классам в один класс попадают сильно различающиеся по "сырым" оценкам испытуемые.

Обратный переход, от менее мощной шкалы к более мощной, чаще всего имеет место, когда испытуемого просят ответить на какие-либо вопросы с указанием частоты: "всегда", "часто", "средне", "редко", "никогда", затем вариантам ответов приписывают баллы: 5, 4, 3, 2 и 1 соответственно. Далее с этими числами начинают оперировать, основываясь на предположении равенства интервалов между классами ("всегда" отличается от "часто" на столько же, на сколько отличается "редко" от "никогда"), например, находят суммарный балл за некоторое качество. Таким образом, совершается переход от первоначально заданной ранговой шкалы, в которой указан только порядок явлений ("всегда" происходит чаще, чем "часто", а "часто" чаще, чем "редко", и т.д.), к интервальной шкале, в которой интервалы между разными классами явлений уравнены.

Следует отметить, что при описании психологических явлений необходимо всегда отдавать себе отчет в том, какая именно шкала используется, поскольку каждый способ обработки экспериментальных данных рассчитан на определенный тип шкал. Применение математических методов к неадекватным данным приводит к артефактам (ложным результатам).

**Вопросы и задания для самопроверки**

1. Дайте определение измерению?
2. Соотнесите этапы проведения психологического эксперимента и математических процедур.
3. Качественное и количественное описание результатов: определение, значение?
4. Какие существуют виды шкал?
5. Вариантом какой шкалы является традиционная хронологическая шкала «от рождества Христова»?
6. Какая из шкал является самой точной?
7. Какие шкалы можно преобразовывать в какие?
8. Определите тип шкалы:

    а) государственные знаки автомобиля;

    б) телефонные номера;

    в) номер региона на государственном знаке автомобиля;

    г) рост человека;

    д)Таблица4

| № | IQ |
|---|---|
| 1 | 154 |
| 2 | 175 |
| 3 | 132 |
| 4 | 167 |

    е)Таблица 5

| № | возраст |
|---|---|
| муж | 32 |
| жен | 30 |
| муж | 29 |

ж) Таблица 6

| **Уровень интеллекта** | **объекты** |
|---|---|
| Высокий уровень интеллекта | Алексеев |
| Средний уровень интеллекта | Сергеев |
| Низкий уровень интеллекта | Леонидов |

з) Таблица 7

| **Объекты** | **Пол** |
|---|---|
| Иванов | М |
| Петров | М |
| Кузнецова | Ж |
| Степанова | Ж |
| Сидоров | М |

9. К какому типу данных относятся следующие массивы?

1-й, 2-й, 3-й, 4-й.

8, 13, 4, 8, 8, 10, 15.

Сильный, слабый.

## Глава 2

## Группировка первичных данных эксперимента и наблюдения

Данные – это основные элементы, подлежащие классифицированию или разбитые на категории с целью обработки. Выделяют три типа данных:

1. Метрические данные: количественные данные, получаемые при измерениях. Их можно распределить на шкале интервалов или отношений.
2. Ранговые данные, соответствующие местам этих элементов в последовательности, полученной при их расположении в возрастающем порядке. Эти данные можно представить в виде порядковой шкалы.
3. Номинативные данные: категориальные (качественные) данные, представляющие собой особые свойства элементов выборки. Например, цвет глаз у испытуемых. Эти данные нельзя измерить, но можно оценить их частоту встречаемости.

Первичные данные эксперимента или единицы наблюдения (измерения) — групповые объекты, обладающие сходными характеристиками, признаками. Множество относительно однородных, но индивидуально различных единиц, объединенных для совместного изучения, образует *статистическую совокупность*[13].

*Признак* — свойство, проявление, которым один предмет отличается от другого. Характерное свойство признака — варьирование — изменение величины признака в определенных пределах при переходе от одной единицы наблюдения к другой. Эти колебания величины одного и того же признака, наблюдения в массе однородных членов статистической совокупности называют вариациями, а отдельные числовые значения-вариантами, переменными случайными величинами.

*Случайными* называют события, которые могут произойти или не произойти. Условную меру появления события можно представить как положение точки на отрезке между двумя полюсами от полной достоверности (событие обязательно произойдет) до полной невозможности (событие никогда не произойдет). Численными мерами появления случайных событий являются *частота, относительная частота* и *вероятность*. Частота $(f_i)$ определяется как количество событий, интересующих исследователя, относительная частота $(f_{отн.})$ — это частота, отнесенная к общему числу событий $(n)$ в некотором опыте:

$$f_{отн.} = \frac{f_i}{n}$$

Вероятность $(p_i)$ — некоторое положительное число, лежащее в пределах от нуля до единицы ($0< p_i <1$), к которому приближаются значения относительной частоты по мере увеличения числа опытов. (Часто вероятность указывается в процентах, то есть $p_i 100\%$.) Математическая теория вероятностей оперирует именно таким идеальным понятием, а для математической статистики основными являются понятия частоты и относительной частоты, поскольку на практике число опытов, измерений всегда ограничено.

События (будем обозначать их *A, B, C...*) могут быть *совместными* и *несовместными, зависимыми* и *независимыми*. Совместными называются события, которые могут произойти одновременно в одном и том же опыте (испытуемый может оказаться и экстравертом и невротиком). Несовместными будут события, которые одновременно произойти не могут (в одном опыте испытуемый не может быть и экстра- и интровертом). Полной группой событий называется множество несовместных событий, одно событие из которого обязательно произойдет.

*Зависимыми* являются такие события, у которых появление одного из них оказывает влияние на вероятность появления другого. У *независимых* событий это влияние отсутствует. Степень зависимости событий выражается условными вероятностями $P(A/B)$, то есть вероятность события $A$ при условии, что произошло событие $B$. Тогда условие зависимости-независимости событий может быть записано так: $P(A/B)=P(A)$ — для независимых событий, и $P(A/B) \neq P(A)$ — для зависимых событий.

*Случайной величиной[10]* называется такая переменная величина, которая принимает свои значения из некоторого множества. Выделяют *дискретные* и *непрерывные случайные величины*. Дискретная случайная величина принимает свои значения из множества целых чисел (например, количество детей в семье, количество травм и т.п.). Непрерывная случайная величина принимает свои значения из множества действительных чисел. Любая случайная величина характеризуется своим *распределением*, то есть указанием того, с какой частотой встречается каждое значение случайной величины.

Многие психологические явления непрерывны по своей природе (интеллект, эмоциональность и т.п.), однако их описание и измерение требует представления в несколько ином виде — в виде так называемой квантованной случайной величины. В этом случае множество значений случайной величины делится равными порциями (квантами), величина порции называется интервалом группировки, квантования и обозначается *i*.

Обозначают случайные величины X, варианты случайных величин - $X_1$, $X_2$, ..., обозначение Xi — общий характер варианты.

Опыт показал, что как бы точно не проводились измерения, они сопровождаются отклонениями от действительного значения измеряемой величины, то есть не могут быть проведены абсолютно точно [11]. Разница между результатами измерений и действительно существующими значениями измеряемой величины называется *погрешностью*, или *ошибкой*. Такие ошибки бывают *случайными* и *систематическими*.

Фиксируют результаты наблюдений числами, которые округляют единообразно, в соответствии с принятой исследователем точностью до десятых, сотых и пр. Их обработка начинается с упорядочивания, или систематизации собранных данных.

Процесс систематизации результатов массовых наблюдений, объединение их в относительно однородные группы по некоторому признаку называется *группировкой (квантованием)*. Группировка должна соответствовать поставленной цели эксперимента.

Формы группировки — таблицы, статистические ряды. Таблицы наиболее распространены, они бывают простые и сложные. К простым относятся таблицы альтернативной группировки — когда одна группа вариант противопоставляется другой. Они строятся в случае использования в эксперименте номинативной дихотомической шкалы, но в таком виде могут быть представлены и более сложные типы шкал (таблица 8).

Таблица 8-Таблица альтернативной группировки

| Группа | Количество испытуемых | |
|---|---|---|
| | Высокая фрустрация | Низкая фрустрация |
| учителя | 36 | 15 |
| инженеры | 10 | 45 |

Сложные таблицы применяются при выяснении причинно-следственных отношений между варьирующими признаками, такие таблицы строятся для интервальных шкал и предполагают исследование значительного количества испытуемых, по сравнению с таблицами альтернативной группировки. В среднем для одной ячейки таблицы примерно 5 испытуемых (таблица 9).

Статистические ряды — ряды числовых значений признаков, расположенных в определенном порядке. Такие ряды бывают атрибутивные, вариационные, динамики и пр.

Атрибутивные ряды чаще всего применяются в исследованиях в шкалах наименований — мужчин — 30, женщин — 15.

Таблица 9-Таблица причинно-следственных отношений

| Образование родителей | IQ детей (по возрастам) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5-6 | 7—8 | 9-10 | 11—12 | и т. д. |
| незаконченное среднее<br>среднее<br>высшее гуманитарное<br>высшее техническое<br>и пр. | Уровень IQ детей | | | | |

Вариационным рядом, или рядом распределения называют двойной ряд чисел, показывающий, каким образом числовые значения признака связаны с их повторяемостью в данной статистической совокупности. Например:

Варианты $X_1$ $X_2$ $X_3$ ... $X_i$

Число вариант $f_1$ $f_2$ $f_3$ ... $f_i$

Число вариант показывает, сколько раз отдельные наблюдения встречаются в данной совокупности, их называют частотами (весами) вариант. Сумма частот равна объему данной совокупности:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$$

где $\sum_{i=1}^{k}$ (сигма) обозначает действие суммирования частот вариационного ряда от первой до последней (k-й)варианты,

n— общее количество наблюдений, или объем выборки.

Частоты выражаются не только абсолютными, но и относительными числами (в долях, %), тогда их называют *частостями,* а их сумма равна 1 или 100%.

Вариационный ряд ускоряет работу при вычислении обобщающих числовых характеристик, помогает выявлять закономерности варьирования исследуемого признака. Вариационный ряд преобразуют в ряд ранжированных признаков (см.главу 1).

Признаки могут варьировать дискретно — прерывисто (обычно в шкалах наименований) и непрерывно — в других шкалах; в широком или узком диапазоне. В зависимости от этого статистическая совокупность распределяется в безынтервальные и интервальные вариационные ряды. В безынтервальном ряду частоты относятся непосредственно к ранжированным значениям признака, которые приобретают положение отдельных групп или классов вариационного ряда. При использовании интервального ряда подсчитывают частоты, относящиеся к отдельным промежуткам или интервалам, на которые разбивается общая вариация признака в пределах от минимальной до максимальной варианты данной совокупности. Эти промежутки могут быть равными или неравными по величине. Поэтому бывают равно- и неравноинтервальные вариационные ряды, но заметим, что в психологических исследованиях чаще используются равноинтервальные (см. Практикум 1,2).

Строя ряды, важно правильно наметить ширину интервала, так как слишком большой искажает типичные черты варьирования и ведет к снижению точности числовых характеристик ряда, при малом интервале точность повышается, но ряд слишком растянут и не дает четкой картины варьирования. Ширина интервала задается произвольно или определяется по формуле:

$$i = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k}$$

где $i$ — ширина интервала,

$X_{max}$, $X_{min}$ — максимальная и минимальная варианты выборочной совокупности,

$k$ — число интервалов, его можно задать произвольно, либо по формуле:

$$k = 1 + 3.32 \cdot \lg n,$$

где $n$ — объем выборки.

**Техника построения вариационных рядов[14]**

На первом этапе в экспериментальных данных необходимо найти максимальную и минимальную варианты и определить величину интервала ($i$). При $i = 1$ — ряд безынтервальный, если $i \neq 1$ — интервальный.

При построении ряда необходимо чтобы минимальная варианта попадала примерно в середину первого интервала (см. Практикум 2) — так наиболее полно отражается природа изучаемого явления.

После этого распределяем по интервалам все единицы совокупности таким образом, чтобы каждая варианта попадала только в один интервал (для этого определяют их более точные границы).

Затем интервалы заменяют их центральные или срединные значения и, в результате, получают безынтервальный ряд, по которому вычисляются обобщающие числовые характеристики. Центральные величины получают по формуле:

$$X_i = \frac{1}{2}(X_H - X_K),$$

где $X_i$ — центр класса,

$X_н$ и $X_к$ — точные границы интервала.

Разноску частот по интервалам производят, просматривая сводку результатов (см. Практикум 2) и отмечая повторяемость вариант для каждого интервала (обозначают их точками или черточками). Закончив разноску, «шифр» переводят в числа. Полученный вариационный ряд выражает зависимость между вариантами и частотой их встречаемости в данной совокупности.

**Графика вариационных рядов**

Для построения графика безынтервального вариационного ряда по оси абсцисс откладывают серединные значения интервалов, а по оси ординат — частоты. Высота перпендикуляров, восстанавливаемых по оси абсцисс, соответствует частотам интервалов. Соединяя вершины перпендикуляров прямыми линиями, получают геометрическую фигуру, называемую *полигоном распределения частот.* Линия, соединяющая вершины перпендикуляров, называется *вариационной кривой, или кривой распределения вариационного ряда* (более подробно см. Практикум 1).

При построении графика интервального распределения на оси абсцисс откладывают границы интервалов, а на оси ординат — их частоты, в результате получается гистограмма распределения частот (см. Практикум 1).

**§1 Практикум 1. Группировка первичных данных эксперимента и их графическое представление**

Группировку первичных данных в дискретных признаках рассмотрим на примере [15].

***Задача 1.*** Проведен опрос подростков. Опрошено 1000 человек (500 мальчиков и 500 девочек) с целью определения жанра читаемой литературы. Им предлагался список из 10 жанров (А, Б и пр.), необходимо было выбрать один из них.

Для компактной характеристики результатов исследования принято представлять их в таблице. В ней отражается частота (%) выбора отдельных жанров, причем это можно сделать для разных испытуемых (в нашем случае по полу). В конце таблицы суммируем все показатели частоты, проверяем, все ли варианты учтены. В результате этих процедур получим таблицу (таблица 10).

Таблица 10- Предпочтения жанров литературы юношами и девушками

| Жанр произведения | юноши | | девушки | | вся выборка | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | частота | % | частота | % | частота | % |
| А | 100 | 20,8 | 59 | 11,8 | 159 | 15,9 |
| Б | 37 | 7,4 | 50 | 10,0 | 87 | 8,7 |
| В | 87 | 17,4 | 179 | 35,8 | 266 | 26,6 |
| Г | 19 | 3,8 | 27 | 5,4 | 46 | 4,6 |
| Д | 41 | 8,2 | 3 | 0,6 | 44 | 4,4 |
| Е | 8 | 1,6 | 29 | 5,8 | 37 | 3,7 |
| Ж | 20 | 4,1 | 11 | 2,2 | 31 | 3,1 |
| З | 145 | 29,0 | 82 | 16,4 | 227 | 22,7 |
| И | 16 | 2,4 | 16 | 3,2 | 32 | 3,2 |
| К | 27 | 5,4 | 44 | 8,8 | 71 | 7,1 |
| Всего | 500 | 100,0 | 500 | 100,0 | 1000 | 100,0 |

Кроме табличного способа представления результатов существует и графический вариант — столбиковая диаграмма, применяется она обычно для величин в шкалах наименований.

Для того чтобы построить столбиковую диаграмму для нашего случая, необходимо по оси абсцисс (X) отложить значения переменной, а по оси ординат (У) — частоту или частость встречаемости на нашей выборочной совокупности. Диаграмма имеет следующий вид:

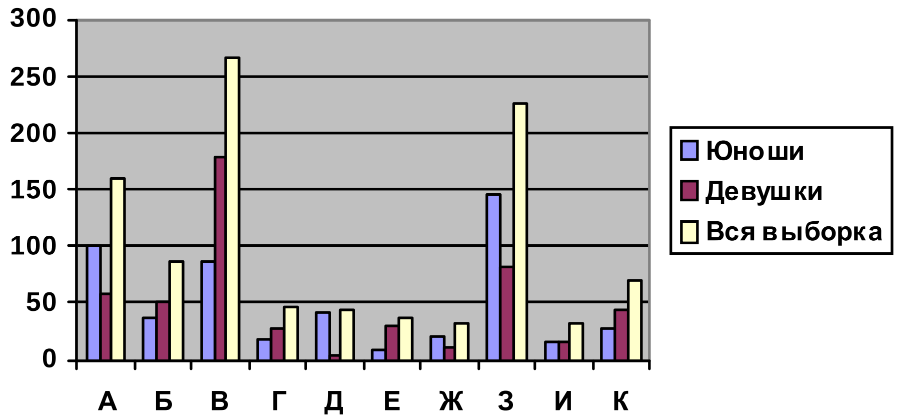



Рисунок 1 - Предпочтения жанров литературы у подростков

Данные можно представить и в виде круговой диаграммы (см. рисунок 2), чаще всего такого рода представления результатов встречаются в социологических исследованиях.

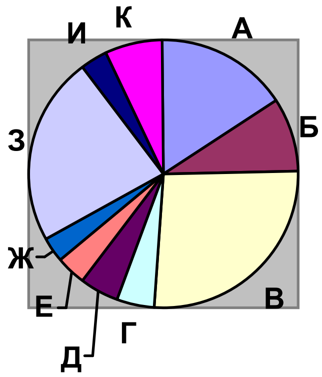



Рисунок 2 - Предпочтения жанров литературы у подростков

При использовании в исследовании шкал порядка, интервалов, отношений, возможен и другой вариант представления данных эксперимента.

***Задача 2*** [15]. В психологическом эксперименте 96 испытуемых оценивали цветность послеобраза по эталонам цвета, результате получен следующий вариационный ряд:

Таблица 11

| № стимула | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| частота выбора | 2 | 7 | 15 | 26 | 22 | 15 | 8 | 1 | 96 |

При графическом представлении подобного рода вариации столбики ступенчатой гистограммы располагают вплотную друг к другу (рисунок 3). Частотный полигон строят, соединяя прямыми отрезками средние точки всех участков гистограммы (рисунок 4), а кривая распределения соединяет с помощью линий эти участки (рисунок 5).

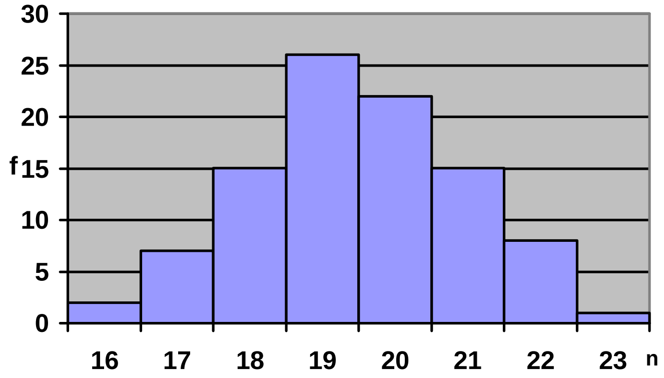



Рисунок 3-Гистограмма распределения цвета послеобраза

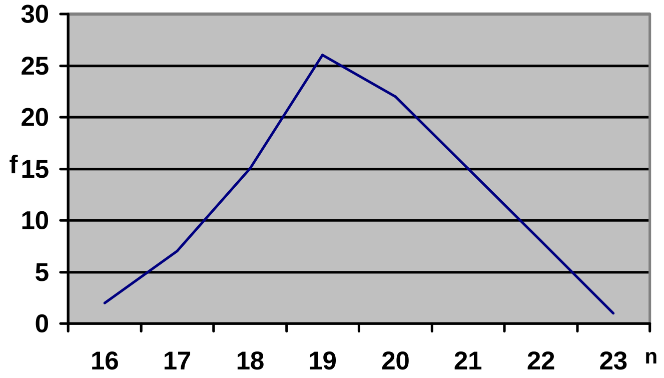



Рисунок 4-Полигон распределения цвета послеобраза

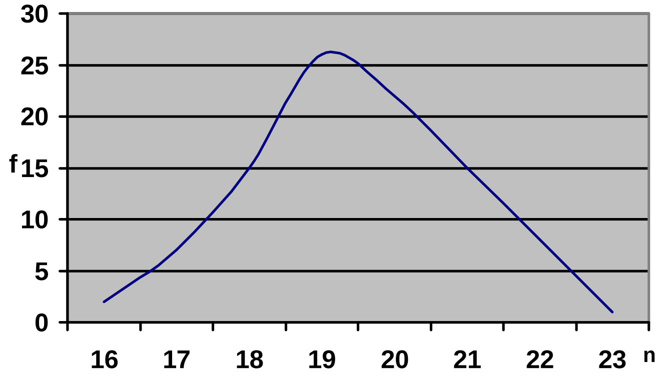
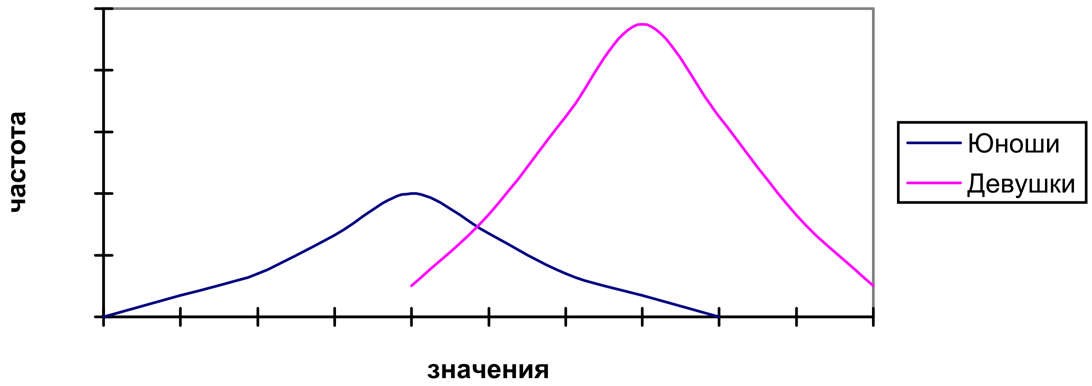



Рисунок 5- Кривая распределения цвета послеобраза

Переход к кривой распределения позволяет судить о неполученных в опыте результатах.

### Вопросы и задания для самопроверки

1. Какие вы знаете принципы ранжирования?
2. Дайте определение случайной величины?
3. Дайте определение ошибок первого и второго рода?
4. Группировка и ее значение при обработке первичных данных?
5. Что из себя представляет таблица кросс-табуляции?
6. Что представляет собой полигон?
7. Что представляет собой распределение эмпирическое?
8. Какая из осей графика традиционно используется как ось частот?
9. Было проведено сравнительное исследование эмоционального реагирования юношей и девушек. По его результатам были построены графики распределения частот, наложенные друг на друга.




Необходимо ответить на следующие вопросы.

1.1. Где на графике ось частоты и ось показателей?

1.2. Какие различия у девушек и юношей по показателям разнообразия паттернов эмоционального реагирования?

1.3. У девушек или юношей в большей степени выражены индивидуальные различия?

10. При исследовании уровня эмоциональной устойчивости в студенческой группе были получены следующие данные: {9, 12, 4, 5, 3, 8, 12, 10, 11, 5, 6, 8, 4, 2, 8, 7, 5, 3, 9, 7, 6, 7, 6, 6}. Задание: построить гистограмму распределения показателей эмоциональной устойчивости. При этом количество разрядов и интервалы значений студентам предлагается назначить самим.

11. Построить гистограмму для показателей роста студентов своей учебной группы. Количество разрядов и интервалы значений студентам предлагается назначить самим

## Глава 3

## Основные характеристики варьирующих объектов

Получив эмпирическое распределение результатов, вычислив первичные описательные статистики, можно сказать о свойствах и особенностях исследуемой выборки в среднем, а также выяснить насколько индивидуальные значения отличаются от среднегрупповых. Выделяют четыре основных группы характеристик распределения переменной случайной величины – меры положения, рассеивания, асимметрии и эксцесса.

*Меры центральной тенденции (меры положения)* — характеристики совокупности вариант (переменных), указывающие на наиболее типичный, репрезентативный для изучаемой выборки результат. То есть, анализируя меры центральной тенденции, мы можем определить средние характеристики выборки, что свойственно для группы в целом. К мерам центральной тенденции относятся: средняя арифметическая, медиана, мода.

Множество результатов исследования располагается на числовой прямой, и центральная тенденция проявляется в ориентации, группировании результатов относительно определенного участка этой прямой. Меры центральной тенденции — широко используемые статистические показатели, причем не только для количественных признаков в интервальных шкалах, но и качественных признаков в шкалах порядка.

***Средняя арифметическая*** позволяет определить среднее значение по группе.

1 . Простая средняя арифметическая:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 ... + X_n}{n}$$

где $X_1$ , $X_2$, ...., $X_n$ значения вариант,

n – их число.

2. Взвешенная средняя арифметическая:

$$\overline{X} = \frac{X_1 \cdot f_1 + X_2 \cdot f_2 + X_3 \cdot f_3 ... + X_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 ... + f_n}$$

т.е. взвешенная $\overline{X}$, равна отношению суммы произведений каждого значения переменной на ее удельный вес и суммы весов ($f_i$). При расчете за исходные варианты принимаются середины интервала (центры). Применяется при расчете средней арифметической в сгруппированных данных. Взвешенная средняя арифметическая вычисляется для сгруппированных данных. (Более подробно см. Практикум 2).

3. Средняя квадратичная:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Средняя квадратичная также используется при вычислении стандартного отклонения.

***Мода*** - значение, наиболее часто встречающееся в ряду переменных. Для случаев, когда все значения в выборке встречаются одинаково часто, считается, что распределение не имеет моды. Если два соседних значения имеют одинаковую частоту и эта частота больше частот других значений, мода является средним этих двух значений. В случае если два несмежных значения имеют равные частоты, и они превышают частоты других значений, существуют две моды.

В психодиагностике определение моды используется для выяснения наиболее часто встречающихся значений вариант в интервальных шкалах. С этой целью определяется модальный интервал, в пределах которого находится мода, а затем приближенное значение модальной величины признака. Для этого можно воспользоваться следующей формулой:

$$Mo = X_0 + \frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} \cdot i$$

где $X_0$ — нижняя точная граница модального интервала,

$f_m$ — частота модального интервала,

$f_{m-1}$ — частота интервала, предшествующего модальному,

$f_{m+1}$ — частота интервала, следующего за модальным,

i — величина интервала.

***Медиана*** — это точка на измерительной шкале, выше и ниже которой находится точно половина измерений. Интервал, содержащий медиану, называется *медианным*. Медиану можно рассчитать по следующей формуле:

$$Me = X_0 + \frac{\frac{1}{2}n - F_b}{f_p} \cdot i$$

где $X_0$ — нижняя точная граница класса группировки, содержащего медиану,

$n$ — число измерений,

$F_p$ — сумма частот классов, ниже класса, содержащего медиану,

$f_p$ — частота класса, содержащего медиану,

i — величина интервала.

При выборе и интерпретации мер центральной тенденции необходимо учитывать следующие особенности [2]:

1. При определении средних величин необходимо тщательное соблюдение требований однородности переменных, репрезентативности и достаточности объема выборки.

2. Расчету средних величин должна предшествовать предварительная разбивка изучаемой совокупности, на качественно однородные группы.

3. Являясь обобщенной характеристикой ряда, меры центральной тенденции не позволяют учитывать его вариации, поэтому обязательно использование мер изменчивости.

4. Медиана не зависит от величин и частот встречаемости признаков в рамках определенного множества переменных.

5. В малых совокупностях мода нестабильна и может сильно меняться при единичных и незначительных вариациях переменных.

6. Каждое значение переменной влияет на величину средней, если одно значение меняется на C единиц, то средняя изменяется в том же направлении на C/n единицы. Это особенно важно с точки зрения возникновения ошибок средних.

7. В симметричных распределениях $\overline{X}$, Mo, Me совпадают.

Итак, меры центральной тенденции показывают, вокруг каких значений группируется большинство экспериментальных данных. Обычно в качестве «центра» рассматривается среднее арифметическое значение.

***Меры изменчивости (меры рассеивания)*** — статистические показатели вариации (разброса) переменных относительно среднего значения, степени индивидуальных отклонений от центральной тенденции распределения. Они позволяют судить о достоверности и однородности полученной эмпирически совокупности данных, существенности сходств и различий в распределении, в сравниваемых группах распределений, точности проведенных измерений.

Одна и та же средняя величина может характеризовать совокупности данных, в которых размеры вариации признака значительно отличаются друг от друга.

Наиболее простой способ представления разброса — *размах распределения* ® — разность между самым высоким и низким результатом. Но он не точен, так как характеризует выборку независимо от ее объема.

Более точно *среднее абсолютное* (линейное, арифметическое) отклонение. Оно основано на учете разности между каждым индивидуальным результатом и средним значением по группе. Для его расчета используется следующая формула для не сгруппированных данных:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| X_i - \overline{X} \right|}{n}$$

где $\left| X_i - \overline{X} \right|$ — значение отклонения от $\overline{X}$ без учета знака,

$n$ — объем совокупности.

Формула абсолютного отклонения для сгруппированных данных выглядит следующим образом:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| X_i - \overline{X} \right|}{n}$$

где $f_{\text{i}}$ – частота каждого значения из классов группировки.

Недостатком линейного отклонения является то, что оно не учитывает знак отклонения. Этот недостаток компенсируется при расчете *дисперсии (D)* —- средней квадрата отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины. Она, рассчитывается по следующей формуле:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( X_i - \overline{X} \right)^2}{n}$$

где $\sum_{i=1}^{n} \left( X_i - \overline{X} \right)^2$ сумма квадратов разностей между средним и индивидуальным значением признака,

n — объем выборки.

Для расчета дисперсии в сгруппированных данных применяется формула:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left( X_i - \overline{X} \right)^2}{n}$$

где $f_{\text{i}}$ – частота каждого значения из классов группировки.

Расчет дисперсии применяют для выделения выборочной совокупности, определения ошибки выборки, однородности изучаемой совокупности по тому или иному признаку. Он лежит в основе факторного, дисперсионного анализа, других методов.

**σ (сигма) — *среднее квадратическое (стандартное) отклонение*.** Оно соответствует корню квадратному из дисперсии:

$\sigma = \sqrt{D}$

При небольших статистических выборках используется формула:

$$\sigma^2 = D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$$

Еще одной мерой изменчивости является *квартильное отклонение*, более подробно рассмотренное нами в Практикуме 2.

***Показатели асимметрии и эксцесса [18]*** с их ошибками репрезентативности определяются по следующим формулам

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{n\sigma^3};$$

$$m_a = \sqrt{\frac{6}{n}};$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{n\sigma^4} - 3;$$

$$m_e = 2\sqrt{\frac{6}{n}};$$

где $(x_i - \overline{x})$ - интервальные отклонения,

$\sigma$ - среднеквадратичное отклонение,

n – количество испытуемых – объем выборки.

Для сгруппированных показателей используются следующие формулы асимметрии и эксцесса:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^3}{n\sigma^3}$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^4}{n\sigma^4} - 3$$

где $f_i$ – частота каждого значения из классов группировки

Показатели асимметрии и эксцесса свидетельствуют о достоверном отличии эмпирических распределений от нормального в том случае, если они превышают по абсолютной величине свою ошибку репрезентативности в три и более раз:

$$t_A = \frac{|A|}{m_A} \geq 3;$$

$$t_E = \frac{|E|}{m_E} \geq 3.$$

*Нормальное,* или *стандартное* распределение наблюдается при изменении признака (переменной) под влиянием множества относительно независимых факторов. График уравнения нормального распределения представляет собой симметричную унимодальную колоколообразную кривую, осью симметрии которой является вертикаль (ордината), проведенная через точку 0 (рисунок А.1 приложения). Кроме проверки гипотез статистических критериев нормальное распределение применяется для статистического описания совокупности эмпирических данных оценки генеральной совокупности по выборке, для стандартного нормирования тестовых баллов и перевода их в шкальные оценки. Считается, что нормальное распределение характеризует такие случайные величины, на которые воздействует большое количество разнообразных факторов, причем сила воздействия одного отдельно взятого фактора значительно меньше суммы воздействий остальных факторов. В результате получается, что чаще наблюдаются некоторые средние значения измеряемого параметра, реже крайние, и чем сильнее отличается какое-то значение от среднего, тем реже оно встречается. Многие биологические параметры распределены подобным образом (рост, вес и т.п.). Психологи полагают, что большинство психологических свойств, качеств (интеллект, свойства личности и т.п.)

также имеет нормальное распределение, именно из этой посылки исходят при проведении стандартизации тестовых методик.

Следует отметить, что меры положения и рассеивания рассчитываются в связи с типами шкал, для определения их видов предлагаем воспользоваться следующей таблицей:

Таблица 12-Типы шкал и меры положения и рассеивания

| Меры положения и рассеивания | Типы шкал | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Наименований | Порядка | Интервалов | Отношений |
| Среднее арифметическое($\overline{X}$) | - | - | х | х |
| Мода (Mo) | х | х | х | х |
| Медиана (Me) | - | х | х | х |
| Размах(R) | х | х | х | х |
| Линейное отклонение(d) | - | - | х | х |
| Квартильное отклонение (Q) | - | х | х | х |
| Дисперсия (D) | - | - | х | х |
| Среднее квадратическое отклонение (σ) | - | - | х | х |

Условные обозначения: Х – расчет производится, - расчет не производится.

## §2 Практикум 2. Расчет характеристик распределения переменной случайной величины

*Задача* 3. Проведено исследование 30 испытуемых по некоторой методике, требуется провести группировку и оценить первичные характеристики распределения. Получены следующие результаты:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 34 | 36 | 38 | 55 |
| 37 | 41 | 34 | 40 | 29 |
| 35 | 30 | 45 | 36 | 22 |
| 46 | 33 | 25 | 30 | 34 |
| 43 | 16 | 45 | 43 | 22 |
| 26 | 38 | 48 | 33 | 31 |

Прежде всего, для построения группировки, определим основные характеристики распределения полученных данных.

Для этого необходимо найти максимальное (55) и минимальное (16) значения. На основе их разности определяем размах распределения (55 - 16 = 39), затем произвольно задаем количество интервалов нашей группировки — 10 и определяем, сколько чисел будет в одном интервале (39: 10 = 3,9 ≈ 4).

Затем устанавливаем границы интервалов группировки - минимальное значение (16) входит в первый интервал, его составляют числа 16, 17, 18, 19. Такая же процедура повторяется для всех остальных интервалов. Эти данные представлены в первом и втором столбце таблицы 13.

В качестве следующего шага необходимо ликвидировать дискретность наших величин. Для этого определяем точные границы интервалов группировки (± 0,5 к нижней и верхней границе интервала) и центры интервалов - $x_i$. Для расчета центров интервалов складываем их точные границы и сумму делим на 2 (находим среднюю арифметическую). Данные, полученные после этих процедур, представлены в столбцах 3 и 4 таблицы 13.

Затем подсчитываем частоту встречаемости результатов в каждом интервале (5 столбец) и обозначаем ее числом (6 столбец).

На данном этапе обработки результатов полезно представить наши данные графически (рисунок 6) в виде кривой распределения и визуально оценить ее характер.

По оси ординат откладываются частоты встречаемости результатов, а по оси абсцисс — центры интервалов. Наша кривая по форме близка к нормальному распределению, но имеет широкий размах (разброс результатов), что говорит о большем разнообразии полученных результатов. Имеется также некоторое смещение кривой распределения, которое показывает возможное несоответствие теста особенностям выборки. Все эти показатели нуждаются в количественной оценке и в целях сравнения наших результатов с другими выборками.

Для расчета средней арифметической используем формулу:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot X_i}{n}$$

где для каждого интервала группировки определяем произведение частоты $f_i$ на центр интервала, затем суммируем произведения и делим на количество исходных данных *n*. В нашем случае:

$$\overline{X} = \frac{17{,}5 \cdot 1 + 21{,}5 \cdot 2 + 25{,}5 \cdot 3 + 29{,}5 \cdot 4 + 33{,}5 \cdot 6 + 37{,}5 \cdot 5 + 41{,}5 \cdot 4 + 45{,}5 \cdot 3 + 49{,}5 \cdot 1 + 53{,}5 \cdot 1}{30} = \frac{1049}{30} = 34{,}96$$

Для расчета медианы добавляем в таблицу13 столбец 7 -накопленные частоты. Они рассчитываются путем последовательного суммирования абсолютных частот ( $f_i$ ) снизу вверх. Затем находим медиану по формуле:

$$Me = X_0 + \frac{{}^1\!/_2\, n - F_b}{f_p} \cdot i$$

где $X_0$ — нижняя точная граница интервала группировки, содержащего медиану (в нашем случае 15 измерение (30/2), как видно из таблицы 13, содержится в 5 интервале, значит $X_0$= 31,5), n — количество измерений (30), $F_b$ — сумма частот интервалов, ниже интервала, содержащего медиану (в нашем случае 1 + 2 + 3 + 4 =10 — накопленная частота предмедианного четвертого интервала), $f_p$ — частота интервала, содержащего медиану (частота встречаемости 5 интервала — 6), $i$ — величина интервала (в нашем случае — 4).

Таким образом, для нашего случая:

$$Me = 31{,}5 + \frac{{}^1\!/_2\, 30 - 10}{6} \cdot 4 = 34{,}83$$

Таблица 13-Группировка первичных результатов исследования

| Классы | Границы классов | Точные границы классов | Центры классов $X_i$ | Первичное распре-деление | Частота встре-чаемости $f_i$ | На-копленная частота $f_{cum}$ | Откло-нение от средней $x_i$ | $x_i^2$ | $x_i^2 f_i$ | $x_i^3$ | $x_i^3 f_i$ | $x_i^4$ | $x_i^4 f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 10 | 52—55 | 51,5—55,5 | 53,5 | / | 1 | 30 | 18,54 | 343.73 | 343.73 | 6372,7 | 6372,7 | 118151,4 | 118151,4 |
| 9 | 48—51 | 47,5—51,5 | 49,5 | / | 1 | 29 | 14,54 | 211.41 | 211.41 | 3073,9 | 3073,9 | 44694,86 | 44694,86 |
| 8 | 44—47 | 43,5—47,5 | 45,5 | /// | 3 | 28 | 10,54 | 111.09 | 333.27 | 1170,9 | 3512,7 | 12341,3 | 37023,9 |
| 7 | 40—43 | 39,5—43,5 | 41,5 | //// | 4 | 25 | 6,54 | 42.77 | 171.08 | 279,7 | 1118,8 | 1829,4 | 7317,6 |
| 6 | 36—39 | 35,5—39,5 | 37,5 | ///// | 5 | 21 | 2,54 | 6,45 | 32.25 | 16,38 | 81,9 | 41,62 | 208,1 |
| 5 | 32—35 | 31,5—35,5 | 33,5 | ////// | 6 | 16 | -1,46 | 2.13 | 12.78 | -3,11 | -18,66 | 4,54 | 27,24 |
| 4 | 28—31 | 27,5—31,5 | 29,5 | //// | 4 | 10 | -5,46 | 29,81 | 119.24 | -162,77 | -651,08 | 888,73 | 3554,92 |
| 3 | 24—27 | 23,5—27,5 | 25,5 | /// | 3 | 6 | -9,46 | 89.49 | 268.47 | -846,5 | -2539,5 | 8008,746 | 24026,2 |
| 2 | 20—23 | 19,5—23,5 | 21,5 | // | 2 | 3 | -13,46 | 181.17 | 362.34 | -2438,6 | -4877,1 | 32823,14 | 65646,28 |
| 1 | 16—19 | 15,5—19,5 | 17,5 | / | 1 | 1 | -17,46 | 304.85 | 304.85 | -5322,7 | -5322,7 | 92934,49 | 92934,49 |
| $\sum$ | | | | 30 | | | | | 2159,4 | | 751,032 | | 393584,9 |

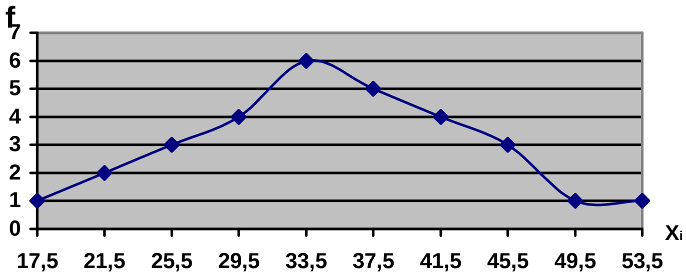



Рисунок 6-Кривая распределения первичных результатов

Моду для кривой распределения рассчитываем по следующей формуле:

$$Mo = X_0 + \left| \frac{f_2 - f_1}{2f_2 - f_1 + f_3} \right| \cdot i$$

где $X_0$ - нижняя точная граница модального интервала — интервала с наибольшей частотой $f_2$, (в нашем случае модальный интервал — пятый, а его частота — 6),

$f_1$ — частота интервала, предшествующего модальному (т.е. для нас — частота четвертого интервала — 4),

$f_3$ — частота интервала, следующего за модальным (частота шестого интервала — 5),

$i$ —ширина интервала группировки (у нас — 4).

Таким образом, получаем:

$$Mo = 31{,}5 + \left| \frac{6-4}{2\cdot 6 - 4 + 5} \right| \cdot 4 = 32{,}1$$

Из полученных результатов видно, что меры центральной тенденции не совпадают, следовательно, мы имеем дело с асимметричным распределением.

Для характеристики разнообразия результатов распределения рассчитаем меры изменчивости.

Находим дисперсию. Для этого добавляем в таблицу 13 столбцы 8, 9, 10. В восьмом рассчитываем отклонение первичных данных от среднего арифметического $\left(X_i - \overline{X}\right)$, обозначим его как $x_i$. В девятом столбце возводим отклонение в квадрат $\left(x_i^2\right)$, а в десятом умножаем получившийся результат на значение абсолютной частоты по данному классу $\left(x_i^2 \cdot f_i\right)$, все данные суммируем.

Теперь можно рассчитать дисперсию по формуле для сгруппированных данных:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}$$

где $X_i$ — центр интервала,

$\overline{X}$ — среднее арифметическое первичных результатов,

$f_i$ — значение абсолютной частоты,

$\sum$ - сумма вышеприведенных значений по всем интервалам,

$n$ — число измерений.

В нашем случае:

$$D = \frac{2159{,}42}{30} = 71{,}98 \text{ (см. таблицу 13)}$$

После расчета дисперсии находим значение среднего квадратичного отклонения:

$$\sigma = \sqrt{D} = 8{,}48$$

Различают два полуквартильных отклонения — для левой и правой частей распределения экспериментальных данных. Каждое из них представляет собой величину, соответствующую половине области распределения 50% данных на шкале (1/4 всего распределения). Таким образом, $Q_1$ будет отделять 25% измерений от остальных, а $Q_3$ — 75%; $Q_2$ — медиана распределения. С помощью полуквартильных отклонений можно определить рассеяние результатов вокруг медианы.

Процедуры расчета $Q_1$ и $Q_3$ аналогичны вычислению медианы для половины нашего распределения, или медиан левого и правого интервала распределения.

Следовательно, мы имеем право воспользоваться уже приведенной формулой для расчета медианы:

$$Me = X_0 + \frac{{}^1\!/_2\, n - F_b}{f_p} \cdot i$$

Значение $i$ нам известно — 4 (ширина интервала группировки), число измерений одинаково для левого и правого интервалов — 15, следовательно: $1/2\, n_{лев} = 1/2 n_{пр} = 7{,}5$

Анализируя группировку данных в таблице 13, нетрудно заметить, что интервалом группировки, содержащим медиану левой половины распределения, является третий (7,5 наблюдение находится там), а правой половины - седьмой (здесь 7.5 наблюдение определяется не с начала, а с конца группировки). Исходя из этого определяем:

для левого интервала $X_0 = 27.5,\ F_b = 6,\ f_p = 4;$

для правого интервала $X_0 = 43.5,\ F_b = 5,\ f_p = 4.$

Пользуясь найденными значениями величин, производим необходимые расчеты медиан для двух частей распределения:

для левой $Q_1 = 27{,}5 + \frac{7{,}5 - 6}{4} \cdot 4 = 29{,}0$

для правой $Q_3 = 43{,}5 - \frac{7{,}5 - 5}{4} \cdot 4 = 41{,}0$

Формула квартильного отклонения имеет вид: $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

В нашем случае $Q = \frac{41{,}0 - 29{,}0}{2} = 6$

Однако этот результат получен нами для нормального распределения данных, мы же имеем дело с асимметричным, поэтому необходимо рассчитывать полуквартильные отклонения с учетом значения медианы:

для левого интервала $Q_2 — Q_1 = 34.83 - 29.0 = 5.83;$

для правого интервала $Q_3 — Q_2 = 41.0 - 34.83 = 6.17.$

С помощью данного приема можно легко определить право- и левостороннюю асимметрию любого распределения. Если $Q_3 - Q_2 > Q_2 - Q_1$ то имеет место правосторонняя асимметрия, если же $Q_3 - Q_2 < Q_2 - Q_1$, — левосторонняя. Только при равенстве вышеуказанных разностей можно говорить о строго симметричном распределении.

Если в психодиагностике испытуемых применяются методы исследования познавательной сферы и задачи в них расположены по степени увеличения сложности, то при правосторонней асимметрии можно говорить о достаточной простоте методики для выборки испытуемых, а при левосторонней — о ее сложности. В нашем случае мы имеем (5.83 < 6.17) левостороннюю асимметрию.

Подсчитав асимметрию и эксцесс, мы так же увидим, что наше распределение асимметрично.

Для расчета воспользуемся следующими формулами:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^3}{n\sigma^3} \qquad \text{Е} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4}{n\sigma^4} - 3$$

где - $f_i$ — значение абсолютной частоты, $\sum$ - сумма вышеприведенных значений по всем интервалам, $(x_i - \bar{x})$ - интервальные отклонения, $\sigma$ - среднеквадратичное отклонение, $n$ — число измерений.

Для расчета асимметрии добавляем в таблицу 11 и 12 столбцы. В 11 столбце рассчитано отклонение от средней $x_i$ возведенное в третью степень. В 12 столбце представлено произведение частоты на отклонение от средней в третьей степени $x_i^3 f_i$. Для формулы нам необходима сумма $x_i^3 f_i$. Подставляем все значения в формулу:

$$\text{А}=\frac{751{,}032}{30 * 609{,}8} = \frac{751{,}032}{18294} = 0{,}04$$

Если А>0, то имеет место левосторонняя асимметрия, если А<0, то асимметрия правосторонняя, если же А=0, то распределение симметрично [12].

В данном случае наблюдается левосторонняя асимметрия ( 0,04>0).

Для нахождения эксцесса рассчитываем отклонение от средней $x_{i,}$ возведенное в четвертую степень (13 столбец таблицы). А так же произведение частоты на отклонение от средней в четвертой степени $x_i^4 f_i$ (14 столбец таблицы). Подставив значения в формулу, получим:

$$\text{Е} = \frac{393584{,}99}{30 * 5171{,}1} - 3 = \frac{393584{,}99}{155133{,}16} - 3 = 2{,}5 - 3 = -0{,}5$$

Если Е>0, то имеет кривая распределения островершинное, если Е<0, то плосковершинное, если же Е=0, то распределение «средневершинное», нормальное [13].

В данном случае кривая распределения плосковершинное ($-0{,}5 < 0$). Наглядно это представлено на рисунке 6.

Расчет асимметрии и эксцесса позволяет оценить близость эмпирического распределения с нормальным. В данном примере мы можем наблюдать тенденцию к нормальному распределению.

## Вопросы и задания для самопроверки

1. Как будет называться распределение с тремя модами?
2. В каком случае мода может принимать дробные значения?
3. Каким символом обозначается объем выборки?
4. Каковы свойства нормального распределения?
5. Связаны ли величины размаха и объема выборки? Почему?
6. Чему равны мода, медиана и среднее арифметическое следующих массивов?
   - {8, 11, 12, 10, 11, 12, 15, 17 ,19}
   - {7, 8, 9, 11, 12, 13, 19}
   - {12, 21, 10, 15, 16, 19, 9, 10, 15, 14, 17}
7. Чему равны размах, дисперсия и стандартное отклонение (с точностью до одного нуля после запятой) следующих массивов данных?
   - {5, 4, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 9, 8, 9, 4, 5, 6}
   - {11, 12, 11, 15, 5, 6, 14, 7, 12, 13, 11, 11, 12}
8. В каком случае невозможно определить моду у выборки с известными данными?
9. Определить средний показатель роста студентов вашей группы и соответствующее стандартное отклонение. Какова должна быть высота дверного проема, чтобы быть уверенным, что сквозь него не нагибаясь, смогут пройти 95 % студентов группы?

## Глава 4

## Приемы планирования и стандартизации результатов эксперимента

В естествознании постановка задач и сложность методики обеспечивают снижение ошибки эксперимента до приемлемого уровня, когда его повторения идентичны. В психологии объектам исследования изначально присуща вариабельность, в результате которой воспроизводимость утрачивается. Поэтому становятся актуальными проблемы планирования исследования. Они важны также в связи с трудностями интерпретации невоспроизводимых результатов. Поэтому возникли специальные процедуры, обеспечивающие уменьшение негативных последствий внутренней вариабельности объектов исследования и позволяющие объективно оценить точность окончательных выводов — общие принципы планирования эксперимента. Они связаны с именем Р. А. Фишера и его теорией статистического вывода[4,15].

Предложенные принципы следующие:

1. Повторяемость (дублирование) — ни один экспериментатор не должен делать каких бы то ни было выводов на основании одного единственного случая.

2. Сбалансированность — количество разнонаправленных стимулов в эксперименте должно быть одинаковым.

3. Рандомизация — порядок представления стимулов в эксперименте должен подчиняться закону случайных чисел.

4. Чувствительность — число стимулов в эксперименте должно превышать некий минимум. После того как этот минимум пройден, чувствительность эксперимента растет тем больше, чем больше число повторений.

5. Однородность - стимулы должны быть однородны, иначе, их вариабельность может повлиять на результаты эксперимента.

В соответствии с принципами Р. А. Фишера в психологии проводится, например, пилотажное исследование.

Пилотажное исследование[2] — пробное исследование. Оно предшествует основному и предпринимается в целях проверки качества подготовки основного исследования. Основная его функция — уточнение задач и выдвинутых на основе теоретического исследования гипотез. В результате его формируются новые гипотезы.

Пилотажное исследование используется как форма проверки рациональности и обоснованности выбранной для исследования совокупности лиц, арсенала методик, отваживания процедуры сбора информации, взаимодействия между лицами, проводящими обследование.

Такое исследование — неотъемлемая часть комплексной процедуры разработки тестовой методики, установления адекватного набора тестовых задач, нормирования и стандартизации, проверки валидности. Большое значение пилотаж имеет для отработки анкет, опросных листов, бланков интервью, документации, фиксирующей результаты исследования.

Объем выборки при пилотажном исследовании зависит от его целей и задач. Достаточным считается объем 50 — 100 человек. Выборка должна соответствовать требованиям репрезентативности.

*Репрезентативность* — свойство выборочной совокупности представлять характеристики генеральной совокупности. Она означает, что с некоторой наперед заданной или определенной статистической погрешностью можно считать, что представленное в выборочной совокупности распределение изучаемых признаков соответствует их реальному распределению.

Для обеспечения репрезентативности выборки данных необходимо учесть ряд условий:

- каждая единица генеральной совокупности должна иметь равную вероятность попадания в выборку;

- выборка переменных производится независимо от изучаемого признака;

- отбор производится из однородных совокупностей;

- число единиц в выборке должно быть достаточно большим;

- выборка и генеральная совокупность должны быть, по возможности, статистически однородны, показатели вариации при увеличении числа наблюдений сближаются между собой.

Статистическое определение репрезентативности необходимо для установления норм в эксперименте, обоснованности объема выборки.

*Объем выборки* — число элементов, включенных в выборочную совокупность; определяется задачами исследования, степенью однородности генеральной совокупности, величиной вероятности, при которой гарантируется достоверность результатов исследования, требуемой точностью результатов (величиной допускаемой ошибки). При определении объема выборки учитывается и совокупность технических приемов, применяемых для ее анализа.

При планировании эксперимента необходимо уделить внимание и *стандартизации* — регламентации и приведению к единым нормативам процедуры и оценок теста. Благодаря ей мы достигаем сопоставимости полученных результатов у разных испытуемых, возможности выражения тестовых оценок в относительных, стандартных показателях, сопоставимости данных разных тестовых методик.

Существует две формы стандартизации:

а) регламентация процедуры теста;

б) преобразование шкалы оценок теста в новую шкалу, основанную на относительном распределении результатов в выборке испытуемых.

Наиболее распространенными преобразованиями тестовых оценок являются их центрирование и нормирование посредством среднеквадратических отклонений. Центрирование — линейная трансформация величин признака, при которой средняя величина распределения становится равной 0. По обе стороны от нее симметрично распределяются остальные значения. Нормирование — переход к другому масштабу измерений (более подробно см. Практикум 3).

Аналогично требованиям к эксперименту стандартизируется и любая психодиагностическая методика[1, 2]. Все они предназначены для обследования некоторой достаточно большой категории индивидуумов. Например, методика исследования интеллекта Векслера подразумевает возможность обследования всего взрослого населения страны, методика ШТУР (Школьный тест успешности развития) - всех учащихся с 5-го по 8-й классы в городе, области, стране и т.д. Именно это множество потенциальных испытуемых и называется, как мы уже упоминали, *генеральной совокупностью*. Чтобы можно было судить о степени выраженности того или иного психологического качества у отдельного человека, необходимо знать, как распределено это качество в генеральной совокупности. Обследовать всю генеральную совокупность с помощью какой-либо методики практически невозможно, так как число испытуемых измеряется здесь сотнями тысяч и миллионами. Для того чтобы сделать достоверные предположения о распределении, прибегают к извлечению из генеральной совокупности некоторой небольшой ее части (*выборки)*.

Основное требование, предъявляемое к выборке теста, заключается в том, что она должна, как и в ранее нами упоминавшейся экспериментальной выборке, отвечать свойству репрезентативности (представительности), то есть в ней должны отражаться все свойства генеральной совокупности. Обеспечить абсолютно точное выполнение данного требования невозможно, можно лишь приблизиться к идеалу с помощью нескольких способов.

Основными являются два из них (по теории Р.А. Фишера): *случайная выборка* и *моделирование выборки по свойствам генеральной совокупности*.

*Случайная выборка* предполагает, что испытуемые попадают в нее случайным образом и предпринимаются меры, чтобы исключить появление каких-либо закономерностей при отборе. Для этого используются способы жеребьевки, отбор по таблицам случайных чисел, устанавливается правило отбора - каждый третий, каждый десятый из списка.

*Моделирование выборки* осуществляется в следующей последовательности: сначала выбираются те свойства, которые могут повлиять на результат тестирования (как правило, это демографические показатели пола, возраста и др.), и внутри каждого свойства выделяются градации (интервалы возрастов, уровни образования и т.п.), на их основании строится матричная модель генеральной совокупности, в каждой клетке матрицы записывается количество людей в генеральной совокупности, обладающих соответствующими свойствами, это можно сделать по данным переписи населения, другим статистическим данным. Выборка извлекается пропорционально по отношению к каждой клетке матрицы. Например, если в генеральной совокупности относительный процент мужчин в возрасте от 18 до 30 лет со средним образованием составляет 20 %, то и в выборке людей с такими же свойствами должно быть 20 %. Более простым вариантом моделирования является стратифицированная выборка, когда для модели берется только одно свойство с соответствующими градациями. Если известно, что соотношение мужчин и женщин в некотором городе составляет 40 % и 60 % соответственно, то и в выборке должно соблюдаться это соотношение.

Существенным при организации выборки по тесту является вопрос о необходимом и достаточном числе испытуемых. Малое количество испытуемых не обеспечит точности результата, большое количество приведет к увеличению времени и стоимости исследования. Очень часто здесь руководствуются эмпирическими соображениями. При проведении ряда исследований (опросов) выясняют, каково то минимальное число испытуемых (респондентов), которое с приемлемой степенью точности позволяет предсказывать наступление некоторых событий и обеспечивает стабильность распределения для сходных по качественному составу выборок. Отечественные исследователи стандартизируют методики в основном на выборках от 200 до 800 человек.

*Стандартизацией теста* [1, 2] называется процедура получения шкалы, позволяющей сравнивать индивидуальный результат по тесту с результатами испытуемых по выборке стандартизации. Итогом этой процедуры являются так называемые тестовые нормы или таблицы пересчета "сырых", первичных оценок по тесту в стандартные. Ранее указывалось, что большинство опросников в своей основе имеет измерительную шкалу интервалов, где отсутствует объективный нуль, точка отсчета, по отношению к которой можно определять степень выраженности психологического свойства. Поэтому в качестве такой точки отсчета берется средний результат по большой выборке испытуемых. Обычная последовательность стандартизации психодиагностической методики состоит в следующем: определяется генеральная совокупность, для которой предназначена методика, из нее извлекается выборка, по результатам исследования выборки строится эмпирическое распределение, которое подвергается анализу на соответствие его нормальному виду. Если распределение оказывается нормальным (это проверяется с помощью статистических критериев), то можно сразу проводить *линейную стандартизацию* на основе характеристик эмпирического распределения. Если распределение отличается от нормального, то проводится *нелинейная стандартизация* (она также называется *процентилъной нормализацией)*.

Общий принцип построения стандартных шкал заключается в разбиении выборки на группы, про которые известно, какой процент испытуемых выборки они включают. Установление границ групп дает возможность относить индивидуальный результат в некоторую группу и точно устанавливать, сколько процентов испытуемых имеют меньшую и большую степень выраженности психологического свойства по отношению к той группе, в которую попадает индивидуальный результат.

Наиболее распространенными типами стандартных шкал являются:

1) *шкала z-оценок* и производные от нее шкалы;

2) *квантилъные шкапы* (они менее распространены);

3) шкалы *стенов, стенайнов,* пяти- и семибалльные шкалы.

## §3 Практикум 3. Некоторые приемы стандартизации результатов исследования

При конструировании диагностических методов обычно используются стандартные шкалы измерения, но часто психологи получают первичное, грубое распределение данных. Для получения стандартных шкал необходимо преобразование первичного распределения «сырых» баллов в нормальное распределение.

Эта процедура называется нормированием. При нормировании предварительные оценки преобразуются в «процентную ранговую шкалу», а затем, по стандартным таблицам, в любые другие шкалы.

Содержание и последовательность действий при нормировании грубо распределенных первичных данных следующая [3]:

1. Определение теоретически возможного распределения.

2. Определение эмпирического распределения предварительных оценок.

3. Расчет кумулятивных (накопленных) частот первичного распределения $f_{cum}$.

4. Вычисление для каждого значения $f_{cum} - \frac{f}{2}$.

5. Процентная ранговая шкала составляется путем вычислений ранговых значений для каждого результата по формуле:

$$PR = \frac{f_{cum} - \frac{f}{2}}{n} \cdot 100$$

6. Процентная ранговая шкала преобразуется в нужную исследователю стандартную шкалу.

*Задача 4.* В школе проводилось исследование интеллекта первоклассников. По полученным результатам необходимо охарактеризовать примененные методики, перевести результаты в стандартную PR шкалу.

Результаты по методике 1. Всего применялось в исследовании 12 задач, исследовалось 23 школьника. Полученные данные: 10, 8, 11, 8, 7, 10, 6, 7, 7, 5, 10, 8, 10, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 8, 5, 6,7.

Результаты по методике 2.

Всего применялось в исследовании 10 задач, исследовано 23 школьника. Полученные данные: 7, 6, 5, 6, 5, 5, 6, 6, 6, 5, 5, 5,5,4,8,8,7,4,5,6,5,5,6.

Для удобства работы данные сгруппируем в таблицу (таблица 14).

В первой графе таблицы представляем теоретическое распределение результатов эксперимента по методике 1. Во второй графе — эмпирическое распределение данных, полученных в эксперименте — насколько часто встречается решение той или иной задачи. Третья графа дает численное выражение этой величины — частоту.

На этом этапе обработки полезно построить полигон первичного распределения результатов и визуально охарактеризовать ее (рисунок 7).

Таблица 14-Группировка данных эксперимента по методике 1

| $n$ | Первичное распределение | $f_i$ | $f_{cum}$ | $f_{cum}-\frac{f}{2}$ | $PR$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 12 | | 0 | 23 | 23 | 100 |
| 11 | / | 1 | 23 | 22.5 | 98 |
| 10 | ///// | 5 | 22 | 19.5 | 85 |
| 9 | | 0 | 17 | 17 | 74 |
| 8 | ///// | 5 | 17 | 14.5 | 63 |
| 7 | ///// | 5 | 12 | 9.5 | 41 |
| 6 | /// | 3 | 7 | 5.5 | 24 |
| 5 | /// | 3 | 4 | 2.5 | 11 |
| 4 | / | 1 | 1 | 0.5 | 2 |
| 3 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |

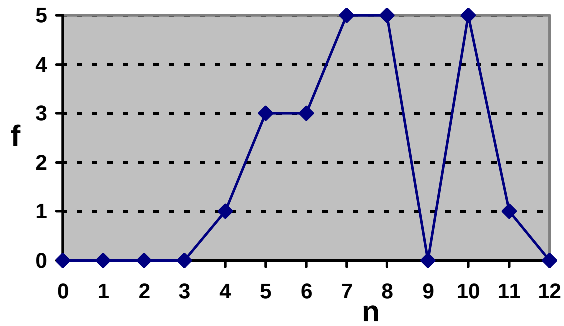



Рисунок 7-Полигон первичного распределения результатов по методике 1

Как видно из рисунка 7, полигон распределения бимодальный, следовательно, необходимо провести анализ уровня сложности задач методики. Визуально заметно некоторое смещение (асимметрия), которое говорит о простоте методики для нашей группы испытуемых. Возможно, в последующих исследованиях потребуется увеличить количество задач, но возможно, такое распределение объясняется малым объемом выборки.

Следующий этап стандартизации представлен в четвертой графе таблицы 6 — расчет кумулятивных частот распределения (для этого последовательно, снизу вверх, суммируем значения абсолютных частот).

В пятой графе, в соответствии с формулой расчета процентной ранговой шкалы, для каждой строки находим $f_{cum} - \frac{f}{2}$, а в шестой — рассчитываем *PR.*

Аналогичная процедура проводится для методики 2 (таблица 15). В первой графе представлено теоретическое распределение результатов, во второй и третьей — эмпирическое распределение, а затем данные для расчета *PR*.

Таблица 15-Группировка данных эксперимента по методике 2

| *n* | Первичное распределение | $f_i$ | $f_{cum}$ | $f_{cum} - \frac{f}{2}$ | *PR* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | *4* | 5 | *6* |
| 10 | | 0 | 23 | 23 | 100 |
| 9 | | 0 | 23 | 23 | 100 |
| 8 | // | 2 | 23 | 22 | 96 |
| 7 | // | 2 | 21 | 20 | 87 |
| 6 | /////// | 7 | 19 | 15.5 | 67 |
| 5 | ////////// | 10 | 12 | 7 | 30 |
| 4 | // | 2 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |

Оценим характер распределения результатов эксперимента (рисунок 8).

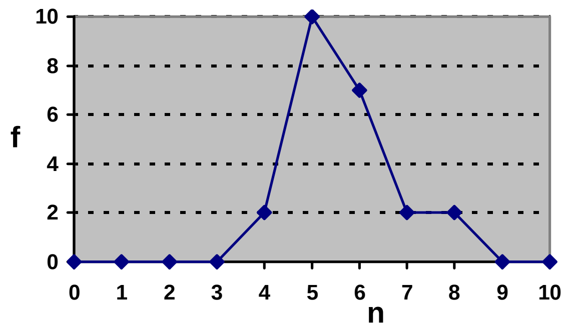



Рисунок 8-Полигон первичных результатов исследования по второй методике

Полученный полигон близок к нормальному, но имеет достаточно высокий экстремум (высшую точку), что говорит высокодифференцирующем характере методики, и некоторое смещение вправо, что, возможно, связано с легкостью методики для нашей выборки испытуемых. Возможной причиной является и малая выборка.

После расчета шкалы PR – процентилей, необходима оценка близости эмпирического распределения и нормального с помощью расчета А и Е (асимметрии и эксцесса) по формулам (схему расчета см. Практикум 2)[18]:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n\sigma^3};$$

$$m_a = \sqrt{\frac{6}{n}};$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{n\sigma^4} - 3;$$

$$m_e = 2\sqrt{\frac{6}{n}};$$

где $(x_i - \bar{x})$ - интервальные отклонения,

$\sigma$ - среднеквадратичное отклонение,

n – количество испытуемых – объем выборки.

Напомним, что показатели асимметрии и эксцесса свидетельствуют о достоверном отличии эмпирических распределений от нормального в том случае, если они превышают по абсолютной величине свою ошибку репрезентативности в три и более раз:

$$t_A = \frac{|A|}{m_A} \geq 3;$$

$$t_E = \frac{|E|}{m_E} \geq 3.$$

При условии нормального или близкого к нормальному распределения первичных результатов возможен переход от одной шкалы к другой с помощью арифметических преобразований [16]. Для этого необходимо рассчитать характеристики положения и рассеивания ($\overline{X}$; $\sigma$) используя первичные результаты испытуемых (см. Практикум 2).

Единицей измерения при переходе от шкалы к шкале является среднее квадратичное отклонение $\sigma$. Применяется в этом случае следующая формула:

$$z = \frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$$

где z — стандартная величина,

$X_i$ — первичный результат тестового измерения,

$\overline{X}$ — средняя арифметическая величина результатов выборки,

$\sigma$ — среднее квадратическое отклонение.

Следующий шаг — преобразование z-шкалы в ряд наиболее часто используемых в психологии нормализованных шкал:

1. Шкала интеллекта Амтхауэра $Z = 100 + 10 \cdot z$

*2*. Шкала Векслера $IQ = 100 + 15 \cdot z$

3. Шкала стенайнов Гилфорда $St = 5 + 2 \cdot z$

4. Шкала школьных оценок Линнерта $SN = 3 + 2 \cdot z$

5. Шкала стенов Кеттелла $C = 5.5 + 2z$

*6.* Т-шкала для опросника Мак-Колла $T = 50 + 10 \cdot z$

Необходимо заметить, что 1 — 5 шкалы предназначены для первичных данных, распределение которых близко к нормальному, а шкала 6 может быть использована для любых видов распределения при условии, что Z-трансформация осуществляется после перевода первичных результатов в шкалу PR, а из нее — в стандартную шкалу z, из которой осуществляется переход к Т-шкале.

**Вопросы и задания для самопроверки:**

1. Пилотажное и основное исследования: особенности, суть и значение.
2. Раскройте смысл понятия и процесса стандартизации.
3. Дайте определение выборки, генеральной выборки, случайной выборки.
4. В чем значение репрезентативности?
5. Раскройте суть моделирования выборки.

## Глава 5

## Гипотезы эксперимента и классификация исследовательских задач

Планирование психологического исследования – это последовательный, поэтапный процесс. Важность прохождения каждого этапа очевидна: хорошо спланированный эксперимент – залог получения достоверных, валидных результатов [1,6,7]:

**1. Изучение состояния проблемы, выбор объекта и предмета исследования.**

При этом целесообразно определить основные понятия, относящиеся к выбранной теме, проанализировать различные взгляды на них, составить библиографию. Собранные материалы компонуются либо хронологически, либо логически, причем второе предпочтительнее. Описывается область проявлений и место выбранного явления в системе других психических явлений, его сущность, природа и закономерности, которым оно подчиняется. Важным моментом в постановке проблемы является осознание потребности в устранении обнаруженного дефицита знаний по теме. Проблема формулируется в научных терминах, определяется объект и предмет исследования.

*Объект* - это то, на что будет направлено исследование, он более общий по отношению к предмету. Объект может быть моделируемым (например, операции анализа и синтеза в мышлении) или реальным (индивид или группа людей), в настоящее время принято определять моделируемый объект.

*Предмет* всегда формулируется в контексте экспериментального исследования и является частным по отношению к его объекту. Им могут быть временные и интенсивностные характеристики психических явлений в конкретных условиях, взаимовлияния и взаимосвязи между ними и пр.

**2. Разработка и уточнение общей исходной исследовательской концепции, построение модели исследуемого явления, выдвижение гипотез.**

Именно в исследовательской концепции психолог-экспериментатор определяет свои предпочтения, выделяет примерные показатели, структурирует их в систему.

Важнейший момент этого этапа - выдвижение гипотезы - научного предположения, выдвигаемого для объяснения какого-либо явления и требующего проверки на опыте и теоретического обоснования для того, чтобы стать достоверной научной теорией. Гипотеза экспериментального исследования должна быть как можно более конкретной (обычно она формулируется по форме: Если ..., то ..., при условии ...).

**3. Планирование исследования, определение целей и задач, выбор методов и методик.**

Психолог конструирует конкретный план эксперимента и согласует его с заказчиком.

Цель исследования - желаемый результат, он может быть теоретическим или прикладным. Он определяет задачи исследования, т.е. выбор путей и средств достижения целей. Задачи разбивают цель на части, выделяют "подцели".

Обязательна на этом этапе оценка теоретической и прикладной актуальности прогнозируемого результата, которая затем поможет оценить ценность и значимость.

Затем составляется перечень интересующих исследователя и важных переменных, которые разделяются на зависимые или независимые, контролируемые и неконтролируемые, измеряемые и неизмеряемые. Принимается решение о способах общей обработки полученных данных: будем ли мы сопоставлять возрастные или социальные группы, экспериментальные и контрольные и пр.

Затем определяется выборка испытуемых по объему (количество испытуемых), полу и возрасту.

И, наконец, психолог осуществляет выбор конкретных методов и методик исследования. Важно помнить, что методики должны характеризовать выделенные психологические переменные качественно и количественно, в сопоставлении актуального статуса и общих тенденций изменения и развития. По возможности необходимо сочетание данных самонаблюдения, субъективных и объективных оценок и представленность каждой из трех сфер психики: когнитивной, эмоциональной, поведенческой.

**4. Сбор эмпирических данных и их описание.**

Вначале работы необходима отладка экспериментальной процедуры, прежде всего мотивирование испытуемых. Общеизвестно, что наименьшее число искажений возникает, если испытуемый имеет личный интерес к результату исследования, но не ожидает получить нечто, определяющее его дальнейшую жизнь. Полезно мотивировать на расширение знаний о себе, обязательно рассказать и обсудить полученные результаты, поинтересоваться состоянием испытуемого. Если экспериментальное исследование проходит в ситуации экспертизы, нужно согласовать план с администрацией учреждения.

Обследование желательно проводить в изолированном и достаточно просторном помещении, для каждого испытуемого предоставить комплект протоколов, письменные принадлежности. Все это служит дополнительным стимулом к обследованию. Оптимальное время тестирования - с утра, 3-4, максимум - 6 часов.

После окончания работы обязательно обсудить с испытуемым его самочувствие, возникшие мысли, предположения, дать возможность освободиться от отрицательных эмоций, поблагодарить, попрощаться и назначить встречу для обсуждения результатов эксперимента.

Здесь уместно вспомнить об этических принципах - ориентирах поведения в деятельности психолога [8]. Главная функция, которых обеспечение безопасного, доверительного взаимодействия психолога и клиента. Любую деятельность, будь то просвещение, развитие, консультирование, диагностика или коррекция психолог - профессионал выполняет с обязательным учетом этики. При выполнении исследовательской деятельность и математической обработки так же необходимо соблюдать этические принципы[8].

Мы раскроем суть, на наш взгляд, самых важных принципов относительно проведения исследования.

1. *Ненанесение ущерба испытуемому (клиенту)*. Суть данного принципа заключается в том, что психолог так должен организовать работу, что бы ни ее процесс, ни ее результат не нанесли испытуемому вред его здоровью, состоянию или социальному положению.

Реализация данного принципа обеспечивается выполнением следующих правил:

- При планировании и проведении опыта исследователь несет ответственность за составление точной оценки его (опыта) этической приемлемости.
- Этически приемлемое исследование начинается с установления четкого и справедливого соглашения между исследователем и участником эксперимента, разъясняющего ответственность сторон. Психолог должен разъяснить цели, методы исследования, способы использования полученной информации, на что испытуемый дает или не дает свое согласие. Если в процессе исследования существует риск для физического и душевного комфорта испытуемого, то исследователь должен его предупредить об этом и получит согласие на работу. Невозможность ознакомления с полной картиной эксперимента дополнительно усиливает ответственность

исследователя за благополучие и достоинство испытуемых. Данное правило основывается на взаимоуважении между психологом и испытуемым.

- Честность и открытость – важные черты отношений между исследователем и испытуемым. Если утаивание и обман необходимы для исследования, то психолог должен объяснить испытуемому причины таких действий для восстановления их взаимоотношений.

- Испытуемый вправе прервать исследование в любое время, что психологом должно восприниматься с уважением.

2. *Принцип беспристрастности* не допускает предвзятого, субъективного отношения психолога к испытуемому.

Использование методики должно совпадать с целями исследования и учитывать психофизиологические особенности испытуемого. Обработка результатов всех испытуемых проводится с помощью стандартных статистических методов.

3. *Принцип конфиденциальности* является одним из самых важных принципов. Суть данного принципы заключается в том, что любая информация, полученная в ходе исследования не должна разглашаться. Если информация может быть предоставлена третьему лицу, то испытуемый должен быть об этом осведомлен и дать свое согласие. В любом другом случае информацию можно использовать, не указывая конкретной личности испытуемого.

4. *Принцип осведомленного согласия* проходит красной нитью через все предыдущие принципы. Его суть заключается в том, что исследователь обязан информировать участников исследования обо всех этапах работы, о целях, методах и т.д. Испытуемый принимает только добровольное участие в исследовании.

Следование принципам, на наш взгляд, ведет к успешному выполнению своей деятельности, получению удовлетворению от сделанной работы.

**5. Обработка данных.**

В большинстве случаев обработку начинают с составления сводных таблиц полученных данных, в них вносятся числовые данные и данные качественного характера для каждого испытуемого.

В первых столбцах таблицы размещаются демографические характеристики (пол, возраст, социальное положение и др.). Испытуемые упорядочиваются по какому-либо признаку, в соответствии с целью исследования, либо по алфавиту.

После создания таблицы необходимо проверить качество полученных данных - выявить ошибки в написании чисел, "выскакивающие" (сильно отличающиеся от других) значения и принять решение об их выбраковке. В целях анализа критериев качества примененных методов и определения способов дальнейшего анализа полученных результатов рассчитываются первичные статистики: меры центральной тенденции и меры изменчивости исследуемых переменных, определяется форма кривой распределения полученных результатов.

**6. Оценивание результатов и проверка гипотез, интерпретация результатов в рамках исходной исследовательской концепции.**

На этом этапе проводятся более сложные виды математико-статистического анализа в соответствии с выдвинутой гипотезой - оценивается достоверность различий в группах испытуемых, строятся обобщающие факторы и пр.

Исходя из полученных результатов, возможна коррекция выдвинутых ранее целей и задач, исследовательской модели изучаемого явления.

**7. Соотнесение результатов с существующими концепциями и теориями. Формулирование общих выводов. Оценивание перспектив дальнейшей разработки проблемы.**

При этом исследователю полезно помнить, что отрицательный результат также является результатом и из него следует вывод.

На протяжении эксперимента *гипотезы* – переломный пункт, в котором теория встречается с практикой, гипотеза — это научное предположение, вытекающее из теории, которое еще не подтверждено и не опровергнуто.

В методологии науки различают теоретические гипотезы и гипотезы как эмпирические предположения, которые подлежат экспериментальной проверке. Первые входят в структуры теорий в качестве основных частей. *Теоретические гипотезы* выдвигаются для устранения внутренних противоречий в теории либо для преодоления рассогласований теории и экспериментальных результатов и являются инструментом совершенствования теоретического знания. Научная гипотеза должна удовлетворять принципам фальсифицируемости (быть опровергаемой в эксперименте) и верифицируемости (быть подтверждаемой в эксперименте). Принцип фальсифицируемости абсолютен, так как опровержение теории всегда окончательно. Принцип верифицируемости относителен, так как всегда есть вероятность опровержения гипотезы в следующем исследовании.

Итак, первый тип гипотез[6] – теоретические, второй тип гипотез — предположения, выдвигаемые для решения проблемы методом экспериментального исследования. Такие предположения называются *экспериментальными гипотезами*, которые не обязательно должны основываться на теории. Точнее, можно выделить, по крайней мере, три типа гипотез по их происхождению. Гипотезы первого типа основываются на теории или модели реальности и представляют собой прогнозы, следствия этих теорий или моделей (так называемые теоретически обоснованные гипотезы). Они служат для проверки следствий конкретной теории или модели. Второй тип — научные экспериментальные гипотезы, также выдвигаемые для подтверждения или опровержения тех или иных теорий, законов, ранее обнаруженных закономерностей или причинных связей между явлениями, но не основанные на уже существующих теориях, а сформулированные по принципу "все подходит". Их оправдание — в интуиции исследователя: "А почему бы не так?". Третий тип —эмпирические гипотезы, которые выдвигаются безотносительно к какой-либо теории, модели, а формулируются для данного случая. После экспериментальной проверки такая гипотеза превращается в факт, опять же — для данного случая.

Вместе с тем основная особенность любых экспериментальных гипотез заключается в том, что они операционализируемы. Проще говоря, они сформулированы в терминах конкретной экспериментальной процедуры. Всегда можно провести эксперимент по их непосредственной проверке. По содержанию гипотезы можно разделить на гипотезы о наличии: А) явления; Б) связи между явлениями; В) причинной связи между явлениями.

Проверка гипотез типа А — попытка установить истину: "А был ли мальчик? Может, мальчика-то и не было?". Существуют или не существуют феномены экстрасенсорного восприятия, есть ли феномен "сдвига к риску" при групповом принятии решения, сколько символов удерживает человек одновременно в кратковременной памяти? Все это гипотезы о фактах. Гипотезы типа Б — о связях между явлениями. К таким предположениям относится, например, гипотеза о зависимости между интеллектом детей и их родителей или же гипотеза о том, что экстраверты склонны к риску, а интроверты более осторожны. Эти гипотезы проверяются в ходе измерительного исследования, которое чаще называют корреляционным исследованием. Их результатом является установление линейной или нелинейной связи между процессами или обнаружение отсутствия таковой. Собственно экспериментальными гипотезами обычно считают лишь гипотезы типа В — о причинно-следственных связях. В экспериментальную гипотезу включаются независимая переменная, зависимая переменная, отношение между ними и уровни дополнительных переменных.

Готтсданкер Р. [4] выделяет следующие варианты экспериментальных гипотез:

— контргипотеза — экспериментальная гипотеза, альтернативная к основному предположению; возникает автоматически;

— третья конкурирующая экспериментальная гипотеза — экспериментальная гипотеза об отсутствии влияния независимой переменной на зависимую;

— точная экспериментальная гипотеза — предположение об отношении между единичной независимой переменной и зависимой в лабораторном эксперименте; проверка требует выделения независимой переменной и "очищения" ее условий;

— экспериментальная гипотеза о максимальной (или минимальной) величине — предположение о том, при каком уровне независимой переменной зависимая принимает максимальное (или минимальное) значение. "Негативный" процесс, основанный на представлении о двух базисных процессах, оказывающих противоположное действие на зависимую переменную — при достижении определенного (высокого) уровня независимой переменной, становится сильнее "позитивного"; проверяется только в многоуровневом эксперименте;

—экспериментальная гипотеза об абсолютных и пропорциональных отношениях — точное предположение о характере постепенного (количественного) изменения зависимой переменной с постепенным (количественным) изменением независимой; проверяется в многоуровневом эксперименте;

— экспериментальная гипотеза с одним отношением — предположение об отношении между одной независимой и одной зависимой переменными. Для проверки экспериментальной гипотезы с одним отношением может быть использован и факторный эксперимент, но вторая независимая переменная является при этом контрольной;

— комбинированная экспериментальная гипотеза — предположение об отношении между определенным сочетанием (комбинацией) двух (или нескольких) независимых переменных, с одной стороны, и зависимой переменной — с другой; проверяется только в факторном эксперименте.

Различаются в экспериментальном исследовании научные и статистические гипотезы [6]. Научные гипотезы формулируются как предполагаемое решение проблемы. *Статистическая гипотеза* — утверждение в отношении неизвестного параметра, сформулированное на языке математической статистики. Любая научная гипотеза требует перевода на язык статистики. Для доказательства любой из закономерностей причинных связей или любого явления можно привести множество объяснений.

После проведения конкретного эксперимента проверяются многочисленные статистические гипотезы, поскольку в каждом психологическом исследовании регистрируется не один, а множество поведенческих параметров. Каждый параметр характеризуется несколькими статистическими мерами: центральной тенденции, изменчивости, распределения. Кроме того, можно вычислить меры связи параметров и оценить значимость этих связей.

Итак, экспериментальная гипотеза служит для организации эксперимента, а статистическая — для организации процедуры сравнения регистрируемых параметров. То есть статистическая гипотеза необходима на этапе математической интерпретации данных эмпирических исследований. Естественно, большое количество статистических гипотез необходимо для подтверждения или, точнее, опровержения основной — экспериментальной гипотезы. Экспериментальная гипотеза — первична, статистическая — вторична.

Гипотезы, не опровергнутые в эксперименте, превращаются в компоненты теоретического знания о реальности: факты, закономерности, законы.

*Статистической гипотезой* [9] называется предположение, имеющее вероятностный характер, обладающее неопределенностью в отношении своей истинности. В статистике гипотезы формулируются по поводу числовых характеристик распределений, частот событий, положения событий по отношению друг к другу в ранжированном ряде, и т.п.

Формализация гипотез с математической точки зрения приводит к описаниям гипотез двух видов: $H_0$ — *нулевая гипотеза*, $H_1$ — *альтернативная гипотеза*. В самом общем виде нулевая гипотеза ($H_0$) формулируется как гипотеза об отсутствии отличий в выборках, в условиях экспериментов, о равенстве меры связи нулю, о сходстве двух распределений и т.п. Альтернативная гипотеза ($H_1$) противоположна нулевой по смыслу и означает различие в выборках и условиях экспериментов, отличие меры связи от нуля, различие двух распределений и т.п. Две гипотезы образуют полную группу несовместных событий: если принимается одна, то другая отклоняется.

Гипотезы также могут быть *направленными* и *ненаправленными*, Направленная гипотеза формулируется, когда исследователь предполагает наличие или отсутствие различий в определенном направлении: экспериментальная группа превышает ($H_1$) или не превышает (Но) контрольную по некоторому показателю. Ненаправленная гипотеза фиксирует только наличие-отсутствие различий, без указания их направления: экспериментальная группа отличается от контрольной ($H_1$) или не отличается (*Но*).

Гипотезы проверяются с помощью *статистических критериев*.

Статистический критерий — это правило, которое позволяет принимать истинную и отклонять ложную гипотезу с высокой вероятностью.

Математически критерий представляет собой формулу, по которой получается некоторое число. Критерий является также случайной величиной, распределение которой зависит от числа степеней свободы, формула определяет вид распределения. Выделяют *параметрические* и *непараметрические критерии*. Первые оперируют параметрами распределений ($\overline{X}$; $\sigma$), вторые — частотами, рангами и вероятностями. В статистике разработано большое число разнообразных по назначению критериев, мы рассмотрим лишь наиболее распространенные.

Применение аппарата проверки статистических гипотез в психологии требует, чтобы первоначальная психологическая гипотеза исследования была переведена на статистический язык. Одна и та же содержательная гипотеза может быть формализована в разные статистические гипотезы, это зависит от критерия, который предполагается использовать.

В статистике за основной принимается вариант рассмотрения истинности нулевой гипотезы и ложности альтернативной. Поскольку исследование всегда проводится на выборке, а судить нужно об истинности гипотез в отношении генеральных совокупностей, то окончательного решения об истинности и ложности нулевой и альтернативной гипотезы принято быть не может, можно лишь указывать вероятность ошибки такого предположения.

При проведении исследования на выборках утверждения о гипотезах можно определить следующим образом:

1) ошибка 1-го рода ($\alpha$) — отклонение по результатам выборочного исследования истинной нулевой гипотезы, $\alpha$— вероятность ошибки; принятие истинной гипотезы характеризуется вероятностью $1 – \alpha$;

2) ошибка 2-го рода ($\beta$) — принятие по результатам выборочного исследования ложной нулевой гипотезы, $\beta$ — вероятность ошибки; отклонение ложной гипотезы характеризуется вероятностью $1 — \beta$.

Вероятность $\alpha$ называется *уровнем значимости,* (1 - α) — *доверительной вероятностью,* вероятность (1 - $\beta$) — *мощностью критерия* и характеризует способность критерия отклонять ложную гипотезу.

Два вида ошибок связаны между собой. Если мы отклонили истинную гипотезу, значит, приняли ложную, и наоборот.

Математическая статистика позволяет точно указывать только вероятность ошибки первого рода (в случае рассмотрения истинности нулевой гипотезы); вероятность ошибки второго рода чаще всего остается неизвестной для исследователя и только в некоторых случаях может быть оценена примерно.

*Общая схема проверки гипотез по критерию.*

Для большинства критериев порядок проверки состоит в следующем:

1. Подготовка данных (определение частот встречаемости признака, сведение результатов измерений в таблицы, определение числовых характеристик распределения и т.п.); определение зависимости или независимости выборок, что влияет на выбор критерия или его формулу (независимыми будут выборки, в которых одни и те же признаки измерены на разных испытуемых, между собой никак не связанных, а зависимыми — выборки, образованные парными результатами (с одними испытуемыми, но в различных условиях между собой сравниваются условия измерений, например "до" и "после"; с разными испытуемыми, связанными определенными отношениями — брат и сестра, муж и жена)).

2. Расчет эмпирического значения критерия по формулам.

3. Определение числа степеней свободы для используемого критерия.

4. Определение по таблице критического значения критерия и сравнение с ним эмпирического значения. Таблицы критических значений (они также называются таблицами квантилей соответствующего распределения) приведены в приложении.

В настоящее время в психологии сложилась практика использования критических значений критериев в основном для четырех уровней ошибки *α:* 0,10; 0,05; 0,01 и 0,001 (что соответствует доверительным вероятностям 0,90: 0,95; 0,99 и 0,999), причем чаще ориентируются на критическое значение для α=0,05, считая его в своем роде пограничным для принятия-отклонения гипотезы.

**Вопросы и задания для самопроверки**

1. Раскройте содержание и суть каждого этапа исследования.
2. Типы гипотез: определение, особенности формулирования на этапах построения исследования.
3. Допустим, требуется сравнить уровень интеллекта мужчин и женщин. Как будут выглядеть нулевая и альтернативная гипотезы данного исследования?
4. Сформулируйте $H_0$ и $H_1$, если вы изучаете:
   *Изменение состояния студентов при экзаменационном стрессе.*
5. Привести собственные примеры зависимой и независимой выборок.
6. Являются ли выборки зависимыми или независимыми:
   *а) Сравнивают проявления креативности до и после тренинга.*
   *б) Сравнивают успеваемость учеников 1-А и 1-Б классов.*
   *в) Сравнивают семейные ценности у мужчин и женщин в супружеских парах.*

7. Являются ли следующие экспериментальные гипотезы направленными или ненаправленными:

*а) После освоения мнемотехник объем памяти увеличивается.*

*б) После проведения релаксации уровень тревожности участников тренинга значительно уменьшился.*

*в) Скорость решения задач у испытуемых первой и второй группы была различной.*

## Глава 6

## Исследовательские задач и статистические критерии

На основании гипотезы и принятой логики эксперимента можно построить классификацию исследовательских задач, которая задает методы их решения – параметрические и непараметрические[14].

**1. Выявление различий в уровне исследуемого признака.** Задача возникает при выдвижении гипотез типа: «В первой выборке уровень выраженности признака больше, чем во второй». Чаще всего встречаются такие гипотезы при исследовании выборок, однородных по какому-либо параметру. Участвуют в исследовании представительные выборки испытуемых, по результатам их дифференцируют по какому-либо параметру, а потом рассматривают различия по другим переменным. Часто критерием для разделения выборок является значение средней арифметической величины ± ½ среднего квадратичного отклонения($\overline{X} \pm \frac{1}{2}\sigma$) или ¼ среднего квадратичного отклонения($\overline{X} \pm \frac{1}{4}\sigma$) в зависимости от особенностей распределения исследованной выборки. Часто полезна дифференциация выборок не на две, а на три и более групп, тогда вариация признака описывается достаточно полно. Каждой выделенной группе дается название в контексте исследования, описываются ее основные характеристики. В процессе обработки проверяются гипотезы о различиях выделенных групп по выбранным признакам. Группы при этом сравниваются попарно либо все вместе, в зависимости от выбранного критерия. Для исследовательской задачи по характеристики уровневых различий важно, чтобы группы отличались по максимальным и минимальным значениям признака (например, для первой группы размах 23-34, для второй – 26-39), иначе критерии не сработают.

Решение такой задачи связано с расчетом параметрических (Т – критерия Стьюдента) и непараметрических (Q - критерия Розенбаума и U – критерия Манна-Уитни) критериев.

**2. Оценка сдвига значений исследуемого признака.** Под понятием «*сдвиг*» в психологических исследованиях понимают то, что в результате действия каких-либо факторов произошли достоверные изменения в измеряемых показателях. Сопоставление показателей, полученных у одних и тех же испытуемых по одним и тем же методикам, но в разное время дает нам *временной сдвиг*, более известный психологам как лонгитюд.

Сопоставляя показатели, полученные у одних и тех же испытуемых в разных условиях, мы получаем *ситуационный сдвиг* (например, значение тревожности до и после экзамена).

*Умозрительный сдвиг* характеризует изменения показателей в обычных и воображаемых условиях (например, Я-идеальное и Я-реальное).

Психологи в эксперименте часто создают специальные условия, влияют на те или иные показатели – это *сдвиги под влиянием* контролируемых и неконтролируемых воздействий (например, до и после эксперимента).

Для оценки количественных различий применяются параметрический (Т-критерий для зависимых выборок) и непараметрические критерии (G – критерий знаков и Т – критерий Вилкоксона).

**3. Выявление различий в распределении признака.** Если исследуя различия в уровне мы больше опираемся на значение центральных тенденций, то при анализе различий в распределении – анализируем меры изменчивости, показатели асимметрии и эксцесса. Распределения полученных результатов могут быть равны по средней арифметической величине, но очень сильно отличаться по вариации, дисперсиям. Так, например, гендерные различия – это чаще всего различия именно в вариациях.

Если в процессе эксперимента точно доказано, что исследуемые выборки достоверно различаются по параметрам рассеивания, это может служить основой для создания типологий и классификаций. Часто в исследовании полезно сопоставить полученное эмпирическое и теоретическое распределение для проверки соответствия законам нормального распределения в случае расчета параметрических критериев или проверки содержательной гипотезы.

Для решения этой задачи применяются параметрические (F – критерий Фишера) и непараметрические ($\chi^2$ - критерий Пирсона) критерии.

**4. Выявление степени согласованности изменений.** Еще Гиппократ обратил внимание на наличие связей между телосложением и темпераментом людей, между строением тела и предрасположенностью к различным заболеваниям. Наличие связей между варьирующими признаками обнаруживается на всех уровнях организаций живого, поэтому возникает необходимость в ее количественном выражении.

Для описания связей между переменными применяют математическое понятие ***функции,*** которая ставит в соответствие каждому определенному значению независимой переменной X (аргументу) определенное значение зависимой переменной У (У = f(X)). Такого рода зависимости называются ***функциональными.*** Но они редко встречаются у человека: рост — масса тела, блондин — голубоглазый, брюнет — кареглазый, но не всегда.

Причиной этого являются особенности психологических признаков — каждый из них — функция многих переменных, поэтому зависимость между ними не функциональная, а статистическая. В одной выборке значению одного признака соответствует не одно, а целый ряд числовых значений другого признака, рассматриваемых в качестве зависимой переменной. Такая зависимость называется ***корреляцией*** [1, 6, 10, 14].

Корреляционные связи нельзя обнаружить и измерить, их изучают только на групповых объектах методами математической статистики.

Корреляционная связь между признаками бывает линейной и нелинейной, положительной и отрицательной. Задача корреляционного анализа сводится к установлению направления и формы связи между варьирующими признаками, измерению ее тесноты и проверке достоверности выборочных показателей корреляции.

Взаимосвязь между переменными можно выразить аналитически — с помощью формул и уравнений, и графически - как геометрическое место точек в системе прямоугольных координат (более подробно см. гл. 7).

Коэффициент корреляции это безразмерная величина и не зависит от масштабов измерения. Например, сила связи между ростом и весом будет одной и той же независимо от того, проводились ли измерения в дюймах и футах или в сантиметрах и килограммах.

В зависимости от типа шкалы, в которой измерены переменные, используют различные виды корреляции. Таким образом, выделяют следующие виды корреляции: линейную (метрическую), ранговую и между номинативными переменными. Если данные измерены в интервальной или абсолютной шкале и укладываются в кривую нормального распределения, то применяется метод линейной корреляции. При этом используется вычисление коэффициента корреляции по Пирсону.

Если метрические данные не подчиняются закону нормального распределения, то рекомендуется преобразовать метрические данные в ранговые и применить метод ранговой корреляции. Этот же метод используется при работе с переменными, измеренными в порядковой шкале. В этом случае используют вычисление коэффициента ранговой корреляции по Спирмену или по Кендаллу.

Для анализа зависимостей номинативных переменных используют критерий С-Пирсона, хи-квадрат Пирсона, (не путать последние два с линейной корреляцией Пирсона!), точный критерий Фишера, статистику фи-квадрат.

***Некоторые замечания по использованию мер взаимосвязи [13,14]*** В результате применения любых мер связи исследователь устанавливает только один факт - есть или нет связь между двумя переменными, изменяется одна переменная вместе с другой или нет. Необходимо отдавать себе отчет в том, что наличие связи ничего не говорит о ее причине, о том, чем данная связь может быть обусловлена. Причина взаимосвязи переменных может, как заключаться в одной из переменных, так и лежать вне рассматриваемых явлений. Наличие причинной взаимосвязи предполагает, что, воздействуя на одну переменную, мы обязательно получим изменение другой. Известно, что уровень интеллекта ребенка положительно коррелирует с уровнем материального достатка семьи. Это может быть обусловлено как непосредственной причиной большими возможностями семьи в плане развития своего ребенка, так и более опосредованной — уровнем образования родителей, поскольку именно от уровня образования существенно зависит материальный достаток в западном обществе (выше уровень образования — выше зарплата). Таким образом, связь между психологическими явлениями может быть объяснена только самим исследователем, на основе предлагаемой им теории или, исходя из здравого смысла, математика сама по себе не порождает интерпретаций каких-либо явлений.

Следует также помнить, что установление связи всегда предполагает анализ некоторого множества данных и выявляет статистическую закономерность, присущую данному множеству. При этом совсем не обязательно, чтобы эта закономерность проявлялась для каждого отдельно взятого испытуемого или объекта. Например, то, что интеллект ребенка связан с уровнем материального благосостояния семьи, не означает, что не может встретиться малообеспеченная семья, дети в которой будут интеллектуально высокоразвитыми. Однако в большинстве случаев закономерность проявляться будет, то есть закономерность имеет вероятностный характер: одни сочетания событий более вероятны, чем другие.

В некоторых случаях имеет смысл рассматривать полученные результаты по мерам связи более внимательно, с учетом других характеристик испытуемых, которые первоначально при вычислении мер связи в расчет не принимались.

Для решения этой задачи применяются параметрические (коэффициент линейной корреляции или произведение моментов по Пирсону, корреляционное отношение или коэффициент детерминации $\eta^2$) и непараметрические (коэффициент корреляции Спирмена $r_S$ , Кендалла $\tau$)

коэффициенты корреляции. В случае использования в эксперименте разных измерительных шкал возможно применение точечно-бисериальной корреляции $r_{pb}$.

***Коэффициент корреляции*** — отвлеченное число, лежащее в пределах от -1 до +1. При независимом варьировании признаков, когда связь между ними полностью отсутствует, $r_{xy} = 0$. Чем сильнее сопряженность между признаками, тем выше значение коэффициента корреляции. Таким образом, он характеризует наличие и степень сопряженности признаков. При положительной, или прямой связи, когда большим значениям одного признака соответствуют большие значения другого, коэффициент корреляции имеет положительный знак и находится в пределах от 0 до +1. При отрицательной, или обратной взаимосвязи, когда большим значениям одного признака соответствуют большие значения другого, коэффициент корреляции отрицательный, в пределах от 0 до -1.

Коэффициенты корреляции характеризуются силой и значимостью.

Таблица 16-Классификация коэффициентов корреляции по силе

| | |
|---|---|
| сильная | $r > 0,70$ |
| средняя | $0,50 < r < 0,69$ |
| умеренная | $0,30 < r < 0,49$ |
| слабая | $0,20 < r < 0,29$ |
| очень слабая | $r < 0,19$ |

Таблица 17-Классификация коэффициентов корреляции по значимости

| | |
|---|---|
| Высокозначимая корреляция | r соответствует уровню статистической значимости $p \leq 0,01$ |
| Значимая корреляция | r соответствует уровню статистической значимости $p \leq 0,05$ |
| Незначимая корреляция | r не достигает уровня статистической значимости $p>0,1$ |

Не следует путать 2 этих классификации, так как они определяют разные характеристики. Сильная корреляция может оказаться случайной и, стало быть, недостоверной. Особенно часто это случается в выборке с малым объемом. А в большой выборке даже слабая корреляция может оказаться высокозначимой.

*Определение значимости корреляции.* После вычисления коэффициента корреляции необходимо выдвинуть статистические гипотезы:

$H_0$: показатель корреляции значимо не отличается от нуля (является случайным).

$H_1$: показатель корреляции значимо отличается от нуля (является неслучайным).

Проверка гипотез осуществляется сравнением полученных эмпирических коэффициентов с табличными критическими значениями. Если эмпирическое значение достигает критического или превышает его, то нулевая гипотеза отвергается: $r_{эмп} \geq r_{кр} \nRightarrow Ho, \Rightarrow H_1$ . В таких случаях делают вывод, что обнаружена достоверность различий.

Если эмпирическое значение не превышает критического, то нулевая гипотеза не отвергается: $r_{эмп} < r_{кр} \Rightarrow H_0$ . В таких случаях делают вывод, что достоверность различий не установлена.

Выбор статистического критерия обусловлен исследовательской задачей, экспериментальной гипотезой исследования. На основании полученных статистических результатов можно говорить о выводах по всему исследованию.

## Вопросы и задания для самопроверки

В представленных задачах: выделите гипотезы эксперимента, определите тип исследовательской задачи, статистический критерий:

*Задача 1.* В исследовании влияние тренинга партнерского общения на формирования коммуникативных качеств: активное слушание, снижение эмоционального напряжения, аргументация своих слов 12 участников комплексной программы тренинга партнерского общения, продолжавшегося 7 дней, дважды оценивали у себя уровень владения тремя важнейшими коммуникативными навыками, а также свой идеал в развитии каждого из навыков. Первое измерение производилось в первый день тренинга, второе — в последний. Все измерения производились по 10-балльной шкале.

*Задача 2.* Перед началом курса тренинга партнерского общения проводилось обследование с помощью 16-факторного личностного опросника Кеттелла 35 мужчин — руководителей подразделений крупного промышленного предприятия.

Баллы, полученные испытуемыми по шкале N-увлеченность (стремление к эффективным нововведениям, деловитый радикализм) в зависимости от возрастной группы, содержатся в файле данных. Каждая группа оказалась представлена одинаковым числом испытуемых.

Можно ли утверждать, что есть определенная тенденция изменения значений фактора ***N*** при переходе от группы к группе?

Сформулируйте основную и альтернативную гипотезу. Выберите метод для проверки гипотез. Выполните проверку в любом статистическом пакете.

*Задача 3.* В исследовании проблемы психологических барьеров при обращении в службу знакомств у испытуемых мужчин и женщин обоего пола (17 мужчин и 23 женщины) просили графически указать длину отрезка, соответствующую интенсивности внутреннего сопротивления, которое им пришлось преодолеть, чтобы обратиться в службу знакомств (по методике Дембо-Рубинштейн). Длина отрезка, отражающая максимально возможное сопротивление, составляла 100 мм.

Можно ли утверждать, что мужчинам приходится преодолевать субъективно более мощное сопротивление?

Сформулируйте основную и альтернативную гипотезу. Выберите метод для проверки гипотез. Выполните проверку в любом статистическом пакете.

## Глава 7

### Формулы и примеры использования критериев и коэффициентов корреляции

Оценка достоверности различий — аналитико-статистическая процедура установления уровня значимости различий между выборками по изучаемым показателям. Достоверность различий устанавливается с помощью параметрических и непараметрических критериев.

Из параметрических критериев чаще всего применяют Т-критерий Стьюдента и F-критерий Фишера[11].

Т-критерий Стьюдента предложен В. Госсетом на основе закона распределения значений t:

$$t = \frac{\overline{X}_i - \overline{X}}{\sigma\sqrt{n}}$$

где $\overline{X}_i$ — выборочная средняя,

$\overline{X}$ — средняя генеральной совокупности,

$\sigma\sqrt{m}$ — ошибка выборочной средней.

Этот закон служит основой для теории малой выборки, которая характеризует распределение выборочных средних в совокупности в зависимости от объема выборки. Т-распределение зависит от числа степеней свободы $k = n - 1$, причем с увеличением объема выборки $n$ Т-распределение приближается к нормальному с параметрами $\overline{X} = 0$, $\sigma = 1$, а уже при $n = 30$ практически не отличается от него.

Т-распределение симметрично и отражает специфику распределения средней арифметической в случае малой выборки. Для практического использования Т-распределения составлена специальная таблица, в которой содержатся все критические точки для разных уровней значимости α и числа степеней свободы $k \cdot (n_1 + n_2 - 2)$.

Сравнивая друг с другом две независимые выборки, взятые из нормально распределяющихся совокупностей с параметрами $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, $\sigma_1, \sigma_2$ можно использовать следующую формулу:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

где $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ — сравниваемые средние арифметические двух совокупностей,

$m$ — ошибка средней, причем $m = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

Разность средних считается статистически значимой, если $t_э \geq t_{st}$. Нулевая гипотеза принимается при $t_э < t_{st}$, и отклоняется при $t_э \geq t_{st}$. Критическое значение критерия Стьюдента для каждой выборки определяется по таблицам (таблица А. 7 Приложения) с учетом ее объема и числа степеней свободы. Значения $t_{кр}$ в таблицах представлены для трех порогов доверительной вероятности: 5 %, 1 %, 0,1 %.

Метод Стьюдента используется и для расчета различий в зависимых выборках. К зависимым выборкам относятся результаты одной и той же группы испытуемых до и после воздействия независимой переменной. В психодиагностике таким образом часто проверяется гипотеза о достоверности разницы между фоновым уровнем и уровнем после воздейст-вия отдельно для экспериментальной и контрольной группы.

$$t = \frac{\overline{X_d}}{\sigma_d / \sqrt{n}};$$

$$\overline{X_d} = \frac{\sum (x_i - y_i)}{n} = \frac{\sum d_i}{n};$$

$$\sigma_d = \sqrt{\sum \frac{\left(d_i - \overline{X_d}\right)^2}{n-1}};$$

где $d_i$ — разность между результатами в каждой паре,

$\sum d_i$ - сумма этих частных разностей,

$\sum d_i^{\ 2}$ - сумма квадратов разностей.

Приведенный критерий используется и для оценки разности долей выборки в тех случаях, когда доли находятся в пределах *0.2 <p <0.8.*

Т-критерий для этого случая принимает вид:

$$t = \frac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

где $p_1, p_2$ — сравниваемые доли выборки,

$m_1, m_2$ — ошибки долей.

Величину *p* определяют с учетом числа объектов *(A) с* измеряемым признаком и объема выборки *n*, $p = A / n$, $m = \frac{pq}{n-1}$, где $q = 1 - p$.

F-критерий Фишера применяется для проверки $H_o$ гипотезы о равенстве дисперсий для малочисленных выборок.

$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ при $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$

Функция F-распределения табулирована для 5% и 1% уровней значимости и числа степеней свободы $k_1$ — для большей дисперсии и $k_2$ — для меньшей. При этом в таблице [12,14] степени свободы для большей дисперсии $k_1$ расположены в верхней строке (по горизонтали), а степени свободы для меньшей дисперсии $k_2$ — в первой графе (по вертикали) (см.таблицы А. 1-6 Приложения). Если сравниваемые выборки извлечены из одной и той же совокупности, или из разных с дисперсиями $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$, равными друг другу, то величина F-критерия не превысит критические точки в таблице - нулевая гипотеза принимается, если же $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, то $F \geq F_{st}$ и нулевая гипотеза отвергается.

**Непараметрические критерии**

Для их вычисления не требуется вычислять среднюю и стандартное отклонение. Например, *критерий* $\chi^2$ *Пирсона* — для его применения необходимо знать зависимость распределения частот результатов двух переменных, это позволяет выяснить, связаны ли они друг с другом или независимы. Этот статистический метод используется для обработки качественных данных.

Для расчета $\chi^2$ сравнивают число испытуемых в той и другой группе по степени выраженности исследуемых переменных. Затем находят эмпирическую частоту — реальное количество испытуемых в группах с определенной выраженностью переменных, и теоретические частоты, которые были бы получены, если бы эти различия были случайными.

Метод $\chi^2$ состоит в том, что оценивается, насколько сходны между собой распределения эмпирических и теоретических частот. Если разница между ними невелика, то можно полагать, что отклонения эмпирических частот от теоретических обусловлены случайностью. Если же эти распределения будут достаточно различными, то считают, что различия значимы, существует связь между действием независимой переменной и распределением эмпирических частот.

$$\chi^2 = \sum \frac{(Э - T)^2}{T}$$

Для расчета числа степеней свободы число степеней выраженности одной переменной умножают на число степеней выраженности второй переменной, за вычетом единицы в обоих случаях.

*Критерий знаков G* — непараметрический критерий, позволяющий легко проверить, повлияла ли независимая переменная на выполнение задания испытуемыми. При этом методе подсчитывают число испытуемых, у которых результаты снизились, а затем сравнивают его с тем числом, которого можно было ожидать на основе чистой случайности.

Далее определяют разницу между этими двумя числами, чтобы выяснить, насколько она достоверна. При подсчетах случаи, свидетельствующие о повышении результатов, берут со знаком «+», а о снижении — со знаком «-», случаи отсутствия разности не учитывают.

$$G = \frac{(X \pm 0{,}5) - n/2}{\sqrt{n/2}}$$

*X*— сумма «+» или «-», *n/2* — число сдвигов в ту или другую сторону при чистой случайности, *0.5* — поправочный коэффициент, который добавляют к *X*, если *X* < *n/2*, или вычитают, если *X* > *n/2*. По таблице критических значений определяют уровень значимости [11,13]. Если $G_{эмп.} > G_{st}$ — нулевая гипотеза отвергается, если $G_{эмп.} < G_{st}$ — подтверждается.

***Критерии рангов*** — позволяют проверить, является ли порядок следования каких-либо событий или результатов случайным, или же он связан с действием какого-то фактора, не учтенного исследователем.

При работе с порядковыми данными используют критерий U (Манна — Уитни) и Т-критерий Вилкоксона.

С помощью U-критерия проверяется гипотеза о том, принадлежат ли сравниваемые независимые выборки к одной и той же генеральной совокупности или к совокупностям с одинаковыми параметрами. Для расчета U-критерия необходимо расположить числовые значения сравниваемых выборок в возрастающем порядке в один общий ряд, затем пронумеровать (проранжировать) члены общего ряда от единицы до п. Отдельно для каждой выборки определить суммы рангов R и величины:

$$U_1 = R_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}, U_2 = R_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

где $U_1, U_2$ отображают связь между суммами рангов первой и второй выборки. В качестве U-критерия используется меньшая величина, которая сравнивается с $U_{st}$. Условием для сохранения принятой $H_o$ гипотезы служит неравенство $U_{эмп.} > U_{st}$. Критические точки U-критерия для $n_1$, $n_2$ и принятого уровня значимости α содержатся в стандартных таблицах (таблицы А.10-12 Приложения).

Т-критерий Вилкоксона оценивает связь переменных сравниваемых выборок попарно, с некоторыми общими условиями. Он рассчитывается путем ранжирования попарных разностей, как положительных, так и отрицательных, в общий ряд. Нулевые разности в расчет не принимаются, а остальные, независимо от знака, ранжируют так, чтобы наименьшая разность получила первый ранг, а одинаковые — один и тот же ранг. Затем находят отдельно суммы положительных и отрицательных разностей, меньшую из двух сумм разностей и используют в качестве величины Т-критерия.

Коэффициент корреляции Пирсона называется также *коэффициентом линейной корреляции* или произведением моментов Пирсона. Он позволяет определить силу связи между двумя признаками, измеренными в метрических шкалах.

***Коэффициент линейной корреляции Пирсона*** рассчитывается на основе отклонения первичных результатов и среднего квадратичного отклонения от их среднего арифметического значения. Формула расчета следующая:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

где $x_i$ — отклонение величины $X$ (первичного результата) от средней арифметической $\overline{X}$,

$y_i$ — отклонение величины $Y$ от средней арифметической $\overline{Y}$,

n — объем выборки сравниваемых пар первичных результатов,

$\sigma_x$ — среднее квадратичное отклонение от первичных результатов, $x_i, \sigma_y$ — среднее квадратичное отклонение от первичных результатов $y_i$.

Коэффициент считается значимым, если $r_{эмп} \geq r_{st}$ с учетом числа степеней свободы $k = n - 2$ (*см.* таблицу А.9 Приложения).

Вычисление *ранговой корреляции* позволяет определить силу и направление корреляционной связи между двумя признаками, измеренными в ранговой шкале или между двумя иерархиями признаков. При этом по каждой переменной должно быть представлено не менее 5 наблюдений. Для вычисления ранговой корреляции используют 2 метода: вычисление коэффициента Спирмена и коэффициента Кенделла. Какой из этих двух методов использовать, зависит от предпочтения исследователя.

***Корреляция ранговая Спирмена*** — метод корреляционного анализа, отражающий отношения переменных, упорядоченные по возрастанию их значений, например, в шкалах порядка и отношений; данный метод — непараметрический.

Первым этапом расчета является ранжирование — расположение переменных по возрастанию их значений. Разным значениям присваиваются ранги, обозначаемые натуральными числами. Если встречаются одинаковые по значению переменные, им присваивается усредненный ранг. Коэффициент рангов рассчитывается по формуле:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}$$

где $d_i$ — разности между рангами каждой переменной из пар значений $X$ и $Y$,

$n$ — число пар.

***Коэффициент ранговой корреляции Кендалла***, называемому также τ–Кендалла (тау Кенделла) основан на определении числа «совпадений» и «инверсий». Столбец с первым рядом значений упорядочивается, то есть сортируется по возрастанию. После этого анализу подвергается только второй столбец. Для каждого значения из второго ряда определяется:

сколько рангов расположенных ниже анализируемого ранга выше него по значению (результат заносится в дополнительный столбец, обозначенный символом $P$);

сколько рангов расположенных ниже анализируемого ранга меньше него по значению (результат заносится в следующий столбец, обозначенный символом $Q$).

Вычисления можно продемонстрировать на следующем примере. Группе испытуемых из 10 человек были предложены 2 опросника, затем было произведено ранжирование по степени выраженности исследуемого качества. Необходимо определить силу связи с использованием коэффициента τ–Кендалла между результатами этих двух методик. Предварительно требуется сформулировать статистические гипотезы, что предлагается сделать студентам самостоятельно.

Таблица 18 – Массив значений

| Испытуемые | 1-я методика | 2-я методика | *P* | *Q* |
|---|---|---|---|---|
| А | 1 | 2 | 8 | 1 |
| Б | 2 | 1 | 8 | 0 |
| В | 3 | 4 | 6 | 1 |
| Г | 4 | 7 | 3 | 3 |
| Д | 5 | 3 | 5 | 0 |
| Е | 6 | 5 | 4 | 0 |
| Ж | 7 | 6 | 3 | 0 |
| З | 8 | 8 | 2 | 0 |
| И | 9 | 10 | 0 | 1 |
| К | 10 | 9 | 0 | 0 |
| | | | **Σ*P*=39** | **Σ*Q*=6** |

Еще раз напоминание: первый столбец был нужен только для упорядочивания выборки. Анализу подвергается только второй столбец. У испытуемого А рассматривается ранг со значением 2. Выше него мы наблюдаем 8 значений (4, 7, 3, 5, 6, 8, 10, 9) и ниже – 1 (1). У человека Б рассматривается ранг со значением 1. Затем анализируются показатели тех испытуемых, которые расположены ниже. То есть, результаты испытуемого А уже исключаются из рассмотрения. Выше указанного значения мы имеем 8 значений (4, 7, 3, 5, 6, 8, 10, 9) и ниже – ни одного. У испытуемого В рассматривается ранг со значением 4. Выше него мы имеем

6 значений (7, 5, 6, 8, 10, 9). Ниже – 1 значение (3). Тем же образом заполняются столбцы $P$ и $Q$ до конца.

Для вычисления коэффициента τ–Кендалла используется формула:

$$\tau = \frac{\sum P - \sum Q}{0{,}5 * n * (n-1)}$$

Для нашего примера $\tau = \frac{39-6}{0{,}5*10*9} \approx 0{,}73$

***Корреляция бисериальная*** — метод корреляционного анализа отношения переменных, одна из которых измерена в шкале наименований, а другая — в шкале интервалов или порядка. То есть сравниваются альтернативные серии объектов X, имеющие условные значения 0 или 1 по Y. Чаще всего подобная процедура используется для определения критериальной валидности.

$$r_{xy} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_0}{\sigma_x} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_0}{n(n-1)}}$$

где $\overline{X}_1$— среднее по X объектов со значением 1 по Y, $\overline{X}_0$-среднее по X объектов со значением 0 по У,

$\sigma_x$ — среднее квадратичное отклонение всех значений по X,

$n_1$ — число объектов с 1 по Y, $n_0$ — число объектов с 0 по Y,

$n$ — объем выборки.

## §4 Практикум 4. Расчет мер различия между переменными в группах испытуемых с использованием параметрических критериев

***Задача 5.*** После эксперимента по исследованию внимания, группу учащихся разделили по критерию успеваемости. Проверить гипотезу о том, что эти группы различаются между собой.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Успевающие | 52 | 74 | 33 | 48 | 39 | 62 | 58 |
| Неуспевающие | 16 | 56 | 18 | 21 | 27 | 35 | 30 |

Статистическую значимость разности средних арифметических величин будем вычислять по формуле:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

где $X$, и $X_2$ — сравниваемые средние арифметические величины выборок $n_1, n_2, m_1, m_2$ - квадраты ошибок средних величин. Их вычисляют, с учетом среднего квадратичного отклонения $\sigma$ и объема выборки *n:*

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m^2 = \frac{D}{n}$$

Разность средних арифметических считается статистически значимой, если $t_э \geq t_{st}$, стандартное значение $t_{st}$ определяется с учетом объема выборки (или числа степеней свободы *k*). $k = n_1 + n_2 - 2$.

Критические значения $t_{st}$ для четырех порогов вероятности даны в таблице А.7 Приложения.

Для облегчения расчетов при решении задачи, табулируем результаты (таблица 19).

Таблица 19-Первичные результаты для расчета t-критерия по Стьюденту

| $N$ | $X_1$ | $x_1$ | $x_1^2$ | $X_2$ | $x_2$ | $x_2^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 52 | 0 | 0 | 16 | -13 | 169 |
| 2 | 74 | 22 | 484 | 56 | 27 | 729 |
| 3 | 33 | -19 | 361 | 18 | -11 | 121 |
| 4 | 48 | -4 | 16 | 21 | -8 | 64 |
| 5 | 39 | -13 | 169 | 27 | -2 | 4 |
| 6 | 62 | 10 | 100 | 35 | 6 | 36 |
| 7 | 58 | 6 | 36 | 30 | 1 | 1 |
| $\sum$ | 366 | | 1166 | 203 | | 1123 |
| $\overline{X}$ | 52 | | | 29 | | |

Прямо в таблице 19 представлены значения среднего арифметического по обеим выборкам — $\overline{X}_1 = 52, \overline{X}_2 = 29$.

В третьей графе таблицы 19 находим отклонение от среднего арифметического по первой выборке, а в шестой — по второй группе. В четвертой и седьмой графах таблицы возводим найденное отклонение в квадрат, в конце — суммируем.

По первой и второй группам находим значения среднего квадратичного отклонения по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Для нашего случая:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1166}{7}} = 12.9; \sigma_2 = \sqrt{\frac{1123}{7}} = 12.7$$

Затем делаем расчет квадратов ошибок средних величин двух групп школьников:

$$m_1^2 = 166.6/7 = 23.8; m_2^2 = 160.4/7 = 22.9$$

По вышеприведенной формуле рассчитываем значение t-критерия:

$$t = \frac{52-29}{\sqrt{23.8+22.9}} = 3.38$$

k= 12

Определяем по таблице А.7 приложения значимость полученного коэффициента, строим «ось значимости»:

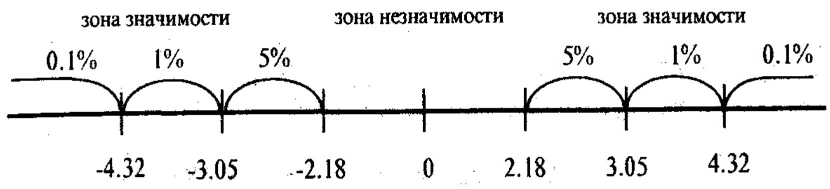



Рисунок 9 - Ось значимости

Видно, что $t_э$ *=3.38* лежит в зоне значимости (1%), следовательно, группы неуспевающих и успевающих школьников различаются по уровню характеристик внимания — гипотеза подтвердилась.

***Задача 6***. Был приведен эксперимент, целью которого являлась коррекция познавательных процессов школьников. У контрольной и экспериментальной групп до и после эксперимента измерили уровень развития процессов мышления (анализа, синтеза, сравнения, обобщения и пр.). До эксперимента по этому параметру группа не различалась, результаты после эксперимента представлены ниже. Нужно проверить гипотезу о том, что коррекционные занятия повлияли на уровень развития процессов мышления.

Результаты эксперимента:

*Экспериментальная группа: высокий и средний уровни: 75 человек, низкий — 35;*

*Контрольная группа: высокий и средний уровни: 60 человек, низкий — 16.*

Статистическую разность долей выборки вычисляем по формуле:

$$t = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

где $p_1$ и $p_2$, — сравниваемые доли выборки;

$m_1^2$ и $m_2^2$ — квадраты ошибок долей.

Величину P определяем: $P = A/n$, $A$ — число объектов,

$n$ — объем выборки.

Квадраты ошибок долей рассчитываем по формулам:

$$m^2 = \frac{pq}{n-1}; q = 1 - p$$

Разность долей считается значимой, если $t_э \geq t_{st}$, стандартное значение определяется по таблице А. 7 приложения.

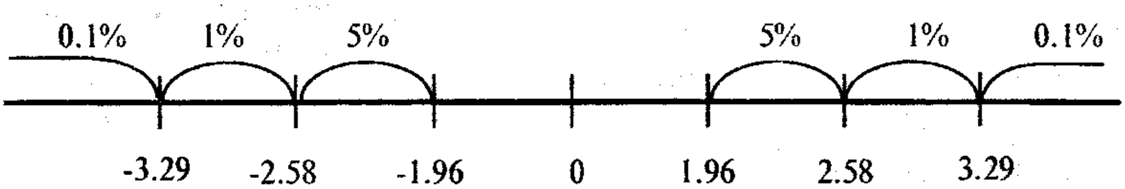
Первым шагом рассчитываем сравниваемые доли выборок: группа в которой проводилось экспериментальное воздействие составляет 110 человек (75+35=110), сравниваемая доля А = 75, $P_1$=75/110=0.68. Для контрольной группы А=60, $P_2$=60/(60+16)=60/76=0.79. Затем приступаем к расчету квадратов ошибок долей:

$$m_1^2 = \frac{0.68 \cdot 0.32}{110-1} = 0.0020 \text{ при } q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.68 = 0.32$$

$$m_2^2 = \frac{0.79 \cdot 0.21}{76-1} = 0.0022 \text{ при } q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.79 = 0.21$$

На следующем этапе, используя формулу Т-критерия Стьюдента, получим:

Определим по таблице А.7 приложения значимость полученного коэффициента; для этого построим «ось значимости»:




k= 184

Рисунок 10 – Ось значимости

Замечаем, что t = *1.6923* лежит в зоне незначимости, следовательно, контрольная и экспериментальная группы не различаются между собой, гипотеза не подтвердилась.

**Задача 7.[14]** Предположим, две группы испытуемых обучались некоторым моторным навыкам по двум разным методикам, фиксировалось количество ошибочных действий, до обучения результаты в обеих группах имели одинаковый разброс. Исследователя интересует, какая из методик даст наибольшее выравнивание результатов внутри группы после обучения (таблица 20).

Таблица 20-Параметры распределения результатов по группам

| Числовые характеристики | 1 -я группа | 2-я группа |
|---|---|---|
| $n$ | 21 | 16 |
| $\sigma$ | 4 | 6 |
| $D$ | 16 | 36 |

Эмпирическое значение F-критерия для сравнения двух дисперсий в независимых выборках находят по очень простой формуле:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ при } \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$$

где $\sigma_1^2$ — большая дисперсия,

$\sigma_2^2$ — меньшая дисперсия.

Количество степеней свободы определяется отдельно для числителя и отдельно для знаменателя: $\alpha_{числ.} = n_{числ.}$ -1 и $\alpha_{знам.} = n_{знам.}$- 1 .

F=36/16=2,25 ,

$\alpha_{числ}$ =16 - 1=15 ,   $\alpha_{знам.}$=21 - 1=20

Поскольку нам заранее неизвестно, какая из методик может обладать меньшей дисперсией, мы используем ненаправленную гипотезу и, следовательно, двусторонний критерий. Находим по таблицам критических значений (таблицы А.1-6 Приложения) значение F-критерия для α = 0,05 (α/2+α/2=0,05) и $\alpha_{числ}$ =15, $\alpha_{знам.}$=20, $F_{Крит.}$=2,573.

Так как эмпирическое значение меньше критического, делаем вывод об отсутствии статистически значимых различий дисперсий в первой и второй группах и, следовательно, о равенстве в стабилизации навыка при обучении по обеим методикам.

## §5 Практикум 5. Расчет мер различия между переменными в группах испытуемых с использованием непараметрических критериев

**Задача 8. [14]**

***$\chi^2$ - критерий Пирсона***

Для сравнения эмпирического распределения с теоретическим используется формула

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i - f_i^*)^2}{f_i^*}$$

где $f_i$ эмпирическая частота для группы или интервала квантования; $f_i^*$— теоретическая частота, рассчитанная из условия нормального или равномерного распределения.

Допустим, в течение месяца на предприятии ежедневно фиксировались случаи травматизма, требуется установить, действительно ли большее количество травм приходится на определенные периоды месяца. В статистическом смысле необходимо проверить, отличается ли эмпирическое распределение от равномерного, которое получалось бы в случае отсутствия какой-либо связи между временем и травматизмом. Предположим, месяц был разбит на восемь равных временных интервалов, в каждом из которых было зафиксировано определенное количество травм (таблица 21).

Таблица 21- Массив значений

| Номер интервала | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кол-во травм *(xi)* | 10 | 20 | 12 | 14 | 12 | 20 | 18 | 14 | $\sum x_i = 120$ |

Всего произошло 120 травм, нам следует определить, сколько травм случилось бы за каждый временной интервал при равномерном распределении: 120/8=15. Число 15 и будет в данном случае теоретической частотой для расчета эмпирического значения величины $\chi^2$:

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n=8}\frac{(f_i-15)^2}{15}=\frac{(10-15)^2}{15}+\frac{(20-15)^2}{15}+\frac{(12-15)^2}{15}+\frac{(14-15)^2}{15}+\frac{(12-15)^2}{15}+$$

$$+\frac{(20-15)^2}{15}+\frac{(18-15)^2}{15}+\frac{(14-15)^2}{15}=\frac{104}{15}\approx 6{,}93$$

Количество степеней свободы при сравнении с равномерным распределением $df = k$ -I , где $k$ — число групп (или интервалов квантования). Определяем по таблице 8 приложения критическое значение $\chi^2$ для $\alpha$ =0,05 и $df$ =8-l=7: $\chi^2_{\text{критич.}}$=14,068. Эмпирическое значение оказывается меньше критического, следовательно, мы должны сделать вывод о том, что полученное эмпирическое распределение статистически значимо не отличается от равномерного распределения и поэтому травматизм никак не связан со временем.

**Задача 9.[14]**

***U-критерий Манна—Уитни***

Применение U-критерия требует предположения о том, что оба распределения относятся к одному типу (необязательно нормальному) и признак измерен в шкале интервалов. Значение критерия показывает, насколько велико перекрещивание двух рядов измерений: чем меньше критерий, тем меньше область совпадений и тем сильнее различия между выборками.

Предположим, даны результаты тестирования в баллах для двух групп испытуемых (как правило, первой ставится выборка меньшего объема, для удобства пользования таблицами критических значений критерия):

*A:* 3 5 7 8 9 11 12 14 (m=8)

*B:* 6 10 13 15 16 18 19 21 23 24 (n=10)

У нас могут возникнуть сомнения по поводу нормальности данных распределений, поэтому используем U -критерий. Чтобы вычислить эмпирическое значение критерия, необходимо выполнить следующие действия:

1) проранжировать все измерения; объединив результаты двух выборок, приписать каждому значению свой ранг (1-я и 2-я строки таблице 22);

2) отметить, к какой выборке относится каждый ранг (3-я строка);

3) указать ранги, которые принимают результаты каждой выборки в объединенном ряду, и просуммировать ранги для каждой выборки (4-я и 5-я строки);

Таблица 22-Массив значений

| Значение* | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 23 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ранг | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
| Выборка | A | A | B | A | A | A | B | A | A | B | A | B | B | B | B | B | B | B | |
| Ранг A | 1 | 2 | | 4 | 5 | 6 | | 8 | 9 | | 11 | | | | | | | | $\sum = 46$ |
| Ранг B | | | 3 | | | | 7 | | | 10 | | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | $\sum = 125$ |

* При повторяющихся значениях в одной или обеих выборках для них рассчитывается средний ранг.

4) вычислить значения U - критерия для выборок A и B:

$$U_A = mn + \frac{m(m+1)}{2} - R_A; U_B = mn + \frac{n(n+1)}{2} - R_B$$

правильность вычислений проверяется с помощью выражения

$U_A + U_B = mn$:

$$U_A = 8x10 + \frac{8x9}{2} - 46 = 70; U_B = 8x10 + \frac{10x11}{2} - 125 = 10;$$

70+10=8x10

Эмпирическим значением U-критерия будет наименьшее из $U_A$ и $U_B$, $U_{эмп}$=10. Критическое значение критерия находим по таблицам 10-12 приложения, через количество измерений в первой и второй выборках (m,n)

— $U_{крит.}$ = 17 для α=0,05 и $U_{крит.}$ = 11 для α =0,01. Решение в отношении нулевой гипотезы принимается отличным от предыдущих случаев способом: поскольку эмпирическое значение критерия выражает степень перекрещивания двух рядов измерений, то чем больше оно получается, тем ближе друг к другу две выборки, и наоборот. Нулевая гипотеза отклоняется, если $U_{эмп} \leq U_{крит}$. Для нашего примера мы должны признать две выборки статистически значимо различающимися ($p < 0{,}01$).

**Задача 10.[14]**

***Т-критерий Вилкоксона***

Т-критерий применяется, когда признак измерен по шкале рангов или интервалов в двух различных условиях на одной и той же выборке испытуемых.

Таблица 23- Массив значений

| Испытуемые | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Условие *A* | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 13 | 14 | |
| Условие *B* | 10 | 10 | 12 | 5 | 8 | 11 | 20 | 23 | |
| $A$-$B$=$d_i$ | -7 | -5 | -6 | 3 | 2 | 1 | -7 | -9 | |
| Ранг[$d_i$]* | 6,5 | 4 | 5 | 3 | 2 | 1 | 6,5 | 8 | |
| *R*+ | | | | 3 | 2 | 1 | | | Σ=6 |
| *R*- | 6,5 | 4 | 5 | | | | 6,5 | 8 | Σ =30 |

* Первый и седьмой испытуемые имеют одинаковую разность результатов (-7), которая занимает 6-й и 7-й ранги в ранжированном ряду модулей разностей, поэтому для них находится средний ранг— (6+7)/2=6,5 .

Предположим, на восьми испытуемых проведен тест корректурной пробы в обычных условиях *(A)* и в условиях эмоционального напряжения *(B)* (фиксировалось количество ошибок). Исследователь желает установить, влияет ли различие в условиях на результаты данной группы испытуемых (таблицы 23).

Вычисление эмпирического значения критерия проводится в следующей последовательности:

1) упорядочивается список испытуемых и для каждого испытуемого фиксируется его результат при первом и втором условии (1-я - 3-я строки таблицы);

2) находится разность результатов для каждого испытуемого: из результата при условии $A$ вычитается результат при условии $B$ (4-я строка);

3) полученные разности ранжируются от наименьших к наибольшим (5-я строка);

4) записываются ранги положительных $(R+)$ и отрицательных ($R$-) разностей, и затем они суммируются.

В качестве эмпирического значения Т-критерия принимается наименьшая из сумм рангов, в нашем примере $T_{эмп}=6$. Критическое значение находится из таблицы 14 приложения по числу испытуемых (n) — $T_{крит}=3$ для $\alpha=0{,}05$; как и в случае с U-критерием, нулевая гипотеза отклоняется, если $T_{эмп} \leq T_{крит}$ . Для нашего примера 6>3, то есть эмпирическое значение больше критического, значит, мы делаем вывод о принадлежности двух групп результатов одной генеральной совокупности и, следовательно, об отсутствии статистически значимых различий между результатами тестирования в обычных и эмоционально напряженных условиях для данной группы испытуемых.

## §6 Практикум 6. Расчет мер взаимосвязи между данными двух измерений в группе

***Задача 11.*** **В** школе проводился эксперимент, целью которого было исследование тревожности у учителей. Диагностировались два вида тревожности — ситуативная и личностная. Основной гипотезой исследования было предположение о том, что высокая личностная тревожность взаимосвязана с высокой ситуативной тревожностью. Необходимо подтвердить или опровергнуть гипотезу исследования.

Таблица 24-Массив значений

| № испытуемого | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Личностная тревожность | 33 | 42 | 52 | 35 | 45 | 53 | 39 | 35 | 36 | 51 |
| Ситуативная тревожность | 35 | 41 | 43 | 43 | 47 | 63 | 50 | 30 | 37 | 50 |

По условию задачи ясно, что необходимо определить тесноту взаимосвязи между переменными - ситуативной и личностной тревожностью. Применим для этого коэффициент ранговой корреляции:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}$$

В приведенной формуле *n* — число сравниваемых пар величин двух переменных,

$d^2$ — квадрат разностей рангов этих двух величин, коэффициент считается значимым, если $r_{s\,эмп} \geq r_{s\,st}$ с учетом объема выборки *n* (см. таблицу 9 приложения). Для вычисления коэффициента корреляции построим таблицу 25.

Таблица 25-Первичные результаты для расчета коэффициента корреляции $\rho$

| *n* | $X_i$ | $Y_i$ | $R_x$ | $R_y$ | $d_i$ | $d_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *2* | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 33 | 35 | 10 | 9 | 1 | 1 |
| 2 | 42 | 41 | 5 | 7 | -2 | 4 |
| 3 | 52 | 43 | 2 | 5.5 | -3.5 | 12.25 |
| 4 | 35 | 43 | 8.5 | 5.5 | 3 | 9 |
| 5 | 45 | 47 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| 6 | 53 | 63 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 39 | 50 | 6 | 2.5 | 3.5 | 12.25 |
| 8 | 35 | 30 | 8.5 | 10 | -1.5 | 2.25 |
| 9 | 36 | 37 | 7 | 8 | -1 | 1 |
| 10 | 51 | 50 | 3 | 2.5 | 0.5 | 0.25 |
| | | | | | $\sum d^2$ | 42 |

В первой графе записывается номер испытуемого, а во второй и третьей — сумма баллов, полученная им по первому показателю тревожности *($X_i$)* и по второму ($Y_i$).

Затем каждому первичному результату присваивают ранг — ранжируют. Для этого находят самое большое значение в графе $X_i$ и в четвертой графе проставляют напротив него единицу, что означает первый ранг. В нашем случае по показателю $X_i$ первый ранг получит испытуемый № 6. Затем находят второй по величине результат и присваивают ему второй ранг (испытуемый № 3). Если же встречаются два одинаковых результата, например испытуемые № 4 и № 8, то нужно найти среднее арифметическое двух рангов ((8 + 9)/2 = 8,5) и усредненный ранг присвоить и тому и другому испытуемому.

Таким же образом осуществляется ранжирование и по показателю ситуативной тревожности.

В шестой графе таблицы определяется разность рангов двух переменных $(d = R_x - R_y)$, в седьмой графе эта разность возводится в квадрат, а затем суммируется. Затем подставляем известные значения в формулу для расчета $r_s$: $r_s = 1 - \frac{6 \cdot 42}{1000 - 10} = 0,75$

Определим значимость полученного коэффициента. По таблице 9 приложения находим критические значения (для n = 10 (объем нашей выборки): 5 % = 0,64; 1 % = 0,79.

Построим «ось значимости»:


Рисунок 11 – Ось значимости

Полученное нами $r_s = 0{,}75$ лежит в 5 % зоне значимости, следовательно, исследованные величины взаимосвязаны. Гипотеза верна — личностная и ситуативная тревожность взаимосвязаны между собой.

*Задача 12* [16]. Переменная X — результат измерения в см величины коленного рефлекса при инструкции «расслабить мышцы», переменная Y — то же, но при инструкции «напрячь мышцы». Проверить гипотезу о наличии взаимосвязи величин коленного рефлекса.

| № исп. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 10 | 8 | 6 | 6 | 3 | 9 | 7 |
| Y | 7 | 9 | 11 | 3 | 11 | 10 | 6 |

Для решения воспользуемся коэффициентом корреляции *r*. Он рассчитывается на основе отклонения первичных результатов и среднего квадратичного отклонения от их среднего арифметического значения. Формула расчета следующая:

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

где $x_i$ — отклонение величины $X$ (первичного результата) от средней арифметической $\overline{X}$,

$y_i$ — отклонение величины $Y$ от средней арифметической $\overline{Y}$,

n — объем выборки сравниваемых пар первичных результатов,

$\sigma_x$ — среднее квадратичное отклонение от первичных результатов $x_i$, $\sigma_y$ — среднее квадратичное отклонение от первичных результатов $y_i$. Коэффициент считается значимым, если $r_{эмп} \geq r_{st}$ с учетом числа степеней свободы $k = n - 2$ *(см.* таблицу 9, приложения).

Для удобства вычислений построим таблицу 26.

Таблица 26-Расчет коэффициента корреляции r.

| *n* | $X_i$ | $Y_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 2 | 3 | 4 | *5* | 6 | 7 | 8 |
| *1* | 10 | 7 | 3 | -1.14 | 9 | 1.30 | -3.42 |
| 2 | 8 | 9 | 1 | 0.86 | 1 | 0.74 | 0.86 |
| 3 | 6 | 11 | -1 | 2.86 | 1 | 8.18 | -2.86 |
| 4 | 6 | 3 | -1 | -5.14 | 1 | 26.42 | 5.14 |
| 5 | 3 | 11 | -4 | 2.86 | 16 | 8.18 | -11.44 |
| 6 | 9 | 10 | 2 | 1.86 | 4 | 3.46 | 3.72 |
| 7 | 7 | 6 | 0 | -2.14 | 0 | 4.58 | 0 |
| $\sum$ | 49 | 57 | | | 32 | 52.86 | -8 |
| | $\overline{X} = 7{,}0$ | $\overline{Y} = 8{,}14$ | | | | | |

Первая графа таблицы — номер испытуемого, вторая и третья — результаты эксперимента. По $X_i$ и $Y_i$ рассчитывается среднее арифметическое по *следующим* формулам:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}; \ \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

Для нашего случая: *X* = 49/7 = 7.0; Y = 57/7 = 8.14. В четвертой и пятой графах находим отклонение каждого из первичных результатов от среднего арифметического $(X_i - \overline{X}, Y_i - \overline{Y})$. В шестой и седьмой графах возводим найденные отклонения в квадрат и суммируем.

По формулам расчета $\sigma_x$ и $\sigma_y$ находим значения среднего квадратичного отклонения для X и Y:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{32}{7}} = 2{,}14$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{52{,}86}{7}} = 2{,}75$$

Последняя графа таблицы — произведения каждой пары отклонений с учетом знака.

Полученные значения подставляем в формулу:

$$r = \frac{-8}{7 \cdot 2{,}14 \cdot 2{,}75} = -0{,}19$$

Определим значимость полученного коэффициента.

По таблице 9 приложения находим критические значения r для степени свободы $k$ $(n-2=7-2=5)$: 5 % = 0.75; 1 % = 0.87. Построим «ось значимости»:


Рисунок 13 – Ось значимости

Полученное нами $r=-0.19$ лежит в зоне незначимости, следовательно исследованные величины не взаимосвязаны. Гипотеза не подтверждается: не имеется взаимосвязи между величинами коленного рефлекса при различных инструкциях. Некоторая парадоксальность результата может быть объяснена особенностями и величиной выборки испытуемых.

## Вопросы и задания для самопроверки

1. В группе учеников объемом 15 человек исследовали силу связи между уровнем интеллекта и средними показателями школьной успеваемости. Выяснилось, что коэффициент $R_{xy}$ = 0,65. Как можно проинтерпретировать полученный результат?

2. На выборке из 7 человек было проведено сравнительное исследование уровня интеллектуальной ригидности и уровня интеллекта. Данные приведены в таблице. Вычислить (вручную!) коэффициент линейной корреляции и определить уровень его статистической значимости. Дать интерпретацию.

Таблица 27

| Показатели интеллектуальной ригидности | Уровень интеллекта |
|---|---|
| 22 | 120 |
| 28 | 110 |
| 39 | 112 |
| 33 | 115 |
| 31 | 118 |
| 34 | 104 |
| 15 | 116 |

3. Определить силу корреляционной связи и значимость полученного коэффициента.

4. Вычислить коэффициент корреляции и определить его значимость для задания 1 из предыдущего раздела.

## Глава 8

## Элементы многомерного статистического анализа

Многомерный статистический анализ используется для исследования особенностей взаимосвязей множества переменных случайных величин. Мы рассмотрим четыре вида такого анализа: дисперсионный, регрессионный, корреляционный, факторный [6,7,14].

***Дисперсионный анализ*** — аналитико-статистический метод изучения влияния отдельных переменных на изменчивость изучаемого признака.

Метод основан на разложении общей дисперсии на составляющие компоненты, сравнивая которые можно определить долю общей вариации изучаемого признака, обусловленную действием на него как регулируемых, так и неучтенных в опыте факторов. По характеру решаемых задач дисперсионный анализ близок к регрессионному анализу.

При осуществлении дисперсионного анализа результаты наблюдений группируются с учетом градаций каждого учитываемого фактора (возраста, уровня образования, психологических особенностей). Если учитываемый фактор оказывает влияние на признак, средние результирующего признака изменяются в соответствии с градациями фактора. Внутри каждой такой группы обнаруживается своя дисперсия, связанная с действием других факторов. Суммарная дисперсия может быть выражена уравнением:

$$D_y = D_x + D_z$$

где $D_y$ — сумма квадратов отклонений отдельных вариант $(X_i)$ всего комплекса наблюдений от общей средней: $\sum(X_i - \overline{X})^2$;

$D_x$ — сумма квадратов отклонений в комплексах (группах) от их частного среднего, умноженное на число вариант в группах: $n \cdot \sum(X_i - \overline{X})^2$;

$D_z$ — сумма из сумм квадратов отклонений отдельных вариант от их групповых средних: $\sum\left[\sum(X_i - \overline{X})^2\right]$

Для получения выборочных дисперсий $D_x$, $D_y$, $D_y$ соотносят со степенью свободы $k$.

Степень свободы связана с содержанием данных, которые не выводятся путем дедукций, это число данных из выборки, значения которых могут быть случайными.

Например: если сумма трех данных равна 8, то первые два могут принимать любые значения, но если они определены, то третье значение становится известным автоматически (3 - 1 = 2), таким образом, в этой выборке имеются только две степени свободы.

В общем случае в $n$ данных существует $n$ - $1$ степень свободы.

В случае двух независимых выборок степеней свободы $n_1 + n_2 - 2$, если же выборки зависимы — $n-1$.

Выборочные дисперсии при дисперсионном анализе бывают трех видов:

1) общая по комплексу — $S_y^2 = \dfrac{D_y}{k_y}$;

2) межгрупповая, или факторная — $S_x^2 = \dfrac{D_x}{k_x}$;

3)внутригрупповая, или остаточная — $S_z^2 = \dfrac{D_z}{k_z}$.

Отношение $\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$ служит критерием оценки влияния на признак регулируемых в опыте факторов.

Дальнейший анализ проводится путем проверки нуль-гипотезы, сводящейся к предположению о равенстве межгрупповых средних и дисперсий, т.е. никакого систематического действия факторов на результативный признак нет, наблюдаемые различия в группах средних случайны. Нулевая гипотеза отвергается при $F \geq F_{кр}$, значения $F_{кр}$ определяются по статистическим таблицам [9] с учетом уровня значимости и числа степеней свободы.

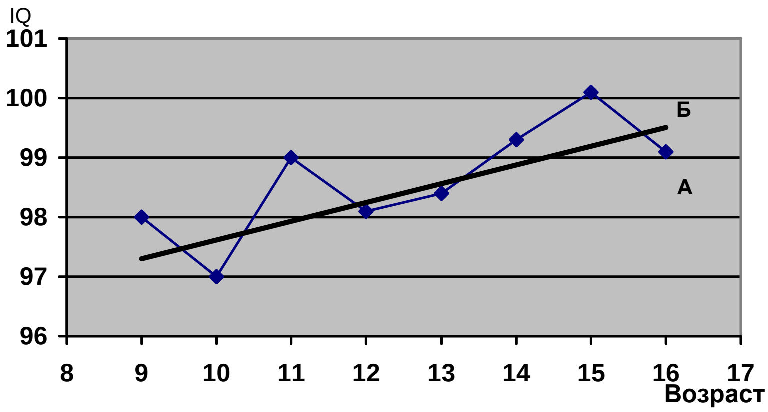
После доказательства действия регулируемого фактора на результирующий признак переходят к сравнению групповых средних друг с другом или с другими показателями. Заключительный этап дисперсионного анализа — оценка силы влияния отдельных факторов или их групп на результирующий признак.

Таким образом, дисперсионный анализ позволяет учитывать не только совместное действие регулируемых факторов, но и влияние каждого из них в отдельности или в разных комбинациях на результирующий признак. Действие неучтенных факторов оценивается не дифференцированно, а суммарно. Дисперсионный анализ допускает статистическое исследование признаков, выраженных не только в абсолютных количественных единицах, но и в относительных — в условных баллах или индексах.

***Регрессионный анализ*** – область статистического анализа, изучающая зависимость среднего значения переменной от одного или группы факторов.

Регрессионный анализ применим только по отношению к количественно выраженным переменным, измеряемым в интервальных шкалах. Основными процедурами регрессионного анализа являются построение линий и решение уравнений регрессии. Под линией регрессии понимается линия, соединяющая точки со средними значениями признаков-факторов (т.е. тех признаков, влияние которых на переменную изучается). Эти линии в общем виде определяют взаимодействие изучаемого показателя и одного или группы объединяющих факторов, позволяют дать предварительную наглядную оценку воздействия фактора на результирующий признак.

Уравнение регрессии (уравнение парной регрессии, описывающее воздействие одного фактора на результирующий признак) строится следующим образом: линейная зависимость признака описывается уравнением $y = a + b \cdot x$, где $a$ — переменная, выражающая действие на $y$ факторов, не учитываемых в данном случае, b — коэффициент регрессии, угловой коэффициент, определяющий наклон линии регрессии по отношению к осям X и Y. Этот параметр также показывает, насколько в среднем величина признака *y* изменяется при соответствующем изменении признака *x*. Эти изменения представляют в системе прямоугольных координат (рисунок 14).




А — эмпирическая линия регрессии; Б — выровненная линия регрессии

Рисунок 14 - Динамика изменений интеллекта испытуемых в зависимости от возраста

Линии регрессии пересекаются в точке $O(\overline{X}, \overline{Y})$, соответствующей средним арифметическим корреляционно связанных друг с другом признаков X и Y (рисунок 14). Линия АВ, проходящая через эту точку, изображает полную функциональную зависимость между переменными X и Y $(|r| = 1)$, чем сильнее связь между Y и X, тем ближе линии регрессии к АВ, и чем слабее эта связь, тем более удаленными оказываются линии регрессии от АВ, при отсутствии связи между признаками линии регрессии оказываются под прямым углом по отношению друг к другу.

Поскольку показатели регрессии выражают корреляционную связь двусторонне, то уравнение регрессии имеет вид:

$$\overline{Y}_x = a_{xy} + b_{xy} X, \overline{X} = a_{xy} + b_{xy} Y$$

По первой формуле определяют усредненное значение $\bar{Y}_x$ при изменении признака X, по второй — усредненное значение признака $\bar{X}_y$ при изменении признака Y.

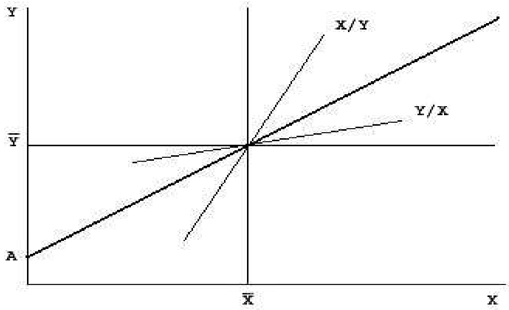



Рисунок 15 - Линии регрессии X по Y и Y по X в системе прямоугольных координат

Коэффициент регрессии показывает, насколько в среднем величина одного признака Y изменяется при изменении на единицу меры другого, корреляционно связанного с Y признака X. Этот показатель определяется по формуле:

$$b_{yx} = r_{yx} \cdot \frac{\sigma_y \cdot i_y}{\sigma_x \cdot i_x}, b_{xy} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x \cdot i_x}{\sigma_y \cdot i_y}$$

При этом коэффициент корреляции r находится по формуле среднего геометрического коэффициента регрессии: $r = \sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}}$

Вторая переменная равна: $a_{yx} = \bar{Y} - b_{yx}\bar{X}, a_{xy} = \bar{X} - b_{xy}\bar{Y}$

С помощью уравнений регрессии возможно построение эмпирических рядов регрессии. Они образуются путем вычисления по значениям одного варьирующего признака X, средних значений другого, связанного с ним признака Y, т.е. построение эмпирических рядов регрессии сводится к нахождению групповых средних $\bar{Y}$ *и* $\bar{X}$ *из* соответствующих значений признаков Y и X.

*Эмпирический ряд регрессии* — это двойной ряд чисел, которые можно изобразить точками на плоскости. При их соединении отрезками прямой получается эмпирическая *линия регрессии*. Она дает наглядное представление о форме и тесноте корреляционной зависимости между варьирующими признаками. В реальности графики эмпирических рядов регрессии оказываются не плавными, а ломаными. Это объясняется тем, что общую закономерность определяют не только главные, но и второстепенные факторы. Чтобы выявить основную тенденцию, нужно заменить ломаные линии на гладкие. Процедура такой замены носит название *выравнивания* (см. рисунок 15) эмпирических рядов. Выравнивание проводится обычно двумя способами:

1) графическим — визуально намечаются срединные точки и проводится прямая;

2) способом скользящей средней — последовательно вычисляются средние из двух или трех соседних вариант эмпирического ряда, отмечаются точками и соединяются.

***Корреляционный анализ*** — комплекс методов статистического исследования взаимозависимости между переменными, связанными корреляционными отношениями.

Корреляционными считаются такие отношения между переменными, при которых выступает преимущественно нелинейная их зависимость, т.е. значение любой произвольно взятой переменной одного ряда может соответствовать некоторое количество значений переменной другого ряда, отклоняющихся в ту или иную сторону от среднего.

Корреляционный анализ выступает в качестве одного из вспомогательных методов решения теоретических задач психодиагностики и включает в себя комплекс наиболее широко применяемых статистических процедур при разработке тестовых и других методик, определения их надежности и валидности. Применяется он и для статистической обработки статистического материала в прикладных эмпирических исследованиях.

Процедуры корреляционного анализа позволяют определить степень значимости связей, установить меру и направление влияния одного из признаков (X) на результирующий признак (Y) при фиксированном значении отдельных переменных, выявить степень и направленность связи результирующего признака (Y) с совокупностью переменных $X_1, X_2, \ldots X_i$.

Корреляционному анализу подлежат как количественные, так и качественные признаки (шкалы интервалов и отношений, порядка и наименований). Может быть установлена корреляция для признаков, один из которых является качественным, а другие — количественными (биссериальная, качественных признаков).

Одним из основных принципов определения количественных критериев корреляционной связи (коэффициентов корреляции) является сравнение величин отклонений от среднего значения по каждой группе в сопряженных парах сравниваемых рядов переменных, т.е. нахождение частоты соответствия между шкалами X и Y.

Например, один и тот же испытуемый получил высокие оценки по тесту вербальных способностей (X) и по показателям успеваемости по литературе (Y), тогда произведения отклонений принимают высокие положительные значения (рисунки 16 и 17).

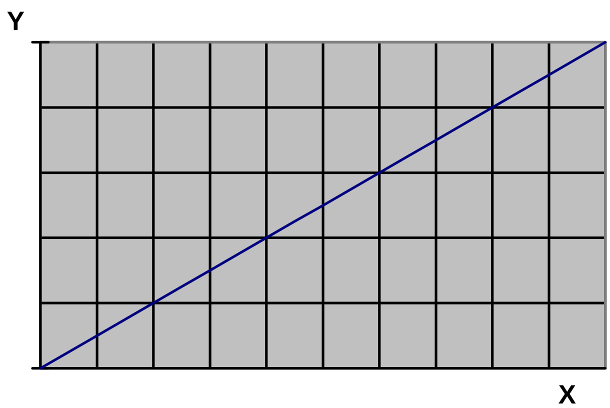



Рисунок 16 - Прямая взаимосвязь признаков X и Y ($r$ = 1)

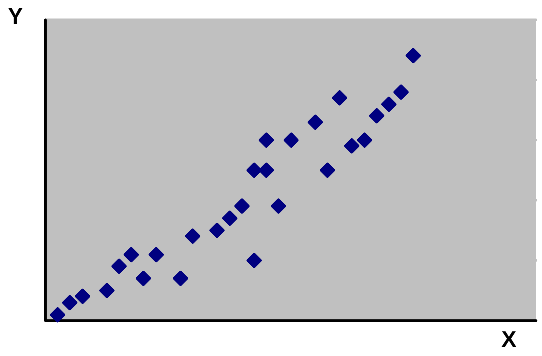



Рисунок 17 - Прямая взаимосвязь признаков X и Y *(r = 0.60)*

Если же большему X будет соответствовать малое Y, то произведение будет отрицательным, а взаимосвязь — обратной (рисунок 18 и 19).

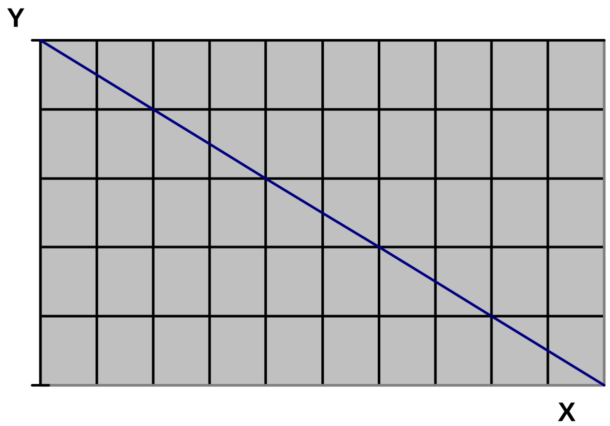



Рисунок 18 - Обратная взаимосвязь признаков X и Y *(r = -1)*

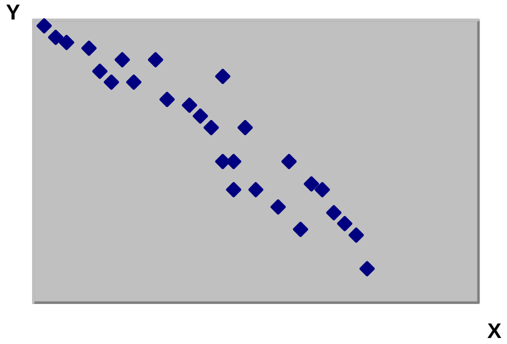



Рисунок 19- Обратная взаимосвязь признаков X и Y *(r= -0.60)*

Абсолютная величина произведений отклонений зависит от степени отклонения переменных от среднего значения в сравниваемых парах. Если X и Y не имеют систематической взаимосвязи ($r = 0$ — большие X сочетаются с малыми Y и наоборот), различные произведения будут принимать положительные и отрицательные значения, а сумма произведений сравниваемых пар будет приближаться к 0 (рисунок 20).

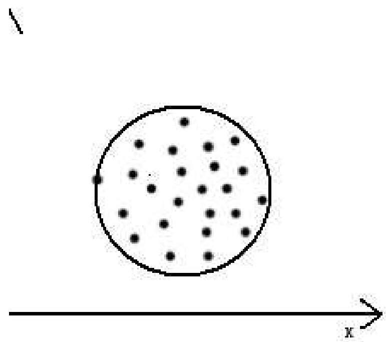



Рисунок 20 - Отсутствие взаимосвязи признаков X и Y ($r=0$)

***Факторный анализ*** — комплекс аналитических методов, позволяющих выявить скрытые, латентные признаки, а также причины их возникновения и внутренние закономерности их взаимосвязи.

Факторный анализ направлен на преобразование исходного набора признаков в более простую и содержательную форму. Центральная задача метода — переход от совокупности непосредственно измеряемых признаков изучаемого явления к комплексным, обобщенным факторам, за которыми стоят комбинации исходных признаков, выделяемых на основе их внутренних закономерностей, отражающих структуру исследуемой области явлений.

По Л. Тэрстоуну [2], этот метод применяется для «конденсирования» тестовых оценок, сведения их к относительно малому числу независимых переменных и для выделения факторов, необходимых для описания индивидуальных различий тестовых результатов. Поэтому факторный анализ — метод статистической обработки и обобщения исходных данных, научный метод подтверждения гипотез относительно природы процессов, присущих самому измеряемому свойству.

На рисунке 21 области признаков (психологических свойств, способностей), измеряемых тестами 1, 2, 3, представлены в виде прямоугольников. В заштрихованной зоне присутствуют признаки, объединенные общим для совокупности трех тестов фактором. Относительная площадь этой зоны иллюстрирует факторный вес - меру проявления выделенной латентной переменной в результатах того или иного теста, представленность в результатах теста данных выделенного универсального фактора.

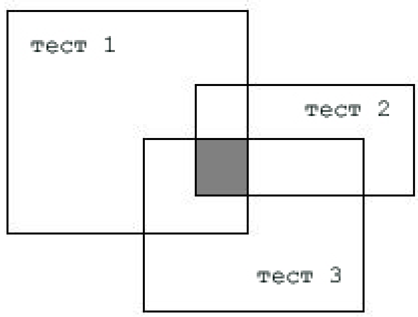



Рисунок 21 - Наглядная модель факторного анализа

Исходной информацией для проведения факторного анализа является корреляционная матрица или матрица интеркорреляций показателей тестов. В некоторых моделях факторного анализа матрица может включать и другие характеристики связей и сопряженностей между изучаемыми признаками (кластерные отношения, расстояние в семантическом пространстве и пр.).

Выделенные путем анализа интеркорреляций обобщенные факторы первого порядка могут быть представлены в виде новой матрицы, отражающей корреляции между факторами. На основе таких матриц могут определяться факторы более высоких порядков (например, в опроснике Р. Кеттелла).

## Вопросы и задания для самопроверки

1. Ниже представлены графики двух индивидуальных показателей испытуемых, измеренных и отложенных в системе координат (оси X и У отражают выраженность индивидуальных показателей). Какой из графиков соответствует положительной ($r > 0$) отрицательной ($r < 0$) корреляционной связи, где значение коэффициента корреляции будет примерно равно ($r \approx 0$)?

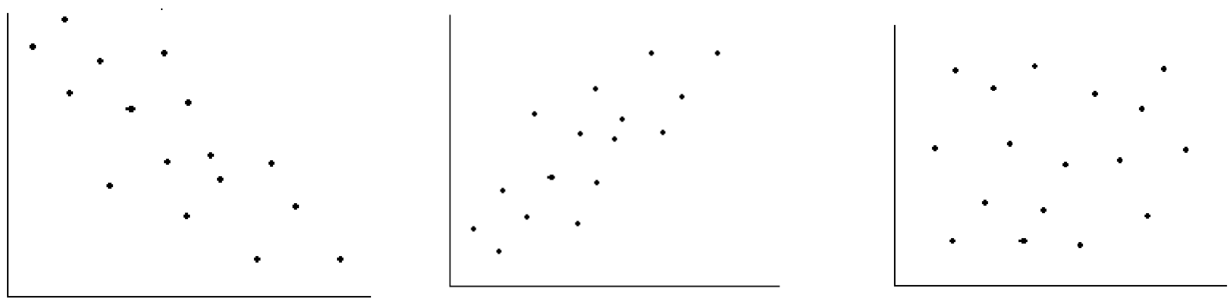


Рисунок 22 – Графики индивидуальных показателей испытуемых

2. Раскройте предназначение дисперсионного анализа?
3. Суть факторного анализа?
4. Приведите примеры экспериментов, результаты которых можно обработать с помощью факторного, дисперсионного, корреляционного анализов? Озвучьте гипотеза для каждого из методов обработки?

## Глава 9

## Решение некоторых задач с помощью программы Excel, и статистического пакета SPSS

Программа Excel входит в пакет Microsoft Office. По графике и разнообразию возможностей она, конечно, уступает специальным статистическим программам, но во многих случаях ее оказывается достаточно для анализа психологических данных [14]. Ряд статистических операций доступен через кнопку $f_x$ на стандартной панели инструментов или через раздел "Вставка" главного меню, пункт "Функция", строка "Статистические". Чтобы иметь более широкие возможности для обработки данных, надо в разделе "Сервис" главного меню выбрать пункт "Надстройки" и отметить галочкой раздел "Пакет анализа", тогда в разделе "Сервис" внизу появится строка "Анализ данных...".

*Построение гистограммы распределения*

В "Анализе данных..." выбрать строку "Гистограмма", в появившемся диалоговом окне отметить интервал с исходными данными и интервал с тем, что программой называется "карманами". Карманы - это интервалы квантования, в которых включается нижняя и исключается верхняя граница, например: [17; 18], [18;19] и т.д. Однако эти карманы должны быть записаны одним числом — своей верхней границей в заранее отведенном месте рабочего листа. В диалоговом окне вводится лишь интервал, который содержит значения карманов. Затем программа подсчитывает количество значений случайной величины, попадающих в каждый из интервалов, может быть построена и гистограмма в виде частот и накопленных частот.

Если значения карманов не вводить, то Excel сам произведет разбивку на равные интервалы, но, скорее всего они окажутся с дробными границами, что не очень удобно.

*Расчет числовых характеристик распределения*

В "Анализе данных..." выбрать строку "Описательная статистика", в диалоговом окне отметить интервал с исходными данными, указать, как требуется производить расчет: по столбцам или по строкам, ввести выходной интервал, куда будут записаны результаты вычислений (либо таблица 2х16, либо одна клетка со свободным пространством влево и вниз), и лучше всего поставить галочку только в графе "Итоговая статистика". В результате будут приведены значения среднего арифметического, стандартной ошибки среднего, стандартного отклонения, дисперсии, эксцесса, асимметрии и др.

*Расчет коэффициентов линейной корреляции*

В "Анализе данных..." выбрать строку "Корреляция", в диалоговом окне отметить интервал с исходными данными, указать, что требуется коррелировать: столбцы или строки, ввести выходной интервал. Результатом будет корреляционная матрица с нижней половиной значений. Проверять отличие коэффициентов корреляции от нуля надо отдельно по таблицам критических значений (приложение, табл.).

*Проверка гипотез по критериям*

В "Анализе данных..." выбрать строки:

1) "Парный двухвыборочный t-тест для средних" (т.е. сравнение средних значений по t-критерию для зависимых выборок);

2) "Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями" или "Двухвыборочный t-тест с разными дисперсиями" (т.е. сравнение средних значений по t-критерию для независимых выборок, в предположении одинаковых или различающихся в генеральных совокупностях дисперсий); на практике чаще используется последний тест, поскольку он имеет меньше ограничений;

3) "Двухвыборочный F-тест для дисперсии".

Появляющиеся диалоговые окна однотипны и требуют указания интервалов, в которых записаны исходные данные обеих выборок, интервала для записи результатов и величины ошибки $\alpha$, для которой будет рассчитано критическое значение критерия. При расчете t-критерия необходимо также указать гипотетическую разность средних, для проверки равенства средних в строку следует записать "0", таким образом, будет проверяться гипотеза об отсутствии различий между средними.

Результаты представляются в виде таблицы, включающей эмпирическое значение критерия и критические значения t-критерия для односторонней и двусторонней гипотезы, результаты по F-критерию представлены только односторонней гипотезой (вероятность ошибки рассматривается с одной стороны распределения).

*Определение уровня ошибки α и критического значения критерия*

Одно из удобств программы Excel состоит в том, что можно быстро по эмпирическому значению критерия найти соответствующий данному значению уровень ошибки *a* и, наоборот, по уровню ошибки *a* найти критическое значение критерия.

Для решения первой задачи надо выбрать статистические функции через кнопку $f_x$ и найти соответствующее распределение: FРАСП *(F*-распределение Фишера), СТЬЮДРАСП (t-распределение Стьюдента), ХИ2РАСП ($\chi^2$-распределение). Затем в диалоговом окне ввести эмпирическое значение критерия (оно должно быть только положительным, в том числе и для t-распределения), число степеней свободы и для критерия Стьюдента указать необходимость расчета односторонней или двусторонней вероятности (один хвост или два хвоста), для FРАСП и ХИ2РАСП рассчитываются только односторонние вероятности. При нажатии кнопки "Готово" вычисляется вероятность того, что будет превышено введенное значение x, для которого и вычисляется функция распределения. Таким образом, мы можем установить уровень ошибки *a* для данного эмпирического значения критерия с восьмью знаками после запятой, что повышает точность статистических выводов.

Можно решить и обратную задачу. Для этого среди статистических функций надо найти: FРАСПОБР (обратное F-распределение Фишера), СТЬЮДРАСПОБР (обратное t-распределение Стьюдента), ХИ2РАСПОБР (обратное $\chi^2$-распределение). Затем в диалоговом окне вводятся: значение вероятности и число степеней свободы. При нажатии кнопки "Готово" вычисляется $F$, t, $\chi^2$ значение, которые соответствуют заданной величине вероятности. То есть по величине вероятности будет найдено значение аргумента соответствующего распределения, или критическое значение критерия.

**SPSS**, статистический пакет предназначен для статистической обработки эмпирических данных [20].

Управление работой пакета происходит в основном через меню, при этом соблюдаются стандарты системы WINDOWS. Каждое окно имеет свое меню, многие команды меню доступны из различных окон.

Программа имеет меню: File (файл), Edit (правка), View (вид), Data (данные), Transform (преобразовать), Analyze (анализ), Graphs (графики), Utilities (сервис), Window (окно), Help (справка).

Для любого файла SPSS Вы можно получить следующую информацию:

- список переменных с их описанием;
- полную информацию обо всех переменных;
- перечень наблюдений.

Меню статистики, которое открывается по команде Analysis (анализ), содержит список статистических методов:

- Reports (Создание отчетов) позволяет использовать следующие

возможности: создание отчетов с использованием технологии OLAP (Online Analytical Processing) Cubes; подсчет конкретных значений (Case Summaries...); отчет по строкам (Report Summaries in Rows...); отчет по столбцам (Report Summaries in Columns...).

- Descriptive Statistics (Подсчет описательных статистик) — включает в себя частотные характеристики данных (Frequencies...), описательные статистики (Descriptives...), разведывательные статистики (Explore...), кросстабуляции (таблицы сопряженности; Cross tabs...).
- Tables (Создание пользовательских таблиц) — включает в себя создание базовых таблиц (Basic Tables...), обобщенных таб-лиц (General Tables), таблиц с множественными откликами (Multi-Response Tables...), частотных таблиц (Tables of frequencies…)
- Compare Means (Сравнение данных на основании средних величин) — включает в себя сравнение средних величин с возможностью однофакторного дисперсионного анализа (Means...), расчет Т-критерия для одной переменной (One-Sample T Test...), расчет Т-критерия для независимых переменных (Independent- Samples T Test...), расчет Т-критерия для парных переменных (Paired-Samples T Test...), однофакторный дисперсионный анализ (One-Way ANOYA...).
- General Linear Model (общая линейная модель) - различные виды дисперсионного анализа. Позволяет производить однофакторный дисперсионный анализ (Univariate...), многофакторный дисперсионный анализ (Multivariate...), дисперсионный анализ для повторяющихся измерений (Repeated Measures...). А также смешанная дисперсионная модель, так называемая компонентная дисперсия (Variance Components...).
- Correlate (Корреляционный анализ) — включает в себя вычисление парных корреляций (Bivariate...), частных корреляций (Partial...), а также вычисление расстояний между переменными, аналогично кластерному или факторному анализу (Distances...).
- Regression (Регрессионный анализ) — включает в себя построение уравнения линейной регрессии (Linear...), а также построение графиков и расчет статистик для регрессионных кривых (Curve Estimation...). Кроме того, в программе SPSS также имеется возможность расчета двоичной

логистической регрессии (Binary Logistic...), множественной логистической регрессии (Multinominal Logistic...), а также пробит-анализ (Probit...).

- Loglinear (Логлинейная модель для многомерных таблиц сопряженности) — включает в себя общие модели (General...)-, логистические (Logit...), кроме того, возможность построения пользовательских моделей (Model Selection...).
- Classify (Автоматическая классификация данных) — включает в себя упрощенный алгоритм кластерного анализа с использованием K-Means Cluster... (К-средних), различные алгоритмы иерархического кластерного анализа (Hierarchical Cluster...), а также дискриминантный анализ (Discriminant...).
- Data Reduction (Сокращение размерности данных) — включает в себя различные алгоритмы факторного анализа (Factor...), анализ соответствий (процедура аналогична факторному анализу, но применяется для номинальных данных; Correspondence Analysis...);

метод оптимального шкалирования для ранговых и номинальных данных (Optimal Scaling...).

- Scale (шкалирование) - включает в себя анализ надежности (Reliability Analysis...) и многомерное шкалирование (Multi-dimensional Scaling...).
- Nonparametric Tests (Непараметрические критерии) — включает в себя расчет критериев Хи-квадрат (Chi-Square...), биномиального критерия для дихотомических данных (Binomial...), критерия серий (Runs...), критерия Колмогорова—Смирнова для одной выборки (1-Sample K-S...), ряда критериев для двух независимых выборок (2 Independent Samples...), для К независимых выборок (К Independent Samples...), для двух связанных выборок (2 Related Samples...), для К-связанных выборок (K-Related Samples...).
- Time Series (Анализ временных рядов) — включает в себя метод экспоненциального сглаживания (Exponential Smoothing...),

авто-регрессионный анализ (Autoregression...), модель авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего (ARIMA...).

- Survival (Анализ выживаемости) —включает в себя анализ таблиц выживаемости (Life Tables...), оценивание временного интервала до наступления события по методу Каплана—Майера (Kaplan-Meier...), регрессионный анализ Кокса (Cox Regression... и CoxW/ Time-Dep Cov..).
- Multiple Responses (Анализ множественных откликов).
- Missing Value Analysis (Анализ пропущенных значений).

После каждого пункта меню стоит стрелка. Она указывает на существование следующего уровня меню. Диалоговые окна статистических процедур содержат следующие компоненты:

- Список исходных переменных — список всех переменных в файле данных. Перед именем каждой переменной стоит значок, по которому можно определить, является ли эта переменная численной или строковой.
- Список выбранных переменных — список, содержащий переменные файла данных, которые были выбраны для анализа. Список выбранных переменных также называют целевым списком или списком тестируемых переменных. Этот список имеет заголовок Variable(s) (Переменная(ые)).
- Командные кнопки — кнопки, при щелчке на которые выполняются определенные действия. Кнопки вспомогательных диалоговых окон отличаются троеточием (...) после названия.

Прежде чем начать **анализировать экспериментальные** данные, их необходимо подготовить. Для того чтобы полученные данные можно было обработать, прежде необходимо создать кодировочную таблицу. Кодировочная таблица устанавливает соответствие между отдельными вопросам анкеты и переменными, используемыми при компьютерной обработке данных, и определяет кодовые числа, соответствующие отдельным значениям переменных. Например, пункту анкеты "Пол" может быть поставлена в соответствие переменная «sex». Переменные — это ячейки памяти, в которые можно записывать значения, введенные с клавиатуры. Имена переменных в SPSS для Windows могут содержать до восьми символов. Имена переменных могут состоять из букв латинского алфавита, цифр и специальных символов; причем первым символом имени должна быть буква. Переменные могут принимать различные значения. Кодировочная таблица приводится в самой анкете.

*Для ввода данных* необходимо запустить программу SPSS для Windows, откроется редактор данных. Редактор данных это приложение, напоминающее электронную таблицу, т.е. рабочий лист, разделенный на строки и столбцы. Каждая строка соответствует одному наблюдению, как правило, это испытуемые. Каждый столбец соответствует одной переменной, т.е. в столбце хранятся ответы на отдельный вопрос.

Ввод данных начинают с определения переменных. Для этого в редакторе данных необходимо дважды щелкнуть на ячейке с надписью var или щелкните на ярлычке Variable view (просмотр переменных) на нижнем краю таблицы. Здесь последовательно строка за строкой определяют необходимые переменные.

Чтобы задать имя переменной, необходимо ввести в текстовом поле Name (Имя) выбранное имя переменной. В нашем примере мы сначала определим переменную Anketa. Для этого введите в поле Name текст, например "Anketa". При выборе имени переменной следует соблюдать определенные правила:

• Имена переменных могут содержать буквы латинского алфавита и цифры. Кроме того, допускаются специальные символы _ (подчеркивание), . (точка), а также символы @ и #. Не разрешаются, например, пробелы, знаки других алфавитов и специальные символы, такие как !, ?," и *.

• Имя переменной должно начинаться с буквы.

• Последний символ имени не может быть точкой или знаком подчеркивания.

•   Длина имени переменной не должна превышать восьми символов. Имена переменных нечувствительных к регистру, т. е. прописные и строчные буквы не различаются.

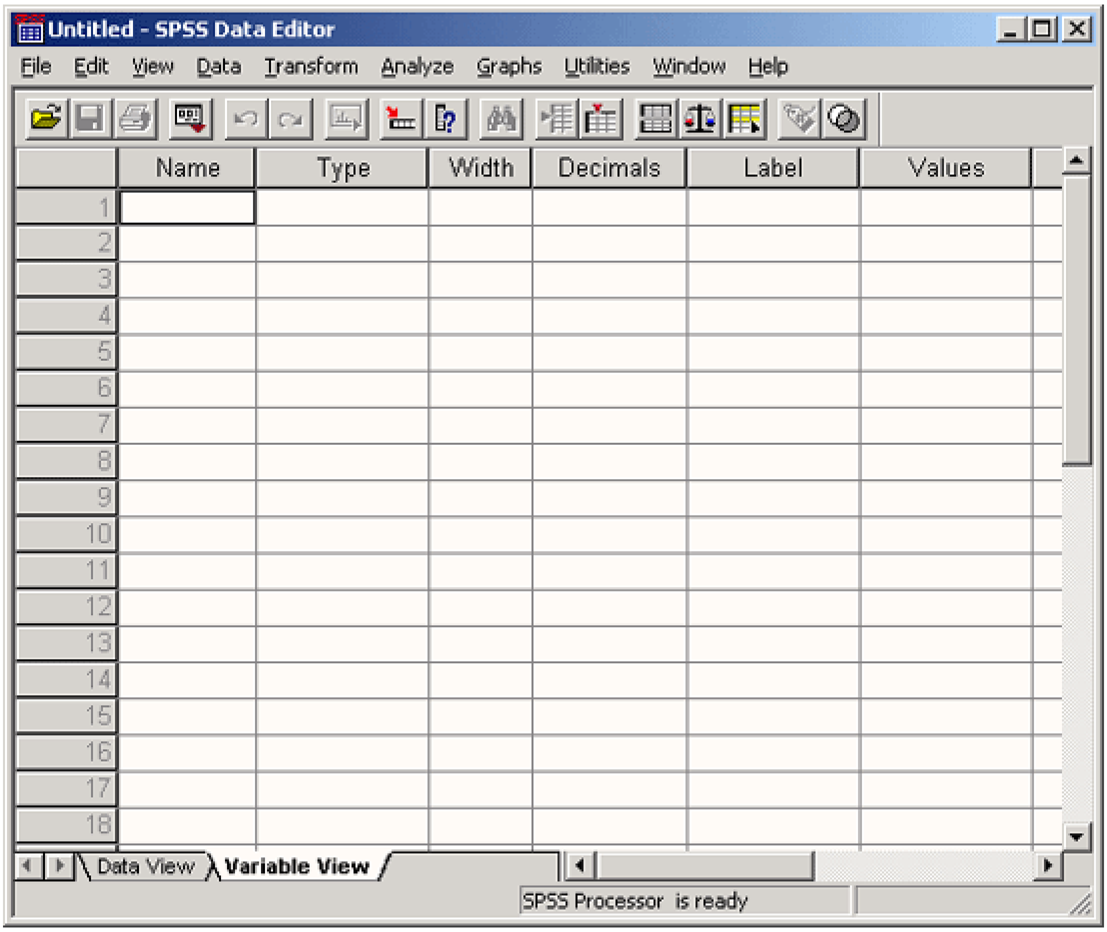



Рисунок 23 - Редактор данных: просмотр переменных

Выбор *статистической процедуры* зависит от того, какие модули установлены в программе. Данная программа предлагает следующие статистические процедуры:

- Частотный анализ
- Отбор данных
- Модификация данных
- Статистические характеристики
- Исследование данных

- Таблицы сопряженности
- Анализ множественных ответов
- Сравнение средних
- Непараметрические тесты
- Корреляции
- Регрессивный анализ
- Дисперсионный анализ
- Дискриминантный анализ
- Факторный анализ
- Кластерный анализ
- Анализ пригодности
- Стандартные графики
- Интерактивные графики
- Модуль Tables
- Экспортирование выходных данных [16].

Таблица 28- Критерий Манна-Уитни

| **Ранги 1 и 2 группы** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | VAR00001 | N | Средний ранг | Сумма рангов |
| VAR00002 | 1,00 | 20 | 22,05 | 441,00 |
| | 2,00 | 20 | 18,95 | 379,00 |
| | Всего | 40 | | |
| VAR00003 | 1,00 | 20 | 21,90 | 438,00 |
| | 2,00 | 20 | 19,10 | 382,00 |
| | Всего | 40 | | |

| **Переменные** | VAR00002 | VAR00003 | VAR00004 | VAR00005 |
|---|---|---|---|---|
| Статистика U Манна-Уитни | 169,000 | 172,000 | 174,500 | 154,500 |
| Статистика W Уилкоксона | 379,000 | 382,000 | 384,500 | 364,500 |
| Z | -,849 | -,771 | -,697 | -1,243 |
| Асимпт. знч. (двухсторонняя) | ,396 | ,441 | ,486 | ,214 |
| Точная знч. [2*(1-сторонняя Знач.)] | ,414[a] | ,461[a] | ,495[a] | ,221[a] |

Все перечисленные статистические процедуры возможно осуществить через команду Analysis (анализ). Полученные результаты можно переносить в документ WORD.

Приведеные примеры таблиц с данными, обработанными через статистический пакет наиболее часто встречающимися статистическими критериями: критерий различий Манна-Уитни и корреляционный анализ.

В первом случае (таблица 28) представлены суммы рангов по группам, что позволит нам правильно сформулировать статистические гипотезы. Вторая таблица (таблица 28) позволяет определить значение коэффициента (вторая строка); уровень значимости – 4 строка.

В таблице 29, значение коэффициента и уровень значимости представляется в одной – первой сроке по каждой переменной. Цифры означают значение, а звездочки – уровень значимости.

Таблица 29 - Корреляционная матрица

| | | VAR00001 | VAR00002 | VAR00003 | VAR00004 |
|---|---|---|---|---|---|
| VAR00001 | Корреляция Пирсона | 1 | ,166 | ,147 | ,156 |
| | Знч.(2-сторон) | | ,483 | ,535 | ,510 |
| | N | 20 | 20 | 20 | 20 |
| VAR00002 | Корреляция Пирсона | ,166 | 1 | ,632** | ,748** |
| | Знч.(2-сторон) | ,483 | | ,003 | ,000 |
| | N | 20 | 20 | 20 | 20 |
| VAR00003 | Корреляция Пирсона | ,147 | ,632** | 1 | ,571** |
| | Знч.(2-сторон) | ,535 | ,003 | | ,009 |

### Вопросы и задания для самопроверки:

1. Прочитайте следующие таблицы:

Таблица 30

| | VAR00001 | N | Средний ранг | Сумма рангов |
|---|---|---|---|---|
| VAR00002 | 1,00 | 20 | 13,40 | 268,00 |
| | 2,00 | 20 | 27,60 | 552,00 |
| | Всего | 40 | | |
| VAR00003 | 1,00 | 20 | 19,80 | 396,00 |
| | 2,00 | 20 | 21,20 | 424,00 |
| | Всего | 40 | | |
| VAR00004 | 1,00 | 20 | 22,33 | 446,50 |
| | 2,00 | 20 | 18,68 | 373,50 |
| | Всего | 40 | | |

Таблица 31

| | VAR00002 | VAR00003 | VAR00004 | VAR00005 |
|---|---|---|---|---|
| Статистика U Манна-Уитни | 58,000 | 186,000 | 163,500 | 193,500 |
| Статистика W Уилкоксона | 268,000 | 396,000 | 373,500 | 403,500 |
| Z | -3,883 | -,382 | -1,003 | -,179 |
| Асимпт. знч. (двухсторонняя) | ,000 | ,703 | ,316 | ,858 |
| Точная знч. [2*(1-сторонняя Знач.)] | ,000[a] | ,718[a] | ,327[a] | ,862[a] |

2. Таблица 32

| | | VAR00001 | VAR00002 | VAR00003 | VAR00004 | VAR00005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VAR00001 | Коэффициент корреляции | 1,000 | ,446* | ,105 | ,054 | ,077 |
| | Знч. (2-сторон) | . | ,049 | ,659 | ,820 | ,747 |
| | N | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| VAR00002 | Коэффициент корреляции | ,446* | 1,000 | ,424 | ,620** | ,413 |
| | Знч. (2-сторон) | ,049 | . | ,062 | ,004 | ,071 |

## Глава 10

## Методические рекомендации и материал по организации занятий по дисциплине «Математические методы в психологии»

Дисциплина входит в число общепрофессиональных, включенных в учебный план в соответствии с ФГОС ВПО, по решению методической комиссии по направлению подготовки 030300.62 «Психология».

***Основная цель курса для студента:*** изучение основных понятий и способов математической обработки и моделирования фактов, описывающих психику человека и животных, а также различных подходов к ним.

Весь курс состоит из четырех взаимосвязанных блоков:

1. Измерения в психологии.
2. Обработка и группировка первичных данных эксперимента.
3. Методы статистического вывода: проверка гипотез.
4. Многомерный статистический анализ и стандартизация результатов.

В соответствии с этим разделением на блоки строится весь теоретический материал курса, который рассматривается на лекциях. Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений.

Практические занятия предназначены для закрепления методов приложения теории к решению практических задач анализа и синтеза психологического знания; обучение навыкам освоения методики эксперимента и работы с нормативно-справочной литературой.

Целями семинарских занятий являются проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала студентами; восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.

В результате изучения данной дисциплины студент должен:

1. Иметь представление о сфере проблем применения математических методов в психологии, о сферах применения полученных знаний, о современном состоянии этой области знаний и перспективах ее развития.
2. Знать объект, предмет и основные подходы к ним, понятийный аппарат и фактологический материал дисциплины, методологические принципы и базовые теории, подходы к обработке и построению моделей психического.
3. Уметь выбирать модели, закономерности, методы исследования и обработки фактов психического, прогнозировать психические процессы и изменения состояния испытуемых на основе полученных данных, иметь навыки формулировать общепсихологические проблемы на языке математики, научные и эмпирические гипотезы, обобщать и интерпретировать данные согласно ранее выдвинутым целям.

**Примерные темы практических занятий**:

**Практическое занятие №1.**

**Тема** «Проблемы измерения в психологии. Типы шкал»

*План занятия.*

Анализ таблицы данных Приложения, определение типов шкал.

Определение типов данных.

Перевод данных из метрических в ранговые и в номинативные.

Работа со связанными рангами.

**Практическое занятие №2.**

**Тема** «Описательные статистики. Меры центральной тенденции и меры изменчивости»

*План занятия.*

Анализ таблицы данных Приложения, упорядочивание данных.

Нахождение среднего арифметического, моды, медианы.

Нахождение размаха, дисперсии, среднего арифметического.

Анализ нормальности распределения.

**Практическое занятие №3.**

**Тема:** «Первичное описание исходных данных»

*План занятия.*

Анализ таблицы данных Приложения, составление таблиц кросс-табуляции для номинативных данных.

Табулирование метрических данных.

Составление гистограммы, полигона, сглаженной кривой.

**Практическое занятие №4.**

**Тема:** «Выявление различий в уровне исследуемого признака»

*План занятия.*

Расчет критерия Манна-Уитни.

Расчет критерия Розембаума.

**Практическое занятие №5.**

**Тема:** «Оценка достоверности сдвига в значения исследуемого признака.»

Расчет критерия Вилкоксона.

Расчет критерия знаков.

**Практическое занятие №6.**

**Тема:** «Ранговая корреляция»

*План занятия.*

Вычисление коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

Вычисление коэффициента ранговой корреляции Спирмена при наличии связанных рангов.

**Практическое занятие №7.**

**Тема:** «Сравнение распределений»

*План занятия.*

Алгоритм вычисления эмпирического значения хи-квадрат.

Определение различия между эмпирическим и теоретическим распределением при помощи критерия хи-квадрат.

Определение различия между эмпирическим и равномерным распределением при помощи критерия хи-квадрат.

**Практическое занятие №8.**

**Тема:** «Оценка достоверности различий»

*План занятия*.

Подсчет эмпирического значения t-критерия Стюдента для независимых выборок.

Подсчет эмпирического значения t-критерия Стюдента для зависимых выборок.

**Практическое занятие №9.**

**Тема:** «Дисперсионный анализ»

*План занятия.*

Подготовка дисперсионных комплексов.

Проведение процедуры однофакторного дисперсионного анализа.

Проведение процедуры двухфакторного дисперсионного анализа.

**Практическое занятие №10.**

**Тема:** «Методы многомерного статистического анализа»

*План занятия.*

Анализ матрицы интеркорреляций.

Построение корреляционных плеяд и графов.

Анализ результатов факторного анализа.

Анализ результатов кластерного анализа.

**Практическое занятие №11.**

**Тема:** «Компьютерные пакеты прикладных статистических программ»

*План занятия.*

Обзор программ обработки данных в среде Windows: Excel, Statistica, Spss.

Наиболее общие принципы работы со статистическими программами.

Построение графиков.

Проведение процедуры сравнения средних.

Проведение факторного анализа.

Проведение кластерного анализа.

## Примерные темы семинарских занятий:

**Тема 1** «Математические методы в психологии: значение курса, основные определения и понятия»

**Тема 2** «Основные понятия математической статистики»

*План занятия*:

Планирование психологического исследования: определение выборки, предмета, объекта исследования.

Типы гипотез.

Случайное событие и статистические гипотезы.

**Тема3** «Исследовательские задачи и статистические критерии»

*План занятия:*

Виды исследовательских задач.

Статистические критерии: параметрические и непараметрические.

Мощность критерия. Уровень значимости и ошибки первого, второго родов

**Тема 4** «Многомерные статистические процедуры»

*План занятия:*

Корреляционный анализ.

Факторный анализ.

Дисперсионный анализ.

## Контрольные работы для зачета по курсу «Математические методы в психологии»

### Требования к выполнению контрольных работ.

Контрольная работа выполняется письменно. Студент должен обосновать выбор необходимого критерия, раскрыть алгоритм решения задачи и соответственно решить все задания.

### Вариант 1.

1. Проверить гипотезу о различиях по параметру ситуативной тревожности у мальчиков и девочек.

Таблица 33

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Мальчики | 33 | 43 | 45 | 52 | 32 | 54 | 48 | 46 | 51 | 52 |
| девочки | 35 | 41 | 43 | 43 | 47 | 67 | 54 | 35 | 54 | 32 |

2. Проверить гипотезу о различиях по технике чтения (слов в минуту) у первого класса в начале года и в конце учебного года.

Таблица 34

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начало уч.года | 45 | 35 | 33 | 34 | 36 | 47 | 48 | 50 | 49 | 44 | 43 | 23 | 29 | 45 | 30 |
| Конец уч.года | 55 | 56 | 45 | 40 | 55 | 56 | 45 | 56 | 60 | 65 | 66 | 61 | 50 | 50 | 45 |

3. Проверить гипотезу о взаимосвязи показателей состояния по опроснику «САН»

Таблица 35

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| С | 5 | 3 | 6 | 7 | 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 4 |
| А | 2 | 4 | 3 | 6 | 7 | 5 | 6 | 4 | 7 | 5 |
| Н | 4 | 2 | 6 | 6 | 7 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 |

4. Проверить гипотезу о различиях эмпирического распределения признака от равномерного.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 23 | 24 | 54 | 32 | 34 | 10 | 33 | 26 | 43 |

5. После проведения теста Айзенка по измерению коэффициента интеллекта (IQ) были получены следующие результаты:

Таблица 36

| показатель IQ | Число испытуемых |
|---|---|
| 96 | 19 |
| 100 | 22 |
| 104 | 26 |
| 109 | 5 |
| 113 | 21 |
| 117 | 5 |
| 121 | 3 |
| 125 | 14 |

По данным распределения определить:

1. Средний показатель IQ испытуемых;
2. Модальный показатель IQ (мода);
3. Медиальный показатель IQ (медиана);
4. Среднее квадратичное отклонение.

## Вариант 2.

1 Проверить гипотезу о различиях по параметру ситуативной тревожности у первоклассников, второклассников и третьеклассников.

Таблица 37

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| первоклассники | 34 | 35 | 55 | 56 | 23 | 34 | 58 | 56 | 31 | 42 |
| второклассники | 23 | 31 | 33 | 43 | 45 | 57 | 44 | 35 | 24 | 42 |
| третьеклассники | 33 | 43 | 45 | 52 | 32 | 54 | 48 | 46 | 51 | 52 |

2. Проверить гипотезу о различиях по технике чтения (слов в минуту) у первого класса в начале года, в середине и в конце учебного года.

Таблица 38

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Начало уч.года | 40 | 38 | 33 | 34 | 36 | 46 | 48 | 50 | 49 | 34 | 43 | 23 | 39 | 45 | 35 |
| Середина у.г. | 50 | 54 | 45 | 40 | 55 | 56 | 45 | 56 | 50 | 65 | 66 | 21 | 50 | 55 | 45 |
| Конец уч.года | 55 | 56 | 47 | 40 | 56 | 57 | 43 | 56 | 60 | 65 | 66 | 31 | 50 | 50 | 55 |

3. Проверить гипотезу о взаимосвязи показателей состояния по опроснику «САН»

Таблица 39

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| С | 3 | 4 | 5 | 3 | 5 | 4 | 2 | 7 | 6 | 5 |
| А | 2 | 4 | 3 | 6 | 7 | 5 | 6 | 4 | 7 | 5 |
| Н | 4 | 2 | 6 | 6 | 7 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 |

4. Проверить гипотезу о различиях эмпирического распределения признака от равномерного.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 33 | 26 | 34 | 25 | 24 | 16 | 43 | 36 | 43 |

5. Стандартизировать результаты исследования по распределению внимания и перевести в шкалу стенов.

Таблица 40

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 28 | 34 | 38 | 25 | 43 |
| 34 | 28 | 25 | 26 | 40 | 13 |
| 28 | 35 | 30 | 40 | 32 | 41 |
| 26 | 29 | 34 | 37 | 38 | 21 |

**Вариант 3.**

1. Стандартизировать результаты исследования по распределению внимания и перевести в шкалу стенайнов.

Таблица 41

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 28 | 34 | 38 | 25 | 43 |
| 34 | 28 | 25 | 26 | 40 | 13 |
| 28 | 35 | 30 | 40 | 32 | 41 |
| 26 | 29 | 34 | 37 | 38 | 21 |

2. Проверить гипотезу о различиях по параметру ситуативной тревожности у мальчиков и девочек.

Таблица 42

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| девочки | 23 | 31 | 33 | 43 | 45 | 57 | 44 | 35 | 24 | 42 |
| мальчики | 33 | 43 | 45 | 52 | 32 | 54 | 48 | 46 | 51 | 52 |

3. Проверить гипотезу о различиях по технике чтения (слов в минуту) у мальчиков и девочек первого класса в начале года и в конце учебного года.

Таблица 43

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| мальчики | Начало уч.года | 40 | 38 | 33 | 34 | 36 | 46 | 48 | 50 | 49 | 34 | 43 | 23 | 39 | 45 | 35 |
| | Конец уч.года | 55 | 56 | 47 | 40 | 56 | 57 | 43 | 56 | 60 | 65 | 66 | 31 | 50 | 50 | 55 |
| девочки | Начало у.г. | 45 | 35 | 33 | 34 | 36 | 47 | 48 | 50 | 49 | 44 | 43 | 23 | 29 | 45 | 30 |
| | Конец у.г. | 50 | 54 | 45 | 40 | 55 | 56 | 45 | 56 | 50 | 65 | 66 | 21 | 50 | 55 | 45 |

4. Проверить гипотезу о различиях эмпирического распределения признака от равномерного.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 33 | 24 | 54 | 32 | 35 | 10 | 33 | 26 | 23 |

5. После проведения теста Айзенка по измерению коэффициента интеллекта (IQ) были получены следующие результаты:

Таблица 44

| Показатель IQ | Число испытуемых |
|---|---|
| 95 | 15 |
| 98 | 20 |
| 102 | 23 |
| 105 | 2 |
| 108 | 28 |
| 111 | 15 |
| 114 | 3 |
| 117 | 13 |

По данным распределения определить:

1. Средний показатель IQ испытуемых;
2. Модальный показатель IQ (мода);
3. Медиальный показатель IQ (медиана);
4. Среднее квадратичное отклонение.

## Вариант 4 (для работы в статистическом пакете SPSS).

**1.** Для данных таблицы 45, полученных в результате проведения теста «Самоотношение» С.Р.Пантилеева, рассчитайте показатели описательной статистики: среднее значение, выборочную дисперсию, стандартное отклонение, моду и медиану.

Таблица 45-Данные психологического измерения самоотношения старшеклассников тестом С.Р. Пантилеева (баллы)

| № исп. | Самоуверенность | само-руководство | Отраженное само-отношение | Самоценность, самопринятие | Самопривязанность | Внутр. конфликтность | само-обвинение |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 1 | 1 |
| 2 | 5 | 5 | 3 | 2 | 5 | 4 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 7 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 4 | 2 | 6 | 2 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| 6 | 3 | 4 | 5 | 4 | 2 | 1 | 4 |
| 7 | 2 | 6 | 3 | 3 | 1 | 3 | 5 |
| 8 | 6 | 5 | 2 | 4 | 3 | 1 | 5 |
| 9 | 5 | 4 | 1 | 5 | 5 | 0 | 4 |
| 10 | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 |
| 11 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 5 | 4 |
| 12 | 0 | 5 | 2 | 4 | 4 | 1 | 3 |
| 13 | 5 | 5 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 14 | 8 | 4 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| 15 | 5 | 2 | 4 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| 16 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 17 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| 18 | 2 | 5 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 |
| 19 | 3 | 2 | 4 | 2 | 6 | 2 | 3 |
| 20 | 5 | 2 | 4 | 2 | 5 | 6 | 4 |
| 21 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 3 |
| 22 | 2 | 1 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 23 | 5 | 2 | 5 | 3 | 0 | 3 | 5 |
| 24 | 7 | 5 | 4 | 5 | 5 | 1 | 6 |
| 25 | 4 | 2 | 3 | 6 | 2 | 4 | 4 |
| 26 | 3 | 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 3 |
| 27 | 5 | 6 | 4 | 3 | 0 | 2 | 2 |
| 28 | 3 | 4 | 5 | 6 | 3 | 1 | 2 |
| 29 | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 0 |
| 30 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 | 5 | 1 |
| 31 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 |
| 32 | 5 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | 5 |
| 33 | 8 | 6 | 1 | 2 | 2 | 1 | 6 |
| 34 | 5 | 0 | 3 | 1 | 4 | 4 | 3 |
| 35 | 4 | 1 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| 36 | 3 | 5 | 4 | 3 | 5 | 2 | 4 |
| 37 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 5 | 5 |
| 38 | 3 | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 39 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 | 4 |
| 40 | 7 | 5 | 2 | 6 | 3 | 0 | 5 |

**2.** Сравните выраженность фактора B (мышление конкретное, ограниченное – мышление абстрактное) теста Р.Кеттелла (16-факторный личностный опросник) у игрозависимых и игронезависимых студентов (таблица 46).

Таблица 46 - Данные выраженности фактора B теста Р.Кеттелла (баллы) у игрозависимых и игронезависимых студентов

| игро-независимые | игро-зависимые |
|---|---|
| 5 | 8 |
| 8 | 5 |
| 8 | 7 |
| 10 | 3 |
| 7 | 10 |
| 8 | 8 |
| 5 | 10 |
| 8 | 8 |
| 8 | 7 |
| 3 | 5 |
| 8 | 1 |
| 10 | 1 |
| 5 | 8 |
| 8 | 5 |
| 8 | 7 |
| 10 | 3 |
| 7 | 10 |
| 8 | 8 |
| 3 | 10 |

**3.** Измеряли психологический показатель тревожности до проведения тренинга и после его завершения (таблица 47). Проверьте существование сдвига значений этого показателя и определите его направленность.

Таблица 47- Значения показателя тревожности (баллы) до начала и после проведения психологического тренинга

| до тренинга | после тренинга |
|---|---|
| 5 | 10 |
| 5 | 10 |
| 6 | 12 |
| 8 | 4 |
| 5 | 5 |
| 7 | 8 |
| 8 | 9 |
| 9 | 9 |
| 10 | 6 |
| 10 | 3 |
| 10 | 2 |
| 10 | 2 |
| 5 | 4 |
| 4 | 7 |
| 4 | 8 |
| 7 | 5 |
| 4 | 5 |
| 5 | 8 |
| 5 | 10 |
| 5 | 10 |
| 6 | 12 |
| 8 | 4 |

**4.** Вычислите коэффициенты ранговой корреляции Спирмена между фактором «F» (серьезный – беспечный) теста Р.Кеттелла и показателями механизмов психологической защиты педагогов (таблица 48).

Таблица 48- Значения фактора «F» теста Р.Кеттелла и показателей механизмов психологической защиты педагогов (баллы)

| Фактор "F" | Реактивное образование (1) | Отрицание (2) | Замещение (3) | Регрессия (4) | Компенсация (5) | Проекция (6) | Вытеснение (7) | Рационализация (8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 5 | 2 | 8 | 5 | 3 | 8 | 5 |
| 2 | 10 | 4 | 3 | 8 | 5 | 6 | 5 | 8 |
| 2 | 10 | 8 | 6 | 6 | 4 | 8 | 4 | 8 |
| 1 | 10 | 8 | 5 | 5 | 7 | 9 | 4 | 7 |
| 2 | 12 | 1 | 8 | 9 | 8 | 9 | 5 | 4 |
| 5 | 4 | 2 | 9 | 9 | 8 | 9 | 5 | 4 |
| 2 | 5 | 3 | 10 | 2 | 6 | 2 | 5 | 5 |
| 2 | 8 | 2 | 3 | 5 | 2 | 5 | 4 | 6 |
| 1 | 9 | 2 | 6 | 4 | 9 | 4 | 4 | 10 |
| 2 | 9 | 4 | 5 | 7 | 6 | 1 | 5 | 10 |
| 5 | 6 | 1 | 8 | 8 | 3 | 2 | 5 | 10 |
| 1 | 3 | 1 | 9 | 8 | 2 | 2 | 6 | 12 |
| 2 | 2 | 2 | 10 | 6 | 2 | 3 | 8 | 4 |
| 3 | 2 | 5 | 5 | 8 | 4 | 3 | 5 | 5 |
| 2 | 7 | 5 | 7 | 5 | 7 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 5 | 2 | 8 | 2 | 8 | 5 | 8 | 9 |
| 3 | 5 | 3 | 8 | 10 | 6 | 5 | 9 | 9 |
| 6 | 6 | 3 | 4 | 10 | 5 | 4 | 10 | 6 |
| 12 | 8 | 3 | 5 | 5 | 4 | 2 | 10 | 3 |
| 5 | 9 | 2 | 8 | 4 | 4 | 2 | 10 | 2 |
| 2 | 9 | 5 | 8 | 7 | 5 | 5 | 10 | 2 |
| 2 | 10 | 4 | 6 | 8 | 6 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 4 | 4 | 9 | 15 | 3 | 7 | 4 | 7 |
| 2 | 7 | 7 | 9 | 15 | 3 | 7 | 4 | 8 |
| 5 | 5 | 4 | 8 | 15 | 5 | 5 | 7 | 5 |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 14 | 8 | 6 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 18 | 7 | 6 | 5 | 8 |
| 0 | 3 | 5 | 4 | 16 | 7 | 2 | 5 | 3 |
| 0 | 5 | 6 | 5 | 15 | 5 | 3 | 6 | 8 |
| 5 | 8 | 2 | 6 | 10 | 6 | 3 | 6 | 7 |
| 1 | 9 | 6 | 6 | 8 | 6 | 2 | 9 | 8 |
| 2 | 6 | 8 | 8 | 8 | 2 | 4 | 5 | 9 |

**5.** С помощью Н-критерия Крускала-Уоллеса докажите гипотезу о существовании влияния уровня интеллекта на успешность решения задач старшеклассниками (таблица 49) и постройте графическую зависимость.

Таблица 49- Успешность решения задач старшеклассниками (баллы) с различным уровнем интеллекта (низким, средним, выше среднего и высоким)

| низкий | средний | выше среднего | высокий |
|---|---|---|---|
| 32 | 39 | 41 | 48 |
| 36 | 39 | 43 | 48 |
| 37 | 40 | 43 | 49 |
| 37 | 41 | 44 | |
| | 41 | 45 | |
| | | 45 | |
| | | 47 | |

**Примерный перечень вопросов к зачетному экзамену по дисциплине «Математические методы в психологии»**

1. Процесс измерений (определение и особенности психологических измерений).
2. Методы математической статистики. Общая характеристика, сферы применения в психологии.
3. Степени точности измерений – измерительные шкалы.
4. Шкалы. Общая характеристика. Номинальная шкала. Шкала рангов.
5. Шкалы. Общая характеристика. Шкала интервалов. Шкала отношений.
6. Группировка первичных данных. Понятие. Виды. Общая характеристика.
7. Статистические ряды: атрибутивный, вариационный, безинтервальный, интервальный.
8. Алгоритм построения группировки первичных данных.
9. Графические способы построения вариационных рядов.
10. Основные характеристики варьирующих объектов: меры центральной тенденции.
11. Основные характеристики варьирующих объектов: меры изменчивости.
12. Проверка нормальности распределения результативного признака. Зависимость нормальности распределения от вариации мер центральной тенденции.
13. Показатели асимметрии при проверке нормальности распределения результативного признака.
14. Показатели квартильного отклонения при проверке нормальности распределения результативного признака.
15. Проверка нормальности распределения результативного признака с помощью асимметрии и эксцесса.
16. Параметрические критерии. Возможности и ограничения.
17. Непараметрические критерии. Возможности и ограничения.

18. Исследовательские задачи и методы их решения.
19. Выявление различий в уровне исследуемого признака. Гипотезы. Основная характеристика критерий.
20. Q – критерий Розенбаума. Общая характеристика. Возможности и ограничения.
21. U – критерий Манна-Уитни. Общая характеристика. Возможности и ограничения.
22. H – критерий Крускала –Уоллиса; S – критерий тенденций Джонкира. Общая характеристика. Возможности и ограничения.
23. Сдвиг. Общая характеристика. Виды сдвигов.
24. Классификация сдвигов и критериев оценки их статистической достоверности.
25. T – критерий Вилкоксона. Сущность и механизм применения.
26. G – критерий знаков. Сущность. Механизм применения.
27. $X^2$ – критерий Фридмана. Сущность. Механизм применения.
28. L – критерий тенденций Пейджа. Общая характеристика.
29. Выявление различий в распределении признака.
30. $X^2$ – критерий Пирсона. Сущность. Механизм применения.
31. Ранговый коэффициент корреляции Спирмена. Сущность. Механизм применения.
32. Линейный коэффициент корреляции Пирсона. Сущность. Механизм применения.
33. Параметрические методы сравнения двух выборок.
34. Непараметрические методы сравнения выборок.
35. Исследование степени согласованности изменений двух или нескольких признаков.
36. Корреляционная взаимосвязь и корреляционная зависимость. Механизм применения.

37.Параметрические методы в проверке исследовательских гипотез. Общая характеристика и механизмы применения.
38.Т – критерий Стьюдента. Сущность и механизмы применения.
39.F – критерий Фишера. Сущность и особенности применения.
40.Дисперсионный анализ – определение и общая характеристика
41. Процедура дисперсионного анализа.
42.Регрессионный анализ – определение и общая характеристика.
43. Процедура построения линий и решения уравнений регрессии.
44.Корреляционный анализ – определение и содержательная характеристика.
45.Процедура корреляционного анализа.
46.Факторный анализ. Определение и виды факторного анализа.
47.Принципы планирования эксперимента в психологии.
48.Репрезентативность как свойство выборочной совокупности. Условия обеспечения репрезентативности.
49.Процедура определение объема выборки и факторы, на него влияющие.
50.Стандартизация экспериментальной процедуры. Формы и методы стандартизации.

## *Глоссарий*

***Альтернативная гипотеза*** – гипотеза о наличии различий в выборках и условиях экспериментов, различие двух распределений и т.п.

***Валидность*** – соответствие конкретного исследования, методики принятым стандартам.

***Варьрование*** – изменение величины признака в определенных пределах при переходе от одной единицы наблюдения к другой.

***Верификация*** – подтверждение экспериментальной гипотезы.

***Выборка*** – множество испытуемых, выбранных для участия в исследовании с помощью определенной процедуры из генеральной совокупности.

***Генеральная совокупность*** – множество объектов эквивалентных по конечному множеству свойств.

***Гипотеза*** – утверждение о существовании явления, истинность или ложность которого можно проверить экспериментальным путем.

***Группировка*** – процесс систематизации результатов массовых наблюдений, объединение их в относительно однородные группы по некоторому признаку.

***Измерение*** – определение степени выраженности какого-либо свойства предмета.

***Корреляционная зависимость*** означает изменения, которые вносят значения одного признака в вероятность появления в значении другого признака.

***Корреляционная связь*** – согласованное изменение двух признаков (единичная корреляция) или многих признаков (множественная корреляция)

***Математическая обработка*** – оперирование со значениями признака, полученными у испытуемых в психологическом исследовании.

***Меры изменчивости*** – статистические показатели вариации (разброса) переменных относительно среднего значения, степени индивидуальных отклонений от центральной тенденции распределения.

***Меры центральной тенденции*** – характеристики совокупности вариат (переменных), указывающие на наиболее типичный, репрезентативный для изучаемой выборки результат.

***Мощность критерия*** – способность критерия выявлять различия если они есть.

***Надежность*** – точность проведенных с помощью методики измерений

***Непараметрические критерии*** – позволяют оценить лишь средние тенденции в варьировании исследуемого признака.

***Нулевая гипотеза*** – гипотеза об отсутствии отличий в выборках, в условиях экспериментов, о сходстве двух распределений и т.д.

***Объективность методики*** – степень независимости результатов наблюдения и эксперимента от пользователя

***Ошибка измерения*** – разница между результатами измерений и действительно существующими значениями измеряемой величины

***Параметрические критерии*** – позволяют прямо оценить различия в средних, в дисперсиях, полученных в двух выборках. Применяются при условии нормального или близкого к нормальному распределению признака.

***Переменные*** – параметр реальности, который может изменяться и/ или изменятся в экспериментальном исследовании.

***Признак*** – свойство, проявление которым один предмет отличается от другого.

***Рандомизация*** – стратегия случайного отбора или распределения испытуемых, при которой все субъекты имеют равные шансы попасть в группу.

***Распределение*** – частота встречаемости случайной величины.

***Случайная величина*** – переменная, которая принимает свои значения из некоторого множества

***Статистическая гипотеза*** - предположение, имеющее вероятностный характер, обладающее неопределенностью в отношении своей истинности.

***Статистическая значимость*** – основной результат проверки статистической гипотезы. Количественная оценка надежности связи, различий.

***Статистический критерий*** – инструмент определения уровня статистической значимости.

***Статистическая совокупность*** – множество относительно однородных, но индивидуально различных единиц, объединенных для совместного изучения.

***Уровень (показатель) признака*** – количественные характеристики признака.

***Фальсифицируемость*** – свойство любой научной теории быть опровержимой.

## Список использованных источников


1. Анастази, А. Психологическое тестирование = Psychological Testing / А. Анастази, С. Урбина .- 7-е изд. - СПб. : Питер, 2009. - 688 с.

2. Бурлачук, Л. Ф. Словарь-справочник по психодиагностике / Л. Ф. Бурлачук, С. М. Морозов . - СПб.: Питер, 2004. - 520 с.

3. Венецкий, И. Г. Вариационные ряды и их характеристики / И.Г. Венецкий.— М., 1970. – 160 с.

4. Готтсданкер, Р. Основы психологического эксперимента: учеб. пособие для вузов: пер. с англ. / Р. Готтсданкер . - М.: Академия, 2005. - 368 с.

5. Дружинин, В.Н. Структура и логика психологического исследования / В.Н. Дружинин.– М.: Институт психологии РАН, 1994. – 185с.

6. Дружинин, В. Н. Экспериментальная психология: учеб. пособие для вузов / В. Н. Дружинин. - СПб. : Питер, 2003. - 319 с.

7. Ингенкамп, К. Педагогическая диагностика / К. Ингенкамп.- М.: Педагогика, 1991. – 240с.

8. Кендалл, М., Статистические выводы и связи / М.Кендалл, А.Стюарт.- М.: Педагогика, 1978 – 899 с.

9.Крамер, Д. Математическая обработка данных в социальных науках: современные методы: учеб. пособие для вузов: пер. с англ. / Д. Крамер. - М. : Академия, 2007. - 288 с.

10. Митина, О. В. Математические методы в психологии: практикум: учеб. пособие для вузов / О. В. Митина - М.: Аспект Пресс, 2009. - 238 с.

11. Наследов, А. Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных: учеб. пособие для вузов / А. Д. Наследов . - СПб. : Речь, 2008. - 391 с.

12.Практикум по общей, экспериментальной и прикладной психологии: учеб. пособие для вузов / под ред. А. А. Крылова, С. А. Маничева - СПб.: Питер, 2001. - 560 с.

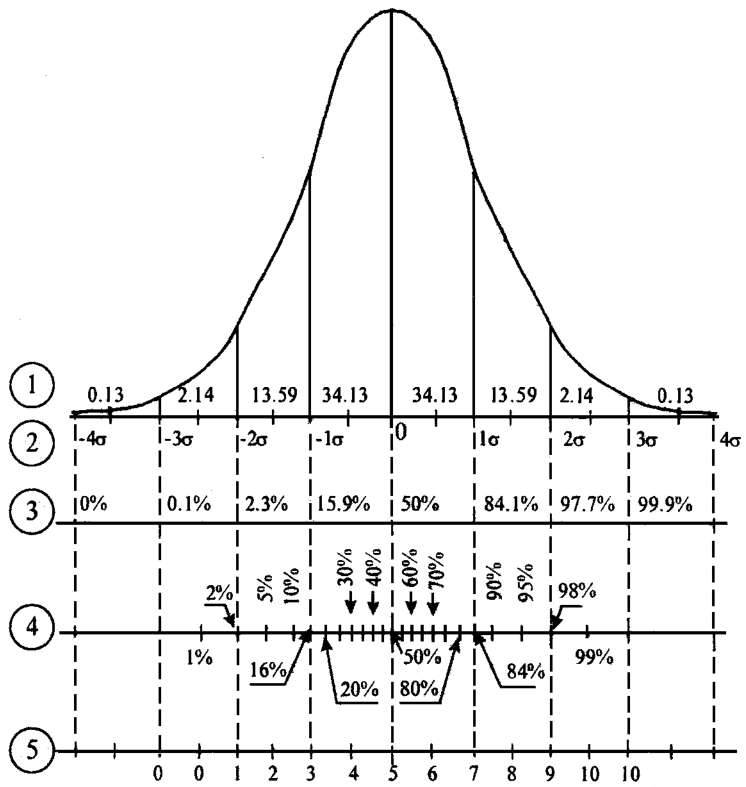
13.Резник, А.Д. Книга для тех, кто не любит статистику, но вынужден ею пользоваться. Непараметрическая статистика в примерах, упражнениях и рисунках / А.Д. Резник – СПб.: Речь, 2008. – 265 с.

14. Сидоренко, Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко. - СПб.: Речь, 2007. - 350 с.

15. Суходольский, Г. В. Основы математической статистики для психологов / Г.В. Суходольский. - СПб.: Издательство С. -Петербургского университета, 1998. - 464 с.

16. Шишлянникова, Л.М. Математическое сопровождение научной работы с помощью статистического пакета SPSS for Windows 11.5.0: учебно-методическое пособие /Л.М. Шишлянникова М.: [б.и], 2005

# Приложение А
**(*обязательное*)**
## Схемы вычисления стандартных оценок, таблицы критических значений




Условное обозначение: 1 -процентное выражение отрезков шкалы стандартных отклонений; 2 — среднее квадратичное отклонение; 3 — кумулятивная частота в процентном выражении; 4 — процентная ранговая шкала; 5 — шкала стенов Кеттелла.

Рисунок А.1 - Схема вычисления стандартных оценок

***Таблица А.1*** **- Критические значения F-критерия Фишера (для $\alpha$ =0,05) [14]**
(для проверки направленных гипотез — односторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)

| *df* (знам.) | *df* (числителя) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 10 | 4,965 | 4,103 | 3,708 | 3,478 | 3,326 | 3,217 | 3,135 | 3,072 | 3,020 | 2,978 | 2,845 | 2,774 | 2,730 | 2,700 | 2,678 | 2,661 | 2,648 | 2,637 |
| 11 | 4,844 | 3,982 | 3,587 | 3,347 | 3,204 | 3,095 | 3,012 | 2,948 | 2,896 | 2,854 | 2,719 | 2,646 | 2,601 | 2,570 | 2,548 | 2,531 | 2,517 | 2,507 |
| 12 | 4,747 | 3,885 | 3,490 | 3,259 | 3,106 | 2,996 | 2,913 | 2,849 | 2,796 | 2,753 | 2,617 | 2,544 | 2,498 | 2,466 | 2,443 | 2,426 | 2,412 | 2,401 |
| 13 | 4.667 | 3,806 | 3,41 1 | 3,179 | 30?5 | 2,915 | 7,832 | 2,767 | 2,714 | 2,671 | 2,533 | 2,459 | 2,412 | 2.380 | 2,357 | 2,339 | 2,325 | 2,314 |
| 14 | 4.600 | 3,739 | 3,344 | 3,1 12 | 2,958 | 2,848 | 2,764 | 2,699 | 2,646 | 2,602 | 2,463 | 2,388 | 2,341 | 2,308 | 2,284 | 2,266 | 2,252 | 2,241 |
| 15 | 4,543 | 3,682 | 3,287 | 3,056 | 2,901 | 2,790 | 2,707 | 2,641 | 2,588 | 2,544 | 2,403 | 2,328 | 2,280 | 2,247 | 2,223 | 2,204 | 2,190 | 2,178 |
| 16 | 4,494 | 3,634 | 3,239 | 3,007 | 2,852 | 2,741 | 2,657 | 2,591 | 2,538 | 2,494 | 2,352 | 2,276 | 2,227 | 2,194 | 2,169 | 2,151 | 2,136 | 2,124 |
| 17 | 4,451 | 3,592 | 3,197 | 2,965 | 2,810 | 2,699 | 2,614 | 2,548 | 2,494 | 2,450 | 2,308 | 2,230 | 2,181 | 2,148 | 2,123 | 2,104 | 2,089 | 2,077 |
| 18 | 4,414 | 3,555 | 3,160 | 2,928 | 2,773 | 2,661 | 2,577 | 2,510 | 2,456 | 2,412 | 2,269 | 2,191 | 2,141 | 2,107 | 2,082 | 2,063 | 2,048 | 2,035 |
| 19 | 4,381 | 3,522 | .3,127 | 2,895 | 2,740 | 2,628 | 2,544 | 2,477 | 2,423 | 2,378 | 2,234 | 2,155 | 2,106 | 2,07! | 2,046 | 2,026 | 2,011 | 1,999 |
| 20 | 4,351 | 3,493 | 3,098 | 2,866 | 2,711 | 2,599 | 2,514 | 2,447 | 2,393 | 2,348 | 2,203 | 2,124 | 2,074 | 2,039 | 2,013 | 1,994 | 1,978 | 1,966 |
| 21 | 4,325 | 3,467 | 3,072 | 2,840 | 2,685 | 2,573 | 2,488 | 2,420 | 2,366 | 2,321 | 2,176 | 2,096 | 2,045 | 2,010 | 1,984 | 1,965 | 1,949 | 1,936 |
| 22 | 4,301 | 3,443 | 3,049 | 2,817 | 2,661 | 2,549 | 2,464 | 2,397 | 2,342 | 2,297 | 2,151 | 2,071 | 2,020 | 1,984 | 1,958 | 1,938 | 1,922' | 1,909 |
| 23 | 4,279 | 3,422 | 3,028 | 2,796 | 2,640 | 2,528 | 2,442 | 2,375 | 2,320 | 2,275 | 2,128 | 2,048 | 1,996 | 1,961 | 1,934 | 1,914 | 1,898 | 1,885 |
| 24 | 4,260 | 3,403 | 3,009 | 2,776 | 2,621 | 2,508 | 2,423 | 2,355 | 2,300 | 2,255 | 2,108 | 2,027 | 1,975 | 1,939 | 1,912 | 1,892 | 1,876 | 1,863 |
| 25 | 4,242 | 3,385 | 2,991 | 2,759 | 2,603 | 2,490 | 2,405 | 2,337 | 2,282 | 2,236 | 2,089 | 2,007 | 1,955 | 1,919 | 1,892 | 1,872 | 1,855 | 1,842 |
| 26 | 4,225 | 3,369 | 2,975 | 2,743 | 2,587 | 2,474 | 2,388 | 2,321 | 2,265 | 2,220 | 2,072 | 1,990 | 1,938 | 1,901 | 1,874 | 1,853 | 1,837 | 1,823 |
| 27 | 4,210 | 3,354 | 2,960 | 2,728 | 2,572 | 2,459 | 2,373 | 2,305 | 2,250 | 2,204 | 2,056 | 1,974 | 1,921 | 1,884 | 1,857 | 1,836 | 1,819 | 1,806 |
| 28 | 4,196 | 3,340 | 2,947 | 2,714 | 2,558 | 2,445 | 2,359 | 2,291 | 2,236 | 2,190 | 2,041 | 1,959 | 1,906 | 1,869 | 1,841 | 1,820 | 1,803 | 1,790 |
| 29 | 4,183 | 3,328 | 2,934 | 2,701 | 2,545 | 2,432 | 2,346 | 2,278 | 2,223 | 2,177 | 2,027 | 1,945 | 1,891 | 1,854 | 1,827 | 1,806 | 1,789 | 1,775 |
| 30 | 4,171 | 3,316 | 2,922 | 2,690 | 2,534 | 2,421 | 2,334 | 2,266 | 2,211 | 2,165 | 2,015 | 1,932 | 1,878 | 1,841 | 1,813 | 1,792 | 1,775 | 1,761 |
| 35 | 4,121 | 3,267 | 2,874 | 2,641 | 2,485 | 2,372 | 2,285 | 2,217 | 2,161 | 2,114 | 1,963 | 1,878 | 1,824 | 1,786 | 1,757 | 1,735 | 1,718 | 1,703 |
| 40 | 4,085 | 3,232 | 2,839 | 2,606 | 2,449 | 2,336 | 2,249 | 2,180 | 2,124 | 2,077 | 1.924 | 1,839 | 1,783 | 1,744 | 1,715 | 1,693 | 1,675 | 1,660 |
| 45 | 4,057 | 3,204 | 2,812 | 2,579 | 2,422 | 2,308 | 2,221 | 2,152 | 2,096 | 2,049 | 1,895 | 1,808 | 1,752 | 1,713 | 1.683 | 1,660 | 1,642 | 1,626 |
| 50 | 4,034 | 3.183 | 2,790 | 2,557 | 2,400 | 2,286 | 2.199 | 2,130 | 2,073 | 2,026 | 1.871 | 1,784 | 1,727 | 1,687 | 1,657 | 1,634 | 1.615 | 1 599 |

*Таблица А.2 -* **Критические значения F-критерия Фишера (для $\alpha$ =0,01) [14]**
(для проверки направленных гипотез — односторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)

| *df* (знам.) | *df* (числителя) | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 10 | 10,04 | 7,559 | 6,552 | 5,994 | 5,636 | 5,386 | 5,200 | 5,057 | 4,942 | 4,849 | 4,558 | 4,405 | 4,311 | 4,247 | 4,201 | 4,165 | 4,138 | 4,115 |
| 11 | 9,646 | 7,206 | 6,217 | 5,668 | 5,316 | 5,069 | 4,886 | 4,744 | 4,632 | 4,539 | 4,251 | 4,099 | 4,005 | 3,941 | 3,895 | 3,860 | 3,832 | 3,810 |
| 12 | 9,330 | 6,927 | 5,953 | 5,412 | 5,064 | 4,821 | 4,640 | 4,499 | 4,388 | 4,296 | 4,010 | 3,858 | 3,765 | 3,701 | 3,654 | 3,619 | 3,592 | 3,569 |
| 13 | 9,074 | 6,701 | 5.739 | 5,205 | 4,862 | 4,620 | 4,441 | 4,302 | 4,191 | 4,100 | 3,815 | 3,665 | 3,571 | 3,507 | 3,461 | 3,425 | 3,398 | 3,375 |
| 14 | 8,862 | 6,515 | 5,564 | 5,035 | 4,695 | 4,456 | 4,278 | 4,140 | 4,030 | 3,939 | 3,656 | 3,505 | 3,412 | 3,348 | 3,301 | 3,266 | 3,238 | 3,215 |
| 15 | 8,683 | 6,359 | 5,417 | 4,893 | 4,556 | 4,318 | 4,142 | 4,004 | 3,895 | 3,805 | 3,522 | 3,372 | 3,278 | 3,214 | 3,167 | 3,132 | 3,104 | 3,081 |
| 16 | 8,531 | 6,226 | 5,292 | 4,773 | 4,437 | 4,202 | 4,026 | 3,890 | 3,780 | 3,691 | 3,409 | 3,259 | 3,165 | 3,101 | 3,054 | 3,018 | 2,990 | 2,967 |
| 17 | 8,400 | 6,112 | 5,185 | 4,669 | 4,336 | 4,101 | 3,927 | 3,791 | 3,682 | 3,593 | 3,312 | 3,162 | 3,068 | 3,003 | 2,956 | 2,920 | 2,892 | 2,869 |
| 18 | 8,285 | 6,013 | 5,092 | 4,579 | 4,248 | 4,015 | 3,841 | 3,705 | 3,597 | 3,508 | 3,227 | 3,077 | 2,983 | 2,919 | 2,871 | 2,835 | 2,807 | 2,784 |
| 19 | 8,185 | 5,926 | 5,010 | 4,500 | 4,171 | 3,939 | 3,765 | 3,631 | 3,523 | 3,434 | 3,153 | 3,003 | 2,909 | 2,844 | 2,797 | 2,761 | 2,732 | 2,709 |
| 20 | 8,096 | 5,849 | 4,938 | 4,431 | 4,103 | 3,871 | 3,699 | 3,564 | 3,457 | 3,368 | 3,088 | 2,938 | 2,843 | 2,778 | 2,731 | 2,695 | 2,666 | 2,643 |
| 21 | 8,017 | 5,780 | 4,874 | 4,369 | 4,042 | 3,812 | 3,640 | 3,506 | 3,398 | 3,310 | 3,030 | 2,880 | 2,785 | 2,720 | 2,672 | 2,636 | 2,607 | 2,584 |
| 22 | 7,945 | 5,719 | 4,817 | 4,313 | 3,988 | 3,758 | 3,587 | 3,453 | 3,346 | 3,258 | 2,978 | 2,827 | 2,733 | 2,667 | 2,620 | 2,583 | 2,554 | 2,531 |
| 23 | 7,881 | 5,664 | 4,765 | 4,264 | 3,939 | 3,710 | 3,539 | 3,406 | 3,299 | 3,211 | 2,931 | 2,780 | 2,686 | 2,620 | 2,572 | 2,536 | 2,506 | 2,483 |
| 24 | 7,823 | 5,614 | 4,718 | 4,218 | 3,895 | 3,667 | 3,496 | 3,363 | 3,256 | 3,168 | 2,889 | 2,738 | 2,643 | 2,577 | 2,529 | 2,492 | 2,463 | 2,440 |
| 25 | 7,770 | 5,568 | 4,675 | 4,177 | 3,855 | 3,627 | 3,457 | 3,324 | 3,217 | 3,129 | 2,850 | 2,699 | 2,604 | 2,538 | 2,490 | 2,453 | 2,424 | 2,400 |
| 26 | 7.721 | 5,526 | 4,637 | 4,140 | 3,818 | 3.591 | 3,421 | 3,288 | 3,182 | 3,094 | 2,815 | 2,664 | 2,569 | 2,503 | 2,454 | 2,417 | 2,388 | 2,364 |
| 27 | 7,677 | 5.488 | 4,601 | 4,106 | 3,785 | 3,558 | 3,388 | 3,256 | 3,149 | 3,062 | 2,783 | 2,632 | 2,536 | 2,470 | 2,421 | 2,384 | 2,354 | 2,330 |
| 28 | 7.636 | 5,453 | 4,568 | 4,074 | 3,754 | 3,528 | 3,358 | 3,226 | 3,120 | 3,032 | 2,753 | 2,602 | 2,506 | 2,440 | 2,391 | 2,354 | 2,324 | 2,300 |
| 29 | 7,598 | 5,420 | 4,538 | 4,045 | 3,725 | 3,499 | 3,330 | 3,198 | 3,092 | 3,005 | 2,726 | 2,574 | 2,478 | 2,412 | 2,363 | 2,325 | 2,296 | 2.271 |
| 30 | 7,562 | 5,390 | 4,510 | 4,018 | 3,699 | 3,473 | 3,305 | 3,473 | 3,067 | 2,979 | 2,700 | 2,549 | 2,453 | 2,386 | 2,337 | 2,299 | 2,269 | 2,245 |
| 35 | 7,419 | 5,268 | 4,396 | 3,908 | 3,592 | 3,368 | 3,200 | 3,069 | 2,963 | 2,876 | 2,597 | 2,445 | 2,348 | 2,281 | 2,231 | 2,193 | 2,162 | 2,137 |
| 40 | 7.314 | 5,178 | 4,313 | 3.828 | 3.514 | 3.291 | 3.124 | 2,993 | 2,888 | 2.801 | 2.522 | 2.369 | 2.271 | 2,203 | 2,153 | 2.114 | 2.083 | 2.058 |
| 45 | 7.234 | 5.110 | 4.249 | 3.767 | 3.454 | 3.232 | 3.066 | 2.935 | 2.830 | 2,743 | 2.464 | 2.311 | 2.213 | 2.144 | 2:093 | 2.054 | 2.023 | 1.997 |
| 50 | 7,171 | 5.057 | 4.199 | 3.720 | 3.408 | 3.186 | 3.020 | 2.890 | 2.785 | 2,698 | 2.419 | 2.265 | 2.167 | 2.098 | 2,046 | 2.007 | 1.975 | 1.949 |

***Таблица А.3*** **- Критические значения *F*-критерия Фишера (для $\alpha$ =0,001)[14]**
(для проверки направленных гипотез — односторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)

| *df* (знам.) | *df* (числителя) | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | . 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | ,50 |
| 10 | 21,03 | 14,90 | 12,55 | 11,28 | 10,48 | 9,926 | 9,517 | 9,204 | 8,956 | 8,754 | 8,129 | 7,803 | 7,604 | 7,469 | 7,371 | 7,297 | 7,240 | 7,192 |
| 11 | 19,68 | 13,81 | 11,56 | 10,34 | 9,579 | 9,047 | 8,655 | 8,355 | 8,116 | 7,923 | 7,321 | 7,008 | 6,815 | 6,684 | 6,589 | 6,517 | 6,462 | 6,416 |
| 12 | 18,64 | 12,97 | 10,80 | 9,633 | 8,892 | 8,378 | 8,001 | 7,711 | 7,480 | 7,292 | 6,709 | 6,405 | 6,217 | 6,090 | 5,998 | 5,928 | 5,873 | 5,829 |
| 13 | 17,81 | 12,31 | 10,20 | 9,073 | 8,355 | 7,856 | 7,489 | 7,206 | 6,982 | 6,799 | 6,231 | 5,934 | 5,751 | 5,626 | 5,535 | 5,467 | 5,413 | 5,370 |
| 14 | 17,14 | 11,77 | 9,730 | 8,622 | 7,922 | 7,436 | 7,078 | 6,802 | 6,583 | 6,404 | 5,848 | 5,557 | 5,377 | 5,254 | 5,165 | 5,098 | 5,045 | 5,002 |
| 15 | 16,58 | 11,34 | 9,335 | 8,253 | 7,567 | 7,091 | 6,741 | 6,471 | 6,256 | 6,081 | 5,535 | 5,249 | 5,071 | 4,950 | 4,863 | 4,796 | 4,743 | 4,702 |
| 16 | 16,12 | 10,97 | 9,006 | 7,944 | 7,272 | 6,805 | 6,460 | 6,195 | 5,984 | 5,812 | 5,275 | 4,992 | 4,817 | 4,697 | 4,611 | 4,545 | 4,493 | 4,451 |
| 17 | 15,72 | 10,65 | 8,727 | 7,683 | 7,022 | 6,562 | 6,224 | 5,962 | 5,754 | 5,584 | 5,055 | 4,775 | 4,602 | 4,484 | 4,398 | 4,332 | 4,281 | 4,240 |
| 18 | 15,38 | 10,39 | 8,487 | 7,460 | 6,808 | 6,355 | 6,021 | 5,763 | 5,557 | 5,390 | 4,866 | 4,590 | 4,418 | 4,301 | 4,216 | 4,151 | 4,100 | 4,059 |
| 19 | 15,08 | 10,15 | 8,280 | 7,265 | 6,622 | 6,175 | 5,845 | 5,591 | 5,387 | 5,222 | 4,703 | 4,430 | 4,259 | 4,143 | 4,058 | 3,994 | 3,943 | 3,902 |
| 20 | 14,81 | 9,953 | 8,098 | 7,096 | 6,461 | 6,019 | 5,692 | 5,440 | 5,239 | 5,075 | 4,562 | 4,290 | 4,121 | 4,005 | 3,921 | 3,856 | 3,806 | 3,765 |
| 21 | 14,58 | 9,773 | 7,938 | 6,947 | 6,318 | 5,881 | 5,557 | 5,308 | 5,109 | 4,946 | 4,437 | 4,167 | 3,999 | 3,884 | 3,800 | 3,736 | 3,685 | 3,645 |
| 22 | 14,38 | 9,612 | 7,796 | 6,814 | 6,191 | 5,758 | 5,437 | 5,190 | 4,993 | 4,832 | 4,326 | 4,058 | 3,891 | 3,776 | 3,692 | 3,628 | 3,578 | 3,537 |
| 23 | 14,19 | 9,469 | 7,669 | 6,696 | 6,078 | 5,649 | 5,331 | 5,085 | 4,889 | 4,730 | 4,227 | 3,961 | 3,794 | 3,680 | 3,596 | 3,533 | 3,483 | 3,442 |
| 24 | 14,02 | 9,340 | 7,554 | 6,589 | 5,977 | 5,551 | 5,235 | 4,991 | 4,797 | 4,638 | 4,139 | 3,873 | 3,707 | 3,593 | 3,510 | 3,447 | 3,397 | 3,356 |
| 25 | 13,87 | 9,222 | 7,451 | 6,493 | 5,885 | 5,462 | 5,148 | 4,906 | 4,713 | 4,555 | 4,059 | 3,794 | 3,629 | 3,515 | 3,432 | 3,369 | 3,319 | 3,279 |
| 26 | 13,73 | 9,117 | 7,357 | 6,406 | 5,802 | 5,381 | 5,070 | 4,829 | 4,637 | 4,480 | 3,986 | 3,723 | 3,558 | 3,445 | 3,362 | 3,299 | 3,249 | 3,208 |
| 27 | 13,61 | 9,019 | 7,271 | 6,326 | 5,726 | 5,308 | 4,998 | 4,759 | 4,568 | 4,412 | 3,920 | 3,658 | 3,493 | 3,380 | 3,298 | 3,234 | 3,184 | 3,144 |
| 28 | 13,49 | 8,930 | 7,193 | 6,253 | 5,657 | 5,241 | 4,933 | 4,695 | 4,505 | 4,349 | 3,859 | 3,598 | 3,434 | 3,321 | 3,239 | 3,176 | 3,126 | 3,085 |
| 29 | 13,39 | 8,848 | 7,121 | 6,186 | 5,592 | 5,179 | 4,873 | 4,636 | 4,447 | 4,292 | 3,804 | 3,543 | 3,380 | 3,267 | 3,185 | 3,121 | 3,072 | 3,031 |
| 30 | 13,29 | 8,773 | 7,054 | 6,125 | 5,534 | 5,122 | 4,817 | 4,582 | 4,393 | 4,239 | 3,753 | 3,493 | 3,330 | 3,217 | 3,135 | 3,072 | 3,022 | 2,981 |
| 35 | 12,89 | 8,470 | 6,787 | 5,876 | 5,298 | 4,894 | 4,595 | 4,363 | 4,178 | 4,027 | 3,547 | 3,290 | 3,128 | 3,016 | 2,934 | 2,871 | 2,821 | 2,781 |
| 40 | 12,60 | 8,251 | 6,595 | 5,698 | 5,128 | 4,731 | 4,436 | 4,207 | 4,024 | 3,874 | 3,400 | 3,145 | 2,984 | 2,872 | 2,790 | 2,727 | 2,677 | 2,636 |
| 45 | 12,39 | 8.085 | 6,450 | 5,564 | 5.001 | 4.608 | 4,316 | 4,090 | 3,909 | 3,760 | 3,290 | 3,036 | 2,875 | 2,763 | 2,681 | 2,618 | 2,568 | 2,527 |
| 50 | 12,22 | 7,956 | 6,336 | 5.459 | 4,901 | 4.512 | 4.222 | 3,998 | 3.819 | 3.671 | 3.203 | 2,951 | 2,790 | 2,679 | 2,596 | 2.533 | 2.482 | 2,441 |

***Таблица А.4*** **- Критические значения F-критерия Фишера (для $\alpha$ =0,05)[14]**
(для проверки ненаправленных гипотез — двусторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)

| *df* (знам.) | *df* (числителя) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 10 | 6,937 | 5,456 | 4,826 | 4,468 | 4,236 | 4,072 | 3,950 | 3,855 | 3,779 | 3,717 | 3,522 | 3,419 | 3,355 | 3,311 | 3,279 | 3,255 | 3,237 | 3,221 |
| 11 | 6,724 | 5,256 | 4,630 | 4,275 | 4,044 | 3,881 | 3,759 | 3,664 | 3,588 | 3,526 | 3,330 | 3,226 | 3,162 | 3,118 | 3,086 | 3,061 | 3,042 | 3,027 |
| 12 | 6,554 | 5,096 | 4,474 | 4,121 | 3,891 | 3,728 | 3,607 | 3,512 | 3,436 | 3,374 | 3,177 | 3,073 | 3,008 | 2,963 | 2,931 | 2,906 | 2,887 | 2,871 |
| 13 | 6,414 | 4,965 | 4,347 | 3,996 | 3,767 | 3,604 | 3,483 | 3,388 | 3,312 | 3,250 | 3,053 | 2,948 | 2,882 | 2,837 | 2,805 | 2,780 | 2,760 | 2,744 |
| 14 | 6,298 | 4,857 | 4,242 | 3,892 | 3,663 | 3,501 | 3,380 | 3,285 | 3,209 | 3,147 | 2,949 | 2,844 | 2,778 | 2,732 | 2,699 | 2,674 | 2,654 | 2,638 |
| 15 | 6,200 | 4,765 | 4,153 | 3,804 | 3,576 | 3,415 | 3,293 | 3,199 | 3,123 | 3,060 | 2,862 | 2,756 | 2,689 | 2,644 | 2,610 | 2,585 | 2,565 | 2,549 |
| 16 | 6,115 | 4,687 | 4,077 | 3,729 | 3,502 | 3,341 | 3,219 | 3,125 | 3,049 | 2,986 | 2,788 | 2,681 | 2,614 | 2,568 | 2,534 | 2,509 | 2,488 | 2,472 |
| 17 | 6,042 | 4,619 | 4,011 | 3,665 | 3,438 | 3,277 | 3,156 | 3,061 | 2,985 | 2,922 | 2,723 | 2,616 | 2,548 | 2,502 | 2,468 | 2,442 | 2,422 | 2,405 |
| 18 | 5,978 | 4,560 | 3,954 | 3,608 | 3,382 | 3,221 | 3,100 | 3,005 | 2,929 | 2,866 | 2,667 | 2,559 | 2,491 | 2,445 | 2,410 | 2,384 | 2,364 | 2,347 |
| 19 | 5.922 | 4.508 | 3.903 | 3.559 | 3,333 | 3.172 | 3.051 | 2.956 | 2.880 | 2.817 | 2.617 | 2.509 | 2.441 | 2.394 | 2.359 | 2.333 | 2.312 | 2.295 |
| 20 | 5,871 | 4,461 | 3,859 | 3,515 | 3,289 | 3,128 | 3,007 | 2,913 | 2,837 | 2,774 | 2,573 | 2,464 | 2,396 | 2,349 | 2,314 | 2,287 | 2,266 | 2,249 |
| 21 | 5,827 | 4,420 | 3,819 | 3,475 | 3,250 | 3,090 | 2,969 | 2,874 | 2,798 | 2,735 | 2,534 | 2,425 | 2,356 | 2,308 | 2,273 | 2,246 | 2,225 | 2,208 |
| 22 | 5,786 | 4,383 | 3,783 | 3,440 | 3,215 | 3,055 | 2,934 | 2,839 | 2,763 | 2,700 | 2,498 | 2,389 | 2,320 | 2,272 | 2,237 | 2,210 | 2,188 | 2,171 |
| 23 | 5,750 | 4,349 | 3,750 | 3,408 | 3,183 | 3,023 | 2,902 | 2,808 | 2,731 | 2,668 | 2,466 | 2,357 | 2,287 | 2,239 | 2,204 | 2,176 | 2,155 | 2,137 |
| 24 | 5,717 | 4,319 | 3,721 | 3,379 | 3,155 | 2,995 | 2,874 | 2,779 | 2,703 | 2,640 | 2,437 | 2,327 | 2,257 | 2,209 | 2,173 | 2,146 | 2,124 | 2,107 |
| 25 | 5,686 | 4,291 | 3,694 | 3,353 | 3,129 | 2,969 | 2,848 | 2,753 | 2,677 | 2,613 | 2,411 | 2,300 | 2,230 | 2,182 | 2,146 | 2,118 | 2,096 | 2,079 |
| 26 | 5,659 | 4,265 | 3,670 | 3,329 | 3,105 | 2,945 | 2,824 | 2,729 | 2,653 | 2,590 | 2,387 | 2,276 | 2,205 | 2,157 | 2,120 | 2,093 | 2,071 | 2,053 |
| 27 | 5.633 | 4,242 | 3,647 | 3,307 | 3,083 | 2,923 | 2,802 | 2,707 | 2,631 | 2,568 | 2,364 | 2,253 | 2,183 | 2,133 | 2,097 | 2,069 | 2,047 | 2,029 |
| 28 | 5,610 | 4,221 | 3,626 | 3,286 | 3,063 | 2,903 | 2,782 | 2,687 | 2,611 | 2,547 | 2,344 | 2,232 | 2,161 | 2,112 | 2,076 | 2,048 | 2,025 | 2,007 |
| 29 | 5,588 | 4,201 | 3,607 | 3,267 | 3,044 | 2,884 | 2,763 | 2,669 | 2,592 | 2,529 | 2,325 | 2,213 | 2,142 | 2,092 | 2,056 | 2,028 | 2,005 | 1,987 |
| 30 | 5,568 | 4,182 | 3,589 | 3,250 | 3,026 | 2,867 | 2,746 | 2,651 | 2,575 | 2,511 | 2,307 | 2,195 | 2,124 | 2,074 | 2,037 | 2,009 | 1,986 | 1,968 |
| 35 | 5,485 | 4,106 | 3.517 | 3,179 | 2,956 | 2,796 | 2,676 | 2,581 | 2,504 | 2,440 | 2,235 | 2,!22 | 2,049 | 1,999 | 1,961 | 1,932! | 1,909 | 1,890 |
| 40 | 5.424 | 4,051 | 3,463 | 3.126 | 2.904 | 2,744 | 2.624 | 2.529 | 2.452 | 2,388 | 2,182 | 2,068 | L994 | 1.943 | 1.905 | 1.875 | 1,852 | 1,832 |
| 45 | 5.377 | 4,009 | 3.422 | 3.086 | 2,864 | 2.705 | 2,584 | 2.489 | 2,412 | 2,348 | 2,141 | 2,026 | 1.952 | 1,900 | 1,861 | 1,831 | 1,807 | 1,788 |
| 50 | 5.340 | .3,975 | 3.390 | 3,054 | 2.833 | 2.674 | 2.553 | 2.458 | 2.381 | 2.317 | 2.109 | 1.993 | 1.919 | 1,866 | 1,827 | 1.796 | 1,772 | 1.752 |

***Таблица А.5* - Критические значения F-критерия Фишера (для $\alpha$ =0,01)[14]**
(для проверки ненаправленных гипотез — двусторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)

| *df* (знам.) | *df* (числителя) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 10 | 12,82 | 9,427 | 8,081 | 7,343 | 6,872 | 6,545 | 6,303 | 6,116 | 5,968 | 5,847 | 5,471 | 5,274 | 5,153 | 5,071 | 5,011 | 4,966 | 4,931 | 4,902 |
| 11 | 12,22 | 8,912 | 7,600 | 6,881 | 6,422 | 6,102 | 5,865 | 5,682 | 5,537 | 5,418 | 5,049 | 4,855 | 4,736 | 4,654 | 4,595 | 4,551 | 4,516 | 4,488 |
| 12 | 11,75 | 8,510 | 7,226 | 6,521 | 6,071 | 5,757 | 5,524 | 5,345 | 5,202 | 5,085 | 4,721 | 4,530 | 4,412 | 4,331 | 4,272 | 4,228 | 4,193 | 4,165 |
| 13 | 11,37 | 8,186 | 6,926 | 6,233 | 5,791 | 5,482 | 5,253 | 5,076 | 4,935 | 4.820 | 4,460 | 4,270 | 4,153 | 4,073 | 4,015 | 3,970 | 3,936 | 3,908 |
| 14 | 11,06 | 7,922 | 6,680 | 5,998 | 5,562 | 5,257 | 5,031 | 4,857 | 4,717 | 4,603 | 4,247 | 4,059 | 3,942 | 3,862 | 3,804 | 3,760 | 3,725 | 3,697 |
| 15 | 10,79 | 7,701 | 6,476 | 5,803 | 5,372 | 5,071 | 4,847 | 4,674 | 4,536 | 4,424 | 4,070 | 3,883 | 3,766 | 3,687 | 3,629 | 3,585 | 3,550 | 3,523 |
| 16 | 10,57 | 7,514 | 6,303 | 5,638 | 5,212 | 4,913 | 4,692 | 4,521 | 4,384 | 4,272 | 3,920 | 3,734 | 3,618 | 3,539 | 3,481 | 3,437 | 3,403 | 3,375 |
| 17 | 10,38 | 7,354 | 6,156 | 5,497 | 5,075 | 4,779 | 4,559 | 4,389 | 4,254 | 4,142 | 3,793 | 3,607 | 3,492 | 3,412 | 3,355 | 3,311 | 3,276 | 3,248 |
| 18 | 10,21 | 7,215 | 6,028 | 5,375 | 4,956 | 4,663 | 4,445 | 4,276 | 4,141 | 4,030 | 3,683 | 3,498 | 3,382 | 3,303 | 3,245 | 3,201 | 3,167 | 3,139 |
| 19 | 1007 | 7,093 | 5,916 | 5,268 | 4,853 | 4,561 | 4,345 | 4,177 | 4,043 | 3,933 | 3,587 | 3,402 | 3,287 | 3,208 | 3,150 | 3,106 | 3,071 | 3,043 |
| 20 | 9,944 | 6,987 | 5,818 | 5,174 | 4,762 | 4,472 | 4,257 | 4,090 | 3,956 | 3,847 | 3,502 | 3,318 | 3,203 | 3,123 | 3,066 | 3,022 | 2,987 | 2,959 |
| 21 | 9,829 | 6,891 | 5,730 | 5,091 | 4,681 | 4,393 | 4,179 | 4,013 | 3,880 | 3,771 | 3,427 | 3,243 | 3,128 | 3,049 | 2,991 | 2,947 | 2,912 | 2,884 |
| 22 | 9,727 | 6,806 | 5,652 | 5,017 | 4,609 | 4,322 | 4,109 | 3,944 | 3,812 | 3,703 | 3,360 | 3,176 | 3,061 | 2,982 | 2,924 | 2,880 | 2,845 | 2,817 |
| 23 | 9,635 | 6,730 | 5,582 | 4,950 | 4,544 | 4,259 | 4,047 | 3,882 | 3,750 | 3,642 | 3,300 | 3,116 | 3,001 | 2,922 | 2,864 | 2,820 | 2,785 | 2,756 |
| 24 | 9,551 | 6,661 | 5,519 | 4,890 | 4,486 | 4,202 | 3,991 | 3,826 | 3,695 | 3,587 | 3,246 | 3,062 | 2,947 | 2,868 | 2,810 | 2,765 | 2,730 | 2,702 |
| 25 | 9,475 | 6,598 | 5,462 | 4,835 | 4,433 | 4,150 | 3,939 | 3,776 | 3,645 | 3,537 | 3,196 | 3,013 | 2,898 | 2,819 | 2,761 | 2,716 | 2,681 | 2,652 |
| 26 | 9,406 | 6,541 | 5,409 | 4,785 | 4,384 | 4,103 | 3,893 | 3,730 | 3,599 | 3,492 | 3,151 | 2,968 | 2,853 | 2,774 | 2,716 | 2,671 | 2,636 | 2,607 |
| 27 | 9,342 | 6,489 | 5,361 | 4,740 | 4,340 | 4,059 | 3,850 | 3,687 | 3,557 | 3,450 | 3,110 | 2,927 | 2,812 | 2,733 | 2,674 | 2,630 | 2,594 | 2,565 |
| 28 | 9,284 | 6,440 | 5,317 | 4,698 | 4,300 | 4,020 | 3,811 | 3,649 | 3,519 | 3,412 | 3,073 | 2,890 | 2,775 | 2,695 | 2,636 | 2,592 | 2,556 | 2,527 |
| 29 | 9,230 | 6,396 | 5,276 | 4,659 | 4,262 | 3,983 | 3,775 | 3,613 | 3,483 | 3,376 | 3,038 | 2,855 | 2,740 | 2,660 | 2,601 | 2,557 | 2,521 | 2,492 |
| 30 | 9,180 | 6,355 | 5,239 | 4,623 | 4,228 | 3,949 | 3,742 | 3,580 | 3,451 | 3,344 | 3,006 | 2,823 | 2,708 | 2,628 | 2,569 | 2,524 | 2,488 | 2,459 |
| 35 | 8,976 | 6,188 | 5,086 | 4,479 | 4,088 | 3,812 | 3,607 | 3,447 | 3,318 | 3,212 | 2,876 | 2,693 | 2,577 | 2,497 | 2,438 | 2,392 | 2,356 | 2,327 |
| 40 | 8,828 | 6,066 | 4,976 | 4,374 | 3,986 | 3,713 | 3,509 | 3,350 | 3,222 | 3,117 | 2,781 | 2,598 | 2,482 | 2,401 | 2,342 | 2,296 | 2,259 | 2,230 |
| 45 | 8,715 | 5,974 | 4,892 | 4,294 | 3,909 | 3,638 | 3,435 | 3,276 | 3,149 | 3,044 | 2,709 | 2,527 | 2,410 | 2,329 | 2,269 | 2,222 | 2,185 | 2,155 |
| 50 | 8.626 | 5.902 | 4,826 | 4,232 | 3,849 | 3,579 | 3,376 | 3,219 | 3,092 | 2,988 | 2,653 | 2,470 | 2,353 | 2,272 | 2,211 | 2,164 | 2.127 | 2,097 |

***Таблица А.6*** **- Критические значения F-критерия Фишера (для $\alpha$ =0,001)[14]**
(для проверки ненаправленных гипотез — двусторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)

| *df* □ (знам.) | *df* (числителя) | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 10 | 25,49 | 17,86 | 14,96 | 13,40 | 12,42 | 11,74 | 11,24 | 10,86 | 10,56 | 10,31 | 9.561 | 9,164 | 8,924 | 8,760 | 8,640 | 8,551 | 8,482 | 8,426 |
| 11 | 23,65 | 16,40 | 13,65 | 12,17 | 11,24 | 10,60 | 10,12 | 9,764 | 9,477 | 9,242 | 8,518 | 8,142 | 7,909 | 7,753 | 7,640 | 7,554 | 7,487 | 7,432 |
| 12 | 22,24 | 15,29 | 12,66 | 11,24 | 10,35 | 9,739 | 9,284 | 8,935 | 8,658 | 8,435 | 7,738 | 7,374 | 7,152 | 6,999 | 6,890 | 6,807 | 6,742 | 6,690 |
| 13 | 21,13 | 14,42 | 11,88 | 10,52 | 9,662 | 9,068 | 8,629 | 8,293 | 8,025 | 7,809 | 7,134 | 6,781 | 6,565 | 6,417 | 6,310 | 6,230 | 6,166 | 6,115 |
| 14 | 20,24 | 13,73 | 11,27 | 9,946 | 9,111 | 8,535 | 8,109 | 7,782 | 7,522 | 7,311 | 6,654 | 6,310 | 6,098 | 5,954 | 5,850 | 5,770 | 5,708 | 5,658 |
| 15 | 19,50 | 13,16 | 10,76 | 9,475 | 8,662 | 8,098 | 7,683 | 7,365 | 7,112 | 6,905 | 6,264 | 5,927 | 5,719 | 5,578 | 5,475 | 5,398 | 5,337 | 5,287 |
| 16 | 18,88 | 12,68 | 10,34 | 9,084 | 8,289 | 7,738 | 7,332 | 7,020 | 6,772 | 6,570 | 5,941 | 5,611 | 5,406 | 5,267 | 5,166 | 5,090 | 5,029 | 4,980 |
| 17 | 18,36 | 12,28 | 9,990 | 8,755 | 7,974 | 7,434 | 7,037 | 6,730 | 6,487 | 6,288 | 5,670 | 5,344 | 5,143 | 5,006 | 4,906 | 4,830 | 4,770 | 4,722 |
| 18 | 17,92 | 11,94 | 9,686 | 8,473 | 7,707 | 7,176 | 6,785 | 6,483 | 6,244 | 6,048 | 5,439 | 5,118 | 4,919 | 4,783 | 4,685 | 4,609 | 4,550 | 4,503 |
| 19 | 17,53 | 11,64 | 9,424 | 8,231 | 7,476 | 6,953 | 6,567 | 6,270 | 6,034 | 5,842 | 5,241 | 4,923 | 4,726 | 4,592 | 4,494 | 4,419 | 4,361 | 4,314 |
| 20 | 17,18 | 11,38 | 9,195 | 8,018 | 7,274 | 6,759 | 6,378 | 6,085 | 5,852 | 5,662 | 5,067 | 4,753 | 4,558 | 4,425 | 4,328 | 4,254 | 4,196 | 4,149 |
| 21 | 16,88 | 11,15 | 8,995 | 7,833 | 7,098 | 6,588 | 6,213 | 5,923 | 5,693 | 5,504 | 4,916 | 4,605 | 4,411 | 4,279 | 4,183 | 4,109 | 4,051 | 4,005 |
| 22 | 16,62 | 10,95 | 8,817 | 7,667 | 6,941 | 6,437 | 6,066 | 5,779 | 5,551 | 5,364 | 4,782 | 4,473 | 4,281 | 4,150 | 4,054 | 3,981 | 3,924 | 3,877 |
| 23 | 16,38 | 10,77 | 8,657 | 7,521 | 6,802 | 6,303 | 5,935 | 5,652 | 5,425 | 5,241 | 4,662 | 4,356 | 4,165 | 4,035 | 3,939 | 3,867 | 3,809 | 3,763 |
| 24 | 16,16 | 10,60 | 8,515 | 7,389 | 6,678 | 6,183 | 5,818 | 5,537 | 5,312 | 5,130 | 4,556 | 4,251 | 4,062 | 3,932 | 3,837 | 3,764 | 3,707 | 3,661 |
| 25 | 15,97 | 10,46 | 8,386 | 7,271 | 6,565 | 6,075 | 5,713 | 5,433 | 5,210 | 5,030 | 4,459 | 4,157 | 3,968 | 3,839 | 3,744 | 3,672 | 3,615 | 3,569 |
| 26 | 15,79 | 10,32 | 8,269 | 7,162 | 6,463 | 5,976 | 5,617 | 5,340 | 5,119 | 4,939 | 4,372 | 4,072 | 3,884 | 3,755 | 3,661 | 3,588 | 3,532 | 3,486 |
| 27 | 15,63 | 10,20 | 8,164 | 7,065 | 6,369 | 5,886 | 5,530 | 5,255 | 5,035 | 4,856 | 4,293 | 3,994 | 3,807 | 3,678 | 3,584 | 3,512 | 3,456 | 3,410 |
| 28 | 15,48 | 10,09 | 8,065 | 6,975 | 6,285 | 5,805 | 5,451 | 5,177 | 4,959 | 4,781 | 4,221 | 3,923 | 3,737 | 3,608 | 3,515 | 3,443 | 3,387 | 3,341 |
| 29 | 15,34 | 9,992 | 7,976 | 6,892 | 6,206 | 5,730 | 5,378 | 5,106 | 4,889 | 4,712 | 4,155 | 3,858 | 3,672 | 3,544 | 3,451 | 3,380 | 3,323 | 3,277 |
| 30 | 15,22 | 9,897 | 7,894 | 6,817 | 6,135 | 5,661 | 5,311 | 5,040 | 4,825 | 4,648 | 4,094 | 3,798 | 3,613 | 3,486 | 3,392 | 3,321 | 3,265 | 3,219 |
| 35 | 14,71 | 9,519 | 7,565 | 6,514 | 5,848 | 5,385 | 5,043 | 4,778 | 4,567 | 4,395 | 3,850 | 3,559 | 3,376 | 3,250 | 3,157 | 3,086 | 3,030 | 2,985 |
| 40 | 14,35 | 9,248 | 7,329 | 6,296 | 5,643 | 5,188 | 4,852 | 4,591 | 4,384 | 4,214 | 3,677 | 3,388 | 3,207 | 3,081 | 2,989 | 2,918 | 2,862 | 2,816 |
| 45 | 14,07 | 9.042 | 7.151 | 6,134 | 5,489 | 5,040 | 4,708 | 4,452 | 4,246 | 4.078 | 3,547 | 3,261 | 3,080 | 2,955 | 2,863 | 2,792 | 2.736 | 2,690 |
| 50 | 13.86 | 8.883 | 7.013 | 6.007 | 5.370 | 4.926 | 4.597 | 4.343 | 4.140 | 3,973 | 3.446 | 3 161 | 2,982 | 2.857 | 2,765 | 2.694 | 2.638 | 2 592 |

***Таблица А.7*** - Критические значения t-критерия Стьюдента **(для проверки ненаправленных гипотез — двусторонний критерий, значения рассчитаны по программе Excel)[14]**

| *df* | *a* | | | | *df* | *a* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 | | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 6,314 | 12,70 | 63,65 | 636,61 | 46 | 1,679 | 2,013 | 2,687 | 3,515 |
| 2 | 2.920 | 4,303 | 9,925 | 31,602 | 47 | 1,678 | 2,012 | 2,685 | 3,510 |
| 3 | 2,353 | 3,182 | 5,841 | 12,923 | 48 | 1,677 | 2,011 | 2,682 | 3,505 |
| 4 | 2,132 | 2,776 | 4,604 | 8,610 | 49 | 1,677 | 2,010 | 2,680 | 3,500 |
| 5 | 2,015 | 2,571 | 4,032 | 6,869 | 50 | 1,676 | 2,009 | 2,678 | 3,496 |
| 6 | 1,943 | 2,447 | 3,707 | 5,959 | 51 | 1,675 | 2,008 | 2,676 | 3,492 |
| 7 | 1,895 | 2,365 | 3,499 | 5,408 | 52 | 1,675 | 2,007 | 2,674 | 3,488 |
| 8 | 1,860 . | 2,306 | 3,355 | 5,041 | 53 | 1,674 | 2,006 | 2,672 | 3,484 |
| 9 | 1,833 | 2,262 | 3,250 | 4,781 | 54 | 1,674 | 2,005 | 2,670 | 3,480 |
| 10 | 1,812 | 2,228 | 3,169 | 4,587 | 55 | 1,673 | 2,004 | 2,668 | 3,476 |
| 11 | 1,796 | 2,201 | 3,106 | 4,437 | 56 | 1,673 | 2,003 | 2,667 | 3,473 |
| 12 | 1,782 | 2,179 | 3,055 | 4,318 | 57 | 1,672 | 2,002 | 2,665 | 3,470 |
| 13 | 1,771 | 2,160 | 3,012 | 4,221 | 58 | 1,672 | 2,002 | 2,663 | 3,46б |
| 14 | 1,761 | 2,145 | 2,977 | 4,140 | 59 | 1,671 | 2,001 | 2,662 | 3,463 |
| 15 | 1,753 | 2.131 | 2,947 | 4,073 | 60 | 1,671 | 2,000 | 2,660 | 3,460 |
| 16 | 1,746 | 2,120 | 2,921. | 4,015 | 61 | 1,670 | 2,000 | 2,659 | 3,457 |
| 17 | 1,740 | 2,110 | 2,898 | 3,965 | 62 | 1,670 | 1,999 | 2,657 | 3,454 |
| 18 | 1,734 | 2,101 | 2,878 | 3,922 | 63 | 1,669 | 1,998 | 2,656 | 3,452 |
| 19 | 1,729 | 2,093 | 2,861 | 3,883 | 64 | 1,669 | 1,998 | 2,655 | 3,449 |
| 20 | 1,725 | 2,086 | 2,845 | 3,850 | 65 | 1,669 | 1,997 | 2,654 | 3,447 |
| 21 | 1,721 | 2,080 | 2,831 | 3,819 | 66 | 1,668 | 1,997 | 2,652 | 3,444 |
| 22 | 1,717 | 2,074 | 2,819 | 3,792 | 67 | 1,668 | 1,996 | 2,651 | 3,442 |
| 23 | 1,714 | 2,069 | 2,807 | 3,768 | 68 | 1,668 | 1,995 | 2,650 | 3,439 |
| 24 | 1,711 | 2,064 | 2,797 | 3,745 | 69 | 1,667 | 1,995 | 2,649 | 3,437 |
| 25 | 1,708 | 2,060 | 2,787 | 3,725 | 70 | 1,667 | 1,994 | 2,648 | 3,435 |
| 26 | 1,706 | 2,056 | 2,779 | 3,707 | 71 | 1,667 | 1,994 | 2,647 | 3,433 |
| 27 | 1,703 | 2,052 | 2,771 | 3,690 | 72 | 1,666 | 1,993 | 2,646 | 3,431 |
| 28 | 1,701 | 2,049 | 2,763 | 3,674 | 73 | 1,666 | 1,993 | 2,645 | 3,429 |
| 29 | 1,699 | 2,045 | 2,756 | 3,659 | 74 | 1,666 | 1,993 | 2,644 | 3,427 |
| 30 | 1,697 | 2,042 | 2,750 | 3,646 | 75 | 1,665 | 1,992 | 2,643 | 3,425 |
| 31 | 1,696 | 2,040 | 2,744 | 3,633 | 76 | 1,665 | 1,992 | 2,642 | 3,423 |
| 32 | 1,694 | 2,037 | 2,738 | 3,622 | 78 | 1,665 | 1,991 | 2,640 | 3,420 |
| 33 | 1,692 | ,2,035 | 2,733 | 3,611 | 79 | 1,664 | 1,990 | 2,639 | 3,418 |
| 34 | 1,691 | 2,032 | 2,728 | 3,601 | 80 | 1,664 | 1,990 | 2,639 | 3,416 |
| 35 | 1,690 | 2,030 | 2,724 | 3,591 | 90 | 1,662 | 1,987 | 2,632 | 3,402 |
| 36 | 1,688 | 2,028 | 2,719 | 3,582 | 100 | 1,660 | 1,984 | 2,626 | 3,390 |
| 37 | 1,687 | 2,026 | 2,715 | 3,574 | 110 | 1,659 | 1,982 | 2,621 | 3,381 |
| 38 | 1,686 | 2,024 | 2,712 | 3,566 | 120 | 1,658 | 1,980 | 2,617 | 3,373 |
| 39 | 1,685 | 2,023 | 2,708 | 3,558 | 130 | 1,657 | 1,978 | 2,614 | 3,367 |
| 40 | 1,684 | 2,021 | 2,704 | 3,551 | 140 | 1,656 | 1,977 | 2,611 | 3,361 |
| 41 | 1,683 | 2,020 | 2,701 | 3,544 | 150 | 1,655 | 1,976 | 2,609 | 3,357 |
| 42 | 1,682 | 2,018 | 2,698 | 3,538 | 200 | 1,653 | 1,972 | 2,601 | 3,340 |
| 43 | 1,681 | 2,017 | 2,695 | 3,532 | 250 | 1,651 | 1,969 | 2,596 | 3,330 |
| 44 | 1,680 | 2,015 | 2,692 | 3,526 | 300 | 1,650 | 1,968 | 2,592 | 3,323 |
| 45 | 1,679 | 2,014 | 2,690 | 3,520 | 350 | 1,649 | 1,967 | 2,590 | 3,319 |

***Таблица А.8*** **-** Критические значения $\chi^2$ - критерия **(значения рассчитаны по программе Excel и Statistica 5.0)[14]**

| *df* | *a* | | | | *df* | *a* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 | | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 2,706 | 3,842 | 6,635 | 10,829 | 46 | 58,641 | 62,841 | 71,221 | 81,431 |
| 2 | 4,605 | 5,992 | 9,211 | 13,817 | 47 | 59,774 | 64,013 | 72,463 | 82,752 |
| 3 | 6,251 | 7,815 | 11,346 | 16,269 | 48 | 60,907 | 65,183 | 73,703 | 84,069 |
| 4 | 7,779 | 9,488 | 13,278 | 18,470 | 49 | 62,038 | 66,351 | 74,940 | 85,384 |
| 5 | 9,236 | 11,071 | 15,088 | 20,519 | 50 | 63,167 | 67,518 | 76,175 | 86,694 |
| 6 | 10,645 | 12,593 | 16,814 | 22,462 | 51 | 64,295 | 68,683 | 77,408 | 88,003 |
| 7 | 12,017 | 14,068 | 18,478 | 24,327 | 52 | 65,422 | 69,846 | 78,638 | 89,308 |
| 8 | 13,362 | 15,509 | 20,093 | 26,130 | 53 | 66,548 | 71,008 | 79,866 | 90,609 |
| 9 | 14,684 | 16,921 | 21,669 | 27,883 | 54 | 67,673 | 72,168 | 81,092 | 91,909 |
| 10 | 15,987 | 18,309 | 23,213 | 29,594 | 55 | 68,796 | 73,326 | 82,316 | 93,205 |
| 11 | 17,275 | 19,677 | 24,729 | 31,271 | 56 | 69,919 | 74,484 | 83,538 | 94,499 |
| 12 | 18,549 | 21,028 | 26,221 | 32,917 | 57 | 71,040 | 75,639 | 84,758 | 95,790 |
| 13 | 19,812 | 22,365 | 27,693 | 34,536 | 58 | 72,160 | 76,794 | 85,976 | 97,078 |
| 14 | 21,064 | 23,688 | 29,146 | 36,132 | 59 | 73,279 | 77,947 | 87,192 | 98,365 |
| 15 | 22,307 | 24,999 | 30,583 | 37,706 | 60 | 74,397 | 79,099 | 88,406 | 99,649 |
| 16 | 23,542 | 26,299 | 32,006 | 39,262 | 61 | 75,514 | 80,232 | 89,591 | 100,887 |
| 17 | 24,769 | 27,591 | 33,415 | 40,801 | 62 | 76,630 | 81,381 | 90,802 | 102,165 |
| 18 | 25,989 | 28,873 | 34,812 | 42,323 | 63 | 77,745 | 82,529 | 92,010 | 103,442 |
| 19 | 27,204 | 30,147 | 36,198 | 43,832 | 64 | 78,860 | 83,675 | 93,217 | 104,717 |
| 20 | 28,412 | 31,415 | 37,574 | 45,327 | 65 | 79,973 | 84,821 | 94,422 | 105,988 |
| 21 | 29,615 | 32,675 | 38,940 | 46,810 | 66 | 81,085 | 85,965 | 95,626 | 107,257 |
| 22 | 30,813 | 33,929 | 40,298 | 48,281 | 67 | 82,197 | 87,108 | 96,828 | 108,525 |
| 23 | 32,007 | 35,177 | 41,647 | 49,742 | 68 | 83,308 | 88,250 | 98,028 | 109,793 |
| 24 | 33,196 | 36,420 | 42,989 | 51,194 | 69 | 84,418 | 89,391 | 99,227 | 111,055 |
| 25 | 34,382 | 37,658 | 44,324 | 52,635 | 70 | 85,527 | 90,531 | 100,425 | 112,317 |
| 26 | 35,563 | 38,891 | 45,652 | 54,068 | 71 | 86,635 | 91,670 | 101,621 | 113,577 |
| 27 | 36,741 | 40,119 | 46,973 | 55,493 | 72 | 87,743 | 92,808 | 102,816 | 114,834 |
| 28 | 37,916 | 41,343 | 48,289 | 56,910 | 73 | 88,850 | 93,945 | 104,010 | 116,092 |
| 29 | 39,087 | 42,564 | 49,599 | 58,320 | 74 | 89,956 | 95,081 | 105,202 | 117,347 |
| 30 | 40,256 | 43,786 | 50,904 | 59,722 | 75 | 91,061 | 96,217 | 106,393 | 118,599 |
| 31 | 41,422 | 44,993 | 52,203 | 61,118 | 76 | 92,166 | 97,351 | 107,582 | 119,850 |
| 32 | 42,585 | 46,202 | 53,498 | 62,508 | 78 | 94,374 | 99,617 | 109,958 | 122,347 |
| 33 | 43,745 | 47,408 | 54,789 | 63,891 | 79 | 95,476 | 100,749 | 111,144 | 123,595 |
| 34 | 44,903 | 48,610 | 56,074 | 65,269 | 80 | 96,578 | 101,879 | 112,329 | 124,839 |
| 35 | 46,059 | 49,810 | 57,356 | 66,641 | 90 | 107,565 | 113,145 | 124,116 | 137,208 |
| 36 | 47,212 | 51,007 | 58,634 | 68,008 | 100 | 118,498 | 124,342 | 135,807 | 149,449 |
| 37 | 48,363 | 52,201 | 59,907 | 69,370 | 110 | 129,385 | 135,480 | 147,414 | 161,582 |
| 38 | 49,513 | 53,393 | 61,177 | 70,728 | 120 | 140,233 | 146,567 | 158,950 | 173.618 |
| 39 | 50,660 | 54,582 | 62,444 | 72,080 | 130 | 151,045 | 157,610 | 170,423 | 185,573 |
| 40 | 51,805 | 55,768 | 63,707 | 73,428 | 140 | 161,827 | 168,613 | 181,841 | 197,450 |
| 41 | 52,949 | 56,953 | 64,967 | 74,772 | 150 | 172,581 | 179,581 | 193,207 | 209,265 |
| 42 | 54,090 | 58,135 | 66,224 | 76,111 | 200 | 226,021 | 233,994 | 249,445 | 267,539 |
| 43 | 55,230 | 59,314 | 67,477 | 77,447 | 250 | 279,050 | 287,882 | 304,939 | 324,831 |
| 44 | 56,369 | 60,492 | 68,728 | 78,779 | 300 | 331,788 | 341,395 | 359,906 | 381,424 |
| 45 | 57,505 | 61,668 | 69,976 | 80,107 | 350 | 384,306 | 394,626 | 414,474 | 437,487 |

***Таблица А.9***- Критические значения коэффициентов линейной корреляции Пирсона и ранговой корреляции Спирмена **(для проверки ненаправленных гипотез, значения приведены по отношению к числу испытуемых в выборке или числу рангов, значения рассчитаны по программе Excel)[14]**

| *n* | *a* | | | | *n* | *a* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 | | 0,10 | 0,05 | 0,01 | 0,001 |
| 5 | 0,805 | 0,878 | 0,959 | 0,991 | 46 | 0,246 | 0,291 | 0,376 | 0,469 |
| 6 | 0,729 | 0,811 | 0,917 | 0,974 | 47 | 0,243 | 0,288 | 0,372 | 0,465 |
| 7 | 0,669 | 0,754 | 0,875 | 0,951 | 48 | 0,240 | 0,285 | 0,368 | 0,460 |
| 8 | 0,621 | 0,707 | 0,834 | 0,925 | 49 | 0,238 | 0,282 | 0,365 | 0,456 |
| 9 | 0,582 | 0,666 | 0,798 | 0,898 | 50 | 0,235 | 0,279 | 0,361 | 0,451 |
| 10 | 0,549 | 0,632 | 0,765 | 0,872 | 51 | 0,233 | 0,276 | 0,358 | 0,447 |
| 11 | 0,521 | 0,602 | 0,735 | 0,847 | 52 | 0,231 | 0,273 | 0,354 | 0,443 |
| 12 | 0,497 | 0,576 | 0,708 | 0,823 | 53 | 0,228 | 0,271 | 0,351 | 0,439 |
| 13 | 0,476 | 0,553 | 0,684 | 0,801 | 54 | 0,226 | 0,268 | 0,348 | 0,435 |
| 14 | 0,458 | 0,532 | 0,661 | 0,780 | 55 | 0,224 | 0,266 | 0,345 | 0,432 |
| 15 | 0,441 | 0,514 | 0,641 | 0,760 | 56 | 0,222 | 0,263 | 0,341 | 0,428 |
| 16 | 0,426 | 0,497 | 0,623 | 0,742 | 57 | 0,220 | 0,261 | 0,339 | 0,424 |
| 17 | 0,412 | 0,482 | 0,606 | 0,725 | 58 | 0,218 | 0,259 | 0,336 | 0,421 |
| 18 | 0,400 | 0,468 | 0,590 | 0,708 | 59 | 0,216 | 0,256 | 0,333 | 0,418 |
| 19 | 0,389 | 0,456 | 0,575 | 0,693 | 60 | 0,214 | 0,254 | 0,330 | 0,414 |
| 20 | 0,378 | 0,444 | 0,561 | 0,679 | 61 | 0,213 | 0,252 | 0,327 | 0.411 |
| 21 | 0,369 | 0,433 | 0,549 | 0,665 | 62 | 0,211 | 0,250 | 0,325 | 0,408 |
| 22 | 0,360 | 0,423 | 0,537 | 0,652 | 63 | 0,209 | 0,248 | 0,322 | 0,405 |
| 23 | 0,352 | 0,413 | 0,526 | 0,640 | 64 | 0,207 | 0,246 | 0,320 | 0,402 |
| 24 | 0,344 | 0,404 | 0,515 | 0,629 | 65 | 0,206 | 0,244 | 0,317 | 0,399 |
| 25 | 0,337 | 0,396 | 0,505 | 0,618 | 66 | 0,204 | 0,242 | 0,315 | 0,396 |
| 26 | 0,330 | 0,388 | 0,496 | 0,607 | 67 | 0,203 | 0,240 | 0,313 | 0,393 |
| 27 | 0,323 | 0,381 | 0,487 | 0,597 | 68 | 0,201 | 0,239 | 0,310 | 0,390 |
| 28 | 0,317 | 0,374 | 0,479 | 0,588 | 69 | 0,200 | 0,237 | 0,308 | 0,388 |
| 29 | 0,31,1 | 0,367 | 0,471 | 0,579 | 70 | 0,198 | 0,235 | 0,306 | 0,385 |
| 30 | 0,306 | 0,361 | 0,463 | 0,570 | 80 | 0,185 | 0,220 | 0,286 | 0,361 |
| 31 | 0,301 | 0,355 | 0,456 | 0,562 | 90 | 0,174 | 0,207 | 0,270 | 0,341 |
| 32 | 0,296 | 0,349 | 0,449 | 0,554 | 100 | 0,165 | 0,197 | 0,256 | 0,324 |
| 33 | 0,291 | 0,344 | 0,442 | 0,547 | 110 | 0,158 | 0,187 | 0,245 | 0,310 |
| 34 | 0,287 | 0,339 | 0,436 | 0,539 | 120 | 0,151 | 0,179 | 0,234 | 0,297 |
| 35 | 0,283 | 0,334 | 0,430 | 0,532 | 130 | 0,145 | 0,172 | 0,225 | 0,285 |
| 36 | 0,279 | 0,329 | 0,424 | 0,525 | 140 | 0,140 | 0,166 | 0,217 | 0,275 |
| 37 | 0,275 | 0,325 | 0,418 | 0,519 | 150 | 0,135 | 0,160 | 0,210 | 0,266 |
| 38 | 0,271 | 0,320 | 0,413 | 0,513 | 200 | 0,117 | 0,139 | 0,182 | 0,231 |
| 39 | 0,267 | 0,316 | 0,408 | 0,507 | 250 | 0,104 | 0,124 | 0,163 | 0,207 |
| 40 | 0,264 | 0,312 | 0,403 | 0,501 | 300 | 0,095 | 0,113 | 0,149 | 0,189 |
| 41 | 0,260 | 0.308 | 0,398 | 0,495 | 350 | 0,088 | 0,105 | 0,138 | 0,175 |
| 42 | 0,257 | 0,304 | 0,393 | 0,490 | 400 | 0,082 | 0,098 | 0,129 | 0,164 |
| 43 | 0,254 | 0,301 | 0,389 | 0,484 | 450 | 0,078 | 0,092 | 0,121 | 0,155 |
| 44 | 0,251 | 0,297 | 0,384 | 0,479 | 500 | 0,074 | 0,088 | 0,115 | 0,147 |
| 45 | 0,248 | 0,294 | 0,380 | 0,474 | 600 | 0,067 | 0,080 | 0,105 | 0,134 |

***Таблица А.10***- **Критические значения *U*-критерия Манна-Уитни (для *a*=0,05)[14]**
(для проверки направленных гипотез — односторонний критерий)

| *n* | *m* | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 5 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 5 | 7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 6 | 8 | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 8 | 10 | 13 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 11 | 14 | 17 | 20 | 24 | 27 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 12 | 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 34 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 13 | 17 | 21 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 18 | 23 | 28 | 33 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 19 | 25 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 20 | 26 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 22 | 28 | 35 | 41 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | | | | | | | | | | | |
| 20 | 25 | 32 | 39 | 47 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 | | | | | | | | | | |
| 21 | 26 | 34 | 41 | 49 | 57 | 65 | 73 | 81 | 89 | 97 | 105 | 113 | 121 | 130 | 138 | 146 | 154 | | | | | | | | | |
| 22 | 28 | 36 | 44 | 52 | 60 | 69 | 77 | 85 | 94 | 102 | 111 | 119 | 128 | 136 | 145 | 154 | 162 | 171 | | | | | | | | |
| 23 | 29 | 37 | 46 | 55 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 107 | 116 | 125 | 134 | 143 | 152 | 161 | 170 | 180 | 189 | | | | | | | |
| 24 | 31 | 39 | 48 | 57 | 66 | 75 | 85 | 94 | 103 | 113 | 122 | 131 | 141 | 150 | 160 | 169 | 179 | 188 | 198 | 207 | | | | | | |
| 25 | 32 | 41 | 50 | 60 | 69 | 79 | 89 | 98 | 108 | 118 | 128 | 137 | 147 | 157 | 167 | 177 | 187 | 197 | 207 | 217 | 227 | | | | | |
| 26 | 33 | 43 | 53 | 62 | 72 | 82 | 93 | 103 | 113 | 123 | 133 | 143 | 154 | 164 | 174 | 185 | 195 | 206 | 216 | 226 | 237 | 247 | | | | |
| 27 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 86 | 96 | 107 | 118 | 128 | 139 | 150 | .160 | 171 | 182 | 193 | 203 | 214 | 225 | 236 | 247 | 258 | 268 | | | |
| 28 | 36 | 47 | 57 | 68 | 79 | 89 | 100 | 111 | 122 | 133 | 144 | 156 | 167 | 178 | 189 | 200 | 212 | 223 | 234 | 245 | 257 | 268 | 279 | 291 | | |
| 29 | 38 | 48 | 59 | 70 | 82 | 93 | 104 | 116 | 127 | 139 | 150 | 162 | 173 | 185 | 196 | 208 | 220 | 232 | 243 | 255 | 267 | 278 | 290 | 302 | 314 | |
| 30 | 39 | 50 | 62 | 73 | 85 | 96 | 108 | 120 | 132 | 144 | 156 | 168 | 180 | 192 | 204 | 216 | 228 | 240 | 252 | 265 | 277 | 289 | 301 | 313 | 326 | 338 |

***Таблица А.11*- Критические значения *U*-критерия *Манна-Уитни* (для *a*=0,01)[14]**
(для проверки направленных гипотез — односторонний критерий)

| *n* | m | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | *23* | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| *5* | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 2 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 3 | 4 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 4 | 6 | 7 | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 6 | 8 | 11 | 13 | 16 | 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 7 | 9 | 12 | 15 | 18 | 22 | 25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 8 | 11 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 9 | 12 | 16 | 20 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 10 | 13 | 17 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 11 | 15 | 19 | 24 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 12 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 44 | 49 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 14 | 19 | 24 | 30 | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 70 | 76 | 82 | 88 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 15 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 63 | 69 | 75 | 82 | 88 | 94 | 101 | | | | | | | | | | | |
| 20 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 47 | 53 | 60 | 67 | 73 | 80 | 87 | 93 | 100 | 107 | 114 | | | | | | | | | | |
| 21 | 16 | 22 | 29 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 | 105 | 113 | 120 | 127 | | | | | | | | | |
| 22 | 17 | 23 | 30 | 37 | 45 | 52 | 59 | 66 | 74 | 81 | 89 | 96 | 104 | 111 | 119 | 127 | 134 | 142 | | | | | | | | |
| 23 | 18 | 25 | 32 | 39 | 47 | 55 | 62 | 70 | 78 | 86 | 94 | 102 | 109 | 117 | 125 | 133 | 141 | 150 | 158 | | | | | | | |
| 24 | 19 | 26 | 34 | 42 | 49 | 57 | 66 | 74 | 82 | 90 | 98 | 107 | 115 | 123 | 132 | 140 | 149 | 154 | 166 | 174 | | | | | | |
| 25 | 20 | 27 | 35 | 44 | 52 | 60 | 69 | 77 | 86 | 95 | 103 | 112 | 121 | 130 | 138 | 147 | 156 | 165 | 174 | 183 | 192 | | | | | |
| 26 | 21 | 29 | 37 | 46 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | 126 | 136 | 145 | 154 | 163 | 173 | 182 | 191 | 201 | 210 | | | | |
| 27 | 22 | 30 | 39 | 48 | 57 | 66 | 75 | 85 | 94 | 103 | 113 | 122 | 132 | 142 | 151 | 161 | 171 | 180 | 190 | 200 | 209 | 219 | 229 | | | |
| 28 | 23 | 32 | 41 | 50 | 59 | 69 | 78 | 88 | 98 | 108 | 118 | 128 | 138 | 148 | 158 | 168 | 178 | 188 | 198 | 208 | 218 | 229 | 239 | 249 | | |
| 29 | 24 | 33 | 42 | 52 | 62 | 72 | 82 | 92 | 102 | 112 | 123 | 133 | 143 | 154 | 164 | 175 | 185 | 196 | 206 | 217 | 227 | 238 | 249 | 259 | 270 | |
| 30 | 25 | 34 | 44 | 54 | 64 | 75 | 85 | 95 | 106 | 117 | 127 | 138 | 149 | 160 | 171 | 182 | 192 | 203 | 214 | 225 | 236 | 247 | 258 | 270 | *281* | 292 |

***Таблица А.12-*** Критические значения *U*-критерия Манна-Уитни **(для проверки ненаправленных гипотез — двусторонний критерий)[14]**

a=0,05

| *n* | *m* | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 5 | 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 3 | 5 | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 5 | 6 | 8 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 6 | 8 | 10 | 13 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | | | | | | | | | | | |
| 10 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | | | | | | | | | | |
| 11 | 9 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 30 | | | | | | | | | |
| 12 | 11 | 14 | 18 | 22 | 26 | 29 | 33 | 37 | | | | | | | | |
| 13 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | | | | | | | |
| 14 | 13 | 17 | 22 | 26 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | | | | | | |
| 15 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | | | | | |
| 16 | 15 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | | | | |
| 17 | 17 | 22 | 28 | 34 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 | 81 | 87 | | | |
| 18 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | | |
| 19 | 19 | 25 | 32 | 38 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 | 92 | 99 | 106 | 113 | |
| 20 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 119 | 127 |

a=0,01

| *n* | *m* | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 5 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 3 | 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 2 | 4 | 6 | 7 | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | | | | | | | | | | | |
| 10 | 4 | 6 | 9 | 11 | 13 | 16 | | | | | | | | | | |
| 11 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 18 | 21 | | | | | | | | | |
| 12 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | | | | | | | | |
| 13 | 7 | 10 | 13 | 17 | 20 | 24 | 27 | 31 | 34 | | | | | | | |
| 14 | 7 | 11 | 15 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | | | | | | |
| 15 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 29 | 33 | 37 | 42 | 46 | 51 | | | | | |
| 16 | 9 | 13 | 18 | 22 | 27 | 31 | 36 | 41 | 45 | 50 | 55 | 60 | | | | |
| 17 | 10 | 15 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 60 | 65 | 70 | | | |
| 18 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 37 | 42 | 47 | 53 | 58 | 64 | 70 | 75 | 81 | | |
| 19 | 12 | 17 | 22 | 28 | 33 | 39 | 45 | 51 | 56 | 63 | 69 | 74 | 81 | 87 | 93 | |
| 20 | 13 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 67 | 73 | 79 | 86 | 92 | 99 | 105 |

***Таблица А.13*** - Критические значения Т-критерия Вилкоксона
**(для проверки ненаправленных гипотез — двусторонний критерий)[14]**

| ***n*** | ***a*** | | ***n*** | ***a*** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0,05 | 0,01 | | 0,05 | 0,01 |
| 5 | - | - | 28 | 116 | 91 |
| 6 | 0 | - | 29 | 126 | 100 |
| 7 | 2 | - | 30 | 137 | 109 |
| 8 | 3 | 0 | 31 | 147 | 118 |
| 9 | 5 | 1 | 32 | 159 | 128 |
| 10 | 8 | 3 | 33 | 170 | 138 |
| 11 | 10 | 5 | 34 | 182 | 148 |
| 12 | 13 | 7 | 35 | 195 | 159 |
| 13 | 17 | 9 | 36 | 208 | 171 |
| 14 | 21 | 12 | 37 | 221 | 182 |
| 15 | 25 | 15 | 38 | 235 | 194 |
| 16 | 29 | 19 | 39 | 249 | 207 |
| 17 | 34 | 23 | 40 | 264 | 220 |
| 18 | 40 | 27 | 41 | 279 | 233 |
| 19 | 46 | 32 | 42 | 294 | 247 |
| 20 | 52 | 37 | 43 | 310 | 261 |
| 21 | 58 | 42 | 44 | 327 | 276 |
| 22 | 65 | 48 | 45 | 343 | 291 |
| 23 | 73 | 54 | 46 | 361 | 307 |
| 24 | 81 | 61 | 47 | 378 | 322 |
| 25 | 89 | 68 | 48 | 396 | 339 |
| 26 | 98 | 75 | 49 | 415 | 355 |
| 27 | 107 | 83 | 50 | 434 | 373 |