

Министерство образования и науки  
Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

М.А. Кучеренко

## **СИЛЫ ТРЕНИЯ**

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки: 020400.62 Биология, 022000.62 Экология и природопользование, 140400.60 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург

2013

УДК 531.43(076.5)

ББК 22.25 я 7

К 95

Рецензент - доктор физико-математических наук, доцент Т.М. Чмерева

**Кучеренко М.А.**

К 95

Силы трения: методические указания к лабораторным работам /  
М.А. Кучеренко; Оренбургский – Оренбург: ОГУ, 2013. - 39 с.

Методические указания включают теоретическое введение и описание лабораторных работ по теме «Силы трения» раздела «Механика». Описание содержит обоснование метода измерения физической величины, методику проведения измерений и обработки результатов, а также контрольные вопросы для самопроверки.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ: № 106 Определение коэффициента трения качения, № 121 Определение коэффициента вязкости методом Стокса, №123 Определение коэффициента вязкости жидкости с помощью физического маятника.

УДК 531.43(076.5)

ББК 22.25 я 7

© Кучеренко М.А., 2013

© ОГУ, 2013

## Содержание

Введение.....	4
1 Лабораторная работа №106. Определение коэффициента вязкости методом Стокса.....	12
1.1 Теоретические основы метода определения коэффициента трения качения.....	12
1.2 Экспериментальная установка.....	16
1.3 Проведение эксперимента.....	18
1.4 Обработка результатов эксперимента.....	20
1.5 Контрольные вопросы.....	21
2 Лабораторная работа №121. Определение коэффициента вязкости методом Стокса .....	22
2.1 Теоретические основы метода Стока.....	22
2.2 Проведение эксперимента.....	25
2.3 Обработка результатов эксперимента.....	27
2.4 Контрольные вопросы.....	28
3 Лабораторная работа № 123. Определение коэффициента вязкости жидкости с помощью физического маятника.....	29
3.1 Теоретические основы метода.....	29
3.2 Проведение эксперимента.....	35
3.3 Обработка результатов эксперимента.....	36
3.4 Контрольные вопросы.....	38
Список использованных источников.....	39

## Введение

Силы трения возникают при контакте макроскопических тел и направлены по касательной к их поверхности.

На твердое тело может действовать сила *сухого трения* со стороны другого твердого тела, с которым оно контактирует, и сила *жидкого трения* со стороны жидкой или газообразной среды, в которой оно движется.

В свою очередь силы сухого трения подразделяются на *силы трения покоя, скольжения и качения*.

### *Силы сухого трения*

Если к телу, покоящемуся на горизонтальной поверхности, приложить постепенно возрастающую горизонтальную силу  $\vec{F}$ , то пока величина этой силы не достигнет величины силы трения скольжения  $\vec{F}_{тр.ск.}$ , тело остается в покое. Согласно второму закону Ньютона это означает, что до начала движения на тело со стороны подставки действует сила  $\vec{F}_{тр.пок.}$ , равная по модулю и противоположная по направлению приложенной силе:  $\vec{F}_{тр.пок.} = -\vec{F}$ ; она называется *силой трения покоя* (рисунок 1, а).

Когда величина приложенной силы достигнет значения силы трения скольжения, тело придет в движение, и на него будет действовать *сила трения скольжения* (рисунок 1, б).

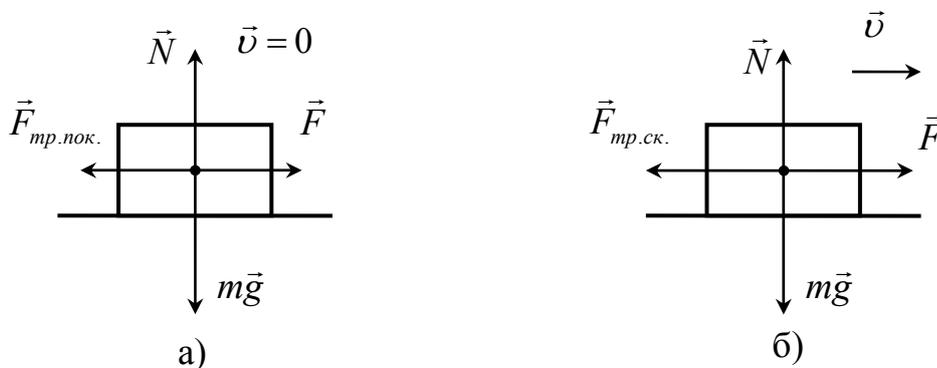


Рисунок 1 – Силы трения покоя и скольжения

Опыт показывает, что модуль силы трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления  $\vec{N}$  и практически не зависит от скорости тела:

$$F_{тр.ск.} = \mu N, \quad (1)$$

а направление противоположно скорости  $\vec{V}$  тела относительно подставки. Следовательно, в векторной форме сила трения скольжения описывается формулой:

$$\vec{F}_{тр.ск.} = -\frac{\mu N}{v} \vec{v}. \quad (2)$$

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  между величинами сил трения скольжения и нормального давления называется *коэффициентом трения скольжения*. Он может меняться в широких пределах в зависимости от шероховатости и волнистости поверхностей, характера пленок, покрывающих поверхности контактирующих тел.

Значение *силы трения качения* очень малы по сравнению с силами трения скольжения. Трение качения обусловлено: а) потерями, связанными со сжатием материала под нагрузкой перед катящимся телом; б) затратами работы на деформирование материала при формировании валика перед катящимся телом; в) преодолением «мостиков сцепления».

Если на цилиндр радиуса  $R$  (рисунок 2) действует горизонтальная внешняя сила  $\vec{F}$ , то возникающая в месте контакта цилиндра и опорной плоскости сила реакции  $\vec{N}$  смещена в сторону действия силы  $\vec{F}$  из-за деформации поверхностей соприкосновения. При равновесии цилиндра сумма моментов сил, действующих на цилиндр, равна нулю: момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $A$  уравнивается моментом силы реакции опоры

$$M_A(F) = M_A(N). \quad (3)$$

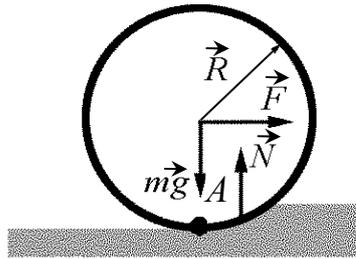


Рисунок 2 – Равновесие цилиндр

При увеличении внешней силы увеличивается и момент силы реакции опоры. Наибольшее значение момента силы реакции опоры  $M(N)$  достигается в момент начала качения цилиндра по плоскости.

Для наибольшего значения момента силы реакции опоры  $M_{\max}$ , препятствующей качению, установлены следующие приближенные законы:

1 Наибольший момент  $M_{\max}$  в широких пределах не зависит от радиуса колеса  $R$ .

2 Значение максимального момента  $M_{\max}$  пропорционально нормальному давлению. В нашем случае

$$M_{\max} = \delta N, \quad (4)$$

где коэффициент пропорциональности  $\delta$  называют коэффициентом трения качения. Из формулы (4) видно, что  $\delta$  имеет размерность длины.

*Коэффициент трения качения  $\delta$*  зависит от материала цилиндра и плоскости, состояния их поверхностей и физических параметров (температура, давление и так далее). Зачастую коэффициент  $\delta$  при качении можно считать не зависящим от угловой скорости качения и скорости скольжения по плоскости.

Обычно для металлов (сталь по стали) коэффициент  $\delta = 0,001 - 0,002$  см.

Перечисленные выше положения справедливы для не очень больших нормальных давлений и для относительно слабо деформирующихся материалов.

В технике для характеристики трения качения обычно пользуются минимальной величиной  $F$ , необходимой для перекачивания цилиндра, приложенной к его оси в горизонтальном направлении:

$$F = \frac{\delta N}{R}. \quad (5)$$

### ***Вязкость (внутреннее трение)***

*Вязкость* – это свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. Вязкость твердых тел обладает рядом специфических особенностей и рассматривается обычно отдельно.

Если первоначально покоящуюся жидкость привести в движение, а затем снова предоставить самой себе, то движение со временем прекратится. Это указывает на то, что между слоями движущейся жидкости существуют силы трения. Их называют *силами внутреннего трения* или *силами вязкости*.

Пусть жидкость течет в направлении оси  $Ox$ , причем скорость течения  $\vec{v}$  зависит только от координаты  $z$  (рисунок 3).

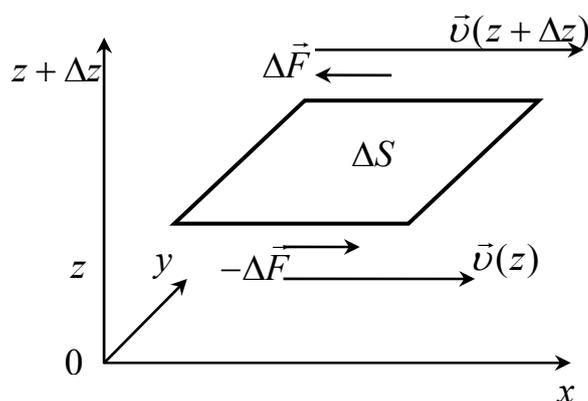


Рисунок 3 – Силы вязкости в жидкости

Рассмотрим мысленно площадку площадью  $\Delta S$ , параллельную координатной плоскости  $xOy$ . Ньютон установил, что между слоями жидкости, расположенными по обе стороны площадки, возникают силы взаимодействия, величина которых пропорциональна площади  $\Delta S$  и градиенту скорости  $\frac{dv}{dz}$  в месте расположения площадки:

$$\Delta F = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S. \quad (6)$$

Под *градиентом скорости* понимается производная величины скорости по координате  $z$ :

$$\frac{dv}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(z + \Delta z) - v(z)}{\Delta z}. \quad (7)$$

Таким образом, он характеризует быстроту (резкость) изменения скорости от точки к точке вдоль оси  $Oz$ .

Направлены силы вязкости так, что стремятся выровнять скорости слоев жидкости: на более быстрый слой (со скоростью  $v(z + \Delta z)$ ) (на рисунке 3) со стороны более медленного (со скоростью  $v(z)$ ) действует сила  $\Delta F$ , направленная против скорости быстрого слоя и тормозит его, и наоборот, быстрый слой ускоряет медленный, действуя на него с обратной силой  $-F$ . Коэффициент пропорциональности  $\eta$  в законе (6) называют *динамической вязкостью* или *коэффициентом внутреннего трения*.

Как следует из выражения (6), динамическая вязкость  $\eta$  численно равна силе  $\Delta F$ , действующей на единицу площади при градиенте скорости  $\frac{dv}{dz}$ , равном единице.

Единицей измерения динамической вязкости  $\eta$  в системе СИ является Па·с (Паскаль-секунда). Например, при 20<sup>0</sup>С : у воды  $\eta = 1,002 \cdot 10^{-3}$  Па·с, у глицерина –  $1480 \cdot 10^{-3}$  Па·с, у ртути –  $1554 \cdot 10^{-3}$  Па·с.

Коэффициент внутреннего трения зависит от свойств жидкости и ее температуры. С ростом температуры жидкости динамическая вязкость убывает. Так вязкость воды при изменении температуры от 0<sup>0</sup>С до 100<sup>0</sup>С уменьшается от  $1,8 \cdot 10^{-3}$  до  $2,8 \cdot 10^{-4}$  Па·с.

Строгой теории *вязкости жидкости* еще нет, однако считают, что она возникает из-за переноса импульса в направлении, перпендикулярном движению.

В жидкостях среднее расстояние между молекулами такого же порядка, как размеры самих молекул. Молекулы жидкости могут лишь совершать малые колебания в пределах, ограниченных межмолекулярными расстояниями. Однако время от времени колеблющаяся молекула в результате флуктуации может получить от соседних молекул избыточную энергию, достаточную для того, чтобы совершить скачок на некоторое расстояние. В новом месте частица проведет некоторое время, совершая колебания, пока снова не получит, опять в результате флуктуации, нужную для скачка энергию; она вновь совершит скачок, и так далее. Такие колебания, сменяющиеся скачками, - это и есть тепловые движения молекул жидкости. *Перенос импульса* из одного слоя в другой, который приводит к возникновению *внутреннего трения в жидкости*, осуществляется при скачках молекул одного слоя в другой за счет избыточной энергии, полученной от соседних молекул.

Существование внутреннего трения приводит к тому, что стационарный поток вязкой жидкости в горизонтальной трубе длиной  $\Delta L$  и радиуса  $R$  возникает только при наличии градиента давления  $\frac{\Delta p}{\Delta L}$  вдоль трубы. Зависимость скорости течения от расстояния  $r$  до оси трубы имеет вид:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\Delta L}(R^2 - r^2). \quad (8)$$

Поле скоростей частиц вязкой жидкости, текущей по горизонтальной трубе, представлено на рисунке 4.

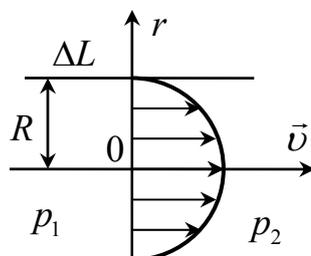


Рисунок 4 – Поле скоростей частиц вязкой жидкости, текущей по длинной горизонтальной трубе радиуса  $R$

Силы внутреннего трения возникают как в потоках жидкости, так и газа. В *газах* они обусловлены обменом импульсами направленного движения молекул. Переходя за счет хаотического теплового движения из одного слоя в другой, каждая молекула массы  $m$  уносит из более быстрого слоя больший импульс направленного движения  $m v(z + \Delta z)$ , чем импульс  $m v(z)$ , который приносит в этот слой молекула, приходящая ей на смену из более медленного слоя. Это приводит к уменьшению импульса быстрого слоя и увеличению импульса медленного слоя. В свою очередь, это означает, что на каждый из слоев действует сила, равная изменению импульса в единицу времени (второй закон Ньютона). Сила эта есть не что иное, как сила трения между слоями газа, движущимися с различными скоростями (сила внутреннего трения), которая определяется выражением (3).

С ростом температуры газа обмен импульсами увеличивается, что приводит к росту динамической вязкости  $\eta$ .

### ***Жидкое трение***

При движении тела в вязкой жидкости молекулы жидкости, находящиеся на поверхности тела, «прилипают» к ней и движутся со скоростью тела  $\vec{v}$ . За счет сил вязкости при этом в движение вовлекаются и другие слои жидкости, и в результате возникает течение жидкости с соответствующим распределением скоростей от значения  $\vec{v}$  у поверхности тела до значения  $\vec{v} = 0$  вдали от движущегося тела или у стенок, ограничивающих поток жидкости (рисунок 5).

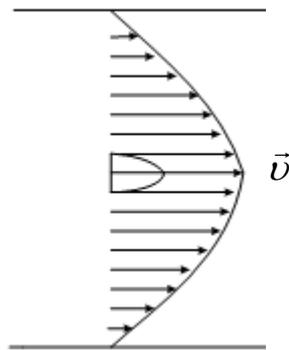


Рисунок 5 – Движение тела в вязкой жидкости

Значение градиента скорости в различных точках поверхности тела определяет по формуле (7) силы, действующие на малые элементы  $\Delta S$  поверхности в окрестности этих точек. Суммируя эти силы по всей поверхности тела, найдем полную *силу жидкого трения*, действующую на тело, которая при стационарном течении жидкости и выполнении ряда других условий (в частности, при движении тела вдоль его оси симметрии) отвечает формуле:

$$\vec{F} = - b\vec{v}, \quad (9)$$

где  $b$  - коэффициент жидкого трения, зависящий от формы и размеров тела и от свойств среды. Знак минус отражает тот факт, что сила жидкого трения направлена против скорости тела.

При больших скоростях тела линейная зависимость от скорости переходит в квадратичную с другим коэффициентом пропорциональности:

$$F = b_1 v^2, \quad (10)$$

или в векторной форме:

$$\vec{F} = -b_1 v \vec{v}. \quad (11)$$

Для *шара*, как показал Стокс, коэффициент пропорциональности  $b = 6\pi\eta r$  и формула жидкого трения имеет вид:

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}, \quad (12)$$

где  $r$  и  $v$  – радиус и скорость шара.

# 1 Лабораторная работа №106. Определение коэффициентов трения качения

**Цель работы:** определение коэффициентов трения качения для различных пар материалов.

## Задачи:

1 Понять: особенности трения качения; приближенные законы, описывающие эффект трения качения; теоретическую основу метода определения коэффициента трения качения  $\delta$  с помощью маятника.

2 Самостоятельно выполнить лабораторный эксперимент по определению коэффициентов трения качения  $\delta$  для различных пар материалов с помощью маятника.

3 Провести оценку погрешности и анализ полученных результатов коэффициентов трения качения  $\delta$  для различных пар материалов в лабораторном эксперименте, используя различные справочные источники.

## 1.1 Теоретические основы метода определения коэффициента трения качения

В данной работе для экспериментального определения коэффициента трения качения  $\delta$  используется маятник, схема которого представлена на рисунке 6.

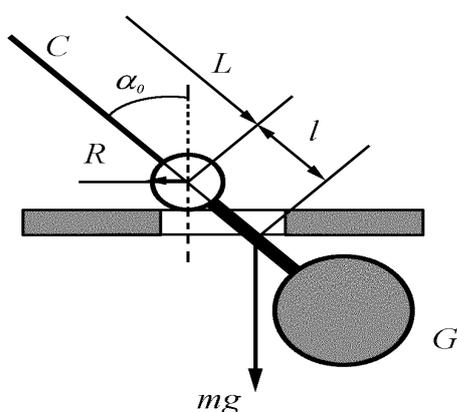


Рисунок 6 – Маятник для определения коэффициента трения качения

Цилиндр радиуса  $R$  находится на горизонтальной плите. Стрелка  $C$  прикреплена к цилиндру сверху. Снизу к системе прикреплен груз  $G$ . При отклонении груза от положения равновесия система может совершать колебания. Колебания системы будут затухающими в первую очередь из-за противодействия момента сил трения качения. Движение цилиндра при этом — поступательно-вращательное.

Коэффициент трения качения  $\delta$  можно определить по скорости затухания колебаний.

Рассматривая процесс колебаний, воспользуемся законом сохранения энергии. Пусть маятник в начальный момент отклонили на угол  $\alpha_0$  от положения равновесия и отпустили. Через период (одно колебание) угол отклонения будет равен  $\alpha_1$ , через  $n$  периодов —  $\alpha_n$  соответственно (рисунок 7).

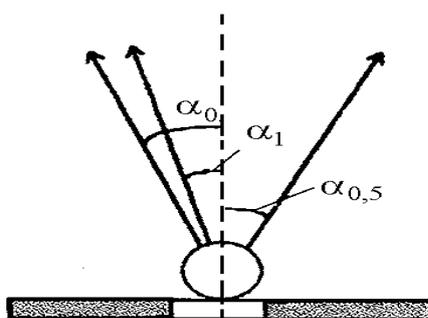


Рисунок 7 – Углы отклонения маятника при качении в различные моменты времени

Потенциальная энергия маятника через  $n$  периодов:

$$E_n = mgl(l \cos \alpha_n) = 2mgl \sin^2 \left( \frac{\alpha_n}{2} \right), \quad (13)$$

где  $m$  — масса маятника,

$l$  — расстояние между центром тяжести маятника и осью цилиндра.

Уменьшение потенциальной энергии за первый период будет:

$$\Delta E = 2mgl \left( \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \right).$$

При малых углах  $\alpha$   $\left( \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \right)$  получим

$$\Delta E = \frac{1}{2} mgl (\alpha_0^2 - \alpha_1^2). \quad (13)$$

Пренебрегая работой сил сопротивления воздуха и считая, что изменение энергии вызвано работой момента трения качения, можно написать:

$$\Delta A = M(N)\alpha = \delta mg \alpha, \quad (14)$$

где  $\Delta A$  — работа момента  $M$  силы реакции опоры  $N$  при повороте на угол  $\alpha$ .

За один полный период колебаний угол поворота составляет:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_{0,5} + \alpha_1,$$

где  $\alpha_{0,5}$  — угол отклонения после одного полупериода (рисунок 7).

Считая в среднем  $\alpha_{0,5} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$ , можно записать:

$$\Delta A = M(N)\alpha = 2\delta mg (\alpha_0 + \alpha_1). \quad (15)$$

Приравнивая (15) и (13), получим:

$$\delta = \frac{l}{4} (\alpha_0 - \alpha_1).$$

Аналогичные соотношения можно получить для следующих периодов. Для полных  $n$  периодов имеем

$$\delta = \frac{l}{4n}(\alpha_0 - \alpha_n). \quad (16)$$

Таким образом, определив начальный и конечный углы, а также подсчитав число колебаний, можно оценить коэффициент трения качения  $\delta$ .

## 1.2 Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рисунке 8.

На *столике* установлен маятник. Маятник состоит, в свою очередь, из *цилиндра*, сделанного из нержавеющей стали, *стрелки* и массивного *груза*. Начальное отклонение маятника производится вручную до *фиксатора*, положение которого можно менять. *Шкала* служит для измерения угла отклонения маятника с помощью *стрелки*. Положение *шкалы* можно регулировать, совмещая конец стрелки покоящегося маятника с нулем шкалы. Датчик, подсоединенный к таймеру (на рисунке не показан), позволяет отсчитывать число полных колебаний маятника. Под *цилиндр* к *столику* могут крепиться пластинки из различных исследуемых материалов.

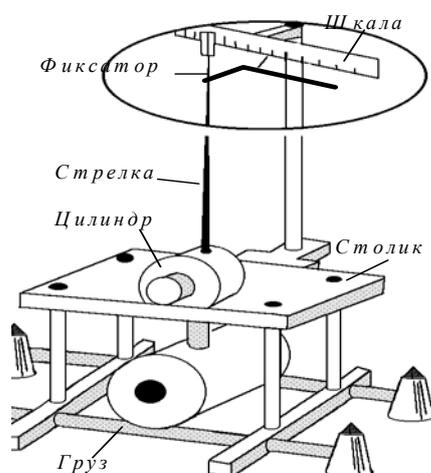


Рисунок 8 – Схема экспериментальной установки для определения коэффициента трения качения  $\delta$

В связи с тем, что цилиндр при качении движется вращательно-поступательно, необходимо уточнить связь угла поворота цилиндра  $\alpha$  с показаниями стрелки маятника, отсчитываемыми по линейной шкале  $S$ .

Смещение конца стрелки можно представить в виде суммы двух смещений: поступательного движения оси цилиндра  $a_1$  и вращательной компоненты  $a_2$  поворота конца стрелки относительно центра цилиндра (рисунок 9).

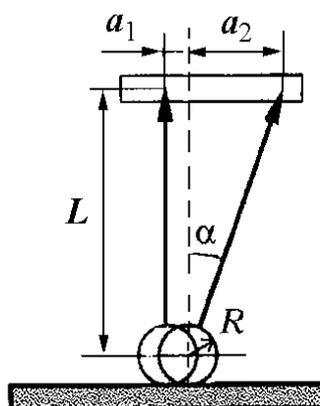


Рисунок 9 – Смещение конца стрелки маятника

Для суммарного отклонения  $x$  конца стрелки от нулевого деления получим

$$x = a_1 + a_2 = R\alpha + Ltg\alpha,$$

где  $R$  — радиус цилиндра,

$L$  — расстояние от оси цилиндра до шкалы (длина стрелки),

$\alpha$  — угол поворота маятника.

При малых углах  $tg\alpha \approx \alpha$ , и можно считать

$$\alpha_0 = \frac{x_0}{L + R},$$

$$\alpha_n = \frac{x_n}{L + R},$$

где  $x_0$  и  $x_n$  — начальная и конечная амплитуды отклонения стрелки по шкале  $S$ . Тогда расчетную формулу (16) можно окончательно представить в виде

$$\delta = \frac{l (x_0 - x_n)}{n 4(L + R)}, \quad (17)$$

где  $n$  — число периодов колебаний маятника за время измерения.

### 1.3 Проведение эксперимента

#### *Измерения*

- 1 Измерьте линейкой длину телескопической части стрелки.
- 2 Штангенциркулем измерьте диаметр цилиндра и определите его радиус  $R$  (рисунок 9).
- 3 Определите общую длину стрелки  $L$  как сумму длины телескопической части стрелки и радиуса цилиндра.
- 4 Установите маятник в такое положение, чтобы в равновесии конец стрелки находился напротив нуля шкалы.
- 5 Для вычисления коэффициента трения качения по формуле (17) необходимо измерить начальное отклонение стрелки маятника  $x_0$  и его отклонение  $x_n$  после  $n$  полных периодов колебаний. Удобно задаться следующими начальным и конечным значениями амплитуд колебаний:  $x_0 = 2,5$  см и  $x_n = 1$  см. В этом интервале отклонений автоматически с помощью электронного таймера и фотодатчика отчитывается число колебаний маятника  $n$ .
- 6 Для проведения измерений включите таймер в сеть 220 В. На нижнем табло таймера появятся цифры 00.
- 7 Отклоните маятник до соприкосновения стрелки с фиксатором. При этом конец стрелки должен быть в положении  $x_0 = 2,5$  см по шкале (положение фиксатора предварительно устанавливается).
- 8 После нажатия кнопки “СТАРТ” отпустите маятник. После этого таймер начинает отсчет колебаний.
- 9 Двухзначное число на нижнем табло таймера показывает число полных колебаний  $n$ . Если количество колебаний превышает 100, количество со-

тен при дальнейшем отсчете отмечается вручную. При продолжении счета при этом после числа 99 на табло появляется 00, и отчет продолжается в прежнем режиме.

10 При завершении измерений (амплитуда колебаний стрелки маятника стала равной  $x_n = 1$  см), нажмите кнопку “СТОП”.

11 Данные запишите в таблицу 1. Для каждого материала составляется своя отдельная таблица.

Перед следующим измерением восстановите нулевое показание таймера нажатием кнопки “Сброс”.

Отсчет в каждой серии измерений произведите не менее пяти раз. Серии измерений проведите для пластинок из трех разных материалов — латуни, текстолита и дюралюминия.

Таблица 1 – Результаты измерений

Материал пластинки	Номер измерения	Число колебаний $n_i$	$\bar{n}$	$\sigma_{\bar{n}}$	$\delta$	$\varepsilon$
	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

#### 1.4 Обработка результатов эксперимента

1 По экспериментальным данным для каждой серии измерений определите среднее арифметическое значение  $\bar{n}$  числа колебаний  $n$ .

2 Определите среднеквадратичное отклонение  $\sigma_{\bar{n}}$  числа колебаний для каждой серии измерений (каждой пластинки):

$$\sigma_{\bar{n}} = \sqrt{\frac{(n_1 - \bar{n})^2 + (n_2 - \bar{n})^2 + \dots + (n_N - \bar{n})^2}{N(N-1)}},$$

где  $N = 5$ .

3 С помощью формулы (17) определите величины коэффициентов трения качения  $\delta$  для трех пластин.

4 Пренебрегая вкладом погрешностей  $\Delta L$  и  $\Delta R$ , оцените погрешности полученных результатов по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2}.$$

Для расчетов примите погрешность разности отсчетов показаний стрелки по шкале  $\Delta S = 1$  мм, принимая ее в расчетах  $S = 1,5$  см. Величина  $l = 92,7 \pm 1$  мм.

Запишите полученные результаты в таблицу 1.

5 Проанализируйте полученные значения коэффициентов трения качения для различных пар металлов, используя справочные материалы. Сформулируйте и запишите вывод по результатам Вашего лабораторного эксперимента, указывая возможные причины систематических и случайных погрешностей.

### 1.5 Контрольные вопросы

- 1 Какими причинами обусловлено трение качения?
- 2 Сформулируйте приближенные законы, описывающие эффект трения качения.
- 3 Сравните трение качения и трение скольжения.
- 4 От чего зависит коэффициент трения качения  $\delta$ ? Какую размерность имеет этот коэффициент?

5 Объясните, как можно определить коэффициент трения качения с помощью маятника, используя вывод формулы (17).

6 Цилиндр радиуса  $R$  находится на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения поверхностей -  $\mu$ , коэффициент трения качения -  $\delta$ . Во сколько раз отличается сила  $F_1$ , необходимая для того, чтобы цилиндр начал движение, от силы  $F_2$ , необходимой для начала проскальзывания? Силы приложены к центру цилиндра горизонтально.

## 2 Лабораторная работа №121. Определение коэффициента вязкости методом Стокса

**Цель работы:** определение коэффициента вязкости водного раствора глицерина.

### **Задачи:**

1 Понять: природу вязкости (внутреннего трения) в жидкостях и газах; физический смысл коэффициента вязкости; зависимость коэффициентов вязкости жидкостей и газов от температуры; общий для жидкостей и газов закон внутреннего трения – закон Ньютона; теоретическую основу метода Стокса для определения коэффициента вязкости исследуемой жидкости.

2 Самостоятельно выполнить эксперимент по определению коэффициента вязкости исследуемой жидкости (раствора глицерина).

3 Провести анализ полученного результата коэффициента вязкости водного раствора глицерина, используя справочные материалы.

### **2.1 Теоретические основы метода Стокса**

В данной работе измерение коэффициента вязкости  $\eta$  (иногда называемом коэффициентом динамической вязкости) водного раствора глицерина выполняется по методу Стокса.

Идея метода основывается на формуле Стокса в скалярной форме, формула (12):

$$F_c = 3\pi\eta\upsilon d, \quad (18)$$

где  $F_c$  – сила сопротивления, которую испытывает шарик диаметром  $d$  при движении со скоростью  $\upsilon$  в жидкости с вязкостью  $\eta$ .

Таким образом, измерив силу сопротивления  $F_C$ , скорость установившегося движения шарика  $v$  и его диаметр  $d$ , можно по формуле (18) вычислить коэффициент вязкости  $\eta$ .

Непосредственное измерение силы сопротивления  $F_C$ , действующей на шарик, затруднительно. Поэтому поступают следующим образом. Берут высокий стеклянный цилиндр с закрытым дном и наливают в него исследуемую жидкость. Затем в жидкость опускают шарик. На падающий в жидкости шарик действуют следующие силы (рисунок 10):

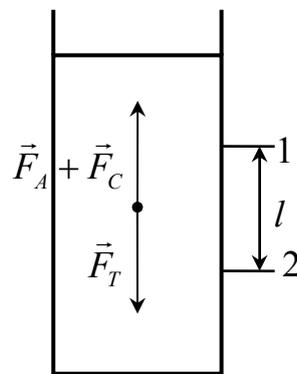


Рисунок 10 – Падение шарика в вязкой жидкости

- сила сопротивления

$$F_C = 3\pi\eta v d; \quad (19)$$

- выталкивающая сила (сила Архимеда)

$$F_A = \frac{1}{6}\pi\rho_1 g d^3; \quad (20)$$

- сила тяжести

$$F_T = mg = \frac{1}{6}\pi\rho_2 g d^3. \quad (21)$$

В выражениях (20) и (21)  $\rho_1$  - плотность жидкости,  $\rho_2$  - плотность шарика.

По-второму закону Ньютона результирующая сила (геометрическая сумма всех сил), действующая на шарик, равна произведению массы шарика  $m$  на ускорение  $\vec{a}$ . Запишем уравнение движения шарика в векторной и скалярной форме:

$$\vec{F}_T + \vec{F}_A + \vec{F}_C = m\vec{a}, \quad (22)$$

$$F_T - F_A - F_C = ma. \quad (23)$$

Сначала шарик будет падать ускоренно. Но когда скорость возрастет до величины  $v$ , при которой выполняется условие

$$F_C = F_T - F_A, \quad (24)$$

ускорение исчезнет. С этого момента шарик будет падать равномерно. Подставив в (23) вместо модулей сил  $F_C, F_T, F_A$  выражения (19), (20) и (21), получим

$$3\pi\eta vd = \frac{1}{6}\pi\rho_2gd^3 - \frac{1}{6}\pi\rho_1gd^3. \quad (25)$$

Тогда для коэффициента вязкости  $\eta$  имеем:

$$\eta = \frac{g}{18}(\rho_2 - \rho_1)\frac{d^2}{v}. \quad (26)$$

Для измерения скорости шарика  $v$  поступают следующим образом. На участке равномерного падения шарика наносят две метки 1 и 2, измеряют рас-

стояние  $l$  между этими метками. Затем по секундомеру находят время  $t$ , за которое шарик проходит это расстояние. Из этих измерений находят скорость равномерного спуска шарика:

$$v = \frac{l}{t}. \quad (27)$$

Затем значение скорости (27) подставляют в (26) и вычисляют коэффициент вязкости  $\eta$  по формуле:

$$\eta = \frac{g}{18l}(\rho_2 - \rho_1)d^2t. \quad (28)$$

## 2.2 Проведение эксперимента

### *Измерения*

1 Для получения более достоверного значения коэффициента вязкости  $\eta$ , вычисленное по формуле (28), необходимо около 10 раз определить время спуска одного и того же шарика. Однако такая возможность в нашей работе отсутствует. Это затруднение обходится введением «усредненного» шарика: вместо одного шарика берется  $n$  шариков близкого диаметра. Измеряется диаметр каждого взятого шарика, определяется среднее значение диаметра  $\bar{d}$ :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i,$$

где  $d_i$  - диаметр  $i$ -го шарика. Диаметр измеряется микрометром. Результаты измерений заносят в таблицу.

**Замечание:** При вычислении стандартной ошибки измерения диаметра «усредненного» шарика можно пренебречь вкладом среднеквадратичной приборной ошибки микрометра, а при вычислении стандартной ошибки измере-

ния, времени опускания шарика можно не учитывать среднеквадратическую приборную ошибку секундомера из-за их малости.

Таблица 1 - Измерение среднего диаметра

	1	2	3	4	5	6	7
$d_i \cdot 10^{-3}, \text{м}$							
$\bar{d} = \dots \text{м},$ $\sigma = \dots \text{м},$ $\sigma_{np} = \dots \text{м}.$							
$d = \bar{d} \pm \Delta d = \dots \text{м},$ $\Delta d = \dots \text{м}.$							

2 Определите линейкой расстояние  $l$ , которое проходит каждый из шариков. Полученное при этом значение приравнивается к среднему значению измерения длины  $\bar{l}$ , а среднеквадратическая ошибка измерения  $\sigma(l)$  может быть принята равной  $1 \cdot 10^{-3} \text{м}$ .

3 Определите время  $t_i$ , за которое  $i$ -ый шарик проходит расстояние  $l$ . Результаты измерений занесите в таблицу 2.

Таблица 2 - Измерение эффективного времени

	1	2	3	4	5	6	7
$t_i = \dots, \text{с}$							
$\bar{t} = \dots \text{с},$ $\sigma = \dots \text{с},$ $\sigma_{np} = \dots \text{с}$							
$t = \bar{t} \pm \Delta t = \dots \text{с},$ $\Delta t = \dots \text{с}$							
$\bar{l} = \dots \text{м},$ $\sigma(l) = 1 \cdot 10^{-3} \text{м},$ $\Delta l = 1 \cdot 10^{-3} \text{м}.$							

### 2.3 Обработка результатов эксперимента

1 Определите среднее значение коэффициента вязкости  $\bar{\eta}$  по формуле (28):

$$\bar{\eta} = \frac{g}{18} \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} \bar{d}^2 \bar{t}.$$

2 Определите относительную погрешность измерения коэффициента вязкости :

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2}.$$

3 Определите абсолютную ошибку измерения коэффициента вязкости  $\Delta\eta$  по формуле:

$$\Delta\eta = \varepsilon \bar{\eta}.$$

4 Запишите результат измерения коэффициента вязкости в виде доверительного интервала:

$$\eta = \bar{\eta} \pm \Delta\eta = (\dots \pm \dots), \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

5 Проанализируйте полученный результат, используя справочную таблицу.

Таблица 3 - Вязкость различных водных растворов глицерина

Растворенное вещество	t, °C	$\eta \cdot 10^3$ , Па·с, при массовом содержании растворенного вещества, %									
		10	20	30	40	60	60	70	80	90	100
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> O <sub>3</sub> (глицерин)	20	1,311	1,769	2,501	3,750	6,050	10,96	22,94	62,0	234,6	1499

## 2.4 Контрольные вопросы

1 Что такое вязкость?

2 Сформулируйте и запишите общий закон внутреннего трения - закон Ньютона. Поясните физический смысл величин, входящих в аналитическую запись закона.

3 Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости? Что является единицей измерения этого коэффициента в системе СИ?

4 Поясните механизм возникновения силы вязкости в газах. Как и почему коэффициент вязкости газов зависит от температуры?

5 Почему возникает сила внутреннего трения в жидкости? Как и почему коэффициент вязкости жидкости зависит от температуры?

6 Изложите теоретические основания определения коэффициента вязкости по методу Стокса, используя вывод формулы (28) для определения коэффициента вязкости жидкости.

### 3 Лабораторная работа №123. Определение коэффициента вязкости жидкости с помощью физического маятника

**Цель работы:** Определение коэффициента вязкости жидкости с помощью физического маятника.

#### **Задачи:**

1 Понять: природу вязкости (внутреннего трения) в жидкостях и газах; физический смысл коэффициента вязкости; зависимость коэффициентов вязкости жидкостей и газов от температуры; общий для жидкостей и газов закон внутреннего трения – закон Ньютона; теоретическую основу метода определения вязкости жидкости с помощью физического маятника.

2 Самостоятельно выполнить эксперимент по определению коэффициента вязкости исследуемой жидкости.

3 Провести оценку погрешности и анализ полученного результата коэффициента вязкости исследуемой жидкости, используя справочные материалы.

#### **3.1 Теоретические основания метода**

В данной лабораторной работе используется метод определения коэффициента вязкости жидкости по затуханию колебательного движения шарика, приводимого в движение физическим маятником.

Физический маятник представляет собой систему (рисунок 11), состоящую из стержня (1) длиной  $l$  и массой  $m$ , груза (2) массой  $m_1$  и высотой  $h$ , шарика (3) массой  $m_2$ , находящегося в вязкой жидкости (4). При этом приняты следующие допущения:

- для масс груза и шарика:  $m_1 \gg m_2$  (942 г  $\gg$  60 г);
- для длины стержня и радиуса шарика:  $l \gg r$  ;
- для масс стержня и шарика:  $m \gg m_2$  ;

- для длины стержня и расстояния от оси вращения до центра тяжести груза:  $l \approx l_1$ .

Основное уравнение динамики вращательного движения для физического маятника, совершающего колебания относительно оси, проходящей через точку К, имеет вид:

$$\sum_i \vec{M}_i = I \vec{\varepsilon}, \quad (29)$$

где  $\sum_i \vec{M}_i = [\vec{l}_i \times \vec{F}_i]$  - суммарный момент всех внешних сил, действующих на физический маятник,  $\vec{\varepsilon}$  - его угловое ускорение, а  $I$  - момент инерции.

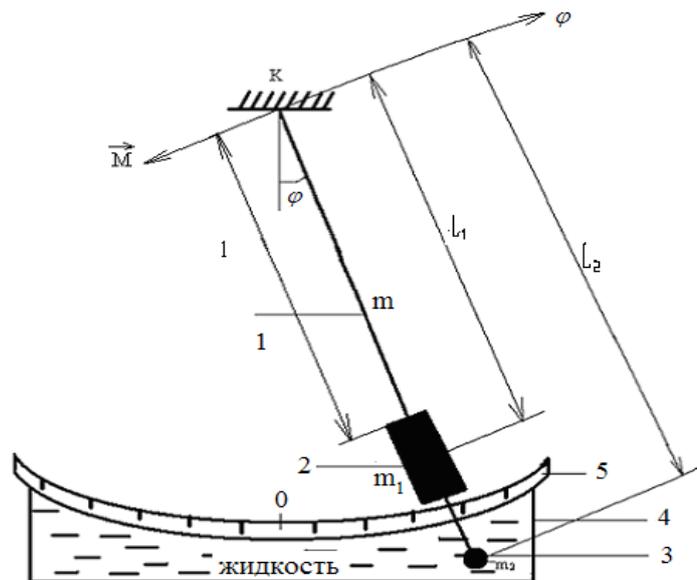


Рисунок 11 – Физический маятник

При отклонении физического маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникают вращательные моменты, которые создают все элементы физического маятника. При этом все моменты внешних сил, действующих на систему, имеют такое направление, что возвращают физический маятник в положение

равновесия. Тогда можно приписать моментам внешних сил и угловому смещению противоположные знаки. С учетом этого:

- момент силы тяжести, действующей на груз массой  $m_1$ , определяется выражением

$$M_1 = -m_1 g l_1 \sin \varphi, \quad (30)$$

- момент силы тяжести, действующей на стержень, определяется выражением

$$M = -m \frac{l}{2} g \sin \varphi, \quad (31)$$

- момент силы сопротивления, возникающей в вязкой жидкости и действующей на шарик, определяется выражением:

$$M_2 = -6\pi r v \eta t_2, \quad (32)$$

- момент силы тяжести, действующей на шарик, определяется выражением:

$$M'_2 = -m_2 g l_2 \sin \varphi. \quad (33)$$

Так как для линейной скорости шарика справедливо:

$$v = \omega l_2 = \frac{d\varphi}{dt} l_2,$$

то формула (32) запишется в виде:

$$M_2 = -6\pi r\eta l_2^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (34)$$

Моменты инерции для всех элементов физического маятника определяются следующим образом:

- для груза  $m_1$ , закрепленного на конце стержня длиной  $l_1$ :

$$I_1 = m_1 l_1^2, \quad (35)$$

- для самого цилиндрического груза высотой  $h$ , вокруг оси, проходящей через верхний край цилиндра (по теореме Штейнера):

$$I_1' = \frac{1}{3} m_1 h^2, \quad (36)$$

- для стержня длиной  $l_1 \approx l$  вокруг оси проходящей через его верхний край (по теореме Штейнера):

$$I = \frac{1}{3} m l_1^2, \quad (37)$$

- для шарика радиуса  $r$  и массы  $m_2$ , закрепленного на расстоянии  $l_2$  от оси вращения:

$$I_2 = m_2 l_2^2. \quad (38)$$

С учетом выражений (30), (31), (32), и (33) суммарный вращательный момент определится выражением:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M} + M'_2. \quad (39)$$

При этом, с учетом (35), (36), (37) и (38) суммарный момент инерции физического маятника равен:

$$I = I_1 + I'_1 + I + I_2. \quad (40)$$

Учитывая соотношения масс ( $m_1 \gg m_2$  и  $m_1 \gg m$ ), можно полагать, что суммарный момент инерции определяется в основном моментом инерции  $I_1$  груза массы  $m_1$ , а суммарный момент сил определяется в основном моментами  $\vec{M}_1, \vec{M}_2$  (момент силы тяжести, действующей на груз, и момент силы сопротивления, действующей на шарик, соответственно).

Тогда основное уравнения динамики вращательного движения (39) в скалярном виде для физического маятника будет иметь вид:

$$M_1 + M_2 = I_1 \varepsilon, \quad (41)$$

где угловое ускорение маятника определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Учитывая, что при углах  $\varphi = 15^\circ$   $\left(15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ рад.}\right)$  можно считать  $\sin \varphi \approx \varphi$  (в радианной мере) и принимая, что  $l_1 \approx l_2$ , с помощью выражений (30), (34) и (40), уравнение (41) приводится к виду:

$$m_1 g l_1 \varphi + 6\pi r r \eta l_2^2 \frac{d\varphi}{dt} + m_1 l_1^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (42)$$

После несложных преобразований, обозначив  $\frac{g}{l_1} = \omega^2$  (где  $\omega$  - циклическая частота колебаний физического маятника), и  $\frac{6\pi r}{m_1} \eta = 2\beta$  (где  $\beta$  - коэффициент затухания колебаний физического маятника), можно записать:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (43)$$

Решение уравнения затухающих колебаний физического маятника (43) имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha). \quad (44)$$

Для определения коэффициента затухания  $\beta$  необходимо определить время  $t_e$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  (2,71) раз.

Полагая коэффициент затухания колебаний физического маятника равным  $\beta = \frac{1}{t_e}$ , имеем:

$$\eta = \frac{m_1}{3\pi r t_e}. \quad (45)$$

Обозначив

$$A = \frac{m_1}{3\pi r},$$

где  $m_1 = 942$  г;  $r = 6,1$  мм;  $\pi = 3,14$ , для вязкости жидкости получим:

$$\eta = \frac{A}{t_e}. \quad (46)$$

### 3.2 Проведение эксперимента

#### *Измерения*

1 Отклоните физический маятник на угол  $10^\circ$ - $15^\circ$ , отсчитывая угол отклонения маятника от положения равновесия по шкале 5 на рисунке 11.

2 Измерьте время  $t_e$ , в течение которого угол отклонения физического маятника уменьшится в 2,71 раза (черная линия) на шкале.

3 Повторите пункт 2 семь раз и полученные данные занесите в таблицу.

Таблица 1- Результаты измерений

$N_i$	1	2	3	4	5	6	7
$t_e$							

4 Рассчитайте значение постоянной величины  $A$  (в системе СИ) по формуле  $A = \frac{m_1}{3 \cdot \pi \cdot r}$ , где  $m_1 = 942$  г,  $m_2 = 60$  г;  $r = 6,1$  мм,  $\pi = 3,14$ .

5 Рассчитайте среднее значение коэффициента вязкой жидкости, учитывая поправочный коэффициент  $k = 6,22$ , обусловленный многочисленными теоретическими допущениями, по формуле:

$$\bar{\eta} = \frac{A}{kt_e}.$$

### 3.3 Обработка результатов эксперимента

1 Найдите среднее значение времени  $\bar{t}_e$  по формуле:

$$\bar{t}_e = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_7}{7}.$$

2 Рассчитайте стандартную погрешность  $\Delta t$  по формуле:

$$\sigma = \Delta t = \sqrt{\frac{\sum(t_i - \bar{t}_e)^2}{n \cdot (n - 1)} + \sigma_{\text{пр}}^2}, \text{ где } \sigma_{\text{пр}} = 0,01 \text{ сек; } n = 7.$$

3 Рассчитайте относительную погрешность определения коэффициента вязкости жидкости по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{\bar{m}_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\bar{t}_e}\right)^2},$$

где  $\Delta m = 0,01$  кг;  $\Delta r = 0,01$  мм.

4 Рассчитайте абсолютную погрешность определения коэффициента вязкости жидкости по формуле:

$$\Delta \eta = \varepsilon \bar{\eta}.$$

5 Запишите результат измерений коэффициента вязкой жидкости в виде доверительного интервала:

$$\eta = \bar{\eta} \pm \Delta \eta.$$

6 Определите вид жидкости, сравнив рассчитанное значение коэффициента вязкости жидкости с табличными значениями, приведенными в таблице 2.

Таблица 2 - Коэффициенты вязкости некоторых жидкостей

Жидкость	Коэффициент вязкости, Па · с .	Температура, °С.
1 Вода	0,001	20
2 Глицерин	1,39	18
3 Масло машинное (легкое)	0,1	18
4 Масло машинное (тяжелое)	0,66	18
5 Масло машинное (темное)	0,24	18
6 Масло касторовое	1,2	18
7 Спирт этиловый	0,12	18

7 Сформулируйте и запишите вывод по результатам вашего лабораторного эксперимента, указывая возможные причины систематических и случайных погрешностей.

### 3.4 Контрольные вопросы

1 Что такое вязкость?

2 Сформулируйте и запишите общий закон внутреннего трения - закон Ньютона. Поясните физический смысл величин, входящих в аналитическую запись закона.

3 Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости? Что является единицей измерения этого коэффициента в системе СИ?

4 Поясните механизм возникновения силы вязкости в газах. Как и почему коэффициент вязкости газов зависит от температуры?

5 Почему возникает сила внутреннего трения в жидкости? Как и почему коэффициент вязкости жидкости зависит от температуры?

6 Изложите теоретические основания определения коэффициента вязкости с помощью физического маятника, используя формулы (41), (42), (43), (44), (45) и (46).

## Список использованных источников

- 1 Иродов, И.Е. Механика. Основные / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. - 312 с.
- 2 Савельев И.В. Курс общей физики в 3т: учебное пособие / И.В.Савельев. – Т 1. Механика. Молекулярная физика. - М., 1987. – 432 с.
- 3 Стрелков, С.П. Механика / С.П.Стрелков. М.: Наука,1975.- 560 с.
- 4 Зисман Г.А. Курс общей физики в 3т: учебное пособие / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. - Т 1. Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны. М.: 1972. – 340 с.
- 5 Кикоин, А.К. Молекулярная физика: учебное пособие для вузов / А.К. Кикоин, К.К. Кикоин. – М.: Наука, 1976. – 476 с.
- 6 Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности /А.Н.Матвеев.- М.: Высшая школа, 1986.- 320 с.
- 7 Анисина, И. Н. Определение коэффициента вязкости методом Стокса [Электронный ресурс]: метод. указ. к лаб. работе № 121 / И. Н. Анисина, О. С. Кравцова, А. Х. Кулеева; М-во образования и науки РФ; Гос. образов. учреждение высш. проф. образования "ОГУ". - Оренбург: ГОУ ОГУ, – 2009.
- 8 Рябина, О.Н. Определение коэффициента трения качения: методические указания к лабораторной работе/ О.Н. Рябина, С.С. Якупов, А.Х. Кулеева. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2208. - 10 с.
- 9 Якупов, С.С. Определение коэффициента вязкости с помощью физического маятника: метод. указания к лаб. работе № 123 / С. С. Якупов, Г. С. Якупов, А. Х. Кулеева . - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2008. - 10 с.