

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

М.Н. Перунова

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 120700.62 Землеустройство и кадастры

Оренбург

2013

УДК 535.31(075.8)

ББК 22.342 я 73

П 27

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент Д.И. Сиделов

- П 27 **Перунова, М.Н.**
Геометрическая оптика в примерах и задачах: учебное пособие /
М.Н. Перунова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ,
2013. - 137 с.

В учебном пособии представлено систематическое изложение законов геометрической оптики. Особое внимание уделено практической стороне курса – построению изображений в различных оптических системах, определению характера изображения, расчету увеличения оптических систем. Все разделы иллюстрированы примерами решения задач, от простых до сложных.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки 120700.62 Землеустройство и кадастры. Пособие может быть использовано в классах с углубленным изучением физики и лицами, занимающимися самообразованием.

УДК 535.31(075.8)

ББК 22.342 я 73

© Перунова М.Н., 2013
© ОГУ, 2013

Содержание

Введение.....	4
Глава 1 Отражение света.....	5
§1 Законы отражения.....	5
§2 Примеры решения задач.....	8
§3 Отражение света от сферической поверхности.....	14
§4 Ход лучей в сферических зеркалах.....	19
§5 Построение изображений в сферическом зеркале.....	23
§6 Увеличение, даваемое сферическими зеркалами.....	31
§7 Примеры решения задач «Сферические зеркала».....	33
Глава 2 Преломление света.....	41
§1 Законы преломления.....	41
§2 Примеры решения задач.....	46
§3 Преломление света на сферической поверхности.....	57
§4 Линзы.....	60
§5 Ход лучей в линзах.....	66
§6 Построение изображений в тонкой линзе.....	68
§7 Аберрация линз.....	74
§8 Примеры решения задач.....	80
Глава 3 Оптические системы.....	104
§1 Система «плоское зеркало» - плоскопараллельная пластина».....	104
§2 Система «линза – плоскопараллельная пластина».....	105
§3 Система «линза – плоское зеркало».....	106
§4 Системы линз.....	108
§5 Оптическая система глаза.....	117
§6 Оптические инструменты, увеличивающие угол зрения.....	124
§7 Примеры решения задач.....	132
Список использованных источников.....	137

Введение

*Вдруг отделился свет от Тьмы
и заматался хаотично...
Но Мрака черные пласты,
молчание храня привычно,
подумали: «Пусть будет Он -
игра теней забавна очень».
Так появилась цепь времен,
в которой день сменялся ночью...
Джон Магвайер*

Свет всегда представлялся человеку одним из самых удивительных, завораживающих и загадочных объектов в природе. Вопрос о природе света долгое время был самым темным пятном в естествознании. Тем не менее, свет позволял и позволяет человеку позвать окружающий мир. Никакие органы чувств не могут сравниться со зрением - большую часть информации мы получаем при помощи зрительного анализатора.

Сегодня каждый школьник знает, что свет – это электромагнитная волна. Доказательством сего факта служат явления интерференции и дифракции, которые можно пронаблюдать для света. Однако получить дифракционную картинку для света непросто. Для этого на преградах или отверстиях, через которые свету предстоит пройти, должно укладываться малое число зон Френеля. На языке математики это условие записывается в виде

$\sqrt{\lambda L} \approx d$ - зона дифракции Френеля;

$\sqrt{\lambda L} \gg d$ - зона дифракции Фраунгофера.

В приведенных выражениях d – размер отверстия или преграды, L – расстояние до плоскости наблюдения, λ - длина волны.

Нетрудно видеть, что приближение плоскости наблюдения к преградам или отверстиям будет приводить к увеличению укладываемых на них числа зон Френеля. Дифракция перестает наблюдаться, мы попадаем в область геометрической оптики. Таким образом, геометрическая оптика – предельный случай волной оптики, когда явлением дифракции можно пренебречь.

Глава 1 Отражение света

§1 Законы отражения

Отражение света – это явление возвращения световой волны в первоначальную среду при попадании на границу раздела двух сред.

Законы отражения света можно получить, используя принцип Гюйгенса Френеля: каждая точка среды, до которой дошел волновой процесс, становится источником вторичных сферических волн. Вторичные сферические волны когерентны, они интерферируют.

1 Луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный из точки падения к границе раздела двух сред, лежат в одной полуплоскости.

2 Угол падения равен углу отражения.

Можно получить законы отражения на основании принципа Ферма. Применение этого принципа позволяет не только доказать законы отражения, но и *получить весьма полезные приемы решения задач.*

Итак, принцип Ферма: ***действительный путь распространения света есть путь, для прохождения которого свету требуется минимальное время по сравнению с другим мыслимым путем между теми же точками.***

Решим следующую задачу. Свет от точечного источника S должен попасть в точку M , отразившись от плоской зеркальной поверхности в некоторой точке N (рисунок 1). Где на отражающей поверхности находится точка N ?

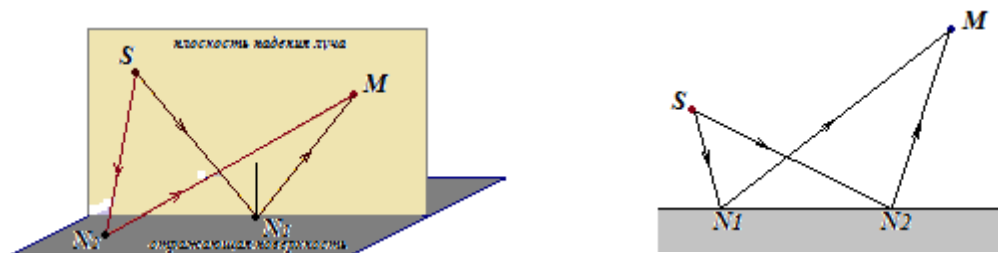


Рисунок 1

От источника S до точки M свет распространяется по ломаной линии SNM . Время распространения света от S до M равно $t = \frac{SN + NM}{v}$, где v – скорость распространения света. Поскольку время распространения света должно быть минимальным, задача сводится к отысканию ломаной SNM минимальной длины. Понятно, что длина ломаной будет минимальна, если падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр, восстановленный из точки падения к отражающей поверхности, должны лежать в одной плоскости.

Построим точку S' , симметричную S относительно отражающей плоскости. Нетрудно видеть, что длина любой ломаной SNM равна длине ломаной $S'NM$ (рисунок 2). Теперь задача сводится к отысканию ломаной $S'NM$, имеющей наименьшую длину. Очевидно, минимальную длину имеет прямая $S'M$. Пересечение этой прямой с отражающей плоскостью дает искомую точку N .

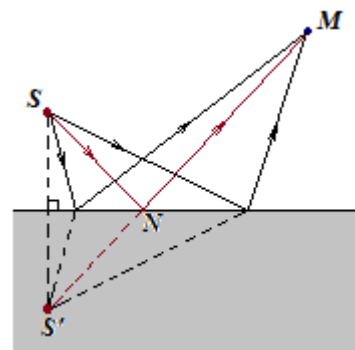


Рисунок 2

Угол α между падающим лучом SN и перпендикуляром к отражающей поверхности, восстановленным из точки падения N , называется углом падения (рисунок 3). Угол отражения β – угол между отраженным лучом и перпендикуляром.

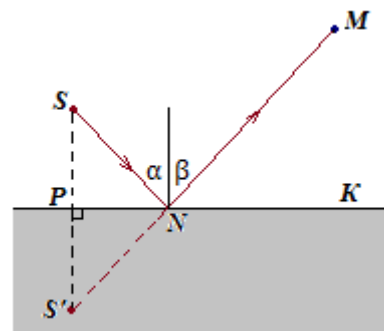


Рисунок 3

Треугольники $\triangle SNP = \triangle S'NP$, поскольку они симметричны. Следовательно, углы $\angle SNP$ и $\angle S'NP$ равны.

Угол падения равен $\alpha = 90^\circ - \angle MNK$. Углы $\angle S'NP = \angle MNK$ как вертикальные. Угол отражения равен $\beta = 90^\circ - \angle MNK = 90^\circ - \angle S'NP$. Из сказанного следует, что угол падения α равен углу отражения β ($\alpha = \beta$).

Чем интересен рассмотренный способ построения отраженного луча?

Очевидно, что не только луч, попадающий в точку M , идет так, будто вышел из точки S' ! **Все лучи** от точечного источника света S после отражения от плоского зеркала пойдут так, как будто вышли из точки S' , симметричной S относительно зеркала. В этом случае говорят, что точка S' является мнимым изображением источника S в зеркале (рисунок 4).

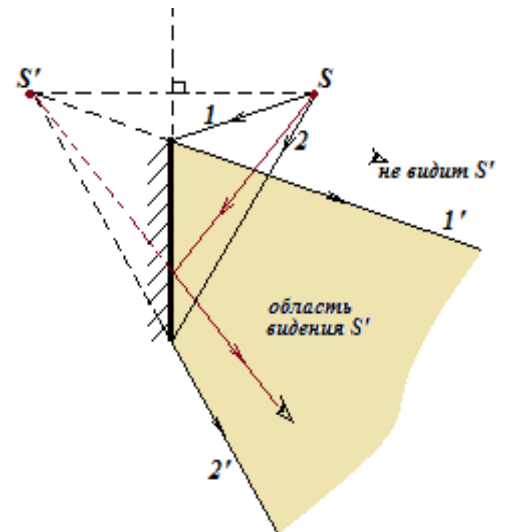


Рисунок 4

Интересно, что для **построения отраженных лучей не требуется транспортир, позволяющий измерить угол падения и построить равный ему угол отражения. Достаточно построить симметрично светящейся точке S ее мнимое изображение S' – все отраженные от зеркала лучи будут идти так, будто вышли из S' .**

Изображение S' видят те наблюдатели, которые находятся в области, ограниченной лучами $1'$ и $2'$, полученные отражением лучей 1 и 2 , падающих на края зеркала.

Ход луча, идущего из S в M после отражения от зеркала, можно было построить иначе (рисунок 5). Достаточно построить точку M' , симметричную M относительно зеркала. Прямая SM , пересекаясь с плоскостью зеркала, дает точку N . Луч, падающий из S в N , после отражения попадает в M . При таком способе построения угол падения α равен углу отражения β . По существу, для нахождения точки N мы **распрямили световой луч**.

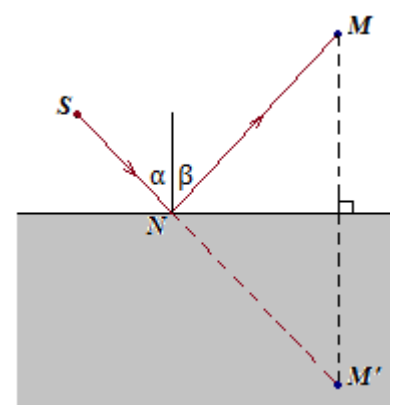


Рисунок 5

Важное замечание

Любой протяженный источник света мы представляем как совокупность точечных источников, от каждого из которых идет расходящийся по всем направлениям пучок лучей. Если после отражения или преломления этот пучок сходится в одну точку (или мнимые продолжения лучей пересекаются в одной точке), то эта точка является **изображением** точечного источника. Если каждая светящаяся точка протяженного источника дает одну точку изображения, но такие изображения называются точечными или **стигматическими**.

Мы показали, что изображением любого точечного источника в плоском зеркале является точка. Это значит, что изображение любого предмета в плоском зеркале будет стигматическим.

§2 Примеры решения задач

Задача 1 Построить изображение предмета AB в плоском зеркале и определить область видения его изображения.

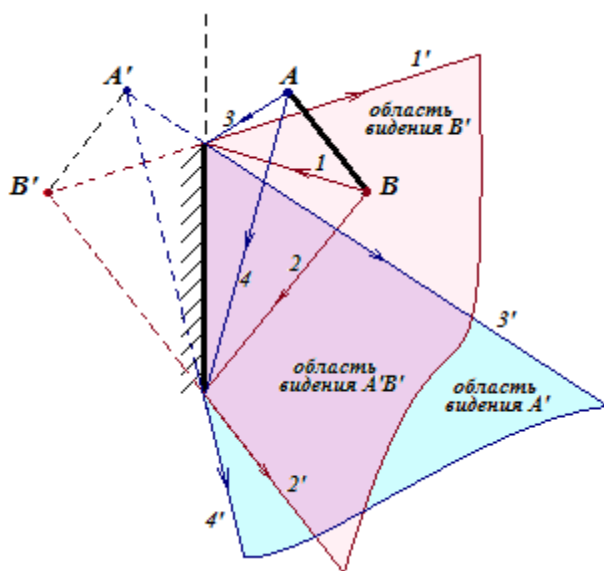


Рисунок 6

будто вышли из точки B' . Область между отраженными лучами $1'$ и $2'$ определяет область видения точки B' . Аналогично находим область видения точки A' .

Изображение отрезка AB в зеркале находится построением отрезка $A'B'$, симметричного AB относительно плоскости зеркала (рисунок 6).

Область видения точки B' , являющейся изображением B , находим построением лучей 1 и 2, падающих на края зеркала. Отраженные лучи $1'$ и $2'$ идут так,

Пересечение областей видения концов отрезка A' и B' дает область видения всего изображения $A'B'$.

Задача 2 Предмет AB расположен перед плоским зеркалом. Какую часть изображения предмета видят наблюдатели 1 и 2 (рисунок 7)?

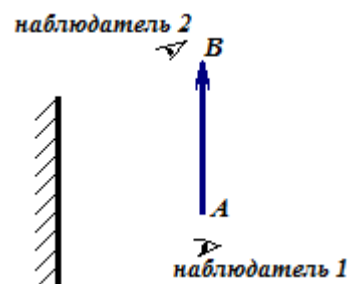


Рисунок 7

Во-первых, строим изображение предмета AB в зеркале — оно расположено симметрично предмету относительно плоскости зеркала

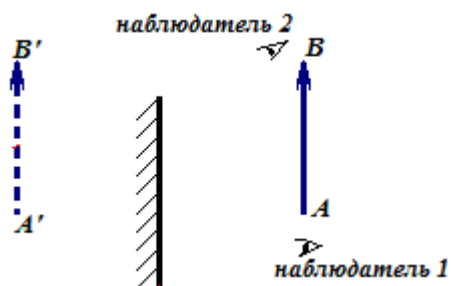


Рисунок 8

(рисунок 8).

Чтобы видеть что-либо «за зеркалом» в глаз наблюдателя должны попасть лучи, отраженные от зеркала. Все отраженные от зеркала лучи, попадающие в глаз наблюдателя, лежат между лучами,

отраженными от краев зеркала. Строим эти лучи для каждого наблюдателя и продлеваем их в область «за зеркалом».

В область видения первого наблюдателя изображение $A'B'$ попало полностью.

В область видения второго наблюдателя попадает только нижняя часть изображения $A'B'$, «голову» изображения второй наблюдатель не видит (рисунок 9).

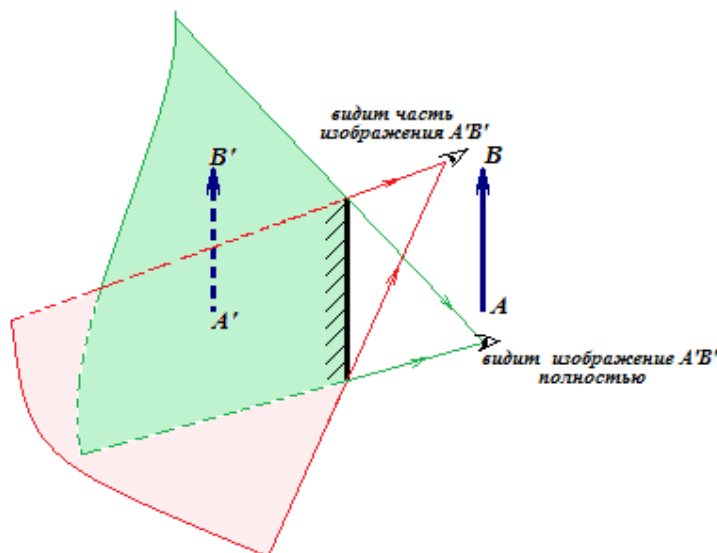


Рисунок 9

Задача 3 Лампочка настольной лампы находится на расстоянии $h = 0,6$ м от поверхности стола и $H = 1,8$ м от потолка. На столе лежит круглое зеркало диаметром $d = 10$ см. Каковы размер и форма «зайчика», полученного на потолке от зеркала.

Нить накала лампы можно считать точечным источником S . Лучи, идущие от точечного источника S , отражаются от зеркала так, будто вышли из точки S' – мнимого изображения S в зеркале (рисунок 10).

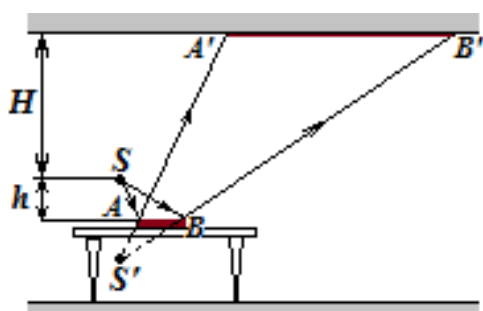


Рисунок 10

Поскольку плоскость зеркала и потолка параллельны, форма «зайчика» будет подобна зеркалу. Диаметр «зайчика» найдем, рассмотрев подобные треугольники $S'AB$ и $S'A'B'$. Мнимое изображение S' расположено симметрично S относительно плоскости

зеркала, следовательно, высота $\Delta S'AB$ равна h . Высота $\Delta S'A'B'$ равна $(H + 2h)$. Тогда

$$\frac{h}{H + 2h} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Диаметр «зайчика»

$$D = A'B' = \frac{(H + 2h)d}{h} = \frac{(1,8 + 1,2)0,1}{0,6} = 0,5 \text{ м.}$$

Задача 4 Луч света падает на двугранное зеркало. Постройте ход отраженного луча, используя линейку и циркуль. Как определить количество отражений, которое испытает луч в двугранном зеркале?

Воспользуемся приемом «распрямления траектории» светового луча (рисунок 11). Строим изображение зеркала 3_2 в зеркале 3_1 – оно располагается симметрично относительно 3_1 .

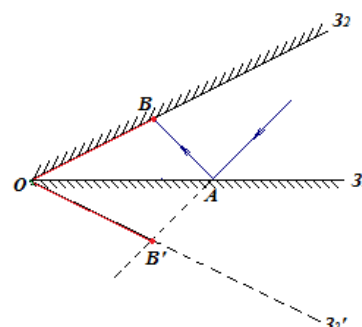


Рисунок 11

Падающий луч попадает на поверхность $3_2'$ в точке B' . Реальный луч, отразившись от 3_1 в точке A , попадет на 3_2 в точке B , такой, что $OB = OB'$.

Аналогичным образом строим дальнейший ход луча (рисунок 12)

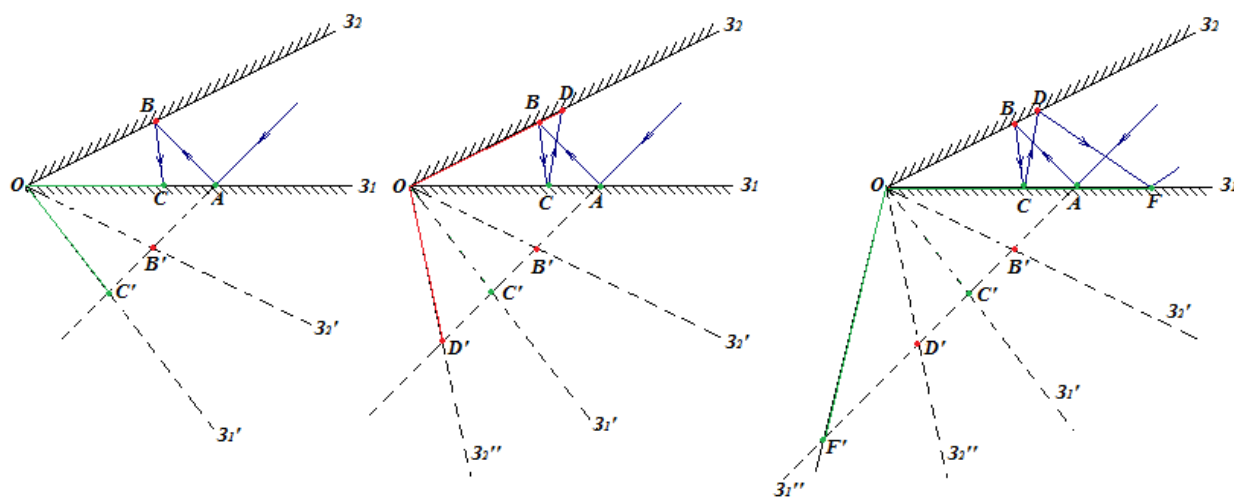


Рисунок 12

Нетрудно видеть, что после двукратного отражения падающий луч поворачивается на удвоенный угол раствора зеркала α .

Падающий луч составляет с поверхностью зеркала 3_1 угол β . Испытав двукратное отражение, он вновь попадает на зеркало 3_1 в точке C (рисунок 13).

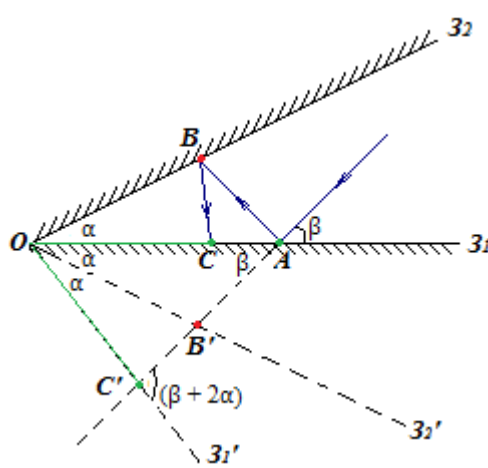


Рисунок 13

Теперь угол между лучом и поверхностью зеркала равен $\angle BSA = \angle B'S'A' = \beta + 2\alpha$ (внешний угол $\triangle B'OC'$ равен сумме двух

внутренних углов, не смежных с ним). Таким образом, луч повернулся на угол 2α .

Если угол раствора зеркала 90° , то после двукратного отражения луч побежит в противоположном направлении. Это свойство двугранного зеркала используется в уголкового отражателя (рисунок 14).

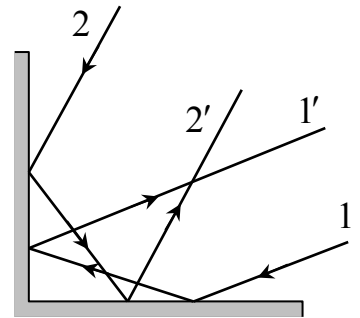


Рисунок 14

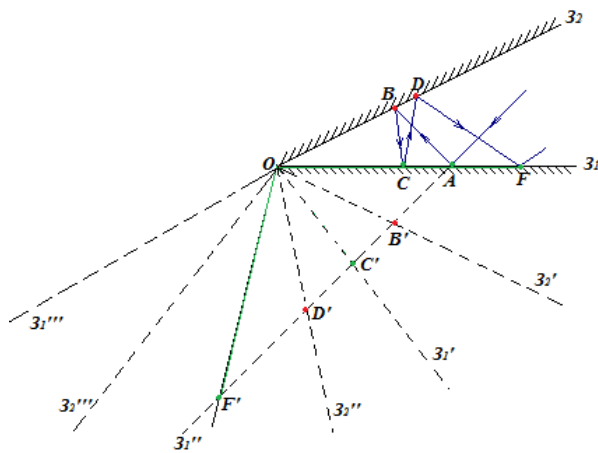


Рисунок 15

Чтобы определить общее количество отражений, которое испытает луч, попавший в двугранное зеркало, достаточно сосчитать число пересечений распрямленного луча с изображениями самих зеркал (рисунок 15).

В нашем случае видно, что распрямленный луч пересекает $3_2'''$, но не пересекает $3_1'''$. Общее число отражений – 6, в точках A, B, C, D, F, K (ее на рисунке не видно).

Задача 5 Построить все изображения точечного источника света S в двугранном зеркале и объяснить, как они получаются.

Световые лучи, отражаясь от зеркал 3_1 и 3_2 , идут так, будто вышли из точек S_1 и S' , расположенных симметрично S относительно зеркал 3_1 и 3_2 (рисунок 16).

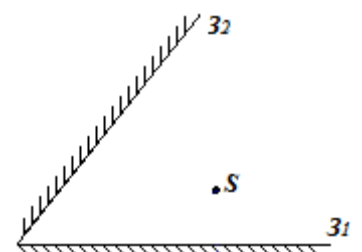


Рисунок 16

3_1 – изображение S в зеркале 3_1 и **источник** для зеркала 3_2 , поскольку часть лучей, отраженных от 3_1 , попадут на 3_2 (рисунок 17).

S' - изображение S в зеркале Z_2 и *источник* для зеркала Z_1 , поскольку часть лучей, отраженных от Z_2 , попадут на Z_1 .

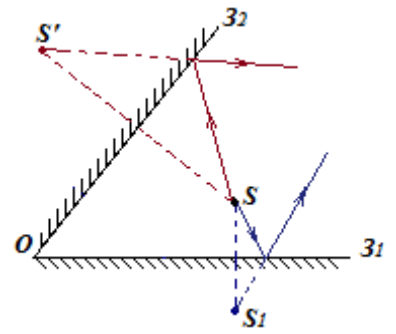


Рисунок 17

Таким образом, *если изображение в одном зеркале оказывается перед отражающей поверхностью другого зеркала, оно даст еще одно изображение и так далее.*

Понятно, что все изображения равноудалены от точки O , следовательно, лежат на окружности с центром в точке O и радиусом OS (рисунок 18).

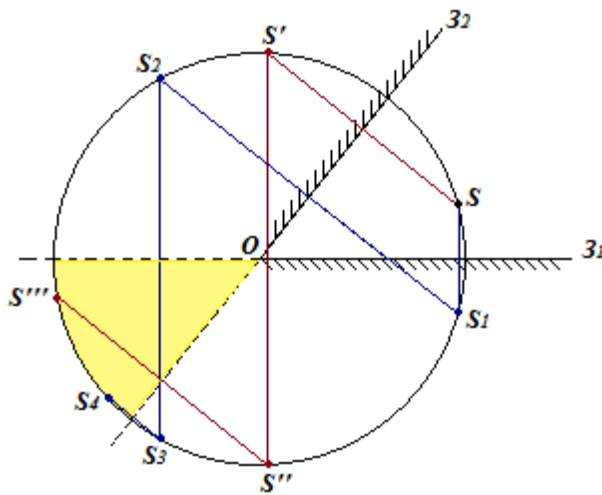


Рисунок 18

S_2 - изображение S_1 в зеркале Z_2 и *источник* для зеркала Z_1 .

S_3 - изображение S_2 в зеркале Z_1 и *источник* для зеркала Z_2 .

S_4 - изображение S_3 в зеркале Z_2 , оно расположено за отражающей поверхностью зеркала Z_1 поэтому *не является источником* для него.

S'' - изображение S' в зеркале Z_1 и *источник* для зеркала Z_2 .

S''' - изображение S'' в зеркале Z_2 , оно расположено за отражающей поверхностью зеркала Z_1 поэтому *не является источником* для него.

Видно, что как только очередное изображение попадает в выделенную область (эта область расположена за отражающими поверхностями зеркал Z_1 и Z_2), оно перестает быть источником для зеркал.

В нашем случае изображений получилось семь.

Ниже показано, как получают изображения S_3 и S''' (рисунок 19).

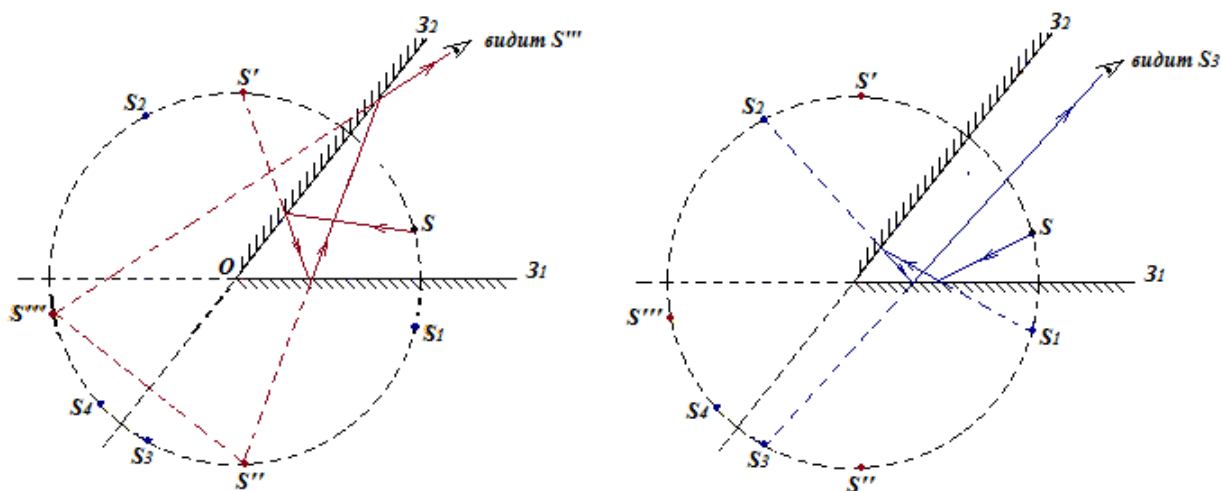


Рисунок 19

§3 Отражение света от сферической поверхности

Сферическое зеркало – это идеальная отражающая поверхность, являющаяся частью сферического сегмента. Сферические зеркала могут быть вогнутыми и выпуклыми (рисунок 20).

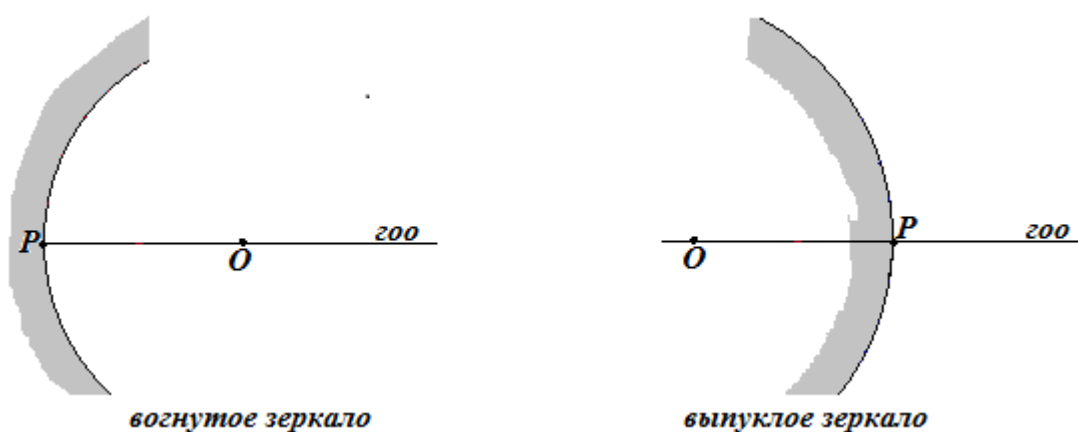


Рисунок 20

Точка O , центр сферической поверхности, называется **оптическим центром** зеркала. Наивысшая точка сферического сегмента, точка P , называется **полюсом зеркала**. Прямая OP – **главная оптическая ось** зеркала.

Пусть точечный источник света S расположен на главной оптической оси вогнутого сферического зеркала на расстоянии $SP = d$ от полюса

зеркала. Рассмотрим ход луча, падающего из S на зеркало под *малым углом* φ .

Согласно закону отражения угол падения равен углу отражения $\angle SKO = \angle OKS'$ (перпендикуляром от отражающей поверхности является радиус OK). Нас будет интересовать, где располагается точка S' , в которой отраженный луч пересекает главную оптическую ось зеркала. Обозначим искомое расстояние $S'P = f$ (рисунок 21).

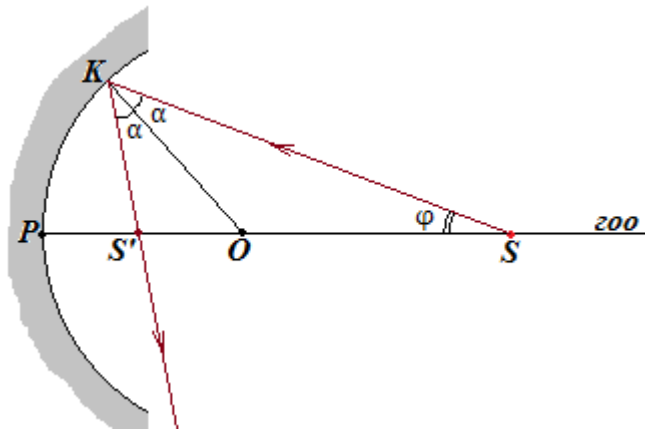


Рисунок 21

Рассмотрим треугольники $\triangle SKO$ и $\triangle SKS'$. Для каждого из треугольников запишем теорему синусов:

$$\frac{SO}{\sin \alpha} = \frac{OK}{\sin \varphi} ; \quad \frac{S'S}{\sin 2\alpha} = \frac{S'K}{\sin \varphi} . \quad (1.1)$$

С учетом принятых обозначений $S'S = d - f$ и $SO = d - R$.

Поскольку угол падения α мал, то точка K располагается близко к полюсу зеркала P . Следовательно, $OK \approx R$ и $S'K \approx f$. Кроме того, синусы малых углов можно заменить на сами углы $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$. Уравнения (1.1) принимают вид:

$$\frac{d - R}{\alpha} = \frac{R}{\sin \varphi} ; \quad \frac{d - f}{2\alpha} = \frac{f}{\sin \varphi} . \quad (1.2)$$

Делим уравнения (1.2) почленно:

$$\frac{2(d-R)}{d-f} = \frac{R}{f}.$$

После математических преобразований получаем

$$\begin{aligned} 2(d-R)f &= (d-f)R \\ 2df - 2Rf &= dR - 2Rf \\ 2df &= dR + Rf. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Разделим уравнение (1.3) на Rdf . Получаем:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d}. \tag{1.4}$$

Проанализируем полученный результат.

1 В выражение (1.4) не вошел угол падения луча на зеркало α . Это означает, что **все лучи, удовлетворяющие параксиальному приближению** (то есть падающие на зеркало под малыми углами), после отражения от зеркала пересекут главную оптическую ось в одной точке S' (рисунок 21).

Точку S' называют изображением источника S в зеркале.

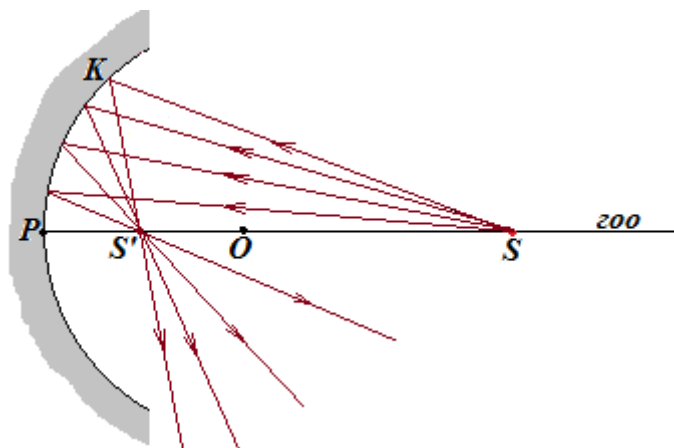


Рисунок 21

2 Выражение (1.4), связывающее расстояние от источника до зеркала d , расстояние от изображения до зеркала f и радиус зеркала R , называется **формулой сферического зеркала**. Формула сферического зеркала применима только для лучей, удовлетворяющих параксиальному приближению.

3 Пусть на зеркало падают лучи, параллельные главной оптической оси. Это равносильно тому, что источник света располагается на бесконечно большом расстоянии от зеркала $d = \infty$. Тогда $\frac{2}{R} = \frac{1}{f} + \frac{1}{\infty}$. Лучи, падающие на

зеркало параллельно главной оптической оси, после отражения пересекут главную оптическую ось в точке, расположенной на расстоянии $f = \frac{R}{2}$ от

полюса. Эта точка называется фокусом сферического зеркала F , а расстояние $PF = \frac{R}{2}$ фокусным расстоянием.

Фокусное расстояние, как и сам фокус, обозначают буквой $F = \frac{R}{2}$.

Фокус вогнутого зеркала действительный – в эту точку поступает световая энергия (рисунок 22). В этом случае фокусное расстояние считается

положительным $F > 0$. Формула сферического зеркала принимает вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

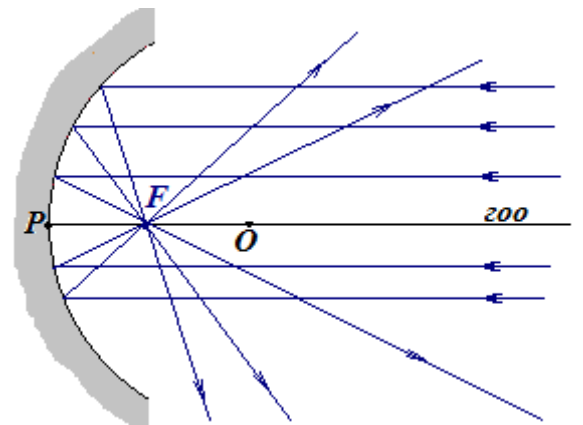


Рисунок 22

4 Аналогичным образом можно показать, что лучи, параллельные главной оптической оси, после отражения от выпуклого зеркала рассеиваются так, как будто вышли из одной точки, называемой фокусом (рисунок 23).

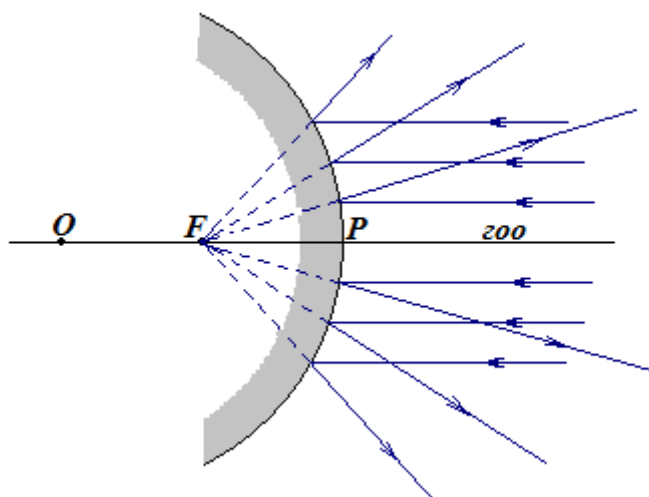


Рисунок 23

Фокус выпуклого зеркала мнимый, в этой точке пересекаются мнимые продолжения отраженных лучей. Фокусное расстояние выпуклого зеркала тоже равно половине радиуса, но ему приписывают отрицательный знак $F = -\frac{R}{2}$. К выпуклому зеркалу тоже применима формула сферического зеркала.

5 Чтобы применить формулу сферического зеркала, нужно помнить **правило знаков**. Любая величина подставляется в формулу со знаком «+», если она действительная. Величина подставляется в формулу со знаком «-», если она мнимая.

Если на зеркало падают расходящиеся лучи, то источник считается действительным, а расстояние от источника до зеркала положительным $d > 0$ (рисунок 24).

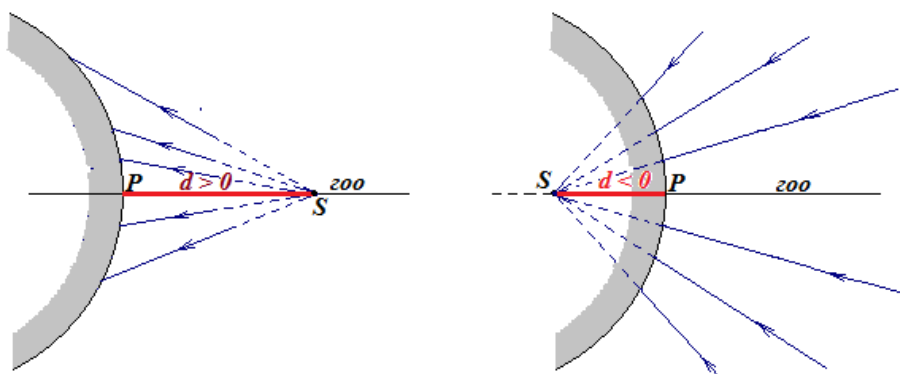


Рисунок 24

Если на зеркало падают сходящиеся лучи, то источник считается мнимым, а расстояние от источника до зеркала отрицательным $d < 0$.

§4 Ход лучей в сферических зеркалах

Для построения изображений определим ход наиболее «простых» лучей падающих на зеркала.

1 Луч, проходящий через оптический центр, после отражения идет в противоположном направлении, поскольку он перпендикулярен отражающей поверхности (рисунок 25).

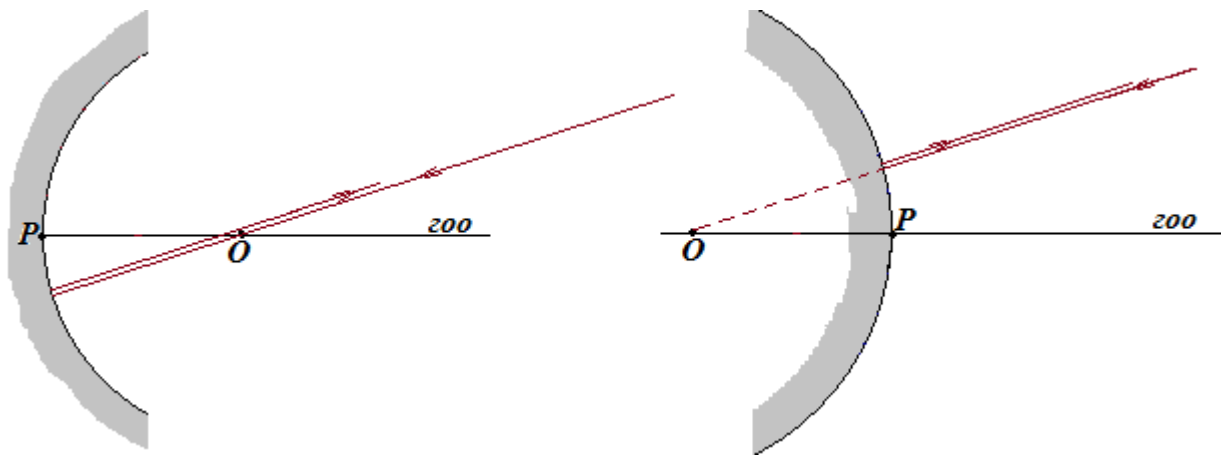


Рисунок 25

2 Луч, падающий в полюс, отражается симметрично главной оптической оси. Согласно законам отражения падающий и отраженный лучи должны быть симметричны относительно перпендикуляра, восстановленного из точки падения к отражающей поверхности. Перпендикуляром в данном случае является главная оптическая ось (рисунок 26).

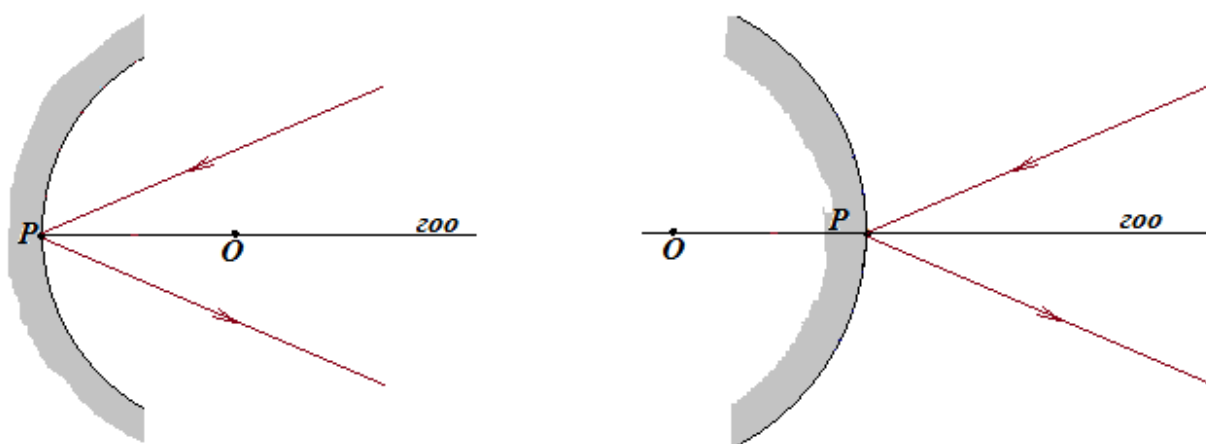


Рисунок 26

3 Луч, идущий параллельно главной оптической оси, после отражения проходит через фокус (рисунок 27).

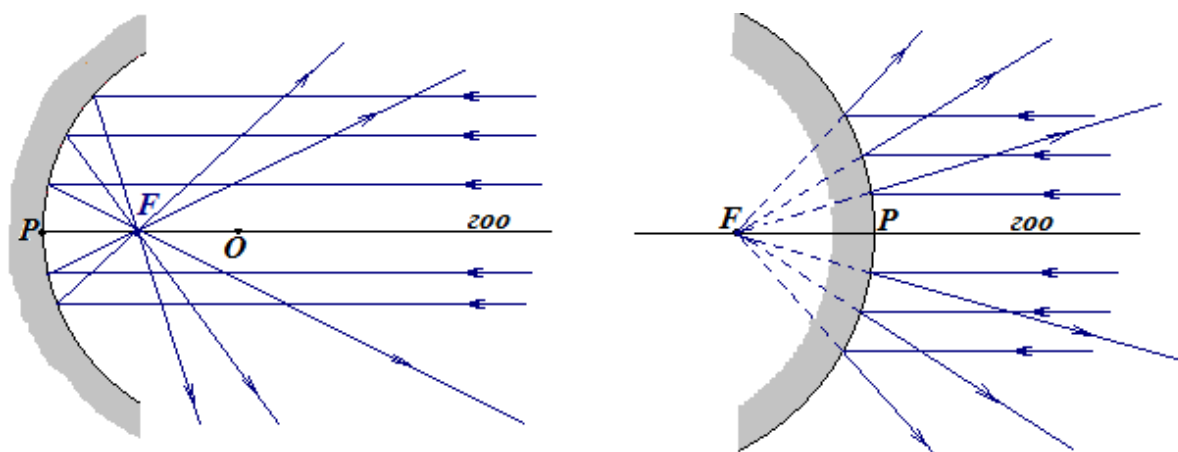


Рисунок 27

4 Луч, идущий через фокус, после отражения становится параллельным главной оптической оси (рисунок 28).

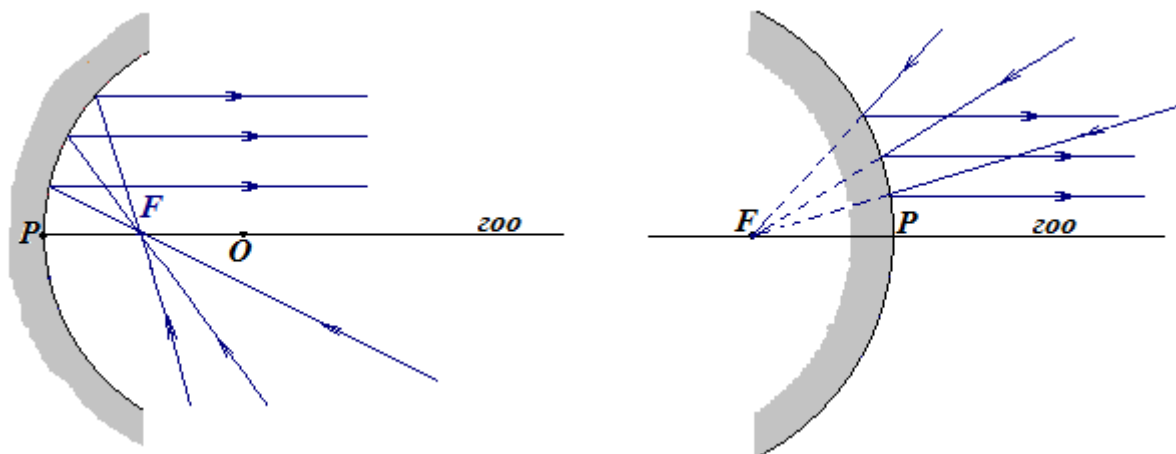


Рисунок 28

5 Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси и проходящая через фокус, называется **фокальной плоскостью**.

Покажем, что параллельные лучи, падающие на зеркало под малым углом к главной оптической оси, после отражения от зеркала проходят через одну точку, расположенную в фокальной плоскости (рисунок 29).

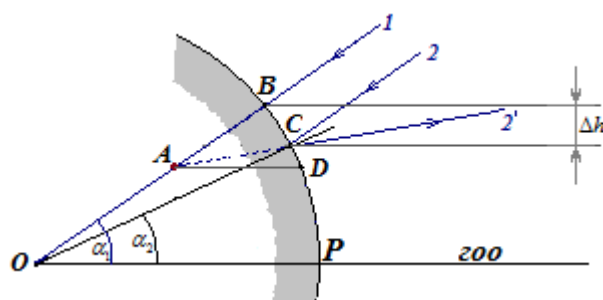


Рисунок 29

На зеркало падают два параллельных луча 1 и 2. Луч 1 проходит через оптический центр, точку O , поэтому он будет отражаться в противоположном направлении. α_1 - угол между лучом 1 и главной оптической осью. OC – радиус, проведенный в точку падения луча 2, он является перпендикуляром к поверхности зеркала и составляет угол α_2 с главной оптической осью. Угол падения луча 2 на зеркало равен $(\alpha_1 - \alpha_2)$. Такой же угол с перпендикуляром составляет и отраженный луч $2'$. Мнимые продолжения отраженных лучей пересекаются в точке A . Найдём расстояние x от точки A до зеркала. Нетрудно видеть, что расстояние

$$\Delta h = OB \cdot \sin \alpha_1 - OC \cdot \sin \alpha_2 = R(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (1.5)$$

Это же расстояние Δh найдем другим способом. Поскольку мы наложили условие параксиального приближения, дуга $PDCB$ близка к прямой. В прямоугольном треугольнике ABD катет $BD = AD \cdot \sin \alpha_1 \approx x \cdot \alpha_1$. В треугольнике ACD $\angle D$ близок к 90° , следовательно, катет

$$CD = AD \cdot \operatorname{tg}(\alpha_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)) = AD \cdot \operatorname{tg}(2\alpha_2 - \alpha_1) \approx AD \cdot (2\alpha_2 - \alpha_1).$$

$$\Delta h \approx BD - CD = AD \cdot \alpha_1 - AD \cdot (2\alpha_2 - \alpha_1) = 2AD(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (1.6)$$

Приравниваем правые части уравнений (1.5) и (1.6):

$$R(\alpha_1 - \alpha_2) = 2AD \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$AD = \frac{R}{2}.$$

Проанализируем полученный результат:

а) Точка пересечения мнимых продолжений отраженных лучей, падавших на выпуклое зеркало параллельно, находится на расстоянии $R/2$ от зеркала, то есть лежит в фокальной плоскости.

б) Результат не зависит от углов α_1 и α_2 . Это значит, что **все параллельные лучи**, удовлетворяющие параксиальному приближению, после отражения от зеркала пройдут через одну точку, расположенную в фокальной плоскости.

с) Точка, в которой пересекаются продолжения отраженных от зеркала лучей, является пересечением луча 1, проходящего через оптический центр, с фокальной плоскостью. Луч 1 в этом случае называют **побочной**

оптической осью, а точку его пересечения с фокальной плоскостью – *побочным фокусом*.

д) Полученный результат справедлив и для вогнутых зеркал.

Лучи, падающие на зеркало параллельно побочной оптической оси, после отражения проходят через побочный фокус (рисунок 30).

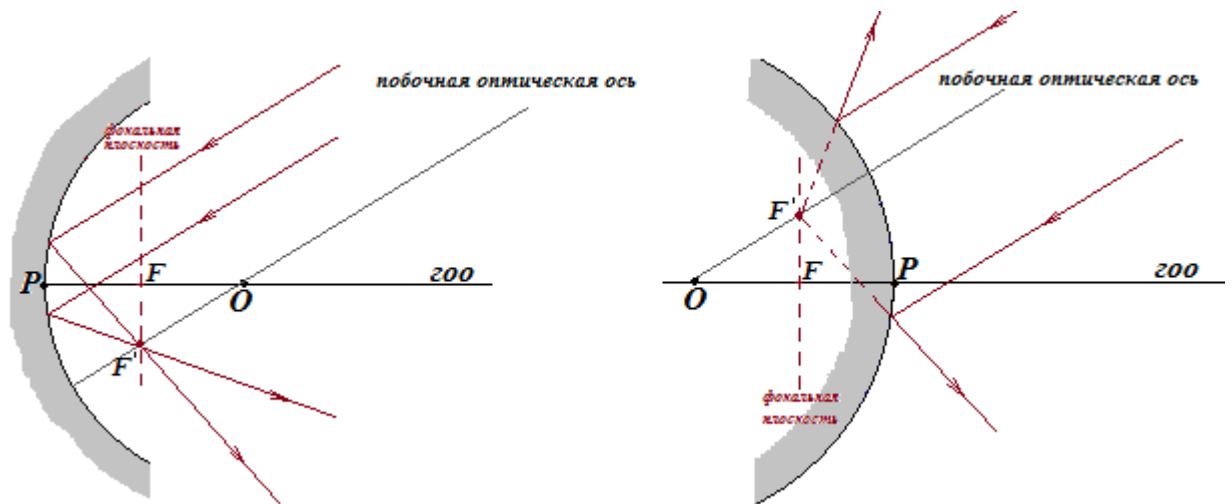


Рисунок 30

§5 Построение изображений в сферическом зеркале

1 Изображение точки, лежащей на главной оптической оси

Все проведенные выше рассуждения справедливы для точек, лежащих на главной оптической оси. Кроме того, лучи, идущие из точки, лежащей на главной оптической оси, должны удовлетворять параксиальному приближению. Только в этом случае изображение точечного источника света будет стигматическим, т.е. все лучи, идущие от точечного источника после отражения в зеркале будут пересекаться в одной точке, называемой изображением (рисунок 31).

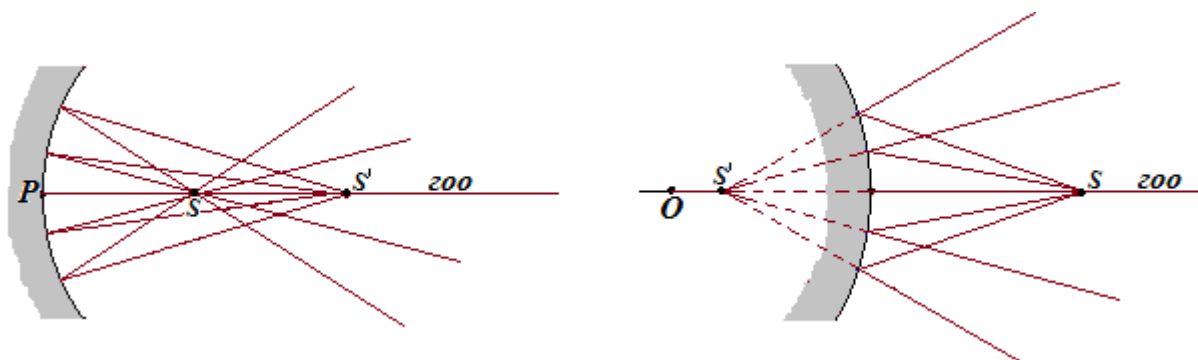


Рисунок 31

Таким образом, для построения изображения светящейся точки достаточно найти точку пересечения любых двух лучей, идущих от источника, после их отражения от зеркала. Покажем, как это делается в двух случаях, когда зеркало вогнутое и выпуклое (рисунок 32).

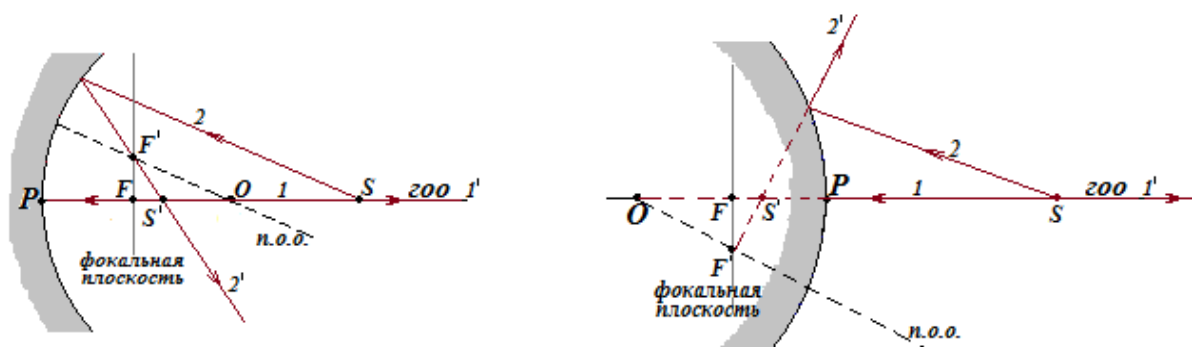


Рисунок 32

S – точечный источник, расположенный на главной оптической оси.

а) В этом случае, все «удобные» для построения лучи (идущий через оптический центр, параллельный главной оптической оси, падающий в полюс, идущий через фокус) совпадают с главной оптической осью – луч 1 после отражения меняет направление на противоположное.

б) Строим фокальную плоскость – она перпендикулярна главной оптической оси и проходит через фокус.

в) Строим произвольный луч 2. Проводим побочную оптическую ось – это прямая, параллельная лучу 2 и проходящая через оптический центр O .

Пересечение побочной оптической оси с фокальной плоскостью дает побочный фокус F' .

д) Луч 2 после отражения проходит через побочный фокус F' .

е) В вогнутом зеркале пересечение лучей 1' и 2' дает действительное изображение S_1S' . В выпуклом зеркале лучи 1' и 2' расходятся, поэтому изображение S' находится пересечением их мнимых продолжений. Соответственно изображение S' в выпуклом зеркале оказывается мнимым.

Видим, что изображение точки, лежащей на главной оптической оси, тоже располагается на главной оптической оси.

2 Изображение точки, не принадлежащей главной оптической оси

Главной оптической осью мы назвали прямую, проходящую через источник света S и центр зеркала O . Поскольку все лучи, идущие из точки на главной оптической оси и удовлетворяющие параксиальному приближению, пересекаются в одной точке, расположенной на этой оси, нетрудно заключить, что изображение любой точки в сферическом зеркале будет стигматическим. Это изображение всегда будет лежать на прямой (на луче), соединяющей источник света S и оптический центр O . Для построения изображения достаточно найти точку пересечения двух любых лучей, идущих из источника S , после их отражения от зеркала (рисунок 33).

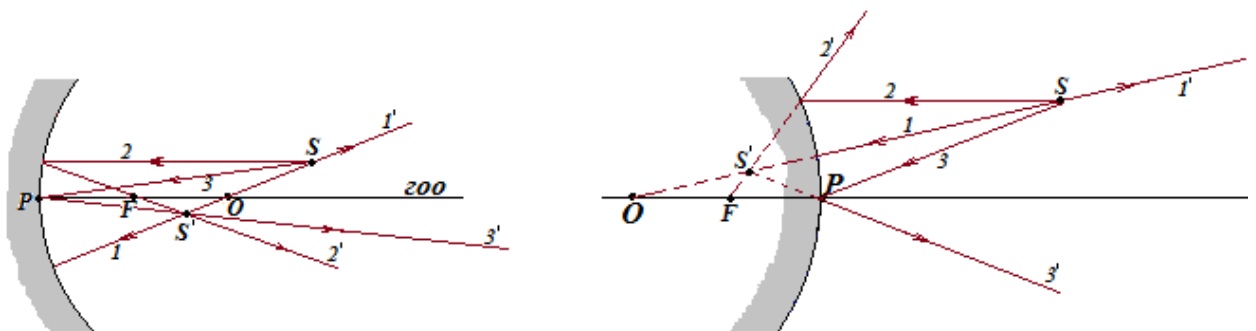


Рисунок 33

а) Строим луч 1, идущий через центр зеркала O . После отражения от зеркала этот луч меняет направление на противоположное. На луче $1'$ (или на его мнимом продолжении) будет лежать изображение точки S .

б) Строим луч 2, идущий параллельно главной оптической оси. После отражения от вогнутого зеркала этот луч проходит через фокус. В случае выпуклого зеркала луч $2'$ пойдет так, будто вышел из фокуса.

с) Пересечение лучей $1'$ и $2'$ дает действительное изображение источника S в вогнутом зеркале. В случае выпуклого зеркала лучи $1'$ и $2'$ расходятся, пересечение их мнимых продолжений дает мнимое изображение точечного источника S .

д) Вместо луча 2 можно было воспользоваться ходом луча 3, падающего в полюс зеркала. Отраженный луч $3'$ пересекается с лучом $1'$ в той же точке S' .

3 Изображение предмета, перпендикулярного главной оптической оси

Рассмотрим светящиеся точки S_1 , S_2 и S_3 , расположенные на одинаковом расстоянии от центра зеркала O . Изображения этих точек лежат на соответственных прямых OS_1 , OS_2 и OS_3 на одинаковых расстояниях от центра O : $OS'_1 = OS'_2 = OS'_3$. Понятно, что *изображением дуги $S_1S_2S_3$ будет дуга $S'_1S'_2S'_3$* (рисунок 34).

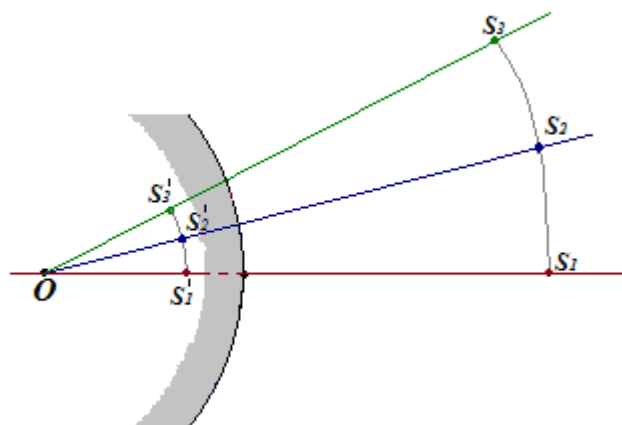


Рисунок 34

Если расстояния S_1S_2 , S_2S_3 , S_1S_3 малы в сравнении с радиусом кривизны зеркала, то вместо дуг (элементов сферы) можно брать хорды (элементы плоскости). Таким образом, малый отрезок, перпендикулярный главной оптической оси, изобразится при помощи параксиальных лучей в виде отрезка, также перпендикулярного главной оптической оси (рисунок 35).

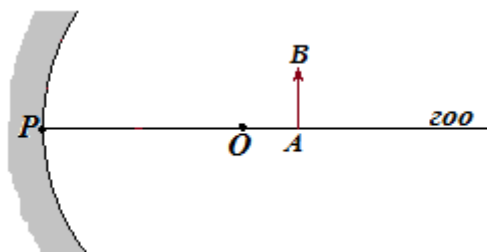


Рисунок 35

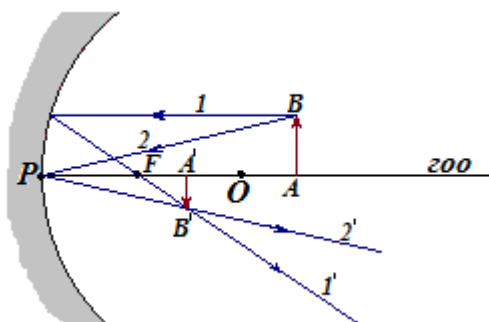


Рисунок 36

Для построения изображения отрезка AB достаточно построить изображение точки B . Для получения изображения точки A нужно опустить перпендикуляр из точки B' на главную оптическую ось (рисунок 36).

Для построения точки B' нашли точку пересечения луча 1, идущего параллельно главной оптической оси, и луча 2, падающего в полюс зеркала (рисунок 37).

Изображение предмета AB действительное, перевернутое, уменьшенное.

Для построения точки B' нашли точку пересечения луча 1, идущего через оптический центр зеркала, и луча 2, падающего в полюс

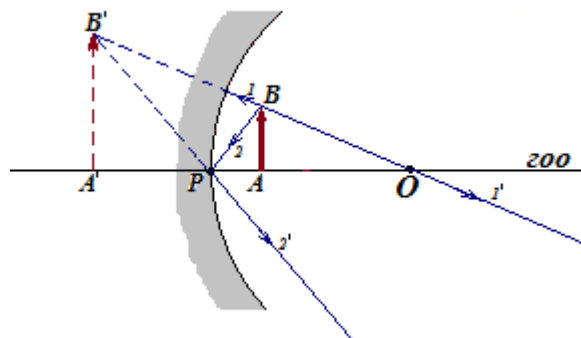


Рисунок 37

зеркала.

Изображение предмета AB мнимое, прямое, увеличенное.

Для построения точки B' нашли точку пересечения луча 1, идущего через оптический центр зеркала, и луча 2, падающего на зеркало параллельно главной оптической оси (рисунок 38).

Изображение предмета AB мнимое, прямое, уменьшенное.

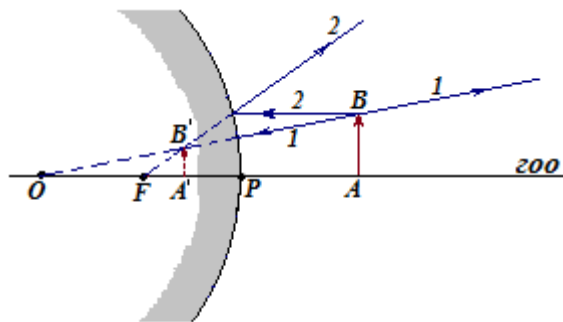


Рисунок 38

4 Изображение предмета, не перпендикулярного главной оптической оси

а) Пусть отрезок AB расположен параллельно главной оптической оси (рисунок 39).

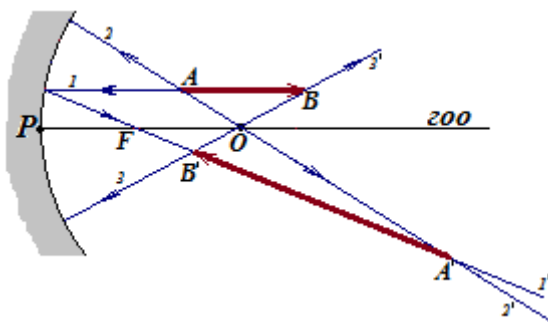


Рисунок 39

Строим луч 1 – на нем расположен весь отрезок AB , следовательно, изображение отрезка $A'B'$ должно лежать на отраженном луче $1'$. В нашем случае луч 1 проходит параллельно главной оптической оси, отраженный луч $1'$ проходит через фокус.

Для нахождения положения изображений концов отрезка A' и B' на луче $1'$, строим лучи 2 и 3, проходящие через оптический центр – после

отражения от зеркала эти лучи изменяют направление на противоположное. Изображение отрезка AB действительное.

Аналогичные построения выполняются при построении изображения отрезка AB в выпуклом зеркале (рисунок 40).

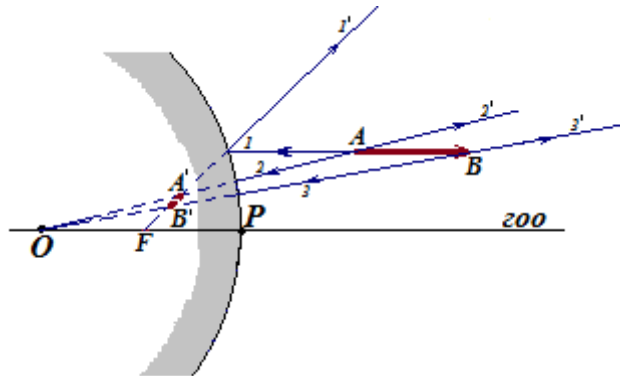


Рисунок 40

Изображение отрезка AB мнимое.

б) Нужно построить изображение отрезка AB , параллельного главной оптической оси, пересекающего фокальную плоскость (рисунок 41).

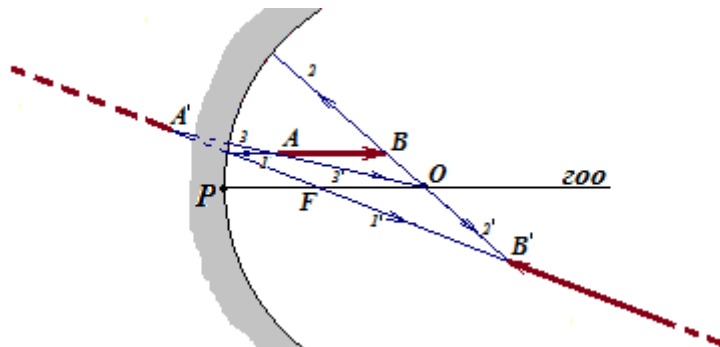


Рисунок 41

Построение начинаем с луча 1, на котором лежит отрезок AB . На отраженном луче $1'$ должно лежать изображение отрезка AB .

Луч 2 идет из точки B и проходит через оптический центр O . После отражения от зеркала он меняет направление на противоположное. Изображение точки B получается пересечением отраженных лучей $1'$ и $2'$ - это изображение действительное.

Луч 3 идет из точки A и проходит через оптический центр O . После отражения от зеркала он меняет направление на противоположное. Изображение точки A получается пересечением мнимых продолжений отраженных лучей $1'$ и $2'$ - это изображение мнимое.

Интересно, что изображение отрезка AB оказывается разорванным. Та часть отрезка, которая расположена между фокальной плоскостью и зеркалом, дает мнимое изображение. Та часть отрезка, которая расположена за фокусом, дает действительное изображение.

с) Построение изображения произвольного отрезка

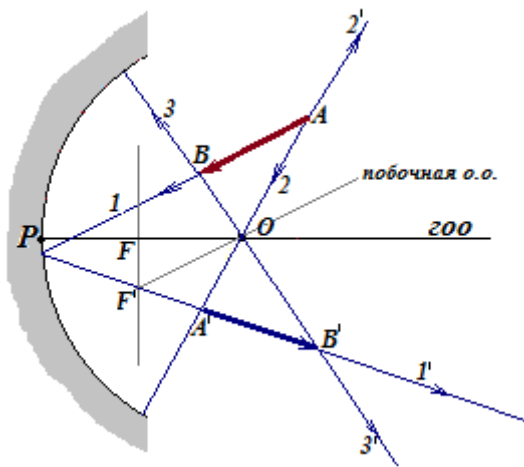


Рисунок 42

Построение начинаем с луча 1, на котором лежит отрезок AB . На отраженном луче $1'$ должно лежать изображение отрезка AB (рисунок 42).

Для построения отраженного луча $1'$ строим побочную оптическую ось – она проходит параллельно лучу 1 через оптический центр O . Побочная оптическая ось пересекает фокальную плоскость в точке F' , побочном фокусе.

Отраженный луч $1'$ проходит через побочный фокус. На отраженном луче $1'$ должно располагаться изображение отрезка AB .

Изображения концов отрезка получаем построением лучей 2 и 3, проходящих через оптический центр O . Изображение $A'B'$ в вогнутом

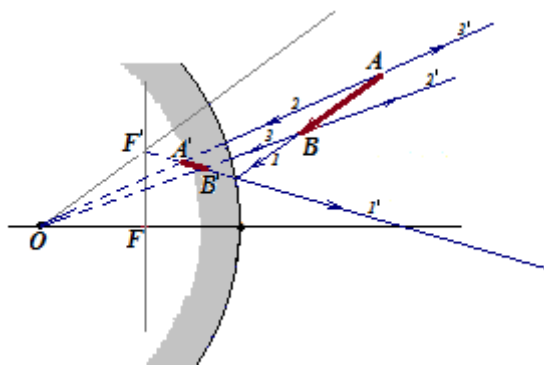


Рисунок 43

зеркале оказалось действительным.

Порядок построения лучей аналогичен построениям в предыдущей задаче (рисунок 43).

Изображение $A'B'$ в выпуклом зеркале оказалось мнимым.

§6 Увеличение, даваемое сферическими зеркалами

Поперечное увеличение

Вернемся к изображению светящегося отрезка, расположенного перпендикулярно главной оптической оси.

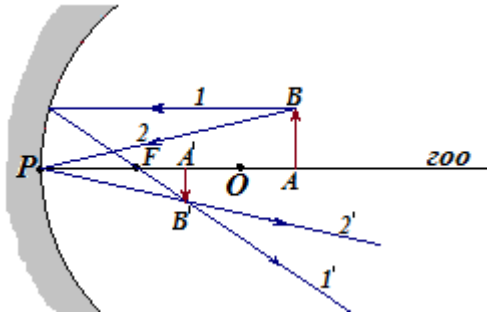


Рисунок 44

Обозначим размер предмета $AB = h$, размер изображения $A'B' = H$ (рисунок 44).

Отношение размера изображения к размеру предмета называется поперечным увеличением

$$\Gamma = \frac{H}{h}.$$

Согласно введенным ранее обозначениям расстояние от предмета до зеркала $AP = d$, расстояние от изображения до зеркала $A'P = f$.

Поскольку лучи 2 и 2' симметричны относительно главной оптической оси, $\angle BPA = \angle B'PA'$. Тогда прямоугольные треугольники ABP и $A'B'P$ подобны. В подобных треугольниках отношение соответственных сторон одинаково

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'P}{AP} \quad \text{или} \quad \Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}.$$

Продольное увеличение

Изображением отрезка AB , лежащего на главной оптической оси, является отрезок $A'B'$, тоже лежащий на главной оптической оси (рисунок 45).

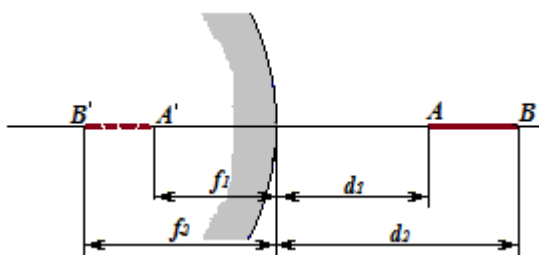


Рисунок 45

Обозначим размер предмета $AB = l$, размер изображения $A'B' = L$.

Отношение размера изображения к размеру предмета называется продольным увеличением

$$\Gamma_{12} = \frac{L}{l}.$$

Для каждого из концов отрезка AB запишем формулу сферического зеркала.

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}.$$

Левые части уравнений можно приравнять

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} = \frac{f_1 - f_2}{f_1 f_2}.$$

Учтем, что длина отрезка $AB = l = d_2 - d_1$, длина его изображения $A'B' = L = |f_1 - f_2|$. Тогда

$$\frac{l}{d_1 d_2} = \frac{L}{f_1 f_2}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{L}{l} = \frac{f_1 f_2}{d_1 d_2} = \Gamma_1 \Gamma_2.$$

§7 Примеры решения задач «Сферические зеркала»

Задача 1 Определить положение зеркала

С помощью сферического зеркала получено изображение $A'B'$ предмета AB . Определите построение положение и фокус зеркала. Вогнутое или выпуклое это зеркало (рисунок 46)?

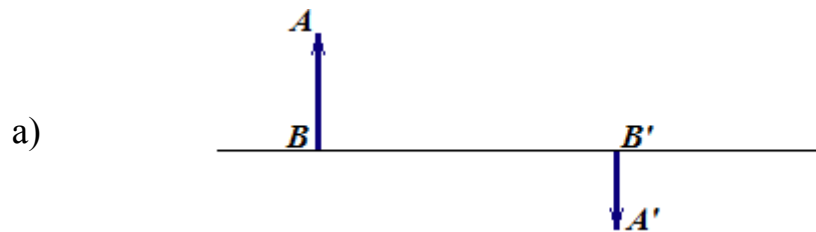


Рисунок 46

Изображение $A'B'$ перевернутое. Такое изображение дает только *вогнутое* зеркало.

Предмет и изображение перпендикулярны прямой BB' , следовательно, прямая BB' является главной оптической осью.

Луч, идущий через оптический центр, после отражения меняет направление на противоположное. На отраженном луче находится изображение точки. Положение оптического центра находим пересечением прямых AA' и BB' (рисунок 47).

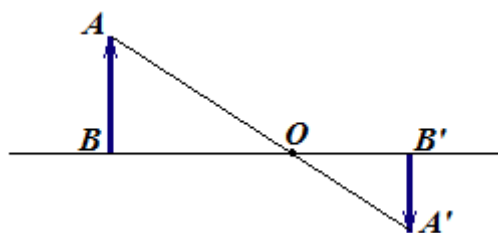


Рисунок 47

Для нахождения полюса зеркала P воспользуемся ходом луча, падающего в полюс – он отражается симметрично главной оптической оси, а на отраженном луче лежит изображение точки. Строим точку A'' , симметричную главной оптической оси. Пересечение прямой $A'A''$ с главной оптической осью дает полюс зеркала (рисунок 48).

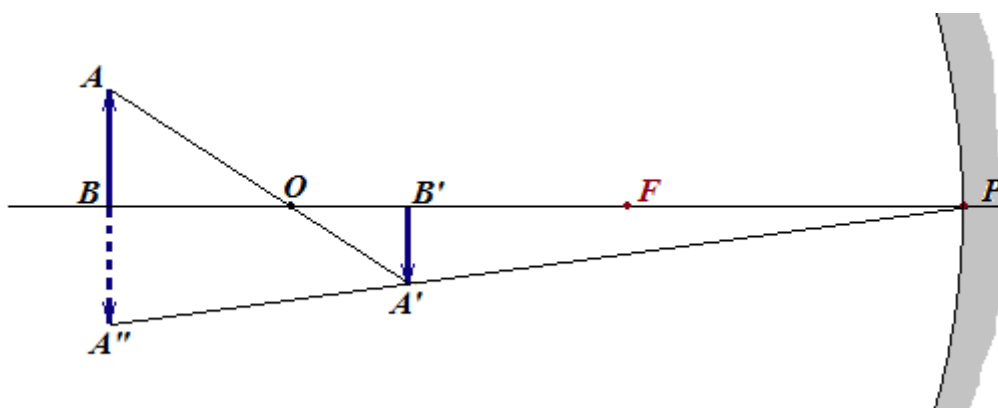


Рисунок 48

Строим дугу радиусом OP с центром в точке O – получаем вогнутое зеркало. Фокус располагается посередине отрезка OP .

Изображение $A'B'$ прямое и уменьшенное. Такое изображение дает только *выпуклое* зеркало (рисунок 49).

б)

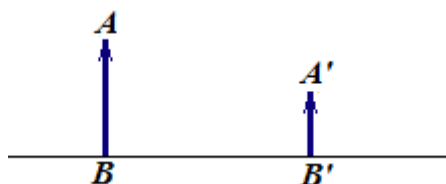


Рисунок 49

Положение оптического центра и полюса зеркала определяем аналогично (рисунок 50).

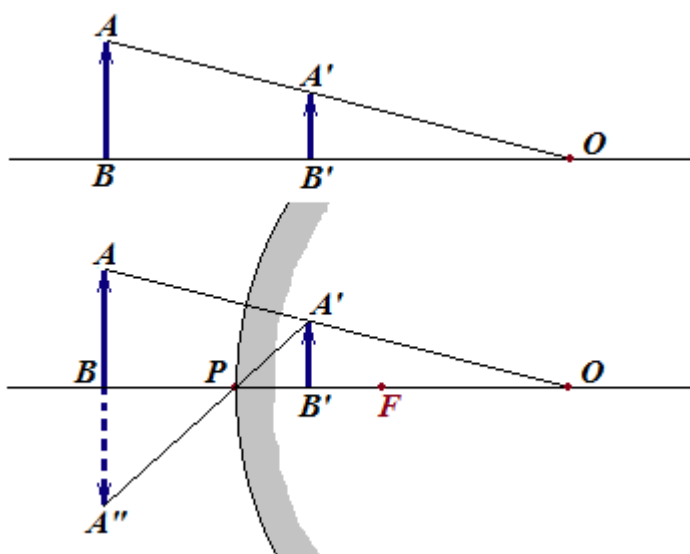


Рисунок 50

Задача 2 Изображение точечного источника не на экране

В качестве отражателя используют вогнутое сферическое зеркало диаметром $D=20$ см с фокусным расстоянием $F=1$ м. На каком расстоянии от зеркала нужно расположить точечный источник, чтобы лучи, отразившиеся от зеркала, образовали на стене пятно диаметром $d=40$ см? Расстояние от зеркала до стены $L=12$ м.

Решение

Светлое пятно на стене может получиться в том случае, если изображение S' точечного источника S оказывается не на стене. Очевидно, возможны два варианта – изображение S' за сеткой (экран в положении $\mathcal{E}_1$) и изображение S' перед стенкой (экран в положении $\mathcal{E}_2$). (рисунок 51).

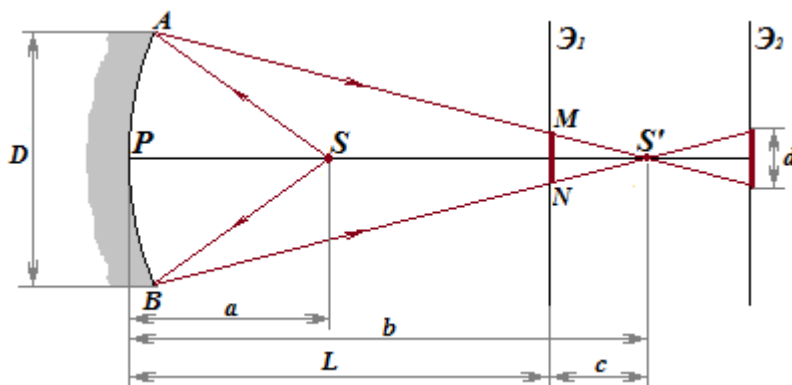


Рисунок 51

Из подобия треугольников $S'AB$ и $S'MN$ следует:

$$\frac{b}{D} = \frac{c}{d},$$

где b - расстояние от изображения до зеркала;

c – расстояние от изображения до стены.

Поскольку $c = b - L$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{b}{D} &= \frac{b-L}{d} \\ bd &= dD - LD \\ b &= \frac{LD}{D-d}. \end{aligned}$$

Расстояние a от источника S до зеркала находим из формулы сферического зеркала

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{D-d}{LD} = \frac{1}{F}$$

$$a = \frac{DLF}{LD - F(D-d)}.$$

После подстановки численных значений получаем $a \approx 1,1$ м.

Для случая, когда изображение точечного источника оказывается перед стенкой, получаем

$$\frac{b}{D} = \frac{L-b}{d}$$

$$bd = LD - dD$$

$$b = \frac{LD}{D+d}.$$

Находим расстояние a от источника до зеркала.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{D+d}{LD} = \frac{1}{F}$$

$$a = \frac{DLF}{LD - F(D+d)} \approx 1,33 \text{ м}$$

Задача 3 Формула сферического зеркала

Сходящиеся лучи падают на выпуклое сферическое зеркало с радиусом кривизны $R = 60$ см так, что их продолжения пересекаются на оси системы в точке S на расстоянии $a = 15$ см за зеркалом. На каком расстоянии от зеркала сойдутся эти лучи после отражения от зеркала? Будет ли точка их пересечения действительной? Решите эту же задачу для $a = 40$ см.

Решение

Поскольку на зеркало падают сходящиеся лучи, точка S является мнимым источником для зеркала (рисунок 52). Расстояние a от источника до зеркала войдет в формулу сферического зеркала со знаком «-»:

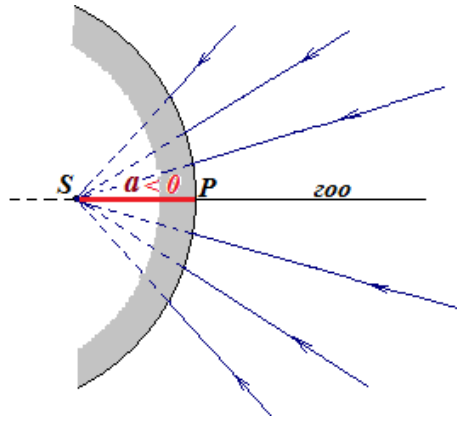


Рисунок 52

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F}$$
$$b = \frac{aF}{F - a}.$$

Фокусное расстояние равно половине радиуса $F = \frac{R}{2} = 30$ см, оно тоже вошло в формулу сферического зеркала с минусом, поскольку зеркало выпуклое, его фокус мнимый.

Для $a = 15$ см получаем $b = \frac{15 \cdot 30}{30 - 15} = 30$ см. Значение b положительное, это значит, что точка схождения лучей действительная, она находится перед зеркалом (рисунок 53).

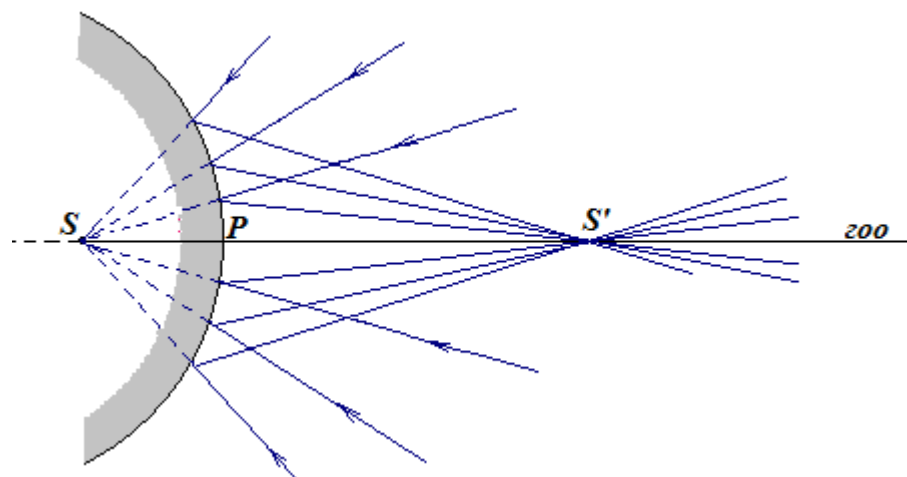


Рисунок 53

Для $a = 40$ см получаем $b = \frac{40 \cdot 30}{30 - 40} = -120$ см. Значение b отрицательное, это значит, что точка схождения лучей мнимая, она находится за зеркалом (рисунок 54).

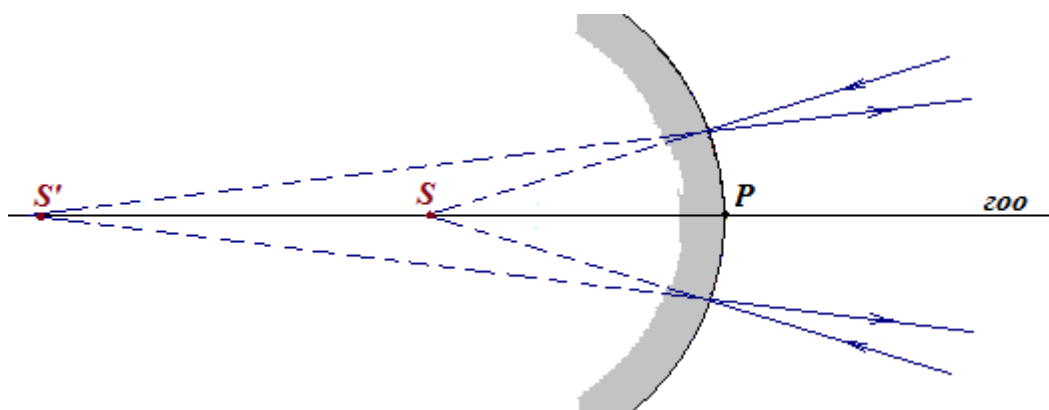


Рисунок 54

Задача 4 Размер изображения

Человек смотрит в вогнутое сферическое зеркало и видит прямое изображение своего глаза. Угловой размер этого изображения в $\beta = 1,8$ раза больше углового размера изображения, которое получилось бы в плоском зеркале, помещенном на такое же расстояние $a = 24$ см. Определите радиус кривизны зеркала.

Решение

а) Человек рассматривает свой глаз в плоском зеркале (рисунок 55)

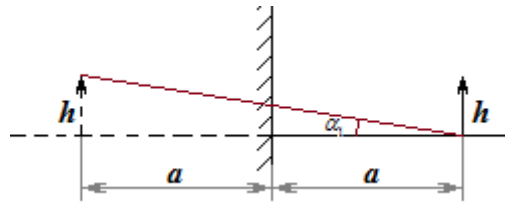


Рисунок 55

Плоское зеркало дает равное изображение, расположенное симметрично предмету относительно зеркала. Угол, под которым видится изображение:

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{2a}.$$

б) Человек рассматривает свой глаз в сферическом зеркале (рисунок 56)

Изображение глаза прямое, следовательно, оно мнимое.

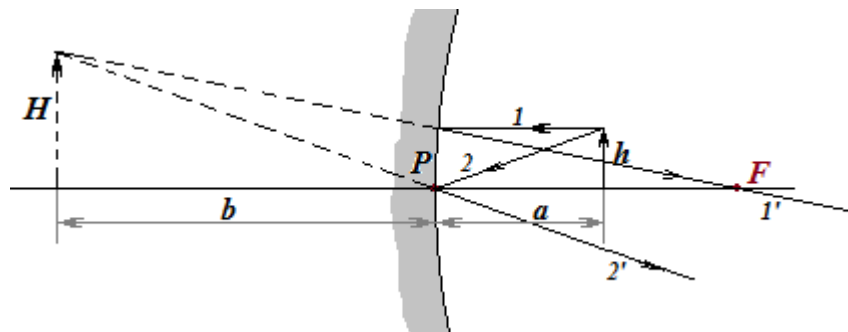


Рисунок 56

Расстояние от изображения до зеркала находим из формулы сферического зеркала:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow b = \frac{aF}{F - a}.$$

Размер изображения

$$H = \Gamma \cdot h = \frac{b}{a} \cdot h = \frac{Fh}{F - a}.$$

Расстояние от глаза до его изображения

$$a + b = a + \frac{aF}{F - a} = \frac{a(2F - a)}{F - a}.$$

Человек видит изображение глаза под углом

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H}{a + b} = \frac{Fh}{F - a} \cdot \left(\frac{a(2F - a)}{F - a} \right) = \frac{Fh}{a(2F - a)}.$$

По условию

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \beta \alpha_1 \\ \frac{Fh}{a(2F - a)} &= \frac{\beta h}{2a} \\ 2F &= \beta(2F - a).\end{aligned}$$

С учетом того, что радиус сферического зеркала вдвое больше фокусного расстояния, получаем

$$R = \beta(R - a)$$

$$R = \frac{\beta a}{\beta - 1} = \frac{1,8 \cdot 24}{1,8 - 1} = 54 \text{ (см)}.$$

Глава 2 Преломление света

§1 Законы преломления

Преломление – это изменением направления распространения света при переходе из одной среды в другую.

Причина преломления – изменение скорости света при переходе из одной среды в другую.

В среде скорость света становится меньше, чем в вакууме. Отношение $\frac{c}{v} = n$ называется абсолютным показателем преломления среды и показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше, чем в вакууме. Показатель преломления n , как правило, зависит только от среды и частоты света и не зависит от угла падения.

Таблица 1 - Показатели преломления различных веществ

Среда	Показатель преломления	Среда	Показатель преломления
Воздух при н.у.	1,0002926	Кварц	1,544
Вода	1,332986	Киноварь	3,02
Глицерин	1,4729	Топаз	1,63
Бензол	1,5	Лед	1,31
Органическое стекло	1,51	Масло оливковое	1,46
Фианит	2,15 – 2,18	Сахар	1,56
Алмаз	2,419	Спирт этиловый	1,36

Найдем соотношение между углами падения и отражения на основании принципа Ферма.

Пусть свет от точечного источника S , расположенного в среде с показателем преломления n_1 , должен попасть в точку M , находящуюся в среде с показателем преломления n_2 . Световой луч, идущий от S , попадает на границу раздела двух сред в точке N – ее положение и нужно найти (рисунок 57).

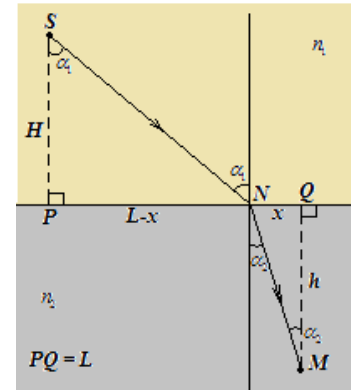
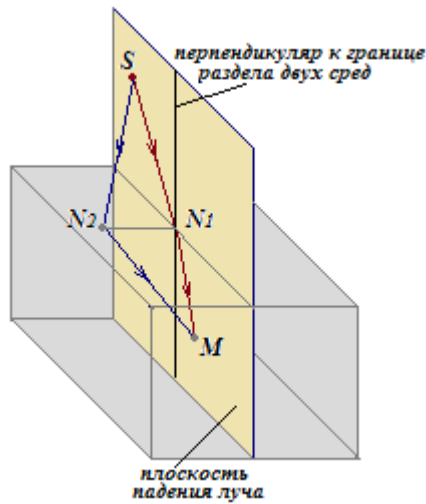


Рисунок 57

Время распространения света вдоль ломаной SNM будет минимальным, если падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр, восстановленный к границе раздела двух сред из точки падения, лежат в одной плоскости.

Время распространения света от S к M равно

$$t = \frac{SN}{v_1} + \frac{NM}{v_2}.$$

Расстояния SN и NM найдем по теореме Пифагора

$$SN = \sqrt{H^2 + (L-x)^2}$$

$$NM = \sqrt{h^2 + x^2}.$$

Тогда время распространения света от S к M равно

$$t = \frac{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_2}.$$

Согласно принципу Ферма время на преодоление пути от S к M должно быть минимальным.

Следовательно, $\frac{dt}{dx} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{2(L-x)(L-x)'}{2v_1\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} + \frac{2x}{2v_2\sqrt{h^2 + x^2}} = \\ &= \frac{-(L-x)}{v_1\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} + \frac{x}{v_2\sqrt{h^2 + x^2}} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{(L-x)}{\sqrt{H^2 + (L-x)^2}} = \sin \alpha_1 \quad \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \sin \alpha_2.$$

Уравнение (2.1) перепишется в виде

$$-\frac{\sin \alpha_1}{v_1} + \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = 0.$$

Выразим скорости света в каждой среде через скорость света в вакууме и абсолютный показатель преломления:

$$v_1 = \frac{c}{n_1}, \quad v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

Тогда

$$-\frac{n_1 \sin \alpha_1}{c} + \frac{n_2 \sin \alpha_2}{c} = 0$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Полученное соотношение между показателями преломления и углами падения и отражения носит название закона Снелла.

Проанализируем полученный результат.

1 Если световой луч падает перпендикулярно границе раздела двух сред, то есть угол падения равен $\alpha_1 = 0$ и $\sin \alpha_1 = 0$, то и угол преломления $\alpha_2 = 0$. Луч не преломляется (рисунок 58).

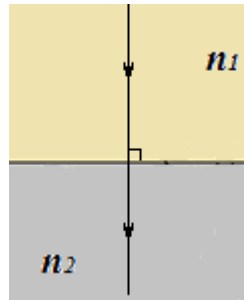


Рисунок 58

2 Допустим, свет переходит из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду, то есть $n_1 < n_2$. Например, свет из воздуха переходит в воду, в стекло. Тогда на основании закона Снелла $\sin \alpha_1 > \sin \alpha_2$, то есть угол падения больше угла преломления – преломленный луч прижимается к перпендикуляру (рисунок 59).

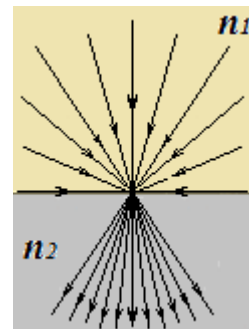
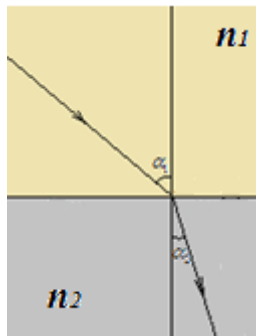


Рисунок 59

При увеличении угла падения α_1 угол преломления α_2 тоже растет. Наибольшее значение угол преломления принимает, когда угол падения близок к $\alpha_1 \rightarrow 90^\circ$.

$$\sin \alpha_{2\max} = \frac{n_1 \sin 90^\circ}{n_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2.2)$$

Таким образом, свет всегда может перейти из оптически менее плотной среды в оптически более плотную среду. Однако углы входа в оптически более плотную среду ограничены предельным углом, определяемым выражением (2.2).

3 Если свет переходит в среду с меньшим показателем преломления, то есть $n_1 > n_2$, то на основании закона Снелла $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$. Угол преломления больше угла падения – световой луч «отскакивает» от перпендикуляра (рисунок 60).



Рисунок 60

При увеличении угла падения α_1 растет и угол преломления α_2 . При определенном значении угла падения, удовлетворяющем условию

$$\sin \alpha_{\text{пред}} = \frac{n_2 \sin 90^\circ}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.3)$$

преломленный луч пойдет вдоль границы раздела двух сред. Дальнейшее увеличение угла падения оказывается невозможным. При углах падения, больших предельного, свет не сможет пройти в оптически менее плотную среду, он будет испытывать **полное внутреннее отражение** (рисунок 61) .

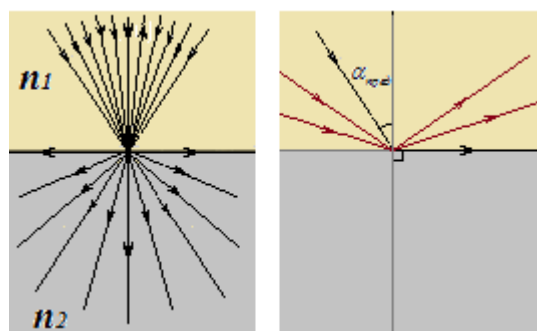


Рисунок 61

Материалы с отрицательным показателем преломления

В 1967 году советский физик Веселаго В.Г. предсказал существование веществ с отрицательным показателем преломления и описал свойства таких веществ. Вещества с отрицательным показателем преломления были получены в 2000 году Дэвидом Смитом (Калифорнийский университет) и Джоном Пендри (Лондонский Имперский колледж) (рисунок 62).

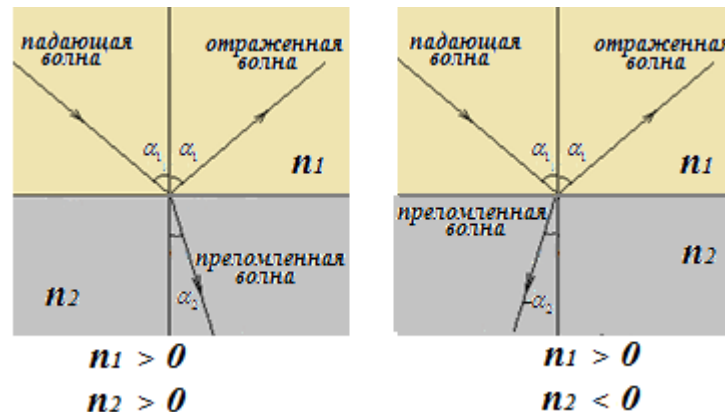


Рисунок 62

§2 Примеры решения задач

Задача 1 Кажущаяся глубина водоема

На дне водоема глубиной H лежит монетка. Наблюдатель разглядывает монетку, расположившись на одной вертикали с монеткой в непосредственной близости от поверхности воды. На каком расстоянии h он видит монетку?

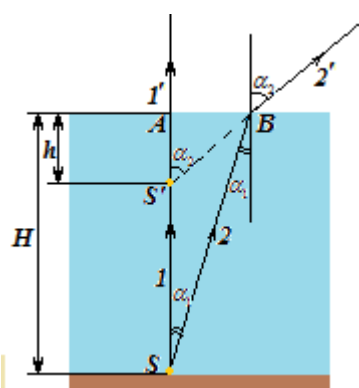


Рисунок 63

Монетка «светит» отраженным солнечным светом. Поскольку поверхность монетки не является зеркальной, отраженные лучи распространяются по всем направлениям (рисунок 63).

Луч 1 падает перпендикулярно границе вода – воздух, по этой причине он не преломляется.

Луч 2, переходя в оптически менее плотную среду, отклоняется от перпендикуляра к границе раздела вода – воздух.

Мнимые продолжения преломленных лучей 1' и 2' пересекаются в точке S' – это кажущееся положение монетки. Найдем положение этой точки.

Рассмотрим треугольники ABS и ABS' :

$$AB = AS \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = H \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (2.4)$$

$$AB = AS' \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = h \cdot \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Приравнивая правые части равенств (2.4), получаем

$$H \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = h \cdot \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (2.5)$$

Поскольку размер зрачка мал, попадающие в глаз человека лучи расходятся под маленькими углами. Для малых углов $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ рад. Равенство (2.5) принимает вид

$$H \cdot \alpha_1 = h \cdot \alpha_2. \quad (2.5')$$

Для луча записываем закон Снелла с учетом малости углов α_1 и α_2 :

$$n_1 \cdot \alpha_1 = n_2 \cdot \alpha_2. \quad (2.6)$$

Учтем, что показатель преломления воздуха $n_2 = n_{\text{возд}} \approx 1$. Тогда уравнение (2.6) принимает вид

$$n_1 \cdot \alpha_1 = \alpha_2. \quad (2.6')$$

Решая совместно (2.5') и (2.6'), получаем

$$H \cdot \alpha_1 = h \cdot n_1 \cdot \alpha_1.$$

$$h = \frac{H}{n_1}.$$

Показатель преломления воды $n_1 = n_{\text{возд}} \approx 1,33 = \frac{4}{3}$. Поэтому кажущаяся

глубина водоема заметно отличается от истинной глубины $h = \frac{3}{4} H$.

Задача 2 Прохождение света через плоскопараллельную пластинку

Луч света падает на прозрачную плоскопараллельную пластинку под углом α_1 и выходит в первоначальную среду. Под каким углом α_3 луч выйдет из пластины? Показатель преломления пластины n_2 .

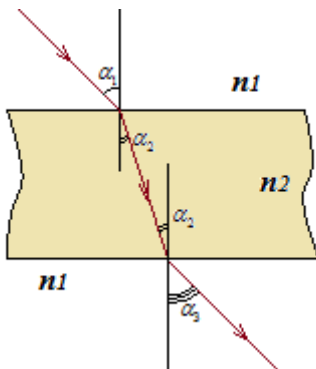


Рисунок 64

Проходя через плоскопараллельную пластину, свет испытывает преломление дважды – на входе и на выходе из пластины (рисунок 64).

Поскольку поверхности пластины параллельны, угол преломления на входе в пластину равен углу падения на выходе из пластины.

Записываем закон Снелла для каждой границы

раздела сред:

$$n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$$

$$n_2 \cdot \sin \alpha_2 = n_1 \cdot \sin \alpha_3$$

$$\alpha_1 = \alpha_3.$$

Нетрудно видеть, что $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_1 \cdot \sin \alpha_3$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_3$.

Свет не изменяет направления распространения при прохождении плоскопараллельной пластины!

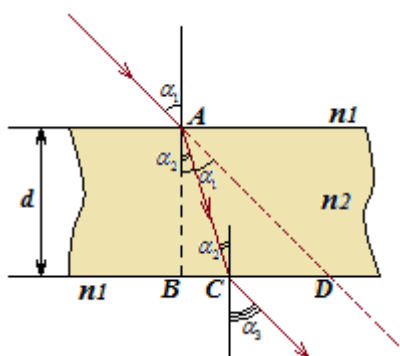


Рисунок 65

Точка «выхода» светового луча из пластины C смещена на расстояние

$$CD = BD - BC = d \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - d \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = d \cdot (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Нетрудно видеть, что смещение луча при прохождении плоскопараллельной пластины прямо пропорционально толщине пластины (рисунок 65).

Понятно, что при прохождении света через плоскопараллельную пластину, набранную из нескольких плоскопараллельных пластин с разными показателями преломления, направление распространения света не изменится (при условии, что на одной из границ раздела сред не произошло полного внутреннего отражения) (рисунок 66).

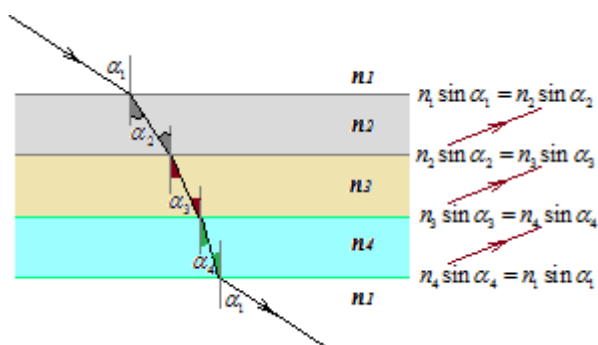


Рисунок 66

Результат не изменится, если показатель преломления будет изменяться в направлении нормали к поверхности плоскопараллельной пластины. Пластину можно мысленно разбить на тонкие слои, внутри каждого из которых показатель преломления будет неизменным. В этом случае мы получаем рассмотренную выше задачу.

Примером «пластины» с меняющимся показателем преломления может служить атмосфера. Ближе к поверхности Земли плотность атмосферы растет, а значит, растет и показатель преломления атмосферного воздуха.

Свет от какой-либо звезды, попадая в оптически более плотные слои атмосферы, прижимается к вертикали. По этой причине кажущееся положение звезды над горизонтом оказывается выше истинного (рисунок 67).

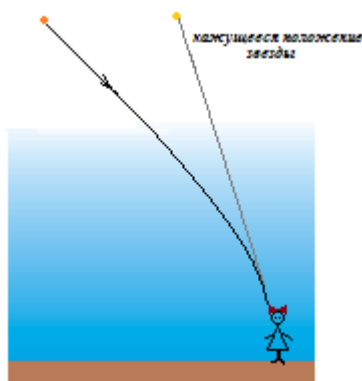


Рисунок 67

Явление отклонения световых лучей от прямой при прохождении атмосферы называется **атмосферной рефракцией**.

Отклонение световых лучей зависит от высоты светила над горизонтом. Очевидно, рефракция отсутствует, когда светало находится в зените. Когда светило находится близко к горизонту, отклонение световых лучей от первоначального направления составляет более $30'$. По этой причине мы видим над горизонтом солнечный диск тогда, когда Солнце уже находится за горизонтом - угловой размер Солнца равен $30'$, он оказывается меньше угла рефракции. Если бы не было атмосферы, то солнечного диска не было бы видно вообще.

Задача 3 Поворотные и оборотные призмы

Явление полного внутреннего отражения используется в поворотных призмах (рисунок 68).

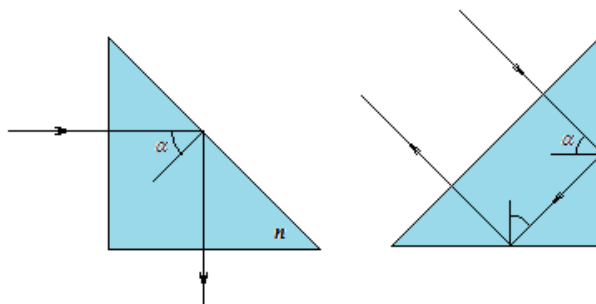


Рисунок 68

Основанием поворотной призмы, как правило, является равнобедренный прямоугольный треугольник. При нормальном падении света на боковую грань призмы он не испытывает преломления на входе в призму и падает на другую грань под углом 45° . Теперь свет должен выйти в воздух – оптически менее плотную среду, а это возможно не всегда. Для того, чтобы свет не вышел из призмы, испытав полное внутреннее отражение, угол падения должен превышать предельный $\alpha > \alpha_{пред}$. Выясним, при каком показателе преломления вещества призмы свет будет испытывать полное внутреннее отражение:

$$\sin 45^\circ > \sin \alpha_{пред}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{n_{возд}}{n}$$

$$n > \sqrt{2}.$$

Ход лучей в оборотной призме показан на рисунке 69.

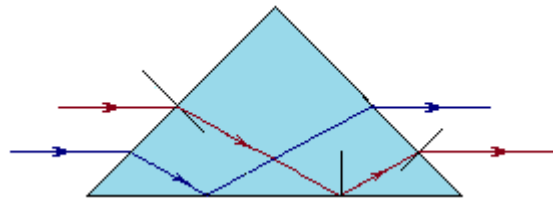


Рисунок 69

Выясним, при каком показателе преломления вещества призмы она может быть оборотной. Если свет падает на призму параллельно ее основанию, то угол падения $\alpha_1 = 45^\circ$ (рисунок 70).

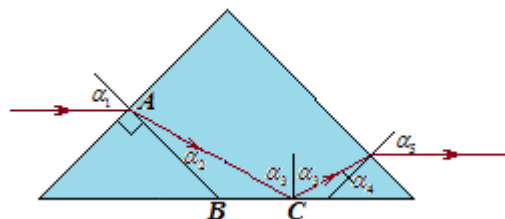


Рисунок 70

Свет входит в призму под углом α_2 , удовлетворяющим условию

$$n_{\text{возд}} \cdot \sin \alpha_1 = n \cdot \sin \alpha_2$$

$$\sin 45^\circ = n \cdot \sin \alpha_2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = n \cdot \sin \alpha_2$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{n\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n\sqrt{2}}.$$

Из треугольника ABC видно, что

$$\alpha_2 + (90^\circ - \alpha_3) = 180^\circ - 135^\circ$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + 45^\circ.$$

Для того, чтобы на нижней грани призмы происходило полное внутреннее отражение, угол падения α_3 должен быть больше предельного

$$\alpha_{\text{пред}} = \arcsin \frac{n_{\text{возд}}}{n} = \arcsin \frac{1}{n}:$$

$$\sin \alpha_3 > \sin \alpha_{\text{пред}}$$

$$\sin(\alpha_2 + 45^\circ) > \frac{1}{n}$$

$$\sin \alpha_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \alpha_2 > \frac{1}{n}.$$

Подставляя значения $\sin \alpha_2$ и $\cos \alpha_2$, получим:

$$\frac{1}{n\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n\sqrt{2}} > \frac{1}{n}$$

$$1 + \sqrt{2n^2 - 1} > 2$$

$$\sqrt{2n^2 - 1} > 1$$

$$2n^2 - 1 > 1$$

$$n^2 > 1$$

$$n > 1.$$

Показатель преломления вещества всегда больше единицы, следовательно, обратную призму можно изготовить из любого прозрачного вещества.

На основе поворотных призм строятся призмные отражатели, широко применяемые для измерения расстояний при проведении геодезических работ. Призмный отражатель работает как зеркальный уголкового отражателя – возвращает падающий луч в противоположном направлении независимо от угла падения луча.

Основным элементом отражателя может служить триппель-призма, ход лучей в которой показан на рисунке 71.

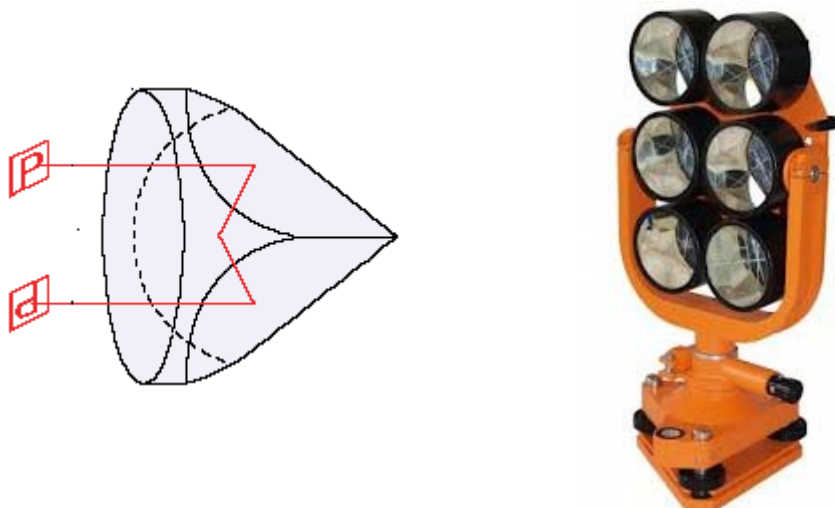


Рисунок 71

Луч лазера, испущенный дальномером, попадает на призмный отражатель и возвращается в прибор. Электронный секундомер измеряет время света в пути. Считая скорость света постоянной, можно определить расстояние между прибором и отражателем

$$L = \frac{ct}{2}.$$

Задача 4 Световод

Световод – устройство для направленной передачи света. В открытом пространстве передача света возможна только в пределах прямой видимости, кроме того в атмосфере свет рассеивается и частично поглощается. Использование световодов позволяет передавать световой сигнал по криволинейной траектории и заметно сократить потери световой энергии при передаче на большие расстояния.

Принцип действия световода основан на явлении полного внутреннего отражения. Допустим, световой пучок, расходящийся под малым углом 2α , падает на торцевую поверхность прозрачного цилиндра, изготовленного из вещества с показателем преломления n (рисунок 72).

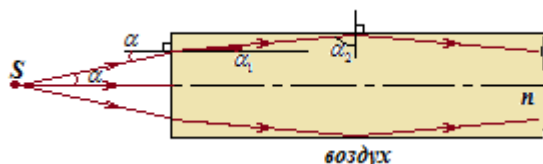


Рисунок 72

Максимальный угол, под который свет попадает в цилиндр, находим из закона Снелла.

$$\alpha = n \cdot \sin \alpha_1.$$

Минимальный угол падения лучей на боковую поверхность цилиндра равен

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1.$$

Свет не выйдет из цилиндра в воздух при выполнении условия

$$\alpha_2 > \alpha_{\text{пред}}$$

$$\sin \alpha_2 > \sin \alpha_{\text{пред}}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) > \frac{1}{n}.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = \cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}.$$

Тогда

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} > \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2} > \frac{1}{n^2}$$

$$\sin \alpha < \sqrt{n^2 - 1}. \quad (2.7)$$

Таким образом, если угол расхождения светового пучка удовлетворяет условию (2.7), свет из цилиндра в воздух не выйдет, он будет распространяться вдоль цилиндра, испытывая полное внутреннее отражение на его боковой поверхности.

Для передачи светового сигнала на большое расстояние при помощи световода нужно подобрать вещество, обладающее малой поглощающей способностью.

Световод (оптическое волокно), как правило, имеет круглое сечение и состоит из двух частей – сердцевины и оболочки. В качестве сердцевины используется кварцевое стекло или пластиковые оптические волокна (рисунок 73). Распространение света по световоду показано на рисунке 74.



Рисунок 73

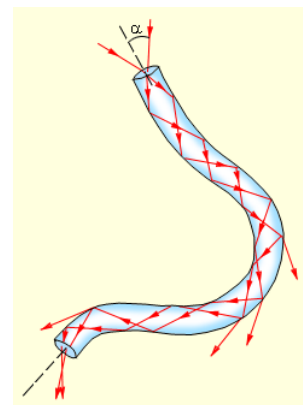


Рисунок 74

Задача 5 Преломление света в тонком клине

Рассмотрим процесс прохождения света через треугольную призму. Пусть преломляющий угол призмы φ и угол падения луча на боковую грань

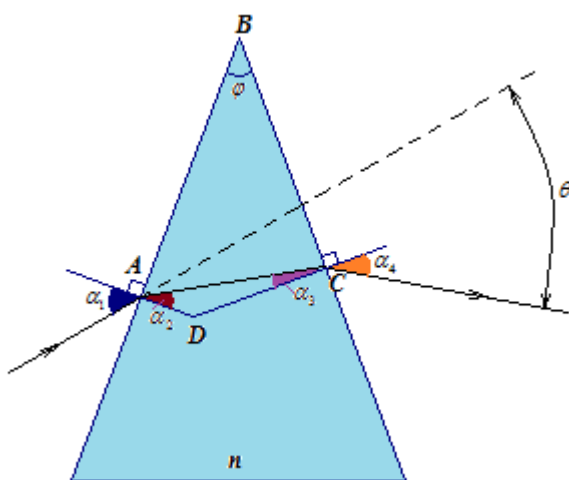


Рисунок 75

призмы α_1 малы (рисунок 75).

Выясним, на какой угол θ отклоняется луч от первоначального направления при прохождении призмы.

На входе в призму свет попадает в оптически более плотную среду – луч прижимается к перпендикуляру. На выходе из призмы свет возвращается в

оптически менее плотную среду – луч отклоняется от перпендикуляра. Таким образом, проходя через треугольную призму, изготовленную из оптически более плотного вещества, чем среда, световой луч отклоняется к основанию.

На входе в призму луч отклоняется от первоначального направления на угол $(\alpha_1 - \alpha_2)$, на выходе из призмы дополнительное отклонение луча составляет $(\alpha_4 - \alpha_3)$. Общее отклонение от первоначального направления составляет угол

$$\theta = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_4 - \alpha_3).$$

На основании закона преломления и с учетом малости углов φ , α_1 и α_2 :

$$\alpha_1 = n\alpha_2 \quad n\alpha_3 = \alpha_4.$$

Угол отклонения луча

$$\theta = (n\alpha_2 - \alpha_2) + (n\alpha_3 - \alpha_3) = \alpha_2(n - 1) + \alpha_3(n - 1) = (n - 1)(\alpha_2 + \alpha_3).$$

Из четырехугольника $ABCD$ следует, что

$$\angle D = 360^0 - 90^0 - 90^0 - \varphi = 180^0 - \varphi.$$

Тогда из треугольника ACD видно, что

$$(\alpha_2 + \alpha_3) = 180^0 - \angle D = 180^0 - (180^0 - \varphi) = \varphi.$$

Для угла отклонения θ получаем

$$\theta = (n - 1)\varphi.$$

Интересно, что результат не зависит угла падения луча на боковую грань призмы – все лучи, падающие на боковую грань под малыми углами, отклоняются от первоначального направления одинаково.

§3 Преломление света на сферической поверхности

Свет от точечного источника S , расположенного в среде с показателем преломления n_1 , попадает в среду с показателем преломления n_2 . Граница раздела двух сред сферическая, центр сферы – точка O .

Рассмотрим произвольный световой луч, падающий на границу раздела двух сред под малым углом α_1 . Луч входит во вторую среду под углом α_2 . Найдём положение точки S' , в которой преломленный луч пересекает прямую SO , соединяющую источник света S с центром сферы O (рисунок 76).

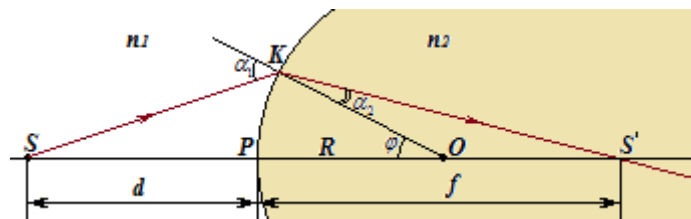


Рисунок 76

Рассмотрим треугольники SKO и $S'KO$. Для каждого треугольника запишем теорему синусов:

$$\frac{SK}{\sin \varphi} = \frac{SO}{\sin(180^\circ - \alpha_1)} \quad \frac{S'K}{\sin \varphi} = \frac{S'O}{\sin \alpha_2}. \quad (2.8)$$

Угол падения α_1 мал, следовательно, угол преломления α_2 тоже мал.
Для малых углов

$$\sin(180^\circ - \alpha_1) = \sin \alpha_1 \approx \alpha_2 \quad \sin \alpha_2 \approx \alpha_2.$$

Ввиду малости угла падения α_1 точка K располагается близко к точке P .

$$\text{Это значит, что } SK \approx SP = d \quad S'K \approx S'P = f.$$

Выражения (2.8) принимают вид:

$$\frac{d}{\sin \varphi} = \frac{d+R}{\alpha_1} \quad \frac{f}{\sin \varphi} = \frac{f-R}{\alpha_2}. \quad (2.9)$$

Разделим уравнения (2.9) друг на друга

$$\frac{d}{f} = \frac{(d+R)\alpha_2}{\alpha_1(f-R)}$$

$$d(f-R)\alpha_1 = f(d+R)\alpha_2. \quad (2.10)$$

Согласно закону Снелла

$$n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2. \quad (2.11)$$

Разделив уравнения (2.9) и (2.10) друг на друга, получаем

$$\frac{d(f-R)\alpha_1}{n_1\alpha_1} = \frac{f(d+R)\alpha_2}{n_2\alpha_2}$$

$$\frac{d(f-R)}{n_1} = \frac{f(d+R)}{n_2}$$

$$d(f-R)n_2 = f(d+R)n_1$$

$$dRn_2 + fRn_1 = df(n_2 - n_1).$$

Разделим обе части последнего выражения на dfR .

$$\frac{dRn_2}{dfR} + \frac{fRn_1}{dfR} = \frac{df(n_2 - n_1)}{dfR}$$

$$\frac{n_2}{f} + \frac{n_1}{d} = \frac{(n_2 - n_1)}{R}.$$

Если относительный показатель преломления второй среды относительно первой обозначить $\frac{n_2}{n_1} = n$, то результат можно записать в виде

$$\frac{n}{f} + \frac{1}{d} = \frac{n-1}{R}. \quad (2.12)$$

Проанализируем полученный результат

1 Мы рассмотрели ход произвольного светового луча, идущего от точечного источника S на прямой SO и удовлетворяющего параксиальному приближению. На основании выражения (2.12), можно утверждать, что **все лучи**, идущие от точечного источника, удовлетворяющие параксиальному приближению, независимо от углов падения на сферическую поверхность, после преломления пересекаются в одной точке. Эту точку называют изображением точечного источника S .

2 Если точечный источник находится далеко от преломляющей поверхности, то есть $d \gg R$, лучи, падающие на сферическую поверхность, можно считать параллельными, а расстояние $d \rightarrow \infty$. После преломления эти лучи пройдут через одну точку, расположенную на расстоянии $f = \frac{nR}{n-1}$ от границы раздела сред. Таким образом, сферическая преломляющая поверхность обладает фокусирующим действием.

§4 Линзы

Линза – это прозрачное тело, ограниченное с двух сторон чаще всего сферическими поверхностями (рисунок 77).

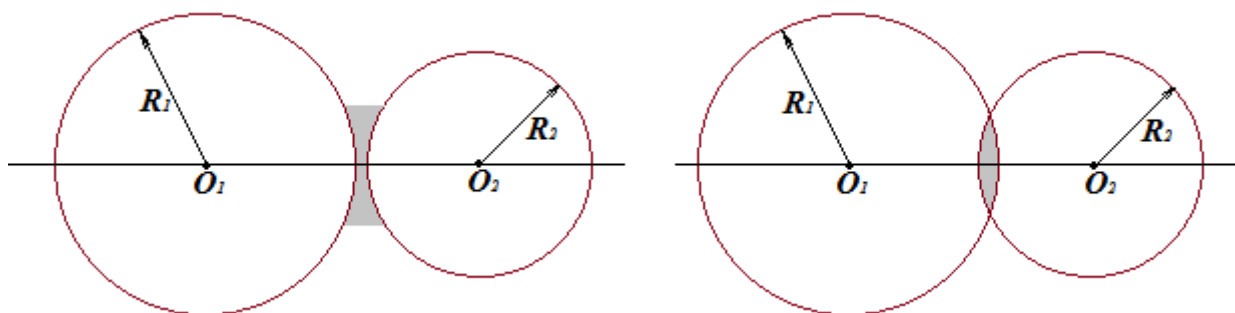


Рисунок 77

По форме линзы делятся на выпуклые и вогнутые (рисунок 78).



Рисунок 78

Проходя через линзу, световой луч дважды испытывает преломление: на входе и на выходе из линзы (рисунок 79).

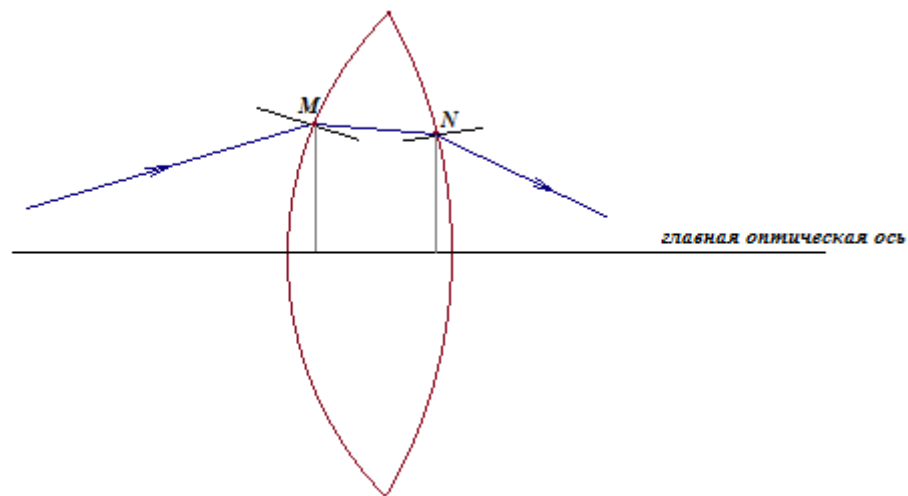


Рисунок 79

Линза называется тонкой, если изменением расстояния от точек входа и выхода луча из линзы до главной оптической оси можно пренебречь. Понятно, что это условие выполняется, если расстояние между преломляющими поверхностями линзы мало. В этом случае можно считать, что тело линзы пересекает главную оптическую ось в одной точке O , называемой **оптическим центром линзы**.

Исследуем свойства тонких оптических линз.

Пусть на главной оптической оси линзы располагается точечный источник света S . Расстояние от источника света S до линзы равно d . Рассмотрим ход произвольного луча, падающего на линзу под малым углом φ_2 . Нас будет интересовать, на каком расстоянии f от линзы этот луч пересечет главную оптическую ось после прохождения линзы (рисунок 80).

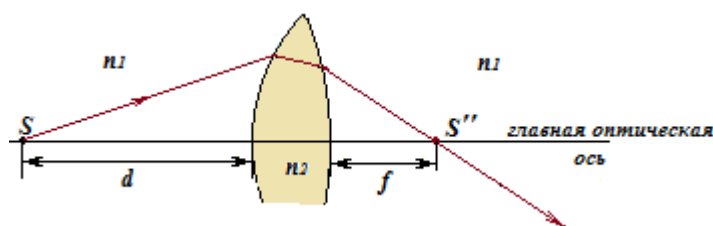


Рисунок 80

После преломления на первой границе луч должен пересекать главную оптическую ось в точке S' , находящейся на расстоянии f' от преломляющей поверхности (рисунок 81).

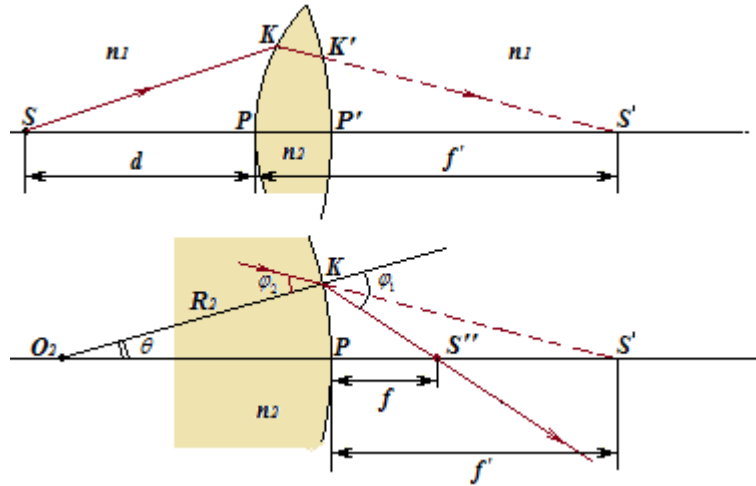


Рисунок 81

Как было показано выше, расстояние f' удовлетворяет соотношению (2.12):

$$\frac{n}{f'} + \frac{1}{d} = \frac{n-1}{R_1}, \quad (2.12')$$

где $K'S' \approx KS' \approx PS' = f'n = \frac{n_2}{n_1}$ - относительный показатель преломления.

Поскольку линза тонкая, точки K и K' , P и P' практически совпадают. Расстояния $K'S' \approx KS' \approx PS' = f'$ и $KS'' \approx PS'' = f$.

Запишем теорему синусов для треугольников O_2KS' и O_2KS'' :

$$\frac{KS'}{\sin \theta} = \frac{O_2S'}{\sin(180^\circ - \varphi_2)} \quad \frac{KS''}{\sin \theta} = \frac{O_2S'}{\sin(180^\circ - \varphi_1)}.$$

Учтем малость углов φ_1 и φ_2 :

$$\sin(180^\circ - \varphi_2) = \sin \varphi_2 \approx \varphi_2, \quad \sin(180^\circ - \varphi_1) = \sin \varphi_1 \approx \varphi_1.$$

$$\frac{f'}{\sin \theta} = \frac{R_2 + f'}{\varphi_2} \quad \frac{f}{\sin \theta} = \frac{R_2 + f}{\varphi_1}.$$

Разделим уравнения друг на друга

$$\frac{f'}{f} = \frac{(R_2 + f')\varphi_1}{\varphi_2(R_2 + f)}.$$

Применим закон Снелла

$$n_1\varphi_1 = n_2\varphi_2 \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} = n \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{(R_2 + f')n}{(R_2 + f)}.$$

Преобразуем полученное выражение

$$\begin{aligned} f' \cdot (R_2 + f) &= f \cdot (R_2 + f')n \\ f' R_2 + f' f &= f R_2 n + f f' n. \end{aligned}$$

Делим обе части уравнения на $ff'R_2$:

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{R_2} = \frac{n}{f'} + \frac{n}{R_2}$$

$$\frac{1}{f} - \frac{n}{f'} = \frac{n}{R_2} - \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{f} - \frac{n}{f'} = \frac{n-1}{R_2}. \quad (2.13)$$

Сложив уравнения (2.12) и (2.13), получаем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2}$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.14)$$

Проанализируем полученный результат.

1 Мы рассмотрели ход произвольного луча, падающего на линзу из точечного источника S . После преломления в линзе луч пересекает главную оптическую ось в точке S' , расположенной на расстоянии f от линзы. Это расстояние не зависит от угла падения луча на линзу. Следовательно, **все лучи**, идущие из S , после преломления в линзе **пройдут через одну точку** S' , называемую изображением светящейся точки S в линзе (изображение светящейся точки в линзе **стигматично**). Разумеется, это верно только для лучей, удовлетворяющих параксиальному приближению.

Результат получен для двояковыпуклой линзы. Однако, он носит всеобщий характер, применим для линзы любой формы.

2 Если источник света расположен далеко от линзы, то есть $d \gg R_1, R_2$, лучи, падающие на линзу, можно считать параллельными главной оптической оси, а расстояние $d \rightarrow \infty$. Параллельные лучи после преломления в линзе пройдут через одну точку F , называемую фокусом. На основании (7) фокусное расстояние можно рассчитать

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$
$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.15)$$

Величина, обратная фокусному расстоянию $\frac{1}{F} = D$, называется оптической силой линзы. Единица измерения оптической силы в СИ $[D] = \left[\frac{1}{\text{м}} \right] = 1 \text{ диоптрия}$.

При определении фокусного расстояния следует помнить, что n - относительный показатель преломления $n = \frac{n_{\text{линзы}}}{n_{\text{среды}}}$. Кроме того, необходимо

соблюсти правило знаков: если поверхность линзы выпуклой стороной смотрит в оптически менее плотную среду, то радиус кривизны R считается положительным, и наоборот.

Допустим, линза имеет выпуклую форму и находится в оптически менее плотной среде $n = \frac{n_{\text{линзы}}}{n_{\text{среды}}} > 1$. В этом случае **фокусное расстояние** оказывается **положительным**, следовательно, после преломления в линзе лучи пройдут через точку F . Фокус линзы, точка F , оказывается действительным, а линза – **собирающей** или **положительной** (рисунок 82).

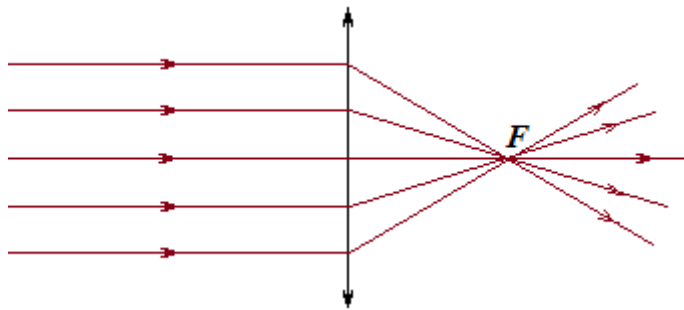


Рисунок 82

Допустим, в оптически менее плотной среде $\left(n = \frac{n_{\text{линзы}}}{n_{\text{среды}}} > 1 \right)$ находится вогнутая линза. Нетрудно видеть, то в этом случае **фокусное расстояние** **оказывается отрицательным**. Это значит, что фокус линзы, точка F , оказывается мнимой. После преломления в линзе лучи рассеиваются так, будто они вышли из одной точки F . Такая линза называется **рассеивающей** или **отрицательной** (рисунок 83).

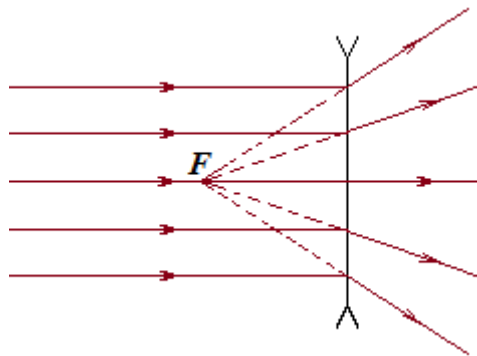


Рисунок 83

У линзы два фокуса. Если среды по обе стороны линзы одинаковые, то фокусы располагаются на главной оптической оси симметрично телу линзы, то есть фокусные расстояния одинаковые.

3 С учетом выражения (2.15) соотношение (2.14) можно переписать в виде

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) носит название формулы тонкой линзы. Любая величина, входящая в формулу тонкой линзы, подставляется со знаком «+», если она действительная, и со знаком «-», если она мнимая.

§5 Ход лучей в линзах

Мы показали, что изображение точки в линзе стигматично при условии параксиальности лучей, идущих из этой точки на линзу. Это значит, что для построения изображения точки достаточно найти точку пересечения любых двух лучей. Наиболее простым является ход следующих лучей.

1 Луч, идущий через оптический центр линзы, не меняет своего направления (не преломляется) (рисунок 84).

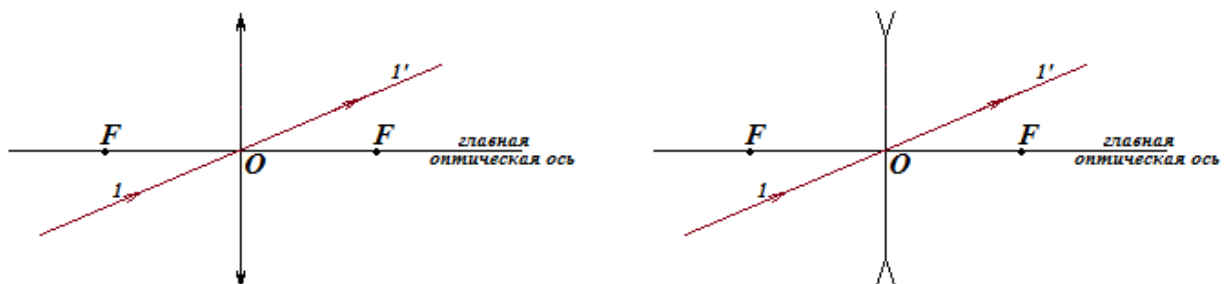


Рисунок 84

Следует помнить, что это правило работает только в том случае, когда среда по обе стороны линзы одинаковая.

Любой луч, идущий через оптический центр, часто называют *побочной оптической осью*.

2 Лучи, идущие параллельно главной оптической оси, после преломления проходят через фокус (или рассеиваются так, как будто вышли из фокуса) (рисунок 85).

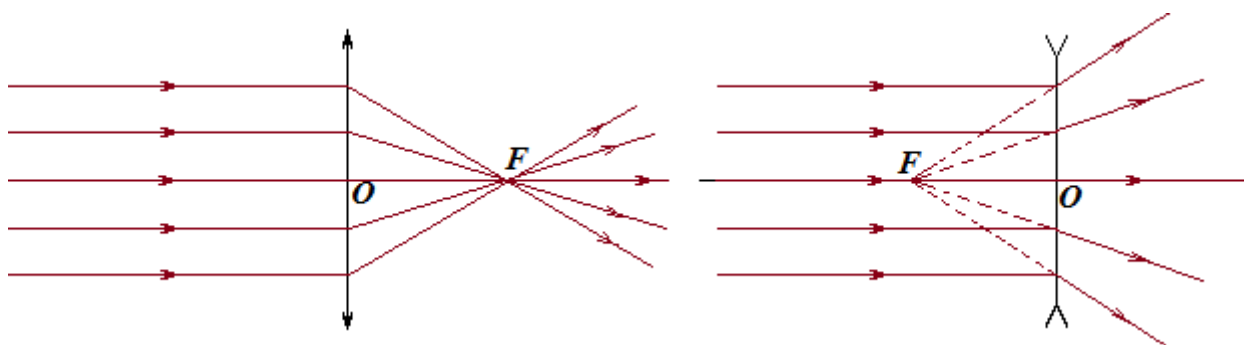


Рисунок 85

3 Из свойства обратимости падающего и отраженного лучей следует, что лучи, идущие через фокус, после преломления в линзе становятся параллельными главной оптической оси (рисунок 86).

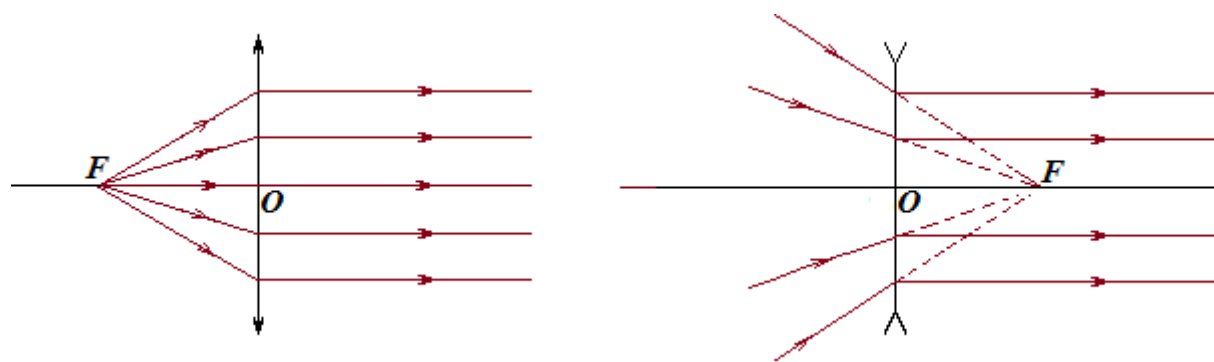


Рисунок 86

4 Лучи, идущие параллельно побочной оптической оси, после преломления в линзе, проходят через побочный фокус (или рассеиваются так, как будто вышли из побочного фокуса) (рисунок 87).

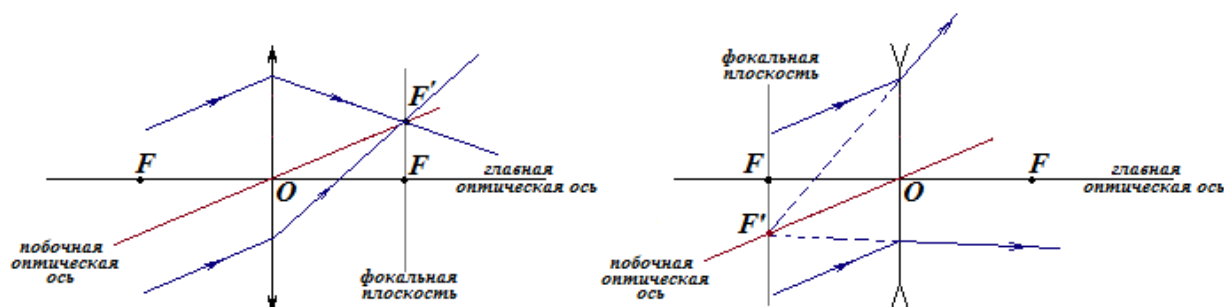


Рисунок 87

§6 Построение изображений в тонкой линзе

Построение изображения светящейся точки S сводится к построению точки S' пересечения двух лучей, идущих от этой точки через линзу. Разумно для этой цели использовать ход «простых» лучей, ибо из свойства стигматичности изображения в линзе мы знаем, что любые другие лучи после преломления в линзе пройдут через найденную точку S' .

Поскольку задача построения изображения точки чисто геометрическая, нет необходимости, чтобы «простые» лучи были реальными! Как правило, реальные лучи, участвующие в формировании изображения, ограничены оправой линзы, диафрагмой. Например, луч, идущий параллельно главной оптической оси, не попадает на линзу, однако, он может быть использован для построения изображения.

1 Изображение точки, лежащей на главной оптической оси
(рисунок 88)

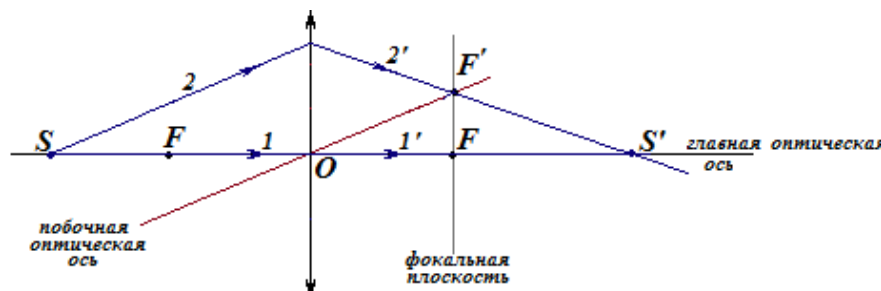


Рисунок 88

а) Лучи, идущие через оптический центр, через фокус и параллельный главной оптической оси совпадают с самой главной оптической осью – это луч 1, он не преломляется в линзе.

б) Строим произвольный луч 2. Проводим побочную оптическую ось, параллельную лучу 2, ее пересечение с фокальной плоскостью дает точку F' - побочный фокус. Преломленный луч $2'$ проходит через побочный фокус.

в) Пересечение лучей 2 и $2'$ дает изображение S' . В рассмотренном примере изображение действительное, ибо оно образовано пересечением самих световых лучей, в эту точку поступает световая энергия.

Аналогично строится изображение в рассеивающей линзе.

После преломления в линзе лучи 1' и 2' расходятся. Изображение S' находится на пересечении мнимых продолжений преломленных лучей. Изображение S' мнимое (рисунок 89).

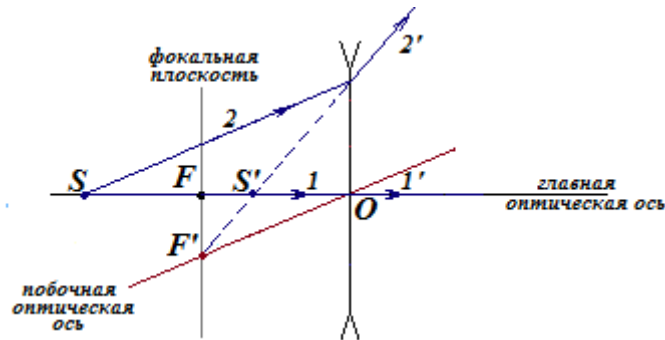
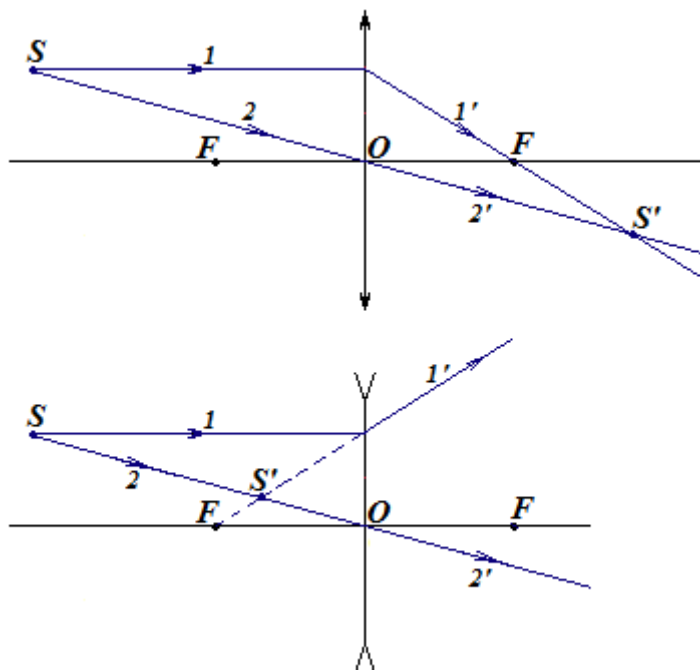


Рисунок 89

Нетрудно заметить, что изображение светящейся точки, расположенной на главной оптической оси, тоже располагается на главной оптической оси.

2 Изображение точки, не лежащей на главной оптической оси
(рисунок 90)



Изображение светящейся точки действительное.

Изображение светящейся точки мнимое.

Рисунок 90

3 Построение изображения предмета

Пусть предметом для линзы является стрелка AB , параллельная главной оптической оси.

Проведем луч 1, на нем располагается предмет AB . Понятно, что изображение каждой точки отрезка AB будет лежать на преломленном луче $1'$ - он проходит через фокус (рисунок 91).

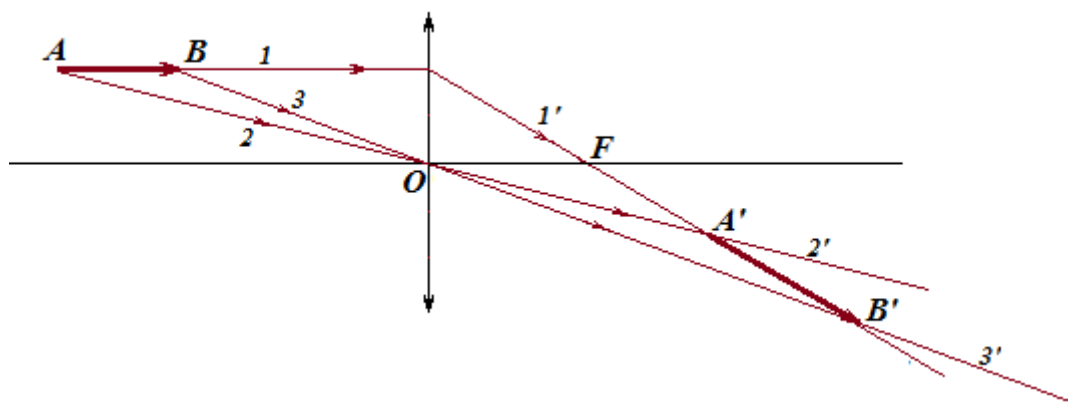


Рисунок 91

Для нахождения положения точек A' и B' на луче $1'$ строим лучи 2 и 3, при прохождении через оптический центр, эти лучи не преломляются. В рассмотренном примере изображение предмета $A'B'$ действительное – оно образовано пересечением самих световых лучей, в каждую точку отрезка $A'B'$ поступает световая энергия.

Пусть стрелка AB расположена под некоторым углом к главной оптической оси.

Для построения хода луча $1'$ строим побочную оптическую ось, параллельную лучу 1. Побочная оптическая ось пересекает фокальную плоскость в побочном фокусе F' . После преломления в линзе луч $1'$ пройдет через побочный фокус F' (рисунок 92).

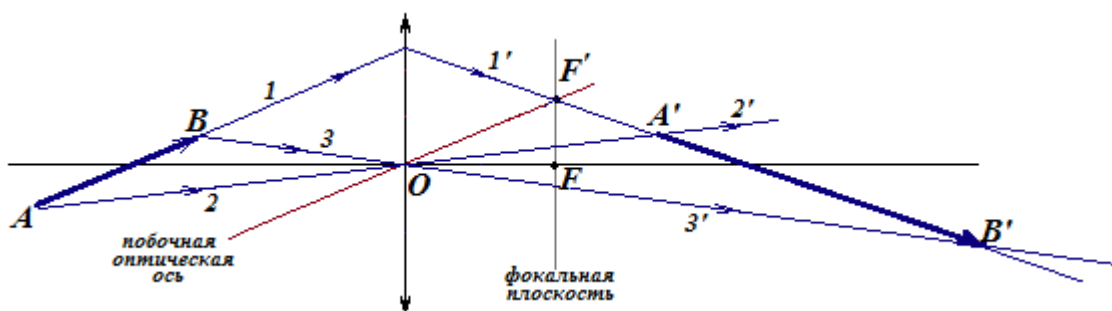


Рисунок 92

Для нахождения положения точек A' и B' на луче $1'$ опять строим лучи 2 и 3, которые проходят через оптический центр линзы и не преломляются. Изображение предмета $A'B'$ действительное – оно образовано пересечением самих световых лучей.

Аналогично строится изображение предмета в рассеивающей линзе (рисунок 93).

После преломления в линзе лучи $1'$, $2'$ и $3'$ расходятся. Для нахождения положения концов отрезка $A'B'$ находим точки пересечения мнимых продолжений преломленных лучей.

Таким образом, изображение предмета $A'B'$ мнимое.

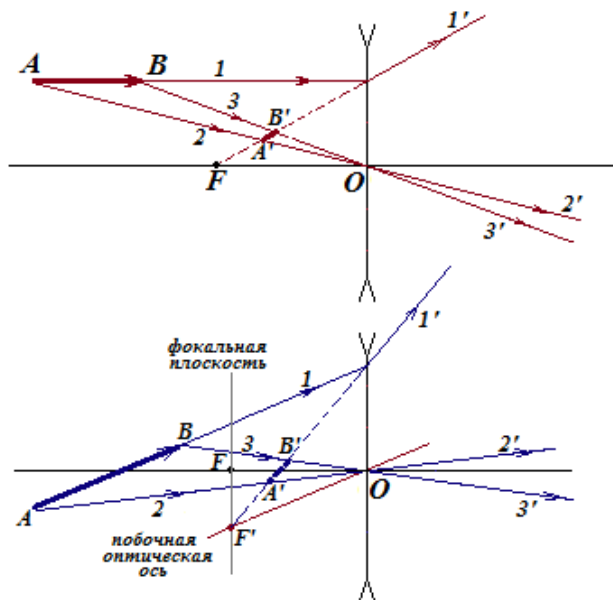


Рисунок 93

На основании построений можно сделать два важных наблюдения:

- *линза отображает прямую линию в прямую;*
- *угол между предметом и главной оптической осью отличен от угла между осью и изображением предмета.*

Пусть предмет AB расположен перпендикулярно главной оптической оси. В этом случае строить луч, на котором лежит предмет, бесполезно – он не попадает на линзу.

Однако, сферическая преломляющая поверхность ведет себя подобно сферической отражающей поверхности - малый отрезок, перпендикулярный главной оптической оси, изобразится при помощи параксиальных лучей в виде отрезка, также перпендикулярного главной оптической оси. Для построения изображения предмета достаточно построить изображение конца отрезка, не лежащего на главной оптической оси, и опустить перпендикуляр на главную оптическую ось (рисунок 94).

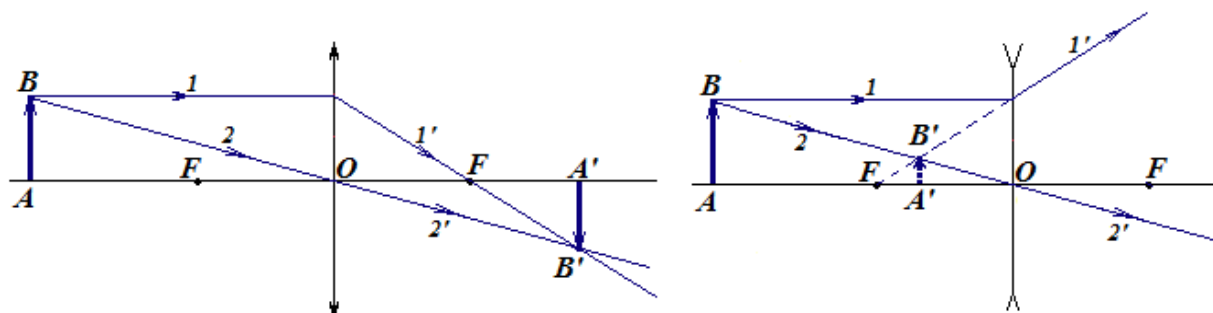


Рисунок 94

Характер изображения, даваемого в этом случае рассеивающей линзой, всегда одинаков. Изображение мнимое, прямое, уменьшенное.

Характер же изображения, даваемого в этом случае собирающей линзой, зависит от положения предмета относительно линзы. В этом нетрудно убедиться построением.

Таблица 2 - Характер изображения в собирающей линзе

Расстояние от предмета до линзы		Характер изображения		
		Изображение действительное или мнимое	Изображение прямое или перевернутое	Изображение увеличенное или уменьшенное
Предмет за двойным фокусом $d < 2F$		действительное	перевернутое	уменьшенное
Предмет в двойном фокусе $d = 2F$		действительное	перевернутое	равное
Предмет между фокусом и двойным фокусом $F < d < 2F$		действительное	перевернутое	увеличенное
Предмет в фокусе $d = F$		Изображение отсутствует (уходит на ∞)		
Предмет перед фокусом $d < F$		мнимое	прямое	увеличенное

Интересен случай, когда предмет пересекает фокальную плоскость – часть предмета находится за фокусом (ее изображение должно быть действительным), другая часть предмета находится перед фокусом (ее изображение должно быть мнимым) (рисунок 95).

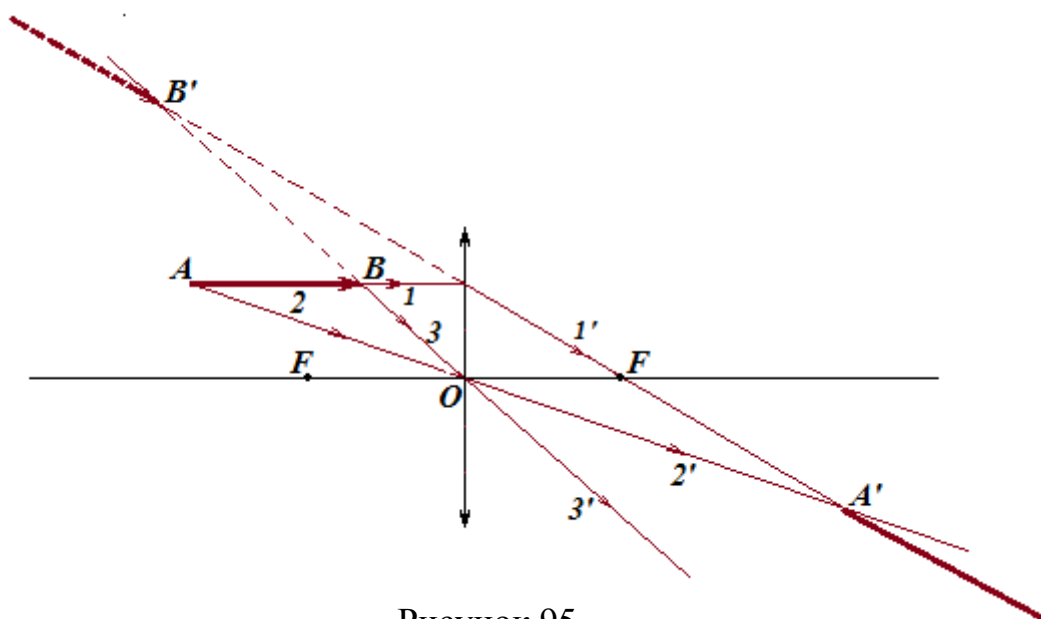


Рисунок 95

В этом случае изображение разрывается, изображения точек отрезка, близких к фокальной плоскости, уходят на бесконечность.

§7 Аберрация линз

Мы рассмотрели основы построения изображения в идеальных линзах. Ход лучей, которые мы использовали для построения изображения, справедлив при выполнении следующих условий:

- 1) лучи, падающие на линзу, удовлетворяют параксиальному приближению;
- 2) световые пучки, падающие на линзу, составляют малые углы с главной оптической осью;
- 3) отсутствует дисперсия, то есть показатель преломления среды и вещества линзы одинаков для волн всех частот.

Выполнение этих условий должно приводить к получению «правильного» изображения, для которого, во-первых, каждая точка плоского предмета, расположенного параллельно плоскости линзы, изображается точкой. Кроме того, изображения всех точек должны лежать в одной плоскости, перпендикулярной главной оптической оси (в этой плоскости будет располагаться экран). Отдельные участки изображения не должны быть растянуты или сжаты по-разному, чтобы в изображении сохранились характерные пропорции самого предмета.

В реальных линзах изображение, как правило, обладает недостатками: наблюдается отсутствие резкости или ее отличие в центре и по краям изображения, искривление геометрии, радужные ореолы и так далее. Дефекты изображения, отклонения от «правильного» изображения носят название *аббераций*.

1 Сферическая аберрация

Допустим, на линзу падает *широкий* пучок лучей, параллельных главной оптической оси. Лучи, идущие близко к главной оптической оси, падают на линзу под малыми углами, то есть они удовлетворяют параксиальному приближению и после преломления в линзе пройдут через

фокус. Углы падения лучей, падающих на края линзы больше, эти лучи преломляются в линзе сильнее и после преломления не будут проходить через фокус.

В результате на экране, расположенном в фокальной плоскости, получается не точка, а размытое пятно (кружок рассеяния). Иными словами, нарушается стигматичность изображения (рисунок 96).

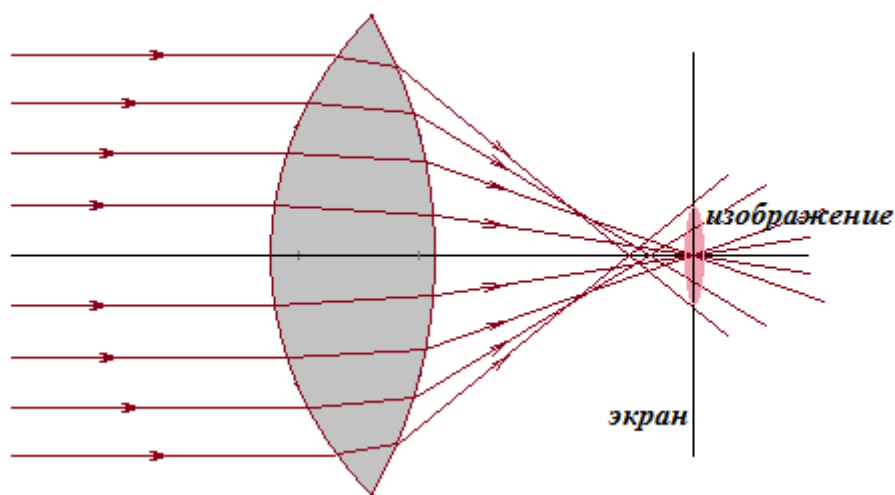


Рисунок 96

Рассеивающие (отрицательные) линзы имеют абберацию противоположного знака.

Уменьшить сферическую абберацию можно, применяя диафрагму или комбинируя положительные и отрицательные линзы.

2 Кома

Кома – частный случай сферической абберации. Кома наблюдается, когда светящаяся точка, посылающая **широкий** пучок лучей, находится не на главной оптической оси. В этом случае лучи, падающие на линзу, не параллельны главной оптической оси. Такие лучи после преломления в линзе не будут собираться в одной точке, а образовывать неравномерно освещенное пятнышко, несколько напоминающее комету с хвостом.

В частности, лучи, идущие параллельно побочной оптической оси, после преломления в линзе не будут проходить через побочный фокус (рисунок 97).

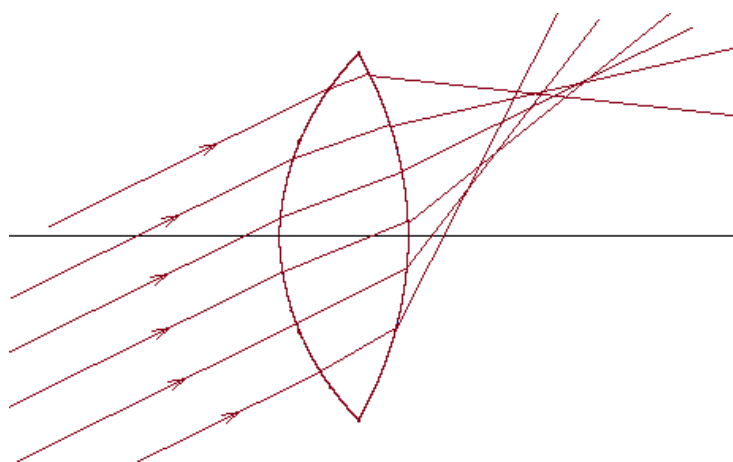


Рисунок 97

3 Астигматизм тонких наклонных пучков

Пусть от точечного источника света исходит тонкий пучок лучей, наклоненных к главной оптической оси. При достаточном угле наклона падающие лучи не будут удовлетворять параксиальному приближению. Это приводит к тому, что преломленные в линзе лучи не будут проходить через одну точку, то есть изображение не будет стигматичным (рисунок 98).

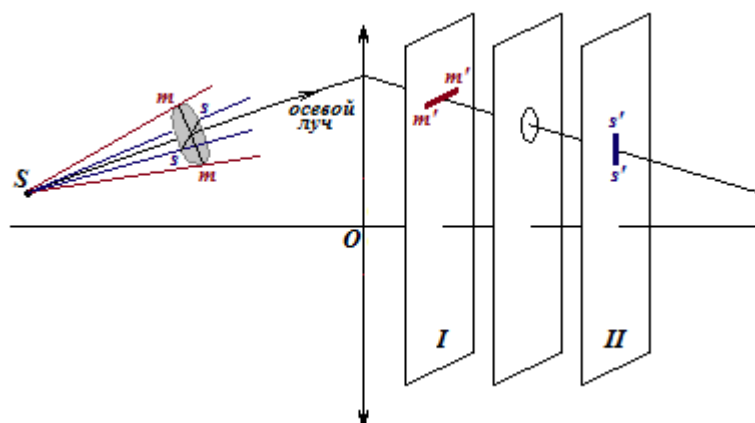


Рисунок 98

Smm - меридиональная плоскость сечения светового пучка, лучи, лежащие в этой плоскости, называются меридиональными. Sss - сагиттальная плоскость сечения, лучи, лежащие в этой плоскости, называются сагиттальными.

Фокусные расстояния для меридиональных и сагиттальных лучей отличны. Это приводит к тому, что меридиональные лучи собираются в одну точку в плоскости I , а весь пучок в этой плоскости изобразится в виде отрезка $m'm'$. Сагиттальные лучи собираются в одну точку в плоскости II , в этой плоскости изображением точки S будет отрезок $s's'$. Если экран расположить в любой другой плоскости, то изображением источника S будет пятно эллиптической формы.

4 Астигматизм, обусловленный искривлением плоскости изображения

Опыт показывает, что изображение светящейся точки, являющейся источником узкого наклонного луча, располагается не в плоскости, а на наклонной, изогнутой поверхности. Степень изгиба для меридиональных и сагиттальных лучей различна. В этом случае изображение на экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси, будет размытым, различна. Причем степень размытости для меридиональных и сагиттальных лучей различна.

5 Астигматизм, обусловленный асимметрией линзы

Радиус кривизны реальной линзы в разных плоскостях сечения может оказаться разным. Частным случаем такой линзы может быть цилиндрическая линза (рисунок 99).

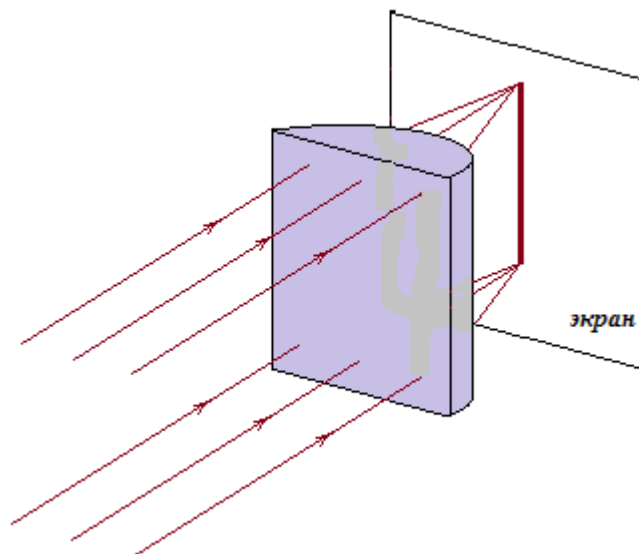


Рисунок 99

Нетрудно видеть, что вертикальная цилиндрическая линза фокусирует только те параллельные лучи, которые лежат в одной горизонтальной плоскости. В результате параллельный пучок лучей, падающих на линзу, не фокусируется в одну точку (изображение не является стигматичным). На экране, расположенном в фокальной плоскости получается изображение в виде отрезка.

Понятно, что при различных радиусах кривизны в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, можно получить изображение удаленной на бесконечность точки в виде отрезка в двух различных фокальных плоскостях. Причем эти изображения-отрезки будут перпендикулярны друг другу.

Дефектом подобного рода нередко обладает человеческий глаз. Астигматизм проявляется в том, что резкость изображения горизонтальных и вертикальных полос на сетчатке глаза (экране) различна.

6 Дисторсия изображения

Если узкий пучок лучей падает на линзу под большими углами к главной оптической оси, то лучи и на линзу падают под большими углами, т.е. такие лучи не удовлетворяют параксиальному приближению. В этом случае поперечное увеличение линзы зависит от угла между осью пучка лучей и главной осью линзы (рисунок 100).

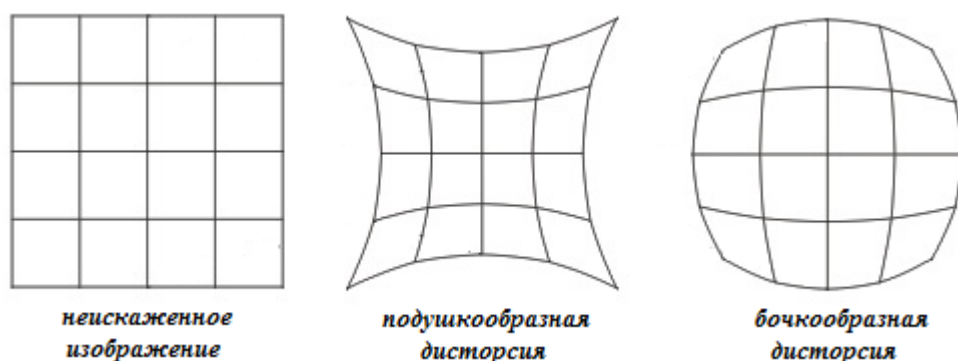


Рисунок 100

По краям изображение оказывается растянутым или сжатым. Такой дефект линзы называется дисторсией. Дисторсия является крайне вредным

дефектом, если изображение фиксируется на фотоснимке и затем используется для каких-либо измерений (особенно в аэрофотограмметрии).

7 Хроматическая aberrация

Оптическая сила линзы зависит от относительного показателя преломления вещества линзы $\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Показатель преломления вещества, в свою очередь, зависит от частоты световой волны – эта зависимость называется дисперсией. При нормальной дисперсии показатель преломления растет с увеличением частоты световой волны. Поэтому фокусное расстояние для синего света оказывается меньше фокусного расстояния для красного света (рисунок 101).

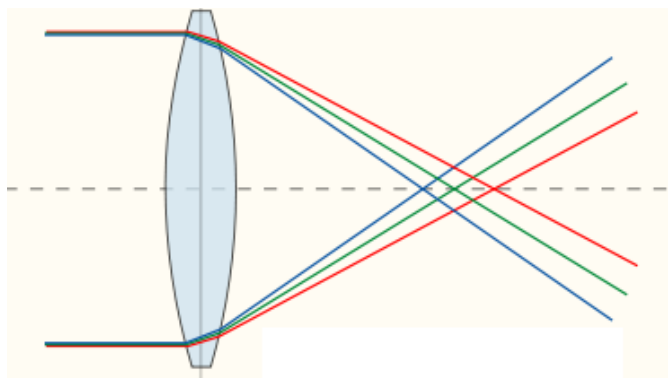


Рисунок 101

Фокусы для света всех остальных частот располагаются между фокусами для синего и красного света. Таким образом, изображение удаленной точки на экране будет представлять собой цветной кружок, размеры и окраска которого зависят от местоположения экрана.

Основной путь устранения aberrаций – использование системы линз, поскольку дефекты собирающих и рассеивающих линз противоположны по знаку. Тем не менее, исправление всех недостатков представляется неразрешимой задачей. Поэтому при расчете оптической системы устраняются, как правило, те недостатки линзы, которые вредны при решении конкретной задачи. Например, при аэрофотосъемке больших участков важно устранить дисторсию и хроматическую aberrацию.

§8 Примеры решения задач

Задача 1 Фокусное расстояние линзы

Определите фокусное расстояние линзы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Линза находится в воздухе, радиусы кривизны поверхностей линзы $R_1 = 10$ см и $R_2 = 15$ см.

Решение

Фокусное расстояние линзы определяется веществом линзы и среды, радиусами кривизны поверхностей и *формой* линзы. Поскольку в условии нет указания на форму линзы, рассмотрим все возможные варианты.

а) линза двояковыпуклая (рисунок 102)

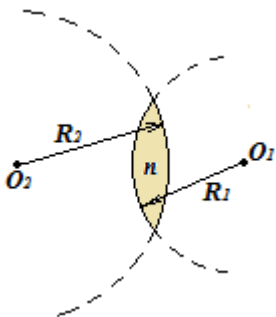


Рисунок 102

Обе сферические поверхности выпуклой стороной смотрят в воздух, оптически менее плотную среду, следовательно, радиусы кривизны поверхностей войдут в формулу для расчета фокуса со знаком «+».

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1,5 - 1) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{12} \text{ (см}^{-1}\text{)}$$

$$F = 12 \text{ см.}$$

Фокусное расстояние положительное – это значит, что двояковыпуклая линза из стекла в воздухе является собирающей.

б) линза двояковогнутая (рисунок 103)

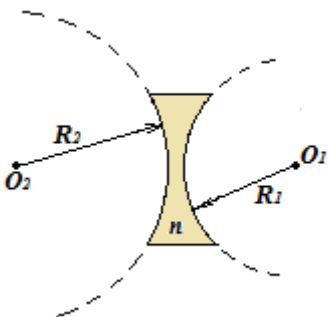


Рисунок 103

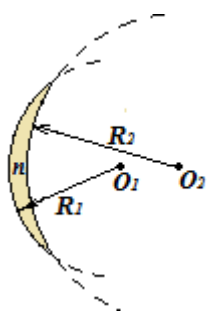
Обе сферические поверхности выпуклой стороной смотрят в стекло, оптически более плотную среду, следовательно, радиусы кривизны поверхностей войдут в формулу для расчета фокуса со знаком «-».

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (1,5 - 1) \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) = -\frac{1}{12} \text{ (см}^{-1}\text{)}$$

$$F = -12 \text{ см.}$$

Фокусное расстояние отрицательное – это значит, что двояковыпуклая линза из стекла в воздухе является рассеивающей.

с) линза вогнуто-выпуклая (рисунок 104)



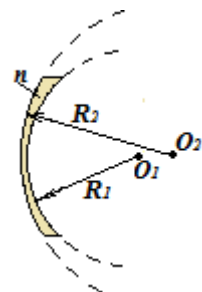
$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (1,5-1) \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) = \frac{1}{60} \text{ (см}^{-1}\text{)}$$

$$F = 60 \text{ см.}$$

Линза собирающая.

Рисунок 104

д) Линза выпукло-вогнутая (рисунок 105)



$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (1,5-1) \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{15} \right) = -\frac{1}{60} \text{ (см}^{-1}\text{)}$$

$$F = -60 \text{ см.}$$

Рисунок 105

Линза рассеивающая.

Задача 2 Фокусное расстояние линзы с разными средами по обе стороны

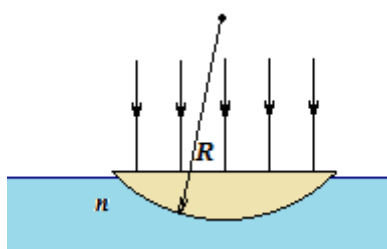


Рисунок 106

Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см выпуклой стороной с радиусом кривизны $R = 15$ см притоплена в воду (рисунок 106). Показатель преломления воды

$n = \frac{4}{3}$. На каком расстоянии от линзы и где будет

находиться изображение Солнца, находящегося в зените?

Решение

По существу задача сводится к нахождению фокусного расстояния линзы.

Рассмотрим ход двух лучей, падающих на линзу. Луч 1 совпадает с главной оптической осью, он не преломляется в линзе (рисунок 107).

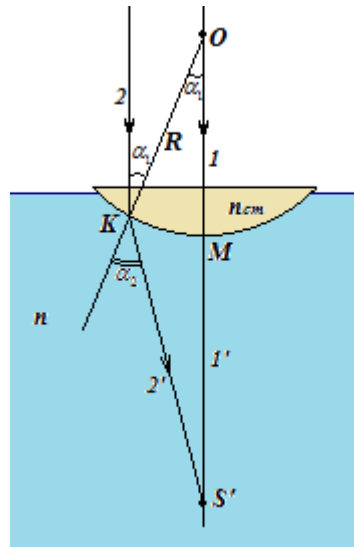


Рисунок 107

Луч 2 параллелен главной оптической оси, он не преломляется на плоской поверхности линзы, падает на сферическую поверхность под углом α_1 и входит в воду под углом α_2 .

Пересечение лучей 1' и 2' дает изображение Солнца S' , оно совпадает с фокусом F' в воде.

Рассмотрим треугольник OKS' . Записываем для треугольника OKS' теорему синусов:

$$\frac{OS'}{\sin(180^\circ - \alpha_2)} = \frac{KS'}{\sin \alpha_1}. \quad (2.17)$$

Расстояние $OS' = R + MS' = R + F'$. Линза тонкая, следовательно, $KS' \approx MS' = F'$. Луч 2 удовлетворяет параксиальному приближению, значит $\sin \alpha_1 \approx \alpha_1$ и $\sin(180^\circ - \alpha_2) = \sin \alpha_2 \approx \alpha_2$. С учетом сказанного выражение (2.17) принимает вид

$$\frac{R + F'}{\alpha_2} = \frac{F'}{\alpha_1}. \quad (2.18)$$

Записываем закон Снелла с учетом малости углов падения и преломления

$$n_{cm} \cdot \alpha_1 = n \cdot \alpha_2. \quad (2.19)$$

Перемножаем уравнения (2.18) и (2.19):

$$\begin{aligned} \frac{n\alpha_2(R+F')}{\alpha_2} &= \frac{n_{cm}\alpha_1 F'}{\alpha_1} \\ n(R+F') &= n_{cm}F' \\ F' &= \frac{nR}{n_{cm} - n}. \end{aligned}$$

Показатель преломления стекла можно найти через фокусное расстояние линзы, когда она находится в воздухе

$$\frac{1}{F} = (n_{cm} - 1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{n_{cm} - 1}{R} \Rightarrow n_{cm} = \frac{R}{F} + 1 = \frac{15}{20} + 1 = \frac{7}{4}.$$

Находим положение изображения Солнца или фокусное расстояние

притопленной линзы $F' = \frac{nR}{n_{cm} - n} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 15}{\frac{7}{4} - \frac{4}{3}} = 48 \text{ (см)}.$

Задача 3 Фокусные расстояния толстой линзы

Плосковыпуклая толстая линза толщиной $l = 5$ см с радиусом кривизны $R = 2,5$ см изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Где находятся фокусы такой линзы? Углы преломления считать малыми (рисунок 108).

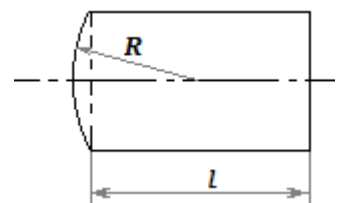


Рисунок 108

Решение

а) свет падает на плоскую поверхность линзы (рисунок 109)

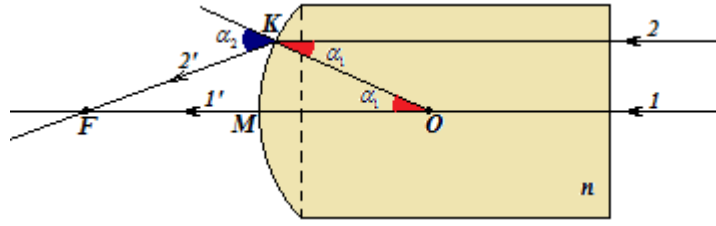


Рисунок 109

Луч 1 идет вдоль главной оптической оси, не преломляясь. Луч 2 падает перпендикулярно плоской поверхности, проходит в стекло, не преломляясь.

После преломления на сферической поверхности луч пересекает главную оптическую ось в точке F .

Применим для треугольника FKO теорему синусов:

$$\frac{KF}{\sin \alpha_1} = \frac{OF}{\sin(180^\circ - \alpha_2)}. \quad (2.20)$$

Поскольку луч 2 проходит близко к главной оптической оси

$$KF \approx MF = F, \quad OF = R + F.$$

Углы падения и преломления маленькие, следовательно

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1, \quad \sin(180^\circ - \alpha_2) = \sin \alpha_2 \approx \alpha_2.$$

Выражение (2.20) принимает вид:

$$\frac{F}{\alpha_1} = \frac{R + F}{\alpha_2}. \quad (2.21)$$

На основании закона Снелла

$$n\alpha_1 = \alpha_2. \quad (2.22)$$

Делим уравнение (2.21) на уравнение (2.22) и находим фокусное расстояние F

$$nF = R + F$$

$$F = \frac{R}{n-1} = \frac{2,5}{1,5-1} = 5 \text{ (см)}.$$

Левый фокус располагается на расстоянии 5 см от сферической поверхности.

Можно было найти фокусное расстояние иначе.

Представим толстую линзу как совокупность тонкой плосковыпуклой линзы и плоскопараллельной пластины.

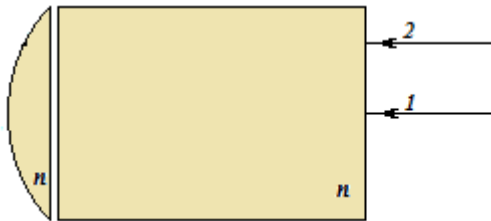


Рисунок 110

Плоскопараллельная пластина не меняет хода лучей 1 и 2, поскольку они падают перпендикулярно поверхности пластины (рисунок 110). Изменение хода лучей происходит только при их прохождении через тонкую линзу. Таким

образом, фокусное расстояние толстой линзы совпадает с фокусным расстоянием тонкой линзы, которое можно найти по известной формуле

$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{n-1}{R}$$

$$F = \frac{R}{n-1} = 5 \text{ см}.$$

б) свет падает на сферическую поверхность линзы (рисунок 111)

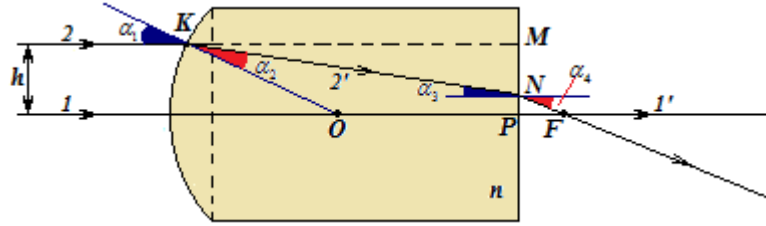


Рисунок 111

Задача сводится к нахождению положения точки F , в которой луч $2'$ пересечет главную оптическую ось после выхода из линзы.

Из рисунка видно, что

$$h = R \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = R \cdot \alpha_1. \quad (2.23)$$

С другой стороны,

$$h = MN + NP = l \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) + F \cdot \operatorname{tg} \alpha_4 = l \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) + F \cdot \alpha_4. \quad (2.24)$$

Приравниваем правые части уравнений (2.26) и (2.27):

$$l \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) + F \cdot \alpha_4. \quad (2.25)$$

Используя закон Снелла и рисунок, найдем соотношение между углами падения и преломления

$$\begin{cases} \alpha_1 = n \cdot \alpha_2 \\ n \cdot \alpha_3 = \alpha_4 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_4 = n \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = n \cdot (n\alpha_2 - \alpha_2) = n(n-1)\alpha_2$$

Уравнение (2.28) принимает вид

$$l \cdot (n\alpha_2 - \alpha_2) + Fn(n-1)\alpha_2 = Rn\alpha_2$$

$$l \cdot (n-1) + Fn(n-1) = Rn.$$

Фокусное расстояние F равно

$$F = \frac{Rn - l(n-1)}{n(n-1)} = \frac{R}{n-1} - \frac{l}{n}$$

$$F = \frac{2,5}{1,5-1} - \frac{5}{1,5} = \frac{5}{3} \text{ (см).}$$

Задача 4 Определение положения линзы и ее фокуса

На рисунке показан предмет и его изображение в линзе. Построением определите положение линзы и ее фокусов. Определите характер изображения и вид линзы (собирающая или рассеивающая) (рисунок 112).



Рисунок 112

Решение

Изображение, даваемое линзой, перевернутое, независимо от того, какая из стрелок, левая или правая, является изображением. Перевернутое изображение может давать только *собирающая линза*. Кроме того, перевернутое изображение обязательно *действительное*.

Предмет и его изображение параллельны, такое возможно, если предмет перпендикулярен главной оптической оси. Сама линза должна быть расположена параллельно предмету и его изображению.

Положение оптического центра линзы находим, зная, что луч, идущий через оптический центр, не преломляется (рисунок 113).

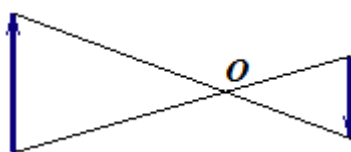


Рисунок 113

Строим линзу через точку O параллельно предмету и его изображению. Главная оптическая ось линзы проходит через оптический центр O перпендикулярно линзе (рисунок 114).

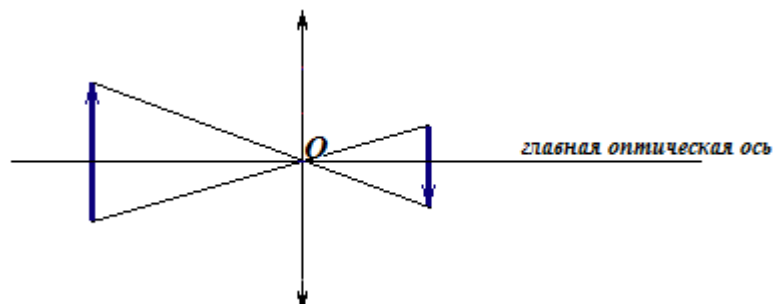


Рисунок 114

Положение фокусов определяем, зная, что луч, идущий параллельно главной оптической оси, после преломления проходит через фокус. На преломленном луче лежит изображение точки (рисунок 115).

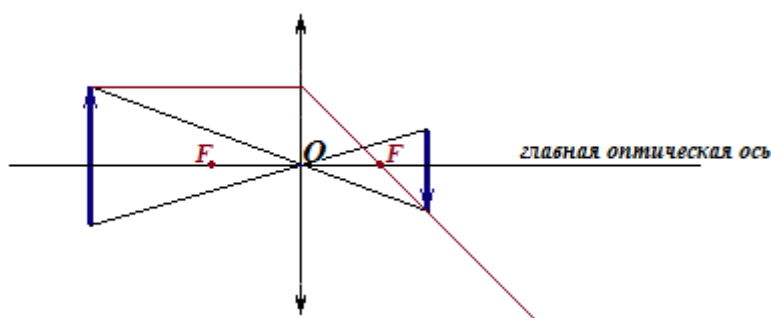


Рисунок 115

Если среда по обе стороны линзы одинаковая, то фокусные расстояния одинаковые. Второй фокус располагается симметрично найденному относительно линзы.

В силу обратимости падающих и отраженных лучей не имеет значения, какой из отрезков на рисунке 116 является предметом, а какой его изображением.

б)

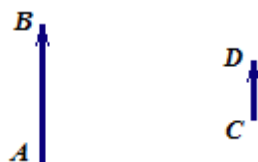


Рисунок 116

Решение

Изображение, даваемое линзой, прямое, независимо от того, какая из стрелок, AB или CD , является изображением. Прямое изображение может давать как *собирающая линза*, так и *рассеивающая*. Если предметом является отрезок AB , а изображением CD , то изображение уменьшенное. Прямое уменьшенное изображение дает рассеивающая линза. Если CD – предмет, а AB – изображение, то изображение увеличенное. Прямое увеличенное изображение дает собирающая линза. Независимо от того, какая линза дает изображение, прямое изображение обязательно *мнимое*.

Предмет и его изображение параллельны, такое возможно, если предмет перпендикулярен главной оптической оси. Сама линза должна быть расположена параллельно предмету и его изображению (рисунок 117).

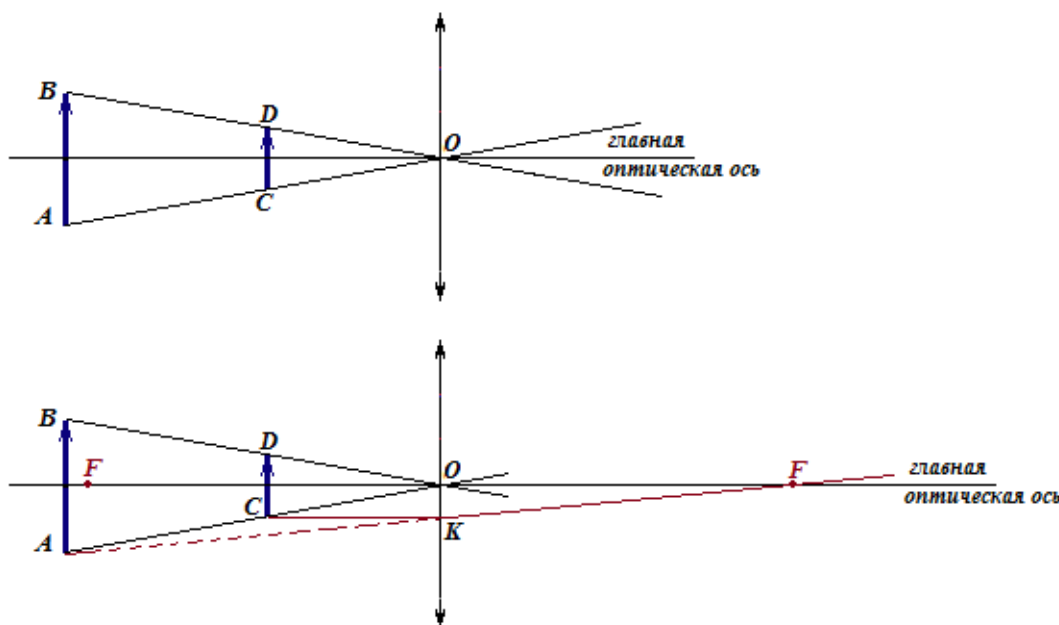


Рисунок 117

Оптический центр линзы находим пересечением прямых AC и BD . Тело линзы строим параллельно предмету и его изображению. Главная оптическая ось проходит через оптический центр O перпендикулярно линзе.

Если предметом является отрезок CD , то линза собирающая – она дает мнимое, прямое, увеличенное изображение AB . Строим луч, параллельный главной оптической оси, из точки C – после преломления он должен пройти через фокус. На мнимом продолжении преломленного луча лежит изображение точки C – точка A . Пересечение прямой AK с главной оптической осью дает фокус линзы F . Второй фокус расположен симметрично найденному относительно линзы (рисунок 118).

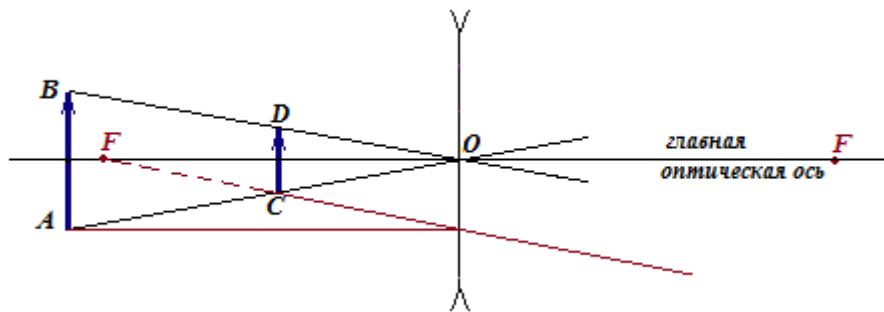


Рисунок 118

Если предметом является отрезок AB , то линза рассеивающая – она дает мнимое, прямое, уменьшенное изображение CD . Строим луч, параллельный главной оптической оси, из точки A – после преломления он должен пойти так, будто вышел из фокуса. На мнимом продолжении преломленного луча лежит изображение точки A – точка C . Пересечение прямой CK с главной оптической осью дает фокус линзы F . Второй фокус расположен симметрично найденному относительно линзы.

Нетрудно видеть, что положение линзы и ее фокусов в обоих случаях одинаково (рисунок 119). Отличаются сами линзы и даваемые ими изображения.

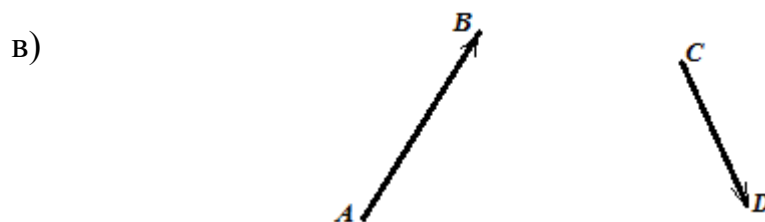


Рисунок 119

Изображение перевернутое, следовательно, оно действительное, а линза – собирающая.

Положение оптического центра линзы находим пересечением прямых AC и BD (луч, идущий через оптический центр, не преломляется) (рисунок 120).

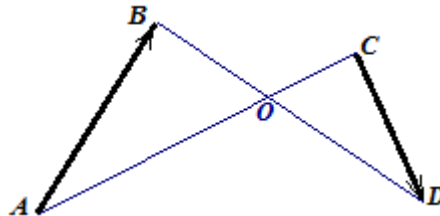


Рисунок 120

Для построения линзы необходимо найти еще одну точку, принадлежащую линзе. Воспользуемся лучом AB , на котором лежит весь предмет – он «ломается» в линзе, а на преломленном луче лежит изображение CD . Таким образом, точка пересечения лучей AB и CD дает точку K , принадлежащую линзе (рисунок 121).

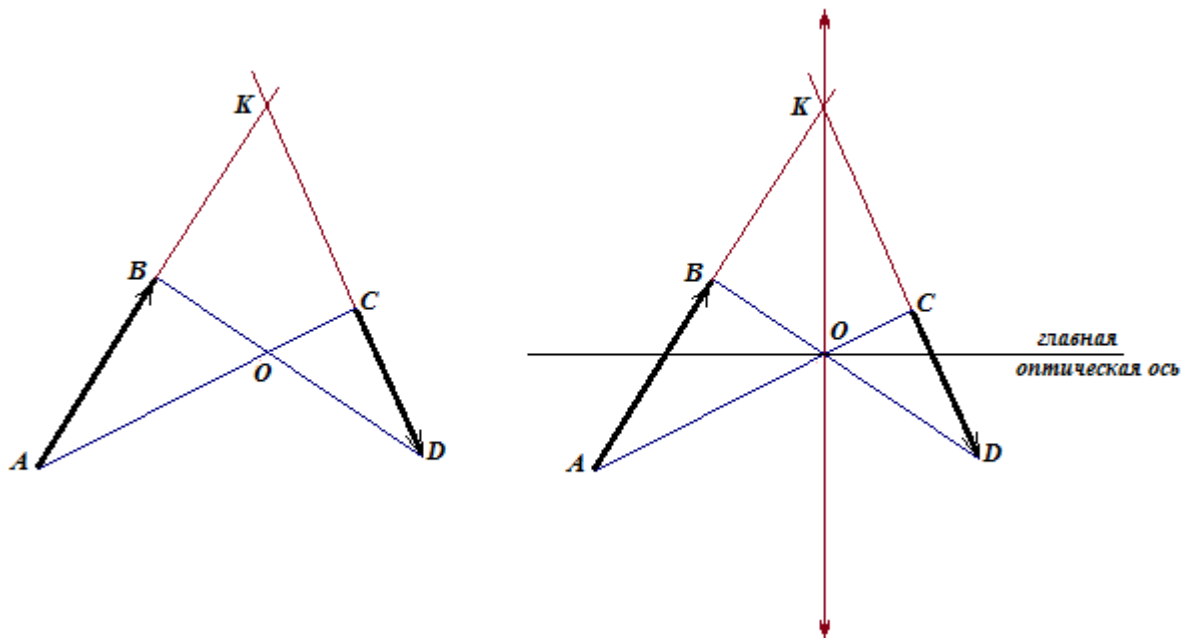


Рисунок 121

Главная оптическая ось проходит через оптический центр O перпендикулярно линзе.

Для нахождения фокуса линзы из точки A строим луч, параллельный главной оптической оси. На преломленном луче лежит изображение точки A – точка C . Луч PC пересекает главную оптическую ось в фокусе F . Второй фокус располагается симметрично найденному относительно линзы (рисунок 122).

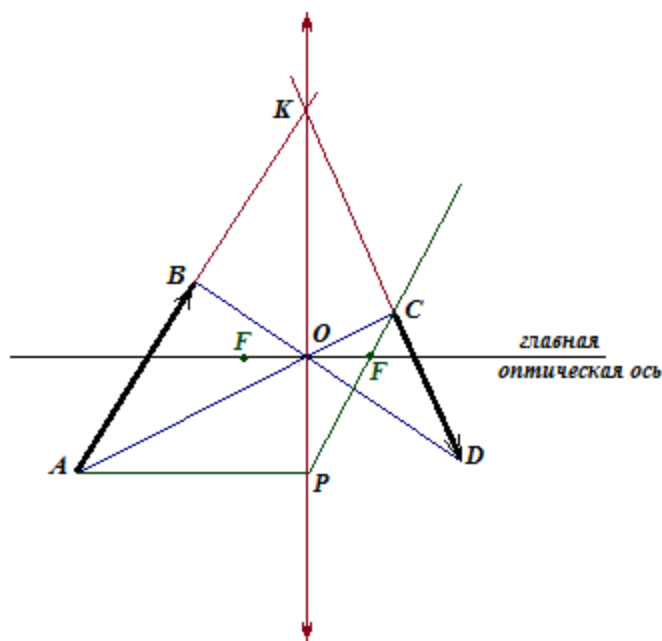


Рисунок 122

г)

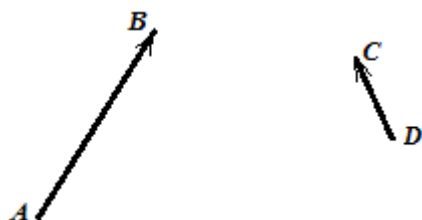


Рисунок 123

Изображение прямое, следовательно, оно мнимое. Такое изображение может давать как собирающая, так и рассеивающая линза (рисунок 123). Если AB – предмет, то изображение CD уменьшенное, в этом случае линза рассеивающая. Если предмет CD , то изображение AB увеличенное – линза собирающая.

Находим положение оптического центра линзы построением лучей через концы отрезка и изображения концов отрезка (рисунок 124).

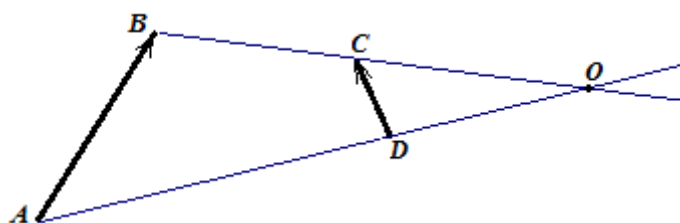


Рисунок 124

Находим точку преломления луча AB , на котором располагается весь предмет. Изображение лежит на прямой CD , поэтому пересечение прямых AB и CD дает точку K «излома» луча, эта точка принадлежит линзе (рисунок 125).

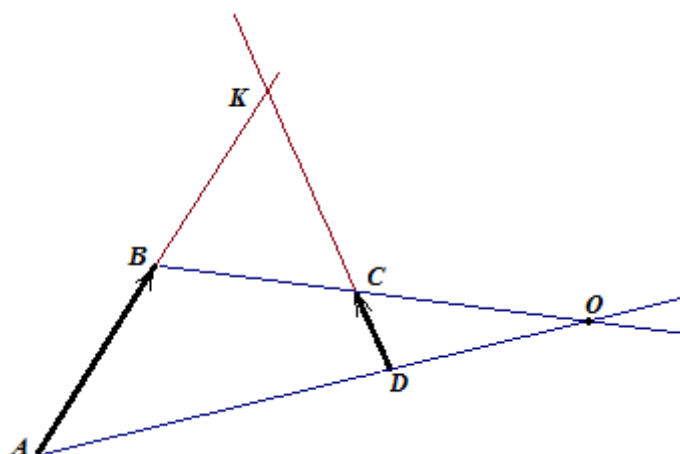


Рисунок 125

Строим линзу и главную оптическую ось, проходящую через оптический центр и перпендикулярную самой линзе. Если предметом является отрезок CD , то линза собирающая (рисунок 126).

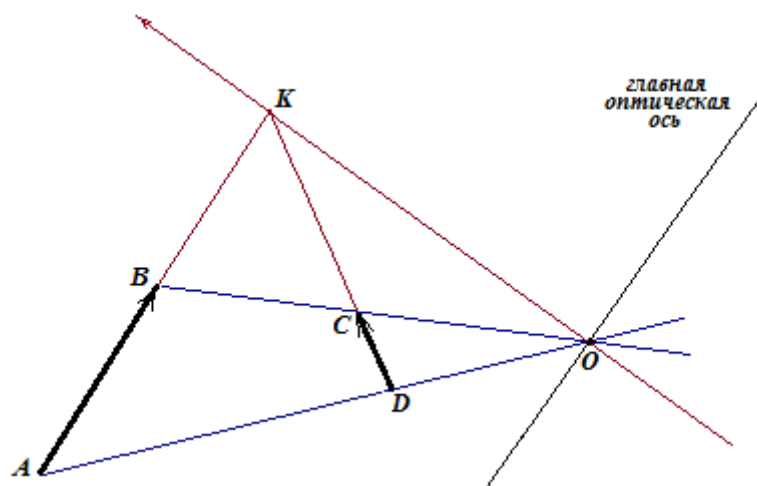


Рисунок 126

Для нахождения фокуса из точки C строим луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в линзе мнимое продолжение этого луча должно пройти через изображение точки C – точку D . Преломленный луч пересекает главную оптическую ось в фокусе (рисунок 127).

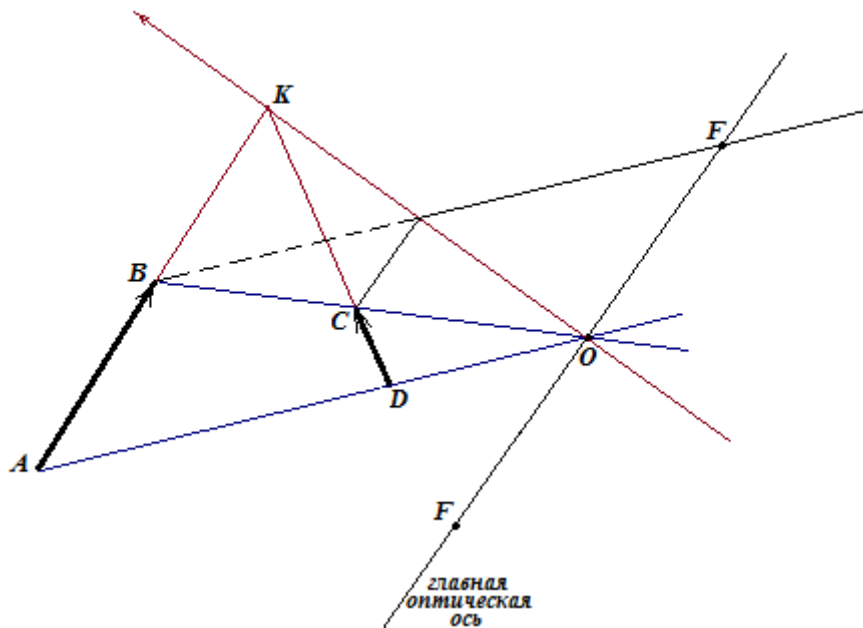


Рисунок 127

Задача 5 Применение формулы тонкой линзы

На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным. Фокусное расстояние линзы равно F (рисунок 128).

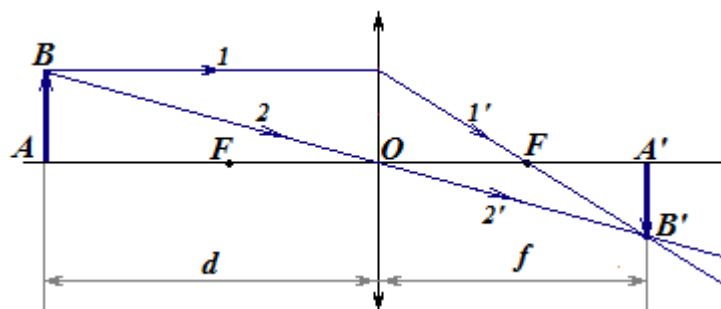


Рисунок 128

Записываем уравнение тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы;

f – расстояние от изображения до линзы.

Находим расстояние от изображения до линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{d - F}{dF}$$

$$f = \frac{Fd}{d - F}.$$

Расстояние между предметом и изображением

$$S = d + f = d + \frac{Fd}{d - F} = \frac{d^2 - dF + dF}{d - F} = \frac{d^2}{d - F}.$$

По условию задачи расстояние между предметом и изображением минимально. Находим производную от S по d

$$S' = \left(\frac{d^2}{d - F} \right)' = \frac{2d(d - F) - d^2}{(d - F)^2} = \frac{d^2 - 2dF}{(d - F)^2}.$$

Производная равна нулю $S' = 0$ при $d^2 - 2dF = 0$, то есть при $d = 0$ и $d = 2F$ (рисунок 129).



Рисунок 129

Таким образом, расстояние между предметом и изображением минимально, если предмет расположен на двойном фокусном расстоянии от линзы $d = 2F$.

Задача 6 Характер изображения и формула тонкой линзы

Расстояние между точечным источником света и экраном равно L . Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми равно l . Определите фокусное расстояние линзы.

Решение

На экране можно получить только действительное изображение. В свою очередь, действительное изображение предмета может быть получено только при помощи собирающей линзы, при этом предмет и изображения находятся по разные стороны линзы (рисунок 130).

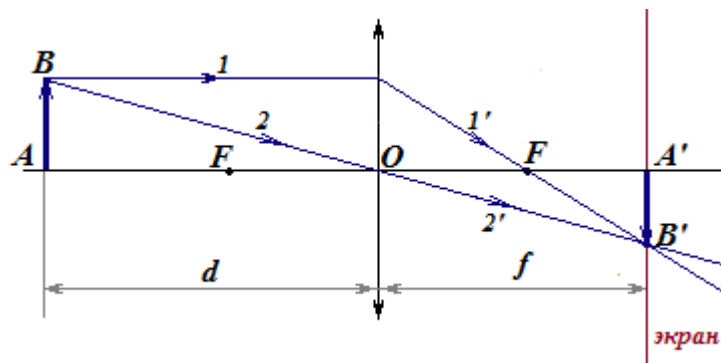


Рисунок 130

Записываем уравнение тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы;

f – расстояние от изображения (от экрана) до линзы.

Находим расстояние от экрана до линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{d - F}{dF}$$

$$f = \frac{Fd}{d - F}.$$

По условию

$$L = d + f = d + \frac{dF}{d - F} \Rightarrow d^2 - dL + FL = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим корни – два расстояния от предмета до линзы, при которых на экране получается четкое изображение:

$$d_1 = \frac{L^2 + \sqrt{L^2 - 4FL}}{2} \quad d_2 = \frac{L^2 - \sqrt{L^2 - 4FL}}{2}.$$

По условию

$$l = d_1 - d_2 = \sqrt{L^2 - 4FL} \Rightarrow F = \frac{L^2 - l^2}{4L}.$$

Можно было решить задачу иначе.

Воспользуемся обратимостью падающих и преломленных лучей. Если предметом будет $A'B'$, то AB будет изображением. При этом расстояние от предмета до линзы d и расстояние от изображения до линзы f поменяются ролями. Это означает, что расстояние между двумя положениями линзы, при которых на экране получается четкое изображение, равно $l = f - d$.

Получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} d + f = L \\ f - d = l \\ \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем тот же результат

$$F = \frac{L^2 - l^2}{4L}.$$

Задача 7 Поперечное увеличение

Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси. Расстояние между предметом и его прямым изображением, даваемым линзой, равно $l = 5$ см. Линейное увеличение $\beta = 0,5$. Определите фокусное расстояние линзы.

Решение

Прямое изображение может давать как собирающая линза, так и рассеивающая. Однако, согласно условию, поперечное увеличение равно $\beta = 0,5$. Следовательно, изображение прямое и уменьшенное, такое изображение дает рассеивающая линза (рисунок 131).

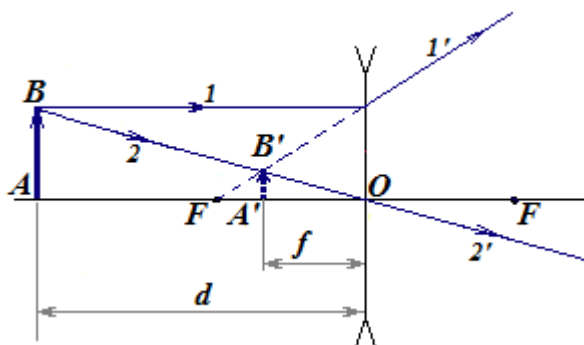


Рисунок 131

$$\begin{cases} d - f = l \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} \end{cases} \quad (2.28)$$

Из (2.26) и (2.28) следует, что

$$d - \beta d = l \quad \Rightarrow \quad d = \frac{l}{1 - \beta} = 10 \text{ (см)} \quad \Rightarrow \quad f = \beta d = 5 \text{ (см)}.$$

Из (2.27) находим фокусное расстояние F . Фокусное расстояние $F = -5$ см отрицательное, поскольку линза рассеивающая.

Задача 8 Продольное увеличение

Стержень расположен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F . Концы стержня находятся соответственно на расстояниях a_1 и a_2 от линзы (рисунок 132). Во сколько раз длина изображения отличается от длины стержня?

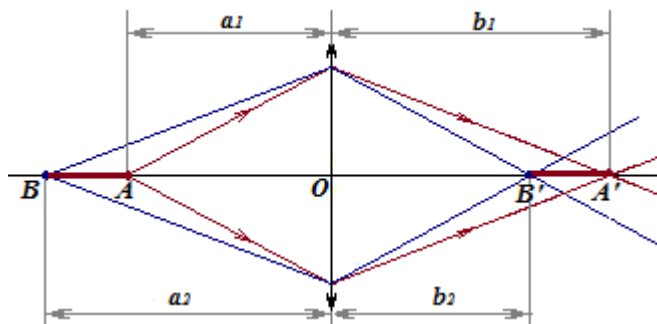


Рисунок 132

Решение

Найдем положение изображения $A'B'$, используя формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F} \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F}.$$

Приравниваем левые части уравнений и преобразуем выражение с учетом того, что длина стержня $l = a_2 - a_1$, а размер изображения $L = b_2 - b_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} \\ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} &= \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} \\ \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} &= \frac{b_1 - b_2}{b_1 b_2} \\ \frac{l}{a_1 a_2} &= \frac{L}{b_1 b_2}. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения находим продольное увеличение

$$\Gamma_{\text{пред}} = \frac{L}{l} = \frac{b_2 b_1}{a_2 a_1} = \Gamma_1 \Gamma_2,$$

где Γ_1 и Γ_2 - поперечное увеличение.

Полученный результат справедлив для любого положения стержня относительно главной оптической оси.

Поперечное увеличение равно

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{aF}{a(a-F)} = \frac{F}{(a-F)}.$$

Окончательно получаем

$$\Gamma_{\text{пред}} = \frac{F}{(a_1 - F)} \cdot \frac{F}{(a_2 - F)} = \frac{F^2}{(a - F)}.$$

Задача 9 Изображение не на экране

Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см. Диаметр линзы $D = 6$ см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен источник света, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметром $d = 4$ см? расстояние от линзы до экрана $L = 100$ см.

Решение

Светлое пятно на экране может получиться при двух различных положениях экрана – когда изображение источника S' расположено за экраном и перед экраном (смотри рисунок 133).

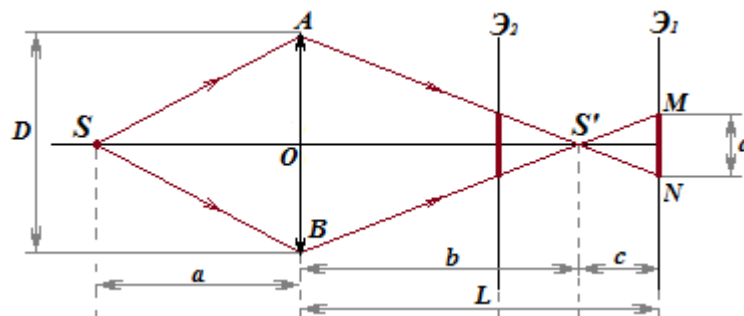


Рисунок 133

Пусть экран расположен в положении $\mathcal{E}_1$.

Треугольники $S'AB$ и $S'MN$ подобны. Следовательно,

$$\frac{b}{c} = \frac{D}{d} = \frac{6}{4} = 1,5 \Rightarrow c = \frac{2b}{3}$$

По условию $b + c = L$. Подставляем найденное значение c и находим расстояние от изображения до линзы b :

$$b + \frac{2b}{3} = L$$

$$b = \frac{3L}{5} = 60 \text{ см}$$

Записываем формулу тонкой линзы и находим расстояние от источника до линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$a = \frac{bF}{b - F} = \frac{60 \cdot 15}{60 - 15} = 20 \text{ см.}$$

Если изображение источника получается за экраном ($\mathcal{E}_2$), то

$$b - c = L$$

$$b - \frac{2b}{3} = L$$

$$b = 3L = 300 \text{ см}$$

$$a = \frac{bF}{b - F} = \frac{300 \cdot 15}{300 - 15} \approx 15,8 \text{ см.}$$

Задача 10 Скорость движения изображения

Вдоль прямой, перпендикулярной главной оптической оси и отстоящей от линзы на расстояние $a = 18$ см, ползет муравей со скоростью $v = 1,6$ см/с. На экране наблюдают четкое изображение муравья (рисунок 134). С какой скоростью u движется изображение муравья, если фокусное расстояние линзы $F = 12$ см?

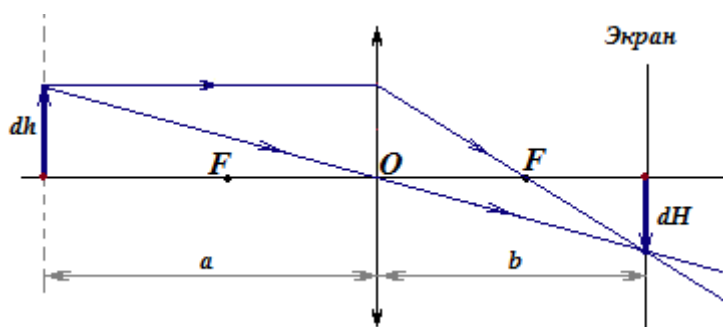


Рисунок 134

Решение

Расстояние от предмета до линзы неизменно, значит, и изображение движется в плоскости экрана на неизменном расстоянии b от линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$b = \frac{aF}{a - F}.$$

За время dt муравей совершает перемещение $dh = v \cdot dt$. Изображение за это же время перемещается на $dH = u \cdot dt$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{dH}{dh} = \Gamma = \frac{b}{a} = \frac{aF}{a(a - F)} = \frac{F}{(a - F)}$$

$$\frac{u \cdot dt}{v \cdot dt} = \frac{F}{(a - F)}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{F}{(a - F)}.$$

Скорость движения изображения равна

$$u = v \cdot \frac{F}{(a - F)} = 1,6 \cdot \frac{18}{18 - 12} = 2,4 \text{ (см/с)}.$$

Задача 11 Скорость движения изображения

Вдоль прямой, проходящей через фокус тонкой собирающей линзы и составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с ее главной оптической осью, ползет в сторону линзы жук с постоянной скоростью $v = 2$ см/с. Найдите скорость перемещения изображения жука в момент, когда он находится на расстоянии от линзы, равном половине фокусного расстояния.

Решение

Строим луч 1, совпадающий с траекторией жука. На мнимом продолжении преломленного луча 1', параллельном главной оптической оси, находится изображение жука.

Первоначальное положение жука – точка A . Через время $dt \rightarrow 0$ жук перемещается в точку B , совершив перемещение $ds = AB = v \cdot dt$. Изображение перемещается из точки A' в точку B' , совершив перемещение $dS = u \cdot dt$ (рисунок 135).

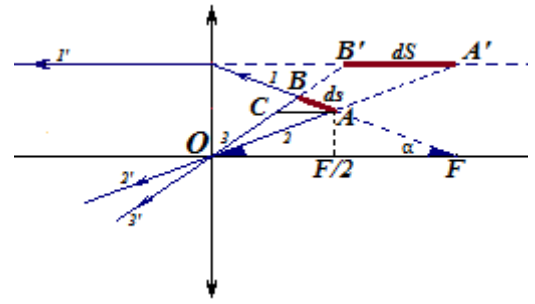


Рисунок 135

Расстояние от точки A' до линзы найдем из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{0,5F} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \Rightarrow f = F.$$

В этом случае нетрудно видеть, что отрезок AC , параллельный главной оптической оси, является средней линией в треугольнике $OA'B'$. Следовательно,

$$AC = \frac{1}{2} A'B' = \frac{u \cdot dt}{2}. \quad (2.29)$$

За время $dt \rightarrow 0$ перемещение жука $ds = AB = v \cdot dt$ тоже мало. Поэтому $\angle BCA = \angle BOF \approx \angle AOF = \alpha$. Треугольник ABC - равнобедренный. Основание треугольника

$$AC = 2AB \cdot \cos \alpha = 2vdt \cdot \cos \alpha. \quad (2.30)$$

Из (2.29) и (2.30) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{u \cdot dt}{2} &= 2vdt \cdot \cos \alpha \\ u &= 4v \cdot \cos \alpha \\ u &= 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6,9 \text{ (см/с)}. \end{aligned}$$

Глава 3 Оптические системы

§1 Система «плоское зеркало – плоскопараллельная пластина»

Горизонтальное дно сосуда является плоским зеркалом (рисунок 136).

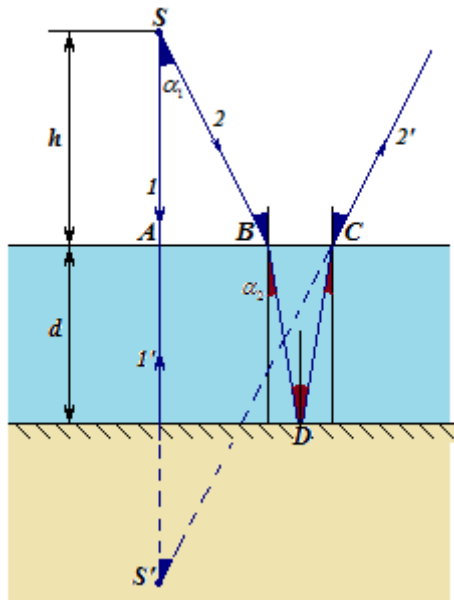


Рисунок 136

В сосуд налита вода, толщина слоя которой равна $d = 12$ см. Человек разглядывает свое изображение в зеркале, расположив лицо на расстоянии $h = 15$ см. На каком расстоянии от глаз человек видит свое изображение в зеркале? Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

Луч 1, падающий перпендикулярно поверхности воды, не преломляется и после отражения от зеркала меняет направление на противоположное.

Луч 2 падает на поверхность воды под малым углом α_1 , преломляется, отражается от зеркала, преломляется еще раз и выходит в воздух.

В глаз человека попадают лучи 1' и 2'. Они расходятся так, как будто вышли из точки S' - изображения S в зеркале. Задача сводится к нахождению расстояния SS' между глазом человека и его изображением.

В треугольнике $S'AC$ сторона AC равна

$$AC = AS' \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \approx AS' \cdot \alpha_1. \quad (3.1)$$

Рассмотрев треугольники SAB и BCD , для стороны AC получаем:

$$AC = AB + BC = h \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + 2d \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \approx h \cdot \alpha_1 + 2d \cdot \alpha_2. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) получаем

$$AS' \cdot \alpha_1 = h \cdot \alpha_1 + 2d \cdot \alpha_2. \quad (3.3)$$

Записываем закон Снелла с учетом малости углов падения и преломления $\alpha_1 = n\alpha_2$. Выражение (3.3) принимает вид

$$AS' \cdot n\alpha_2 = h \cdot n\alpha_2 + 2d \cdot \alpha_2$$

$$AS' \cdot n = h \cdot n + 2d$$

$$AS' = h + \frac{2d}{n}.$$

Расстояние между лицом и изображением

$$SS' = SA + AS' = h + h + \frac{2d}{n} = 2\left(h + \frac{d}{n}\right)$$

$$SS' = 2\left(15 + \frac{12}{4/3}\right) = 48 \text{ (см)}.$$

Проанализируем полученный результат.

Расстояние от глаза человека до зеркала равно $(d + h)$. При отсутствии слоя воды (плоскопараллельной пластины) изображение симметрично предмету относительно зеркала, расстояние между предметом и изображением равно $2(d + h)$.

Присутствие плоскопараллельной пластины приводит к «сокращению» расстояния между предметом и зеркалом и, следовательно, между предметом и изображением. Пластина «сократила» занятое ею расстояние в n (показатель преломления) раз.

§2 Система «линза – плоскопараллельная пластина»

Точечный источник света S расположен на главной оптической оси линзы, расстояние между линзой и источником $a = 34$ см. Между источником света и линзой поместили плоскопараллельную пластину толщиной $d = 12$ см. Определите положение изображения источника S .

Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, показатель преломления вещества пластины $n = 1,5$.

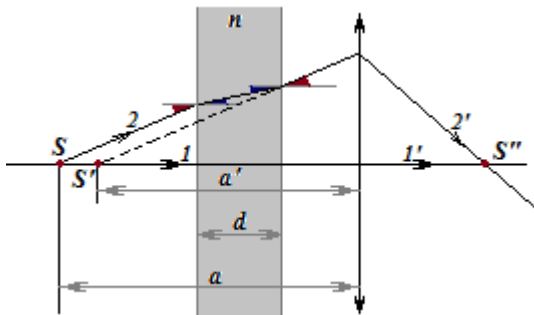


Рисунок 137

Проходя плоскопараллельную пластину, свет дважды испытывает преломление. В результате луч 2 падает на линзу так, как будто он вышел из точки S' , расположенной на расстоянии a' от линзы (рисунок 137).

Как было показано ранее, плоскопараллельная пластина «сокращает» занятое ею расстояние в n раз. Таким образом, расстояние от источника S' до линзы равно

$$a' = (a - d) + \frac{d}{n} = a + \frac{d(1 - n)}{n}$$

$$a' = 34 + \frac{12 \cdot (1 - 0,5)}{1,5} = 30 \text{ (см)}.$$

Расстояние от изображения до линзы находим из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$b = \frac{a' \cdot F}{a' - F} = \frac{30 \cdot 10}{30 - 10} = 7,5 \text{ (см)}.$$

§ 3 Система «линза – плоское зеркало»

Плоское зеркало расположено за линзой с фокусным расстоянием $F = 24$ см на расстоянии $l = 16$ см от нее. Чему равно фокусное расстояние этой системы?

Лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в линзе должны пройти через одну точку – фокус линзы F . Фокус линзы F является источником света для зеркала. Возможны два варианта: точка F

располагается за зеркалом (в этом случае источник света для зеркала мнимый) и точка F располагается перед зеркалом (источник света для зеркала действительный) (рисунок 138).

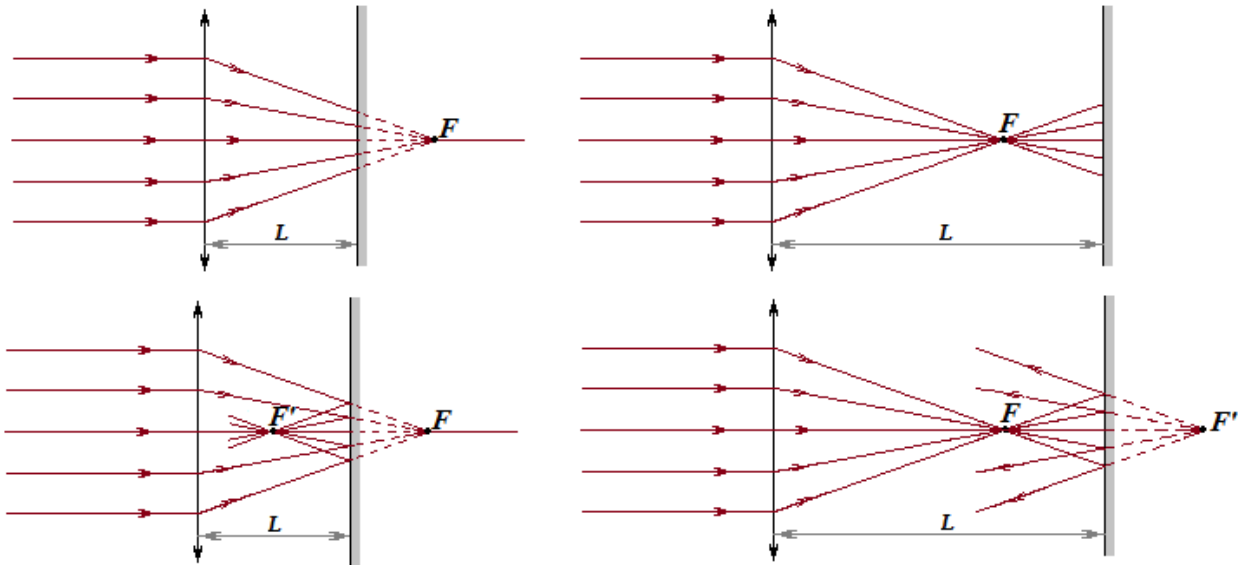


Рисунок 138

После отражения в зеркале лучи идут так, как будто вышли из точки F' - изображения F в зеркале. Точка F' является источником света для линзы, а ее изображение в линзе F'' – фокус системы «линза – зеркало».

В первом случае расстояние от F' до линзы равно $a = L - (F - L) = 2L - F$.

Во втором случае получаем тот же результат $a = L + (L - F) = 2L - F$.

Положение фокуса системы F'' находим, применяя формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$b = \frac{aF}{a - F} = \frac{(2L - F)F}{2(L - F)}. \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, фокус системы может оказаться мнимым ($b < 0$), и система будет работать, как рассеивающая линза. Это будет в случае, когда

расстояние между линзой и зеркалом $\frac{F}{2} < L < F$. При других положениях плоского зеркала фокус системы оказывается действительным ($b > 0$), система будет работать как собирающая линза.

Если линза и зеркало расположены вплотную друг к другу $L = 0$, то из (3.4) следует, что фокус системы действительный и равен $\frac{F}{2}$. Этот результат можно было получить проще, зная, что оптическая сила системы равна сумме оптических сил отдельных ее элементов, если они расположены вплотную друг к другу. Поскольку свет проходит через линзу дважды,

$$\Phi_{\text{системы}} = \Phi_{\text{линзы}} + \Phi_{\text{зеркала}} + \Phi_{\text{линзы}} = \frac{1}{F} + 0 + \frac{1}{F} = \frac{2}{F}$$

$$F_{\text{системы}} = \frac{2}{F}.$$

§4 Системы линз

Системы линз строят для получения изображений с заданными характеристиками. Как правило, необходимо получить увеличенное или уменьшенное изображение, увеличить угол зрения, измерить угол между какими-либо направлениями и так далее.

С другой стороны, система линз позволяет исправить дефекты, даваемые одной линзой, поскольку дефекты положительных и отрицательных линз противоположны.

Если центры сферических поверхностей, образующих систему, совпадают, система называется *центрированной*, а прямая, на которой лежат центры сферических поверхностей, - главной оптической осью системы.

Принцип построения изображения в оптической системе следующий: изображение в первом элементе системы является предметом для следующего элемента системы и так далее. Рассмотрим задачи.

Задача 1 Построение изображения в оптической системе

Собирающая линза L_1 дает в точке S' действительное изображение источника S , расположенного на главной оптической оси линзы. Между линзой L_1 и изображением S' поставлена рассеивающая линза L_2 . Найдите построением новое положение изображения источника (рисунок 139).

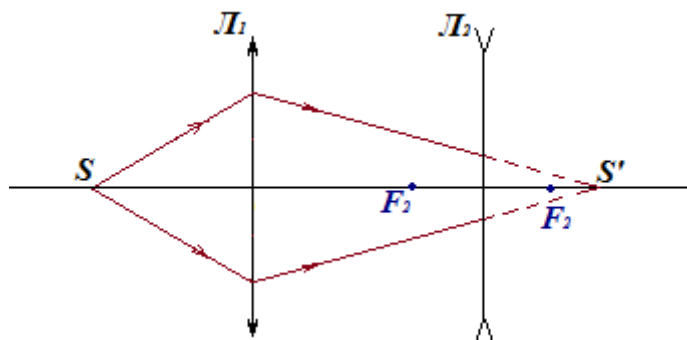


Рисунок 139

Решение

Источник для линзы L_1 находится на главной оптической оси, следовательно, его изображение тоже будет лежать на главной оптической оси. Для нахождения изображения в рассеивающей линзе достаточно построить ход любого луча, не совпадающего с главной оптической осью (рисунок 140).

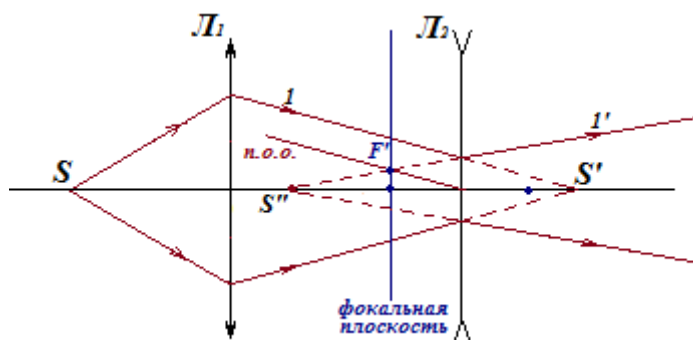


Рисунок 140

- 1 Строим фокальную плоскость через передний фокус рассеивающей линзы.
- 2 Строим побочную оптическую ось, параллельную лучу 1.
- 3 Пересечение побочной оптической оси с фокальной плоскостью дает побочный фокус F' .

4 Преломленный луч $1'$ рассеивается так, как будто вышел из побочного фокуса F' .

5 Луч $1'$ пересекается с главной оптической осью в точке S'' , она является изображением S в системе двух линз.

Задача 2 Расчет фокусных расстояний системы линз

Объектив состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -15$ см. Линзы расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определите положения главных фокусов объектива.

Решение

Фокус – точка, в которой собираются (или из которой расходятся) параллельные лучи после прохождения оптической системы (рисунок 141).

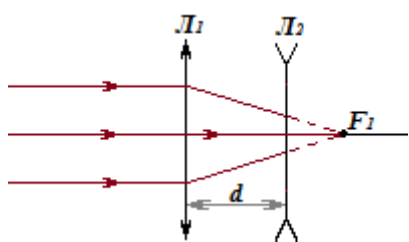


Рисунок 141

Пусть свет сначала падает на собирающую линзу.

Лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в L_1 должны собраться в фокусе первой линзы F_1 , однако на их пути стоит рассеивающая линза L_2 . Таким образом, точка F_1

является мнимым источником для линзы L_2 .

Расстояние от F_1 до линзы L_2 равно $a = F_1 - d$.

Согласно формуле тонкой линзы $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_2}$. Расстояние b от точки,

в которой соберутся лучи после прохождения второй линзы, до линзы L_2 равно

$$b = \frac{F_2 a}{a + F_2} = \frac{(F_1 - d) F_2}{(F_1 - d) + F_2} = \frac{(15 - 10) \cdot (-15)}{(15 - 10) - 15} = 7,5 \text{ (см)}.$$

Расстояние b положительное, следовательно, точка, и которой сойдутся лучи, параллельные главной оптической оси, после прохождения системы, действительная (рисунок 142).

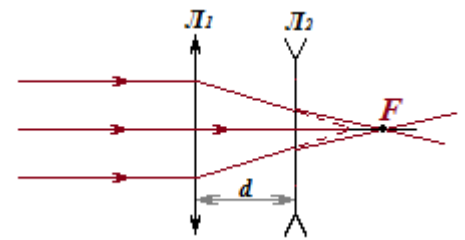


Рисунок 142

Пусть свет сначала падает на рассеивающую линзу.

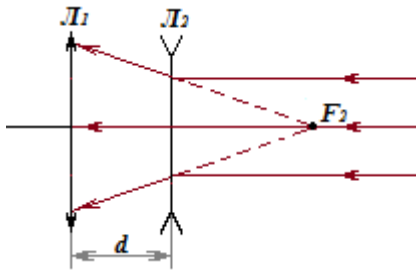


Рисунок 143

Лучи, параллельные главной оптической оси, после преломления в L_2 должны рассеяться так, будто вышли из фокуса F_2 . На пути этих расходящихся лучей стоит собирающая линза L_1 . F_2 является действительным источником для линзы L_2 (рисунок 143).

Расстояние от F_2 до линзы L_1 равно $a = |F_2| + d$.

Согласно формуле тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1}$. Расстояние b от точки, в которой соберутся лучи после прохождения собирающей линзы, до линзы L_1 равно

$$b = \frac{F_1 a}{a - F_1} = \frac{(|F_2| + d) F_1}{(|F_2| + d) - F_1} = \frac{(15 + 10) \cdot 15}{(15 + 10) - 15} = 37,5 \text{ (см)}.$$

Расстояние b положительное, следовательно, точка, и которой сойдутся лучи, параллельные главной оптической оси, после прохождения системы, действительная (рисунок 144).

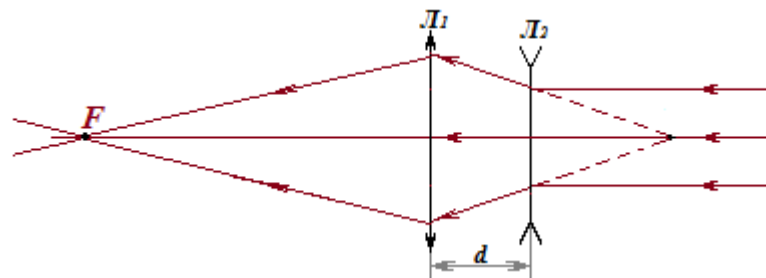


Рисунок 144

В отличие от одной линзы фокусные расстояния системы линз разные. Фокусное расстояние системы линз зависит не только от фокусных расстояний каждой из линз, но и от расстояния между ними.

Интересен случай, когда линзы расположены вплотную друг к другу.

Как уже было показано, фокус первой линзы является мнимым источником для второй линзы. Теперь расстояние от источника до второй линзы $a = F_1$. Записываем формулу линзы и находим расстояние b , на котором лучи пересекут главную оптическую ось после прохождения второй линзы – это и будет фокусное расстояние системы.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{F_2} \\ -\frac{1}{F_1} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{F_2} \\ \frac{1}{F_{\text{сист}}} &= \frac{1}{b} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_1}.\end{aligned}$$

Кстати, в этом случае неважно, с какой стороны свет падает на оптическую систему.

Величина, обратная фокусному расстоянию, - оптическая сила. Таким образом, оптическая сила системы линз, расположенных вплотную друг к другу, равна сумме оптических сил отдельных элементов системы

$$D_{\text{сист}} = D_1 + D_2.$$

В нашем случае ($F_1 = 15$ см, $F_2 = -15$ см) оптическая сила системы линз, расположенных вплотную друг к другу, равна нулю. Лучи, параллельные главной оптической оси, после прохождения системы, останутся параллельными главной оптической оси.

Задача 3 Характер изображения, даваемого системой

Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием

$F_2 = -15$ см. Линзы расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. При каких положениях предмета a относительно собирающей линзы система будет давать действительное изображение?

Решение

Фокусные расстояния линз равны по модулю, обозначим $F_1 = |F_2| = F$.

S' - изображение в первой линзе (рисунок 145).

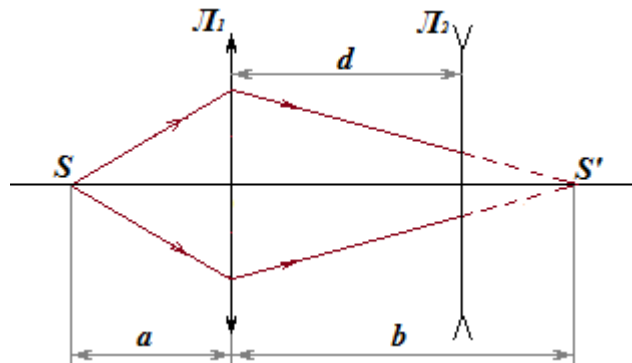


Рисунок 145

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$b = \frac{Fa}{a - F}.$$

Расстояние от S' до L_2 равно

$$a_2 = b - d = \frac{Fa}{a - F} - d = \frac{Fa - ad + Fd}{a - F}.$$

S' - мнимый предмет для второй линзы, следовательно:

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{F}$$

$$\frac{1}{b_2} = -\frac{1}{F} + \frac{1}{a_2} = -\frac{1}{F} + \frac{a - F}{Fa - ad + Fd} = \frac{-Fa + ad - Fd + Fa - F^2}{Fa - ad + Fd} = \frac{ad - Fd - F^2}{Fa - ad + Fd}.$$

Если изображение действительное, то $b_2 > 0$. Решая неравенство

$$\frac{ad - Fd - F^2}{Fa - ad + Fd} > 0$$

получаем интервал $a > 37,5$ см.

Соответственно при $0 < a < 37,5$ см, система будет давать мнимое изображение.

Интересно сопоставить полученный результат с результатом предыдущей задачи. Левый фокус системы расположен на расстоянии 37,5 см от собирающей линзы. Мы обнаружили, что при $0 < a < 37,5$ см, система дает мнимое изображение. Все точно так же, как если бы получали изображение в одной линзе.

Задача 4 Расчет положения изображения в оптической системе

Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -15$ см. Линзы расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Точечный источник находится на расстоянии $a = 30$ см от первой линзы (рисунок 146). Где находится изображение, даваемое системой двух линз?

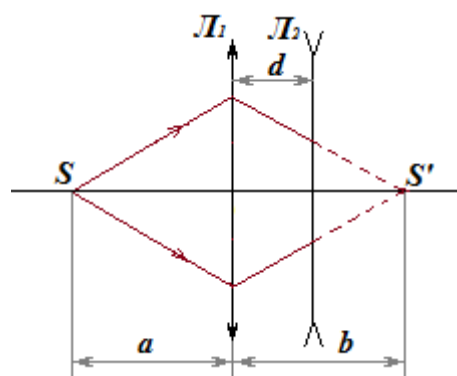


Рисунок 146

Находим положение изображения S' , даваемого первой линзой:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_1}$$

$$b = \frac{F_1 \cdot a}{a - F} = \frac{15 \cdot 30}{30 - 15} = 30 \text{ (см)}$$

$b > d$, следовательно, на линзу L_2 падают сходящиеся лучи. Это значит, что S' является мнимым предметом для L_2 .

Расстояние от S' до линзы L_2 равно $a_2 = b - d$.

Находим положение изображения во второй линзе

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F_2}$$

$$b_2 = \frac{F_2 \cdot a_2}{F_2 + a_2} = \frac{-15 \cdot (30 - 10)}{(30 - 10) - 15} = -60 \text{ (см)}.$$

Расстояние b_2 отрицательное, это значит, что изображение во второй линзе мнимое, оно располагается перед линзой L_2 (рисунок 147).

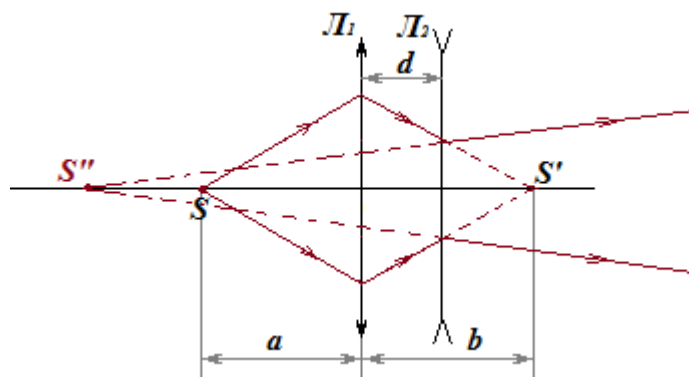


Рисунок 147

Задача 5 Поперечное увеличение системы линз

Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием $F_1 = 15$ см и рассеивающей с фокусным расстоянием $F_2 = -15$ см. Линзы расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси и находится на расстоянии $a = 30$ см от первой линзы. С каким увеличением получается изображение предмета в оптической системе?

Решение

Поперечное увеличение – это отношение размера изображения H к размеру предмета h .

Увеличение, даваемое первой линзой,

$$\Gamma_1 = \frac{H_1}{h}. \quad (3.5)$$

Изображение размером H_1 , даваемое первой линзой, является предметом для второй линзы. Увеличение, даваемое второй линзой

$$\Gamma_2 = \frac{H_2}{H_1}. \quad (3.6)$$

Увеличение, даваемое системой линз,

$$\Gamma = \frac{H_2}{h} = \frac{H_1}{h} \cdot \frac{H_2}{H_1} = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$$

Для нахождения увеличения, даваемого каждой линзой, воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$\Gamma_1 = \frac{H_1}{h} = \frac{b}{a} = \frac{F_1 \cdot a}{a(a - F_1)} = \frac{F_1}{(a - F_1)} = \frac{15}{30 - 15} = 1$$

$$\Gamma_2 = \frac{H_2}{H_1} = \frac{|b_2|}{a_2} = \frac{60}{20} = 3.$$

Увеличение, даваемое системой,

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = 1 \cdot 3 = 3.$$

§5 Оптическая система глаза (рисунок 148)

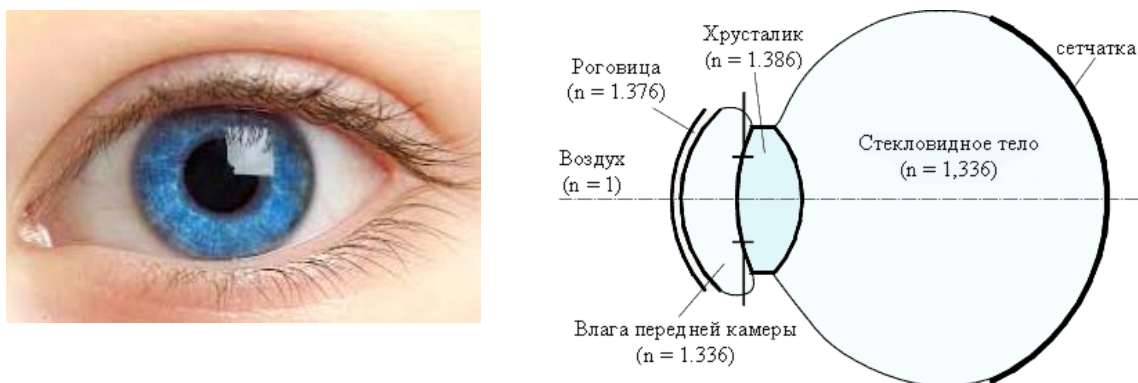


Рисунок 148

Человеческий глаз представляет собой оптическую систему, состоящую из роговой оболочки, влаги передней камеры, хрусталика и стекловидного тела. Система работает как собирающая линза, назначение которой – получить на экране *действительное уменьшенное* изображение предмета. Оно располагается близко к фокальной плоскости линзы (рисунок 149).

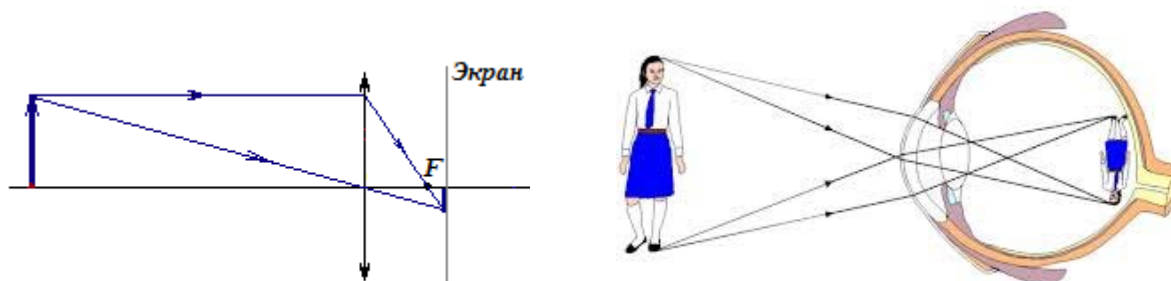


Рисунок 149

Экраном служит сетчатка глаза, выстилающая заднюю внутреннюю поверхность глазного яблока. Сетчатка состоит из светочувствительных клеток – колбочек и палочек. Палочки обладают большей чувствительностью к свету, чем колбочки. Колбочки же способны различать цвета, этой способности у палочек нет.

Наибольшая плотность зрительных клеток, в большей степени колбочек, наблюдается в центральной части сетчатки – это так называемое желтое пятно. Каждая зрительная клетка желтого пятна соединена с

отдельным волокном зрительного нерва. В периферической части сетчатки плотность зрительных клеток меньше, здесь преобладают палочки, а каждое волокно зрительного нерва соединено с несколькими зрительными клетками. В колбочках и палочках световая энергия преобразуется в электрический импульс, распространяющийся по нервным волокнам в головной мозг. Построение изображения происходит в головном мозге при обработке этих электрических импульсов.

Зрение человека **бинокулярное** – на сетчатках двух глаз получают изображения одного предмета. Поскольку глаза пространственно разнесены, изображения объекта на сетчатках разные. Мозг, анализируя разные изображения объекта, создает объемность изображения. Бинокулярное зрение называется еще стереоскопическим.

Две близко расположенные светящиеся точки воспринимаются глазом раздельно, если их изображения на сетчатке попадают на разные зрительные клетки. Мозг реагирует на электрические импульсы, идущие от каждой клетки, и фиксирует факт наличия двух светящихся точек. Если изображения двух близких светящихся точек приходятся на одну колбочку, в мозг поступает один электрический импульс, следовательно, разрешения этих точек в головном мозге не происходит. По этой причине для глаза вводится понятие **разрешающей способности** (или **остроты зрения**) – это минимальный угол между лучами, идущими от близко расположенных точек, при котором они воспринимаются раздельно. Острота зрения нормального глаза составляет **одну угловую минуту**. Понятно, что острота зрения наибольшая, если изображение попадает в область желтого пятна, где плотность колбочек наибольшая.

Человеческий глаз приспособлен для рассматривания предметов, расположенных на разных расстояниях от глаза.

Расстояния от предмета до линзы и от изображения до линзы связаны формулой тонкой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$. Расстояние a от предмета до линзы

меняется в широких пределах. Расстояние b от сетчатки, на которой находится изображение, до линзы неизменно, оно определяется размером глазного яблока. Следовательно, для выполнения формулы тонкой линзы должно изменяться фокусное расстояние F оптической системы. Этот процесс называется **аккомодацией** и осуществляется при помощи глазных мышц. Сокращаясь, глазные мышцы изменяют кривизну хрусталика, значит, его фокусное расстояние $\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$.

При рассматривании удаленных предметов (a велико), фокусное расстояние, как это следует из формулы тонкой линзы, должно быть большим. В этом случае глазная мышца расслаблена, хрусталик имеет наиболее плоскую форму, радиусы кривизны его поверхностей большие, следовательно, и фокусное расстояние F самое большое.

Для рассматривания близких предметов фокусное расстояние линзы должно стать меньше. В этом случае глазная мышца сокращается, хрусталик становится выпуклым, радиусы кривизны его поверхностей, а, следовательно, и фокусное расстояние уменьшаются.

Пределы расстояний, на которые возможна аккомодация глаза, носят название **ближней и дальней точек**.

Дальняя точка для здорового глаза располагается на бесконечности. Это означает, что при расслабленной глазной мышце глаз собирает параллельные лучи в одной точке на сетчатке.

Ближняя точка – минимальное расстояние между предметом и глазом, при котором на сетчатке получается четкое изображение. В этом случае глазная мышца напряжена более всего. Ближняя точка зависит от возраста. Ребенок может разглядывать предметы с расстояния порядка 10 см, с возрастом это расстояние увеличивается.

Расстояние, с которого глаз без заметных усилий способен рассматривать мелкие предметы, называется **расстоянием наилучшего видения**. Для здорового глаза это расстояние порядка 25 см (рисунок 150).

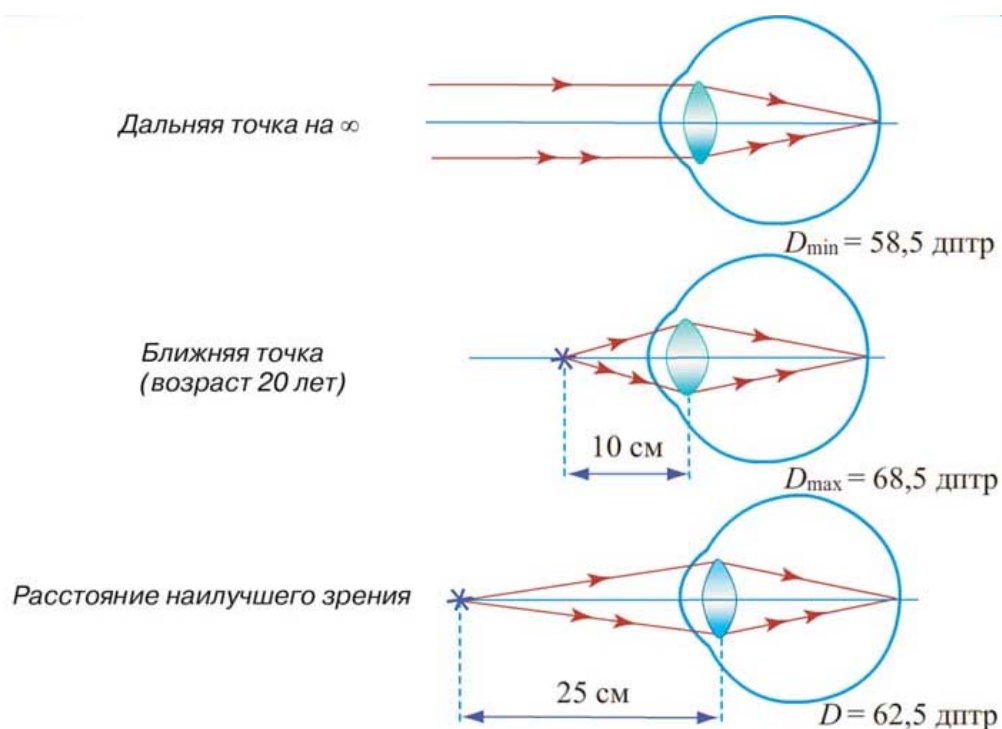


Рисунок 150

Глаз, как любая оптическая система, обладает дефектами – ему свойственны сферическая и хроматическая абберация, астигматизм. Абберация приводит к тому, что вместо точки на экране получается размытое пятно – пятно рассеяния. Однако дефекты глаза мало заметны благодаря некоторым особенностям самого глаза (рисунок 151).

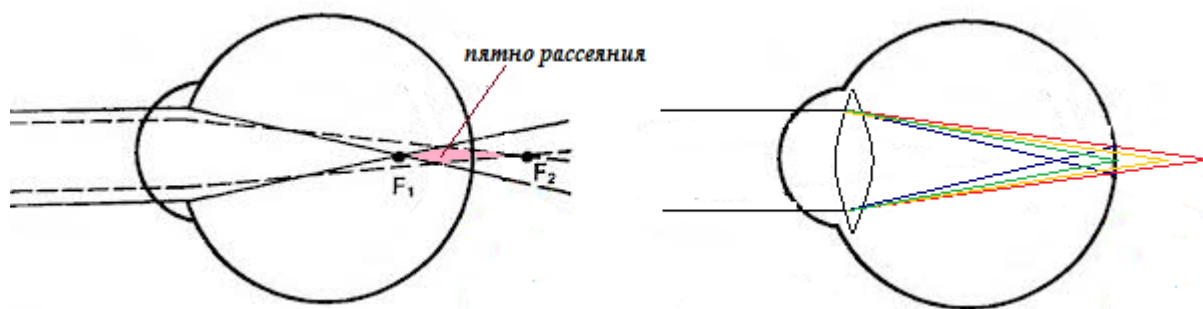


Рисунок 151

Освещенность пятна рассеяния неравномерная, центральная часть пятна самая яркая и имеет маленькие размеры. Для зрительного ощущения важна именно эта центральная часть пятна рассеяния. При ярком освещении

зрачок сильно сужен, тем самым отсекаются лучи, падающие на края линзы – пятно рассеяния уменьшается. При слабом освещении зрачок расширен, изображение точки в виде пятна рассеяния может оказаться в периферической части сетчатки. Однако способность сетчатки к хорошему распознаванию изображения понижается к периферии, за счет микродвижений глазного яблока изображение точки приводится в центральную часть желтого пятна.

Хроматическая аберрация глаза практически незаметна, так как глаз чувствителен к очень узкой части спектра.

Наиболее распространенные недостатки зрения – близорукость и дальнозоркость.

Близорукий глаз собирает параллельные лучи перед сетчаткой. У близорукого глаза ближняя и дальняя точки приближены к глазу. Причины близорукости: удлинение глазного яблока и изменение кривизны хрусталика (он более выпуклый, сильнее преломляет световые лучи) (рисунок 152).

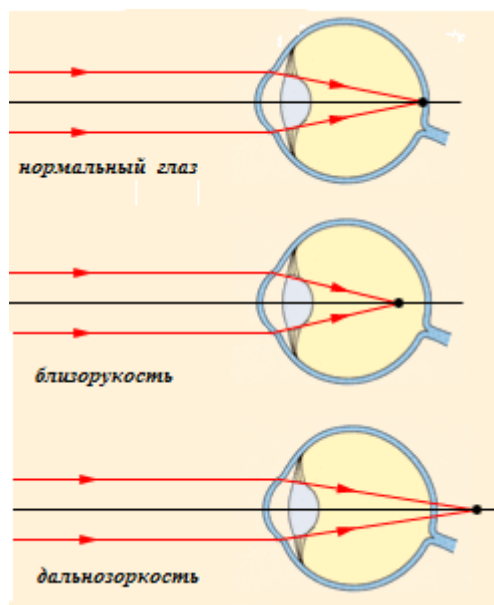


Рисунок 152

Дальнозоркий глаз собирает параллельные лучи за сетчаткой. У дальнозоркого человека ближняя точка расположена дальше, чем у человека с нормальным зрением. Причины дальнозоркости: укорачивание глазного

яблока и изменение кривизны хрусталика (с возрастом он теряет эластичность и способность сокращаться, становится более плоским, следовательно, слабее преломляет световые лучи).

Дальнозоркость и близорукость можно исправлять при помощи очков. Близорукому человеку требуется рассеивающая линза, дальнозоркому – собирающая (рисунок 153).

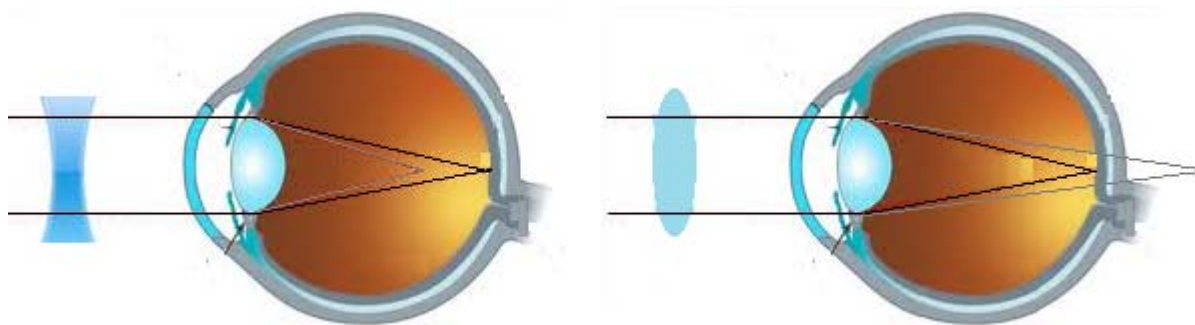


Рисунок 153

Задача 1 Близорукий человек может отчетливо видеть предметы на расстоянии не более $d_1 = 20$ см. Какие очки нужны этому человеку для рассматривания удаленных предметов?

Дальняя точка для человека располагается на расстоянии d_1 . Глазная мышца полностью расслаблена, хрусталик имеет наиболее плоскую форму. Записываем формулу тонкой линзы для глаза в этом случае:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{\text{глаза}}}. \quad (3.7)$$

В очках человек должен видеть, как здоровый человек, т.е. дальняя точка должна уйти на бесконечность. При этом глазная мышца остается расслабленной, хрусталик наиболее плоским, фокусное расстояние глаза такое же, как первом случае, b - расстояние от изображения до линзы не изменилось. Пренебрегая расстоянием между глазом и очковой линзой, записываем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{\text{глаза}}} + \frac{1}{F_{\text{очков}}}. \quad (3.8)$$

Решая уравнения (3.7) и (3.8) совместно, получаем

$$D = \frac{1}{F_{\text{очков}}} = -\frac{1}{d_1} = -\frac{1}{0,20} = -5 \text{ (дптр)}.$$

Задача 2 При рассматривании своего лица в зеркале человеку удобно располагать плоское зеркало на расстоянии 25 см от лица. Какие очки следует порекомендовать этому человеку для чтения?

Изображение в плоском зеркале располагается симметрично предмету. В данном случае изображение лица находится на расстоянии 50 см от глаз. Для человека это расстояние наилучшего видения. Очевидно, человек дальнорзоркий.

$$\begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{\text{глаза}}} & - \text{без очков} \\ \frac{1}{d_{\text{зор}}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{\text{глаза}}} + \frac{1}{F_{\text{очков}}} & - \text{в очках,} \end{cases}$$

где $d_{\text{зор}}$ - расстояние наилучшего видения здорового глаза, оно составляет 25 см.

$$D = \frac{1}{F_{\text{очков}}} = \frac{1}{d_{\text{зор}}} - \frac{1}{d} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,5} = 2 \text{ (дптр)}.$$

Как и следовало ожидать, для коррекции зрения человеку требуется положительная (собирающая) линза.

§6 Оптические инструменты, увеличивающие угол зрения

Допустим, лучи, идущие от двух различных светящихся точек, образуют некий угол α . Глаз способен различить эти светящиеся точки, если угол α превышает физиологически предельный угол, составляющий для здорового глаза приблизительно одну минуту.

С малым углом между световыми лучами, идущими от различных светящихся точек, человеку приходится сталкиваться в двух ситуациях.

Первая – необходимо различить мелкие детали какого-либо предмета. Приближая предмет к глазу, человек уменьшает площадь, вырезаемую предельным физиологическим углом, тем самым получает возможность разглядеть более мелкие детали. Однако приближение предмета к глазу ограничено способностью глаза к аккомодации. Здоровый глаз может комфортно разглядывать мелкие детали с расстояния наилучшего видения $D = 25$ см. Напрягая глазную мышцу, здоровый молодой глаз может уменьшить это расстояние до 10 см, при дальнейшем приближении предмета к глазу четкого изображения на сетчатке уже не получается.

Вторая ситуация – необходимо различить детали крупного объекта, но удаленного от глаза на большое расстояние.

Для увеличения угла зрения используются оптические инструменты.

1 *Лупа* – линза или несколько линз с небольшим фокусным расстоянием (1 – 10 см), позволяет рассматривать мелкие детали близко расположенного предмета (рисунок 154).



Рисунок 154

Если невооруженный глаз рассматривает мелкий предмет с расстояния наилучшего видения D , то угол, под которым лучи от крайних точек предмета попадают в глаз, составляет $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{D}$ (рисунок 155).

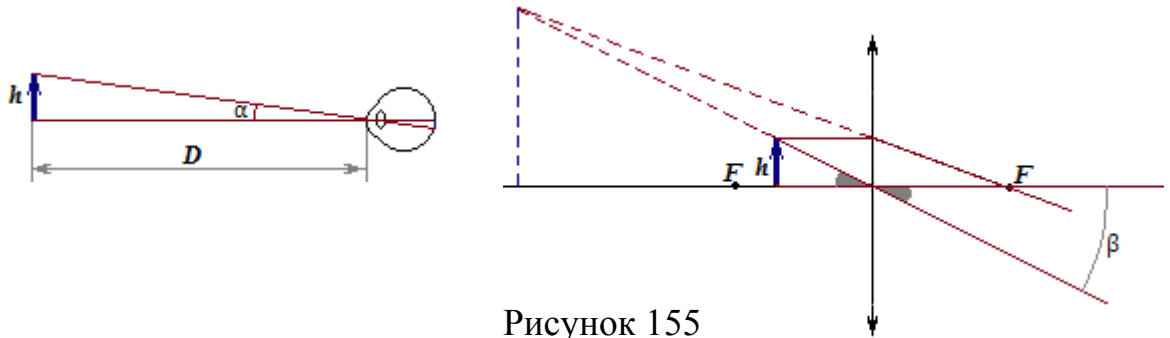


Рисунок 155

Расположив между глазом и предметом лупу, человек рассматривает мнимое, прямое, увеличенное изображение предмета.

Наибольший угол между лучами, попадающими в глаз от крайних точек предмета, теперь составляет $\beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \frac{h}{F}$.

Угловое увеличение составляет

$$N = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{h/F}{h/D} = \frac{D}{F}.$$

Понятно, что угловое увеличение будет больше при использовании лупы с меньшим фокусным расстоянием. Однако уменьшение фокусного расстояния связано с уменьшением размера самой линзы. Поэтому угловое увеличение лупы, как правило, не превышает 25.

2 **Микроскоп** позволяет рассматривать мелкие предметы, для которых требуется большее угловое увеличение (рисунок 156).



Рисунок 156

Микроскопа представляет собой систему двух собирающих линз, объектива и окуляра, закрепленных в трубке – тубусе. Длина тубуса Δ существенно превышает фокусные расстояния объектива и окуляра (рисунок 157).

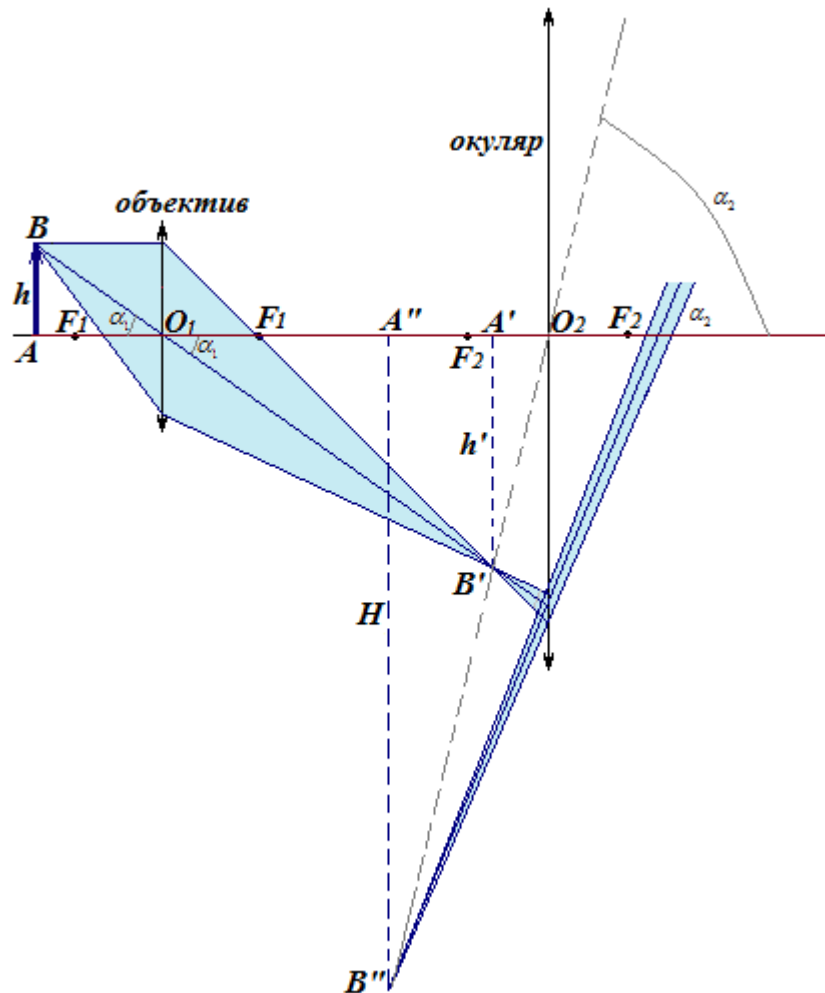


Рисунок 157

Мелкий предмет AB располагается близко к фокальной плоскости объектива. В этом случае объектив дает действительное, перевернутое, увеличенное изображение предмета $A'B'$.

Поперечное увеличение, даваемое объективом, равно

$$\Gamma_1 = \frac{h'}{h} \approx \frac{\Delta - F_2}{F_1}.$$

Изображение $A'B'$, даваемое объективом, является предметом для окуляра. Окуляр микроскопа работает как лупа: предмет $A'B'$ располагается перед фокусом линзы, и окуляр дает мнимое увеличенное изображение предмета $A''B''$. Это изображение человек рассматривает, располагая глаз вплотную к окуляру. Изображение $A''B''$ находится на расстоянии наилучшего видения D от глаза. Поперечное увеличение, даваемое окуляром, равно

$$\Gamma_2 = \frac{H}{h'} \approx \frac{D}{F_2}$$

Поперечное увеличение, даваемое всей системой

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{(\Delta - F_2)D}{F_1 F_2} \approx \frac{\Delta D}{F_1 F_2}.$$

Увеличение микроскопа может варьироваться в широких пределах, от нескольких десятков до тысячи. Увеличение прибора растет при уменьшении фокусных расстояний объектива и окуляра.

Однако на увеличение микроскопа наложено ограничение. Дело в том, что для наблюдения мелкого предмета, его нужно осветить. При попадании света на непрозрачный объект наблюдается явление дифракции.

3 **Зрительные трубы** позволяют рассматривать удаленные предметы (рисунок 158).



Рисунок 158

Зрительная труба Кеплера представляет собой систему из двух собирающих линз – длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра. При рассматривании удаленных предметов фокусные расстояния объектива и окуляра совпадают (труба настроена на бесконечность).

Пусть лучи от точечного источника A идут параллельно главной оптической оси, а лучи от точечного источника B – под некоторым малым углом α_1 к главной оптической оси. После преломления в объективе эти лучи пересекутся соответственно в главном и побочном фокусах (рисунок 159).

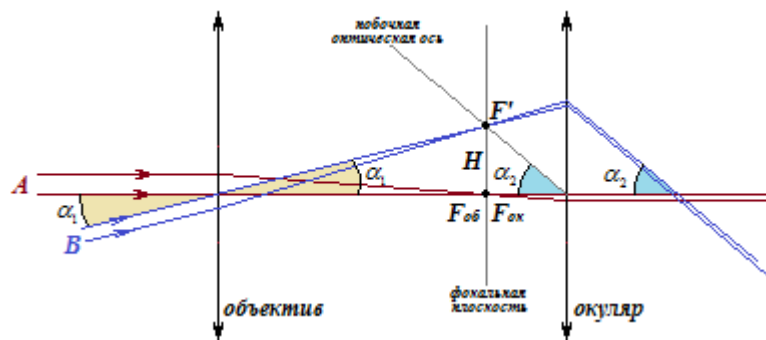


Рисунок 159

Лучи, идущие из фокуса, преломляясь в окуляре, пойдут параллельно оптической оси.

Угол между лучами, идущими от объектов A и B , равен

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{H}{F_{об}}.$$

Угол между лучами от объектов A и B после выхода из трубы равен

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H}{F_{ок}}.$$

Угловое увеличение составляет

$$N = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}.$$

Нетрудно видеть, что угловое увеличение трубы Кеплера растет при увеличении фокусного расстояния объектива и уменьшении фокусного расстояния окуляра.

Труба Кеплера дает перевернутое изображение. Этот «недостаток» отсутствует в трубе Галилея. В качестве объектива в этой трубе используется рассеивающая линза. Если труба настроена на бесконечность, фокусные расстояния объектива и окуляра опять-таки должны совпадать.

Параллельные лучи после преломления в объективе должны собраться в фокусе. На пути этих лучей располагается рассеивающая линза. Лучи, стремящиеся попасть в фокус, после преломления становятся параллельными соответствующей оптической оси (рисунок 160).

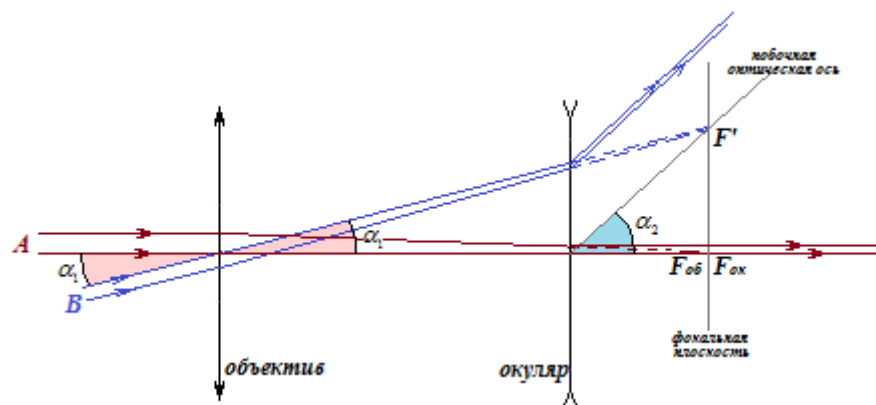


Рисунок 160

Угловое увеличение трубы Галилея рассчитывается, как и для трубы Кеплера

$$N = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}.$$

На основе зрительных труб Кеплера и Галилея построены многие оптические инструменты: телескопы-рефракторы, бинокли, теодолиты, оптические дальномеры.

Бинокль представляет собой две параллельно расположенные зрительные трубы, что позволяет наблюдать удаленные объекты двумя глазами и, следовательно, получать *стереоскопическое изображение* предмета (рисунок 161).

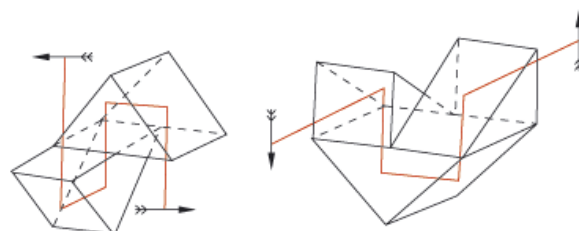


Рисунок 161

Для усиления стереоскопического эффекта картинки, получаемые на сетчатке левого и правого глаза, должны как можно больше отличаться. Для этого «базу» бинокля, расстояние между зрительными трубами, желательно увеличить. Для направления в окуляр лучей, прошедших объектив, используются поворотные призмы.

Наиболее распространенными являются оборачивающие системы на призмах, изобретенных французским оптиком Порро.

Теодолит – оптический инструмент, предназначенный для измерения горизонтальных и вертикальных углов при проведении геодезических работ (рисунок 162).



Рисунок 162

Основные узлы теодолита: зрительная труба, горизонтальный и вертикальный отсчетные круги с градусными, минутными и секундными делениями, микроскоп для считывания отсчетов.

Принцип измерения горизонтальных углов прост: по горизонтальному кругу с делениями вращается направляющая рейка, с помощью которой производится определение направления на объект. С рейкой жестко связана стрелка – она указывает угол на шкале горизонтального круга между направлением на объект и каким-то фиксированным направлением (рисунок 163).

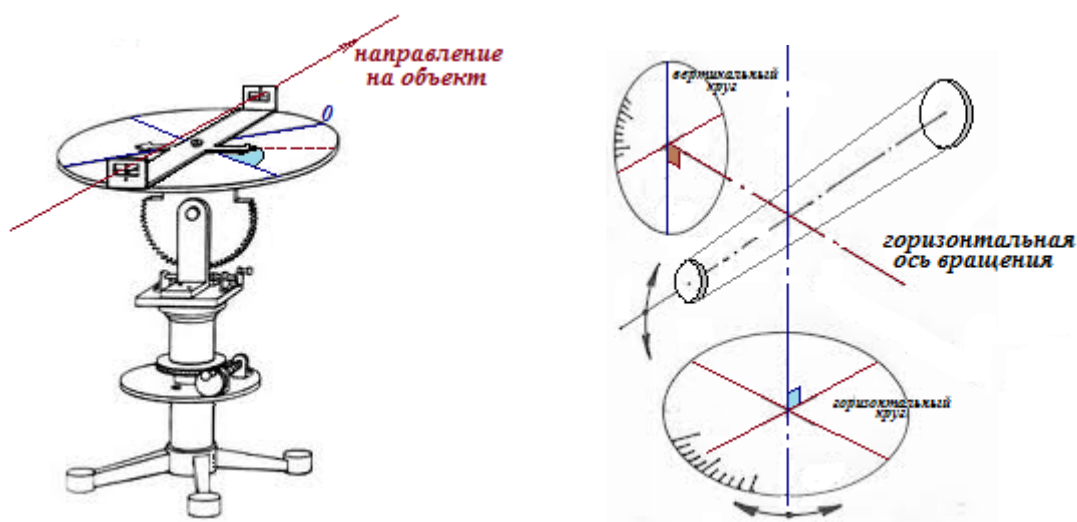


Рисунок 163

В теодолите направление на объект производится при помощи зрительной трубы Галилея. Для отсчета горизонтальных углов служит горизонтальный круг. Он состоит из неподвижного лимба с делениями по ободу и жестко связанного с трубой диска, алидады. Алидада вращается вместе со зрительной трубой, при этом отсчет по горизонтальному кругу изменяется.

Для более точного измерения углов роль алидады в современных теодолитах выполняют оптические системы, состоящие из линз и поворотных призм. Подобно алидаде считывающая оптическая система

жестко связана со зрительной трубой, наводимой на объект. Рассмотрим упрощенную схему такой системы (рисунок 164).

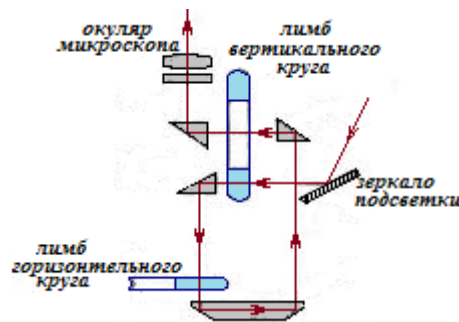


Рисунок 164

Луч света отражается от зеркала подсветки, проходит через лимб вертикального круга, попадает на поворотную призму и направляется на лимб горизонтального круга. После прохождения лимба горизонтального круга луч направляется в окуляр микроскопа при помощи поворотных призм. Микроскоп позволяет рассмотреть штрихи на лимбах вертикального и горизонтального кругов.

§7 Примеры решения задач

«Инструменты, увеличивающие угол зрения»

Задача 1 Лупа

Часовщику необходимо рассматривать детали часов, размеры которых в $N = 3$ раза меньше, чем минимальное расстояние между двумя точками, которое он может рассмотреть с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см. Чему равно максимальное фокусное расстояние лупы, которую он должен использовать, чтобы рассмотреть детали? При использовании лупы глаз наблюдателя аккомодирован на бесконечность, а рассматриваемые предметы расположены в фокальной плоскости линзы (рисунок 165).

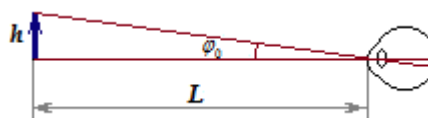


Рисунок 165

При рассматривании мелкого предмета с расстояния наилучшего зрения угол между лучами, идущими в глаз от крайних точек предмета, равен

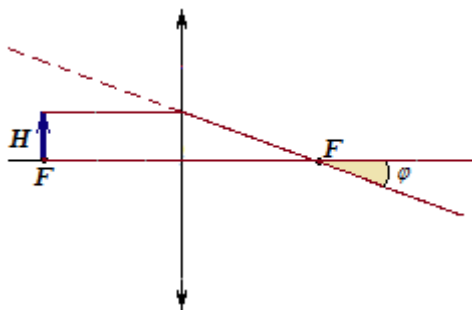


Рисунок 166

$$\varphi_0 \approx \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{h}{L} \text{ (рисунок 166).}$$

При использовании лупы угол между лучами, идущими от крайних точек предмета,

равен
$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{F} = \frac{h}{NF}.$$

Чтобы разглядеть мелкий предмет, необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} \varphi &\geq \varphi_0 \\ \frac{h}{NF} &\geq \frac{h}{L} \\ F &\geq \frac{L}{N} = \frac{25}{3} = 8,3 \text{ (см)} \end{aligned}$$

Задача 2 Микроскоп

В микроскопе фокусное расстояние объектива $F_1 = 5,4$ мм, а окуляра $F_2 = 2$ см. Предмет находится на расстоянии $a_1 = 5,6$ мм от объектива. Определите увеличение микроскопа для нормального глаза и длину тубуса микроскопа.

Найдем положение изображения предмета в объективе микроскопа при помощи формулы тонкой линзы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} &= \frac{1}{F_1} \\ b_1 &= \frac{a_1 F_1}{a_1 - F_1} = \frac{5,6 \cdot 5,4}{5,6 - 5,4} = 151,2 \text{ (мм)} \end{aligned}$$

Изображение предмета в объективе действительное и увеличенное в

$$\Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{F_1}{a_1 - F_1} = \frac{5,4}{5,6 - 5,4} = 27 \text{ раз.}$$

Окуляр микроскопа должен работать как лупа. Прямое мнимое изображение глаз должен видеть на расстоянии наилучшего зрения $L = 25$ см. Найдем положение предмета до окуляра на основании формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{L} = \frac{1}{F_2}$$

$$a_2 = \frac{LF_2}{L + F_2} = \frac{25 \cdot 2}{25 + 2} = 1,85 \text{ (см)}$$

Увеличение, даваемое окуляром, равно $\Gamma_2 = \frac{L}{a_2} = \frac{L + F_2}{F_2} = \frac{25 + 2}{2} = 13,5$.

Увеличение, даваемое микроскопом, равно $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = 27 \cdot 13,5 = 364,5$.

Длина тубуса, то есть расстояние между объективом и окуляром, равно

$$\Delta = b_1 + a_2 = 15,12 + 1,85 = 16,97 \text{ (см)}$$

Задача 3 Зрительная труба Кеплера

Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Кеплера. В качестве объектива и окуляра используются линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 30$ см и $F_2 = 5$ см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L_1 = 33$ см до $L_2 = 34,5$ см. На каких расстояниях наблюдатель видит изображение предмета?

Человек рассматривает удаленный предмет. Это значит, что изображение предмета в объективе получится в фокальной плоскости (рисунок 167).

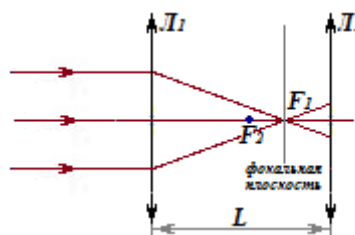


Рисунок 167

По условию расстояние между объективом и окуляром меньше суммы фокусных расстояний объектива и окуляра $L < F_1 + F_2$. Это означает, что изображение в объективе, являющееся предметом для окуляра, находится перед фокусом окуляра.

Окуляр, по существу, должен работать как лупа. Следовательно, он будет давать мнимое увеличенное изображение предмета.

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2},$$

где f – расстояние, на котором человек видит изображение;

d – расстояние от изображения в объективе (фокальной плоскости объектива) до окуляра L_2 , на рисунке видно, что $d = L - F_1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{L - F_1} - \frac{1}{f} &= \frac{1}{F_2} \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{L - F_1} - \frac{1}{F_2} \\ f &= \frac{(L - F_1)F_2}{F_2 - L + F_1}. \end{aligned}$$

При $L_1 = 33$ см человек видит изображение на расстоянии

$$f = \frac{(33 - 30) \cdot 5}{5 + 30 - 33} = 7 \text{ (см)}.$$

При $L_2 = 34,5$ см человек видит изображение на расстоянии

$$f = \frac{(34,5 - 30) \cdot 5}{5 + 30 - 34,5} = 45 \text{ (см)}.$$

Задача 4 Зрительная труба Галилея

Объективом театрального бинокля служит собирающая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 8$ см, окуляром – рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = -4$ см. Чему равно расстояние между объективом и окуляром, если изображение рассматривается с расстояния наилучшего видения $D = 25$ см?

Запишем уравнение тонкой линзы для окуляра с учетом того, что даваемое им изображение мнимое и находится на расстоянии наилучшего видения D от линзы: $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{D} = \frac{1}{F_2}$,

где a_2 – расстояние от изображения в объективе, являющегося предметом для окуляра, до окуляра.

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{D} + \frac{1}{F_2}$$
$$a_2 = \frac{DF_2}{F_2 + D} = \frac{25 \cdot (-4)}{-4 + 25} = -4,76 \text{ (см)}.$$

Знак «минус» говорит о том, что предмет для окуляра (изображение в объективе) мнимый, то есть на окуляр падают сходящиеся лучи. Поскольку в бинокль рассматривают удаленный предмет, его изображение в объективе получается в фокальной плоскости объектива. Расстояние между объективом и окуляром $L = F_1 + a_2 = 8 - 4,76 = 3,24$ (см) (рисунок 168).

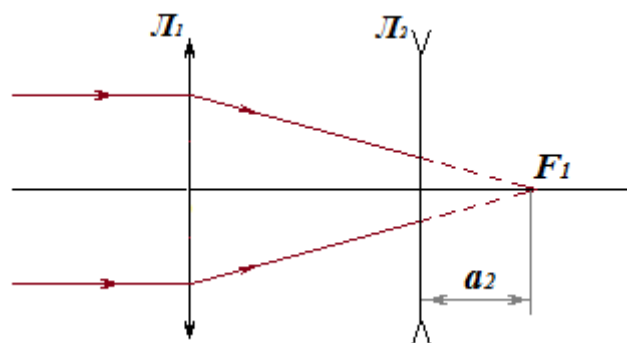


Рисунок 168

Список использованных источников

1 Ландсберг, Г.С. Оптика /Г.С. Ландсберг - М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 848 с. - ISBN 5-9221-0314-8.

2 Сивухин, Д.В. Общий курс физики: В 5 т. Т4.Оптика: учебное пособие для вузов / Д.В.Сивухин.- М: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2006.- 792 с. – ISBN 5-9221-0228-1.

3 Сборник задач по физике: Для 10-11 кл. с углубл. изуч. физики / Под. ред. С.М. Козела. – 3 –е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 2001. – 264 с. - ISBN 5 – 010630 - 4.

4 Кузнецов, Е.П. Оптика на вступительных экзаменах / Е.П. Кузнецов - Изд-во МФТИ, 2006. - 85 с. – ISBN 5-8835-003-6.

5 Кингсен, А.С. Основы физики. Курс общей физики: В 2 т. Т 1. Механика, электричество магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / А.С.Кингсен., Г.Р.Локшин, О.А. Ольхов О.А. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2001, - 560 с. – ISBN 5 – 9221 – 0164 – 1.