Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

М.Р. Расовский, В.В. Гуньков, Т.В. Климова

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЗАДАЧНИК

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки 011800.62 Радиофизика, 011200.62 Физика, и по специальностям 010801.65 Радиофизика и электроника, 010707.65 Медицинская физика

Оренбург

2012

УДК 531
ББК 22.31
Р24

Рецензент – доцент, к.ф.-м.н. А.Г. Четверикова

Расовский, М.Р.
Р24 Теоретическая механика: задачник / М.Р. Расовский, В. В. Гуньков, Т.В. Климова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 159с.
ISBN

Практикум содержит 210 задач по курсу теоретической механики для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 011800.62 – Радиофизика и 011200.62 – Физика. В начале каждого раздела приведены подробные решения типовых задач. В приложении приводятся сведения по использованию для решения задач средств математического пакета Mathematica.

УДК 531
ББК 22.3

Содержание

Введение

Учебное пособие содержит алгоритмы и примеры решения задач из различных разделов курса теоретической механики, изучаемого студентами естественнонаучных специальностей вузов.

Каждый раздел состоит из задач, содержащих общую постановку задачи, план ее решения, необходимые теоретические пояснения и ответ. Имеется достаточное количество заданий для самостоятельного решения, которые студент может использовать для контроля собственных знаний по теме. Задачи ранжированы по уровню сложности, что позволяет оценить степень подготовленности студентов.

Приведен алгоритм решения задач в программе Mathematica, что отличает его от аналогичных задачников по курсу теоретической механики. С помощью Mathematica можно быстро и эффекривно проводить вычисления, упрощать алгебраические выражения, решать дифференциальные уравнения, строить графики функций. Причем вычисления можно проводить как на локальной машине с установленой програмой, так и с помощью бесплатного интернет-сервиса Wolfram Alpha, который доступен по адресу www.wolframalpha.com. Краткий справочник по командам приведен в шестой главе.

Учебное пособие может быть использовано для обучения студентов очной формы обучения по направлениям «Физика», «Радиофизика».

1 Кинематика

1.1 Траектория и уравнения движения частиц

1.1 По заданным уравнениям движения частицы получить уравнение ее траектории. Начертить эту траекторию, указав начальную точку и направление движения.

а) $\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 4 - 2t \end{cases}$

Решение. Исключая из уравнений движения частицы время t, (например, путем умножения первого из уравнений на 2, второго — на 3 и последующего сложения уравнений), получим уравнение траектории частицы: $2x + 3y = 2$, или $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$. Начальную точку определяем, подставляя в уравнения движения условие $t = 0$: $x_0 = -5$, $y_0 = 4$. Таким образом, траекторией частицы является полупрямая (см. рисунок 1). Направление движения частицы указано стрелкой. Этот рисунок можно построить в системе Mathematica с помощью команды ParametricPlot[$\{3t - 5, 4 - 2t\}$,$\{t, 0, 3\}$].

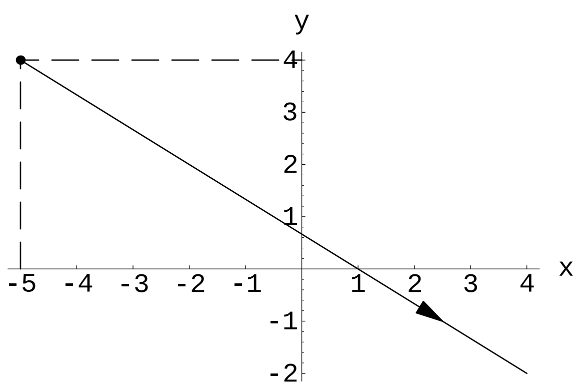

Рисунок 1

б) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 8t^2 \end{cases}$

Решение. После исключения из уравнений движения параметра t, на-

ходим уравнение траектории частицы: $y = 2x^2$. *Начальная точка движения* $(t = 0)$*:* $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. *Таким образом, траектория является правой ветвью параболы (см. рисунок 2). Чтобы получить этот рисунок, необходимо выполнмть команду* Plot$[2x^2,\{x,0,2\}]$.

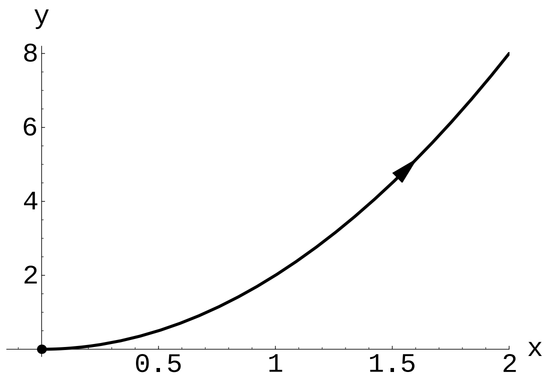

Рисунок 2

в) $\begin{cases} x = 5\sin 10t \\ y = 3\cos 10t \end{cases}$

Решение. Нетрудно заметить, что для исключения из уравнений t *необходимо разделить первое уравнение на 5, второе — на 3, после чего возвести каждое уравнение в квадрат и сложить их друг с другом:*

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Таким образом, траектория будет являться эллипсом с полуосями 5 и 3 и центром в начале координат. Легко установить, что частица начнет движение из верхней точки эллипса: $x_0 = 0$, $y_0 = 3$ *— и будет обходить его по часовой стрелке (см. рисунок 3).*

г) $\begin{cases} x = 1/2(e^t + e^{-t}) \\ y = 1/2(e^t + e^{-t}) \end{cases}$

Решение. Исключить параметр t *из этих уравнений можно, если заметить, что в правых частях стоят гиперболические функции, и вос-*

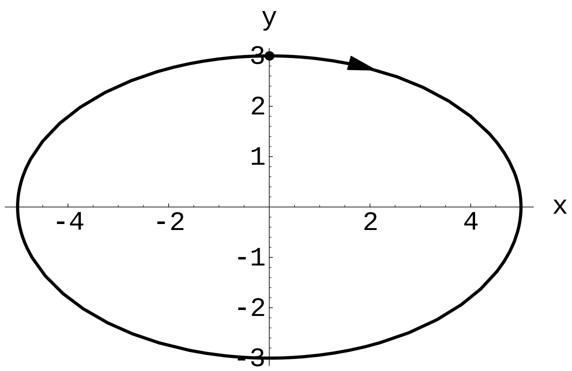

Рисунок 3

пользоваться основным тождеством для этих функций:

$$x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t,$$

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Это уравнение гиперболы, осями симметрии которой служат координатные оси. Однако частица, разумеется, будет двигаться только по одной из двух ветвей гиперболы, а именно по правой, причем по ее верхней половине. Начало движения — точка $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ (см. рисунок 4).

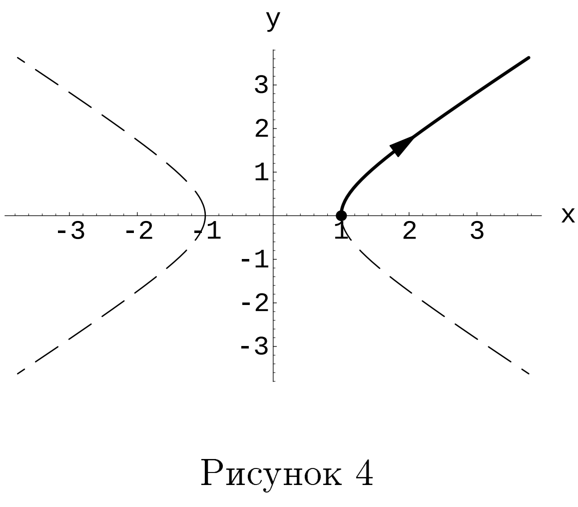

Рисунок 4

1.2 По заданным уравнениям движения частицы найти уравнение ее траектории, а также получить закон движения частицы по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения частицы.

а) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^2 \end{cases}$

Решение. Исключаем t *и находим уравнение траектории:*

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Начальная точка ($t = 0$)*:* $x_0 = y_0 = 0$*. Очевидно, траекторией служит полупрямая, исходящая из начала координат (см. рисунок 5). Чтобы найти закон движения частицы по траектории, воспользуемся соотношением:*

$$S = \int v(t)dx.$$

Скорость частицы найдем через ее компоненты:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(6t)^2 + (8t)^2} = 10t.$$

Отсюда $S = \int 10tdt = 5t^2 + C$*. Постоянную интегрирования* C *легко определить из начального условия:* $t = 0$*,* $S = 0$*. Находим:* $C = 0$*. Окончательно:* $S(t) = 5t^2$.

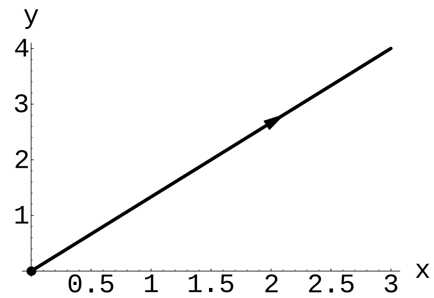

Рисунок 5

б) $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$

Решение. Без труда находим уравнение траектории: $x^2 + y^2 = 9$*. Это окружность радиуса 3 с центром в начале координат; начальная точка траектории —* $x_0 = 0$*,* $y_0 = 3$*; направление движения — по часовой стрел-*

ке (см. рисунок 6). Найдем закон движения: $S = \int v dt$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(3\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} = 3$, $S = 3t + C$, $C = 0$. *Окончательно:* $S(t) = 3t$.

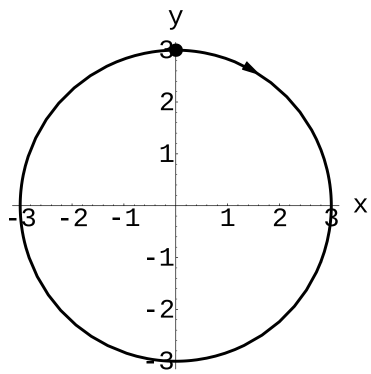

Рисунок 6

в) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{cases} \quad a = const.$

Решение. Уравнение траектории: $y = a - x$. *Начальные точки:* $x_0 = a$, $y_0 = 0$. *Нетрудно видеть, что частица, начав движение из точки* $(a, 0)$, *будет совершать колебания по изображенному на рисунке 7 отрезку. Закон движения:* $S = \int v dt$.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\sqrt{2}\sin 2t$$

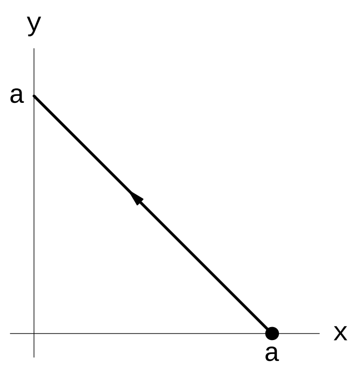

Рисунок 7

Задачи для самостоятельного решения

1.3 Движение частицы, описывающей фигуру Лиссажу, задается системой уравнений:

$$\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 2\cos 2t \end{cases}$$

. Получить уравнение траектории, начертить ее и указать направление движения в различные моменты времени. Указать ближайший после начала движения момент времени t_1, когда траектория пересечет ось OX.

1.4 При подходящем выборе осей координат уравнения движения электрона в постоянном магнитном поле имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\sin kt \\ y = a\cos kt \\ z = \nu t \end{cases},$$

где a, k и ν — некоторые постоянные, зависящие от величины магнитного поля, массы, заряда и скорости электрона. Определить траекторию электрона и закон движения его по траектории.

1.5 Частица совершает баллистическое движение:

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha t \\ y = v_0\sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases},$$

где v_0 — начальная скорость,

α — угол бросания,

g — ускорение свободного падения.

Определить траекторию частицы, высоту H, дальность L и время полета T.

1.6 В условиях предыдущей задачи определить угол бросания, при котором дальность полета будет максимальной. Найти соответствующие высоту и время полета.

1.7 В условиях задачи 1.5 определить угол бросания α, при котором частица пройдет через заданную точку $A(x, y)$.

1.2 Скорость и ускорение частицы

1.8 Частица описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\cos 2t \end{cases}.$$

Определить величину и направление скорости частицы в те моменты, когда она пересекает ось OY.

Решение. Вначале найдем уравнение траектории частицы: $y = 2x^2 - 4$*. Видно, что частица будет двигаться по параболе, ограниченной условиями:* $|x| \le 2$, $|y| \le 4$ *(см. рисунок 8). Движение будет носить характер колебаний. Найдем общие выражения для скорости частицы:* $v_x = \dot{x} = -2\sin t$, $v_y = \dot{y} = -8\sin 2t$;

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{\sin^2 t + 16\sin^2 2t}.$$

Определим моменты, когда частица будет пересекать ось OY:

$$\cos t = 0; \qquad t_n = \pi/2 + n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдем вектор скорости частицы в момент t_1*:*

$$\begin{cases} v_x(t_1) = -2\sin(\pi/2) = -2 \\ v_y(t_1) = -8\sin\pi = 0 \end{cases}.$$

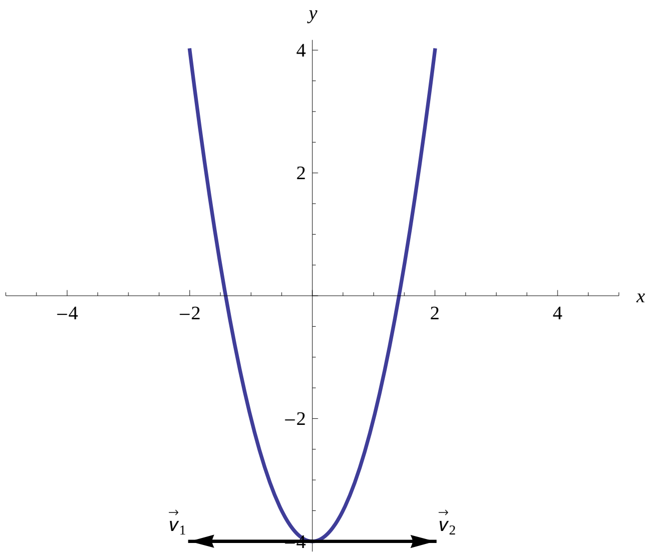

Рисунок 8

Таким образом, вектор скорости частицы горизонтален и направлен так, как показано на рисунке 8.

1.9 Частица движется согласно уравнениям

$$\begin{cases} x = 4\sin(\pi t/2) \\ y = 3\sin(\pi t/2) \end{cases}$$

Определить величину и направление скорости частицы в следующие моменты времени: $t_1 = 0$; $t_2 = 1$ с; $t_3 = 2$ с.

Решение. Траектория частицы описывается выражением: $y = \frac{3}{4}x$. *Таким образом, она представляет собой отрезок прямой с угловым коэффициентом* $\frac{3}{4}$ *(рисунок 9). Частица совершает колебания вдоль показанного на рисунке 9 отрезка. Ее скорость:*

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = 2\pi\cos(\pi t/2) \\ v_y = \dot{y} = \dfrac{3\pi}{2}\cos(\pi t/2) \end{cases}.$$

Отсюда находим:

1) $\quad v_x(t_1) = 2\pi; \quad v_y(t_1) = 3\pi/2;$

$$v_1 = v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = 5\pi/2;$$

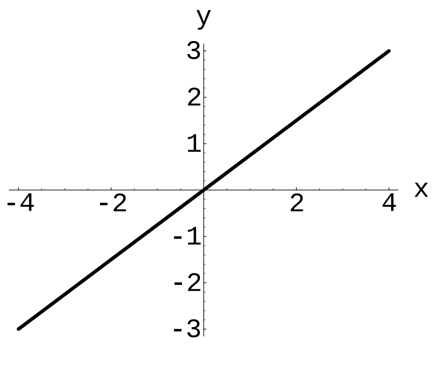

Рисунок 9

$\cos(v_1, x) = 4/5$

2) $v_x(t_2) = 0; \quad v_y(t_2) = 0;$

$v_2 = v(t_2) = 0.$

3) $v_x(t_3) = -2\pi; \quad v_y(t_3) = -3\pi/2;$

$v_3 = v(t_3) = 5\pi/2;$

$\cos(v_3, x) = -4/5.$

1.10 Движение трамвая по прямолинейному пути в период разгона характеризуется тем, что проходимый трамваем путь пропорционален кубу времени. В течение первой минуты трамвай прошел 90 м. Найти скорость и ускорение в моменты $t_0 = 0$ и $t_1 = 5$ с. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Решение. По условию, закон движения трамвая имеет вид: $S = kt^3$, *где* k *— постоянная. Для нахождения* k *воспользуемся тем, что при* $t = 60\,с$ *путь* $S = 90\,м$*; будем иметь:*

$$k = \frac{s}{t^3} = \frac{90}{216000} = \frac{1}{2400}\,(м/c^3).$$

Отсюда находим все требуемые величины:

1) $t_0 = 0; \quad s(t_0) = 0: \quad v(t) = \dot{s}(t) = 3kt^2;$

$v(t_0) = 0.$

$a(t) = \ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = 6kt;$

$a(t_0) = 0$

Графики приведены на рисунке 10

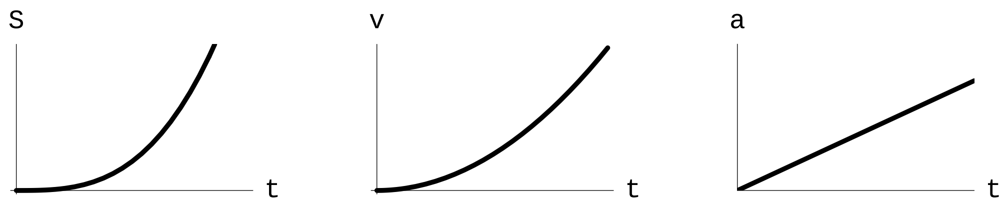

Рисунок 10

2) $\quad t_1 = 5\,c; \quad s(t_1) = kt_1^3 = 125/2400 = 5/96\,(м);$

$v(t_1) = 3kt_1^2 = 3 \cdot 25/2400 = 1/32\,(м/с);$

$a(t_1) = 6kt_1 = 6 \cdot 5/2400 = 1/20\,(м/с^2).$

1.11 Прямолинейное движение частицы происходит по закону

$$S = \frac{g}{b^2}\left(bt - e^{-bt}\right),$$

где b и g — постоянные. Найти начальную скорость частицы, а также определить ее ускорение как функцию скорости.

Решение. Найдем скорость частицы в произвольный момент времени:

$$v = \dot{s} = \left(\frac{g}{b^2}\left(b - b \cdot e^{-bt}\right)\right)' = \frac{g}{b}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

Дифференцирование задается командой $\mathrm{D}[\frac{g}{b^2}\left(b - b \cdot e^{-bt}\right),t]$ *Начальная скорость (t=0):* $v_0 = 0$. *Ускорение частицы:* $a = \ddot{s} = ge^{-bt} = g - bv$.

1.12 Баллистическое движение тела задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = v_0(\cos\alpha)t \\ y = v_0(\sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

Найти радиус кривизны траектории в момент $t = 0$ и в момент падения тела на землю.

Решение. Как установлено в задаче 1.5, траекторией тела является

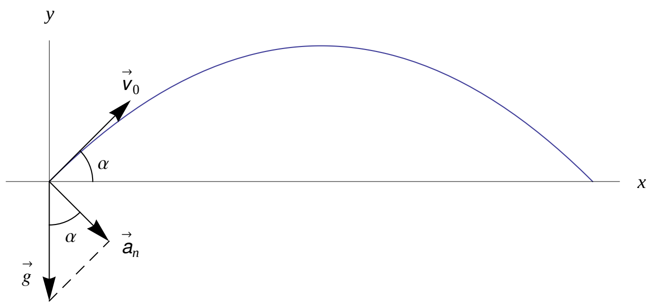

Рисунок 11

парабола (рисунок 11):

$$y = \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}.$$

На рисунке 11 показаны векторы полного $\vec{g}$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорения тела в момент $t = 0$. Т.к. $\vec{a}_n \perp \vec{v}_0$, то при $t = 0$: $a_n = g\cos(\alpha)$. Отсюда радиус кривизны траектории в момент бросания:

$$\rho = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g\cos(\alpha)}.$$

Очевидно, что в силу симметрии параболы радиус кривизны траектории тела в момент падения на землю будет таким же.

Задачи для самостоятельного решения

1.13 Поезд движется со скоростью 72 км/ч; при торможении он обладает замедлением $0,4\,м/с^2$. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.

1.14 Копровая баба, ударив сваю, движется затем вместе с ней в течение 0,02 с до остановки; при этом свая углубляется в землю на 6 см. Определить начальную скорость движения сваи, считая его равнозамедленным.

1.15 Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением

$$a_x = -\pi^2\sin(\frac{\pi t}{2}).$$

Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $v_{ox} = 2\pi$, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат.

1.16 Поезд, имея начальную скорость 54 км/ч, прошел за первые 30 с 600 м. Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если движение происходит на закруглении радиуса $R = 1$ км.

1.17 При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает 72 км/ч через 3 минуты после отхода; путь расположен на закруглении радиуса $R = 800$ м. Определить касательное, нормальное и полное ускорения поезда через 2 минуты после отхода.

1.18 Движение частицы задано уравнениями:

$$\begin{cases} x = 10\cos(\dfrac{2\pi t}{5}) \\ y = 10\sin(\dfrac{2\pi t}{5}) \end{cases}.$$

Найти траекторию частицы, величину и направление ее скорости, а также величину и направление ускорения.

1.19 Частица движется по винтовой линии согласно уравнениям:

$$\begin{cases} x = 2\cos(4t) \\ y = 2\sin(4t) \\ z = 2t \end{cases}.$$

Определить радиус кривизны траектории.

1.20 Движение частицы задано уравнениями

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}.$$

Определить скорость и ускорение частицы (по величине и направлению) в момент времени $t = 1$ с.

1.3 Сложение скоростей

1.21 Корабль, проходящий точку A (рисунок 12), движется с постоянной по величине и направлению скоростью v_0. Под каким углом β к прямой AB должен начать двигаться катер из точки B, чтобы встретиться с кораблем, если скорость катера постоянна по величине и направлению и равна v_1? Линия AB составляет угол ψ_0 с перпендикуляром к курсу корабля.

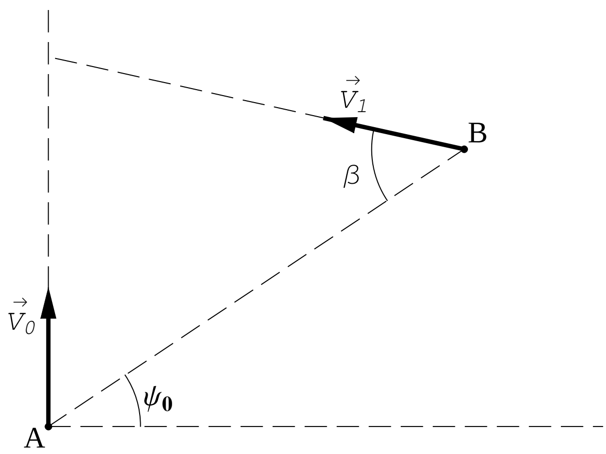

Рисунок 12

Решение. Условием встречи корабля с катером служит равенство составляющих скоростей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$, перпендикулярных линии AB: $v_0 \cos\psi_0 = v_1 \sin\beta$, откуда находим угол β:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v_0}{v_1}\cos\psi_0\right)$$

1.22 В предыдущей задаче определить время T, по истечении которого катер встретится с кораблем, если первоначальное расстояние между ними $AB = l$.

Решение. Время T до встречи можно найти, если известна проекция относительной скорости сближения корабля и катера $v_{отн}$ на направление AB:

$$v_{отн} = v_0 \sin\psi_0 + v_1 \cos\beta = v_0 \sin\psi_0 + v_1\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\cos^2\psi_0} =$$

$$= v_0 \sin\psi_0 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2\cos^2\psi_0}$$

Имеем:

$$T = \frac{l}{v_0 \sin\psi_0 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2\cos^2\psi_0}}$$

.

1.23 Корабль идет курсом ЮВ со скоростью v, при этом флюгер на мачте показывает ветер В. Корабль уменьшает ход до $v/2$, и тогда флюгер показывает ветер СВ. Определить направление и скорость ветра. Примечание: наименование курса указывает, куда идет корабль; наименование ветра – откуда он дует.

Решение. Движение ветра считаем сложным: $\vec{v}_{абс}$ – скорость ветра по отношению к земле; $\vec{v}_{отн}$ – скорость ветра по отношению к движущемуся кораблю (показание флюгера); $\vec{v}_{пер}$ – скорость корабля. Изобразим на чертеже обе ситуации, указанные в условии задачи, с учетом теоремы сложения скоростей

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер},$$

а также того обстоятельства, что $\vec{v}_{абс}$ по условию задачи не меняется по величине и направлению, а $\vec{v}_{пер}$ меняется только по величине (рисунок 13). Из сопоставления рисунков 13а и 13б получаем: $\vec{v}_{абс} = v/\sqrt{2}$; ветер северный.

1.24 Берега реки параллельны; лодка вышла из точки A и, держа курс перпендикулярно берегам, достигла противоположного берега через 10 ми-

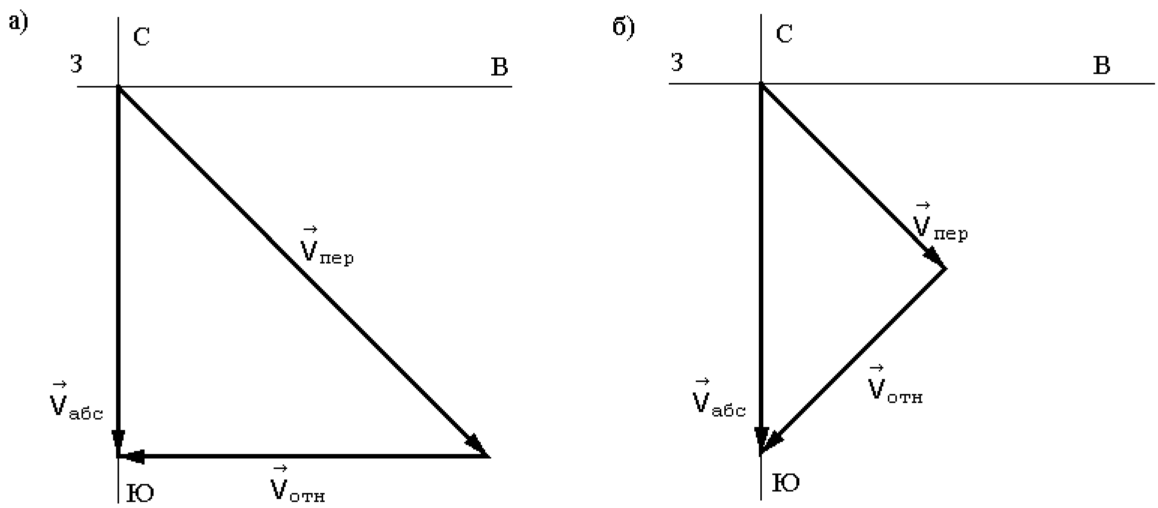

Рисунок 13

нут после отправления. При этом она попала в точку C, лежащую на 120 м ниже точки A по течению реки.

Чтобы, двигаясь с прежней относительной скоростью, попасть из точки A в точку B, лежащую на прямой AB, перпендикулярной к берегам, лодке надо держать курс под некоторым углом к прямой AB и против течения; в этом случае лодка достигает противоположного берега за 12,5 минут. Определить: ширину реки l, относительную скорость u лодки по отношению к воде и скорость v течения реки.

Решение. Пусть $\vec{V}$ и $\vec{V}'$ – скорость лодки относительно берега в первом и во втором случаях соответственно. Имеем из рисунка 14:

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{V'} = t' \\ Vt = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} \\ V^2 = u^2 + v^2 \\ u^2 = (V')^2 + v^2 \end{cases}.$$

Здесь t и t' – соответственно время, затраченное на переправу в первом и

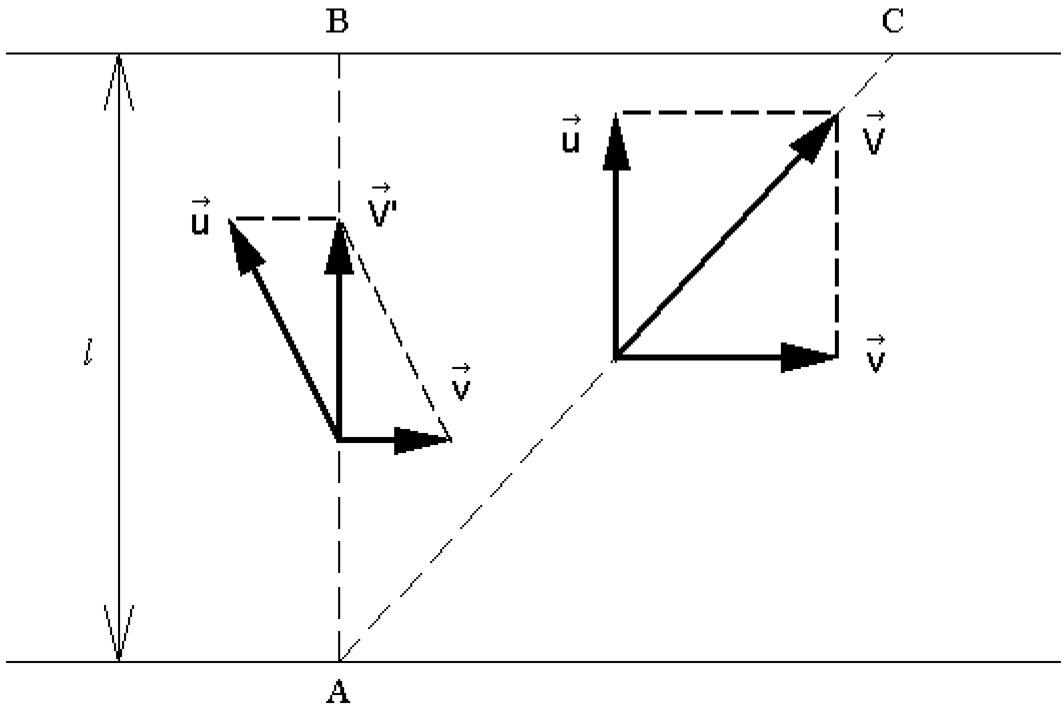

Рисунок 14

во втором случае. Решая эту систему уравнений, находим:

$$V' = \sqrt{\frac{2v^2t^2 - (BC)^2}{(t')^2 - t^2}} = 16\,\text{м/мин};$$

$$l = AB = V't' = 200\,\text{м};$$

$$u = \sqrt{(V')^2 + v^2} = 20\,\text{м/мин}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.25 Самолет летит от пункта A до пункта B, расположенного на расстоянии 300 км к востоку. Найти продолжительность полета, если: а) ветра нет; б) дует южный ветер; в) дует западный ветер. Скорость ветра $u = 20$ м/с; скорость самолета относительно воздуха $v_0 = 600$ км/ч.

1.26 Пассажир движущегося со скоростью 72 км/ч по горизонтальному шоссе автомобиля видит через боковое стекло траектории капель дождя наклоненными к вертикали под углом 40°. Определить абсолютную скорость падения капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

1.27 Корабль плывет на юг со скоростью $30\sqrt{2}$ км/ч. Второй корабль идет курсом ЮВ со скоростью 30 км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля относительно первого.

1.28 Два пловца должны попасть из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой AB, другой же – всее время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u.

При каком значении u оба пловца достигнут точки B за одинаковое время, если скорость течения $v_0 = 2$ км/ч и скорость каждого пловца относительно воды $v' = 2.5$ км/ч?

1.4 Сложение ускорений

1.29 Наклонная плоскость AB (рисунок 15), составляющая угол 45° с горизонтом, движется прямолинейно вдоль оси OX с постоянным ускорением $1\,м/с^2$. По этой плоскости спускается тело P с постоянным относительным ускорением $\sqrt{2}\,м/с^2$; начальные скорости плоскости и те́ла P равны нулю, начальное положение тела определяется координатами: $x_0 = 0$, $y_0 = h$. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела.

Решение. По теореме сложения ускорений

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн}$$

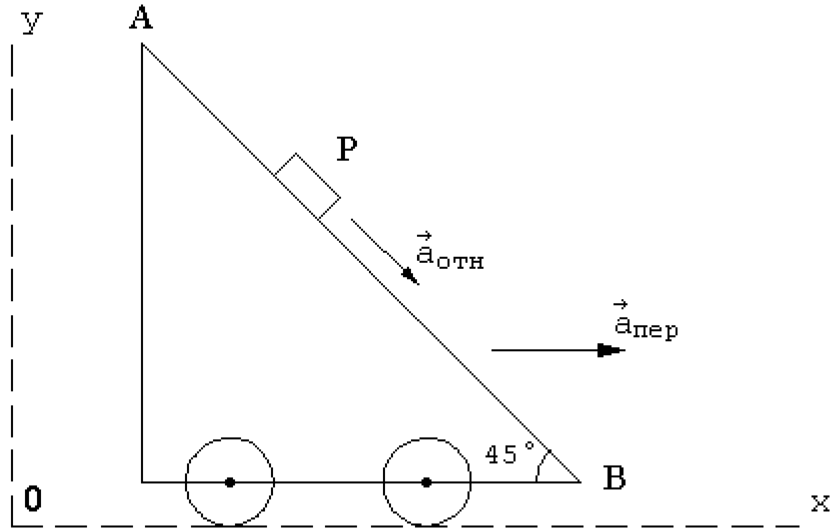

Рисунок 15

(переносное движение здесь поступательное, поэтому кориолисово ускорение отсутствует). Имеем параллелограмм ускорений (рисунок 16). С помощью теоремы косинусов находим величину абсолютного ускорения:

$$a_{абс} = \sqrt{a_{пер}^2 + a_{отн}^2 + 2\, a_{пер}\, a_{отн} \cos 45^\circ} = \sqrt{5}\, м/с^2.$$

Так как переносное и относительное движения — равнопеременны, то скорости этих движений:

$$v_{пер} = a_{пер} t = t; \quad v_{отн} = a_{отн} t = \sqrt{2}\, t.$$

Абсолютную скорость также находим с помощью теоремы косинусов:

$$v_{абс} = \sqrt{v_{пер}^2 + v_{отн}^2 + 2\, v_{пер}\, v_{отн} \cos 45^\circ} = t\sqrt{5}\, м/с.$$

Для нахождения траектории тела запишем закон его движения в координатной форме, учитывая, что все ускорения постоянны:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{ox} t + \dfrac{a_x t^2}{2} = \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_0 + v_{oy} t + \dfrac{a_y t^2}{2} = h + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}.$$

Из рисунка 16 находим проекции ускорений:

$$a_x = a_{пер} + a_{отн} \cos 45^\circ = 2\, м/с^2,$$

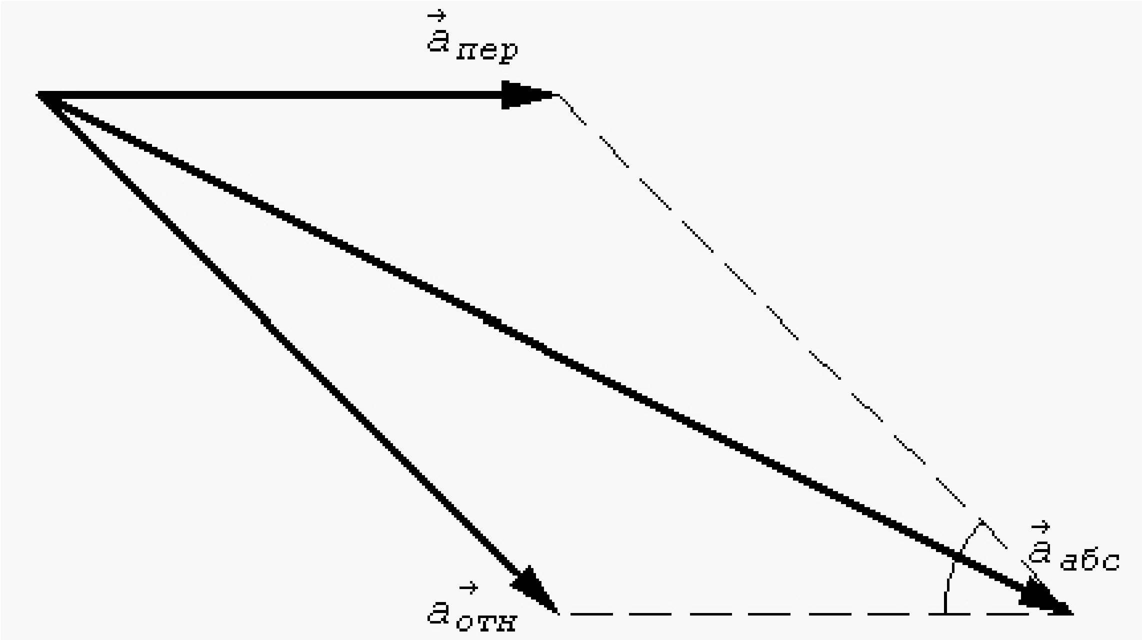

Рисунок 16

$$a_y = -a_{отн} \sin 45^\circ = -1\,м/с^2,$$

откуда

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = h - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}.$$

Исключая t, получаем уравнение траектории тела:

$$y = h - \frac{x}{2}.$$

1.30 На тележке, движущейся по горизонтали вправо (рисунок 17) с ускорением $a_{пер} = 49,2\,см/с$, установлен электромотор, ротор которого при пуске в ход вращается согласно уравнению $\varphi = t^2$ (угол измеряется в радианах). Радиус ротора 20 см. Определить абсолютное ускорение точки A, лежащей на ободе ротора, при $t = 1$ с, если в этот момент точка A находится в положении, указанном на рисунке 17.

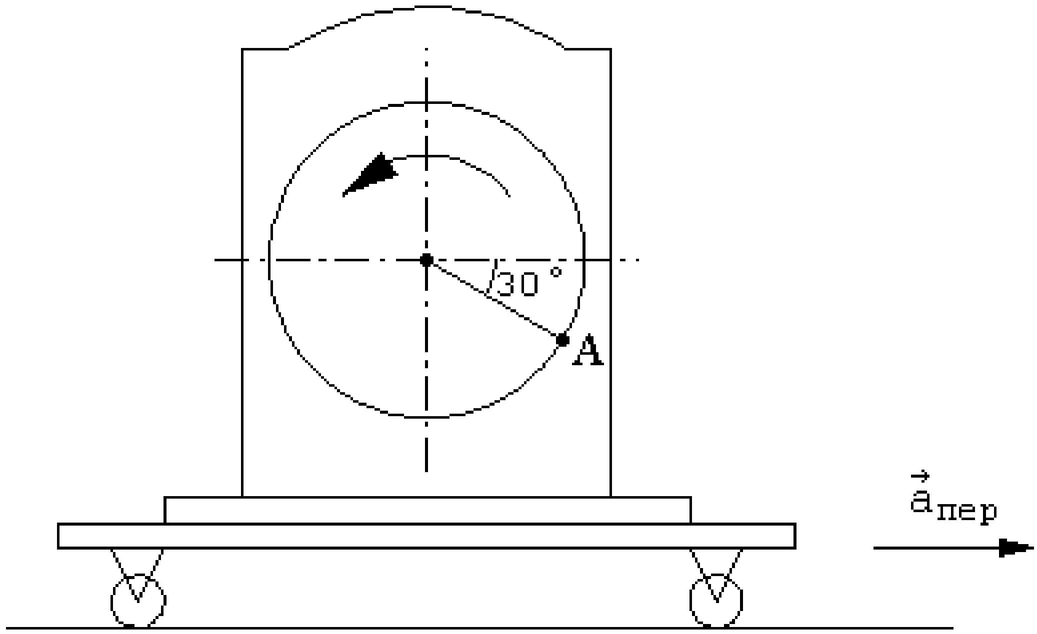

Рисунок 17

Решение. Запишем формулу сложения ускорений:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер},$$

причем

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}^{\tau}_{отн} + \vec{a}^{n}_{отн},$$

где $a^{\tau}_{отн} = \varepsilon R$, $a^{n}_{отн} = \omega^2 R$. *Найдем угловую скорость* ω *и угловое ускорение* ε *из закона движения:*

$$\varphi = t^2; \qquad \omega = \dot{\varphi} = 2t; \qquad \varepsilon = \ddot{\varphi} = 2\,c^{-2}.$$

Имеем:

$$a_{отн} = \sqrt{(\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = 89,4\,см/c^2.$$

Для нахождения $a_{абс}$ *строим параллелограмм ускорений (рисунок 18). Имеем:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^{\tau}_{отн}}{a^{n}_{отн}} = \frac{1}{2}; \qquad \alpha = 26,6^\circ$$

$$\beta = 150^\circ - \alpha = 123,4^\circ$$

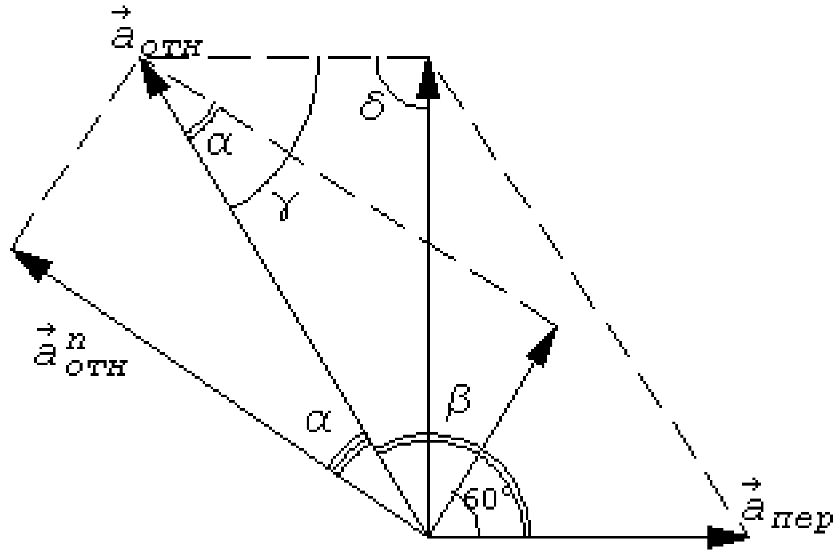

Рисунок 18

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 56,6^\circ$$

По теореме косинусов:

$$a_{абс} = \sqrt{a_{отн}^2 + a_{пер}^2 - 2\, a_{отн}^2\, a_{пер}^2\, \cos\gamma} = 74,6\, см/с^2$$

По теореме синусов:

$$\frac{a_{отн}}{\sin\delta} = \frac{a_{абс}}{\sin\gamma},$$

откуда

$$\sin\delta = \frac{a_{отн}\, sin\gamma}{a_{абс}} = 1,$$

то есть $\delta = 90^\circ$. *Таким образом,* $\vec{a}_{абс} \perp \vec{a}_{пер}$.

1.31 Река шириной 1 км течет с юга на север со скоростью 5 км/ч. Определить кориолисово ускорение частиц воды, находящихся на 60° северной широты. Определить также, у какого берега вода выше и насколько, если известно, что поверхность воды должна быть перпендикулярна направлению вектора, составленного из ускорения силы тяжести $\vec{g}$ и вектора, равного и противоположного кориолисову ускорению.

Решение. Изобразим поперечный профиль реки (рисунок 19). Очевид-

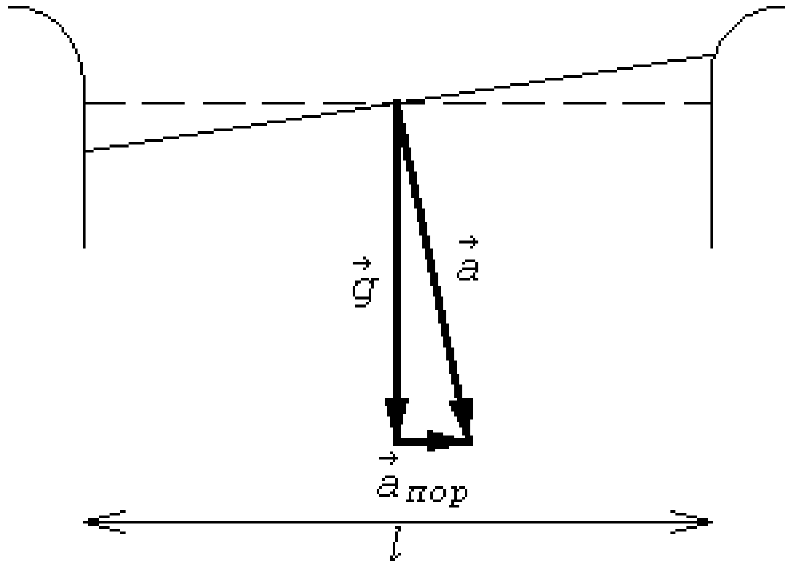

Рисунок 19

но, кориолисово ускорение возникает из-за вращения Земли (рисунок 20). По определению, $\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}]$, где $\vec{v}$ — скорость реки относительно земли, $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли. Имеем:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400\,c} \approx 7,27 \cdot 10^{-5}\,c^{-1};$$

$$a_{кор} = 2\omega v \sin 60^{\circ} = 1,75 \cdot 10^{-4}\,м/c^2$$

и направлено на запад (рисунок 20). Из рисунка 19 находим:

$$\frac{\Delta h}{l} = \frac{a_{кор}}{g};$$

$$\Delta h = \frac{a_{кор}\,l}{g} = 1,786 \cdot 10^{-2}\,м.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.32 Самолет летит прямолинейно с ускорением 4 м/с^2, винт диаметром 1,8 м вращается равномерно с частотой $\nu = 1800$ об/мин. Найти уравнения движения, скорость и ускорение конца винта в системе отсчета, непо-

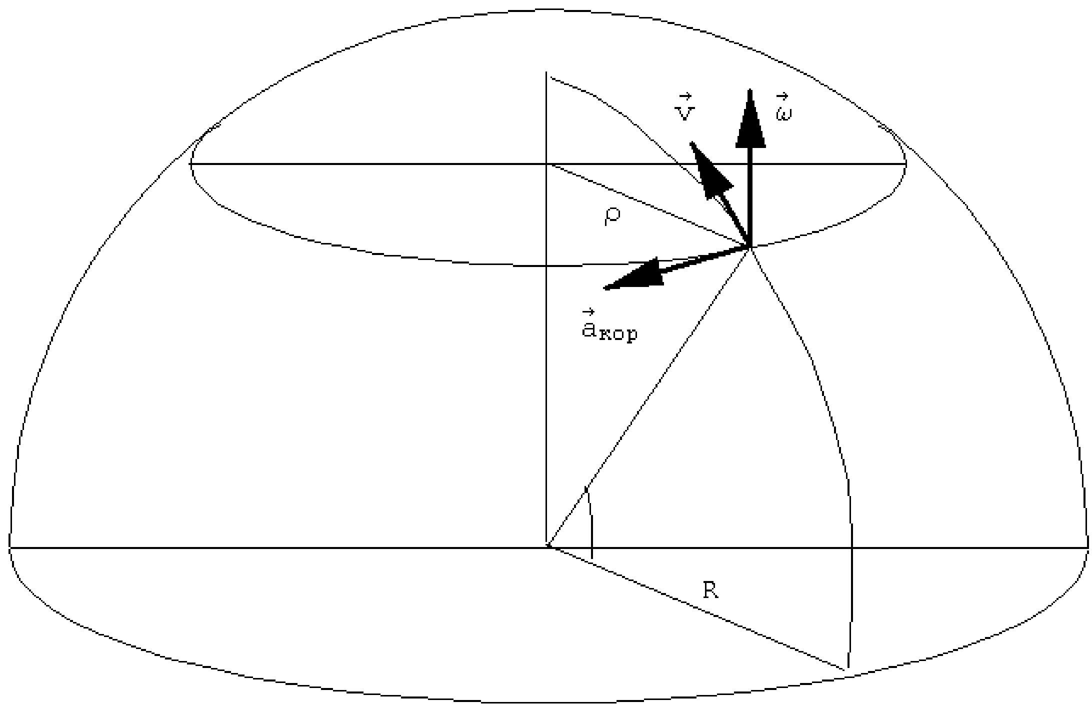

Рисунок 20

движной относительно земли, если ось OX совпадает с осью винта. Начальная скорость самолета $v_0 = 0$.

1.33 Струя воды течет по горизонтальной трубе, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси с частотой $\nu = 60$ об/мин. Определить кориолисово ускорение в той точке струи, где относительная скорость $v_{отн} = \frac{21}{11}$ м/с и направлена вдоль трубы. Принять для числа π приближенное значение $\pi = \frac{22}{7}$.

1.34 Магистраль железной дороги к северу от Мелитополя идет прямо по меридиану. Тепловоз движется со скоростью 90 км/ч на север; широта места $\varphi = 47°$. Найти кориолисово ускорение тепловоза.

1.35 По железнодорожному пути, проложенному по параллели северной широты, движется тепловоз со скоростью 20 м/с с запада на восток. Найти кориолисово ускорение тепловоза.

1.36 Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° северной широты со скоростью 4 км/ч. Определить сумму проекций на касательную BC (рисунок 21) к соответствующему меридиану тех составляющих ускорений частиц воды, которые зависят от скорости течения. Радиус Земли $R = 6400$ км.

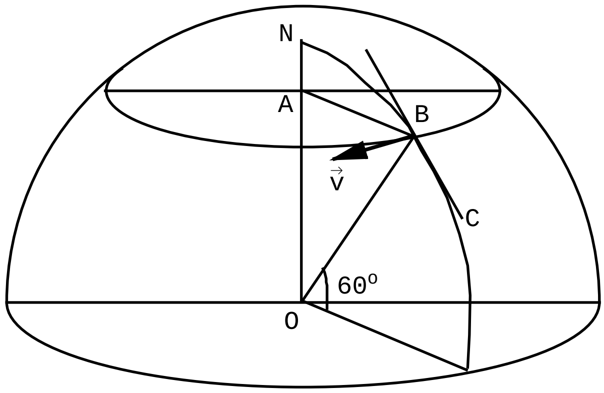

Рисунок 21

1.5 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

1.37 Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ с частота вращения диска $\nu = 810$ об/мин.

Решение. По условию, $\varphi = kt^3$, *где* $k = const$. *Частоту вращения выразим из соотношения* $\omega = \dot{\varphi}$, *где* $\omega = 2\pi\nu$. *Имеем:* $\nu = \frac{1}{2\pi}3kt^2$; *для* $t = 3$ *с:*

$$\frac{810}{60} = \frac{3}{2\pi}kg,$$

откуда находим:

$$k = \pi\, c^{-3}.$$

Таким образом, уравнение вращения диска имеет вид: $\varphi = \pi t^3$.

1.38 Маятник центробежного регулятора, вращающийся вокруг вертикальной оси, делает 120 2об/мин. В начальный момент угол поворота был равен $\frac{\pi}{6}$. Найти угол поворота и угловое перемещение маятника за время $t = \frac{1}{2}$ с.

Решение. Воспользуемся определением угловой скорости $\omega = \dot{\varphi}$ *и проинтегрируем его по времени:*

$$\varphi = \int \omega \, dt = \omega t + \varphi_0 = 2\pi\nu t + \varphi_0.$$

К моменту времени $t = \frac{1}{2}$ *с:* $\varphi = \frac{13}{6}\pi$, *а угловое перемещение* $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 2\pi$.

1.39 Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно, через 10 минут после начала движения оно делает 120 об/мин. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 минут?

Решение. Равноускоренное вращение из состояния покоя описывается соотношением $\varphi = \varepsilon t^2/2$, *где* $\varepsilon = \omega/t$ *— угловое ускорение при таком вращении. Из этих двух соотношений находим:* $\varphi = \omega t/2 = \pi\nu t$, *откуда искомое число оборотов*

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\nu t}{2} = 600.$$

1.40 Часовой балансир совершает крутильные гармонические колебания с периодом $T = 1/2$ с. Наибольший угол отклонения точки обода балансира от положения равновесия $\alpha = \pi/2$. Найти угловую скорость и угловое ускорение балансира через 2 с после момента, когда балансир проходит положение равновесия.

Решение. Уравнение гармонических крутильных колебаний балансира можно записать в виде

$$\varphi(t) = \alpha \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$$

. По условию, $\varphi = 0$ при $t = 0$, откуда $\varphi_0 = 0$. Следовательно,

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2}\sin 4\pi t.$$

Угловая скорость балансира в произвольный момент времени:

$$\omega(t) \equiv \dot{\varphi} = 2\pi^2 \cos 4\pi t;$$

угловое ускорение

$$\varepsilon(t) \equiv \ddot{\varphi} = -8\pi^3 \sin 4\pi t.$$

В момент $t = 2$ с:

$$\omega = 2\pi^2\, c^{-1}; \qquad \varepsilon = 0.$$

1.41 Определить скорость v и ускорение a точки, находящейся на поверхности Земли в Санкт-Петербурге, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Санкт-Петербурга 60°, радиус Земли 6370 км.

Решение. Воспользуемся рисунком 21 и введем обозначение: $r = AB$. Для скорости и ускорения точки B можем записать:

$$v = \frac{2\pi}{T} r = \frac{2\pi R \cos}{T} = 232\, м/с;$$
$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} R\cos 60^\circ = 0.0168\, м/с^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.42 Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 минуты. Определить угловое ускорение тела.

1.43 Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 с он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечении этих 5 с?

1.44 Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную угловую скорость $\omega_0 = 2\pi$ с$^{-1}$; сделав 10 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках остановилось. Определить угловое ускорение колеса, считая его постоянным.

1.45 С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращавшийся с частотой $\nu = 1200$ об/мин, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

1.46 Маятник колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси. Выйдя в начальный момент из положения равновесия, он достигает наибольшего отклонения $\alpha = \frac{\pi}{16}$ через $\frac{2}{3}$ с. 1) Написать закон колебаний маятника, считая его колебания гармоническими. 2) В каком положении маятник будет иметь наибольшую угловую скорость и чему она равна?

1.47 Маховое колесо радиуса 0.5 м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 м/с. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

1.48 Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60°. Касательное ускорение ее в данный момент $a_\tau = 10\sqrt{3}$ м/с^2. Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстояние $r = 0.5$ м. Радиус махового колеса $R = 1$ м.

2 Основания ньютоновской динамики

2.1 Определение сил по заданному движению

2.1 В шахте опускается равноускоренно лифт массой $m = 280$ кг; в первые 10 с он проходит 35 м. Найти силу натяжения каната, на котором висит лифт.

Решение. Изобразим на чертеже все силы, действующие на лифт (рисунок 22). Запишем уравнение движения лифта (второй закон Ньютона) в проекциях на направление ускорения: $ma = mg - T$, *откуда*

$$T = m(g - a).$$

Лифт движется равноускоренно, поэтому пройденный им путь связан с ускорением по формуле

$$h = \frac{at^2}{2}.$$

Из этих двух соотношений находим силу натяжения:

$$T = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) = 2550\,H$$

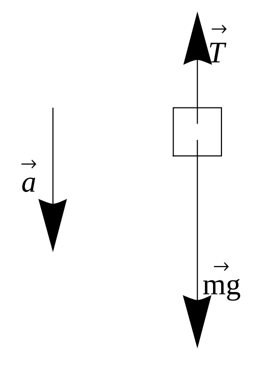

Рисунок 22

2.2 Камень весом 3 Н, привязанный к нити длиной 1 м, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость камня, при которой нить разорвется, если сила ее сопротивления разрыву составляет 9 Н.

Решение. Нетрудно видеть, что условию задачи удовлетворяет нижнее положение камня (рисунок 23). Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление центростремительного ускорения:

$$T - mg = m\omega^2 l,$$

где l – длина нити. Учитывая, что вес камня $P = mg$, получим для наименьшей угловой скорости:

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{(T-P)g}{Pl}} = 4.43\, c^{-1}.$$

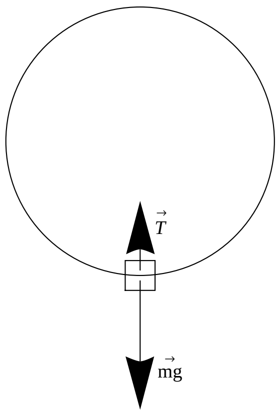

Рисунок 23

2.3 В вагоне поезда, идущего по кривой со скоростью 72 км/ч, производится взвешивание груза на пружинных весах; вес груза равен 50 Н, весы же показывают 51 Н. Определить радиус закругления пути, пренебрегая массой весов.

Решение. Изобразим действующие на груз силы в инерциальной системе отсчета, связанной с полотном дороги (рисунок 24). Здесь $\vec{T}$ – сила упругости пружины, $\vec{a}$ – центростремительное ускорение груза. По 3-му *закону Ньютона*

$$|\vec{T}| = P_1; \qquad mg = P,$$

где $\vec{P}$ *и* $\vec{P}_1$ *– вес груза соответственно в покоящемся и в движущемся вагоне. Из параллелограмма сил имеем:*

$$\frac{mv^2}{R} = \sqrt{P_1^2 - P^2},$$

откуда радиус закругления

$$R = \frac{mv^2}{\sqrt{P_1^2 - P^2}} = 203\,\textit{м}.$$

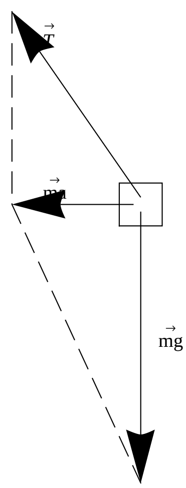

Рисунок 24

2.4 Движение частицы весом 2 Н выражается уравнениями

$$\begin{cases} x = 3\cos 2\pi t \\ y = 4\sin \pi t \end{cases},$$

где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах. Определить проекции силы, действующей на частицу как функции ее координат.

Решение. Согласно 2-му закону Ньютона,

$$F_x = \frac{P}{g}\cdot\ddot{x}; \qquad F_y = \frac{P}{g}\cdot\ddot{y}.$$

Из условия задачи находим:

$$F_x = -\frac{P}{g} \cdot 4\pi^2 x = -0.08x,$$

$$F_y = -\frac{P}{g} \cdot \pi^2 y = -0.02y$$

(сила – в ньютонах).

2.5 Груженая вагонетка массой $m = 700$ кг опускается по канатной дороге с уклоном $\alpha = 15^\circ$, имея скорость $v = 1.6$ м/с. Определить силу натяжения каната при равномерном спуске и при остановке вагонетки, если время торможения $t = 4$ с, общий коэффициент сопротивления движению $\mu = 0.015$. При торможении вагонетка движется равнозамедленно.

Решение. Изобразим силы, действующие на вагонетку в обоих указанных случаях (рисунок 25). Рассмотрим оба случая по отдельности.

а) Равномерный спуск.

Запишем уравнение движения вагонетки в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_c - T_1 = 0 \\ mg\cos\alpha - N = 0 \end{cases},$$

где $F_c = \mu N$. Имеем: $T_1 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 1676.1\,H$.

б) Равнозамедленный спуск.

$$\begin{cases} ma = T_2 + F_c - mg\sin\alpha \\ mg\cos\alpha - N = 0 \end{cases}$$

С учетом того, что $F_c = \mu N$, $a = v/t$, находим:

$$T_2 = \frac{mv}{t} + mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 1956\,H.$$

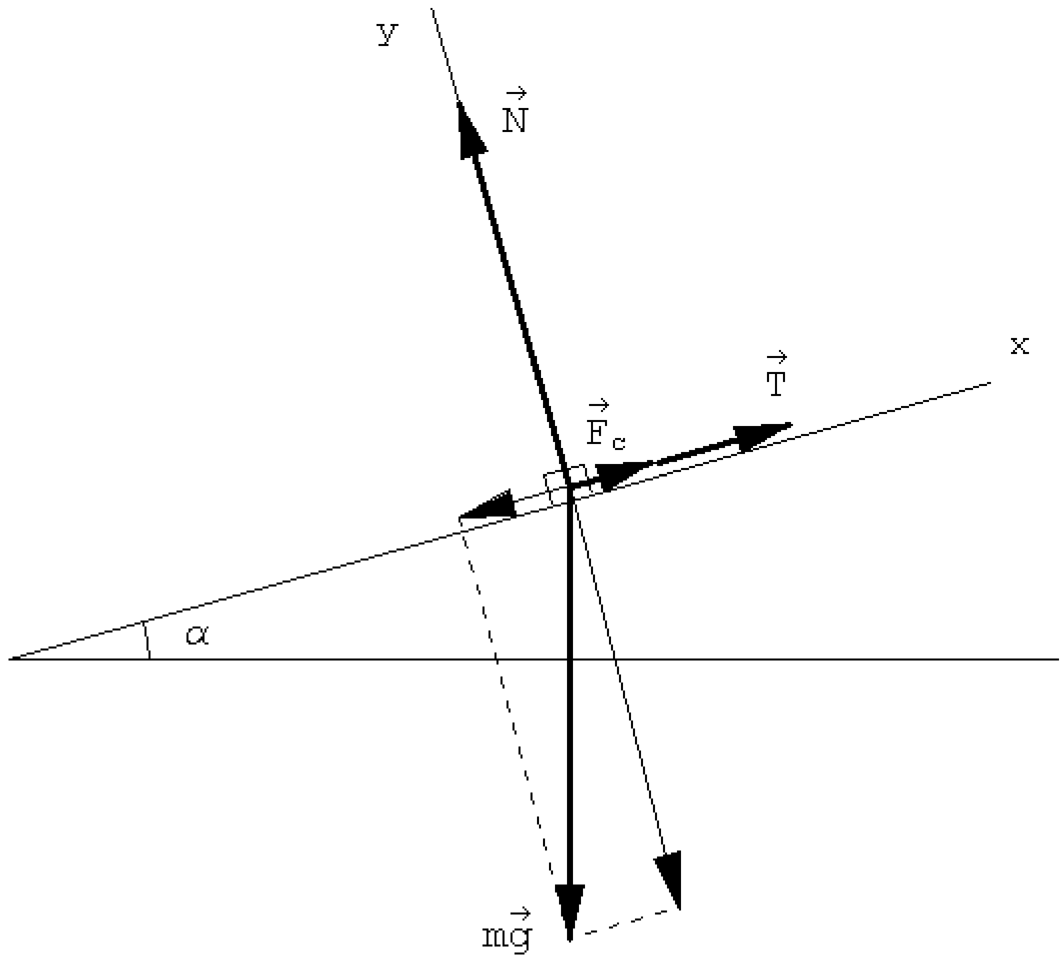

Рисунок 25

2.6 Груз весом 10 Н подвешен к тросу длиной $l = 2$ м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению

$$\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi t,$$

где φ – угол отклонения троса от вертикали в радианах, t – время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в наинизшем и наивысшем положениях груза.

Решение. Имеем для двух показанных на рисунке 26 случаев:

1) $T_1 - mg = m\dot{\varphi}^2_{max} l$; $\dot{\varphi} = \frac{\pi^3}{3}\cos 2\pi t$; $\dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{3}$. *Отсюда*

$$T_1 = P\left(1 + \frac{\dot{\varphi}^2_m l}{g}\right) = 32.1\,H.$$

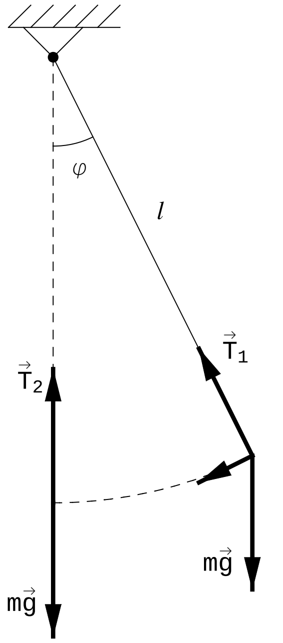

Рисунок 26

2) $T_2 = mg\cos\phi_m = 8.66$ *Н.*

Задачи для самостоятельного решения

2.7 Горизонтальная платформа, на которой лежит груз весом 10 Н, опускается вертикально вниз с ускорением 4 м/с^2. Найти силу давления груза на платформу во время их совместного спуска.

2.8 Гиря весом 2 Н подвешена к концу нити длиной 1 м. Вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость 5 м/с. Найти натяжение нити непосредственно после толчка.

2.9 Груз весом 1 Н, подвешенный на нити длиной 30 см в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости (рисунок 27), причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение T нити.

2.10 Автомобиль массой 1 т движется по выпуклому мосту со скоростью 10 м/с; радиус кривизны в середине моста 50 м. Определить давление

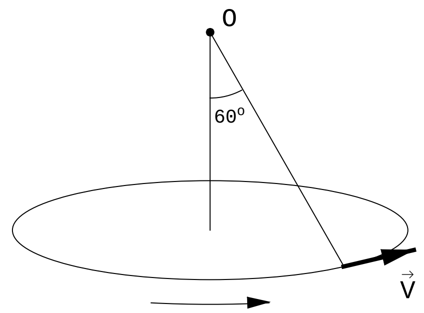

Рисунок 27

автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

2.11 В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. Вес тела равен 50 Н, натяжение пружины (показание пружинных весов) равно 51 Н. Найти ускорение кабины.

2.12 Шарик массой 1 г падает в воздухе, так что движение шарика (с учетом сопротивления воздуха) описывается уравнением

$$x = 4.9t - 2.45\left(1 - e^{-2t}\right),$$

где x – в метрах, t – в секундах, ось x направлена вертикально вниз. Определить силу сопротивления воздуха, испытываемого шариком, как функцию его скорости v.

2.13 Определить отклонение α от вертикали и давление N вагона на рельс подвесной дороги при движении вагона по закруглению радиуса $R =$ 30 м со скоростью $v = 10$ м/с; масса вагона $m = 1.5$ т.

2.14 Спортивный самолет массой 2 т летит горизонтально с ускорением 5 м/с^2, имея в данный момент скорость 200 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при скорости 1 м/с равно 0.49 Н. Считая силу сопротивления направленной в сторону, обратную скорости, определить силу тяги винта, если она составляет угол 10° с направлением полета.

2.15 Велосипедист описывает кривую радиуса 10 м со скоростью 5 м/с.

Найти угол наклона срединной плоскости велосипеда к вертикали, а также тот наименьший коэффициент трения между шинами велосипеда и полотном дороги, при котором будет обеспечена устойчивость велосипеда.

2.2 Дифференциальные уравнения движения

2.16 Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6.5 с от момента начала его падения. Скорость звука $u = 330$ м/с. Найти глубину шахты.

Решение. Направим ось x вертикально вниз (рисунок 28). Запишем дифференциальное уравнение движения камня: $m\ddot{x} = mg$, или $\ddot{x} = g$. Проинтегрируем его:

$$v = \dot{x} = gt + C_1;$$

Постоянную C_1 найдем из начального условия $t = 0$, $v = 0$: $C_1 = 0$. Таким образом, получаем новое уравнение: $\dot{x} = gt$, решение которого имеет вид:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + C_2.$$

Для нахождения постоянной C_2 воспользуемся начальным условием $t = 0$, $x = 0$: $C_2 = 0$.

К моменту $t = t_1$ (момент падения камня на дно шахты) будем иметь:

$$x(t_1) = h = \frac{gt_1^2}{2}\,. \qquad (1)$$

Время распространения звука будет равно

$$t - t_1 = \frac{h}{u}\,. \qquad (2)$$

Объединяя (1) и (2), получим:

$$t - \frac{h}{u} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

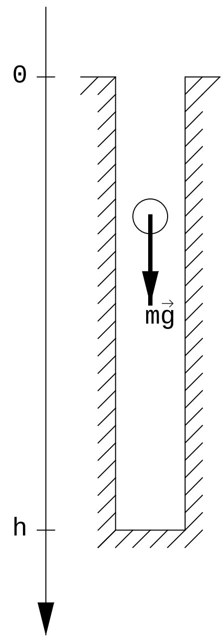

Рисунок 28

Для решения последнего уравнения относительно h введем новую переменную $z = \sqrt{h}$; приходим к уравнению

$$z^2 + u\sqrt{\frac{2}{g}}\,z - ut = 0,$$

из которого находим: $z = 13.22$ м$^{1/2}$, откуда $h = z^2 = 175$ м. (Отрицательный корень квадратного уравнения был отброшен как противоречащий физическому смыслу.)

2.17 При выстреле из орудия снаряд вылетает с горизонтальной скоростью 570 м/с; масса снаряда 6 кг. Как велико среднее давление F пороховых газов, если снаряд проходит внутри орудия 2 м? Сколько времени движется снаряд в стволе орудия, если считать давление газов постоянным?

Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения снаряда в стволе орудия:

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

и проинтегрируем его:

$$mv = Ft + C_1.$$

Постоянную C_1 найдем из условия $t = 0$, $v = 0$: $C_1 = 0$, откуда $mv = Ft$. Перепишем это уравнение в виде $m\frac{ds}{dt} = Ft$, где s – путь, пройденный снарядом в стволе орудия. Проинтегрируем:

$$ms = \frac{Ft^2}{2} + C_2.$$

Составим систему из двух уравнений относительно двух неизвестных F и t:

$$\begin{cases} mv = Ft \\ ms = \dfrac{Ft^2}{2} \end{cases}.$$

Из нее находим:

$$F = \frac{mv^2}{2s} = 487350\,H;$$
$$t = \frac{2s}{v} = 0.007\,c.$$

2.18 За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью $v_0 = 36$ км/ч, если коэффициент трения $\mu = 0.3$?

Решение. Очевидно, во время торможения к вагону трамвая приложена только одна горизонтальная сила – сила трения, благодаря чему через время t_1 вагон остановится. Дифференциальное уравнение движения вагона имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\mu mg, \quad \text{или} \quad \ddot{x} = -\mu g$$

(ось x считаем направленной вдоль движения). Проинтегрируем уравнение: $\dot{x}(t) = -\mu gt + C_1$. Постоянную C_1 найдем из условия $t = 0$, $v = v_0$: $C_1 = v_0$. Отсюда

$$\dot{x}(t) = -\mu gt + v_0. \tag{1}$$

Для нахождения времени t_1 подчиним (1) условию $t = t_1$, $v = 0$; находим:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g} = 3.4\,с.$$

Еще раз проинтегрируем уравнение (1):

$$x(t) = -\frac{\mu g t^2}{2} + v_0 t + C_2.$$

Условие $t = 0$, $x = 0$ дает: $C_2 = 0$. Поэтому

$$x(t) = -\frac{\mu g t^2}{2} + v_0 t. \tag{2}$$

Чтобы определить пройденный вагоном до остановки путь S, перепишем (2) в виде:

$$S = -\frac{\mu g t_1^2}{2} + v_0 t_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 17\,м.$$

В пакете Mathematica решение этого уравнения можно получить командой

DSolve[{x”[t] == -m g, x[0] == 0, x’[0] == v0}, x[t], t].

2.19 Тяжелое тело поднимается по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В начальный момент скорость тела $v_0 = 15$ м/с. Коэффициент трения $\mu = 0.1$.

Какой путь S пройдет тело до остановки? За какое время t_1 оно пройдет этот путь?

Решение. Изобразим действующие на тело силы и введем систему координат так, как показано на рисунке 29. Запишем 2-ой закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp},$$

где $F_{mp} = \mu N = \mu m g \cos\alpha$. В проекциях на направление движения (ось x):

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu m g\cos\alpha.$$

Проинтегрируем:

$$\dot{x}(t) = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,t + C_1,$$

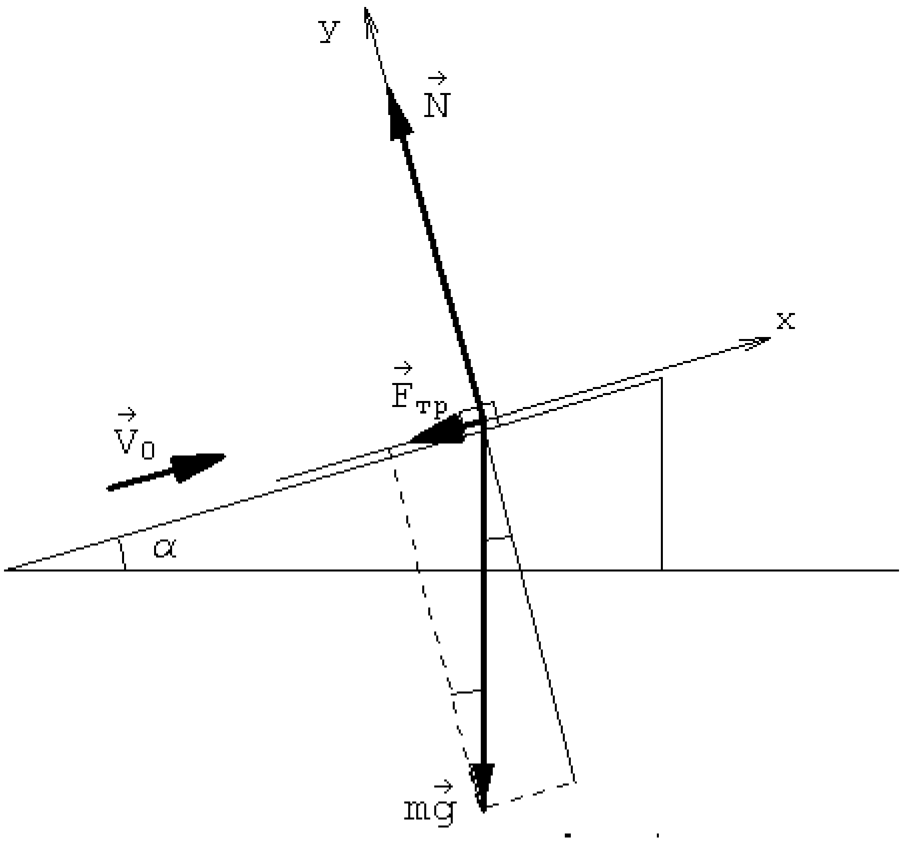

Рисунок 29

причем постоянная C_1, как легко видеть, равна начальной скорости: $C_1 = v_0$. Имеем:

$$v(t) = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,t + v_0,$$

Найдем время t_1 до остановки: $t = t_1$, $v(t_1) = 0$, откуда

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 2.61\,с.$$

Проинтегрируем еще раз:

$$x(t) = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2,$$

причем $C_2 = 0$. Находим пройденный телом путь:

$$s = x(t_1) = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\frac{t_1^2}{2} + v_0 t_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 19.55\,м.$$

2.20 Найти наибольшую скорость падения шара массой $m = 10$ кг с радиусом $r = 8$ см, принимая, что сила сопротивления воздуха $R = k\sigma v^2$, где v – скорость падения, σ – площадь проекции падающего тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его движения, k – численный коэффициент (зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0.2352 кг/м^3).

Решение. Для ответа на вопрос задачи необходимо вначале составить и решить дифференциальное уравнение движения шара. В проекциях на направление падения это уравнение имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - R$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k\sigma}{m}v^2.$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{dv}{g - \dfrac{k\sigma}{m}v^2} = dt,$$

и после интегрирования:

$$\ln\left|\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\dfrac{k\sigma}{m}}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\dfrac{k\sigma}{m}}v}\right| = 2\sqrt{\frac{gk\sigma}{m}}t + \ln C,$$

где C – постоянная. Отсюда

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma}}\,\frac{C\,\exp\left(2\sqrt{\dfrac{gk\sigma}{m}}\,t\right) - 1}{C\,\exp\left(2\sqrt{\dfrac{gk\sigma}{m}}\,t\right) + 1}\quad.$$

Видно, что максимум скорости падения будет достигнут при достаточно больших t. Имеем:

$$v_{max} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma}} = 144\ \text{м/с}.$$

2.21 Тело массой 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое пропорционально скорости: $R = bv$, где коэффициент $b = 0.392$ кг/с. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Решение. Дифференциальное уравнение движения тела в проекциях на ось, направленную вертикально вниз, имеет вид: $m\frac{dv}{dt} = -mg - bv$, *или* $\frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{b}{m}v\right)$. *Разделяя переменные, находим общее решение этого уравнения:*

$$v(t) = C\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) - \frac{mg}{b},$$

где C *–постоянная. Найдем ее из начального условия* $t = 0$, $v = v_0$:

$$C = v_0 + \frac{mg}{b}.$$

Окончательно:

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) - \frac{mg}{b}\,.$$

Тело достигнет наивысшего положения, когда $v = 0$, *то есть при выполнении условия*

$$\left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}t_1\right) = \frac{mg}{b}\,,$$

откуда искомый момент времени

$$t_1 = -\frac{m}{b}\ln\frac{mg}{mg + bv_0} = 1.7\,c.$$

2.22 Тело весом 10 Н движется под действием переменной силы $F(t) = 10(1 - t)$, где сила F измеряется в ньютонах, время t – в секундах.

Через сколько секунд тело остановится, если в начальный момент скорость тела $v_0 = 0.2$ м/с и сила совпадает по направлению со скоростью? Какой путь пройдет тело до остановки?

Решение. *Запишем дифференциальное уравнение движения тела:*

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = 10(1-t),$$

где P – вес тела. После интегрирования находим:

$$\frac{P}{g}v = 10t - 5t^2 + C.$$

Постоянную интегрирования найдем из начального условия $t = 0$, $v = v_0$: $C = Pv_0/g$. Окончательно:

$$\frac{P}{g}(v - v_0) = 10t - 5t^2.$$

Пусть тело остановится в момент $t_{ост}$; имеем: $v(t_{ост}) = 0$;

$$-\frac{P}{g}v_0 = 10t_{ост} - 5t_{ост}^2,$$

откуда находим значение $t_{ост} = 2.02$ с.

Интегрируя выражение для скорости, находим пройденный телом путь:

$$S = \int_0^{t_{ост}} v(t)dt = 6.94\,м.$$

2.23 Частица массы m движется прямолинейно. Зависимость пройденного пути от скорости задается соотношением $x = a\sqrt{v} - b$, где a и b – постоянные. Найти время, в течение которого начальная скорость частицы увеличится вдвое.

Решение. *Выразим скорость частицы через x: $v(x) = \frac{(x+b)^2}{a^2}$ и составим дифференциальное уравнение движения, учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$:*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(x+b)^2}{a^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$-\frac{a^2}{x+b} = t + C.$$

Постоянную C определим из начального условия $t = 0$, $x = 0$: $C = -\frac{a^2}{b}$. Окончательно:

$$x(t) = \frac{a^2 b}{a^2 - bt} - b.$$

Отсюда зависимость скорости от времени:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{a^2 b^2}{(a^2 - bt)^2},$$

скорость в начальный момент: $v(0) = \frac{b^2}{a^2}$. По условию, скорость в момент t_1 вдвое больше начальной:

$$v(t_1) = 2v(0) = \frac{2b^2}{a^2},$$

или

$$\frac{a^2 b^2}{(a^2 - bt_1)^2} = \frac{2b^2}{a^2},$$

отсюда находим момент t_1:

$$t_1 = \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

2.24 Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9.6 м, если в начальный момент времени его скорость равнялась 2 м/с.

2.25 Корабль движется, преодолевая сопротивление воды, пропорциональное квадрату скорости, и равное 1176 Н при скорости в 1 м/с. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону

$$T = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right),$$

где $T_0 = 1176$ кН – сила упора винтов в момент, когда корабль покоится, $v_s = 33$ м/с. Определить наибольшую скорость, которую может развить корабль.

2.26 Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть p, погружается на глубину, двигаясь поступательно. Сопротивление воды пропорционально kSv, где k – постоянный коэффициент, S – площадь горизонтальной проекции лодки, v – величина скорости погружения. Масса лодки M. Определить скорость погружения v, если при $t = 0$ скорость $v_0 = 0$.

2.27 В условиях предыдущей задачи определить путь z, пройденный погружающейся лодкой за время T.

2.28 Частица с массой m и зарядом e находится в однородном электрическом поле, меняющемся со временем по закону $E(t) = A\sin(kt)$, где A и k – заданные постоянные. Определить закон движения частицы, если в начальный момент частица покоилась в начале координат. Влиянием силы тяжести пренебречь.

2.3 Импульс. Закон сохранения импульса

2.29 Поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. В момент начала торможения скорость поезда составляет 72 км/ч. Найти время торможения и тормозной путь поезда, если коэффициент трения $\mu = 0.1$.

Решение. В проекциях на направление движения изменение импульса поезда за время торможения Δt равно импульсу силы трения:

$$m(v - v_0) = -F_{mp}\,\Delta t.$$

Учитывая, что $F_{mp} = \mu mg$, $v = 0$, *находим время* Δt:

$$\Delta t = \frac{v_0}{\mu g} = 20.4\,c.$$

Тормозной путь поезда найдем из соотношения, справедливого при равнозамедленном движении:

$$S = \frac{v_0 \Delta t}{2} = 204\,м.$$

2.30 Тело весом P начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы F, пропорциональной времени: $F = at$, где a – постоянная. Какую скорость приобретет тело через t секунд после начала движения, если коэффициент трения скольжения тела о горизонтальную поверхность равен μ?

Решение. Изобразим силы, приложенные к телу, на рисунок 30.

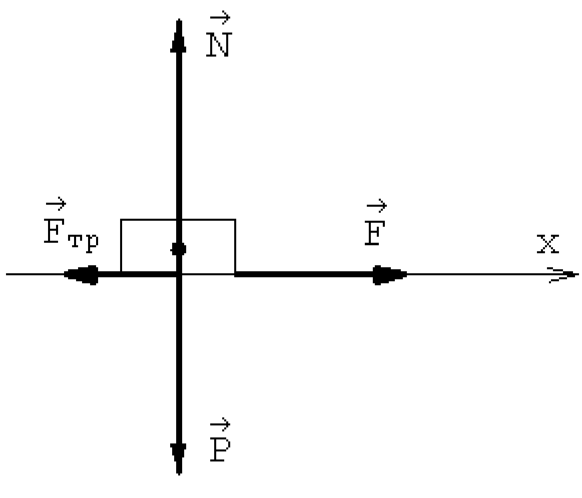

Рисунок 30

Запишем теорему об изменении импульса в проекциях на ось x:

$$\frac{p}{g}v = \int_0^t F(t')\,dt' - F_{mp}\,t,$$

где учтено, что $v_0 = 0$. *Подставляя в интеграл выражение для силы* $F = at$, *находим скорость тела через* t *секунд:*

$$v = gt\left(\frac{at}{2p} - \mu\right)$$

В пакете Mathematica интегрирование выполняет подробно описанная в шестой главе функция Integrate.

2.31 Человек, сидящий в лодке, бросает камень под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Масса камня $m = 1$ кг, масса человека и лодки $M = 150$ кг, начальная скорость камня $v_0 = 10$ м/с. Найти расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснулся воды. Трение лодки о воду и сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Камень совершает баллистическое движение (рисунок 31):

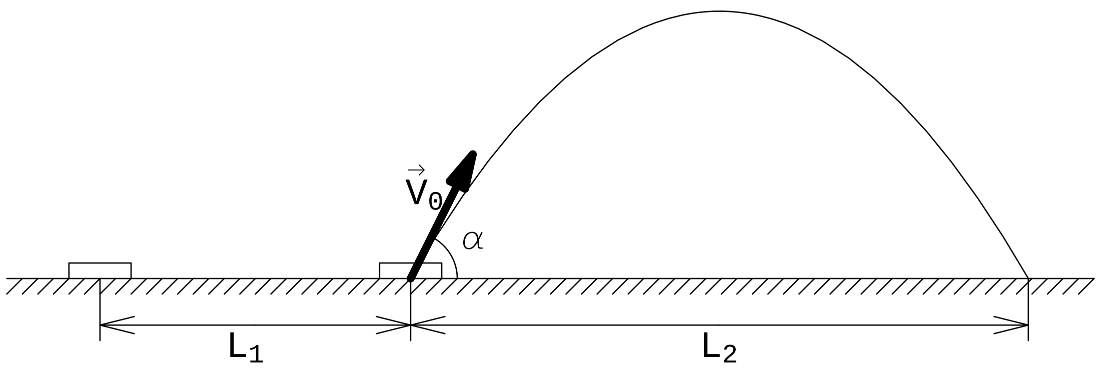

Рисунок 31

Для горизонтальных составляющих выполняется закон сохранения импульса:

$$mv_0 \cos\alpha = Mv_1,$$

где v_1 *– скорость лодки после броска (в условиях задачи считаем ее постоянной). Отсюда*

$$v_1 = \frac{m}{M} v_0 \cos\alpha.$$

Время полета камня при баллистическом движении выражается соотношением:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

а дальность полета

$$L = \frac{2v_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g}.$$

Кроме того, за время t *лодка отплывет от места бросания на расстояние*

$$L_1 = v_1 t = \frac{2mv_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{Mg}.$$

Таким образом, расстояние между лодкой и камнем к моменту t *составит*

$$L + L_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 8.9\,\textit{м}.$$

2.32 Граната массой $m = 12$ кг, летевшая со скоростью $v = 15$ м/с, разорвалась в воздухе на две части. Скорость осколка массой $m_1 = 8$ кг возросла в направлении движения до $v_1 = 25$ м/с. Определить скорость второго осколка.

Решение. Изобразим на чертеже две ситуации: до взрыва (рисунок 32а) и после (рисунок 32б).

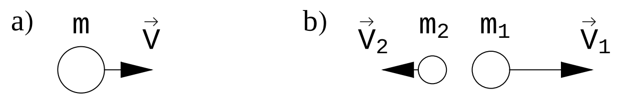

Рисунок 32

Предполагаем (см. рисунок 32б), что второй осколок после разрыва полетел в противоположном направлении. Запишем закон сохранения импульса

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

и спроектируем его на направление движения первого осколка:

$$mv = -m_2 v_2 + m_1 v_1,$$

откуда находим скорость второго осколка:

$$v_2 = \frac{m_1 v_1 - mv}{m_2} = 5\,м/с.$$

Тот факт, что эта величина получилась положительной, говорит о правильности выбора направления вектора $\vec{v}_2$.

2.33 По горизонтальной платформе (рисунок 33), движущейся по инерции со скоростью $\vec{v}_0$, перемещается тележка с постоянной относительной скоростью $\vec{u}_0$. В некоторый момент времени тележка была заторможена. Определить общую скорость v платформы с тележкой после остановки последней, если M – масса платформы, а m – масса тележки.

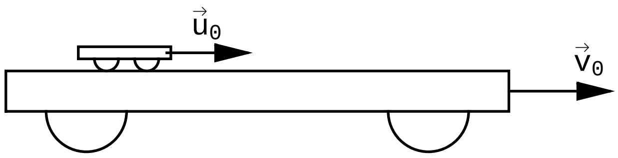

Рисунок 33

Решение. Запишем импульс системы «платформа + тележка»до и после остановки тележки в лабораторной (неподвижной) системе отсчета. Первоначальный суммарный импульс системы (в проекциях на направление движения):

$$P_0 = Mv_0 + m(u_0 + v_0),$$

где учтено, что скорость тележки в лабораторной системе отсчета равна $(\vec{u}_0 + \vec{v}_0)$. Суммарный импульс после остановки тележки

$$P = (M + m)\,v.$$

По закону сохранения импульса, $P_0 = P$, *или*

$$Mv_0 + m(u_0 + v_0) = (M + m)\,v,$$

откуда

$$v = v_0 + \frac{m}{M + m}\,u_0.$$

2.34 Из наконечника пожарного рукава (рисунок 34) с поперечным сечением $S = 16$ см^2 бьет струя воды под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 8$ м/с. Определить силу давления струи на вертикальную стену, пренебрегая действием силы тяжести на форму струи и считая, что частицы жидкости после встречи со стеной приобретают скорости, направленные вдоль стены.

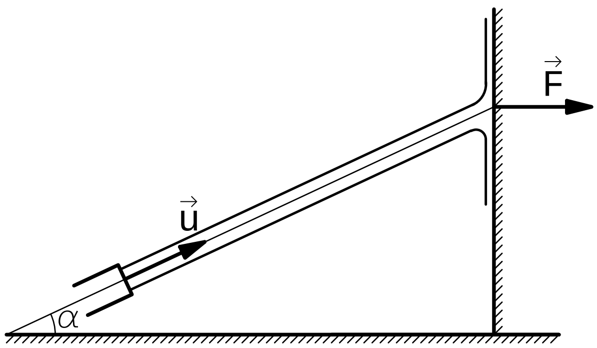

Рисунок 34

Решение. Поскольку по условию после встречи со стеной поперечная составляющая скорости частиц воды равна нулю, то изменение импульса некоторой массы Δm *воды будет равно:*

$$\Delta P = \Delta m v \cos\alpha.$$

По теореме об изменении импульса,

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta m v \cos\alpha}{\Delta t},$$

где Δt – время взаимодействия массы Δm воды со стеной. В то же время расход воды в струе $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v$, где $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды. Объединяя эти две формулы, находим:

$$F = \rho S v^2 \cos\alpha = 88.7\, H.$$

2.35 На краях неподвижной платформы длиной $l = 10$ м и массой $m = 500$ кг стоят два человека массами $m_1 = 60$ кг и $m_2 = 40$ кг. Они начинают равномерно бежать навстречу друг другу по платформе, причем первый бежит вдвое быстрее второго. На какое расстояние откатится платформа, когда первый человек добежит до ее конца? Трением колес о рельсы пренебречь.

Рисунок 35

Решение. Пусть $\vec{v}$ (рисунок 35) – скорость платформы относительно рельсов, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – соответственно скорости обоих людей относительно платформы; при этом по условию $v_1 = 2v_2$. Тогда скорость первого человека относительно рельсов будет равна по величине $(v_1 - v)$, второго – $(v_2 + v)$. А поскольку первоначально вся система покоилась, то по закону сохранения импульса можем записать:

$$0 = m_1(v_1 - v) - m_2(\frac{v_1}{2} + v) - mv$$

(в проекциях на направление, противоположное движению платформы). Отсюда находим скорость платформы:

$$v = \frac{(2m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2 + m)} v_1.$$

Расстояние, пройденное платформой, $s = vt$, где $t = l/v_1$ – время, за которое первый человек добежит до края платформы. Имеем:

$$s = \frac{vl}{v_1} = \frac{(2m_1 + m_2)l}{2(m_1 + m_2 + m)} = 0.67\,\textit{м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.36 Масса ствола орудия 11 т, масса снаряда 54 кг. Скорость снаряда при вылете из орудия 900 м/с. Определить скорость свободного отката ствола орудия в момент вылета снаряда.

2.37 Буксирный пароход массой 600 т приобрел скорость 1.5 м/с, после чего натянулся буксирный канат и баржа массой 400 т тронулась вслед за пароходом. Найти общую скорость парохода и баржи, считая, что движущая сила и сила сопротивления воды уравновешиваются.

2.38 Две лодки идут навстречу параллельным курсом. Когда они находятся друг против друга, с каждой лодки во встречную перебрасывается мешок массой $m = 50$ кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идет в прежнем направлении со скоростью 8.5 м/с. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны $m_1 = 500$ кг и $m_2 = 1000$ кг?

2.39 Доска массы m_1 свободно скользит по поверхности льда со скоростью v_1. На доску прыгает человек массы m_2. Скорость человека перпендикулярна скорости доски и равна v_2. Определить скорость v доски с человеком. Силой трения доски о лед пренебречь.

2.40 Снаряд, вылетевший из орудия, разрывается на два одинаковых осколка в наивысшей точке своей траектории на расстоянии a от орудия (по горизонтали). Один из осколков полетел в обратном направлении с той же по величине скоростью, с которой летел снаряд до разрыва. На каком расстоянии от орудия упадет второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.41 Две ракеты одинаковой массы M летят в одном направлении – одна со скоростью v, другая со скоростью $1.1v$. Когда ракеты поравнялись, первая ракета на короткое время включила двигатель. Какую массу топлива она должна выбросить со скоростью $3v$ относительно ракеты, чтобы скорости ракет стали одинаковыми?

2.4 Теорема о движении центра масс

2.42 Определить суммарную силу, действующую на колесо весом P (рисунок 36), скатывающееся с наклонной плоскости вниз, если его центр масс C движется по закону $x_c = at^2/2$.

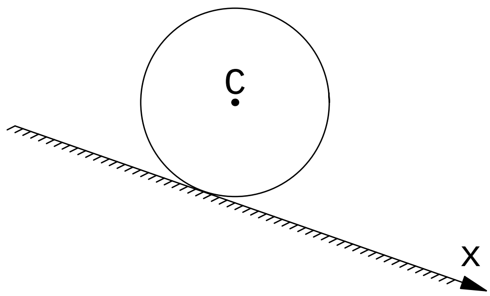

Рисунок 36

Решение. По теореме о движении центра масс, суммарная внешняя сила, приложенная к центру масс, равна $\vec{F} = M\dot{\vec{V}}_c$, где $M = P/g$ – масса колеса, $\vec{V}_c$ – скорость его центра масс в неподвижной системе отсчета. Имеем:

$$V_c = \dot{x}_c = at; \ \dot{V}_c = a.$$

Таким образом, $F = Pa/g$ и направлена параллельно оси OX.

2.43 Ведомое колесо автомашины катится со скольжением по горизонтальному шоссе под действием силы $\vec{F}$ (рисунок 37). Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен μ, а $F = 5\mu P$, где P – вес колеса. В начальный момент колесо покоилось.

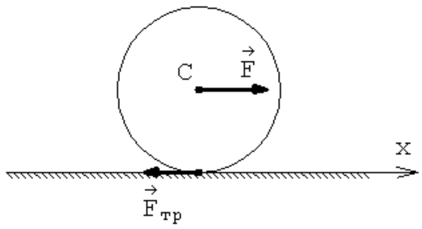

Рисунок 37

Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения колеса (в проекциях на ось OX):

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = F - F_{тр},$$

где $F_{тр} = \mu P$. Тогда

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = 5\mu P - \mu P = 4\mu P,$$

или $\ddot{x}_c = 4\mu g$. После двукратного интегрирования и с учетом того, что в начальный момент $x_c(0) = 0$ и $\dot{x}_c(0) = 0$, находим закон движения:

$$x_c(t) = 2\mu g t^2.$$

2.44 На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, массой $m_1 = 50$ кг, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек массой $m_2 = 70$ кг для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки $l = 4$ м. Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Решение. Изобразим на рисунке 38 расположение людей в лодке до и после их перемещения, при этом учтем, что по условию задачи положение

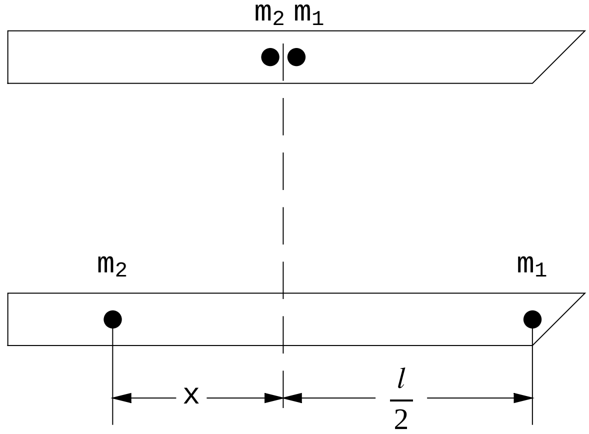

Рисунок 38

лодки относительно воды не изменилось. Положение центра масс системы в неподвижной системе отсчета (связанной с водой) не меняется, на рисунок 38 оно отмечено штриховой линией. Обозначая расстояние от середины лодки до нового положения второго человека через x, *будем иметь:* $m_2 x = m_1 l/2$, *откуда*

$$x = \frac{m_1 l}{2m_2} = 1.43\,м.$$

Таким образом, второй человек должен переместиться по лодке влево (к корме) на 1.43 м.

2.45 На однородную призму A (рисунок 39), лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B; поперечные сечения призм – прямоугольные треугольники, вес призмы A втрое больше веса призмы B. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l, на которую передвинется призма A, когда призма B, спускаясь по A, дойдет до горизонтальной плоскости.

Решение. Обозначим через x_A *и* x_B *горизонтальные проекции перемещений призм. По теореме о движении центра масс, поскольку в горизонтальном направлении внешние силы на систему призм не действуют, центр масс системы должен и после перемещения остаться в покое. Отсюда по-*

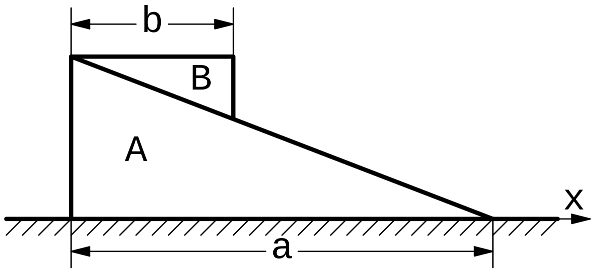

Рисунок 39

лучаем условие:

$$m_A x_A + m_B x_B = 0,\ x_A < 0,\ x_B > 0.$$

В то же время, после окончания перемещения расстояние между призмами (между их центрами масс) будет равно, как видно из рисунок 39, $a - b$, то есть,

$$|x_A| + |x_B| = a - b.$$

Учитывая, что по условию $m_A = 3m_B$, находим из двух вышеприведенных уравнений:

$$l = |x_A| = \frac{a-b}{4}.$$

2.46 Грузы P_1 и P_2, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (рисунок 40), скользят по боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием на гладкую горизонтальную плоскость. Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза P_1 на высоту $h = 10$ см. Вес клина $P = 4P_1 = 16P_2$, массой нити и блока пренебречь.

Решение. По теореме о движении центра масс, центр масс системы трех тел не будет перемещаться вдоль оси x. Обозначим Δx_1, Δx_2, Δx проекции перемещений отдельных тел этой системы относительно непо-

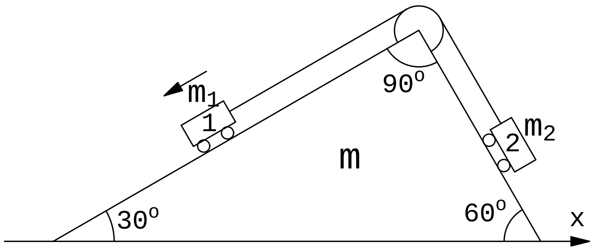

Рисунок 40

движной («лабораторной») системы отсчета. Тогда, как уже отмечалось,

$$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m\Delta x = 0. \qquad (1)$$

Расстояние, пройденное грузами по клину,

$$l = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2h.$$

Из чертежа находим:

$$\Delta x_1 = -\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} + \Delta x = -h\sqrt{3} + \Delta x; \qquad (2)$$

$$\Delta x_2 = -l\cos 60^\circ + \Delta x = -h + \Delta x. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим уравнение:

$$m_1(-h\sqrt{3} + \Delta x) + m_2(-h + \Delta x) + m\Delta x = 0,$$

откуда

$$\Delta x = \frac{h(m_1\sqrt{3} + m_2)}{m_1 + m_2 + m} = 3.775\,см.$$

Поскольку $\Delta x > 0$, то клин переместится вправо.

Задачи для самостоятельного решения

2.47 Ведущее колесо автомашины катится со скольжением по горизонтальному шоссе под действием приложенного к нему вращающего момента (рисунок 41). Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен μ. В начальный момент колесо покоилось.

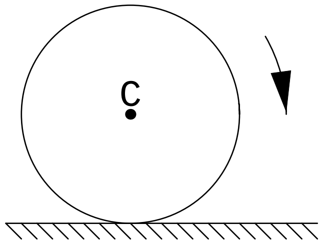

Рисунок 41

2.48 Вагон трамвая совершает вертикальные гармонические колебания на рессорах. Амплитуда колебаний 2.5 см, их период $T = 0.5$ с. Масса кузова с нагрузкой 10 т, масса тележки и колес 1 т. Определить силу давления вагона на рельсы.

2.49 Два человека массами $m_1 = 70$ кг и $m_2 = 30$ кг стоят на противоположных концах платформы длиной $L = 3$ м и массой $M = 100$ кг. На сколько отъедет платформа, если люди поменяются местами? Трением колес о рельсы пренебречь.

2.50 По горизонтальной платформе длиной 6 м и массой 2700 кг, находившейся в начальный момент в покое, двое рабочих перекатывают тяжелую стальную отливку из левого конца платформы в правый. В какую сторону и насколько переместится при этом платформа, если общая масса груза и рабочих 1800 кг? Сопротивление движению платформы не учитывать.

2.51 Три груза весом $P_1 = 20$ Н, $P_2 = 15$ Н и $P_3 = 10$ Н соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки B и C (рисунок 42). При опускании груза P_1 вниз груз P_2 перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ весом $P = 100$ Н вправо, а груз P_3 поднимается по боковой грани AB вверх. Пренебрегая трением между пирамидой $ABCD$ и полом, определить перемещение пирамиды относительно пола, если груз P_1 опускается вниз на 1 м.

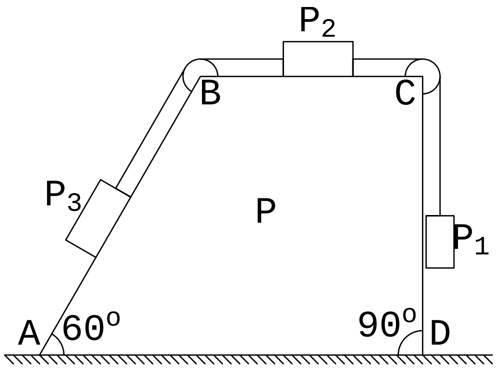

Рисунок 42

2.5 Работа и мощность

2.52 Определить наименьшую работу, которую нужно совершить для подъема на 5 м груза в 2 т по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом, если коэффициент трения 0.5.

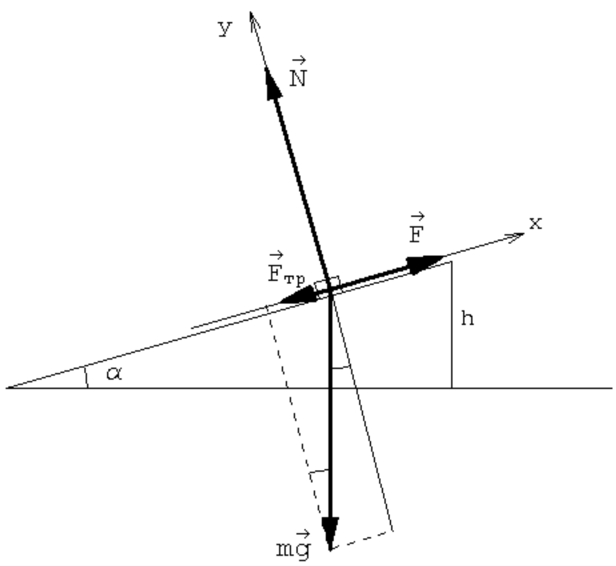

Рисунок 43

Решение. Изобразим на чертеже (рисунок 43) все силы, действующие на груз. Работа силы $\vec{F}$ по подъему груза будет наименьшей, если подъем осуществлять равномерно. Это означает, что сумма всех прило-

женных к грузу сил должна быть равна нулю. Имеем:

$$A_{min} = Fl = \frac{Fh}{\sin\alpha},$$

$$F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha);$$

отсюда

$$A_{min} = mgh(1 + \mu \operatorname{ctg}\alpha) = 182,8\text{кДж}.$$

2.53 Для того, чтобы поднять 5000 м^3 воды на высоту 3 м, поставлен насос с двигателем в 2 л.с. Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если КПД насоса 0.8? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Указание: 1 л.с. = 736 Вт.

Решение. По определению КПД,

$$\eta = \frac{A_{полезн}}{A_{затр}}.$$

В нашем случае $A_{полезн} = mgh = \rho Vgh$ *– работа по подъему воды;* $A_{затр} = Nt$*, где* N *– мощность насоса. Имеем:*

$$\eta = \frac{\rho Vgh}{Nt},$$

откуда время, затраченное на подъем воды,

$$t = \frac{\rho Vgh}{\eta N} = 124830\,с = 34\,часа\,40\,мин\,30\,с.$$

2.54 Найти в лошадиных силах и киловаттах мощность двигателя внутреннего сгорания, если среднее давление на поршень в течение всего хода $4.9 \cdot 10^5$ Па, длина хода поршня 40 см, площадь поршня 300 см^2, число рабочих ходов 120 в минуту и КПД составляет 90%.

Решение. По определению,

$$КПД = \eta = \frac{A_{полезн}}{A_{затр}},$$

где в данном случае $A_{полезн} = Nt$; $A_{затр} = pSln$. *Отсюда находим искомую мощность двигателя:*

$$N = \frac{\eta pSln}{t} = 10.6\,кВт = 14.4\,л.с.$$

2.55 Шлифовальный камень диаметром 60 см делает 120 об/мин. Потребляемая мощность 1.6 л.с., коэффициент трения шлифовального камня о деталь 0.2. С какой силой прижимает камень шлифуемую деталь?

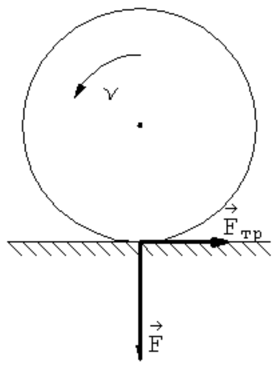

Рисунок 44

Решение. Изобразим на чертеже (рисунок 44) силы, действующие на шлифуемую деталь. По определению коэффициента трения,

$$F = \frac{F_{тр}}{\mu}. \tag{1}$$

Мощность, развиваемую вращающимся шлифовальным камнем, можно выразить формулой:

$$N = F_{тр} \cdot v = F_{тр} \cdot \pi \nu d,$$

откуда

$$F_{тр} = \frac{N}{\pi \nu d}\,. \tag{2}$$

Из (1) и (2) находим силу прижатия:

$$F = \frac{N}{\pi \nu d \mu} = 1562\,H\,.$$

2.56 При ходьбе на лыжах на дистанцию в 20 км по горизонтальному пути центр тяжести лыжника совершал гармонические колебания с амплитудой 8 см и периодом $T = 4$ с. Масса лыжника 80 кг, коэффициент трения лыж о снег $\mu = 0.05$. Определить работу лыжника на марше, если всю дистанцию он прошел за 1 час 30 мин, а также среднюю мощность лыжника. Указание. Считать, что работа торможения при опускании центра тяжести лыжника составляет 0.4 работы при подъеме центра тяжести лыжника на ту же высоту.

Решение. Полная работа, совершенная лыжником, складывается из двух частей:

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 – работа против силы трения, A_2 – работа по подъему и опусканию лыжником своего центра тяжести. Имеем:

$$A_1 = \mu mgS;$$

$$A_2 = nmg\,2\,a\,1.4,$$

где n – число колебаний центра тяжести за $t = 1.5$ часа, a – амплитуда колебаний. $n = t/T$, поэтому полная работа

$$A = \mu ngS + 2.8\frac{t}{T}mga = 1.02 \cdot 10^6\,\textit{Дж}.$$

Средняя мощность лыжника

$$N_{cp} = \frac{A}{t} = 189.1\,\textit{Вт} = 0.26\,\textit{л.с.}$$

2.57 Найти мощность в лошадиных силах и киловаттах машины, поднимающей 84 раза в минуту молот массой 200 кг на высоту 0.75 м, если коэффициент полезного действия машины 0.7.

2.58 Вычислить мощность генераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии 45, масса каждого вагона 10 т, коэффициент сопротивления движению $\mu = 0.02$, средняя скорость вагона 12 км/ч и потери в сети 5%.

2.59 Вычислить работу по подъему груза в 20 кг по наклонной плоскости на расстояние 6 м, если угол плоскости с горизонтом 30°, а коэффициент трения 0.1.

2.60 Определить мощность мотора продольно-строгального станка, если длина рабочего хода 2 м, его продолжительность 10 с, сила резания 11760 Н, КПД станка 0.8. Движение считать равномерным.

2.61 Тело массы $m = 3$ кг падает с некоторой высоты, имея начальную скорость $v_0 = 2$ м/с, направленную вертикально вниз. Вычислить работу A против сил сопротивления, совершенную в течение $t = 10$ с, если известно, что в конце этого промежутка времени тело имело скорость $v = 50$ м/с. Силу сопротивления считать постоянной.

2.6 Теорема об изменении кинетической энергии

2.62 Тело находится на шероховатой наклонной плоскости в покое. Угол наклона плоскости к горизонту равен α, причем $\operatorname{tg}\alpha < \mu_0$, где μ_0 – коэффициент трения покоя. В некоторый момент телу сообщили начальную скорость v_0, направленную вдоль плоскости вниз. Определить путь S, пройденный телом до остановки, если коэффициент трения скольжения равен μ.

Решение. Укажем на чертеже (рисунок 45) все силы, действующие на тело на наклонной плоскости.

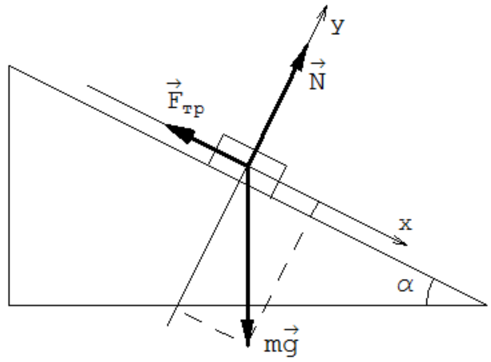

Рисунок 45

Т.к. вначале тело покоилось, то для силы трения покоя выполнялось условие

$$F_{тр_0} > mg\sin\alpha,$$

или

$$\mu_0 mg\cos\alpha > mg\sin\alpha,$$

т.е.

$$\mu_0 > \operatorname{tg}\alpha,$$

что соответствует условию задачи. Запишем для движущегося тела теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = A,$$

где $T = 0$ – конечное, $T_0 = mv_0^2/2$ – начальное значение кинетической энергии тела; A – работа всех сил, приложенных к телу, на пути S. Имеем:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgS(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

откуда

$$S = \frac{v_0^2}{2g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Т.к. $\mu > \mu_0 > \operatorname{tg}\alpha$, *то* $S > 0$.

2.63 Снаряд массой 24 кг вылетает из дула орудия со скоростью 500 м/с. Длина ствола орудия 2 м. Каково среднее значение силы давления газов на снаряд?

Решение. Для движения снаряда в стволе орудия запишем теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = F_{cp}l,$$

где v *– скорость снаряда при вылете из ствола,* l *– длина ствола,* F_{cp} *– средняя сила давления газов на снаряд. (Здесь учтено, что* $v_0 = 0$*) Находим:*

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{2l} = 1.5 \cdot 10^6\, H.$$

2.64 Тело массой 3 кг двигалось по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 м/с. К нему приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость тела оказалась равной 55 м/с и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

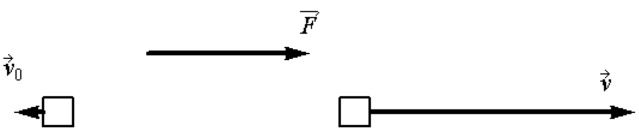

Рисунок 46

Решение. На основании 2-го закона Ньютона можем записать:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F}t,$$

где $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ – векторы начальной и конечной скорости тела соответственно, $\vec{F}$ – действующая на тело в течение времени t сила (рисунок 46). В проекциях на направление силы:

$$m(v + v_0) = Ft,$$

откуда находим величину силы $\vec{F}$:

$$F = \frac{m(v + v_0)}{t} = 6\,H.$$

По теореме об изменении кинетической энергии, работа силы $\vec{F}$ за время t равна:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = 4500\,\text{Дж}.$$

2.65 Поезд массой 200 т идет по горизонтальному участку пути с ускорением $a = 0.2$ м/с^2. Коэффициент трения $\mu = 0.01$ и не зависит от скорости. Определить развиваемую тепловозом мощность в момент $t = 10$ с, если при $t = 0$ скорость поезда была $v_0 = 18$ м/с.

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии,

$$A_{полн} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

где $A_{полн}$ – полная работа всех сил, действующих на поезд в течение времени t, v – скорость поезда к концу этого промежутка времени: $v = v_0 + at$.

Работу при движении поезда по горизонтальному пути совершают две силы: сила тяги тепловоза и сила трения, т.е.

$$A_{полн} = A_m + A_{mp},$$

где $A_{mp} = -F_{mp}S = -\mu mgS$; S – пройденный поездом за время t путь. Отсюда работа, совершенная тепловозом,

$$A_m = A_{полн} - A_{mp} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} + \mu mgS =$$

$$= m\left(\frac{1}{2}\left((v_0+at)^2 - v_0^2\right) + \mu g\left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)\right) =$$

$$= m(a+\mu g)(v_0 t + \frac{at^2}{2}),$$

а развиваемая тепловозом к моменту t мощность

$$N_m = \frac{dA_m}{dt} = m(a+\mu g)(v_0+at) = 1.192 \cdot 10^6\, Bm.$$

2.66 Гвоздь вбивается в стену, оказывающую сопротивление $F_c = 686$ Н. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется в стену на длину $l = 0.15$ см. Определить вес молотка P, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость $v_0 = 1.25$ м/с.

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии,

$$A_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

где A_c – работа силы сопротивления F_c на пути l; v и v_0 – соответственно конечная и начальная скорости молотка. Т.к. по условию задачи $v = 0$, то имеем:

$$-F_c l = -\frac{mv_0^2}{2},$$

откуда масса молотка

$$m = \frac{2F_c l}{v_0^2},$$

а его вес

$$P = mg = \frac{2f_c lg}{v_0^2} = 12.9\, H.$$

2.67 Пружина самострела имеет в ненапряженном состоянии длину $l_0 = 20$ см. Сила, необходимая для изменения ее длины на $x_1 = 1$ см, равна $F_1 = 1.96$ Н. С какой скоростью вылетит из самострела шарик массой $m =$

30 г, если пружина была сжата до длины $l = 10$ см? Самострел расположен горизонтально.

Решение. С помощью закона Гука находим коэффициент упругости k пружины:

$$k = \frac{F_1}{x_1}.$$

По теореме о кинетической энергии,

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

причем $v_0 = 0$. Здесь A – работа силы упругости:

$$A = \int_0^{\Delta l} F_{упр} dx = -\int_0^{\Delta l} kx dx = \frac{k}{2}(\Delta l)^2 = \frac{F_1}{2x_1}(\Delta l)^2,$$

где $\Delta l = l_0 - l$. Т.о.,

$$\frac{F_1}{2x_1}(l_0 - l)^2 = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{F_1}{mx_1}(l_0 - l)^2} = 8.1 м/с.$$

2.68 Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 1$ км/с. Определить высоту H поднятия тела, принимая во внимание, что сила притяжения уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли; сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли $R = 6370$ км.

Решение. Изобразим ситуацию на чертеже (рисунок 47). Запишем для тела массы m, брошенного вверх с начальной скоростью $\vec{v}_0$, теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

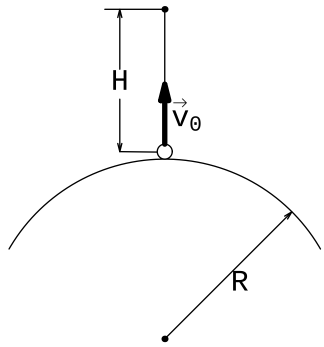

Рисунок 47

где $v = 0$ *– скорость тела на высоте* H *над поверхностью Земли,* A *– работа силы тяготения при подъеме тела на эту высоту. Имеем (в проекции на направление полета тела):*

$$F = -\frac{GmM}{r^2},$$

где r *– расстояние, отсчитываемое от центра Земли,* M *– масса Земли. Отсюда*

$$A = \int_R^{R+H} F(r)dr = -\int_R^{R+H} \frac{GmM}{r^2}dz = GmM\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right)$$

Воспользуемся известным соотношением $GM = gR^2$*: тогда окончательно*

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgR^2\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right),$$

откуда искомая высота подъема тела:

$$H = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2} = 51.4\,\textit{км}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.69 При подходе к станции поезд идет со скоростью 36 км/ч под уклон, угол которого $\alpha = 0.008$. В некоторый момент машинист начинает тормозить. Сопротивление от торможения и трения в осях составляет $\mu = 0.1$

веса поезда. Определить, на каком расстоянии и через сколько времени от момента начала торможения поезд остановится.

2.70 Сопротивление, встречаемое железнодорожной платформой при движении, равно $F_c = 147$ Н, а ее масса $m = 6$ т. Рабочий уперся в покоящуюся платформу и покатил ее по горизонтальному и прямолинейному участку пути, действуя с силой $F = 245$ Н. Пройдя $S_1 = 20$ м, он предоставил платформе катиться самой. Вычислить наибольшую скорость v_{max} платформы во время движения, а также весь путь S, пройденный ею до остановки.

2.71 Метеорит, упавший на Землю, имел массу $m = 39$ кг. Падая, он углубился в почву на расстояние $l = 1.875$ м. Известно, что почва в этом месте оказывает проникающему в нее телу сопротивление $F_c = 490$ кН. С какой скоростью метеорит достиг поверхности Земли? С какой высоты он должен был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести скорость, упомянутую выше? Силу тяжести считать постоянной, сопротивлением воздуха пренебречь.

2.72 Поезд массой $m = 500$ т, двигаясь с выключенным двигателем, испытывает при движении сопротивление $F_c(v) = (7500 + 500v)$ Н, где v – скорость в м/с. Зная начальную скорость поезда $v_0 = 15$ м/с, определить, какое расстояние пройдет поезд до остановки.

2.73 Вагон массой 16 т наталкивается со скоростью 2 м/с на два упорных буфера. Определить наибольшее сжатие пружин упорных буферов при ударе вагона, если известно, что вагонные и буферные пружины одинаковы и сжимаются на 1 см под действием силы в 49 кН.

2.74 Определить скорость v_0, которую нужно сообщить по вертикали вверх телу, находящемуся на поверхности Земли, для того чтобы оно поднялось на высоту, равную земному радиусу. Считать, что на тело действует только сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тела от центра Земли. Радиус Земли 6370 км.

2.75 Шахтная клеть движется вниз со скоростью $v_c = 12$ м/с, масса клети $m = 6$ т. Какую силу трения между стенами шахты и клетью должен развить предохранительный парашют, чтобы остановить клеть на пути $S = 10$ м, если канат, удерживающий клеть, оборвется? Силу трения считать постоянной.

2.7 Закон сохранения механической энергии

2.76 Груз массой $m = 1$ кг подвешен на нити длиной $l = 50$ см в неподвижной точке O. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол $\varphi = 60°$ и ему сообщена скорость $v_0 = 2.1$ м/с в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз. Определить: 1) натяжение нити в наинизшем положении, 2) отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.

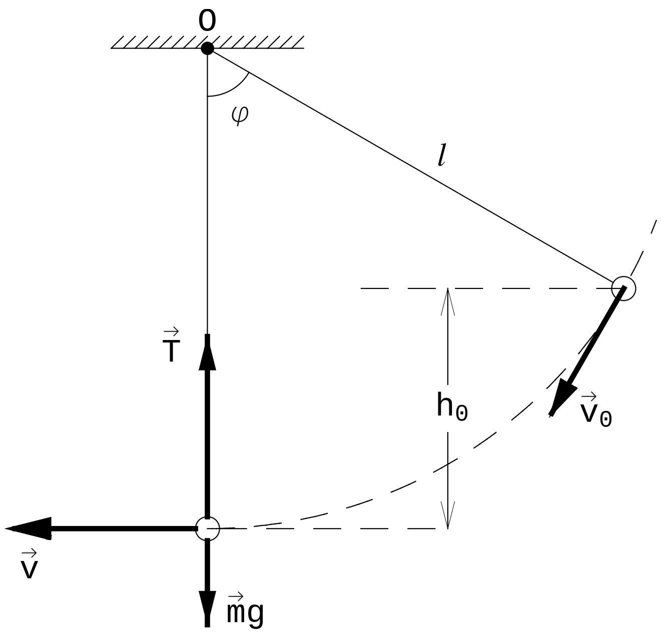

Рисунок 48

Решение. Изобразим начальное и наинизшее положения груза на чертеже (рисунок 48). Поскольку в задаче отсутствуют диссипативные силы, то пользуемся законом сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = \frac{mv^2}{2}\,, \tag{1}$$

где v – скорость груза в нижней точке, h_0 – высота груза в начальный момент. Из геометрии находим:

$$h_0 - l(1 - \cos\varphi) = \frac{l}{2}\,. \tag{2}$$

Запишем также 2-й закон Ньютона для груза, находящегося в нижней точке (в проекциях на вертикальную ось):

$$T - mg = \frac{mv^2}{l}\,. \tag{3}$$

Из соотношений (1)-(3) определяем искомую силу натяжения нити:

$$T = m\left(2g + \frac{v_0^2}{l}\right) = 28.4\,H.$$

Чтобы найти высоту, на которую поднимется груз, пройдя наинизшее положение, вновь воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

откуда искомая высота

$$h = \frac{v_0^2 + gl}{2g} = 0.475\,м.$$

2.77 Сохраняя условия предыдущей задачи, кроме величины скорости v_0, найти, при каком значении v_0 груз будет проходить всю окружность.

Решение. Изобразим на чертеже верхнее положение груза (рисунок 49). Очевидно, в предельном случае сила натяжения нити в этом по-

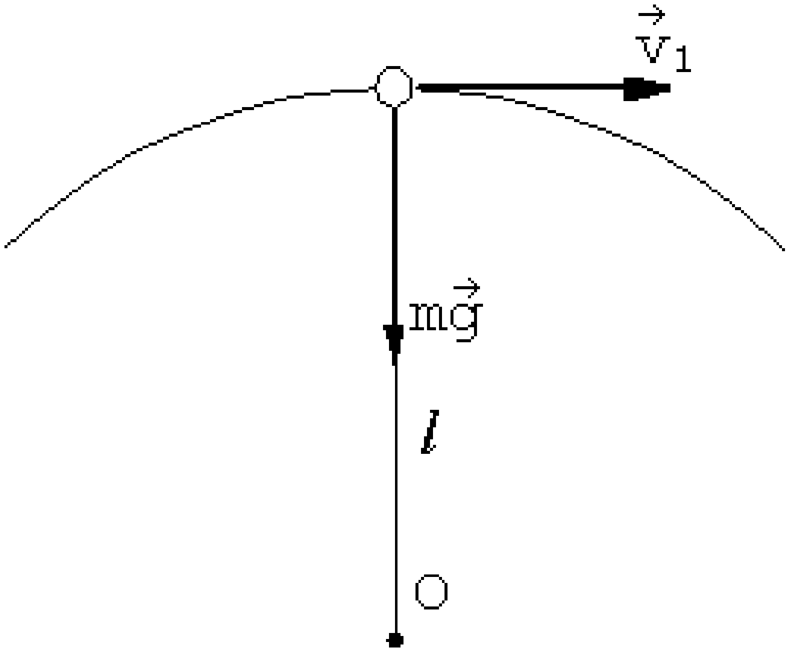

Рисунок 49

ложении будет равна нулю, и по 2-му закону Ньютона

$$mg = \frac{mv_1^2}{l}, \tag{1}$$

где v_1 *– минимальная скорость, с какой груз должен проходить верхнюю точку. Отсюда*

$$v_1^2 = lg. \tag{2}$$

Далее, по закону сохранения механической энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh_0 = 2mgl + \frac{mv_1^2}{2}. \tag{3}$$

Из (1)-(3) находим искомую начальную скорость груза: $v_0 > 2\sqrt{gl}$*, или* $v_0 >$ 4.43 *м/с.*

2.78 По рельсам, проложенным по пути AB (рисунок 50) и образующим затем петлю в виде кругового кольца BC радиуса a, скатывается вагонетка весом P. С какой высоты h нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него? Определить давление N вагонетки на кольцо в точке M, для которой $\angle MOB = \varphi$.

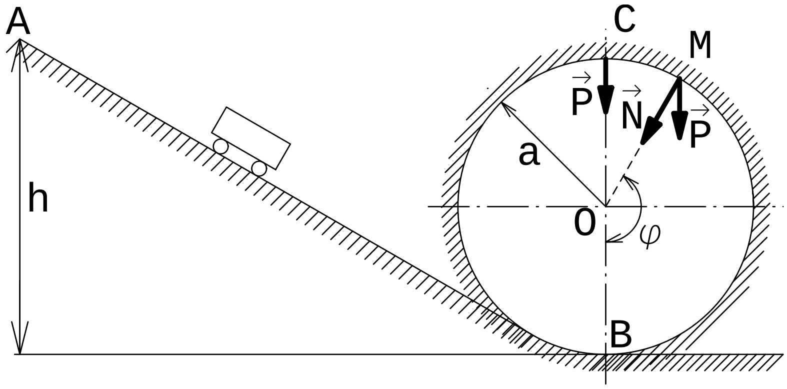

Рисунок 50

Решение. В предельном случае для точки C можем записать 2-ой закон Ньютона (в проекциях на вертикальную ось):

$$P = \frac{mv^2}{a},$$

где v – скорость вагонетки в точке C, минимально необходимая для прохождения всей окружности кольца. Следовательно, величина этой скорости:

$$v^2 = ag\,. \tag{1}$$

По закону сохранения механической энергии,

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + 2mag,$$

откуда

$$v^2 = 2g(h - 2a). \tag{2}$$

Из сопоставления (1) и (2) находим необходимую высоту h:

$$h \geq \frac{5}{2}\,a.$$

Для точки M второй закон Ньютона (в проекциях на ось OM) имеет вид:

$$P\cos(\pi - \varphi) + N = \frac{mv_M^2}{a}. \tag{3}$$

Скорость в точке M найдем с помощью закона сохранения механической энергии:

$$mgh = \frac{mv_M^2}{2} + mga(1 - \cos\varphi),$$

откуда

$$v_M^2 = 2g[h - a(4 - \cos\varphi)]. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), находим величину силы N:

$$N = P\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right).$$

По 3-му закону Ньютона, сила давления вагонетки на кольцо в точке M имеет такую же величину, что и N.

2.79 Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады AB (рисунок 51), наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку BC, длиной которой при расчете можно пренебречь. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $v_y = 1$ м/с. Высота эстакады $h = 9$ м, коэффициент трения лыж о снег $\mu = 0.08$, линия приземления CD образует угол $\beta = 45°$ с горизонтом. Определить дальность l полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха. (Дальностью полета считается длина, измеряемая от точки отрыва C до точки приземления лыжника на линии CD.)

Решение. Запишем для движения лыжника по эстакаде закон сохранения энергии (с учетом работы силы трения):

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \mu mg\cos\alpha \cdot s,$$

где $s = h/\sin\alpha$.

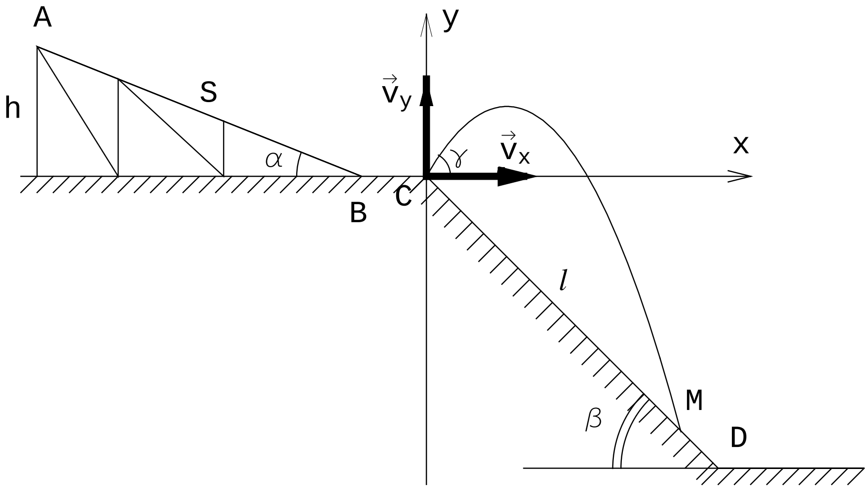

Рисунок 51

Отсюда находим скорость лыжника в конце эстакады:

$$v = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} = 12.33\,\text{м}/\text{с}.$$

В момент отрыва от трамплина в точке C лыжник, по условию задачи, будет иметь горизонтальную составляющую скорости $v_x = v = 12.33$ м/с и вертикальную $v_y = 1$ м/с, так что полная его начальная скорость в точке C:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 12.37\,\text{м}/\text{с};$$

при этом угол γ вектора $\vec{v}_0$ с горизонтом будет равен:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} = 4°38'.$$

После точки C лыжник будет двигаться по параболической траектории, описываемой уравнением (см., например, задачу 1.5)

$$y = x \operatorname{tg} \gamma - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \gamma}\,.$$

В точке приземления эта кривая должна пересечься с прямой $y = -x$ (здесь использовано условие $\beta = 45°$), поэтому для абсциссы точки приземления M

имеем уравнение:

$$-x_м = x_м \cdot \operatorname{tg}\gamma - \frac{gx_м^2}{2v_0^2\cos^2\gamma)},$$

откуда находим:

$$x_м = \frac{2v_0^2\cos^2\gamma(1+\operatorname{tg}\gamma)}{g},$$

а искомая дальность

$$l = CM = \frac{x_м}{\cos\beta} = \frac{2v_0^2\cos^2\gamma(1+\operatorname{tg}\gamma)}{g\cos\beta} = 47.4\,м.$$

2.80 Камень M, находящийся на вершине A гладкого полусферического купола радиуса R (рисунок 52), получает начальную горизонтальную скорость v_0. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях v_0 камень сойдет с купола в начальный момент?

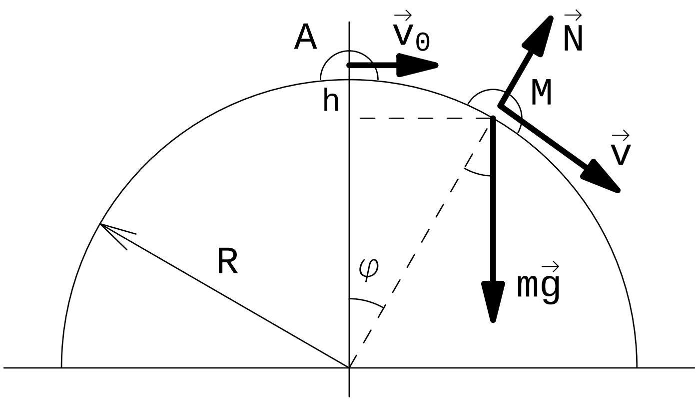

Рисунок 52

Решение. Запишем для положения M камня закон сохранения механической энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \tag{1}$$

где h – высота по вертикали точки A относительно точки M, скорости v и v_0 показаны на рисунок 52.

Из геометрии имеем:

$$h = R(1 - \cos\varphi). \tag{2}$$

Если M – точка отрыва камня от купола, то в этой точке реакция купола $N = 0$. Тогда уравнение движения для этой точки примет вид (в проекциях на радиальное направление):

$$mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{R}. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1)-(3), находим:

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3Rg}.$$

Камень соскользнет в начальный момент, если уже в точке A $N = 0$, т.е.

$$mg = \frac{mv_0^2}{R},$$

откуда

$$v_0 \geq \sqrt{Rg}\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.81 Парашютист массой 70 кг выбросился из самолета и, пролетев 100 м, раскрыл парашют. Найти силу натяжения стропов, на которых человек был подвешен к парашюту, если в течение первых пяти секунд с момента раскрытия парашюта, при постоянной силе сопротивления движению, скорость парашютиста уменьшилась до 4.3 м/с. Сопротивлением воздуха при нераскрытом парашюте пренебречь.

2.82 По горизонтальной поверхности стола скользит брусок массы m и сталкивается неупруго с неподвижным бруском массы $2m$, имея перед столкновением скорость v=2 м/с. Какое расстояние пройдут слипшиеся бруски до остановки? Коэффициент трения скольжения между брусками и столом $\mu = \frac{1}{18}$.

2.83 Из духового ружья стреляют в спичечную коробку, лежащую на расстоянии $l = 30$ см от края стола. Пуля массы $m = 1$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 150$ м/с, пробивает коробку и вылетает из нее со скоростью $v_0/2$. Масса коробки $M = 50$ г. При каком коэффициенте трения между коробкой и столом коробка упадет со стола?

2.84 Две частицы с массами m и $2m$, имеющие импульсы p и $p/2$, движутся по взаимно перпендикулярным направлениям. После соударения частицы обмениваются импульсами. Определить потерю механической энергии при соударении.

2.85 Шар массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v = 4$ м/с и ударяется о неподвижный шар такой же массы. Считая удар центральным и абсолютно неупругим, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

2.86 Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $m_1 = 5$ г, масса шара $m_2 = 0.5$ кг. Скорость пули $v_1 = 500$ м/с. При каком предельном расстоянии l от центра шара до точки подвеса стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

3 Основы аналитической механики

3.1 Число степеней свободы системы. Функция Лагранжа

3.1 Определить число степеней свободы:

а) точки на линии;

б) точки на поверхности;

в) точки в пространстве;

г) системы двух частиц;

д) системы двух частиц, находящихся на заданном расстоянии друг от друга;

е) системы двух частиц, находящихся на заданном расстоянии одна от другой, если одна из них связана с поверхностью, а другая – с линией;

ж) трех частиц с двумя заданными неизвестными расстояниями между ними;

з) трех частиц с тремя постоянными расстояниями;

и) определить число поступательных степеней свободы системы частиц;

к) определить число вращательных степеней свободы системы частиц.

Решение. а) Число степеней свободы – это число независимых координат, необходимых для того, чтобы определить положение системы. Положение точки на линии задается одной координатой, например, расстоянием от заданной точки на кривой, поэтому точка на линии имеет одну степень свободы.

б) Аналогично, точка на поверхности имеет две степени свободы;

в) Точка в пространстве – три степени свободы.

г) Система из двух частиц обладает шестью степенями свободы (ка-

ждая частица – тремя).

д) Система из двух частиц имеет 6 степеней свободы; наличие одного дополнительного условия уменьшает это число на 1; таким образом, остается 5 степеней свободы.

е) Две – для частицы на поверхности, одна – для частицы на линии; одно дополнительное условие уменьшает число степеней свободы на 1 – всего, таким образом, 2 степени свободы.

ж) $9 - 2 = 7$.

з) $3 \cdot 3 - 3 = 6$.

и) Три поступательных степени свободы, отвечающие перемещению вдоль трех осей координат.

к) Три, соответственно трем углам, характеризующим поворот осей координат; если же система состоит из частиц, расположенных вдоль одной прямой, то для определения ее положения достаточно двух углов – соответственно имеются две вращательных степени свободы.

3.2 Упростить функцию Лагранжа путем исключения полных производных.

а) $L = \dot{x}\sin t$;

б) $L = \frac{1}{2}(\dot{q} + t)^2$.

Решение. Функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени (принцип наименьшего действия инвариантен относительно прибавления к функции Лагранжа полной производной по времени). Поэтому в функции Лагранжа можно вычеркнуть все члены, дающие полную производную по t*. Имеем:*

а) $\frac{d}{dt}(x\sin t) = \dot{x}\sin t + x\cos t$*; отсюда* $L = \frac{d}{dt}(x\sin t) - x\cos t$*. Вычеркивая полную производную по времени, находим окончательный вид функции*

Лагранжа:

$$L = -x\cos t.$$

б) $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + 2\dot{q}t + t^2)$*; учтем, что* $\dot{q}t = \frac{d}{dt}(qt) - q$*, а также* $t^2 = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}(t^3)$*, получим:*

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{d}{dt}(qt) - q + \frac{1}{6}\frac{d}{dt}(t^3);$$

вычеркивая полную производную по времени, находим окончательно:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - q.$$

3.3 Написать функцию Лагранжа для частицы массы m

а) в декартовых координатах;

б) в сферических координатах.

Решение. Функция Лагранжа одной частицы записывается в виде:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - U(q) = \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2} - U(q),$$

где ds^2 *– квадрат элемента длины в системе координат, в которой рассматривается движение частицы и потенциальная энергия;* $U(q)$ *– функция только координат.*

а) в декартовых координатах

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

и потому

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

б) в сферических координатах (r, θ, φ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta \cdot d\varphi^2;$$

поэтому функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - U(r, \theta, \varphi).$$

3.4 Найти функцию Лагранжа

а) для частицы массы m на шаровой поверхности (сферического маятника);

б) для двойного плоского маятника (рисунок 53).

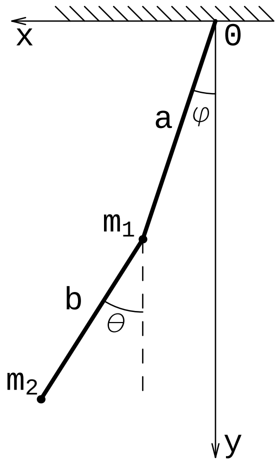

Рисунок 53

Решение. В сферических координатах, с учетом того, что радиус шара постоянен: $\dot{r} = 0$, *– кинетическая энергия частицы имеет вид (см. задачу 3.3.б):*

$$T = \frac{m}{2}(r^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Потенциальная энергия в поле тяжести равна произведению массы, ускорения силы тяжести и высоты поднятия частицы над некоторым уровнем – каким именно, не имеет значения, т.к. при отсчете от разных уровней прибавляются лишь новые постоянные в функции Лагранжа, а их можно опустить (см. задачу 3.2). В качестве начального уровня примем, например, экваториальную плоскость шара; тогда высота поднятия $h = r\cos\theta$.

Отсюда искомая функция Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - mgr\cos\theta.$$

б) Функция Лагранжа равна сумме лагранжианов для частиц m_1 и m_2:

$$L = L_1 + L_2.$$

Кинетическая энергия частицы m_1 имеет вид:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{2}a^2\dot{\varphi}^2,$$

т.к. скорость ее $v_1 = a\dot{\varphi}$. Если принять за начало отсчета высоты точку O, то потенциальная энергия частицы m_1 равна:

$$U_1 = -m_1 ga\cos\varphi.$$

Отсюда ее лагранжиан

$$L_1 = \frac{m_1}{2}a^2\dot{\varphi}^2 + m_1 ga\cos\varphi.$$

Выразим с помощью рисунок 53 координаты частицы m_2 через углы θ и φ:

$$x_2 = a\sin\varphi + b\sin\varphi,$$

$$y_2 = a\cos\varphi + b\cos\varphi,$$

откуда

$$\dot{x}_2 = a\dot{\varphi}\cos\varphi + b\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$\dot{y}_2 = -a\dot{\varphi}\sin\varphi - b\dot{\theta}\sin\theta.$$

Тогда кинетическая энергия частицы 2:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\{a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2ab\cos(\varphi - \theta)\cdot\dot{\varphi}\dot{\theta}\};$$

потенциальная энергия:

$$U_2 = -m_2 g(a\cos\varphi + b\cos\theta);$$

лагранжиан:

$$L_2 = \frac{m_2}{2}\{a^2\dot\varphi^2 + b^2\dot\theta^2 + 2ab\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)\} + m_2 g(a\cos\varphi + b\cos\theta).$$

3.5 Найти функцию Лагранжа для частицы массы m в системе отсчета K', движущейся с постоянной скоростью v относительно неподвижной системы отсчета K.

Решение. Запишем формулы, связывающие координаты частицы в обеих системах отсчета, считая, что в момент $t=0$ начала обеих систем совпадают:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Отсюда

$$\dot x = \dot x' + v\,,\ \dot y = \dot y'\,,\ \dot z = \dot z'\,,$$

и функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - U(x,y,z) == \frac{m}{2}\left\{(\dot x')^2 + 2\dot x' v + v^2 + (\dot y')^2 + (\dot z')^2\right\} - U.$$

Поскольку

$$v^2 = \frac{d}{dt}(v^2 t)\,,\ 2\dot x' v = \frac{d}{dx}(2x' v),$$

то два этих слагаемых можно опустить как полные производные по t. Имеем

$$L = \frac{m}{2}\left\{(\dot x')^2 + (\dot y')^2 + (\dot z')^2\right\} - U(x,y,z)\,,$$

что состоит в полном соответствии с принципом относительности Галилея.

3.6 Проинтегрировать уравнение движения частицы, если дана ее функция Лагранжа и начальные условия:

а) $L = \dot{x}^2 - 1/x^2 \quad ; \qquad t = 0 \quad : \quad x_0 = 1 \quad , \quad \dot{x}_0 = 0\,;$

б) $L = \dot{x}^2/x - x \quad ; \qquad t = 0 \quad : \quad x_0 = 1 \quad , \quad \dot{x}_0 = 1\,.$

Решение. а) С помощью заданной функции Лагранжа составим выражение для полной энергии частицы:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} - L = 2\dot{x}\dot{x} - \dot{x}^2 + \frac{1}{x^2} = \dot{x}^2 + \frac{1}{x^2}$$

На основании закона сохранения энергии

$$E = \dot{x}^2 + \frac{1}{x^2} = const$$

Из начальных условий находим:

$$E = \dot{x}_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = 1.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение движения частицы:

$$\dot{x}^2 + \frac{1}{x^2} = 1\,; \quad \dot{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\,; \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = dt\,,$$

общее решение:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \sqrt{x^2 - 1} + C\,.$$

Постоянную интегрирования определяем из начальных условий; $t = 0$, $x_0 = 1$*;* $C = 0$. *Таким образом, окончательно имеем:*

$$t = \sqrt{x^2 - 1}\,; \quad x(t) = \sqrt{t^2 + 1}.$$

б) Энергия частицы:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} - L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\,;$$

из начальных условий: $E = 2$. *Уравнение движения:*

$$\frac{\dot{x}^2}{x} + x = 2\,; \quad \dot{x} = \sqrt{2x - x^2}\,; \quad \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = dt\,,$$

общий интеграл

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \arcsin(x - 1) + C\,.$$

Из начальных условий: $C = 0$. *Окончательно:*

$$\sin t = x - 1\,; \quad x(t) = 1 + \sin t.$$

3.7 Проинтегрировать уравнения движения, если

а) $L = t^2\dot{x}^2/2$; при $t = 1$: $x = 0$, $\dot{x} = 1$.

б) $L = \dot{x}^2/2 + t^2\dot{x}$, при $t = 0$: $x = 0$, $\dot{x} = 1$.

Решение. а) Поскольку x *явно не входит в функцию Лагранжа (является циклической координатой), то отвечающий этой координате импульс есть первый интеграл движения:*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \rho_x = const.$$

Из начальных условий находим его значение:

$$\rho_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = t^2\dot{x} = 1.$$

Тогда $\dot{x} = 1/t^2$, $dx = dt/t^2$; *после интегрирования:*

$$x(t) = -\frac{1}{t} + C.$$

Так как при $t = 1 \quad x = 0$, *то* $C = 1$, *и окончательно*

$$x(t) = 1 - \frac{1}{t}\,.$$

б) Первый интеграл движения:

$$\rho_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + t^2;$$

из начальных условий находим: $\rho_x = 1$. *Отсюда имеем дифференциальное уравнение:*

$$\dot{x} = 1 - t^2;$$

после интегрирования:

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3} + C.$$

Начальные условия дают $C = 0$, *и окончательно:*

$$x(t) = t - \frac{t^3}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.8 Упростить функцию Лагранжа путем исключения полных производных

а) $L = \frac{1}{2}(\dot{q} + q)^2$;

б) $L = tx\dot{x}$.

3.9 Найти функцию Лагранжа для частицы m_1, движущейся по горизонтальной прямой, и частицы m_2, движущейся в вертикальной плоскости (рисунок 54). Система находится в поле тяжести.

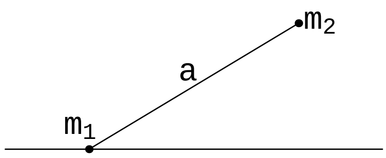

Рисунок 54

3.10 Написать функцию Лагранжа для частицы массы m в системе отсчета, движущейся с постоянным ускорением a относительно неподвижной системы K.

3.11 Проинтегрировать уравнение движения частицы, если дана ее функция Лагранжа и начальные условия: $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + x\,;\ t = 0\ :\ x_0 = 2\,,\ \dot{x}_0 = 0\,.$

3.12 Проинтегрировать уравнение движения, если $L = \sqrt{t + \dot{x}^2}$; при $t = 3$; $x = 0$, $\dot{x} = 1$.

3.2 Уравнения Лагранжа

3.13 Найти ускорение, если задана функция Лагранжа:

а) $L = \dot{q}^2/2 - q^2/2$;

б) $L = (1 + q^2)\dot{q}^2/2 - q^2/2$.

Решение. а) Уравнения Лагранжа можно записать в виде:

$$\frac{dp_i}{dt} = Q_i,$$

где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ *– обобщенный импульс, сопряженный обобщенной координате* q_i*;* $\dot{q}_i$ *– соответствующая обобщенная скорость;* L *– функция Лагранжа,* $Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ *– обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате* q_i*. В нашем случае* $q_i = q$*; имеем:*

$$p = \frac{\partial L}{\partial p} = \dot{q}\,; \quad Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -q\,.$$

Уравнение Лагранжа примет вид:

$$\ddot{q} = -q.$$

Из функции Лагранжа находим:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}(1 + q^2);$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial q} = \dot{q}^2 q - q.$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{dp}{dt} = Q,$$

или

$$\ddot{q}(1 + q^2) + 2\dot{q}^2 q = \dot{q}^2 q - q,$$

откуда ускорение

$$\ddot{q} = -\frac{q(1 + \dot{q}^2)}{1 + q^2}.$$

3.14 Зубчатое колесо 1 весом P_1 и радиусом r_1 (рисунок 55) электрической лебедки приводится в движение вращающим моментом M. Колесо 2 весом P_2 и радиусом r_2, находящееся во внешнем зацеплении с колесом 1, связано с барабаном A веса P_3 и радиуса r_3, на который намотана нить. К концу нити привязан груз B весом P_4, который при включении мотора поднимается вверх. Определить ускорение груза B, считая зубчатые колеса 1 и 2 и барабан A сплошными круглыми цилиндрами. Массой нити пренебречь.

Решение. Нетрудно видеть, что данная система обладает одной степенью свободы, и, следовательно ее движение описывается одной обобщенной координатой. В качестве таковой выберем угол поворота φ_1 *первого зубчатого колеса.*

Придадим обобщенной координате φ_1 *некоторое малое изменение* $\delta\varphi_1$ *(виртуальное перемещение); тогда малый поворот 2-го колеса* $\delta\varphi_2$ *и малое линейное перемещение* δl *груза* B *(рисунок 55) легко могут быть выражены*

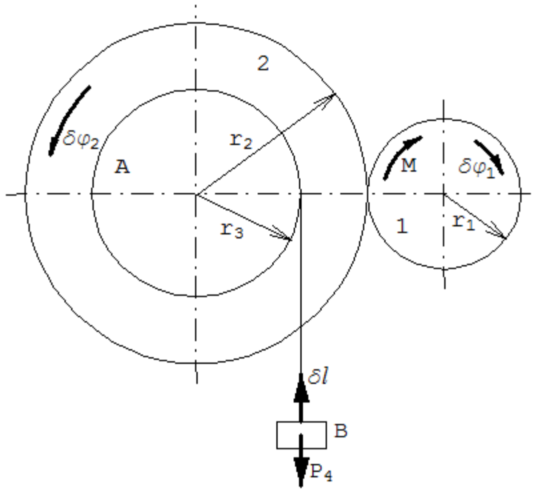

Рисунок 55

через $\delta\varphi_1$*:*

$$\delta\varphi_2 = -\frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1;$$

$$\delta l = -r_3\delta\varphi_2 = \frac{r_1 r_3}{r_2}\delta\varphi_1.$$

Запишем суммарную работу приложенных к системе активных сил (виртуальную работу) на рассматриваемом виртуальном перемещении:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 - P_4\delta l = (M - \frac{r_1 r_3}{r_2}P_4)\delta\varphi_1\,.$$

Отсюда находим отвечающую обобщенной координате φ_1 *обобщенную силу:*

$$Q_1 = M - \frac{r_1 r_3}{r_2}P_4.$$

Кинетическая энергия системы складывается из четырех частей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4\,,$$

где $T_1 = J_1\dot{\varphi}_1^2/2 = P_1 r_1^2\dot{\varphi}_1^2/(4g)$ *– кинетическая энергия 1-го зубчатого колеса,*

$J_1 = P_1 r_1^2/(2g)$ *– его момент инерции;*

$T_2 = J_2\dot{\varphi}_2^2/2 = P_2 r_1^2\dot{\varphi}_1^2/(4g)$ *– кинетическая энергия 2-го зубчатого колеса,*

$T_3 = J_3\dot{\varphi}_2^2/2 = P_3 r_3^3/(4g)(r_1/r_2)^2\dot{\varphi}_1^2$ – *кинетическая энергия барабана A;*

$T_4 = P_4/(2g)v_4^2$ – *кинетическая энергия груза B,* v_4 – *его скорость.*

С учетом того, что

$$v_4 = r_3\dot{\varphi}_2 = -\frac{r_3 r_1}{r_2}\dot{\varphi}_1,$$

имеем

$$T_4 = \frac{P_4 r_3^3}{2g}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Таким образом, полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{4g}\left\{(P_1+P_2)r_1^2 + (P_3+2P_4)r_3^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right\}\dot{\varphi}_1^2.$$

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = Q_1.$$

Находим соответствующие частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2g}\left\{(P_1+P_2)r_1^2 + (P_3+2P_4)r_3^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right\}\dot{\varphi}_1 ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = 0.$$

Подстановка в уравнение Лагранжа дает:

$$\frac{1}{2g}\left\{(P_1+P_2)r_1^2 + (P_3+2P_4)r_3^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right\}\ddot{\varphi}_1 = M - \frac{r_1 r_3}{r_2}P_4,$$

откуда находим угловое ускорение 1-го колеса:

$$\varepsilon_1 \equiv \ddot{\varphi}_1 = 2g\frac{M - P_4\dfrac{r_1 r_3}{r_2}}{(P_1+P_2)r_1^2 + (P_3+2P_4)r_3^2\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

Искомое же ускорение груза B есть

$$a = \varepsilon_1 r_3.$$

Из найденного выражения видно, что если $M > P_4 \cdot \dfrac{r_1 r_3}{r_2}$, *то ускорение груза* B *направлено вверх, если* $M < P_4 \cdot \dfrac{r_1 r_3}{r_2}$ *– вниз. В случае, когда* $M = P_4 \cdot \dfrac{r_1 r_3}{r_2}$, *лебедка либо покоится, либо все ее массы движутся равномерно.*

3.15 При наезде крановой тележки A (рисунок 56) на упругий упор B начинаются колебания подвешенного на невесомом стержне груза D. Составить дифференциальные уравнения движения системы, если m_1 – масса тележки, m_2 – масса груза, l – длина стержня, c – коэффициент жесткости пружины упора B. Массой колес и всеми силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси OX взять в левом конце деформированной пружины.

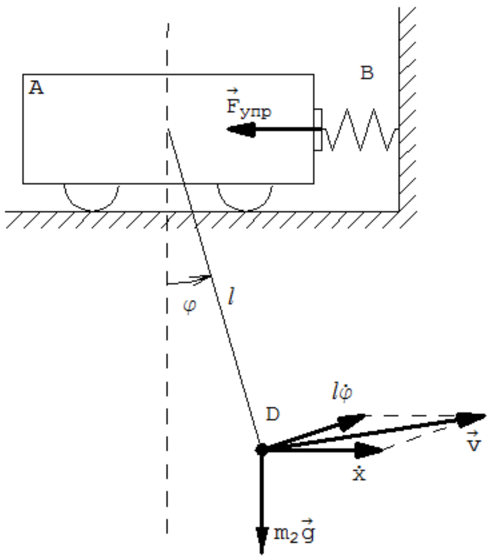

Рисунок 56

Решение. Система обладает двумя степенями свободы, поэтому введем две обобщенных координаты: x и y. Предположим, что каждая из этих координат совершила малое виртуальное перемещение: δx и δy соответственно. Запишем виртуальную работу каждой из двух приложенных к системе активных сил ($m_2\vec{g}$ *и* $\vec{F}_{упр}$)*:*

$$\delta A_x = F_{упр} \cdot \delta x = -cx\delta x\,;$$

$$\delta A_\varphi = -m_2 g \sin\varphi \cdot l\delta\varphi\,.$$

Из этих соотношений находим соответствующие каждой из обобщенных координат обобщенные силы:

$$Q_x = -cx\,; \quad Q_\varphi = -m_2 g l \sin\varphi\,.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2,$$

где $T_1 = \dfrac{m_1\dot{x}^2}{2}$ *– кинетическая энергия тележки,* $T_2 = \dfrac{m_2 v^2}{2}$ *– кинетическая энергия груза. Здесь* $\vec{v}$ *– скорость груза, складывающаяся из двух компонент (рисунок 56); квадрат ее модуля:*

$$v^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi.$$

Поэтому

$$T\frac{(m_1+m_2)\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 l^2\dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\,.$$

Для составления уравнений Лагранжа вычисляем производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi\,;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi\,;$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0\,;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi$$

и подставляем их в уравнения Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases}$$

получим:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -cx \\ \ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi \end{cases}.$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы.

Задачи для самостоятельного решения

3.16 Найти ускорение, если задана функция Лагранжа:

а) $L = \dfrac{t\dot{q}^2}{2}$;

б) $L = -\sqrt{1-\dot{q}^2} + q$.

3.17 Передача вращения между двумя взаимно перпендикулярными и пересекающимися валами осуществляется двумя коническими зубчатыми колесами, имеющими соответственно z_1 и z_2 зубцов; моменты инерции валов с насаженными на них колесами соответственно равны J_1 и J_2. Определить угловое ускорение первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а на другой вал – момент сопротивления M_2. Трением в подшипниках пренебречь.

3.18 В зацеплении, показанном на рисунке 57, колесо 1 приводится в движение моментом M_1, к колесу 2 приложен момент сопротивления M_2 и к колесу 3 – момент сопротивления M_3. Найти угловое ускорение 1-го колеса, считая колеса однородными дисками, массы которых m_1, m_2, m_3 и радиусы r_1, r_2, r_3.

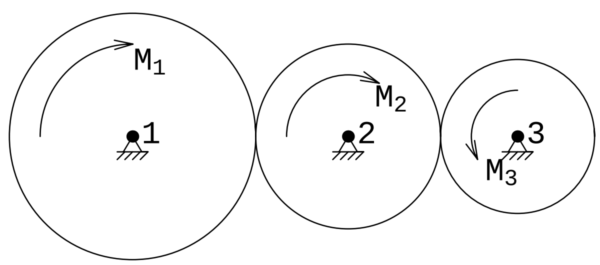

Рисунок 57

3.19 Используя результат решения задачи 3.15, определить период малых колебаний груза при отсутствии упора B.

Указание. Пренебречь членом, содержащим $\dot\varphi^2$, считать $c = 0$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$.

3.3 Канонические уравнения Гамильтона

3.20 По заданной функции Гамильтона написать канонические уравнения:

а) $H = \dfrac{p_u^2 + p_v^2}{2(u^2+v^2)} + u$;

б) $H = \dfrac{p_x p_y}{t x^2 y}$.

Решение. Канонические уравнения имеют вид:

$$\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \quad \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

а) Имеем две обобщенных координаты u и v и сопряженные им обобщенные импульсы p_u и p_v. Канонические уравнения получаем дифференцированием гамильтониана по соответствующим переменным:

$$\dot u = \frac{\partial H}{\partial p_u} = \frac{p_u}{u^2+v^2}\,; \quad \dot v = \frac{\partial H}{\partial p_v} = \frac{p_v}{u^2+v^2}\,;$$

$$\dot p_u = -\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{u(p_u^2+p_v^2)}{(u^2+v^2)^2} - 1\,; \quad \dot p_v = -\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{v(p_u^2+p_v^2)}{(u^2+v^2)^2}\,.$$

б) обобщенными координатами служат x и y. Дифференцируя гамильтониан, приходим к следующим каноническим уравнениям:

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_y}{t x^2 y}\,; \quad \dot y = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_x}{t x^2 y}\,;$$

$$\dot p_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2 p_x p_y}{t x^3 y}\,; \quad \dot p_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{p_x p_y}{t x^2 y^2}\,.$$

3.21 Выразить скорость частицы через ее энергию E, если известен закон дисперсии: $p = f(E)$.

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением Гамильтона:

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p}.$$

А так как $\dfrac{\partial E}{\partial p} = \dfrac{1}{f'(E)}$, *то получаем выражение для скорости:*

$$v = \frac{1}{f'(E)}\,.$$

3.22 Найти функцию Гамильтона, если дана функция Лагранжа частицы m:

а) $L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$ – частица движется в стационарном силовом поле;

б) $L = -mc^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ – свободная релятивистская частица, движущаяся со скоростью v.

Решение. Функция Гамильтона механической системы выражается через лагранжиан по формуле

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\,,$$

причем все скорости должны быть выражены через импульсы и координаты.

а) Запишем полную механическую энергию частицы:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)\,.$$

С помощью функции Лагранжа выразим скорости через импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\,; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\,; \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\,,$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}; \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}; \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

Подставим эти выражения в формулу для энергии, получим искомый гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

б) С помощью функции Лагранжа выразим импульс релятивистской частицы:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Найдем отсюда скорость частицы:

$$v = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}};$$

тогда

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv}{p} = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}.$$

Тогда гамильтониан имеет вид:

$$H = pv - L = \frac{p^2c}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} + mc^2\frac{mc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = E.$$

Мы получили хорошо известную релятивистскую формулу, связывающую энергию и импульс частицы массой m.

3.23 Найти функцию Лагранжа, если дана функция Гамильтона:

$$H = \ln p_x + p_x + \frac{p_y}{2}.$$

Решение. Функция Лагранжа может быть выражена через гамильтониан с помощью соотношения:

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H,$$

причем все импульсы следует заменить на скорости. Таким образом находим:

$$L = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \ln p_x - p_x - \frac{p_y^2}{2}\,. \qquad (1)$$

Из канонических уравнений Гамильтона получим связь скоростей с соответствующими импульсами:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{p_x} + 1\,,$$

откуда

$$p_x = \frac{1}{\dot{x} - 1}\,, \qquad (2)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y\,. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$L = \frac{\dot{x}}{\dot{x}-1} + \dot{y}^2 + \ln(\dot{x}-1) - \frac{1}{\dot{x}-1} - \frac{\dot{y}^2}{2} = 1 + \frac{\dot{y}^2}{2} + \ln(\dot{x}-1)\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.24 Написать канонические уравнения Гамильтона, если функция Гамильтона имеет вид:

а) $H = \sqrt{1+p^2} + r\,.$

б) $H = \dfrac{(p-r^2)^2}{2}\,.$

3.25 Найти функцию Гамильтона, если дана функция Лагранжа:

$$L = \frac{x\dot{y}^2}{2} + \ln\dot{x}\,.$$

3.26 Найти функцию Лагранжа по заданной функции Гамильтона:

$$H = \frac{p_x^2 t}{2} + p_x p_y.$$

4 Некоторые задачи механики

4.1 Малые колебания

4.1 Пружина AB (рисунок 58), закрепленная одним концом в точке A, такова, что для удлинения ее на $\Delta x = 1$ см необходимо приложить в точке B статическую нагрузку $F = 0.196$ Н. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C массой $m = 100$ г и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, приняв за начальное положение статическое равновесие гири.

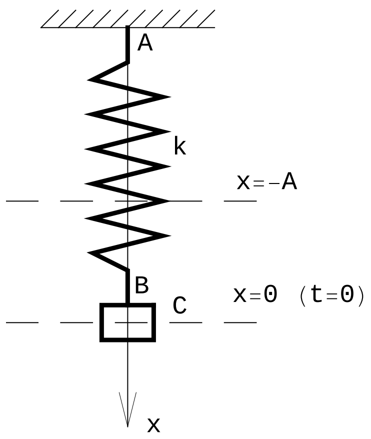

Рисунок 58

Решение. Тело C будет совершать гармонические колебания около положения равновесия, совпадающего с началом отсчета оси OX на рисунке 58. Коэффициент жесткости пружины:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = 19.6\,Н/м\,.$$

Частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14\,c^{-1}\,.$$

Из условия равновесия находим амплитуду колебаний: $mg = kA$, откуда *амплитуда*

$$A = \frac{mg}{k} = 0.05\,\textit{м}\,.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.45\,\textit{с}\,.$$

Запишем закон колебаний в общем виде:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha),$$

где α *– начальная фаза. Подчиним начальному условию:*

$$t = 0\,, \qquad x = -A\,;$$

получим:

$$-A = A\cos\alpha\,,$$

откуда $\alpha = \pi$. *Окончательное уравнение колебаний принимает вид:*

$$x(t) = -0.05\cos 14t\,.$$

4.2 Груз, падая с высоты $h = 1$ м без начальной скорости, ударяется об упругую горизонтальную балку в ее середине, концы балки закреплены. Написать уравнение дальнейшего движения груза на балке относительно оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза на балке, если статический прогиб балки в ее середине при указанной нагрузке $L_0 = 0.5$ см; массой балки пренебречь.

Решение. Изобразим на чертеже заданную ось и статический прогиб балки (рисунок 59). Запишем условие статического равновесия:

$$mg = kl_0\,, \tag{1}$$

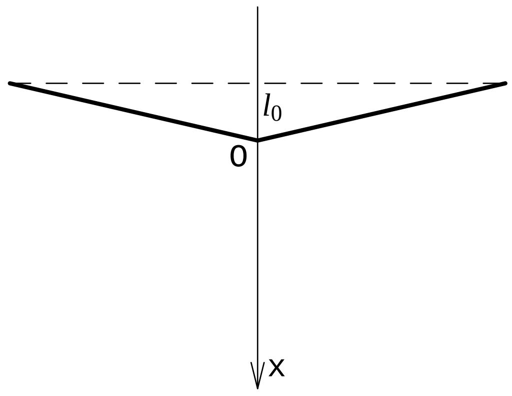

Рисунок 59

где m – масса груза, k – коэффициент жесткости балки. Из (1) находим частоту колебаний балки с грузом

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l_0}} = 44.3\, c^{-1}\,.$$

Общий вид уравнения движения груза на балке:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,, \tag{2}$$

причем постоянные A и B определяются из начальных условий:

$$t = 0 \quad x = -l_0 \quad \dot{v}_0 = \sqrt{2gh} = 4.43\, м/c\,.$$

(по закону сохранения энергии для падающего на балку груза). С учетом этих условий получаем:

$$A = l_0\,, \quad b = \frac{v_0}{\omega}\,.$$

Поэтому уравнение движения (2) приобретает окончательный вид

$$x(t) = (-0.5\cos 44.3t + 10\sin 44.3t)\, см\,.$$

4.3 Найти период свободных вертикальных колебаний корабля в спокойной воде, если масса корабля m, площадь его горизонтального сечения S

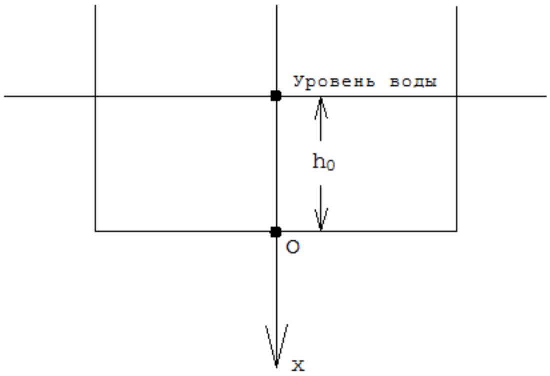

Рисунок 60

и не зависит от высоты сечения; плотность воды ρ. Вязкостью воды пренебречь.

Решение. Изобразим на чертеже статическое положение корабля в воде, выбрав начало отсчета вертикальной оси на уровне днища корабля (рисунок 60). При таком выборе начала на корабль во время колебаний будет действовать вертикальная сила, равная по величине

$$F = \rho g S \Delta x = k \Delta x \,,$$

где Δx – вертикальное смещение корабля в заданный момент. Коэффициент пропорциональности $k = \rho g S$ играет здесь роль «коэффициента упругости»системы. Отсюда искомый период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}} \,.$$

4.4 В условиях предыдущей задачи найти уравнение движение корабля, если он был спущен на воду с нулевой вертикальной скоростью.

Решение. Считаем вертикальную ось x направленной вниз (рисунок 60). Уравнение вертикальных колебаний корабля имеет в общем случае вид:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \,,$$

где величины A и φ должны быть определены из начальных условий задачи; частота колебаний (см. решение предыдущей задачи):

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}\,.$$

Начальные условия (рисунок 60):

$$t = 0\,, \quad x = -h_0\,; \quad \dot{x} = 0.$$

Начальное смещение h_0 найдем из условия равновесия:

$$\rho g S h_0 = mg\,,$$

откуда

$$h_0 = \frac{m}{\rho S}\,.$$

С учетом заданных начальных условий находим:

$$A = -h_0 = -\frac{mg}{S}\,; \quad \varphi = 0\,.$$

Таким образом, уравнение вертикальных колебаний корабля:

$$x(t) = -\frac{m}{\rho S}\cos\sqrt{\frac{\rho g S}{m}}\cdot t\,.$$

4.5 Определить период свободных колебаний груза весом P, прикрепленного к двум параллельно расположенным пружинам (рисунок 61), и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости k_1 и k_2, одинаковы.

Решение. Запишем условие равновесия для груза P:

$$P = k_1\Delta l + k_2\Delta l = (k_1 + k_2)\Delta l\,,$$

где

$$\Delta l$$

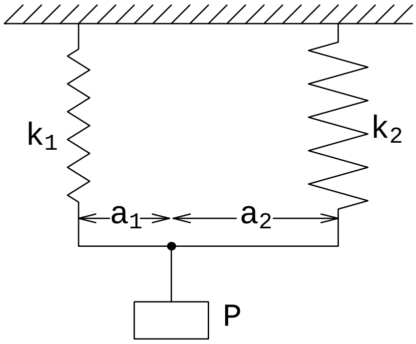

Рисунок 61

– общее удлинение пружин. Отсюда ясно, что две параллельные пружины эквивалентны одной пружине с коэффициентом жесткости

$$k = \frac{P}{\Delta l} = k_1 + k_2 \,.$$

Из правила рычага следует, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_2 \Delta l}{k_1 \Delta l} = \frac{k_2}{k_1} \,.$$

Период колебаний груза, очевидно, равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{p}{(k_1 + k_2)g}} \,.$$

4.6 Определить период свободных колебаний груза весом P, расположенного между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости k_1 и k_2 (рисунок 62).

Решение. При любом вертикальном смещении груза P одна из пружин растягивается, а другая сжимается; результирующая сила упругости равна сумме модулей сил упругости обеих пружин. Отсюда получаем условие равновесия груза:

$$P = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l = (k_1 + k_2) \Delta l \,,$$

где Δl – сжатие одной пружины и растяжение другой. Поэтому две данные

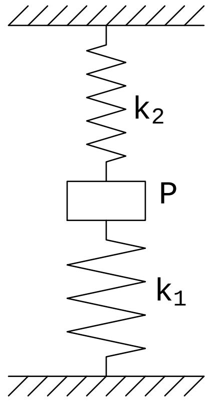

Рисунок 62

пружины эквивалентны одной с жесткостью

$$k = \frac{P}{\Delta l} = k_1 + k_2 \,.$$

Следовательно, период колебаний груза

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{P}{kg}} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{(k_1 + k_2)g}} \,.$$

4.7 Пластинка D массой $m = 100$ г, подвешенная на пружине в неподвижной точке A, движется между полюсами магнита (рисунок 63). Вследствие вихревых токов движение тормозится силой, пропорциональной скорости: $F_c = bv\Phi^2$ ньютон, где $b = 10^9$ кг/(Вб^2 с); v – скорость в м/с; Φ – магнитный поток в веберах между полюсами N и S. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута; удлинение ее на 1 см получается при статическом подвесе в 20 г. Определить движение пластинки в том случае, когда $\Phi = 10^{-5} \cdot \sqrt{5}$ Вб.

Решение. Запишем уравнение движения пластинки:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}\Phi^2 \,, \tag{1}$$

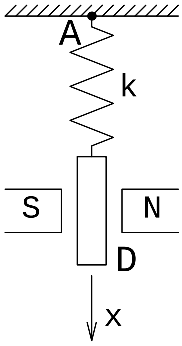

Рисунок 63

где k – коэффициент жесткости пружины:

$$k = \frac{m_{cm} g}{\Delta l_{cm}} = \frac{0.02 \cdot 9.8}{0.01} = 19.6\,(H/м)\,.$$

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{2}$$

где обозначено:

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{19.6}{0.1}} = 14(c^{-1})$ *– собственная частота колебаний пластинки (с такой частотой пластинка колебалась бы при отсутствии торможения);*

$\delta = \dfrac{b\Phi^2}{2m} = \dfrac{10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 0.1} = 2.5\ (c^{-1})$ *– коэффициент затухания.*

Поскольку $\omega > \delta$, то решением уравнения (2) будут затухающие колебания с частотой $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = 13.78\ c^{-1}$;

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t)\,, \tag{3}$$

и постоянные C_1 и C_2 необходимо, как обычно, искать с помощью начальных условий:

$$t = 0\,, \quad x = x_0 = -\frac{mg}{k} = -5\,см\,, \quad v_0 = 0\,.$$

Скорость пластины в произвольный момент времени:

$$\dot{x}(t) = -\delta e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t) - \omega_1 e^{-\delta t}(C_1 \sin\omega_1 t - C_2 \cos\omega_1 t)\,; \tag{4}$$

подчиняя (3) и (4) вышеуказанным начальным условиям, находим:

$$\begin{cases} C_1 = x_0 = -5\,\text{см} \\ C_2 = \dfrac{\delta}{\omega_1} \cdot C_1 = -0.907\,\text{см} \end{cases}.$$

Окончательный вид закона колебаний

$$x(t) = -e^{-2.5t}(5\cos 13.78t + 0.907\sin 13.78t)\,\text{см}.$$

4.8 Определить движение пластинки D из предыдущей задачи в том случае, когда магнитный поток $\Phi = 10^{-14}$ Вб.

Решение. В этом случае, очевидно, коэффициент затухания δ будет больше, чем в предыдущей задаче:

$$\delta = \frac{b\Phi^2}{2m} = \frac{10^9 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 0.1} = 50\,(c^{-1}).$$

Поскольку теперь $\delta > \omega$, то сильное затухание не позволит развиться колебаниям, и пластинка будет совершать апериодическое движение по закону

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}\,;$$

вычисление дает: $\lambda_1 = -2\ c^{-1}$; $\lambda_2 = -98\ c^{-1}$. Скорость пластинки в определенный момент времени описывается выражением:

$$\dot{x}(t) = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{2}$$

Подчиняя (1) и (2) начальным условиям из предыдущей задачи, находим постоянные интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 = -\frac{245}{48}\,; \quad C_2 = \frac{5}{48}.$$

Подставляя эти значения в (1), получим искомый закон движения пластины в апериодическом процессе:

$$x(t) = -\frac{5}{48}e^{-98t}(49e^{96t} - 1)\,\textit{см}.$$

4.9 На пружине с коэффициентом жесткости $k = 19.6$ Н/м подвешен магнитный стержень массой $m = 100$ г (рисунок 64). Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i(t) = 20\sin 8\pi t$ ампер. Ток идет с момента $t = 0$, втягивая стержень в соленоид; до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой описывается равенством $F = 16\pi \cdot 10^{-5} i$ ньютон. Определить внутренние колебания магнита.

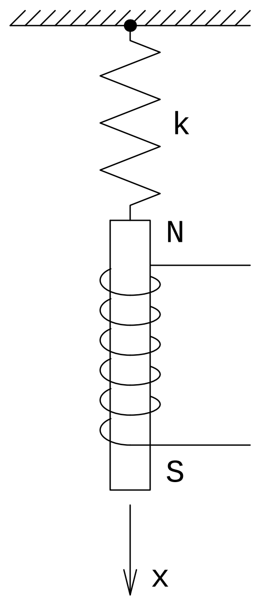

Рисунок 64

Решение. Уравнение движения магнита имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = F(t)\,,$$

где вынуждающая сила F зависит от времени по закону

$$F(t) = 16\pi \cdot 10^{-5} i(t) = 3.2 \cdot 10^{-3} \pi \sin 8\pi t = F_0 \sin \omega t\,.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t\,, \tag{1}$$

где $\omega_0 = \dfrac{k}{m}$ *– частота собственных колебаний стержня,* ω *– частота вынуждающей силы.*

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1), как известно, есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \sin \omega t\,. \tag{2}$$

Для нахождения постоянных C_1 *и* C_2 *воспользуемся начальными условиями:*

$$t = 0\,, \qquad x = x_0 = -\frac{mg}{k} = -5\,\textit{см}; \qquad \dot{x} = v_0 = 0\,.$$

Имеем:

$$C_1 = x_0 = 5\,\textit{см}; \qquad C_2 = -\frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\,,$$

где численные значения входящих в последнее выражение величин составляют: $\omega = 8\pi$ c^{-1}; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14\,c^{-1}$; $F_0 = 3.2 \cdot 10^{-3}\pi$ *Н. Подстановка этих значений дает:* $C_2 = 0.041$ *см. Таким образом, закон вынужденных колебаний магнита принимает вид:*

$$x(t) = (-0.023 \sin 8\pi t - 5 \cos 14t + 0.041 \sin 14t)\,\textit{см}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.10 При равномерном спуске груза массой $m = 2$ т (рисунок 65) со скоростью $v = 5$ м/с из-за защемления троса в обойме блока произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором спускался груз, Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $k = 3.92 \cdot 10^6$ Н/м.

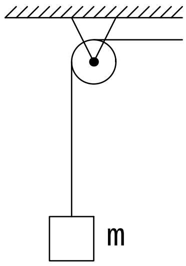

Рисунок 65

4.11 Определить наибольшее натяжение троса в предыдущей задаче, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $k_1 = 3.92 \cdot 10^5$ Н/м.

4.12 Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если масса фундамента с машиной $m = 90$ т, площадь подошвы фундамента $S = 15$ м^2, коэффициент жесткости грунта дается формулой $k = \lambda S$, где $\lambda = 2.94 \cdot 10^2$ Н/м^3.

4.13 К пружине с коэффициентом жесткости $k = 19.6$ Н/м подвешены один под другим два груза: $m_1 = 0.5$ кг и $m_2 = 0.8$ кг. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз m_2 (нижний) убрали. Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний оставшегося груза.

4.14 Определить коэффициент жесткости k пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно соединенных пружин с разными коэффициентами жесткости k_1 и k_2, и найти период колебаний груза массы m, подвешенного на указанной двойной пружине.

4.15 Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно соединенных пружин с разными коэффициентами жесткости $k_1 = 980$ Н/м и $k_2 = 2940$ Н/м. Найти период колебаний, амплитуду и уравнение колебаний груза массой $m = 5$ кг, подвешенного на указанной пружине, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 5 см вниз и ему была сообщена начальная скорость $v_0 = 0.49$ м/с, также направленная вниз.

4.16 Под действием силы сопротивления, пропорциональной скорости $F_c = \alpha v$, тело массы m, подвешенное к пружине жесткости k, совершает затухающие колебания. Определить, во сколько раз период затухающих колебаний T больше периода незатухающих колебаний T_0, если отношение $\dfrac{\alpha}{2m\omega_0} = 0.1$.

4.17 Тело массой $m = 5$ кг подвешено на пружине с коэффициентом жесткости $k = 1960$ Н/м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех колебаний уменьшилась в 12 раз. Определить период колебаний и логарифмический декремент затухания.

4.18 В условиях задачи 4.9 найти закон движения магнитного стержня, если ему в положении статического равновесия сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ см/с.

4.2 Кеплерово движение

4.19 Планета массы m движется по эллипсу вокруг Солнца так, что ее наименьшее расстояние от Солнца (перигелий) равно r_1, а наибольшее (афелий) r_2. Найти момент импульса этой планеты относительно центра Солнца. Массу солнца $M_\odot$ считать известной.

Решение. Как известно из теории конических сечений, расстояния r_1 и r_2 от одного из фокусов эллипса до его крайних точек выражаются через его большую полуось a и эксцентриситет e следующими формулами:

$$r_1 = a(1-e)\,; \qquad r_2 = a(1+e)\,.$$

При этом величины a и e определяются соотношениями:

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}\,; \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\,;$$

где α – коэффициент в выражении для центральной силы:

$$F = -\frac{\alpha}{r^2}\,;$$

в случае гравитационной силы:

$$\alpha = GmM_\odot;$$

E – полная механическая энергия планеты (в случае финитного движения $E < 0$); L – момент импульса планеты. Из этих соотношений находим:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1-e}{1+e}\,; \qquad r_1 + r_2 = 2a = -\frac{\alpha}{E}.$$

Выразим эксцентриситет эллипса:

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} = \left(\frac{1 - \dfrac{r_1}{r_2}}{1 + \dfrac{r_1}{r_2}}\right)^2\,;$$

Отсюда момент импульса планеты:

$$L = m\sqrt{\frac{2GM_{\odot}r_1r_2}{r_1 + r_2}}\,.$$

4.20 Два метеорита M_1 и M_2 описывают один и тот же эллипс, в фокусе которого O находится Солнце (рисунок 66). Расстояние между метеоритами столь мало, что дугу M_1M_2 эллипса можно считать отрезком прямой. Известно, что расстояние $M_1'M_2'$ равнялось s, когда середина его находилась в перигелии P. Определить расстояние $M_1''M_2''$, когда середина его будет проходить через афелий A, если $OP = R_1$, и $OA = R_2$.

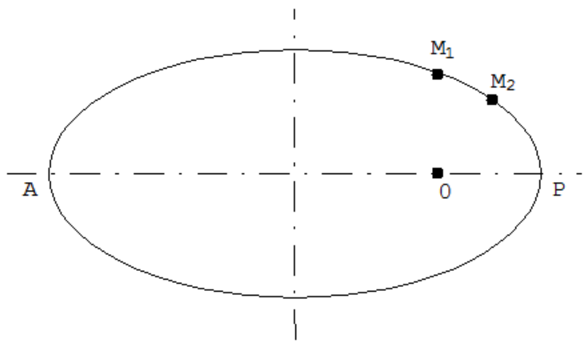

Рисунок 66

Решение. Воспользуемся вторым законом Кеплера, согласно которому секториальная скорость при движении в центральном поле остается постоянной. Для нашего случая это означает, что площади треугольников $OM_1'M_2'$ и $OM_1''M_2''$ равны:

$$M_1'M_2' \cdot R_1 = M_1''M_2'' \cdot R_2\,,$$

то есть $S \cdot R_1 = M_1''M_2''R_2$, откуда искомое расстояние

$$M_1''M_2'' = \frac{R_1}{R_2} \cdot S\,.$$

4.21 Частица массы $m = 20$ г, движущаяся под действием гравитационного притяжения к неподвижному центру, описывает полный эллипс с полуосями $a = 10$ см и $b = 8$ см за время $T = 50$ с. Определить наибольшую и наименьшую величину силы притяжения F при этом движении.

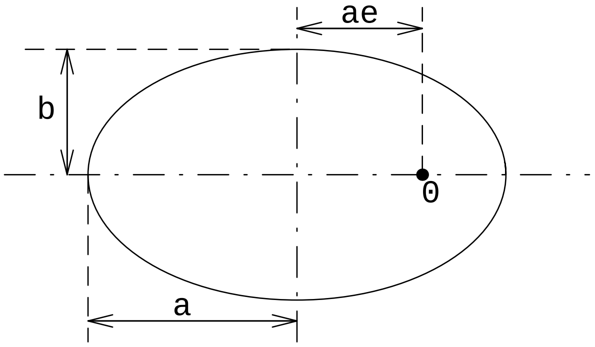

Рисунок 67

Решение. Изобразим на чертеже (рисунок 67) эллиптическую траекторию частицы. Воспользуемся известным соотношением:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}\,, (1)$$

где е – эксцентриситет эллипса. Как видно из рисунка 67, наименьшее и наибольшее расстояния от частицы до центра притяжения О равны соответственно:

$$R_{min} = a(1 - e)\,; \qquad R_{max} = a(1 + e)\,. \tag{2}$$

Согласно 3-му закону Кеплера, период обращения частицы дается формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}\,, \qquad (3)$$

где M – масса тяготеющего центра O. Из (3) следует, что

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\,. \tag{4}$$

Выразим эксцентриситет с помощью (1):

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0.6\,.$$

Вычислим R_{min} и R_{max} согласно (2):

$$R_{max} = 0.04\,\text{м}\,; \qquad R_{max} = 0.16\,\text{м}\,.$$

Отсюда находим значения F_{min} и F_{max}.

$$F_{min} = \frac{GmM}{R_{max}^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 R_{max}^2} = 1.2 \cdot 10^{-5}\,H\,;$$

$$F_{max} = \frac{GmM}{R_{min}^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 R_{min}^2} = 19.7 \cdot 10^{-5}\,H\,.$$

4.22 На какой высоте H нужно запустить круговой спутник Земли, обращающийся в плоскости экватора, для того, чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом на поверхности Земли?

Решение. Из условия задачи ясно, что период обращения спутника на орбите должен быть равен периоду вращения Земли вокруг своей оси, то есть $T = 24$ часа = 86400 с (так называемый геостационарный спутник). С другой стороны, из 3-го закона Кеплера имеем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2}{GM}}\,,$$

где $a = R + H$, R – радиус Земли; M – масса Земли.

Принимая во внимание формулу $GM = gR^2$, где $g = 9.8$ м/с^2 – гравитационный потенциал на поверхности Земли, формулу для периода T можем переписать в виде:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+H)^3}{gR^2}}\,,$$

откуда находим высоту спутника над земной поверхностью:

$$H = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R \approx 35800\,\text{км}\,.$$

Здесь учтено, что радиус Земли $R = 6370$ км.

4.23 Определить отношение массы Марса к массе Земли по параметрам орбиты автоматической станции «Марс-2»: максимальное удаление от поверхности Марса $r_{max} = = 25000$ км, минимальное $r_{min} = 1380$ км, период обращения вокруг Марса $T = 18$ час. Радиус Марса $R_M = 3400$ км, радиус Земли $R_З = 6400$ км.

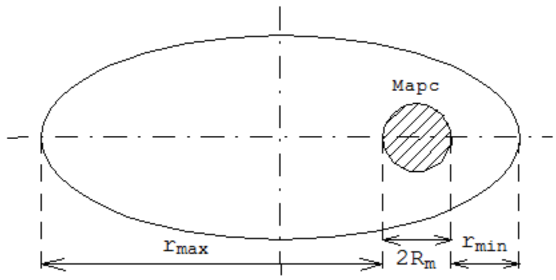

Рисунок 68

Решение. Согласно 1-му закону Кеплера, станция обращается вокруг Марса по эллиптической орбите (рисунок 68). Выразим период обращения станции вокруг Марса с помощью 3-го закона Кеплера:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_M}},$$

где $a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min} + 2R_M)$ – большая полуось орбиты станции. Отсюда выражаем массу Марса:

$$M_M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{\pi^2}{2GT^2}(r_{max} + r_{min} + 2R_M)^3,$$

а ее отношение к массе Земли равно:

$$\frac{M_M}{M_З} = \frac{\pi^2(r_{max} + r_{min} + 2R_M)^3}{2gT^2R_З^2} \approx 0.11\,.$$

Здесь учтено соотношение (см. предыдущую задачу): $GM_З = gR_З^2$.

4.24 Определить, при какой высоте H круговой орбиты спутника его потенциальная энергия относительно поверхности планеты радиуса R равна его кинетической энергии.

Решение. Начало отсчета потенциальной энергии находится в бесконечно удаленной точке; тогда под потенциальной энергией спутника относительно поверхности планеты следует понимать разность

$$GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right),$$

которая, по условию, совпадает с его кинетической энергией:

$$GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right)=\frac{mv^2}{2}.$$

Скорость v спутника на круговой орбите радиуса $(R+H)$ может быть найдена из соотношения:

$$v=\frac{2\pi(R+H)}{T}=\sqrt{\frac{GM}{R+H}},$$

где использовано выражение для периода обращения спутника из 3-го закона Кеплера.

Объединим полученные выражения:

$$GmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right)=\frac{GM}{2(R+H)},$$

откуда искомая высота орбиты

$$H=\frac{R}{2}.$$

4.25 Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиуса $R=3R_З$, где $R_З=6400$ км – радиус Земли. В результате кратковременного действия тормозного двигателя скорость спутника уменьшилась так, что он начал двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли (рисунок 69). Через какое время после этого спутник приземлится?

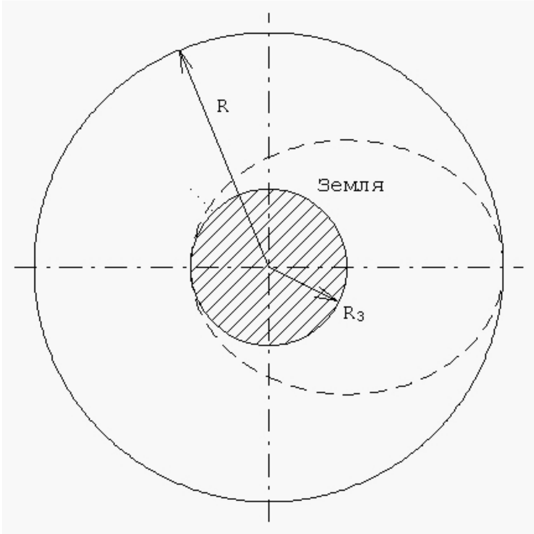

Рисунок 69

Решение. *Как видно из рисунка 69, большая полуось эллипса* $a = 2R_З$. *Время* t *до приземления равно, очевидно, половине периода обращения спутника по эллиптической орбите:*

$$t = \frac{T}{2}\,,$$

где, согласно 3-му закону Кеплера,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{gR_З^2}}\cdot a^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{gR_З^2}}\cdot\sqrt{8R_З^3}\,.$$

Следовательно, искомое время

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{2R_З}{g}} \approx 2\,\text{часа}\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.26 Определить, с какой скоростью войдет метеорит в земную атмосферу, если его скорость на бесконечности $v_\infty = 10$ км/с.

4.27 Искусственный спутник Земли запущен с экватора и движется по круговой орбите в плоскости экватора в направлении вращения Земли.

Радиус орбиты спутника $R = 3R_З$, где $R_З = 6400$ км – радиус Земли. Через какое время спутник в первый раз пройдет над точкой запуска?

4.28 Считая орбиты Земли и Луны приблизительно круговыми, найти отношение масс Земли и Солнца. Известно, что Луна совершает 13 обращений в течение года и что расстояние от Солнца до Земли в 390 раз больше расстояния от Луны до Земли.

4.29 Вычислить первую космическую скорость при старте с поверхности Юпитера, используя параметры спутника Юпитера Ганимеда, который движется практически по круговой орбите радиуса $R = 10^6$ км с периодом $T = 7.15$ сут. Радиус Юпитера $R_\infty = 70000$ км.

4.30 На какое максимальное расстояние от Солнца удаляется комета Галлея? Период обращения ее вокруг Солнца $T = 76$ лет, минимальное расстояние, на котором она проходит от Солнца, $R_{min} = 9 \cdot 10^7$ км. Радиус орбиты Земли $R_0 = 1.5 \cdot 10^8$ км.

4.31 Определить минимальный период обращения спутника нейтронной звезды, средняя плотность которой $\rho \approx 10^{17}$ кг/м^3.

4.32 Вычислить ускорение свободного падения (гравитационный потенциал) на поверхности Солнца, если известно, что радиус земной орбиты $R_0 = 1.5 \cdot 10^8$ км, радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^5$ км и время обращения Земли вокруг Солнца $T = 1$ год.

4.33 Найти расстояние R между компонентами двойной звезды, если их общая масса $M_1 + M_2 = 2M_C$, где M_C – масса Солнца, и звезды обращаются по круговым орбитам вокруг их общего центра масс с периодом $T = 2T_0$, где T_0 – продолжительность земного года. Расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1.5 \cdot 10^8$ км.

5 Элементы механики твердого тела

5.1 Тензор инерции

5.1 Найти связь между моментом инерции:

а) системы частиц, расположенных вдоль одной прямой (ротатор);

б) системы частиц, расположенных в одной плоскости.

Решение. По определению, тензор инерции твердого тела, рассматриваемого как совокупность дискретных частиц, в системе координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ *равен*

$$J_{ik} = \sum m(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k),$$

где i,j,k принимают значения 1, 2, 3, а суммирование ведтся по частицам тела (для упрощения записи индекс, нумерующий частицы, всюду опущен).

Запись тензора J_{ik} *имеет вид*

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

а) Выберем ось z вдоль линии расположения частиц; тогда для всех частиц $x = y = 0$, *и все компоненты тензора инерции обратятся в нуль, за исключением* $J_{11} = \sum mz^2$ *и* $J_{22} = \sum mz^2$. *А так как все недиагональные элементы равны нулю, то эти же величины* J_{11} *и* J_{22} *являются главными моментами инерции ротатора:*

$$J_1 = J_2 = \sum mz^2;$$

$$J_3 = 0.$$

б) Выберем ось z перпендикулярно плоскости расположения частиц; тогда для всех частиц $z = 0$. *Оси x и y выберем в плоскости частиц так,* *чтобы все недиагональные компоненты тензора инерции обратились в нуль, – при этом оси x и y будут главными осями инерции.*

Для главных моментов инерции получаем:

$$J_1 = \sum my^2;$$

$$J_2 = \sum mx^2;$$

$$J_3 = \sum m(x^2 + y^2) = J_1 + J_2.$$

5.2 Определить главные моменты инерции для системы из двух частиц массами $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$, отстоящих друг от друга на расстояние $l = 3$.

Решение. Выберем ось z вдоль прямой, соединяющей частицы, а начало отсчета выберем в центре масс системы (см. рисунок 70).

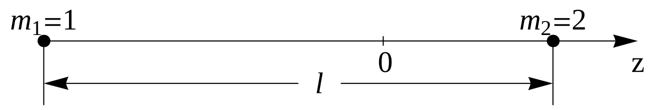

Рисунок 70

Обозначим координаты частиц z_1 и z_2, тогда из определения центра масс следует: $m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0$, или

$$z_1 + 2z_2 = 0.$$

Кроме того, из геометрии видно, что

$$z_2 - z_1 = 3.$$

Таким образом, имеем систему уравнений для нахождения неизвестных координат частиц z_1 и z_2:

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 0 \\ -z_1 + z_2 = 3 \end{cases},$$

решение которой: $z_1 = -2$, $z_2 = 1$.

Поскольку $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$, то отличные от нуля компоненты тензора инерции:

$$J_{11} = J_{22} = J_1 = J_2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

это и есть главные моменты инерции системы.

5.3 Определить главные моменты инерции для системы из трех частиц массами $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 3$, расположенных вдоль одной прямой на заданных расстояниях друг от друга, как показано на рисунке 71.

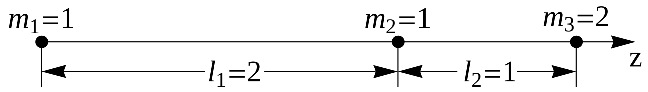

Рисунок 71

Решение. Снова выберем ось z вдоль прямой, на которой лежат частицы, а ее начало – в центре масс системы. По определению центра масс,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0,$$

или

$$z_1 + z_2 + 2z_3 = 0.$$

Кроме того, из геометрии можем записать еще два уравнения:

$$z_2 - z_1 = 2; \qquad z_3 - z_2 = 1.$$

Получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 2z_3 = 0 \\ -z_1 + z_2 \qquad\quad = 2 \\ \qquad -z_2 + \ z_3 = 1 \end{cases}$$

относительно трех неизвестных координат z_1, z_2, z_3.

Решая эту систему каким-либо способом, известным из алгебры (например, с помощью определителей), находим:

$$z_1 = -2; \qquad z_2 = 0; \qquad z_3 = 1.$$

Оси x и y выбираем так, чтобы все недиагональные компоненты тензора инерции обратились в нуль. Тогда, как и в предыдущей задаче, главными моментами инерции системы будут

$$J_1 = J_2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + m_3 z_3^2 = 6.$$

5.4 Определить главные моменты инерции для системы трех частиц массами $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника (см. рисунок 72).

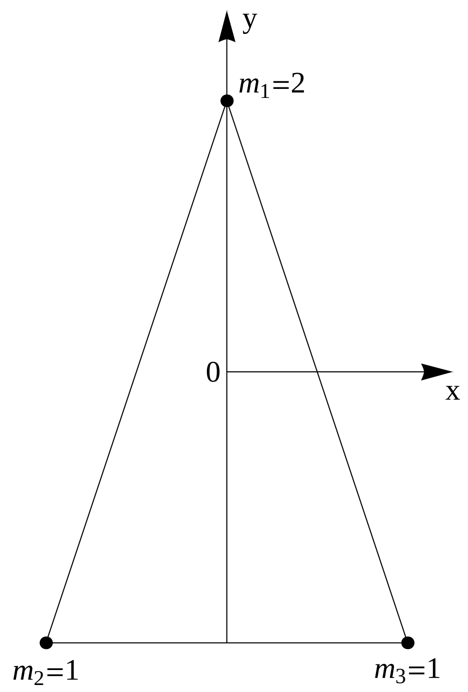

Рисунок 72

Основание треугольника равно 2, его высота равна 6.

Решение. Пусть все три частицы лежат в плоскости $z = 0$. Ось x выберем параллельно основанию треугольника, ось y – вдоль его высоты, как показано на рисунке 72. Начало координат – в центре масс системы.

Чтобы определить координаты частиц по отношению к центру масс, составим систему уравнений: $m_2x_2 + m_3x_3 = 0$ *или* $x_2 + x_3 = 0$, $m_1y_1 + n_2y_2 + m_3y_3 = 0$ *или* $2y_1 + y_2 + y_3 = 0$. *Кроме того,* $x_3 - x_2 = 2$, $y_1 - y_2 = y_1 - y_3 = 3$. *Система уравнений*

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - y_2 \quad = 0 \\ y_1 \quad - y_3 = 3 \end{cases}$$

Решение этой системы $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $y_1 = 3/2$, $y_2 = -3/2$, $y_3 = -3/2$, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$.

В выбранной системе координат компоненты тензора инерции равны:

$$J_{11} = m_1(y_1^2 + z_1^2) + m_2(y_2^2 + z_2^2) + m_3(y_3^2 + z_3^2) = 2 \cdot \frac{9}{4} + 1 \cdot \frac{9}{4} + 1 \cdot \frac{9}{4} = 9;$$

$$J_{22} = m_1(x_1^2 + z_1^2) + m_2(x_2^2 + z_2^2) + m_3(x_3^2 + z_3^2) = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2;$$

$$J_{33} = m_1(x_1^2+y_1^2)+m_2(x_2^2+y_2^2)+m_3(x_3^2+y_3^2) = 2\cdot(0+\frac{9}{4})+1\cdot(1+\frac{9}{4})+1\cdot(1+\frac{9}{4}) = 11;$$

$$J_{12} = -(m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2 + m_3x_3y_3) = -(0 + (-1) \cdot (-\frac{3}{2}) + 1 \cdot (-\frac{3}{2})) = 0;$$

$$J_{13} = -(m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 + m_3x_3z_3) = 0;$$

$$J_{23} = -(m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 + m_3y_3z_3) = 0.$$

Поскольку в выбранной системе координат все недиагональные компоненты тензора J_{ik} *равны нулю, то* $J_1 = J_{11}$, $J_2 = J_{22}$ *и* $J_3 = J_{33}$ *суть главные моменты инерции исходной системы.*

5.5 Определить главные моменты инерции из системы трех частиц массами $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, расположенных в вершинах прямоугольного треугольника (см. рисунок 73). Длины катетов треугольника 1 и 2.

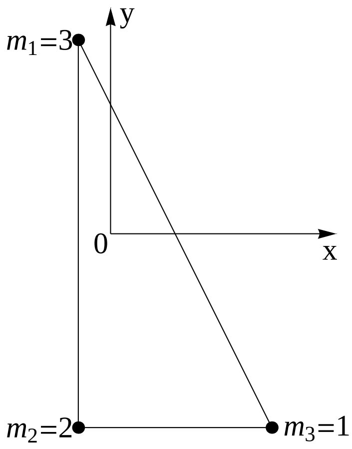

Рисунок 73

Решение. Выбираем оси x и y параллельно катетам треугольника, ось z – перпендикулярно его плоскости, начало координат O – в центре масс.

Определение центра масс приводит к уравнениям:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0;$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 = 0;$$

или

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0;$$

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0.$$

Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$x_3 - x_2 = x_3 - x_1 = 1;$$

$$y_1 - y_2 = y_1 - y_3 = 2.$$

Решая эти уравнения совместно, находим координаты частиц системы:

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{6}; \qquad x_3 = \frac{5}{6};$$

$$y_1 = 1; \qquad y_2 = y_3 = -1;$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

С учетом этого можем подсчитать все компоненты тензора J_{ik}*:*

$$J_{11} = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + m_3 y_3^2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6;$$

$$J_{22} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 3 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{25}{36} = \frac{5}{6};$$

$$J_{33} = m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + m_3(x_3^2 + y_3^2) = J_{11} + J_{22} = \frac{41}{6};$$

$$J_{12} = -(m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3) =$$

$$= -\left(3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot (-1)\right) = 1;$$

$$J_{21} = J_{12} = 1,$$

все остальные компоненты тензора инерции равны нулю.

Таким образом, матрица тензора J_{ik} *имеет вид:*

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{6} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти главные моменты инерции J_1, J_2, J_3, *надо привести эту матрицу к диагональному виду. Для этого составим и решим вековое уравнение:*

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{6}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{6}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

После раскрытия определителя получается уравнение относительно λ*:*

$$\left(\frac{41}{6} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{41}{6}\lambda + 4\right) = 0,$$

корни которого и есть главные моменты инерции J_1, J_2, J_3*:*

$$\lambda_1 = \frac{41}{6}; \qquad \lambda_2 = \frac{41 + \sqrt{1105}}{12};$$

$$\lambda_3 = \frac{41 - \sqrt{1105}}{12}.$$

Следовательно, главные моменты инерции исходной системы

$$J_1 = \frac{41}{6};$$

$$J_2 = \frac{41 + \sqrt{1105}}{12};$$

$$J_3 = \frac{41 - \sqrt{1105}}{12}.$$

5.6 Определить главные моменты инерции для системы из пяти частиц массами $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 1$, образующие правильную четырехугольную пирамиду (см. рисунок 74). Сторона основания пирамиды равна 1, ее высота 2.

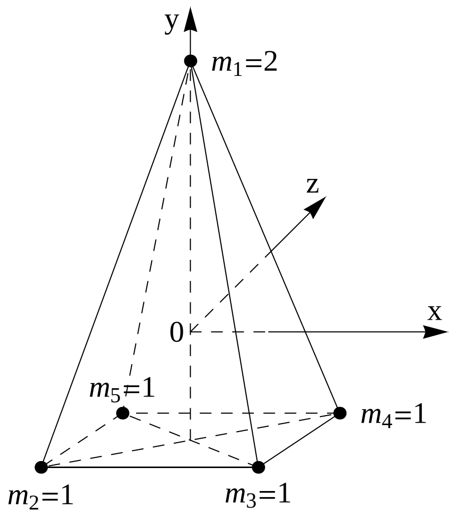

Рисунок 74

Решение. Очевидно, что центр масс системы лежит в некоторой точке O, расположенной на высоте пирамиды. Выберем точку O за начало координат, ось z направим вверх вдоль высоты пирамиды, тогда плоскость xy будет параллельна плоскости ее основания. Пусть оси x и y направлены параллельно сторонам основания, как показано на рисунке 74.

Из соображений симметрии можем сразу записать:

$$x_1 = y_1 = 0; \qquad x_2 = x_5 = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = x_4 = \frac{1}{2}; \qquad y_2 = y_3 = -\frac{1}{2};$$

$$y_4 = y_5 = \frac{1}{2}; \qquad z_2 = z_3 = z_4 = z_5 \equiv z_i.$$

Для нахождения z_i *воспользуемся определением центра масс:*

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + m_4 z_4 + m_5 z_5 = 0,$$

или

$$2z_1 + 4z_i = 0; \qquad z_1 + 2z_i = 0.$$

Кроме того, из геометрии $z_1 - z_2 = 2$. *Их двух последних уравнений находим:*

$$z_1 = \frac{4}{3}; \qquad z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, компоненты тензора инерции системы:

$$J_{11} = m_1\left(y_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(y_2^2 + z_2^2\right) + m_3\left(y_3^2 + z_3^2\right) + m_4\left(y_4^2 + z_4^2\right) + m_5\left(y_5^2 + z_5^2\right) =$$
$$= 2 \cdot \left(0 + \frac{16}{9}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\right) = \frac{19}{3};$$
$$J_{22} = m_1\left(x_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(x_2^2 + z_2^2\right) + m_3\left(x_3^2 + z_3^2\right) + m_4\left(x_4^2 + z_4^2\right) + m_5\left(x_5^2 + z_5^2\right) =$$
$$= 2 \cdot \left(0 + \frac{16}{9}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\right) = \frac{19}{3} = J_{11};$$
$$J_{33} = m_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + m_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + m_3\left(x_3^2 + y_3^2\right) + m_4\left(x_4^2 + y_4^2\right) + m_5\left(x_5^2 + y_5^2\right) =$$
$$= 2 \cdot (0 + 0) + 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2;$$
$$J_{12} = -\left(m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3 + m_4 x_4 y_4 + m_5 x_5 y_5\right) =$$
$$= -\left(2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\right) = 0;$$
$$J_{13} = -\left(m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + m_3 x_3 z_3 + m_4 x_4 z_4 + m_5 x_5 z_5\right) =$$
$$= -\left(2 \cdot 0 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \right.$$

$$+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\Bigg)=0;$$

$$J_{23}=-\left(m_1y_1z_1+m_2y_2z_2+m_3y_3z_3+m_4y_4z_4+m_5y_5z_5\right)=$$

$$=-\Bigg(2\cdot 0\cdot\frac{4}{3}+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+$$

$$+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\Bigg)=0.$$

Поскольку все недиагональные элементы матрицы J_{ik} оказались равными нулю, то найденные нами значения $J_{11}=J_1,\ J_{22}=J_2,\ J_{33}=J_3$ суть главные моменты инерции системы. А так как $J_1=J_2\neq J_3$, то рассматриваемая система есть симметрический волчок.

Задачи для самостоятельного решения

5.7 Определить главные моменты инерции сплошного однородного шара массы m и радиуса R.

5.8 Определить главные моменты инерции однородного кругового цилиндра массы m с радиусом основания R и высотой H.

5.9 Определить главные моменты инерции прямоугольного параллелепипеда массы m с длинами ребер a, b, c.

5.10 Определить главные моменты инерции кругового конуса массы m с радиусом основания R и высотой H.

5.2 Кинетическая энергия твердого тела

5.11 Определить частоту малых колебаний физического маятника (твердое тело, качающееся в поле силы тяжести около неподвижной горизонтальной оси) по следующим заданным величинам: масса M; главные моменты инерции J_1, J_2, J_3; углы α, β, γ главных осей инерции с осью вращения; расстояние l от оси вращения до центра масс.

Решение. Пусть O – ось вращения физического маятника, C – его центр масс (см. рисунок 75). В качестве переменной координаты введем угол φ между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра масс C на ось вращения O.

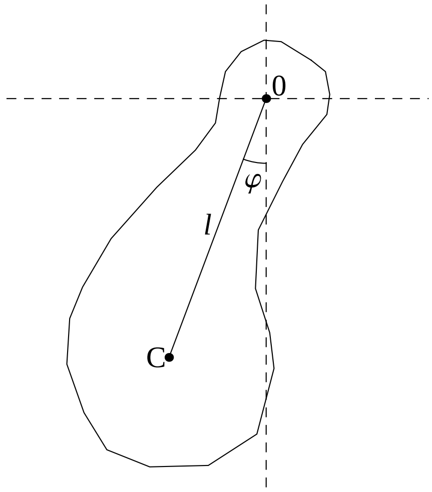

Рисунок 75

Кинетическая энергия твердого тела в общем случае есть сумма кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$T = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right),$$

где $\vec{V}$ – скорость центра масс тела, $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через центр масс.

В нашем случае $V = l\dot{\varphi}$, а проекции угловой скорости на главные оси инерции $\omega_1 = \dot{\varphi}\cos\alpha$, $\omega_2 = \dot{\varphi}\cos\beta$, $\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\gamma$. Тогда потенциальную энергию физического маятника можно записать в виде

$$U(\varphi) = Mgl(1 - \cos\gamma) = 2Mgl \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Так как угол φ по условию мал, то

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{4};$$

поэтому при малых колебаниях маятника его потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} M g l \varphi^2,$$

и функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} M l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma \right) \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} M g l \varphi^2.$$

Следовательно, частота колебаний физического маятника

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M g l}{M l^2 + J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \cos^2 \beta + J_3 \cos^2 \gamma}}$$

5.12 Найти кинетическую энергию системы, показанной на рисунке 76. Здесь ОА и АВ – Здесь ОА и АВ – тонкие однородные стержни длиной l, шарнирно скрепленные в точке А. Стержень ОА вращается (в плоскости рисунка) вокруг точки О, а конец В стержня АВ скользит вдоль оси x.

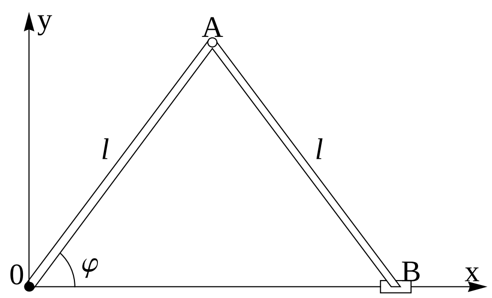

Рисунок 76

Решение. Найдем кинетические энергии каждого из двух стержней, имея в виду, что центр масс стержня расположен в его середине, а кинетическая энергия стержня складывается из кинетических энергий его поступательного и вращательного движений. Кинетическая энергия стержня ОА равна

$$T_1 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

где M – масса стержня, J – его момент инерции по отношению к центру масс, $V = \frac{l}{2}\dot{\varphi}$ – скорость поступательного движения центра масс. Таким образом,

$$T_1 = \frac{1}{8}Ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2.$$

Как видно из рисунка 76, координаты центра масс стержня AB

$$x = \frac{3l}{2}\cos\varphi; \qquad y = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

а компоненты его скорости

$$x = \frac{3l}{2}\cos\varphi; \qquad y = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

а компоненты его скорости

$$\dot{x} = -\frac{3l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi; \qquad \dot{y} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Так как угловая скорость вращения стержня AB вокруг своего центра масс также равна $\dot{\varphi}$, то его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} == \frac{Ml^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\varphi^2 + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

Принимая во внимание, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину, равен

$$J = \frac{Ml^2}{12},$$

получаем выражение для полной кинетической энергии системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Ml^2}{3}(1 + 3\sin^3\varphi)\dot{\varphi}^2.$$

5.13 Найти кинетическую энергию цилиндра (радиуса R), катящегося по плоскости. Масса M цилиндра распределена по его объему таким образом, что одна из главных осей инерции параллельна оси цилиндра и проходит на расстоянии a от нее; момент инерции относительно этой главной оси равен J.

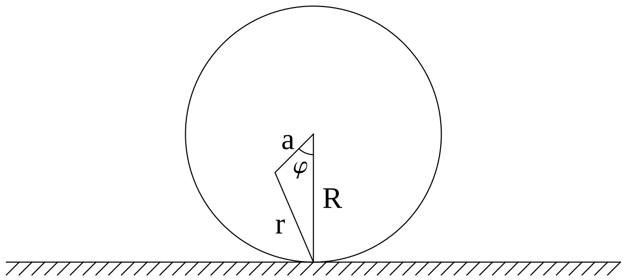

Рисунок 77

Решение. Введем угол φ (см. рисунок 77) между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра масс на ось цилиндра.

Движение цилиндра в каждый момент времени можно рассматривать как совокупность двух вращений: 1) вращения вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения цилиндра с неподвижной плоскостью, и 2) вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.

Угловая скорость каждого из этих вращений есть $\dot{\varphi}$, поскольку угловая скорость вращения твердого тела вокруг всех параллельных осей – одна и та же. Центр масс находится от мгновенной оси на расстоянии

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi};$$

тогда скорость перемещения центра масс относительно этой оси

$$V = r\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi},$$

поэтому кинетическая энергия первого из названных вращений

$$T_1 = \frac{MV^2}{2} = \frac{M}{2}\left(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2;$$

кинетическая энергия второго

$$T_2 = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия цилиндра

$$T = T_1 + T_2 = \frac{M}{2}\left(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}.$$

5.14 Найти кинетическую энергию однородного цилиндра радиуса a, катящегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R (см. рисунок 78). Масса цилиндра M.

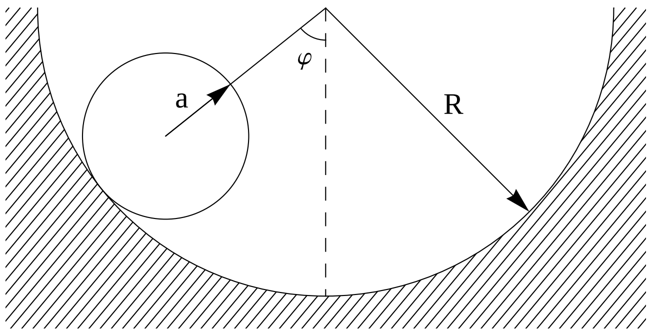

Рисунок 78

Решение. Пусть φ – угол между линией, соединяющей центры обоих цилиндров, и вертикалью (см. рисунок 78). Центр масс цилиндра находится на его оси, и его скорость

$$V = (R - a)\dot{\varphi}.$$

Угловая скорость есть скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения цилиндров; она равна

$$\omega = \frac{V}{a} = \frac{R - a}{\dot{\varphi}}.$$

Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{J_3\omega^2}{2},$$

где $J_3 = \frac{Ma^3}{2}$ – момент инерции сплошного однородного цилиндра относи-

тельно его оси (см. задачу 5.8). Получаем:

$$T = \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2(R-a)^2 + \frac{J_3}{2}\dot{\varphi}^2\frac{(R-a)^2}{a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\dot{\varphi}^2(R-a)^2 + \frac{Ma^2}{4}\dot{\varphi}^2\frac{(R-a)^2}{a^2} = \frac{3}{4}M\dot{\varphi}^2(R-a)^2.$$

5.15 Найти кинетическую энергию однородного конуса с углом раствора 2α, катящегося по плоскости. Масса конуса M, его центр масс отстоит от вершины на расстояние a.

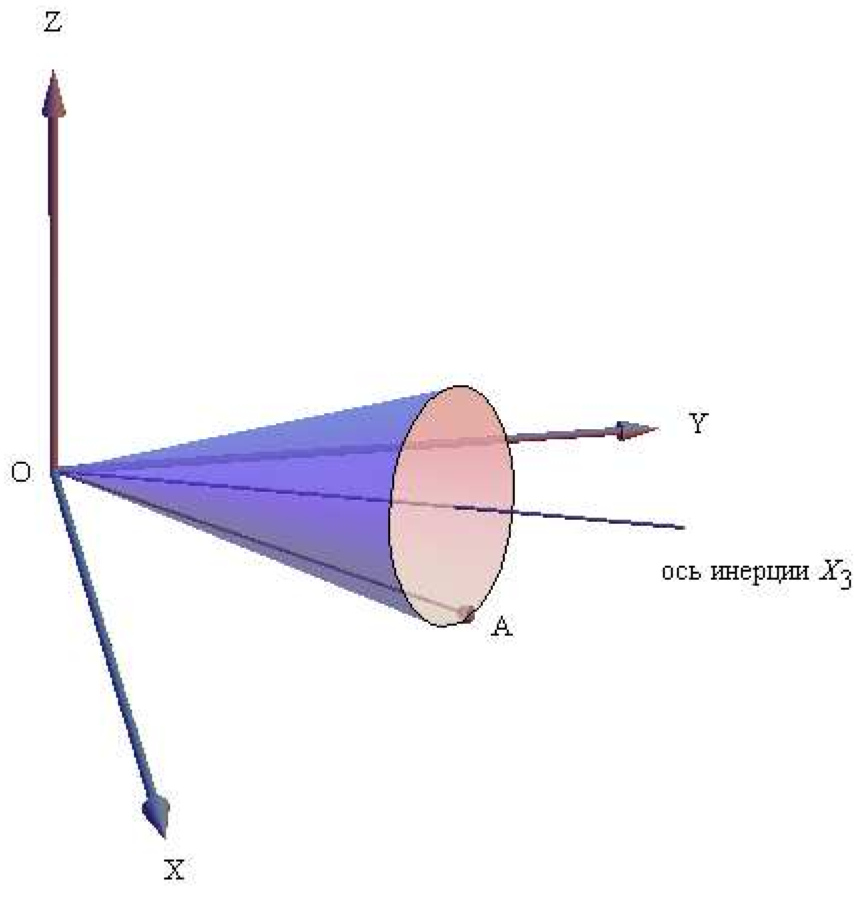

Рисунок 79

Решение. Изобразим конус в неподвижной системе координат XYZ (см. рисунок 79). Пусть θ – угол между линией OA соприкосновения конуса с плоскостью и каким-либо направлением в этой плоскости, например осью X.

Скорость центра масс $V = a\cos\alpha \cdot \dot{\theta}$; угловая скорость вращения конуса вокруг мгновенной оси OA:

$$\omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \dot{\theta} \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Одна из главных осей инерции (ось x_3 совпадает с осью конуса, а две другие – ей перпендикулярны. Выберем ось x_3 перпендикулярно оси конуса и линии OA; тогда проекции вектора $\vec{\omega}$ (направленного параллельно OA на главные оси инерции будут равны

$$\omega_1 = \omega\sin\alpha = \dot{\theta} \cdot \cos\alpha; \qquad \omega_2 = 0;$$

$$\omega_3 = \omega\cos\alpha = \dot{\theta} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

Кинетическая энергия конуса

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2} =$$

$$= \frac{Ma^2}{2}\cos^2\alpha \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{J_1}{2} \cdot \cos^2\alpha \cdot \dot{\theta}^2 + 0 + \frac{J_3}{2} \cdot \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \dot{\theta}^2.$$

Учтем, что для однородного конуса

$$J_1 = J_2 = \frac{3M}{20}\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right), \qquad J_3 = \frac{3}{10}MR^2.$$

(см. задачу 5.10), а также то, что

$$a = \frac{3}{4}H, \qquad R = H \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Подстановка в выражение для кинетической энергии дает:

$$T = \frac{3}{40}MH^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (1 + 5\cos^2\alpha).$$

5.16 Найти кинетическую энергию однородного конуса, основание которого по плоскости, а вершина постоянно находится в точке над плоскостью на высоте, равной радиусу R основания (так, что ось конуса параллельна плоскости). Угол раствора конуса 2α, центр масс отстоит от его вершины на расстояние a.

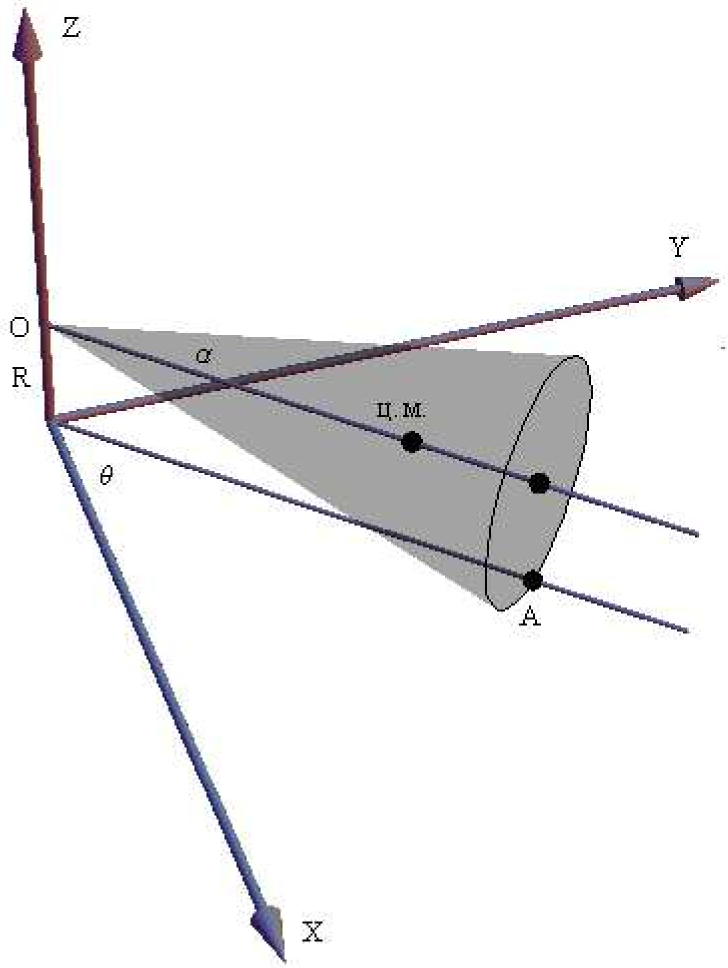

Рисунок 80

Решение. Изобразим катящийся конус в неподвижной системе координат XYZ (см. рисунок 80).

Пусть θ – угол между заданным направлением в плоскости (например, осью X) и проекцией оси конуса на эту плоскость, тогда скорость центра масс конуса

$$V = a \cdot \dot{\theta}.$$

Мгновенной осью вращения является образующая конуса ОА, проведенная в точку его соприкосновения с плоскостью. Центр масс отстоит от этой оси на расстояние $a \cdot \sin\alpha$, и потому угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси

$$\omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \frac{\dot\theta}{\sin\alpha}.$$

Как и в предыдущей задаче, ось x_2 выбираем перпендикулярно оси конуса x_3 и линии ОА; тогда проекции вектора $\vec\omega$ на главные оси инерции будет равна:

$$\begin{cases} \omega_1 &= \omega \cdot \sin\alpha = \dot\theta \\ \omega_2 &= 0 \\ \omega_3 &= \omega \cdot \cos\alpha = \dot\theta \cdot \operatorname{ctg}\alpha; \end{cases}.$$

Следовательно, кинетическая энергия катящегося конуса (M – его масса)

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{J_3\omega_3^2}{2} = \frac{Ma^2}{2}\cdot\dot\theta^2 + \frac{J_1}{2}\cdot\dot\theta^2 + 0 + \frac{J_3}{2}\cdot\dot\theta^2\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Учитывая выражения для главных моментов инерции однородного конуса

$$J_1 = J_2 = \frac{3M}{20}\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right); \qquad J_3 = \frac{3}{10}MR^2,$$

а также соотношение

$$a = \frac{3}{4}H; \qquad R = H\operatorname{tg}\alpha,$$

получаем окончательно:

$$T = \frac{3}{40}MH^2\dot\theta^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha + 5}\right).$$

5.17 Найти кинетическую энергию однородного трехосного эллипсоида, с массой M и полуосями a, b, c, вращающегося вокруг одной из своих осей (AB на рисунке 81), причем последняя сама вращается вокруг направления CD, перпендикулярно к ней и проходящего через центр эллипсоида.

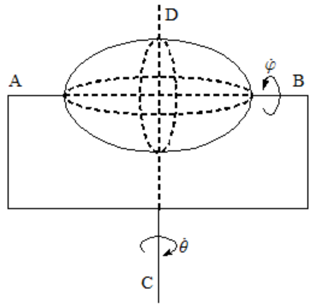

Рисунок 81

Решение. Пусть θ – угол поворота вокруг оси CD; ϕ – угол поворота вокруг оси AB (угол между CD и осью x_1, перпендикулярной к AB). Тогда проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ на главные оси инерции:

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\phi; \qquad \omega_2 = \dot{\theta}\sin\phi; \qquad \omega_3 = \dot{\phi}$$

(ось x_3 совпадает с AB).

Из соображений симметрии следует, что центр масс совпадает с центром эллипсоида, а его оси являются главными осями инерции. Известно, что главные моменты инерции эллипсоида равны

$$J_1 = \frac{M}{5}(b^2 + c^2); \qquad J_2 = \frac{M}{5}(a^2 + c^2); \qquad J_3 = \frac{M}{5}(a^2 + b^2).$$

Поскольку центр масс в данном случае неподвижен, то кинетическая энергия эллипсоида

$$T = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) = \frac{1}{2}(J_1\cos^2\phi + J_2\sin^2\phi)\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\phi}^2.$$

Подставляя сюда выписанные выше выражения для J_1, J_2, J_3, находим:

$$T = \frac{M}{10}\left(a^2(\dot{\theta}^2\sin^2\phi + \dot{\phi}^2) + b^2(\dot{\theta}^2\cos^2\phi + \dot{\phi}^2) + c^2\dot{\theta}^2\right).$$

6 Применение компьютерной математической системы Mathematica для решения физических задач

6.1 Аналитические преобразования

Очень часто при решении физических задач возникает необходимость в аналитических вычислениях: упрощении математических выражений, решении уравнений. Существенную помощь в этом может оказать система Mathematica. В данном разделе мы приведем перечень команд, наиболее часто употребляемых при преобразованиях формул. Для более полного изучения этого математического пакета рекомендуется обратиться к специализированным руководствам, например [9, 10].

Преобразования многочленов

Пусть F=F(x,y,...,z) – многочлен (представленный, возможно, не в стандартном виде).

Expand[F] – раскрыть скобки в алгебраическом выражении.

Factor[F] – разложить многочлен на множители.

FactorTerms[F] – вынести за скобки общий числовой множитель.

FactorTerms[F,x] – вынести множитель, не зависящий от x.

Collect[F,x] – представить многочлен как сумму степеней x (т.е. сгруппировать члены с одной и той же степенью x).

Collect[F,x,y,...,z] – сгруппировать члены с одними и теми же степенями $x, y, ...z$.

PolynomialQ[expr,x] – тест: является ли выражение ($expr$) многочленом от x.

PolynomialQ[expr,x,y,...,z] – тест: является ли выражение (*expr*) многочленом от $x, y, ..., z$.

Variables[F] – дать список всех переменных многочлена F.

Length[F] – дать число всех слагаемых многочлена F.

Exponent[F,x] – максимальный показатель степени переменного x в многочлене F.

Coefficient[F,expr] – множитель при одночлене *expr* в многочлене F.

Преобразования рациональных выражений

Пусть P=P(x,y,...,x) – рациональное выражение.

ExpandNumerator[P] – раскрыть (то есть упростить, раскрывая скобки) только числители.

ExpandDenominator[P] – раскрыть только знаменатели.

Expand[P] – раскрыть числители, почленно поделив их на соответствующие знаменатели.

ExpandAll[P] – раскрыть числители и знаменатели, поделив почленно числители на соответствующие знаменатели.

Factor[P] – привести к общему знаменателю и разложить на множители числитель и знаменатель.

Together[P] – привести к общему знаменателю и сократить общие множители в числителе и знаменателе.

Apart[P] – разложить P на сумму простейших дробей, выделяя целые части.

Комплексные числа

x + I y – запись комплексного числа $x + iy$ в системе Mathematica.

Re[z] – действительная часть числа z.

Im[z] – мнимая часть числа z.

Conjugate[z] – комплексно сопряженное число $\bar{z}$ (или z^*) для z.

Abs[z] – модуль $|z|$ комплексного числа z.

Arg[z] – аргумент φ комплексного числа z.

Преобразования тригонометрических выражений

Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x], Sec[x], Csc[x] – тригонометрические функции.

ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x], ArcCot[x], ArcSec[x], ArcCsc[x] – обратные тригонометрические функции.

Sinh[x], Cosh[x], Tanh[x], Coth[x], Sech[x], Csch[x] – гиперболические функции.

ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x], ArcCoth[x], ArcSech[x], ArcCsch[x] – обратные гиперболические функции.

Пусть F=F(x,y,...,z) – тригонометрическое выражение, т.е. рациональное выражение относительно тригонометрических (или обратных тригонометрических) функций, причем под знаками тригонометрических функций могут находиться только линейные комбинации аргументов.

TrigExpand[F] – раскладывает тригонометрические функции линейных комбинаций аргументов на функции этих аргументов, получая рациональное выражение от тригонометрических функций аргументов $x, y, ..., z$.

TrigFactor[F] – переходит от линейных комбинаций под знаками тригонометрических функций к аргументам-одночленам и раскладывает на множители получившееся рациональное выражение от тригонометрических функций.

TrigFactorList[F] – делает то же самое, что предыдущая функция, но ответ дает в виде списка двухэлементных списков, в каждом из которых первый элемент – множитель из разложения, а второй элемент – показатель степени, в которой этот множитель входит в разложение.

TrigReduce[F] – переделывает многочлен от тригонометрических функций простых аргументов в менее громоздкое выражение (как правило, одночлен), содержащее тригонометрические функции комбинированных аргументов.

TrigToExp[F] – конвертирует тригонометрическое выражение в выражение от экспонент.

ExpToTrig[F] – конвертирует выражение от экспонент в тригонометрическое выражение.

6.2 Построение графиков функций

Построения графика функции $y = \sin x$

Plot[Sin[x],{x, -2 Pi, 2 Pi }]

Здесь показаны только обязательные аргументы функции Plot. Результат выполнения этой команды приведен на рисунке 82.

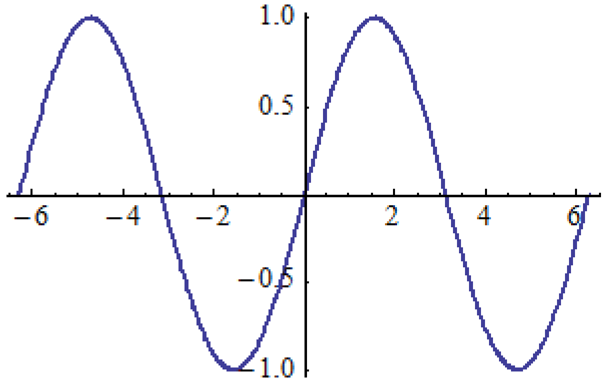

Рисунок 82

Как видим, график построен для $x \in [-\pi/2, 3\pi/2]$.

Для построения кривой, заданной параметрически, используется функция ParametricPlot. Покажем, как изобразить график функции, заданной уравнениями $x = t^2$, $y = \frac{2}{3}t(3 - t^2)$.

ParametricPlot[**{ t ∧ 2, 2/3 t (3-t ∧ 2) },{t, -2, 2 }**]

Результат изображен на рисунке 83.

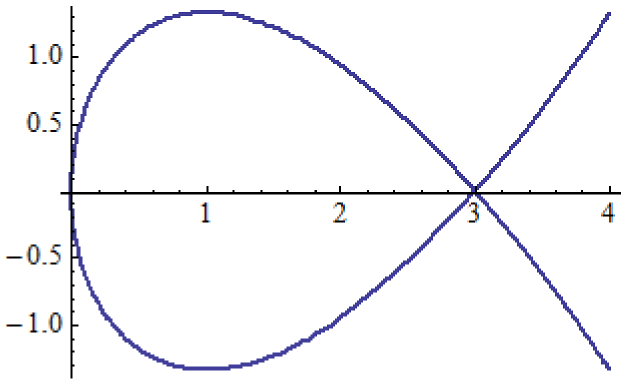

Рисунок 83

Функция ListPlot изображает графически список численных данных.

ListPlot[**{** y_1**,** y_2**, . . . }**] строит на координатной плоскости точки с координатами $(1, y_1)$, $(2, y_2)$, ...

ListPlot[**{ {** x_1**,** y_1 **}, {** x_2**,** y_2 **}, . . . }**] строит точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), ...

Функцию ContourPlot удобно использовать для визуализации скалярных полей, так как она строит ортогональные проекции на плоскость XOY линий уровня функции f

ContourPlot[**f, {x,a,b }, {y,c,d}**] выводит контурный график функции f на прямоугольной области $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$.

Для изображения поверхности в трехмерном пространстве, заданной уравнением $z = f(x, y)$, где $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, применяется графическая функция Plot3D.

Plot3D[f, {x,a,b }, {y,c,d}]

Например, для построения графика функции $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$ на квадратной области $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $y \in [-2\pi, 2\pi]$, нужно выполнить команду

Plot3D[Sqrt[Cos[x ∧ 2 + y ∧ 2]], {x, - 2 Pi, 2 Pi }, {y, - 2 Pi, 2 Pi }]

Результат выполнения приведен на рисунке 84.

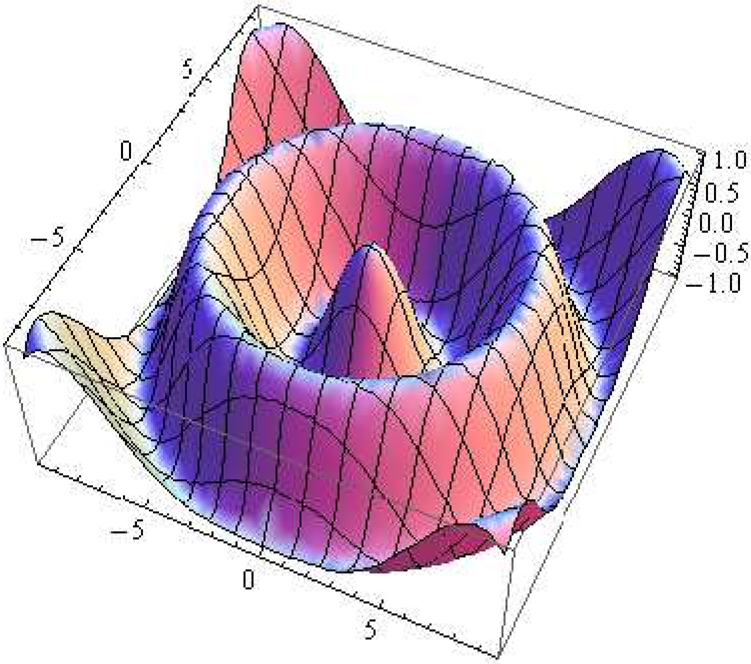

Рисунок 84

Кривые и поверхности в трехмерном пространстве, заданные параметрическими уравнениями, можно визуализировать с помощью функции ParametricPlot3D.

ParametricPlot3D[{f,g,h}, {t,a,b}] – изображает пространственную кривую по ее параметрическим уравнениям относительно декартовой системы координат: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, где f, g, h – функции параметра t, принимающего значения от a до b.

ParametricPlot3D[{f,g,h}, {u,a,b}, {v,c,d}] – строит изображение поверхности, заданной параметрическими уравнениями $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, где $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$.

6.3 Решение уравнений и неравенств

В системе Mathematica имеется большое количество функций для решения уравнений, неравенств, их систем и совокупностей. Для описания перечисленных объектов используются следующие обозначения логических операций:

$==$	знак равенства в уравнении
$!=$	не равно
$>$	больше ($>$)
$<$	меньше ($<$)
$>=$	больше или равно ($\geq$)
$<=$	меньше или равно ($\leq$)
&&	«и»(знак конъюнкции $\vee$; используется для соединения уравнений и неравенств в систему)
$\|\|$	«или»(знак дизъюнкции $\wedge$; используется для соединения уравнений и неравенств в совокупность)

Основные функции Mathematica, предназначенные для решения уравнений, неравенств, их систем и совокупностей:

Solve[*eqns,vars,elims*] – решение уравнений или систем уравнений. Первый аргумент *eqns* является уравнение или список уравнений, второй аргумент *vars* – неизвестное, относительно которого решается уравнение (или список неизвестных для системы уравнений). Третий аргумент *elims* является необязательным, он может содержать неизвестное или список неизвестных, которые требуется исключить из системы уравнений.

Roots[***lhs == rhs, var***] – дает совокупность уравнений, которая является решением полиномиального уравнения. Первый и второй аргументы (*lhs, rhs*) – полиномы, *var* – неизвестная, относительно которой решается уравнение.

Reduce[***eqns, var***] – упрощает уравнения или неравенства *eqns* и выводит эквивалентные уравнения, содержащие всевозможные решения. В случае, если предполагается, что уравнение имеет не имеет решений при некоторых значениях параметров, применение этой функции наиболее предпочтительно.

FindRoot[**{*eqn*$_1$,*eqn*$_2$,...}**, **{{**x,x_0**}**,**{**y,y_0**}**, **...}**] – предназначена для вычисления приближенного значения (значений) решения уравнения (системы уравнений) при заданном начальном значении приближения к решению.

NSolve[***eqns,vars,elims***] – находит приближенные значения корней уравнения. Такого же результата можно добиться, применив конструкцию **N**[**Solve**[***eqns,vars,elims***]]. Данную функцию целесообразно применять в случае, когда аналитическое решение уравнения громоздко, а для решения задачи достаточно численного решения уравнения.

Eliminate[***eqns,vars***] – исключает переменные *vars* из системы уравнений.

LinearSolve[**m,b**] – находит вектор x как решение системы матричного уравнения $m, x == b$.

6.4 Вычисление пределов и дифференцирование функций

Limit[***expr***,**x–>x**$_0$] – находит предел выражения *expr* при условии $x \to x_0$.

D[f,x] – частная производная $\frac{\partial}{\partial x}f$

D[f,{x,n}] – частная производная n-го порядка $\frac{\partial^n}{\partial x^n}f$

D[f, x₁, x₂, ...] – смешанная частная производная $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\dots f$

D[f, x, NonConstants ->{a, b, ...}] – частная производная $\frac{\partial}{\partial x}f$ в предположении, что $a, b, \dots$ зависят от x.

Dt[f] – полный дифференциал df.

Dt[f,x] – полная производная $\frac{df}{dx}$.

Dt[f, x₁, x₂, ...] – смешанная полная производная $\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dx_2}\dots f$

Dt[f, x, Constants ->{a, b, ...}] – полная производная в предположении, что $a, b, \dots$ – постоянные.

Dt[f, {x,n}] – полная производная n-го порядка $\frac{d^n}{dx^n}f$

6.5 Интегралы и ряды

Integrate[f,x] – неопределенный интеграл $\int f dx$

Integrate[f,{x,a,b}] – определенный интеграл $\int_a^b f dx$

Integrate[f,{x,a,b},{y,c,m}] – кратный интеграл $\int_a^b dx \int_c^m f dy$

NIntegrate[f,{x,a,b}] – приближенное числовое значение определенного интеграла.

Sum[f,{i,b}] – вычисляет сумму $\sum_{i=1}^b f(i)$.

Sum[f,{i,a,b}] – вычисляет сумму $\sum_{i=a}^b f(i)$.

Sum[f,{i,a,b,c}] – сумма $\sum_{i=a}^b f(i)$ с шагом c (по $i \in \{a, a+c, a+2c, \dots, b\}$).

Sum[f,{i,a,b},{j,p,q},...] – сумма по нескольким параметрам $\sum_{i=a}^b \sum_{j=p}^q \dots f(i, j, \dots)$.

7 Ответы и решения

1.3 Часть параболы $4x^2 + 9y = 18$, для которой $|x| \leq 3$, $|y| \leq 2$; $t_1 = \pi/4$ с.

1.4 Винтовая линия, начальная точка $x_0 = 0$, $y_0 = a$, $z_0 = 0$; шаг винта $h = 2\pi\nu/k$. Закон движения: $S = \sqrt{a^2k^2 + \nu^2} \cdot t$.

1.5 Траектория — парабола $y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2/(2v_0^2 \cos^2 \alpha)$; высота $H = v_0^2 \sin^2 \alpha/(2g)$; дальность $L = (v_0^2/g) \sin 2\alpha$; $T = (2v_0/g) \sin \alpha$.

1.6 $\alpha = 45°$, $L_{max} = v_0^2/g$, $H = v_0^2/(4g)$, $T = \sqrt{2} \cdot v_0/g$.

1.7 $\alpha = \operatorname{arctg}\left[\left(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 gy - g^2x^2}\right)/(gx)\right]$.

1.13 50 с; 500 м.

1.14 6 м/с.

1.15 $x = 4\sin(\pi t/2)$

1.16 $v = 25 м/с$; $a = 0,708 м/с^2$

1.17 $a_\tau = 1/9 м/с^2$; $a_n = 2/9 м/с^2$; $a = 0,25 м/с^2$.

1.18 Окружность радиуса 10; скорость $v = 4\pi$ и направлена по касательной к окружности против часовой стрелки; ускорение $a = 1,6\pi^2$ и направлено к центру.

1.19 $\rho = 2\frac{1}{8}$.

1.20 $v = 2\sqrt{2}$; $(\widehat{\vec{v}, x}) = 45°$;$a = 2$;$(\widehat{\vec{a}, x}) = 90°$.

1.25 а) 0.5 часа; б) $\approx$ 0.5 часа; в) 0.45 часа.

1.26 23.8 м/с.

1.27 30 км/ч, скорость CB.

1.28 3 км/ч.

1.32 $x = 2t^2$, $y = 0.9 \cos 60\pi t$, $z = 0.9 \sin 60\pi t$; $v - \sqrt{16t^2 + 2916\pi^2}$; $a = 31977.5$ м/с^2.

1.33 $a_{кор} = 24$ м/с^2.

1.34 $a_{кор} = 0.266$ м/с^2.

1.35 $a_{кор} = 0.291$ м/с^2.

1.36 $a_{BC} = 1.45$ см/с^2.

1.42 $\varepsilon = \pi$ с$^{-2}$.

1.43 $\omega = 10\pi$ с$^{-1}$.

1.44 $\varepsilon = -0.1\pi$ с$^{-2}$.

1.45 $t = 8$ с.

1.46 1) $\varphi = \pi/16 \cdot \sin(3\pi t/4)$. 2) В отвесном положении; $\omega_{max} = 3\pi/64$ с$^{-1}$.

1.47 $\nu = 38.2$ об/мин.

1.48 $a_n = 5$ м/с^2.

2.7 5.92 Н.

2.8 7.1 Н.

2.9 $v = 2.1$ м/с; $T = 2$ Н.

2.10 7800 Н.

2.11 0.196 м/с^2.

2.12 $F_c = 2mv = 0.002v$ Н.

2.13 $\alpha = 18°47'$; $N = 15527$ Н.

2.14 $F_m = 30057$ Н.

2.15 $14°20'$; 0.255.

2.24 1.61 с.

2.25 20 м/с.

2.26 $v = p/(kS)(1 - \exp[-kSt/m])$.

2.27 $z = p/(kS)\{T - M/(kS)(1 - \exp[kSt/M])\}$

2.28 $x(t) = eA/(mk) \cdot (1 - (\sin kt)/k)$.

2.36 $v = 4.42$ м/с.

2.37 0.9 м/с.

2.38 $v_1 = 1$ м/с, $v_2 = 9$ м/с.

2.39 $v = \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}/(m_1 + m_2)$.

2.40 $4a$.

2.41 $m/M = 3.2$ %.

2.47 $x_c = \frac{1}{2}\mu g t^2$.

2.48 сила давления изменяется от 68.3 кН до 147.3 кН.

2.49 платформа отъедет на 0.6 м.

2.50 платформа переместится влево на 2.4 м.

2.51 пирамида сместится влево на 14 см.

2.57 4 л.с.=2.94 кВт.

2.58 309 кВт.

2.59 598 Дж.

2.60 2.96 кВт.

2.61 $A = 3900$ Дж.

2.69 $S = 55.5$ м; $t = 11.1$ с.

2.70 $v_{max} = 0.81$ м/с; $S = 33.3$ м.

2.71 $v = 217$ м/с; $H = 2390$ м.

2.72 4.6 км.

2.73 5.7 см.

2.74 $v_0 = 7.9$ км/с.

2.75 $F = mg(1 + v_0^2/2gS) = 102$ кН.

2.81 1246 Н.

2.82 0.4 м.

2.83 $\mu < 0.383$.

2.84 $\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{16}p^2/m$.

2.85 $Q = 12$ Дж.

2.86 $l = (m_1^2 v_1^2)/(4g(m_1 + m_2)^2) = 0.625$ м.

3.8 а) $L = \frac{1}{2}(\dot{q} + q)^2$, б) $L = -\frac{1}{2}x^2$.

3.9 $L = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{m_2}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 - 2a\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi) - m_2 g a \sin\varphi$, где φ – угол между отрезком a и горизонталью, r – расстояние от m_1 до некоторой неподвижной точки на горизонтали.

3.10 $L = \frac{m}{2}\left\{(\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')2\right\} - max' - U$, то есть наличие ускорения проявляется как дополнительное однородное поле.

3.11 $x = 1 + \sqrt{1 + t^2}$

3.12 $x = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}$.

3.16 а) $\ddot{q} = -\dot{q}/t$; б) $\ddot{q} = (1 - \dot{q}^2)^{3/2}$.

3.17 $\varepsilon = (M_1 - kM_2)/(J_1 + k^2 J_2)$, где $k = z_1/z_2$.

3.18 $\varepsilon_1 = \dfrac{2}{r_1^2}\left(M_1 - \dfrac{z_1}{z_2}M_2 - \dfrac{z_1}{z_3}M_3\right)/(m_1 + m_2 + m_3)$.

3.19 $T = 2\pi\sqrt{m_1/(m_1 + m_2)} \cdot \sqrt{l/g}$.

3.24 а) $\dot{r} = \rho/\sqrt{1 + \rho^2}$, $\dot{\rho} = -1$: б) $\dot{r} = \rho - r^2$, $\dot{\rho} = 2r(\rho - r^2)$.

3.25 $H = 1 + \rho_y^2/(2x) + \ln\rho_x$.

3.26 $L = \dot{x}\dot{y} - \dot{y}^2 t/2$.

4.10 $F_H = 462.32$ кН.

4.11 $F_H = 158.8$ кН.

4.12 $T = 0.09$ с.

4.13 $x(t) = 0.4\cos 6.26t$ м; $\nu = 1$ Гц; $\omega = 6.26$ с$^{-1}$.

4.14 $k = k_1 k_2/(k_1 + k_2)$; $T = 2\pi\sqrt{m(k_1 + k_2)/(k_1 k_2)}$.

4.15 $k = k_1 k_2/(k_1 + k_2) = 735$ Н/м;

4.16 $T \approx 1.005 T_0$.

4.17 $T = 0.319$ с; $\theta = 0.31$.

4.18 $x(t) = (0.4\sin 14t - 0.023\sin 8\pi t)$ см.

4.26 $v \approx 15$ км/с.

4.27 $t = 10.5$ часов.

4.28 $M_C/M_З \approx 351000$.

4.29 $v_{1Ю} = 38.4$ км/с.

4.30 $R_{max} = 5.3 \cdot 10^9$ км.

4.31 $T = \sqrt{(3\pi)/(G\rho)} \approx 1.2 \cdot 10^{-3}$ с.

4.32 $g_C \approx 28g = 273$ м/с^2.

5.7 $J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5}mR^2$.

5.8 $J_1 = J_2 = \frac{m}{4}m\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right)$; $J_3 = \frac{m}{2}R^2$, x_3 – ось цилиндра.

5.9 $J_1 = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$; $J_2 = \frac{m}{12}(c^2 + a^2)$; $J_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$; оси x_1, x_2, x_3 параллельны ребрам a, b, c.

5.10 $J_1 = J_2 = \frac{3m}{20}(R^2 + H^2/4)$; $J_3 = \frac{3}{10}mR^2$; ось x_3 – ось конуса; центр масс лежит на этой оси на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от вершины конуса.

Список использованных источников

1 Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский – 4-е изд. – СПб.: Лань, 2009. – 576 с. – ISBN 978-5-8114-0857-3.

2 Голдстейн, Г. Классическая механика / Г. Голдстейн – М.: Наука, 1975. – 416 с.

3 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т.: учеб. пособие для вузов / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Физматлит, 2001. – Т.1: Механика – 224 с. - ISBN 5-9221-0055-6.

4 Савельев, И. В. Основы теоретической физики: в 2 т.: учеб. руководство / И.В. Савельев – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1991. – Т.1: Механика. Электродинамика – ISBN 5-02-014454-1

5 Компанеец, А.С. Курс теоретической физики: в 2 т. / А.С. Компанеец – М.: Просвещение, 1972. – Т.1: Элементарные законы. – 512с.

6 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 3-х т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон – М.: Наука, 1984. – Т.1 – 504 с.; Т.2 – 560 с.

7 Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский – М.: Наука, 1970. – 448 с.

8 Коткин, Г.Л. Сборник задач по классической механике / Г.Л. Коткин, В.Г. Сербо – М.: Наука, 1977. – 320 с.

9 Дьяконов, В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В.П. Дьяконов – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 576 с. – ISBN 5-94074-405-2.

10 Половко, А.М. Mathematica для студента / А.М. Половко – СПб.; БХВ-Петербург, 2007. – 368 с. – ISBN 978-5-9775-0096-8.