Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Г.В. Куча, И.И. Мосалева

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки 190700.62 Технологии транспортных процессов, 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 280700.62 Техносферная безопасность, 201000.62 Биотехнические системы в технологии, 151900.62 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств

Оренбург
2013

УДК 531.2(016)
ББК 22.213я7
К 95

Рецензент – профессор, кандидат технических наук Р.В.Ромашов

Куча, Г.В.
К 95 Учебное пособие для лабораторных работ по теоретической механике / Г.В. Куча, И.И. Мосалева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2013 – 138 с.

Основное содержание: произвольная плоская система сил, момент силы относительно точки, расчет плоской фермы, равновесие составной конструкции произвольная пространственнная система сил, момент силы относительно оси, главный вектор и главный момент системы, основная теорема статики, равновесие абсолютно твердого тела, составление расчетных схем и уравнений равновесия произвольной системы сил; сложное движение точки; виды движения твердого тела, основные кинематические характеристики движения; скорости и ускорения точек тела.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки 190700.62 Технологии транспортных процессов, 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 280700.62 Техносферная безопасность, 201000.62 Биотехнические системы в технологии, 151900.62 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

УДК 531.2(016)
ББК 22.213я7

©Куча Г.В.,
Мосалева И.И., 2013
©ОГУ, 2013

Содержание

Введение 6
1 Произвольная плоская система сил 7
1.1 Основные понятия и определения 7
1.1.1 Сила. Проекция силы на ось 7
1.1.2 Момент силы относительно точки 8
1.1.3 Пара сил. Момент пары 9
1.1.4 Основная теорема статики 10
1.1.5 Теорема Вариньона 12
1.1.6 Связи. Силы реакции связей 13
1.1.7 Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей) 14
1.1.8 Некоторые виды связей и их реакции 14
1.2 Вопросы для самоконтроля 15
1.3 Лабораторная работа №1 Равновесие твердого тела 16
1.3.1 Содержание работы 16
1.3.2 Порядок решения задач 20
1.4 Пример выполнения лабораторной работы №1 20
2 Статически определимые плоские фермы. 29
2.1 Основные понятия и определения 29
2.1.1 Общие сведения 29
2.1.2. Определение сил в стержнях способом вырезания узлов 29
2.1.3 Определение сил в стержнях способом сечений (способом Риттера) .. 30
2.2 Вопросы для самоконтроля 31
2.3 Лабораторная работа №2 Определение усилий в стержнях плоской фермы 31
2.3.1 Содержание работы 31
2.3.2 Порядок решения задач 41
2.4 Пример выполнения лабораторной работы №2 42
3 Произвольная пространственная система сил 51
3.1 Основные понятия и определения 51

3.1.1 Проекция силы на плоскость 51
3.1.2 Общие сведения 52
3.1.3 Момент силы относительно оси. 53
3.1.4 Пара сил 55
3.1.5 Основная теорема статики (теорема Пуансо) 55
3.1.6 Условия равновесия произвольной пространственной системы 56
3.1.7 Некоторые виды связей и их реакции 58
3.2 Вопросы для самоконтроля 59
3.3 Лабораторная работа №3. Равновесие твердого тела. Произвольная пространственная система сил 59
3.3.1 Содержание работы 59
3.3.2 Порядок решения задач 64
3.4 Пример выполнения лабораторной работы №3 65
4 Простейшие движения твердого тела 72
4.1 Основные понятия и определения 72
4.1.1 Поступательное движение 72
4.1.2 Вращательное движение 72
4.1.3 Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела 77
4.1.4 Векторные формулы для определения скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси 79
4.1.5 Передаточные механизмы 81
4.2 Вопросы для самоконтроля 84
4.3 Лабораторная работа №4 Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях 84
4.3.1 Содержание задания 84
4.3.2 Рекомендации к решению задач 85
4.4 Пример выполнения лабораторной работы №4 88
5 Плоскопараллельное движение твердого тела 93
5.1 Основные понятия и определения 93

5.1.1 Уравнения движения. Разложение движения на поступательное и вращательное 93
5.1.2 Определение скоростей точек тела 96
5.1.3 Определение ускорений точек тела 101
5.2 Вопросы для самоконтроля 103
5.3 Лабораторная работа №5 Кинематический анализ плоского механизма. 103
5.3.1 Содержание задания 103
5.3.2 Рекомендации к решению задач 108
5.4 Пример выполнения лабораторной работы №5 108
6 Сложное движение точки 116
6.1 Общие сведения 116
6.1.1 Основные определения 116
6.1.2 Теорема сложения скоростей 119
6.1.3 Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса) 120
6.1.4 Модуль и направление ускорения Кориолиса 120
6.2 Вопросы для самоконтроля 126
6.3 Лабораторная работа №6 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки 126
6.3.1 Содержание задания 126
6.3.2 Рекомендации к решению задач 129
6.4 Пример выполнения лабораторной работы №6 129
7 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины 136
Список использованных источников 138

Введение

Учебное пособие содержит основные теоретические положения и формулы по разделам теоретической механики «Статика», «Кинематика», общие рекомендации к решению типовых задач, а также вопросы для самоконтроля, на которые необходимо ответить прежде, чем приступать к выполнению заданий.

Учебное пособие включает примеры решения типовых задач, варианты исходных схем и необходимых числовых данных.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения для самостоятельного изучения учебного материала и выполнения контрольных заданий по курсу теоретической механики, а также для подготовки к сдаче зачетов и экзаменов.

1 Произвольная плоская система сил

1.1 Основные понятия и определения

1.1.1 Сила. Проекция силы на ось

Векторная величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется *силой.*

Проекция силы на ось – скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от её начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус – если в отрицательном.

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. *Проекция* будет *положительной*, если угол между направлением силы и положительным направлением оси – острый, и *отрицательной*, если этот угол – тупой. Если сила перпендикулярна оси, её проекция на ось равна нулю. Если сила параллельна оси, то её проекция на ось равна самой силе (рисунок 1).

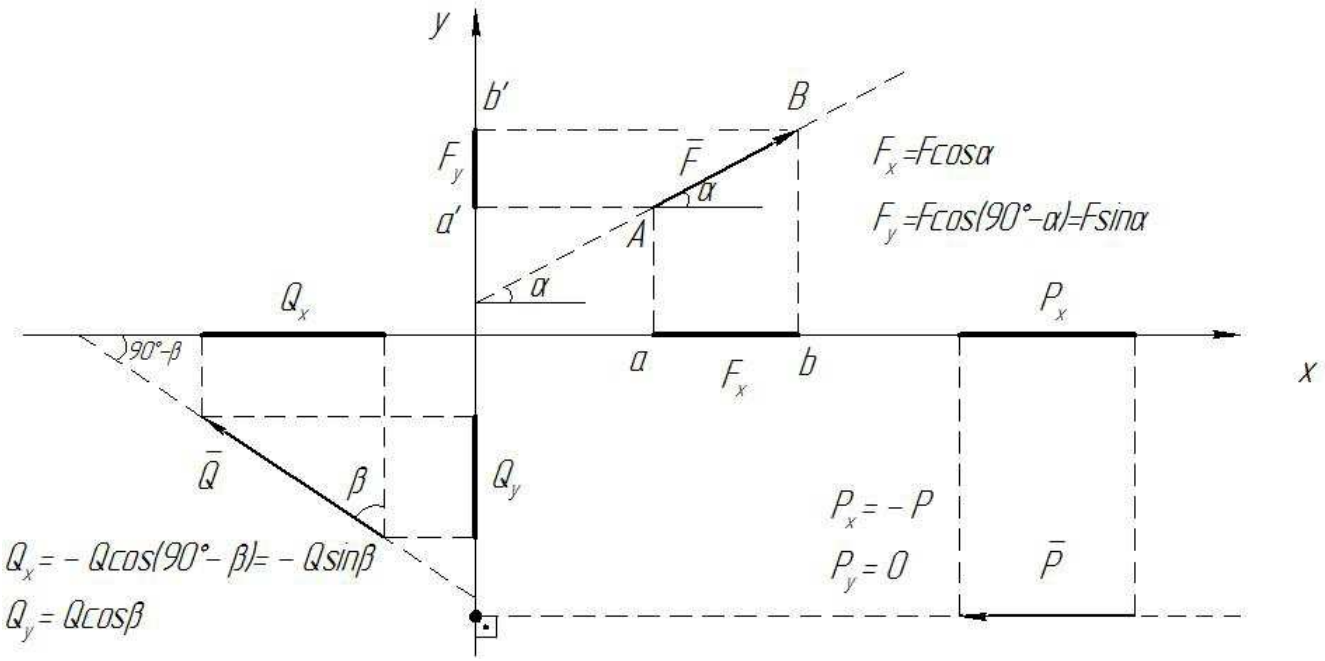


Рисунок 1

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело, называется *системой сил.*

Система сил, линии действия которых произвольно расположены в одной плоскости, называется *плоской произвольной системой сил.*

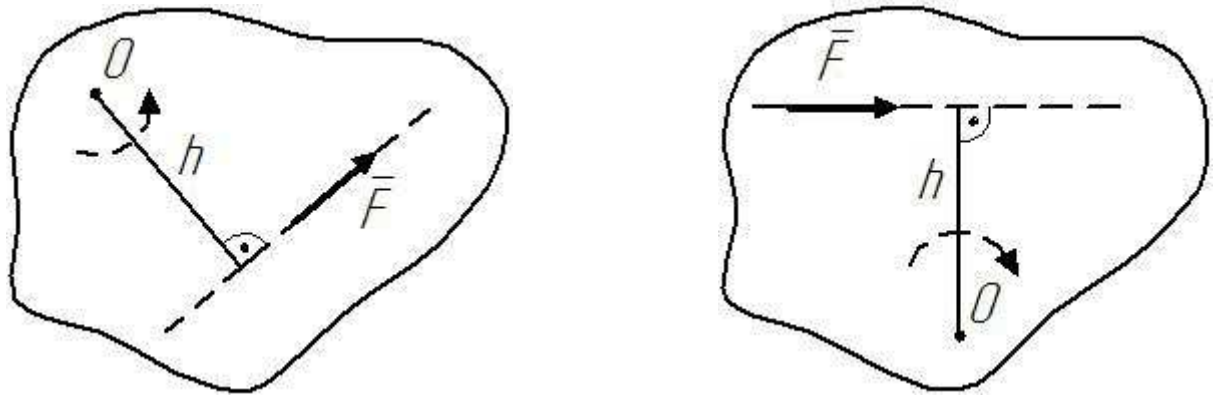
Сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело, называется *равнодействующей.*

Величина $\bar{F}$, равная геометрической сумме всех сил системы, называется *главным вектором системы*:

$$\bar{F} = \sum_{1}^{n} \bar{F}_k \qquad (1)$$

1.1.2 Момент силы относительно точки

Алгебраическим моментом силы относительно точки О называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на её плечо, взятое со знаком «+», если сила стремится повернуть тело вокруг точки против хода часовой стрелки (рисунок 2а) и со знаком «-», если сила стремится повернуть тело вокруг точки по ходу часовой стрелки (рисунок 2б):



а) б)

Рисунок 2

Итак,

$$M_O = \pm F \cdot h \qquad (2),$$

где h – *плечо* силы $\bar{F}$ относительно точки О – длина перпендикуляра, проведенного из точки О на линию действия силы $\bar{F}$.

Момент силы относительно точки равен нулю тогда, когда плечо силы равно нулю, то есть, если линия действия силы проходит через эту точку (рисунок 3).

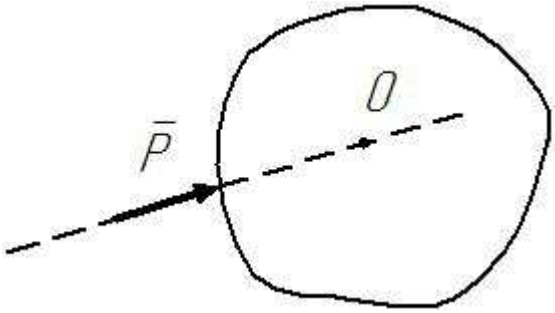


Рисунок 3

Величина M_O, равная алгебраической сумме моментов всех сил произвольной плоской системы сил относительно центра О, называется *главным моментом* этой *системы* относительно центра О:

$$M_O = \sum_{1}^{n} M_O\left(\bar{F}_k\right) \qquad (3)$$

1.1.3 Пара сил. Момент пары

Система двух равных по модулю, противоположных по направлению сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, линии действия которых не совпадают, называется *парой сил* (рисунок 4).

Плоскость, в которой расположены линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары*.

Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом пары*.

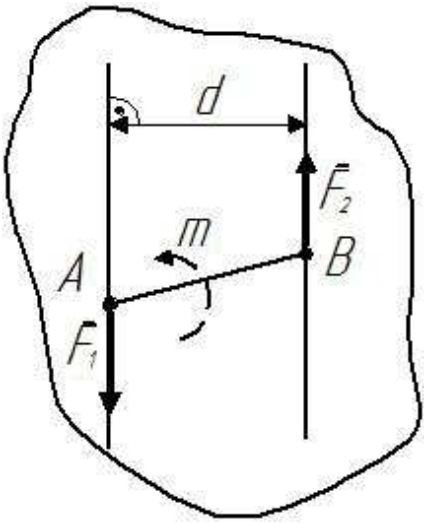


Рисунок 4

Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, который характеризуется моментом пары. Пара сил не имеет равнодействующей.

Алгебраическим моментом пары называется скалярная величина, равная произведению модуля одной из сил пары на её плечо, взятое со знаком «+», если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки и со знаком «-», если пара стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки :

$$M_O = \pm F_1 \cdot d = \pm F_2 \cdot d \qquad (4),$$

Так на рисунке 4 момент пары будет положительным.

1.1.4 Основная теорема статики

Произвольную плоскую систему сил, действующую на твердое тело, в общем случае можно заменить одной силой, равной главному вектору $\bar{F}$ *системы и приложенной в произвольно выбранном центре приведения и одной парой сил, момент* M_O *которой равен главному моменту системы сил относительно центра O* (рисунок 5):

$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n\right) \equiv \left(\bar{F}, M_O\right).$$

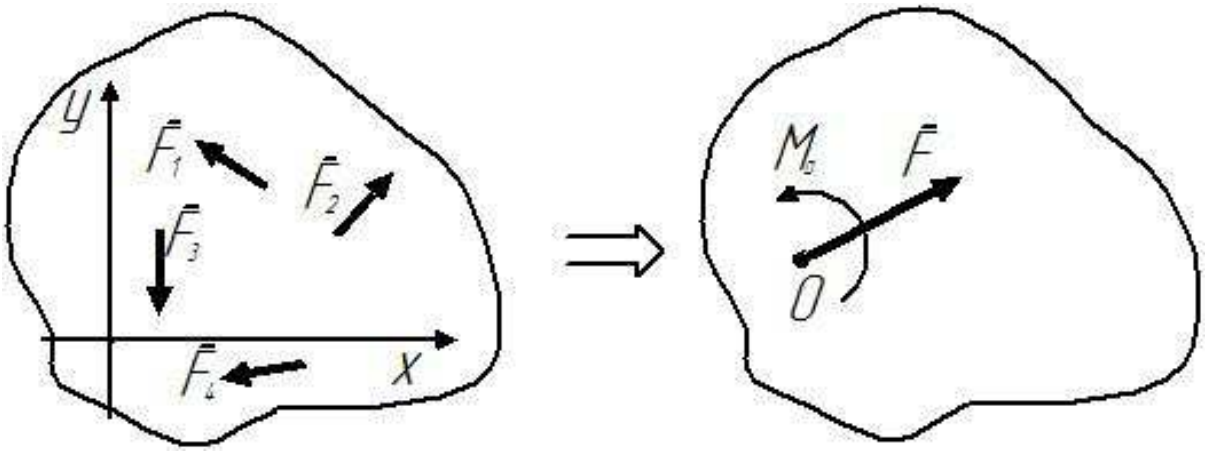


Рисунок 5

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра равнялись нулю, то есть

$$\bar{F} = 0,\ M_O = 0 \tag{5}$$

Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил, вытекающие из равенств (5), можно получить в трех различных формах.

1. *Основная форма* условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum M_O\left(\bar{F}_k\right) = 0 \end{cases} \tag{6},$$

то есть, *для равновесия произвольной плоской системы сил* необходимо и достаточно, чтобы *сумма проекций всех сил* на две взаимно перпендикулярные оси в данной плоскости, и *сумма моментов всех сил относительно любой точки* той же плоскости, были равны нулю.

Центр моментов и направления координатных осей для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

2. Вторая форма условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0 \\ \sum M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \end{cases} \quad (7),$$

В этом случае ось *x* не должна быть перпендикулярна прямой, проходящей через точки *A* и *B*.

3. Третья форма условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_A\left(\overline{F}_k\right) = 0 \\ \sum M_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \\ \sum M_C\left(\overline{F}_k\right) = 0 \end{cases} \quad (8),$$

при этом точки *A, B* и *C* не должны находиться на одной прямой.

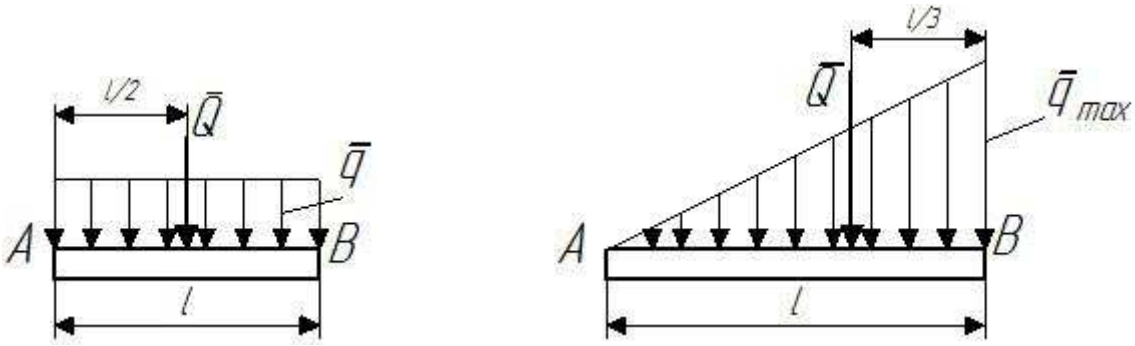
1.1.5 Теорема Вариньона

Если произвольная плоская система сил приводится к равнодействующей $\overline{R}$*, то момент равнодействующей относительно какой-либо точки, лежащей в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов всех сил данной системы относительно той же точки*

$$M_O\left(\overline{R}\right) = \sum_{1}^{n} M_O\left(\overline{F}_k\right). \quad (9)$$

Система сил, действующих на абсолютно твердое тело, может состоять как из сосредоточенных, так и *распределенных сил.*

Плоская система распределенных сил характеризуется её интенсивностью $\bar{q}$, то есть величиной силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка (рисунок 6).



а) б)

Рисунок 6

При решении задач распределенная нагрузка заменяется сосредоточенной силой $\bar{Q}$. Равномерно распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей $\bar{Q}$, которая приложена в середине отрезка АВ. Модуль равнодействующей равен $Q = q \cdot l$ (рисунок 6а).

Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону, можно заменить равнодействующей $\bar{Q}$, которая приложена на расстоянии $\frac{l}{3}$ от точки приложения максимального значения нагрузки. Модуль равнодействующей равен $Q = \frac{q \cdot l_{max}}{2}$ (рисунок 6б).

1.1.6 Связи. Силы реакции связей

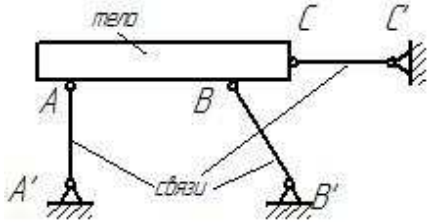
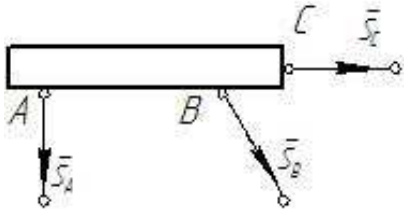
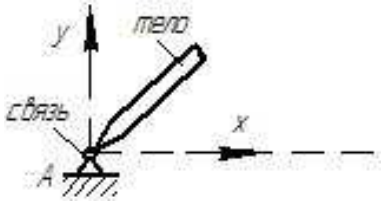
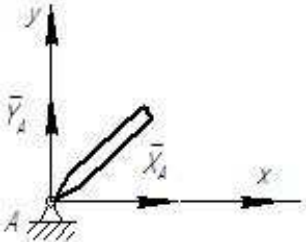
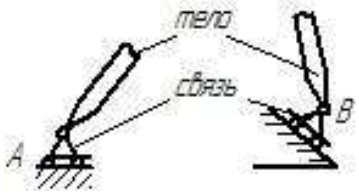
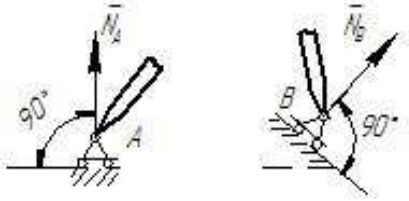
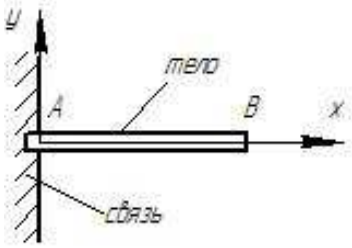
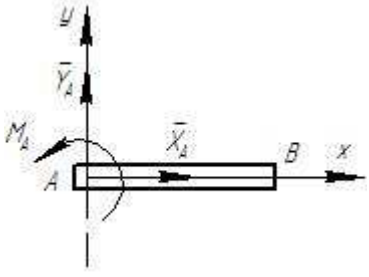
Тело, на перемещение которого в пространстве не наложено никаких ограничений, называется *свободным*. Тело, перемещения которого в пространстве ограничены другими телами, называется *несвободным*. Тела, ограничивающие перемещение данного тела, называются *связями*. Сила, с которой связь действует на данное тело, называется *силой реакции связи*.

1.1.7 Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей)

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи и заменить их действие силами реакции связей, приложенными к данному телу.

1.1.8 Некоторые виды связей и их реакции

Таблица 1

Виды связей	Изображение связи на схемах	Схема замены связи реакцией
Идеальный стержень		
Цилиндрический шарнир (шарнирно-неподвижная опора)		
Шарнирно-подвижная опора		
Жесткая заделка		

1.2 Вопросы для самоконтроля

Что называется силой?

Чему равна проекция силы на ось?

Как определяется знак проекции?

В каком случае проекция силы на ось равна нулю?

Какая система сил называется произвольной плоской системой сил?

Что называется главным вектором системы сил?

Чему равен алгебраический момент силы?

В каком случае алгебраический момент силы равен нулю?

Как определяется знак алгебраического момента силы?

Что называется главным моментом произвольной плоской системы сил?

Что называется парой сил?

Чему равен алгебраический момент пары сил?

Как формулируется основная теорема статики?

Как формулируются условия равновесия произвольной плоской системы сил?

Сколько независимых уравнений равновесия имеет произвольная плоская система сил?

В чем состоит теорема Вариньона о моменте равнодействующей произвольной плоской системы сил?

Чем можно заменить равномерно распределенную нагрузку?

Чем отличается несвободное тело от свободного?

Что называется связью?

Что называется силой реакции связи?

Как формулируется аксиома связей?

Перечислить основные виды связей и указать их реакции.

1.3 Лабораторная работа №1 Равновесие твердого тела

1.3.1 Содержание работы

Лабораторная работа состоит из трех задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием плоской произвольной системы сил. Числовые данные ко всем задачам одинаковы и представлены в таблице 2.

Цель работы: научиться составлять расчетные схемы и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил и определять реакции опор твердого тела.

Таблица 2 – Исходные данные к задачам 1-3.

	Длины, м			α, град.	F, кН	M, кНм	q, кН/м
№ условия	a	b	c				
0	5	2	3	30°	5	10	10
1	3	4	3	45°	10	20	10
2	2	6	2	60°	15	30	10
3	6	1	3	30°	20	10	10
4	4	4	2	45°	5	20	10
5	2	6	2	60°	10	30	10
6	3	2	5	30°	15	10	10
7	5	2	3	45°	20	20	10
8	3	3	4	60°	5	30	10
9	4	3	3	30°	10	10	10

Задача 1

Балка АВ закреплена в точках А и В (рисунок 7). В точке А – шарнирно неподвижная опора, в точке В – шарнирно подвижная опора (схемы 0 – 7) или невесомый стержень (схемы 8 – 9). На балку действует сила $\overline{F}$ и пара сил с моментом М. Размеры *a, b, c* указаны на схемах. Определить реакции опор в точках А и В. Числовые значения заданы в таблице 2.

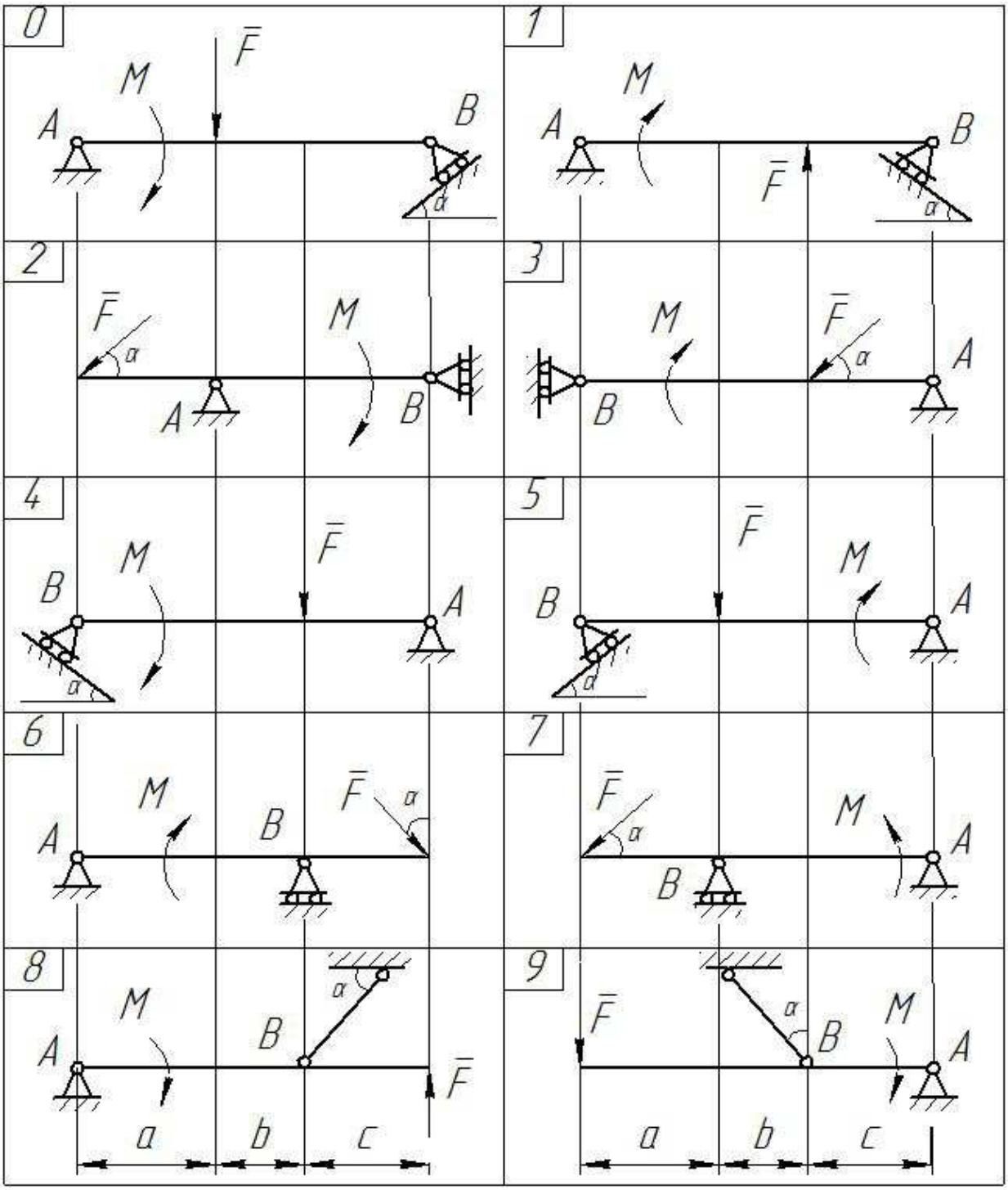


Рисунок 7

Задача 2

Балка АВС заделана одним концом в стену (рисунок 8). На неё действует сила $\overline{F}$ и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $\overline{q}$. Размеры *a, b, c* указаны на схемах. Определить реакции жесткой заделки. Числовые значения заданы в таблице 2.

П р и м е ч а н и е – При определении момента силы $\overline{F}$ применить теорему Вариньона (см. пример решения задачи 1 – моменты сил $\overline{S}_A$, $\overline{F}$, $\overline{N}_B$ относительно точки Е и пример решения задачи 3 – момент силы $\overline{P}$ относительно точки А).

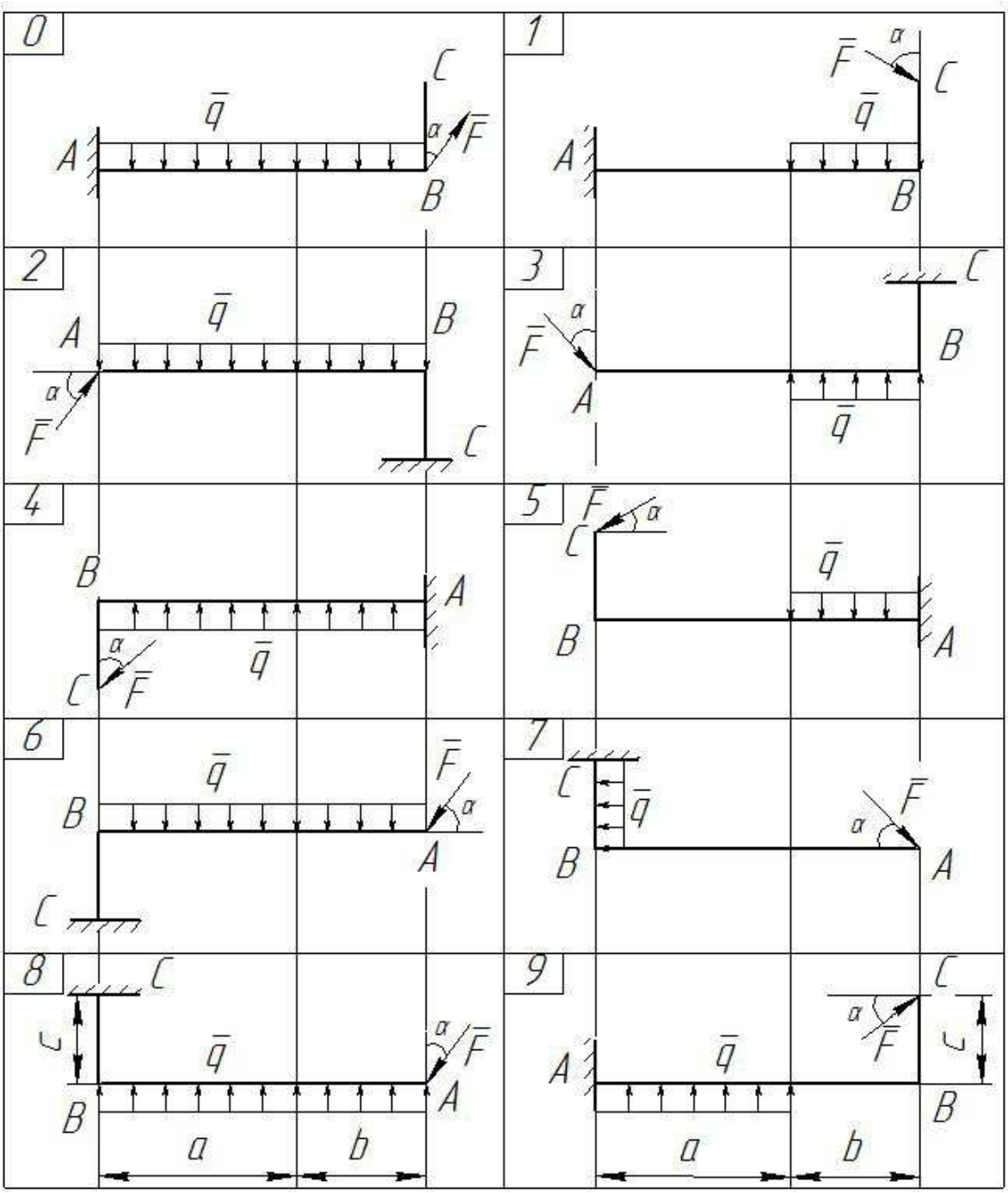


Рисунок 8

Задача 3

На схемах 0 – 9 (рисунок 9) показан брус, ось которого – ломаная линия. На брус действует сила $\overline{P}$, пара сил с моментом М и распределенная нагрузка интенсивностью $\overline{q}$. Определить реакции опор. Числовые значения заданы в таблице 2.

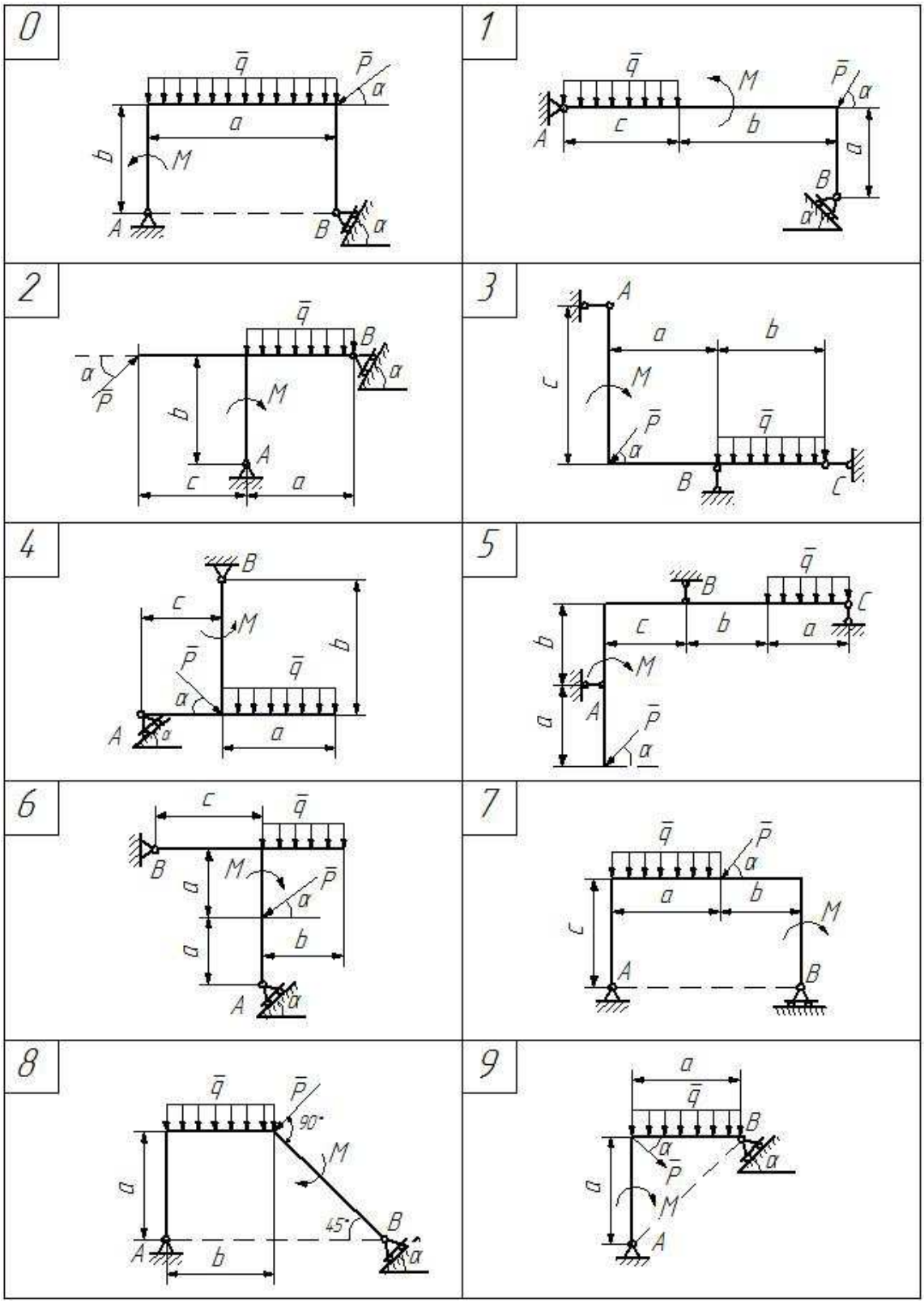


Рисунок 9

1.3.2 Порядок решения задач

1 Выбрать объект исследования, то есть тело, равновесие которого надо рассмотреть для определения искомых величин.

2 Приложить к нему заданные силы и силы реакции связей.

3 Определить, какая получилась система сил и сколько уравнений равновесия имеет данная система.

4 Убедиться, что задача является статически определенной, то есть число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия.

5 Указать координатные оси.

6 Составить уравнения равновесия для полученной системы сил и решить эти уравнения.

1.4 Пример выполнения лабораторной работы №1

Лабораторная работа №1

Равновесие твердого тела

Задача 1

Однородная горизонтальная балка AB весом P = 120 Н в точках A и E соединена шарнирно с невесомыми стержнями AK и EL, а в точке B имеет шарнирно подвижную опору (рисунок 10). В точке D под углом β = 45° к балке приложена сила F = 60 кН. Расстояния AE = 2 м; ED = 3 м; DB = 1 м. Определить реакции опор в точках A, B, C.

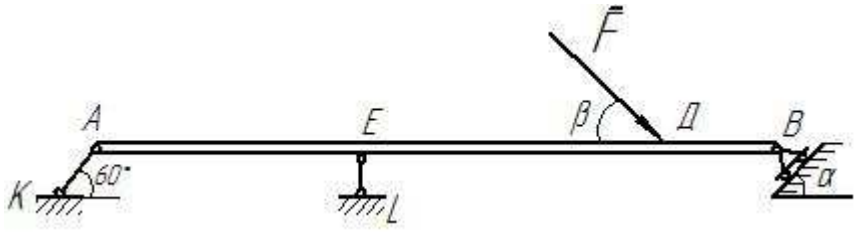


Рисунок 10

Дано: P = 120 кН, F = 60 кН, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$

Определить реакции опор в точках A, C, B.

Решение.

Рассмотрим равновесие балки AB (рисунок 11). На нее действуют активные силы: $\overline{F}$ и вес балки $\overline{P}$, приложенный в середине балки (AC = CB = 3 м). Связями для балки являются стержни AK и EL и опора в точке B. Отбросим связи и заменим их действие силами реакции связей (рисунок 11).

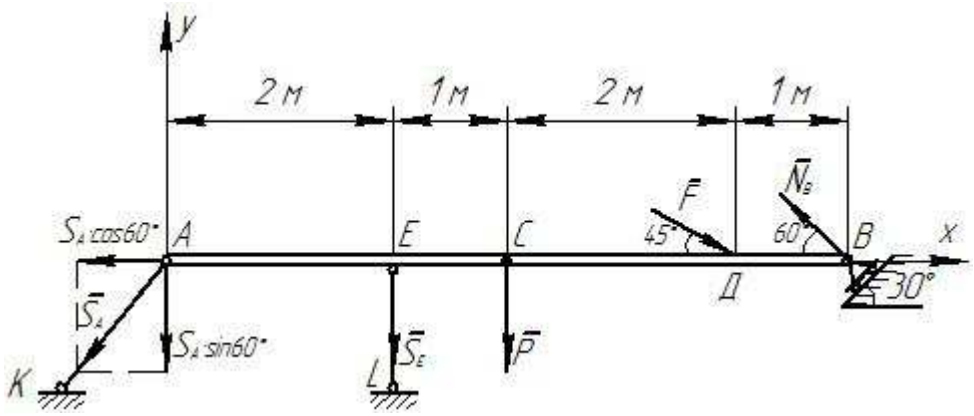


Рисунок 11

Реакция $\overline{N}_B$ в точке B направлена перпендикулярно к опорной плоскости, а реакции $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_E$ невесомых стержней AK и EL направлены вдоль этих стержней и приложены к балке.

Для полученной произвольной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad -S_A \cdot \cos 60° + F \cdot \cos 45° - N_B \cos 60° = 0 \tag{10}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad -S_A \cdot \sin 60° - S_E - P - F \cdot \sin 45° + N_B \cdot \sin 60° = 0 \tag{11}$$

$$\sum M_E(\overline{F}_k) = 0, \quad S_A \cdot \sin 60° \cdot AE - P \cdot CE - F \cdot \sin 45° \cdot DE + N_B \cdot \sin 60° \cdot BE = 0 \tag{12}$$

Данная задача является статически определенной, так как число неизвестных ($\overline{N}_B$, $\overline{S}_A$, $\overline{S}_E$) равно числу уравнений.

Моменты сил $\overline{S}_A$, $\overline{F}$, $\overline{N}_B$ относительно точки Е найдены по теореме Вариньона путем разложения этих сил на две составляющие, направленные по координатным осям Х и У (рисунок 11). Так как линии действия составляющих, направленных по оси Х ($S_{Ax} = S \cdot \cos 60°$; $F_x = F \cdot \cos 45°$, $N_{Bx} = N_B \cdot \cos 60°$) проходят через центр моментов, точку Е, то их моменты относительно этой точки равны нулю, и в уравнение (3) вошли моменты только вертикальных составляющих этих сил ($S_{Ay} = S_A \cdot \sin 60°$; $F_y = F \cdot \sin 45°$, $N_{By} = N_B \cdot \sin 60°$)

Из уравнения (10)

$$S_A = \frac{F \cdot \cos 45°}{\cos 60°} - N_B = \frac{F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{0{,}5} - N_B = F \cdot \sqrt{2} - N_B \qquad (10`)$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$F\sqrt{2} \cdot \sin 60° \cdot AE - N_B \cdot \sin 60° \cdot AE - P \cdot CE - F \cdot \sin 45° \cdot DE + N_B \cdot \sin 60° \cdot BE = 0$$

$$N_B = \frac{-F\sqrt{2} \cdot \sin 60° \cdot AE + P \cdot CE + F \cdot \sin 45° \cdot DE}{(BE - AE) \cdot \sin 60°} =$$

$$= \frac{-60 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 120 \cdot 1 + 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3}{(BE - AE) \cdot \sin 60°} = 57{,}91 \ кН$$

Из уравнения (10`)

$$S_A = F \cdot \sqrt{2} - N_B = 60 \cdot \sqrt{2} - 57{,}91 = 26{,}94 \ кН$$

Из уравнения (11)

$$S_E = -S_A \cdot \sin 60° - P - F \cdot \sin 45° + N_B \cdot \sin 60° =$$

$$= -26{,}94 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 120 - 60 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 57{,}91 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -135{,}6 \ кН$$

Проверка:

$$\sum M_D(\overline{F_k}) = N_B \cdot \sin 60° \cdot DB + P \cdot CD + S_E \cdot DE + S_A \cdot \sin 60° \cdot AD =$$

$$= 57{,}91 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 120 \cdot 2 - 135{,}6 \cdot 3 + 26{,}94 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 =$$

$$= 50{,}15 + 240 - 406{,}8 + 116{,}65 = 406{,}8 - 406{,}8 = 0$$

Следовательно, реакции опор найдены верно.

Ответ: S_A = 26,94 кН; S_E = - 135,6 кН; N_B = 57,91 кН.

Знак минус, полученный для значения силы S_E, указывает, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рисунке 11, то есть стержень EL сжат.

Задача 2

Балка АВ заделана одним концом в стену (рисунок 12). На участке СВ равномерно распределена нагрузка интенсивностью q = 0,5 кН/м, в точке В на нити, переброшенной через блок О; подвешен груз весом Р = 2кН. К балке АВ приложена пара сил с моментом М = 3 кНм. Определить реакции жесткой заделки.

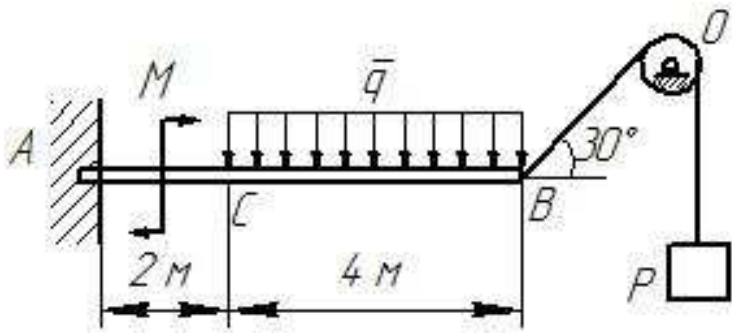


Рисунок 12

Дано: Р = 2 кН, М = 3 кНм, q = 0,5 кН/м, $\alpha = 30°$

Определить реакции жесткой заделки X_A, $У_A$, M_A.

Решение.

Рассмотрим равновесие балки АВ (рисунок 13). На нее действует активная нагрузка: пара сил с моментом М, распределенная нагрузка интенсивностью $\overline{q}$, в точке В к балке приложим силу натяжения нити (предварительно оборвав нить), которая направлена вдоль нити, в сторону обрыва и по модулю равна весу груза Р, так как натяжение нити во всех ее точках одинаково. Распределенную нагрузку заменим одной равнодействующей, которая приложена в середине участка и равна

$$Q = q \cdot CB = 0{,}5 \cdot 4 = 2\text{кН}.$$

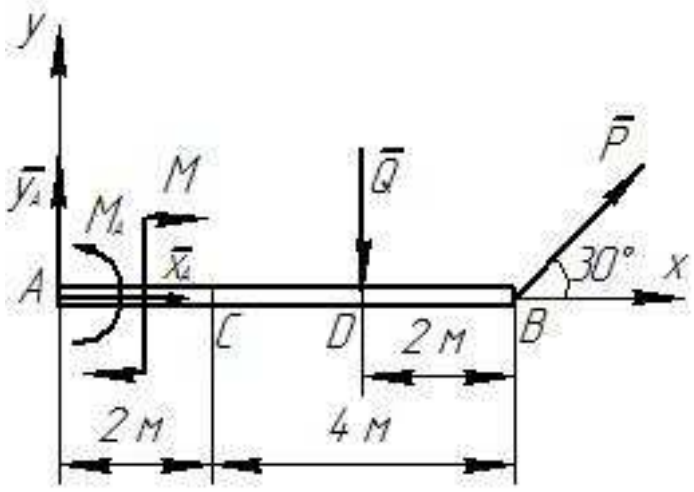


Рисунок 13

Связью для балки является жесткая заделка. Отбросив связь, заменим её действие парой сил с моментом M_A, для которого принято положительное направление, то есть против хода часовой стрелки, и силой реакции связи, направление которой неизвестно. Поэтому покажем две составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ этой силы реакции, совпадающие с положительным направлением координатных осей.

Для полученной произвольной плоской системы сил составим три уравнения равновесия (число уравнений равно числу неизвестных в задаче X_A, $У_A$, M_A):

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A + P \cdot \cos 30° = 0 \tag{13}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_A - Q + P \cdot \sin 30° = 0 \tag{14}$$

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0, \; \mathrm{M}_A - M - Q \cdot AD + P \cdot \sin 30° \cdot AB = 0 \tag{15}$$

Из уравнения (13)

$$X_A = -P \cdot \cos 30° = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1{,}73 \ кН$$

Из уравнения (14)

$$Y_A = Q - P \cdot \sin 30° = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \ кН$$

Из уравнения (15)

$$\mathrm{M}_A = M + Q \cdot AD - P \cdot \sin 30° \cdot AB = 3 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 5 \ кНм$$

Проверка:

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = Q \cdot DB - M + \mathrm{M}_A - Y_B \cdot AB = 2 \cdot 2 - 3 + 5 - 1 \cdot 6 = 9 - 9 = 0.$$

Следовательно, реакции опор найдены верно.

Ответ: X_A = - 1,73 кН; Y_A = 1 кН; M_A = 5 кН.

Знак минус указывает, что направление составляющей $\overline{X}_A$ противоположно указанному на рисунке 13.

Задача 3

Балка ADC в точке A закреплена шарнирно, а в точке B имеет шарнирную подвижную опору. На балку ADC действует пара сил с моментом M = 6 кНм, сила P = 10кН, приложенная в точке C под углом 30° к горизонтали, на участке DC равномерно распределена нагрузка интенсивностью q = 5кН/м. Угол наклона части AD балки к горизонтали 45°. Определить реакции опор. Размеры указаны на чертеже (рисунок 14).

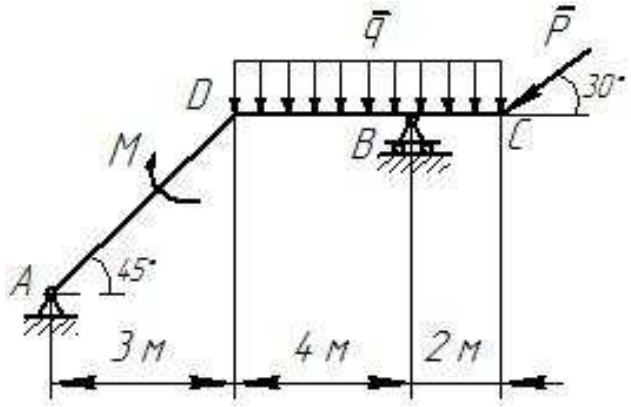


Рисунок 14

Дано: P = 10 кН, M = 6 кНм, q = 0,5 кН/м.

Определить реакции опор X_A, $У_A$, R_B.

Решение.

Рассмотрим равновесие балки ADC (рисунок 15). На нее действует активная нагрузка: сила $\overline{P}$, приложенная в точке C, пара сил с моментом M, распределенная нагрузка интенсивностью $\overline{q}$, которую заменим одной равнодействующей Q = q·DC = 0,5·6 = 3кН, приложенной в середине участка DC (рисунок 15).

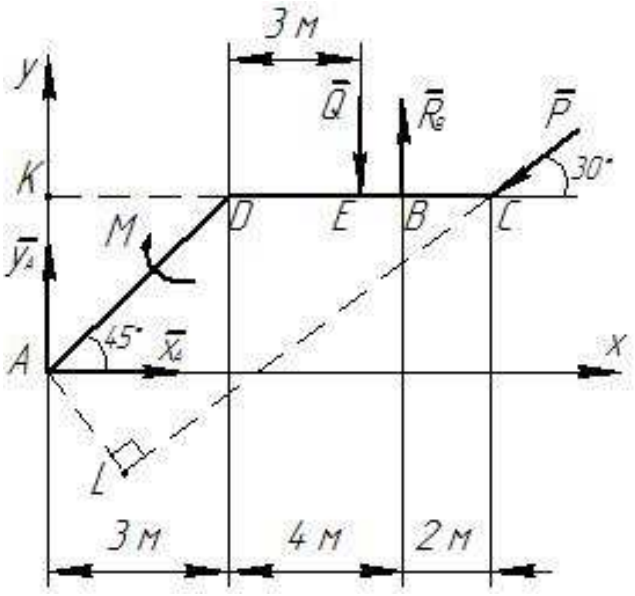


Рисунок 15

На балку наложены две связи: опоры в точках А и В. Указать заранее направление силы опорной реакции в точке А нельзя, поэтому изобразим две взаимно перпендикулярные составляющие этой силы реакции. Направив ось X по горизонтали вправо, а ось Y – перпендикулярно ей вверх, покажем составляющие силы реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ (рисунок 15). Реакция $\overline{R}_B$ в точке В направлена перпендикулярно опорной плоскости. Теперь рассмотрим балку ADC как свободное твердое тело, находящееся под действием произвольной плоской системы сил, из которых неизвестны три величины $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$. Задача является статически определенной, так как такая система сил имеет три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A - P \cdot \cos 30° = 0 \tag{16}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_A - Q + R_B - P \cdot \sin 30° = 0 \tag{17}$$

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0, \; -M - Q \cdot KE + R_B \cdot BK + P \cdot \cos 30° \cdot AK - P \cdot \sin 30° \cdot KC = 0 \tag{18}$$

Момент силы $\overline{P}$ относительно точки А равен

$$M_A(\overline{P}) = - P \cdot AL.$$

Так как вычисление плеча AL затруднено, то для определения $M_A(\overline{P})$ используем теорему Вариньона. Для этого разложим силу $\overline{P}$ на две составляющие, параллельные координатным осям X, Y:

$P_x = P\cdot\cos30°$, $P_y = P\cdot\sin30°$ (рисунок 15). Далее найдем момент силы $\overline{P}$ относительно точки A как алгебраическую сумму моментов этих составляющих относительно точки A:

$$M_A(\overline{P}) = M_A(P_x) + M_A(P_y) = P\cdot\cos30°\cdot AK - P\cdot\sin30°\cdot KC.$$

Из уравнения (16)

$$X_A = P\cdot\cos30° = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 8{,}66\ кН$$

Из уравнения (18)

$$R_B = \frac{M + Q\cdot KE - P\cdot\cos30°\cdot AK + P\cdot\sin30°\cdot KC}{BK} =$$

$$= \frac{6 + 3\cdot 6 - 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 + 10\cdot\frac{1}{2}\cdot 9}{7} = 6{,}15\ кН$$

Из уравнения (17)

$$Y_A = Q - R_B + P\cdot\sin30° = 3 - 6{,}15 + 10\cdot\frac{1}{2} = 1{,}85\ кН$$

Проверка:

$$\sum M_E(\overline{F_k}) = R_B\cdot BE - P\cdot\sin30°\cdot CE - M - Y_A\cdot KE + X_A\cdot AK =$$

$$= 6{,}15\cdot 1 - 10\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 - 6 - 1{,}85\cdot 6 + 8{,}66\cdot 3 = 6{,}15 - 15 - 6 - 11{,}1 + 25{,}98$$

$$= 32{,}1 - 32{,}1 = 0,$$

Следовательно, реакции опор найдены верно.

Ответ: $X_A = 8{,}66$ кН; $Y_A = 1{,}85$ кН; $R_B = 6{,}15$ кН.

2 Статически определимые плоские фермы

2.1 Основные понятия и определения

2.1.1 Общие сведения

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Места соединения стержней фермы называются *узлами*.

При расчете ферм принимаем следующие допущения:

1) все внешние нагрузки прикладываются только в узлах;

2) трением в узлах фермы пренебрегают;

3) при равновесии фермы две силы, действующие на каждый из стержней, направлены только вдоль стержня;

4) стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие.

Для жестких плоских ферм должно выполняться условие

$$\kappa = 2n - 3, \qquad (19)$$

где κ – число стержней,

n – число узлов.

Если число стержней будет меньше к – ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

Расчет ферм сводится к определению опорных реакций и усилий в её стержнях.

2.1.2 Определение сил в стержнях способом вырезания узлов

Этим способом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он заключается в последовательном рассмотрении условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. Начинать решение нужно

с того узла, где *сходятся два стержня*, так как из двух уравнений равновесия плоской системы сходящихся сил, действующей на узел, можно определить только два неизвестных усилия.

Вырезаем узел фермы, к которому подходит стержень с искомым усилием. Действие разрезанных стержней заменяем их усилиями, направляя соответствующие векторы от узлов, предполагая стержни растянутыми. Выбираем оси и составляем уравнения равновесия узла в проекциях. Решаем уравнения относительно искомого усилия. Рекомендуется рассматривать узлы в такой последовательности, чтобы каждый раз в уравнениях было не более двух неизвестных. Если в результате расчета величина усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательной, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат. Если усилие в каком-либо стержне получится равным нулю, это значит, что данный стержень не нагружен (*нулевой стержень*).

Если к узлу подходит более двух стержней с неизвестными усилиями, то метод вырезания узлов можно комбинировать с методом Риттера.

В тех стержнях, где это возможно, усилия находим методом Риттера.

2.1.3 Определение сил в стержнях способом сечений (способом Риттера)

Этим способом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчетов.

Суть этого способа состоит в следующем. Мысленно разделяем ферму на две части, пересекая *три стержня* (*сечение Риттера*), в которых требуется определить усилие. Действие разрезанных стержней заменяем их усилиями, направляя соответствующие векторы из узлов в сторону сечения, предполагая стержни растянутыми.

Рассматриваем равновесие одной из частей фермы (как правило, той, где меньше нагрузок). Для стержней, усилия в которых необходимо определить, находим *точки Риттера*. Они являются точками попарного пересечения линий

действия сил в рассеченных стержнях. Искомые усилия определяем из уравнений моментов рассматриваемой части относительно точек Риттера.

Если два стержня в сечении параллельны, то точки Риттера для третьего стержня не существует, и для определения усилия в нем необходимо составить уравнение проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

В уравнение метода Риттера всегда входит только одно неизвестное усилие. Это позволяет искать усилия независимо одно от другого, уменьшая тем самым возможность ошибок и избегая накопления неизбежных погрешностей округления в численных расчетах.

2.2 Вопросы для самоконтроля

Что называется фермой?

Какие допущения принимают при расчете ферм?

Как записывается условие статической определимости фермы?

В чем заключается способ вырезания узлов?

В чем заключается способ Риттера?

2.3 Лабораторная работа №2.

Определение усилий в стержнях плоской фермы

2.3.1 Содержание работы

Определить реакции опор фермы (рисунки 16 - 23) от заданной нагрузки, а также силы во всех её стержнях способом вырезания узлов. Необходимые для расчета данные приведены в таблице 1. Дополнительно определить в трех стержнях фермы силы от той же нагрузки способом Риттера (номера стержней указаны в таблице 3).

Таблица 3

Номер варианта	P_1	P_2	P_3	a	h	α, град	Номера стержней
	кН			м			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	9	2	2,0	-	30	3,8,9
2	10	3	4	2,5	-	60	2,5,7
3	2	12	6	3,0	-	60	4,5,10
4	10	10	5	4,0	-	60	5,6,11
5	2	4	2	-	2,0	60	4,5,10
6	3	7	5	4,0	3,0	-	8,9,11
7	4	6	3	4,0	-	60	4,6,12
8	5	7	7	3,2	-	45	3,4,5
9	10	8	2	5,0	-	60	6,7,12
10	3	4	5	4,4	3,3	-	3,5,7
11	2	6	8	2,5	3,0	-	2,7,8
12	5	7	2	4,0	-	60	4,5,10
13	4	6	2	4,8	3,6	-	4,5,10
14	3	5	5	3,0	-	60	5,6,8
15	2	2	10	4,0	6,0	-	2,6,9
16	5	6	2	5,0	-	60	3,5,6
17	4	4	10	4,0	6,0	-	4,7,8
18	5	2	8	-	5,0	60	1,4,8
19	8	4	10	5,0	10,0	60	4,5,7
20	2	3	5	4,0	6,0	-	5,6,8
21	3	2	7	6,0	-	45	5,8,9
22	4	2	9	4,0	-	45	2,6,8
23	5	8	8	4,0	6,0	30	4,7,9
24	6	10	2	3,6	-	45	4,5,10
25	7	10	5	4,4	3,3	-	8,10,11
26	8	12	2	4,0	-	30	4,5,9
27	9	4	4	4,0	3,0	-	5,9,11
28	10	5	3	5,0	-	30	3,5,6
29	12	8	8	6,0	-	45	5,6,11
30	5	10	10	4,0	2,0	-	6,7,12

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7	8
31	4	10	2	2,0	-	-	3,4,5
32	6	4	2	2	-	30	3,4,5
33	4	9	2	3,0	-	60	5,6,7
34	10	3	4	2,5	-	60	5,6,7
35	2	12	6	3,0	-	60	2,3,5
36	4	6	2	4,0	-	45	5,6,7
37	2	4	6	2,0	-	60	5,6,8
38	10	10	5	-	2,0	60	6,7,10
39	2	4	10	-	2,0	45	4,5,6
40	8	2	2	4,0	3,0	-	2,3,9
41	6	4	4	2,0	4,0	-	5,6,7
42	5	10	4	4,0	2,0	-	2,4,8
43	12	8	2	6,0	-	45	4,5,7
44	10	5	3	5,0	-	30	3,4,5
45	9	4	4	4,0	3,0	-	2,7,8
46	8	12	2	4,0	-	30	4,5,6
47	7	10	5	4,4	3,3	-	8,9,10
48	6	10	2	3,6	-	45	4,5,6
49	10	5	8	4,0	9,0	-	5,6,7
50	3	2	1	3,0	2	-	1,2,8
51	1	2	-	2	-	60	4,6,7
52	2	5	-	3	3	-	6,7,8
53	2	4	-	5	3	-	4,5,6
54	4	1	-	2	-	60	2,8,5
55	3	2	2	3	4	-	4,5,6
56	3	2	2	3	4	-	1,2,3
57	1	2	-	4,5	7,5	-	2,5,10
58	3	6	3	5	4,5	-	3,9,16
59	8	-	-	1	3	-	2,3,4
60	10	-	-	1	3	-	2,3,4

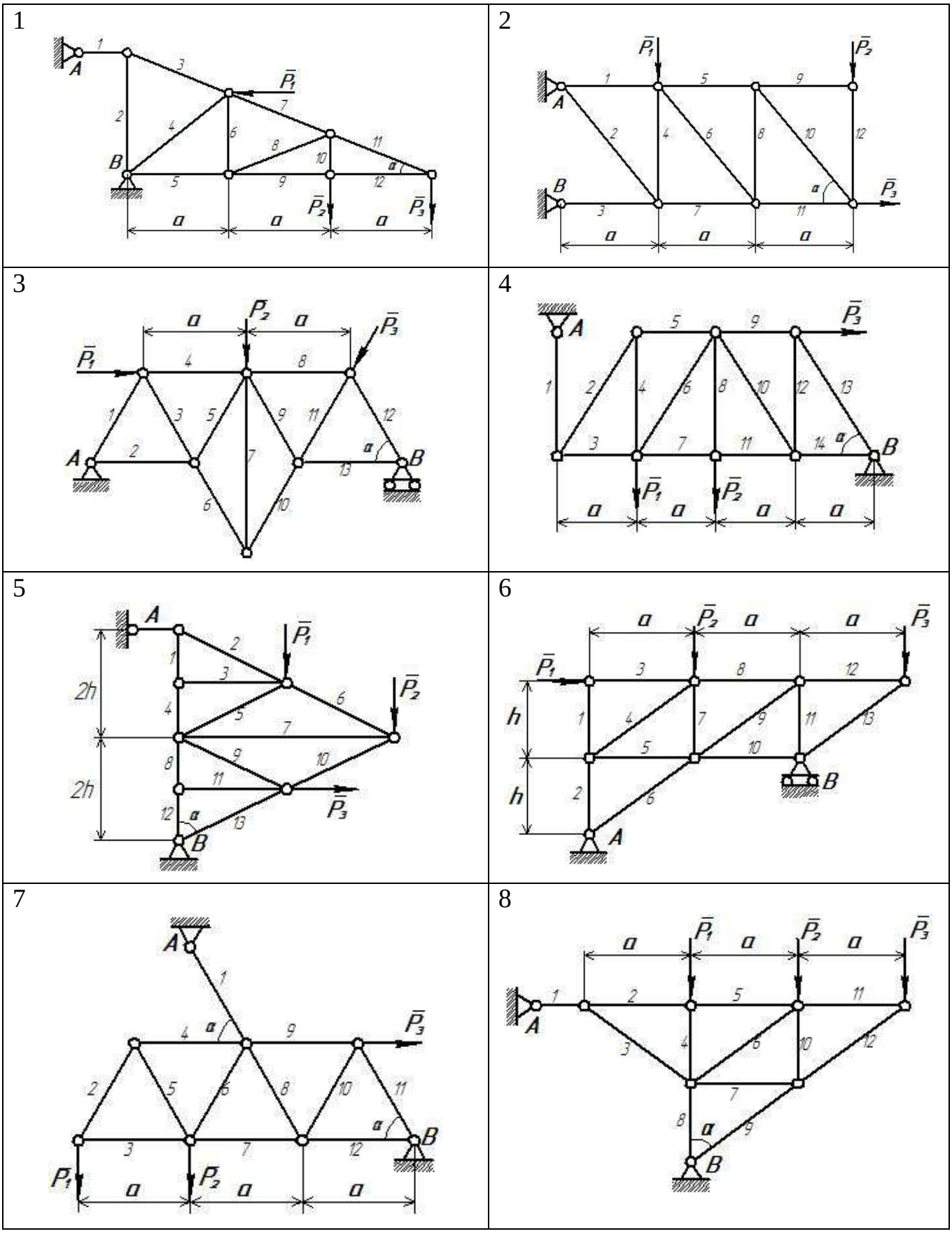


Рисунок 16

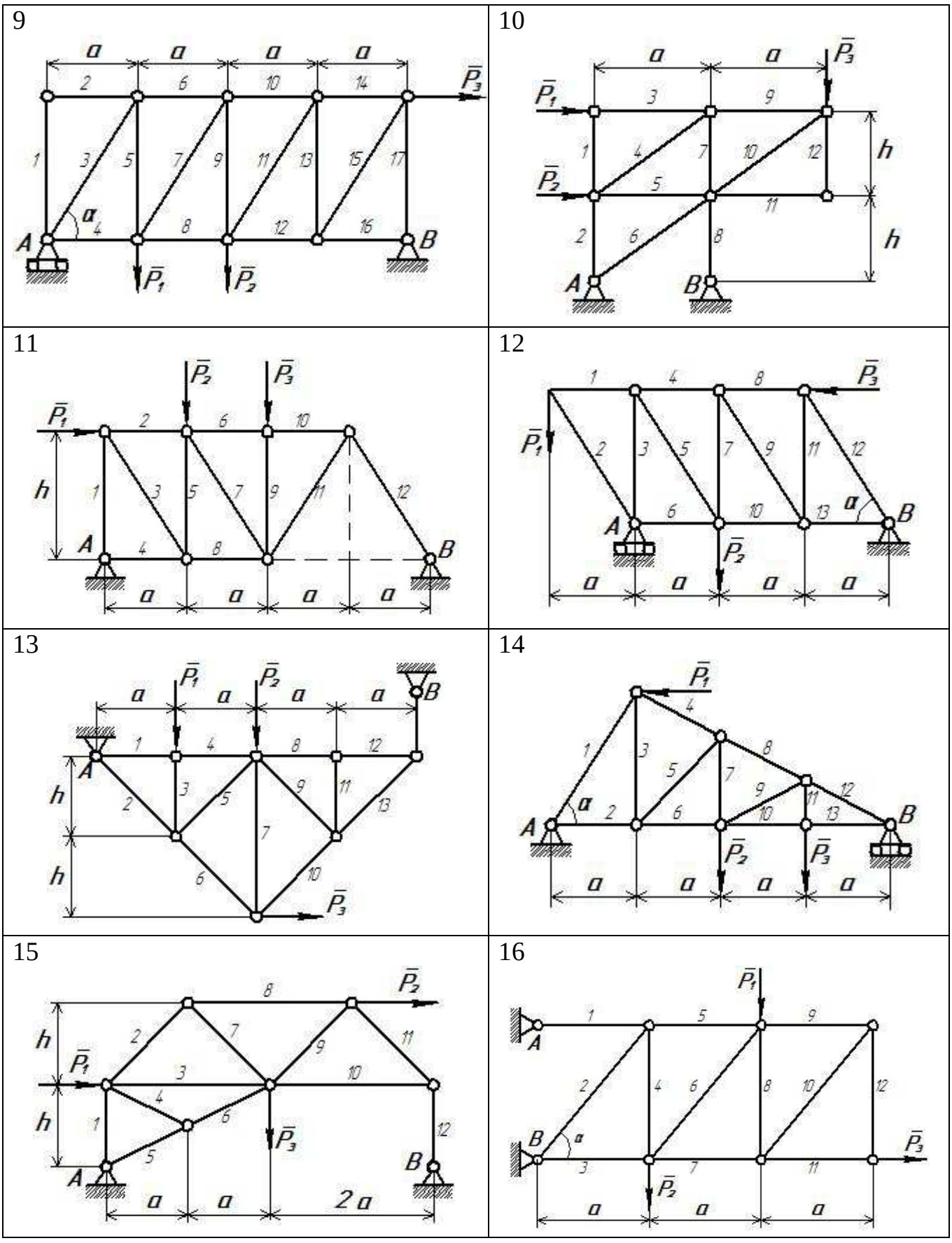


Рисунок 17

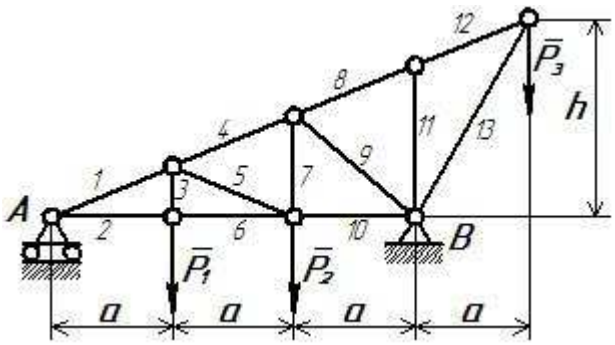
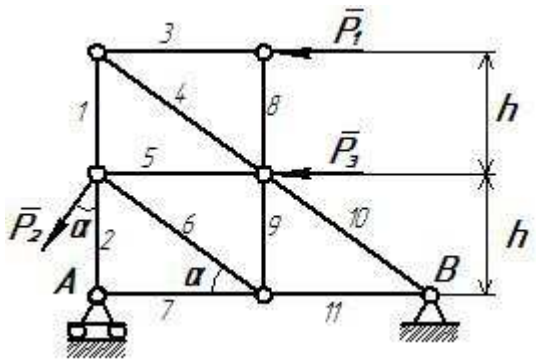
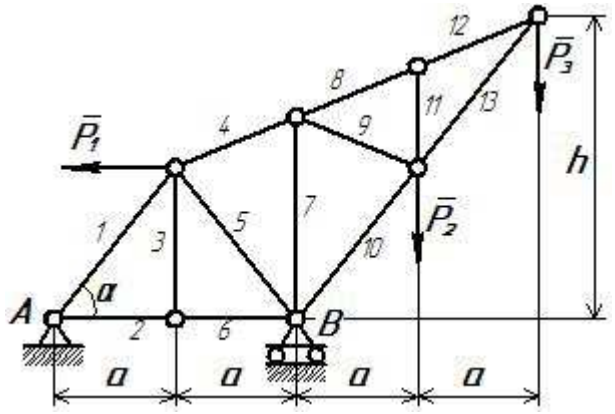
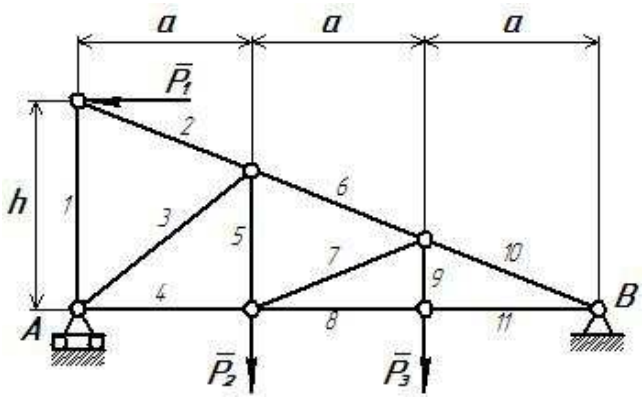
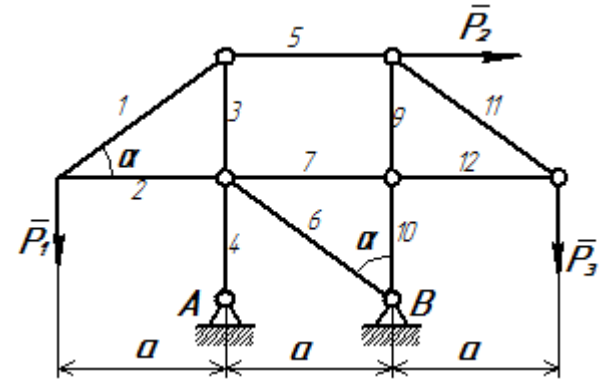
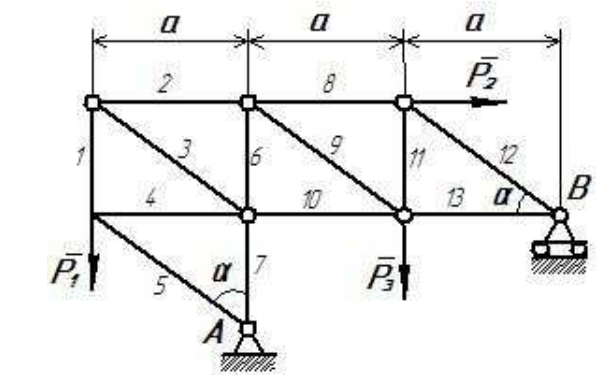
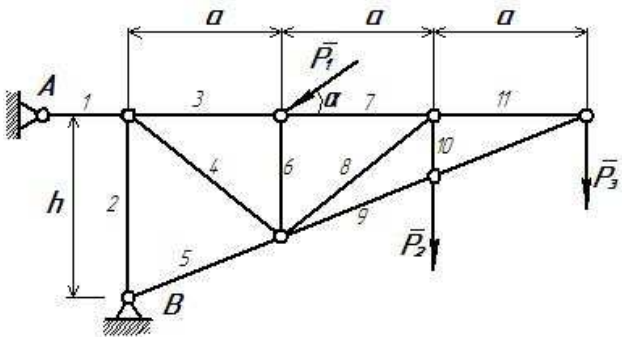
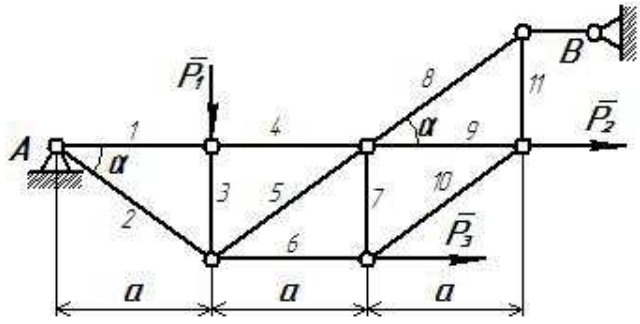
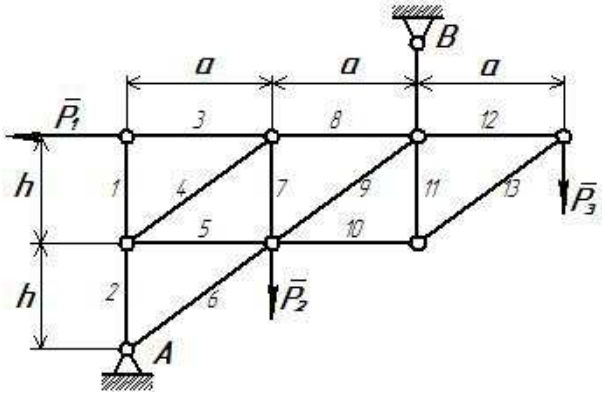
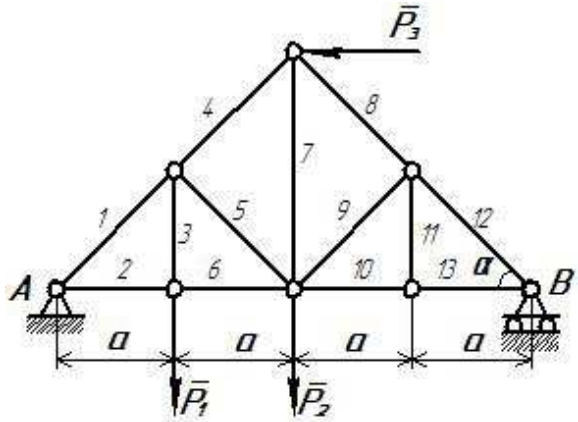
17 	18 
19 	20 
21 	22 
23 	24 

Рисунок 18

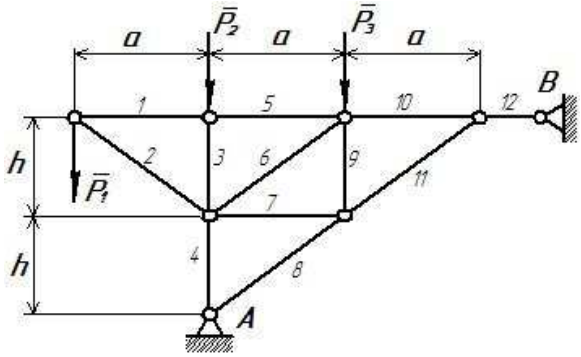
25



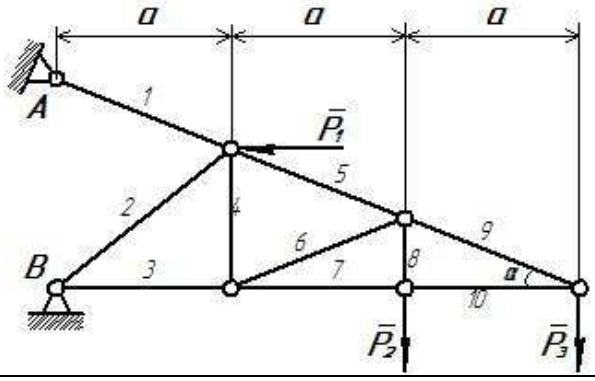
26



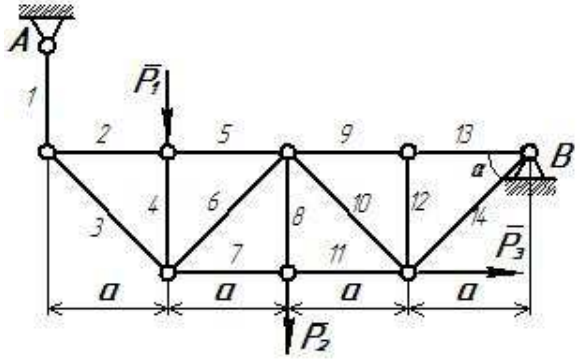
27



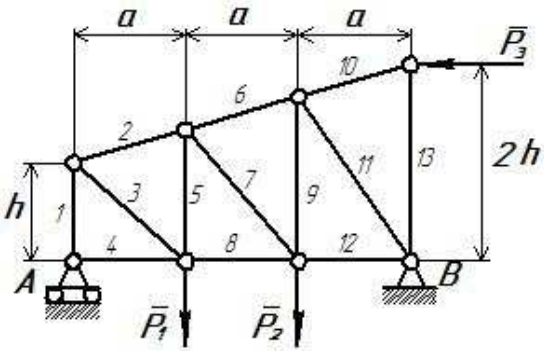
28



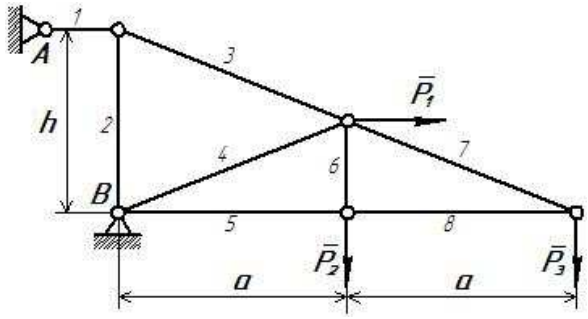
29



30



31



32

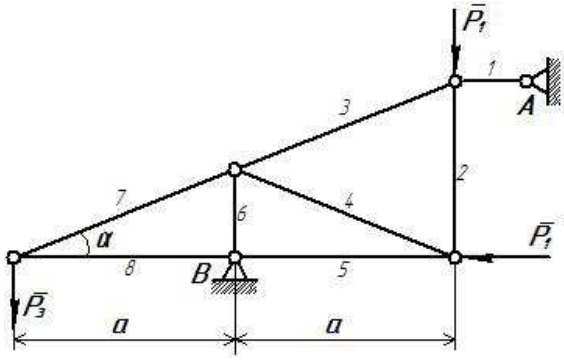
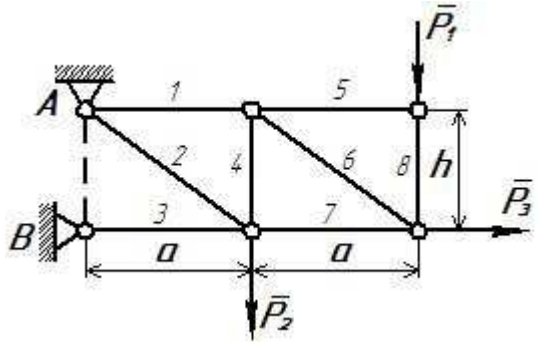
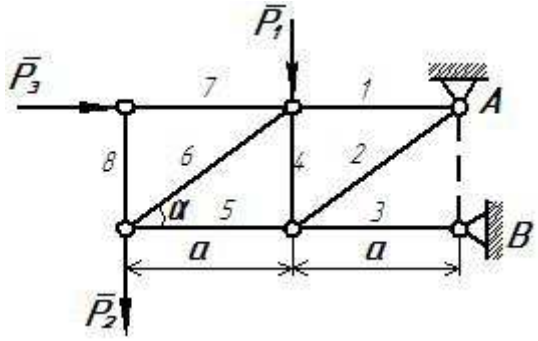


Рисунок 19

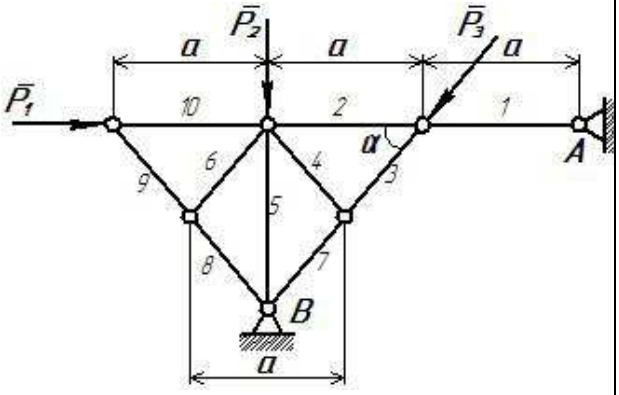
33



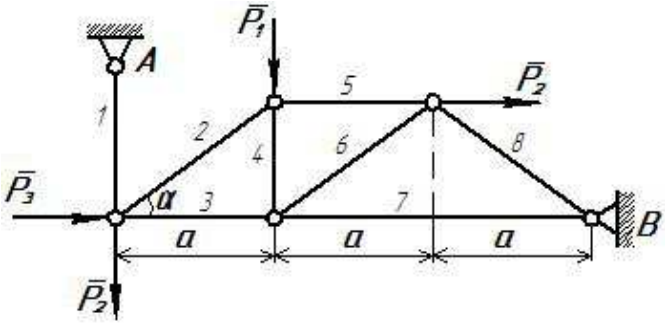
34



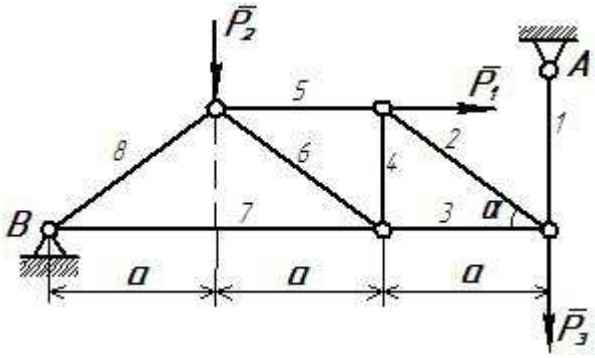
35



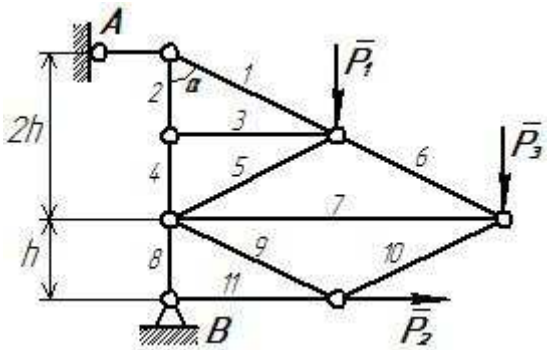
36



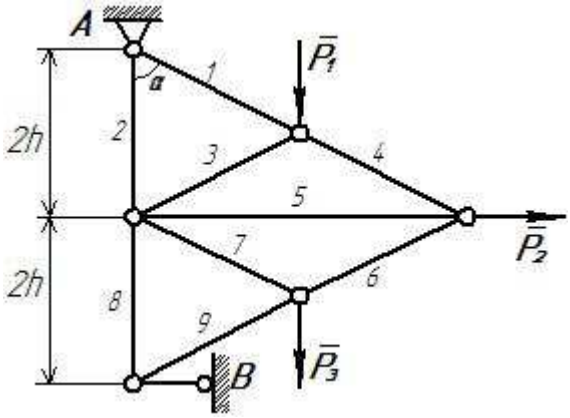
37



38



39



40

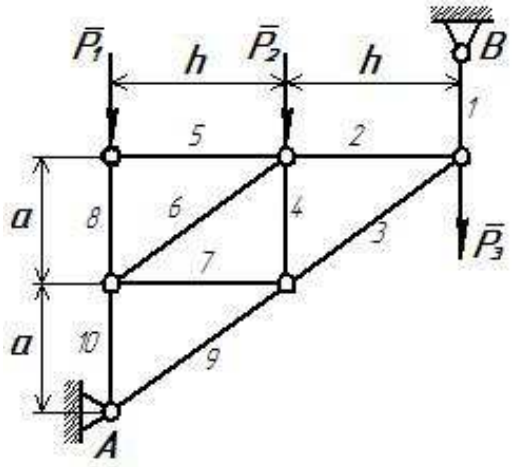
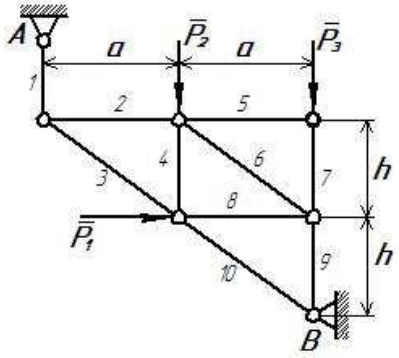
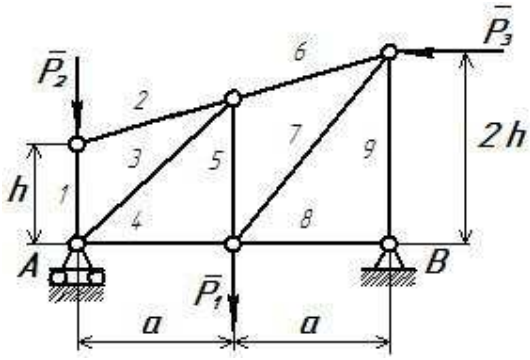


Рисунок 20

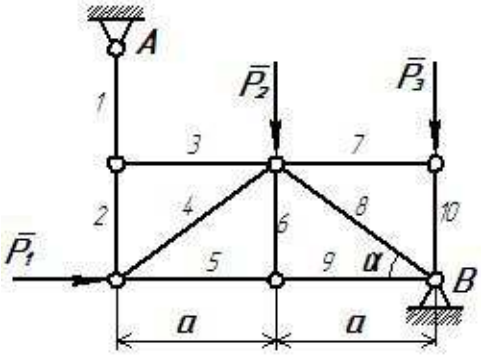
41



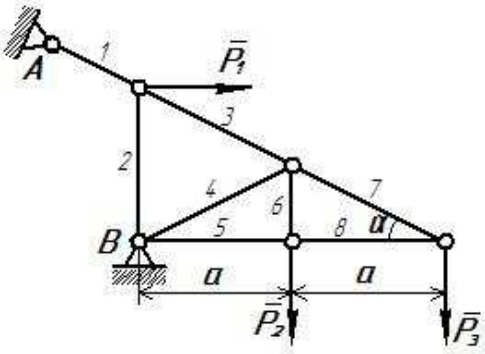
42



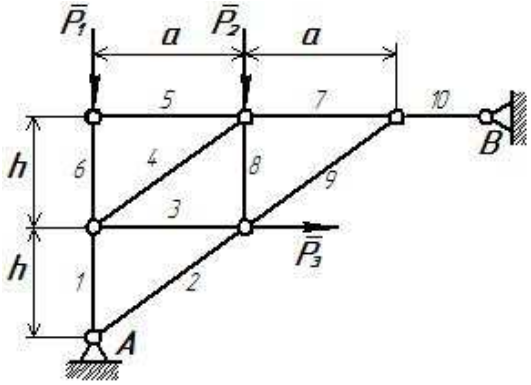
43



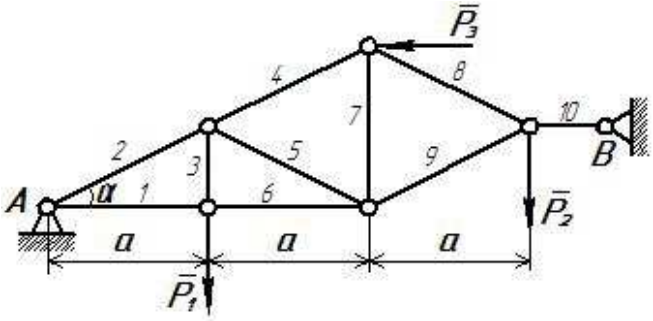
44



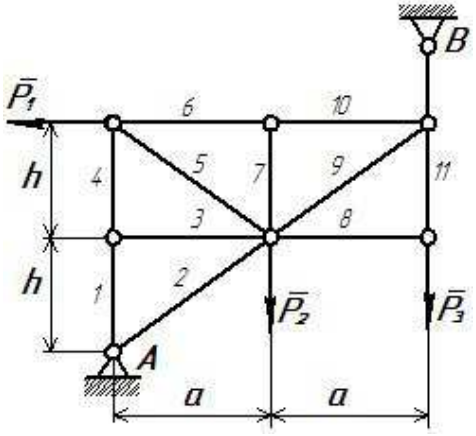
45



46



47



48

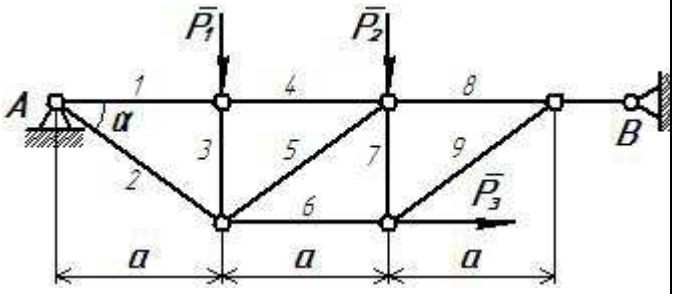


Рисунок 21

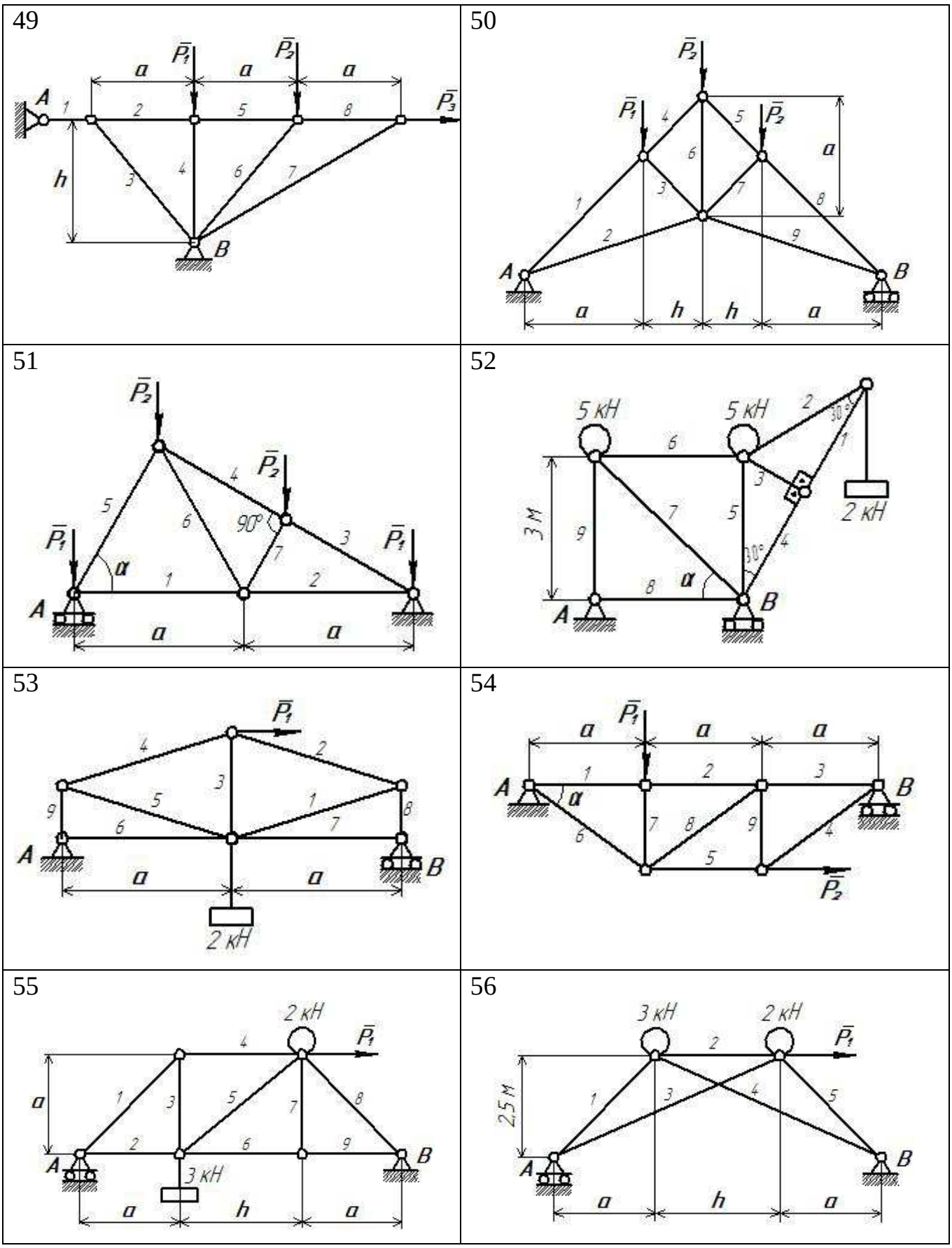


Рисунок 22

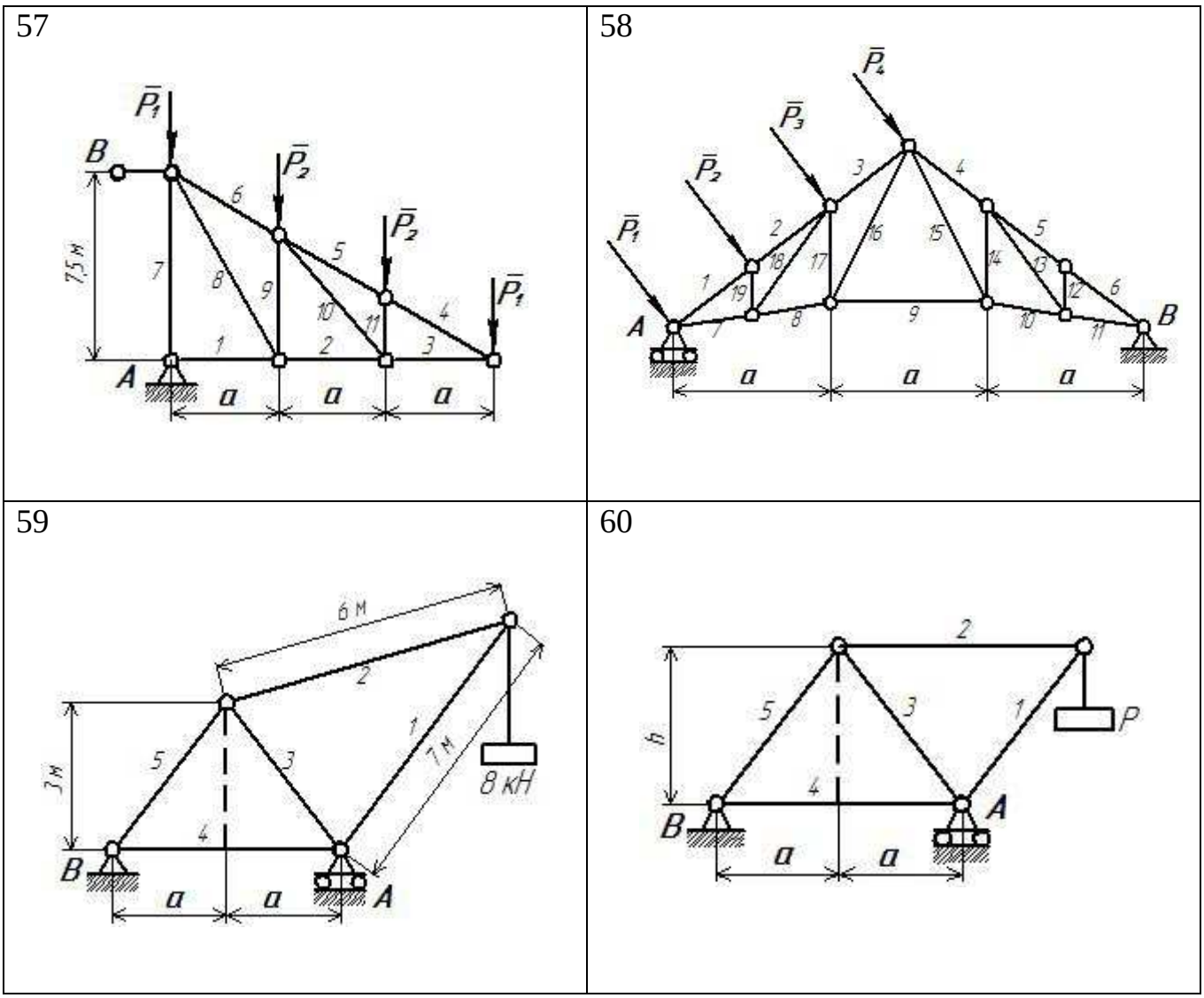


Рисунок 23

2.3.2 Порядок решения задач

1. Проверить условие статической определимости фермы.
2. Определить, реакции опор фермы.
3. Определить усилия в стержнях фермы способом вырезания узлов.
4. Определить усилия в трёх указанных стержнях фермы способом Риттера.

2.4 Пример выполнения лабораторной работы №2

Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы

Определить реакции опор фермы (рисунок 24) от заданной нагрузки, а также усилия во всех её стержнях способом вырезания узлов. Дополнительно определить в стержнях фермы № 4, 5, 10 усилия от той же нагрузки способом Риттера.

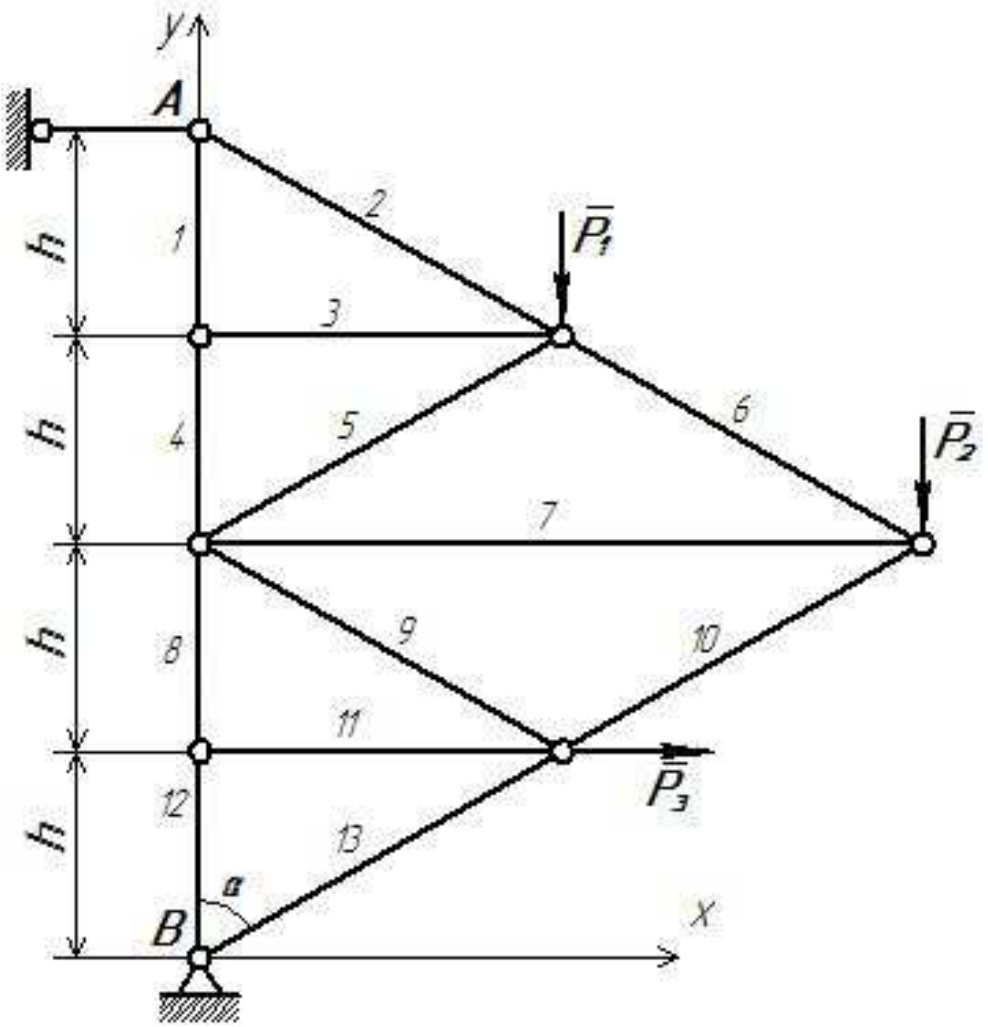


Рисунок 24

Дано: $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 4$ кН, $P_3 = 2$ кН, $h = 2$ м, $\alpha = 60^0$, № 4, 5, 10

Определить: реакции опор R_A, X_B, Y_B, усилия в стержнях $S_1 \ldots S_{13}$.

Решение.

1. Определение реакций опор.

Освобождаем ферму от внешних связей. Действие опор заменяем их реакциями: неподвижную шарнирную опору В заменяем двумя составляющими реакции $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, стержневую опору А – реакцией $\overline{R}_A$ (рисунок 25).

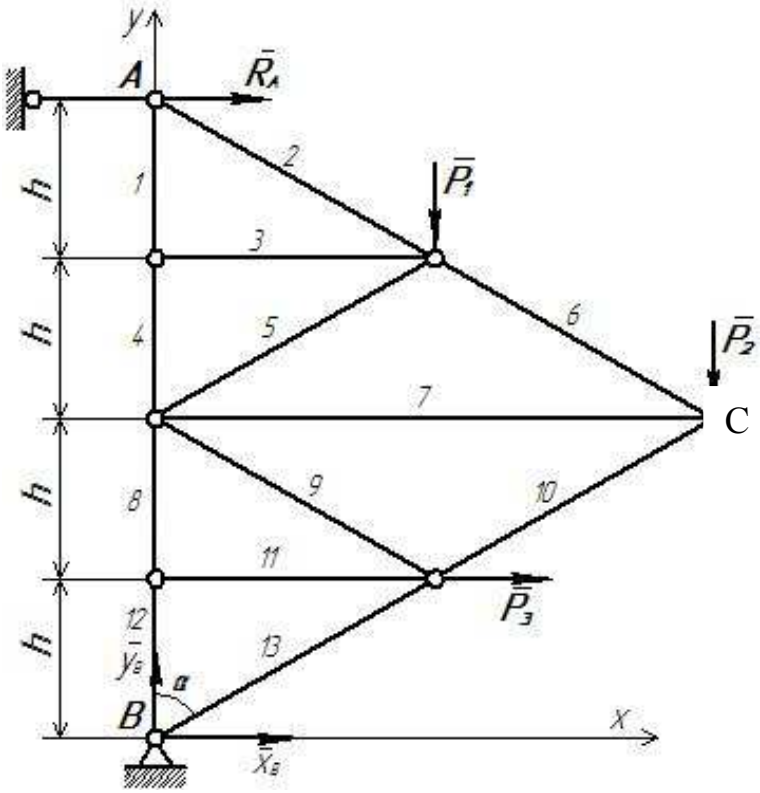


Рисунок 25

Для определения реакций опор составляем три уравнения равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_A + P_3 + X_B = 0 \tag{20}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_B - P_1 - P_2 = 0 \tag{21}$$

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = 0, \quad -R_A \cdot 4h - P_3 \cdot h - P_1 \cdot h\sqrt{3} - P_2 \cdot h \cdot 2\sqrt{3} = 0 \tag{22},$$

где плечи сил P_1, P_2

$$l_7 = \sqrt{(4h)^2 - (2h)^2} = 2h\sqrt{3} \text{ (м)}$$

$$l_3 = h\sqrt{3} \text{ (м)}$$

Из уравнения (22)

$$R_A = \frac{-P_3 \cdot h - P_1 \cdot h\sqrt{3} - P_2 \cdot h \cdot 2\sqrt{3}}{4h} = \frac{-2 \cdot 2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} - 4 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}}{4h} = -4{,}83\kappa H$$

Из уравнения (21)

$$Y_B = P_1 + P_2 = 2 + 4 = 6\kappa H$$

Из уравнения (20)

$$X_B = -R_A - P_3 = 4{,}83 - 2 = 2{,}83\kappa H$$

Проверка (рисунок 8):

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = P_3 \cdot h + P_1 \cdot \frac{2h\sqrt{3}}{2} - R_A \cdot 2h - Y_B \cdot 2h\sqrt{3} + X_B \cdot 2h =$$

$$= 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} + 4{,}83 \cdot 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2{,}83 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 41{,}57 - 41{,}57 = 0,$$

следовательно, реакции опор найдены верно.

2. Определение сил в стержнях фермы способом вырезания узлов.

Стержни, сходящиеся в узле фермы, являются для узлового соединения связями. Отбросим мысленно связи и заменим их действие на узлы реакциями (рисунок 26).

Для каждого узла составим два уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

Узел I:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad R_A + S_2 \cdot \cos 30° = 0 \tag{23}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -S_1 - S_2 \cdot \cos 60° = 0 \tag{24}$$

Из уравнения (23)

$$S_2 = -\frac{R_A}{\cos 30°} = \frac{4{,}83}{\sqrt{3}/2} = 5{,}55\kappa H$$

Из уравнения (24)

$$S_1 = -S_2 \cdot \cos 60° = -5{,}55 \cdot \frac{1}{2} = -2{,}78 кН$$

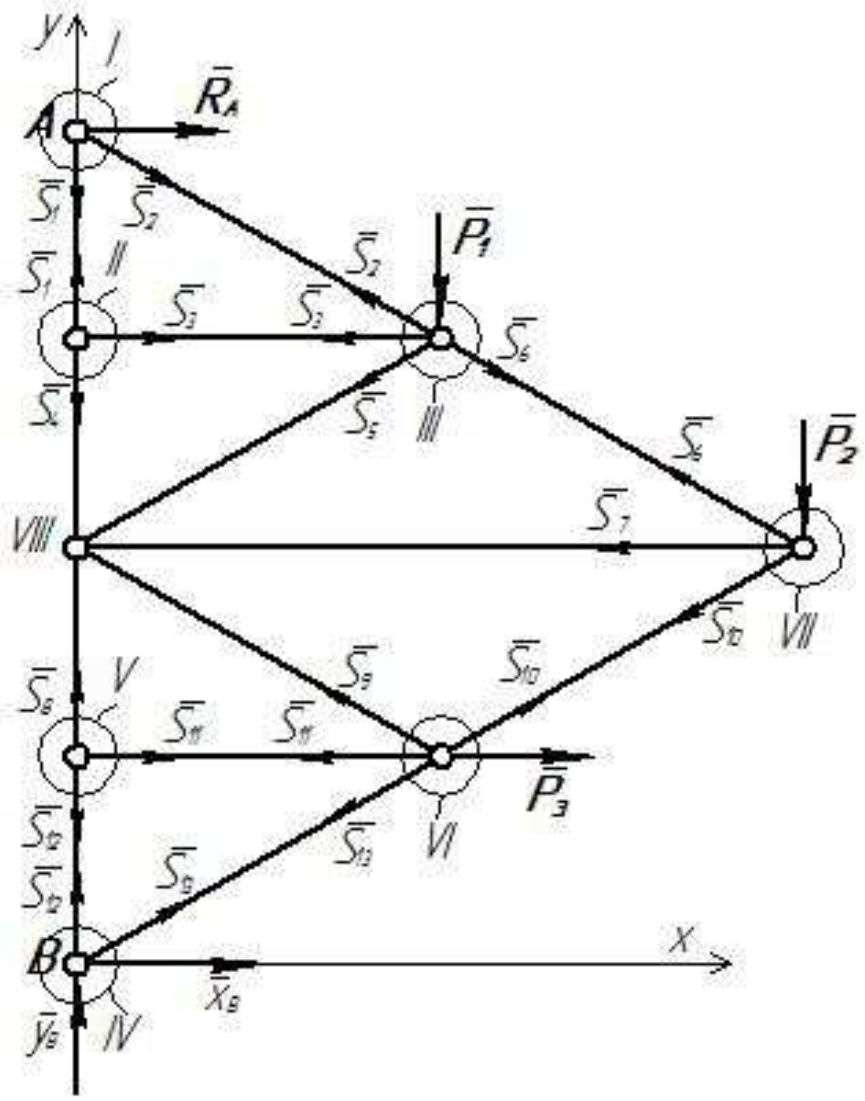


Рисунок 26

Узел II:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad S_3 = 0 \tag{25}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S_1 - S_4 = 0 \tag{26}$$

Из уравнения (26)

$$S_4 = S_1 = -2{,}78 кН$$

Из уравнения (25)

$$S_3 = 0$$

Узел III:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad S_6 \cdot \cos 30° - S_5 \cdot \cos 30° - S_3 - S_2 \cdot \cos 30° = 0 \tag{27}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -P_1 - S_6 \cdot \cos 60° - S_5 \cdot \cos 60° + S_2 \cdot \cos 60° = 0 \tag{28}$$

Из уравнения (27)

$$S_6 - S_5 - S_2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$S_5 = S_6 - S_2 \tag{29}$$

Из уравнения (28)

$$-P_1 - S_6 \cdot \cos 60° - S_6 \cdot \cos 60° + S_2 \cdot \cos 60° + S_2 \cdot \cos 60° = 0$$

$$-P_1 - 2 \cdot S_6 \cdot \frac{1}{2} + 2S_2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$S_6 = S_2 - P_1 = 5{,}55 - 2 = 3{,}55кН \qquad \Rightarrow$$

Из уравнения (29)

$$S_5 = S_6 - S_2 = 3{,}55 - 5{,}55 = -2кН$$

Узел IV:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_B + S_{13} \cdot \cos 30° = 0 \tag{30}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S_{12} + Y_B + S_{13} \cdot \cos 60° = 0 \tag{31}$$

Из уравнения (30)

$$S_{13} = -\frac{X_B}{\cos 30°} = -\frac{2{,}83}{\sqrt{3}/2} = -3{,}25кН$$

Из уравнения (31)

$$S_{12} = -S_{13} \cdot \cos 60° - Y_B = 3{,}25 \cdot \frac{1}{2} - 6 = -4{,}37кН$$

Узел V:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad S_{11} = 0 \tag{32}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S_8 - S_{12} = 0 \tag{33}$$

Из уравнения (33)

$$S_8 = S_{12} = -4{,}37 кН$$

Из уравнения (32)

$$S_{11} = 0$$

Узел VI:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P_3 + S_{10} \cdot \cos 30° - S_9 \cdot \cos 30° - S_{11} - S_{13} \cdot \cos 30° = 0 \quad (34)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S_{10} \cdot \cos 60° + S_9 \cdot \cos 60° - S_{13} \cdot \cos 60° = 0 \quad (35)$$

Из уравнения (35)

$$S_{10} = S_{13} - S_9 \quad (36)$$

Из уравнения (34)

$$P_3 + S_{13} \cdot \cos 30^\circ - S_9 \cdot \cos 30^\circ - S_9 \cdot \cos 30^\circ - S_{11} - S_{13} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$P_3 - 2 \cdot S_9 \cdot \cos 30° = 0$$

$$S_9 = \frac{P_3}{2 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{2}{2 \cdot 0{,}87} = 1{,}15 кН \quad \Rightarrow$$

Из уравнения (36)

$$S_{10} = -3{,}25 - 1{,}15 = -4{,}4 \text{ кН}$$

Узел VII:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -S_7 - S_6 \cdot \cos 30^\circ - S_{10} \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (37)$$

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -P_2 + S_6 \cdot \cos 60^\circ - S_{10} \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (38)$$

Из уравнения (37)

$$S_7 = -\cos 30^\circ \cdot (S_6 + S_{10}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (3{,}55 - 4{,}4) = 0{,}74 \text{ кН}$$

Из уравнения (38)

$$-P_2 + S_6 \cdot \cos 60^\circ - S_{10} \cdot \cos 60^\circ = -4 + (3{,}55 + 4{,}4) \cdot \frac{1}{2} = 4{,}4 - 4{,}4 = 0$$

3. Определение сил в стержнях способом сечений (способом Риттера)

По способу Риттера каждая сила должна быть определена из отдельного уравнения и не должна выражаться через силы в других стержнях.

Для определения сил S_4 и S_5 мысленно разрежем ферму сечением I-I (рисунок 27).

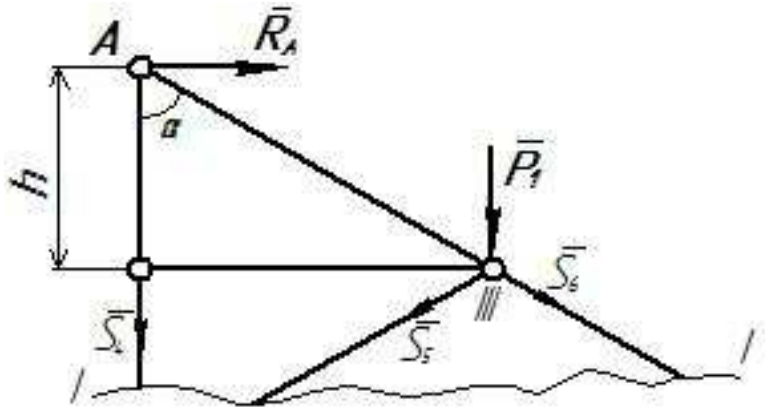


Рисунок 27

Рассматриваем равновесие сил, приложенных к верхней части фермы. Для определения S_4 составим уравнение моментов сил относительно точки III, где пересекаются линии действия сил S_5 и S_6 (точки Риттера для стержня 4):

$$\sum M_{III}(\bar{F}_k) = 0, \quad S_4 \cdot 2\sqrt{3} - R_A \cdot 2 = 0$$

$$S_4 = -\frac{4{,}89}{\sqrt{3}} = -2{,}78 \text{ кН}$$

Для определения S_5, чтобы исключить из уравнения усилия S_4 и S_6, составим уравнение моментов сил относительно точки А:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -S_5 \cdot 2\sqrt{3} - P_1 \cdot 2\sqrt{3} = 0$$

$$S_5 = -P_1 = -2 \text{ кН}.$$

Для определения силы S_{10} проведем сечение II-II. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к нижней части фермы (рисунок 28).

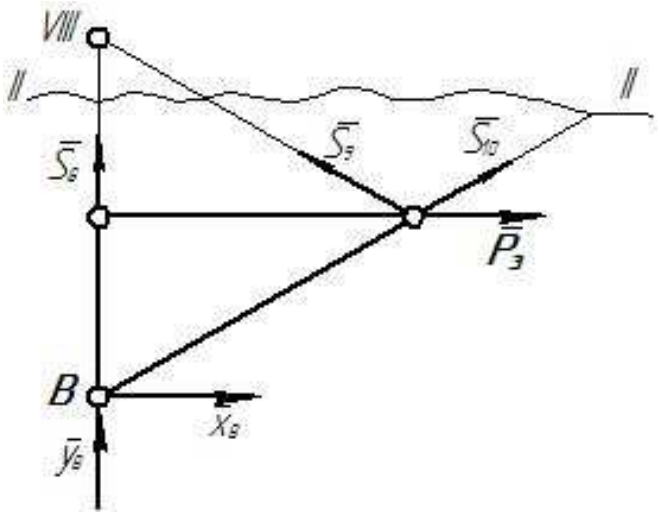


Рисунок 28

Точкой Риттера для стержня 10 является узел VIII, где пересекаются линии действия сил S_9 и S_8, исключаемых из уравнения:

$$\sum M_{VIII}(\bar{F}_k) = 0, \quad S_{10} \cdot 2\sqrt{3} + P_3 \cdot 2 + X_B \cdot 4 = 0$$

$$S_{10} = \frac{-4 - 11{,}32}{2\sqrt{3}} = -4{,}4 \text{ кН.}$$

Результаты расчета приведены в таблицах 4, 5.

Таблица 4

Реакция связи	R_A	$У_B$	X_B
Сила, кН	-4,83	6	2,83

Таблица 5

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Сила, кН	-2,78	5,55	0	-2,78	-2	3,55	0,74	-4,37	1,15	-4,4	0	-4,37	-3,25
Сила, определенная по способу Риттера, кН	-	-	-	-2,78	-2	-	-	-	-	-4,4	-	-	-

Знаки указывают, что стержни 1, 4, 5, 8, 10, 12, 13 сжаты, стержни 2, 6, 7, 9 растянуты, стержни 3, 11 не нагружены (*нулевые стержни*).

3 Произвольная пространственная система сил

3.1 Основные понятия и определения

3.1.1 Проекция силы на плоскость

Проекцией силы $\overline{F}$ *на плоскость Oxy* называется вектор $\overline{F}_{xy} = \overline{OB_1}$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\overline{F}$ на эту плоскость (рисунок 29).

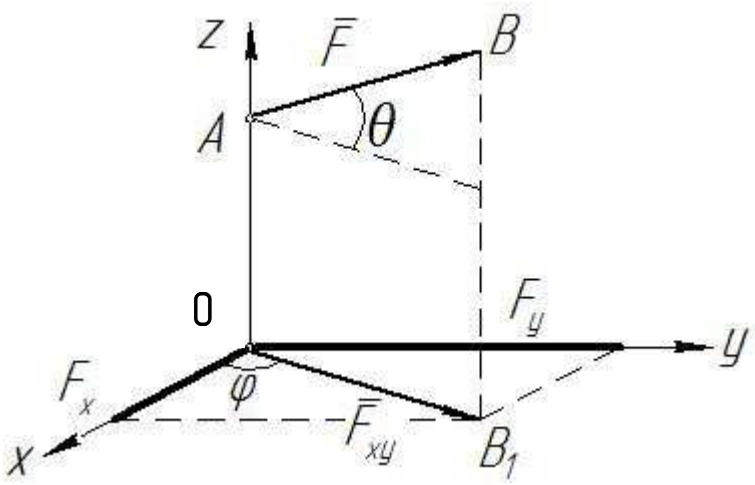


Рисунок 29

Проекция силы на плоскость характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости *Oxy*.

По модулю

$$F_{xy} = F\cos\Theta,$$

где Θ – угол между направлением силы $\overline{F}$ и её проекцией $\overline{F}_{xy}$.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала её проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось (рисунок 29):

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\Theta\cos\varphi,$$

$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\Theta\sin\varphi.$$

3.1.2 Общие сведения

Произвольной пространственной системой сил, $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ называется система сил, линии действия которых расположены как угодно в пространстве.

В пространственных системах сил, в отличии от плоских систем, пользуются *векторным моментом силы*

$$\overline{M}_o(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F},$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра О в точку А приложения силы (рисунок 30).

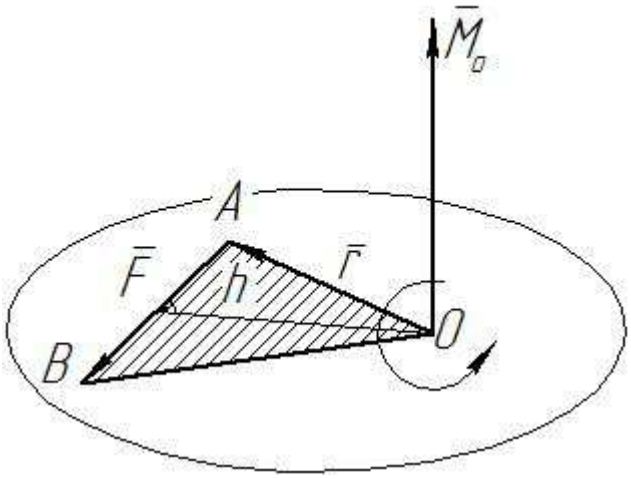


Рисунок 30

Исходя из определения векторного произведения, векторный момент силы $\overline{F}$ относительно центра О – $\overline{M}_o(\overline{F})$ это вектор, приложенный в точке О, направленный перпендикулярно плоскости ОАВ, проходящей через линию действия силы $\overline{F}$ и центр О, в ту сторону откуда вращение тела под действием силы видно происходящим против хода часовой стрелки. Модуль этого вектора определяется по формуле

$$\left|\overline{M}_o(\overline{F})\right| = F \cdot h,$$

где h – плечо силы относительно центра О (длина перпендикуляра, проведенного из точки О на линию действия силы),

F – модуль силы.

3.1.3 Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси *z* (рисунок 31).

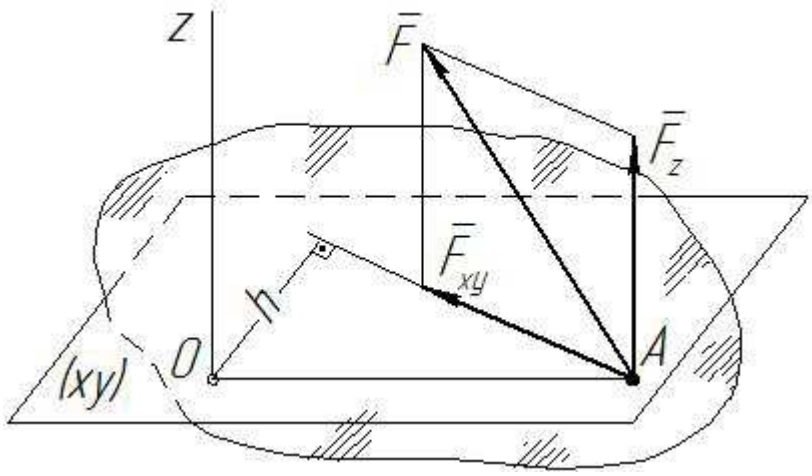


Рисунок 31

Пусть на это тело действует сила $\overline{F}$, приложенная в точке А. Проведем через точку А плоскость *xy*, перпендикулярную оси *z*, и разложим силу $\overline{F}$ на составляющие: $\overline{F}_z$, параллельную оси *z*, и $\overline{F}_{xy}$, лежащую в плоскости *xy* ($\overline{F}_{xy}$ является одновременно проекцией силы $\overline{F}$ на плоскость *xy*). Сила $\overline{F}_z$, направленная параллельно оси *z*, очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело *вдоль* оси *z*). Следовательно, весь вращательный эффект, создаваемый силой $\overline{F}$, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей $\overline{F}_{xy}$. Отсюда заключаем, что момент силы $\overline{F}$ относительно оси *z*:

$$M_z(\overline{F}) = M_z(\overline{F}_{xy}).$$

Для силы $\overline{F}_{xy}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси *z*, вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее

расстояние h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы $\overline{F}_{xy}$ относительно точки О, в которой ось z пересекается с плоскостью xy. Следовательно,

$$M_z(\overline{F}) = M_O(\overline{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h .$$

Таким образом:

моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент будем считать *положительным*, если с положительного конца оси z поворот, который сила $\overline{F}_{xy}$ стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и *отрицательным*, если по ходу часовой стрелки.

Правило нахождения момента силы относительно оси:

чтобы найти момент силы относительно оси z (рисунок 32), необходимо:

1) провести плоскость xy, перпендикулярную к оси z (в любой точке оси);

2) спроектировать силу $\overline{F}$ на эту плоскость и вычислить величину F_{xy};

3) опустить из точки О пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на линию действия $\overline{F}_{xy}$ и найти ero длину h, то есть плечо силы $\overline{F}_{xy}$ относительно точки О;

4) вычислить момент силы относительно оси по формуле

$$M_z(\overline{F}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

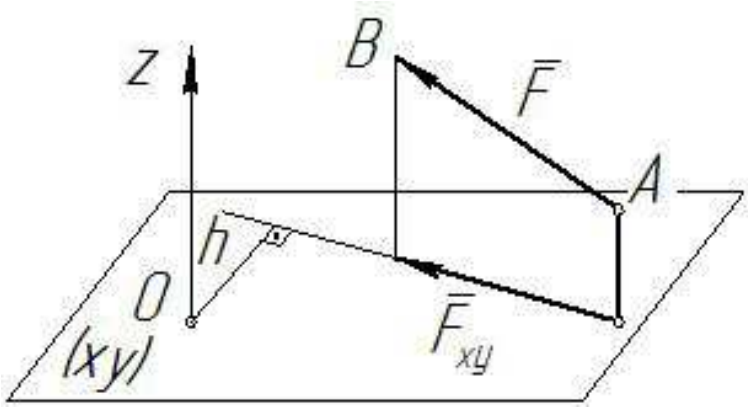


Рисунок 32

Момент относительно оси равен нулю в следующих случаях:

1) если сила параллельна оси (так как $F_{xy} = 0$);

2) если линия действия силы пересекает ось (так как h = 0).

Объединяя оба случая вместе, можно заключить, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

3.1.4 Пара сил

Векторным моментом пары $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ называется вектор $\overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо, направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение, производимое парой, видно против хода часовой стрелки (рисунок 33). Векторный момент может быть приложен в произвольной точке (свободный вектор).

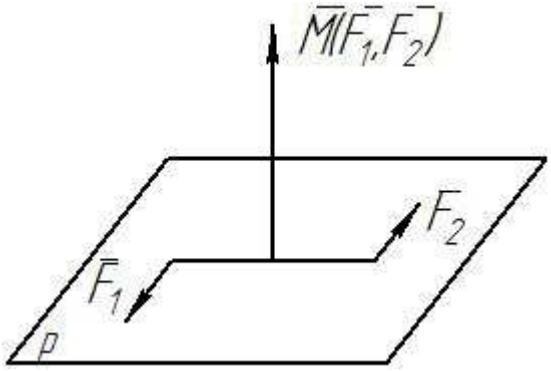


Рисунок 33

3.1.5 Основная теорема статики (теорема Пуансо)

Теорема. *Произвольную систему сил в общем случае можно заменить одной силой*, равной главному *вектору* $\overline{F} = \sum \overline{F}_к$, приложенному в центре приведения О *и одной парой сил,* момент которой равен главному моменту всех сил системы относительно центра приведения $\overline{M}_O = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_к)$ (рисунок 34).

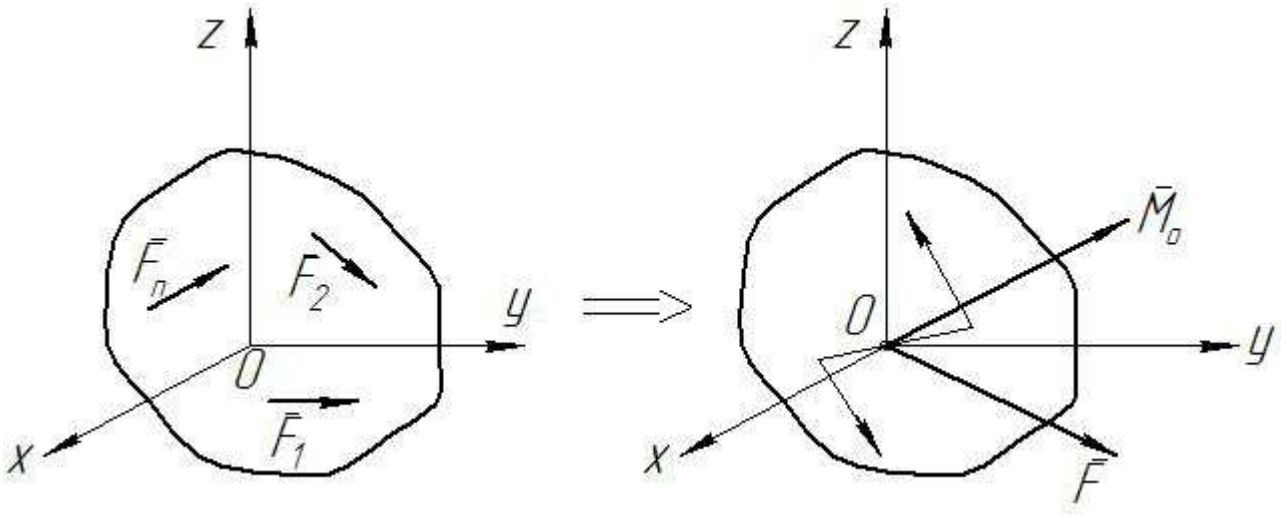


Рисунок 34

Вектор $\overline{F} = \sum \overline{F}_к$, равный геометрической сумме всех сил системы называется *главным вектором* системы сил.

Вектор $\overline{M}_O = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_к)$, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения называется *главным моментом* системы сил относительно центра О.

3.1.6 Условия равновесия произвольной пространственной системы

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра равнялись нулю, то есть

$$\overline{F} = 0, \quad \overline{M}_O = 0 \tag{39}$$

Таким образом, векторные условия равновесия произвольной пространственной системы сил имеют вид:

$$\begin{cases} \sum \overline{F}_к = 0, \\ \sum \overline{M}_O(\overline{F}_к) = 0, \end{cases}$$

то есть, геометрические суммы всех сил и моментов всех сил относительно произвольного центра для системы сил, находящейся в равновесии, равны нулю.

Проецируя главный вектор и главный момент на оси декартовой системы координат, получим *аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил*:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum F_{kz} = 0 \\ \sum M_x(\overline{F}_k) = 0 \\ \sum M_y(\overline{F}_k) = 0 \\ \sum M_z(\overline{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (40)$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на оси x, y, z и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю.

Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то, согласно *теореме Вариньона*, момент равнодействующей силы относительно точки равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно той же точки:

$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_к).$$

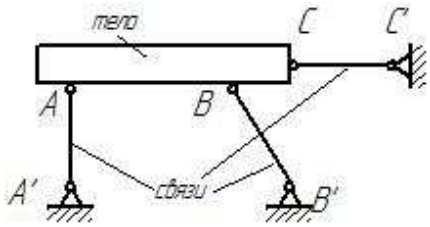
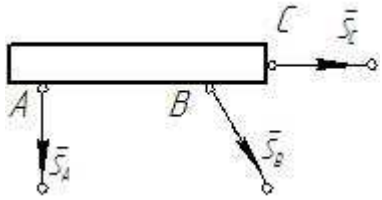
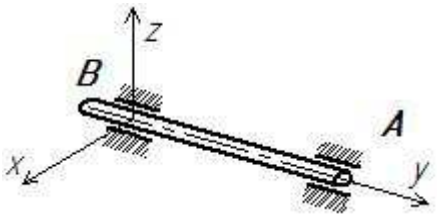
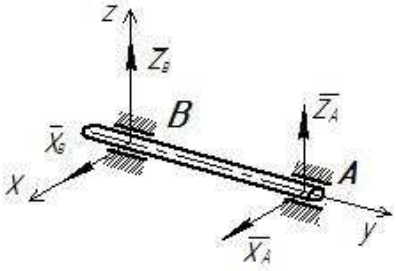
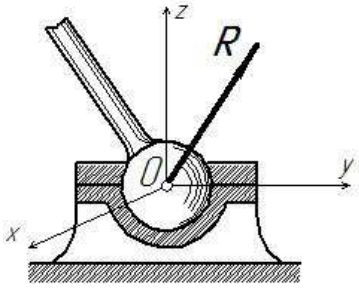
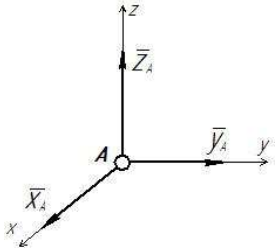
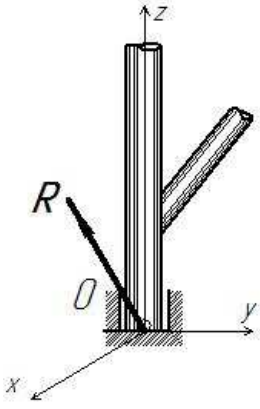
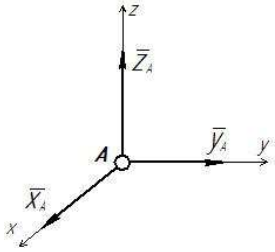
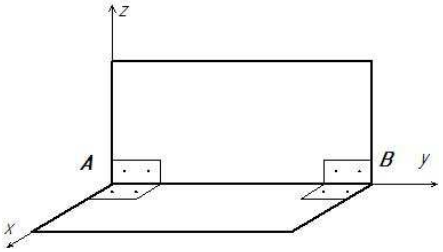
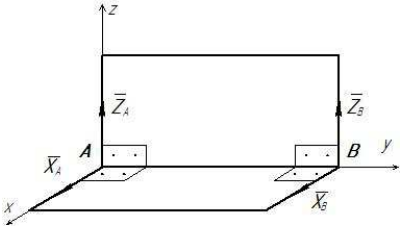
Та же теорема относительно осей координат записывается так:

$$M_x(\overline{R}) = \sum M_x(\overline{F}_k)$$
$$M_y(\overline{R}) = \sum M_y(\overline{F}_k)$$
$$M_z(\overline{R}) = \sum M_z(\overline{F}_k)$$

Теоремой Вариньона пользуются при определении моментов силы относительно осей.

3.1.7 Некоторые виды связей и их реакции

Таблица 6

Виды связей	Изображение связи на схемах	Схема замены связи реакцией
Идеальный стержень		
Гладкий цилиндрический шарнир (подшипник)		
Сферический (шаровой) шарнир		
Подпятник		
Петля		

3.2 Вопросы для самоконтроля

Как формулируется основная теорема статики?

Что называется векторным моментом силы относительно точки?

Как определяется момент силы относительно оси?

Что называется векторным моментом пары?

Сформулируйте правило нахождения момента силы относительно оси?

Когда момент силы относительно оси равен нулю?

Какой вид имеют векторные условия равновесия произвольной пространственной системы сил?

Какой вид имеют аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил?

Как формулируется теорема Вариньона?

Что называется главным вектором произвольной пространственной системы сил?

Что называется главным моментом произвольной пространственной системы сил?

3.3 Лабораторная работа №3. Равновесие твердого тела. Произвольная пространственная система сил

3.3.1 Содержание работы

Лабораторная работа состоит из двух задач на равновесие твердого тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил. На рисунке 35 приведены схемы к задаче 1, на рисунках 36, 37 – схемы к задаче 2. Числовые данные к задачам представлены в таблицах 7 и 8 соответственно.

Цель работы: научиться составлять расчетные схемы, уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил и определять неизвестные реакции связей.

Задача 1

Горизонтальный вал (рисунок 35) закреплен в подшипниках А и В или А и С (С – упорный подшипник). Определить реакции опор и силу F_1. Необходимые данные приведены в таблице 7.

Таблица 7 – Исходные данные к задаче 1.

№ условия	Размеры, м					Силы, кН						α, град.	M, кН·м
	D_1	D_2	a	b	c	F_1	F_2	T_1	T_2	Q_1	Q_2		
0	0,2	0,6	0,3	0,6	0,7	-	10	8	12	10	14	30°	8
1	0,3	0,8	0,2	0,4	0,6	-	8	10	14	4	12	60°	6
2	0,1	0,2	0,4	0,8	0,2	-	6	12	18	8	10	45°	4
3	0,25	0,6	0,6	0,8	0,5	-	12	5	10	8	16	30°	10
4	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8	-	5	8	12	10	14	45°	5
5	0,3	0,6	0,3	0,8	0,2	-	10	10	14	4	12	60°	8
6	0,4	0,8	0,2	0,5	0,6	-	8	12	18	8	10	30°	12
7	0,2	0,4	0,6	0,9	0,1	-	6	5	10	8	16	45°	15
8	0,3	0,6	0,5	0,7	0,4	-	12	8	12	10	14	60°	10
9	0,4	0,8	0,1	0,5	0,6	-	5	10	14	4	12	30°	8

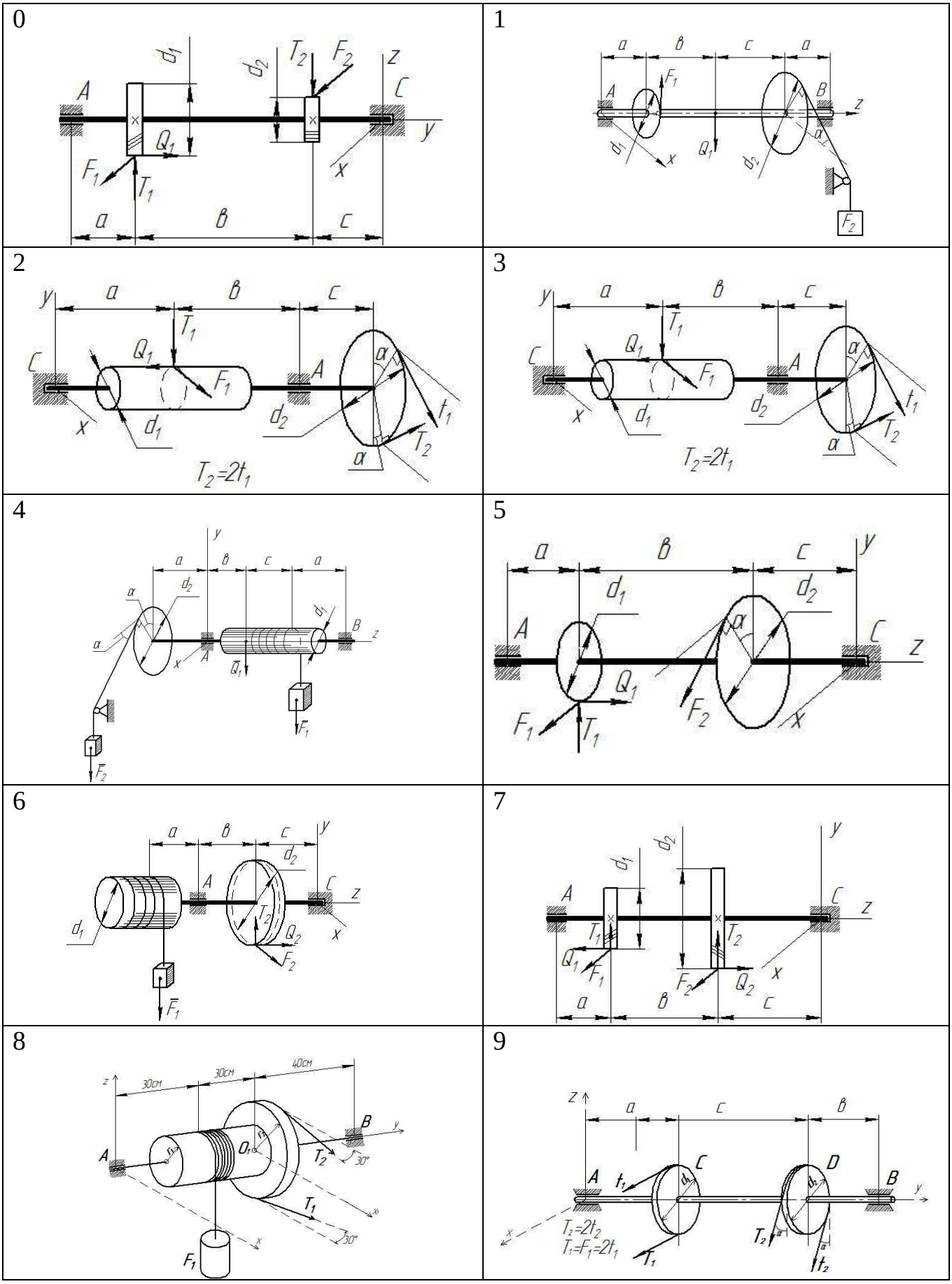


Рисунок 35

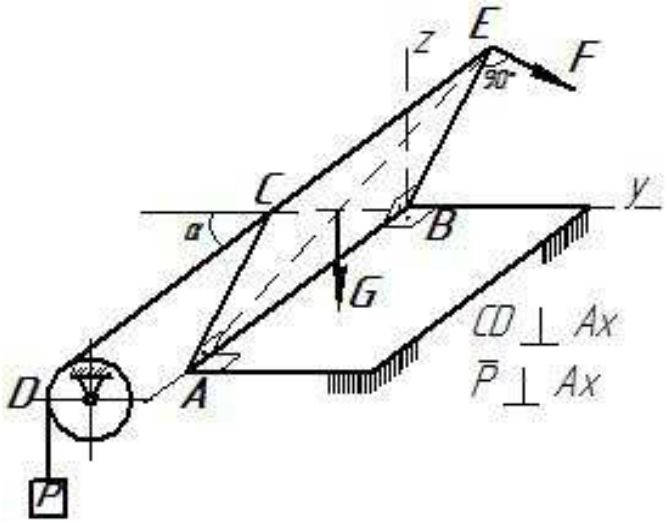
Задача 2

Прямоугольная крышка ABE (рисунок 36, 37). удерживается в равновесии стержнем CD (схемы 1, 3, 5, 6, 7) или грузом весом **P**, подвешенным на нити CD, переброшенной через неподвижный блок D (схемы 0, 2, 4, 8, 9). В точке A – гладкий цилиндрический шарнир (подшипник) – схема 6, или сферический шарнир (схемы 3, 5, 9), или петля (схемы 0, 1, 2, 4, 7, 8). В точке B – гладкий цилиндрический шарнир (подшипник) – схема 6, или петля (схемы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9). Определить реакции опор. Для схем 0, 2, 4, 8 определить реакции опор и модуль силы P. Необходимые данные приведены в таблице 8.

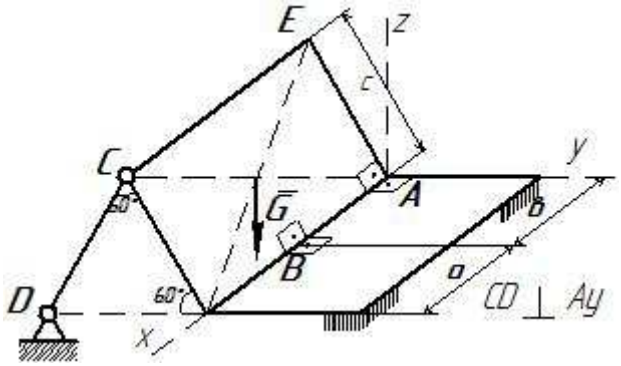
Таблица 8 – Исходные данные к задаче 2.

№ усло-вия	Размеры, м			Силы, кН			α, град.	β, град.
	a	b	c	F	Q	G		
0	0,2	0,3	0,1	7	5	12	45°	60°
1	0,2	0,1	0,3	10	7	14	60°	30°
2	0,15	0,15	0,2	2	10	13	30°	45°
3	0,2	0,2	0,4	5	4	17	45°	60°
4	0,3	0,4	0,2	4	2	13	60°	30°
5	0,4	0,3	0,2	3	6	15	30°	45°
6	0,2	0,4	0,15	6	8	12	45°	60°
7	0,2	0,15	0,1	2	4	14	60°	30°
8	0,3	0,4	0,2	4	3	16	30°	45°
9	0,4	0,2	0,3	5	10	15	45°	60°

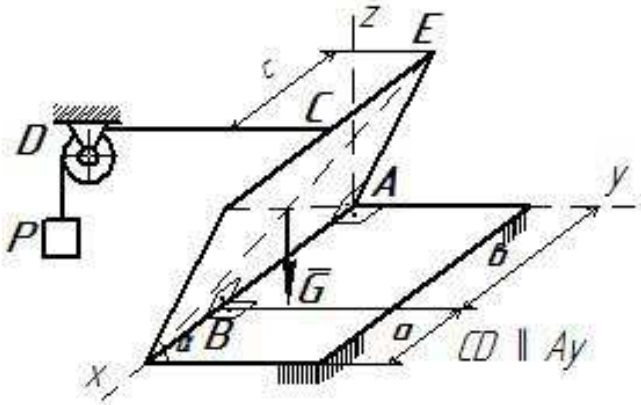
0



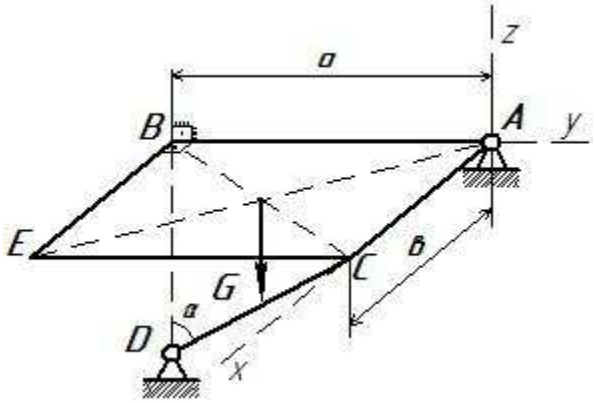
1



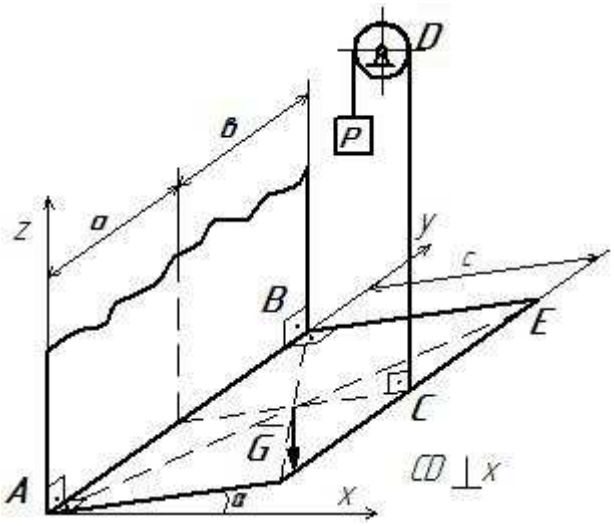
2



3



4



5

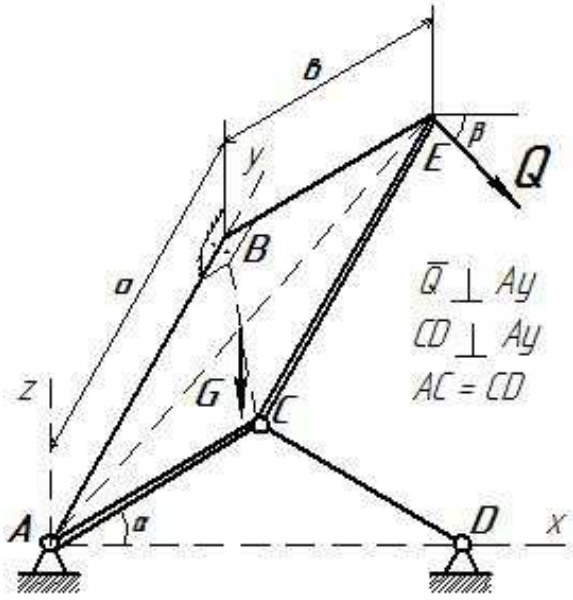


Рисунок 36

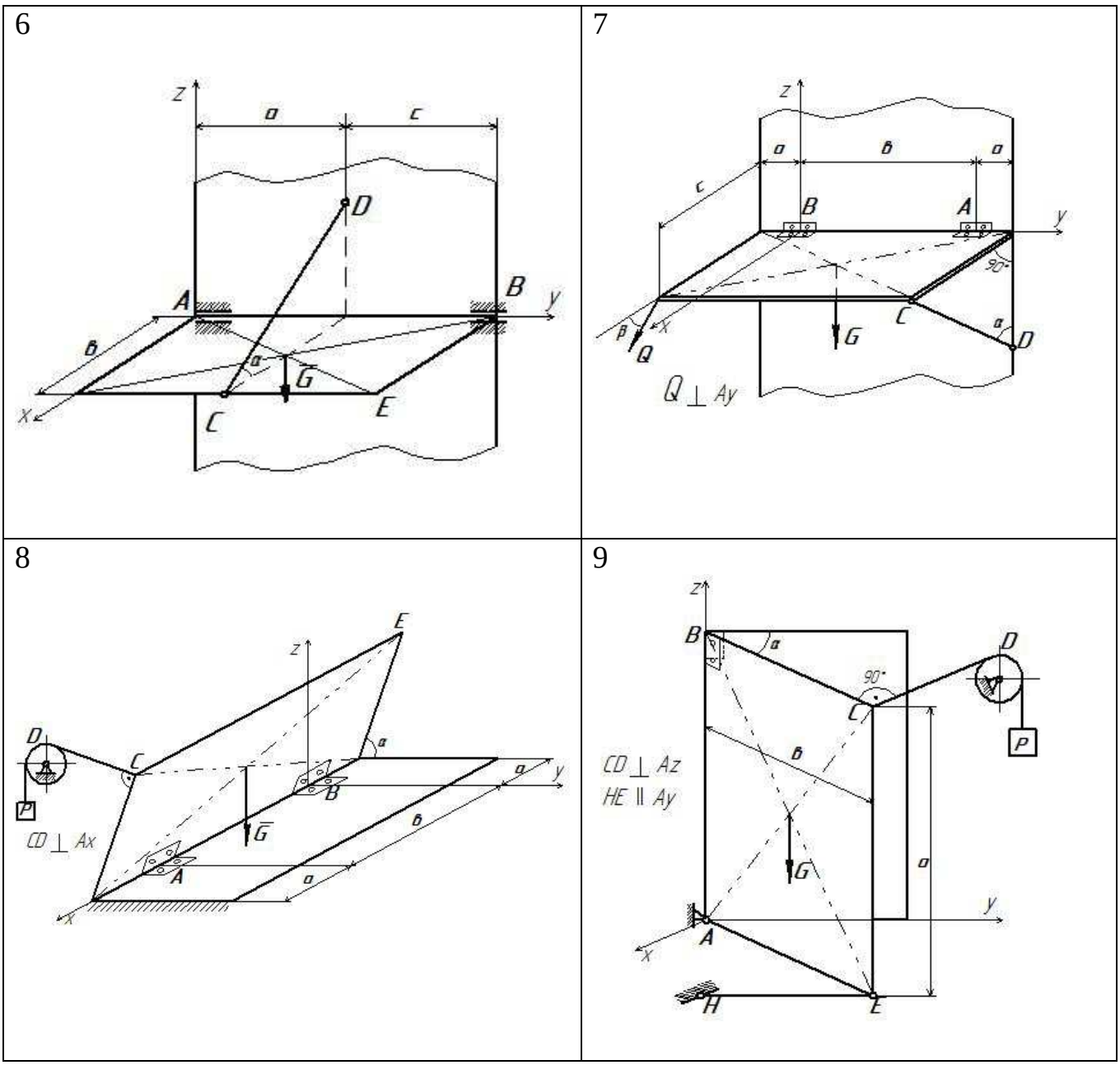


Рисунок 37

3.3.2 Порядок решения задач

1 Выбрать объект исследования, то есть тело, равновесие которого надо рассмотреть для определения искомых величин.

2 Приложить к нему заданные силы и силы реакции связей.

3 Определить, какая получилась система сил и сколько уравнений равновесия имеет данная система.

4 Убедиться, что задача является статически определенной, то есть число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия.

5 Указать координатные оси.

6 Составить уравнения равновесия для полученной системы сил и решить эти уравнения.

3.4 Пример выполнения лабораторной работы №3

Лабораторная работа №3

Равновесие твердого тела. Произвольная пространственная система сил

Задача 1

Ворот ADC (рисунок 38). удерживается в равновесии с одной стороны вертикальной силой **F**, приложенной в точке C, а с другой стороны – грузом весом **P**, подвешенным на нити, переброшенной через неподвижный блок. Определить реакции связей, а также модуль силы F, если P = 2 кН; вес барабана 3 G = 0,08 кН, r = 0,1 м; $l_1 = l_2 = l_3 = 0{,}3$ м; $l_4 = 0{,}8$ м; $\alpha = 30°$.

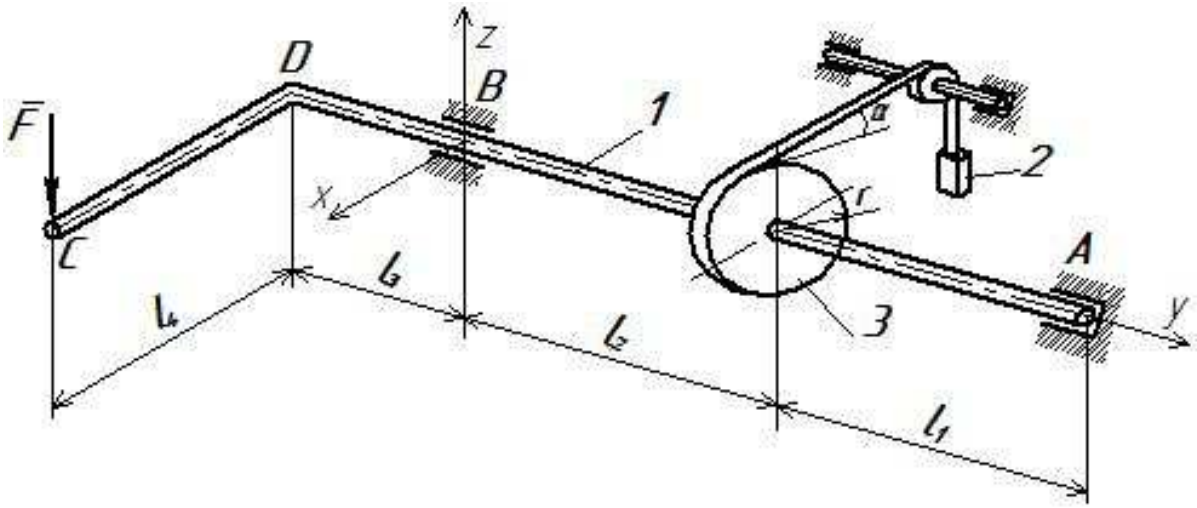


Рисунок 38

Дано: P = 2 кН, G = 0,08 кН, r = 0,1 м; $l_1 = l_2 = l_3 = 0{,}3$ м; $l_4 = 0{,}8$ м; $\alpha=30°$.

Определить: реакции опор X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B и силу F.

Решение.

Рассмотрим равновесие ворота ADC (рисунок 39). На него действуют: заданная сила $\overline{F}$, вес барабана $\overline{G}$, в точке схода нити с барабана приложим силу натяжения нити (предварительно оборвав нить), которая направлена вдоль нити, в сторону обрыва и по модулю равна весу груза P, так как натяжение нити во всех ее точках одинаково. Связями для ворота являются опоры в точках A и B. Отбросим связи и заменим их действие силами реакции связей: в точке B – две составляющих силы реакции $\overline{X}_B$ и $\overline{Z}_B$, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси подшипника и совпадающие с положительным направлением координатных осей., в точке A – три составляющих силы реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$ (рисунок 39).

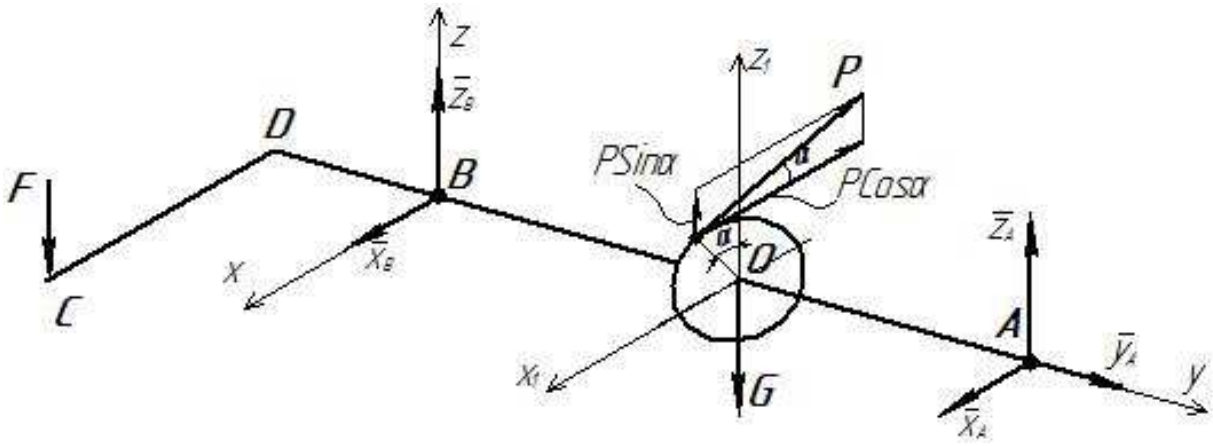


Рисунок 39

Получили произвольную пространственную систему сил, которая имеет шесть уравнений равновесия. Данная задача является статически определенной, так как число неизвестных (X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, F) равно числу уравнений равновесия.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A + X_B - P\cos\alpha = 0 \tag{41}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_A = 0 \tag{42}$$

$$\sum F_{kz} = 0, \qquad Z_A + Z_B - F - G + P\sin\alpha = 0 \tag{43}$$

$$\sum M_X(\overline{F}_k) = 0, \quad \mathrm{Z_A}\cdot(l_1 + l_2) - G\cdot l_2 + P\cdot\sin\alpha\cdot l_2 + F\cdot l_3 = 0 \tag{44}$$

$$\sum M_Y(\overline{F}_k) = 0, \quad F\cdot l_4 - P\cdot r = 0 \tag{45}$$

$$\sum M_Z(\overline{F}_k) = 0, \quad -\mathrm{X_A}\cdot(l_1 + l_2) + P\cdot\cos\alpha\cdot l_2 = 0 \tag{46}$$

Моменты силы $\overline{P}$ относительно осей X и Z найдены по теореме Вариньона путем разложения этой силы на две составляющие $P_x = P\cdot\cos\alpha$, $P_y = P\cdot\sin\alpha$, параллельные координатным осям (рисунок 39).

Из уравнения (46)

$$X_A = \frac{P\cdot\cos\alpha\cdot l_2}{l_1 + l_2} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}3}{0{,}3 + 0{,}3} = 0{,}866кН$$

Из уравнения (45)

$$F = \frac{P\cdot r}{l_4} = \frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}8} = 0{,}25кН$$

Из уравнения (44)

$$Z_A = \frac{Gl_2 - P\cdot\sin\alpha\cdot l_2 - F\cdot l_3}{l_1 + l_2} = \frac{0{,}08\cdot 0{,}3 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}3 - 0{,}25\cdot 0{,}3}{0{,}3 + 0{,}3} = -0{,}585кН$$

Из уравнения (43)

$$Z_B = -Z_A + F + G - P\sin\alpha = 0{,}585 + 0{,}25 + 0{,}08 - 2\cdot 0{,}5 = -0{,}085кН$$

Из уравнения (42)

$$Y_A = 0$$

Из уравнения (41)

$$X_B = -X_A + P\cos\alpha = -0{,}866 + 2 \cdot 0{,}866 = 0{,}866кН$$

Проверка:

$$\sum M_{X1}(\overline{F}_k) = F \cdot (l_3 + l_2) - Z_B \cdot l_2 + Z_A \cdot l_1 = 0{,}25 \cdot (0{,}3 + 0{,}3) + 0{,}085 \cdot 0{,}3 - 0{,}585 \cdot 03 =$$
$$= 0{,}1755 - 0{,}1755 = 0$$

$$\sum M_{Z1}(\overline{F}_k) = \mathrm{X}_B \cdot l_2 - X_A \cdot l_1 = 0{,}866 \cdot 0{,}3 - 0{,}866 \cdot 03 = 0$$

Следовательно, реакции опор найдены верно.

Ответ: $X_A = 0{,}866$ кН; $Y_A = 0$; $Z_A = -0{,}585$ кН;

$X_B = 0{,}866$ кН; $Z_B = -0{,}085$ кН; $F = 0{,}25$ кН.

Знак минус, полученный для значений сил Z_A, Z_B указывает, что эти силы имеют направления, противоположные принятому на рисунке 39.

Задача 2

Однородная прямоугольная рама BAE весом G = 400 кН (рисунок 40). прикрепленная к стене с помощью сферического шарнира в точке A и петли в точке B, удерживается в горизонтальном положении тросом CD. К раме в точке K подвешен груз весом P = 50 кН. Определить реакции связей.

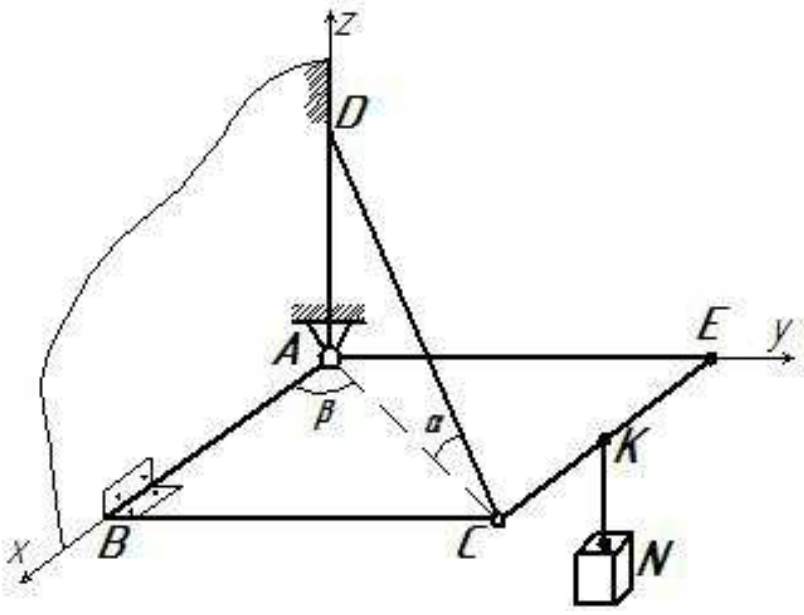


Рисунок 40

Дано: P = 50 кН, G = 400 кН, BC = *l*; KC = KE; $\alpha = 60°$; $\beta = 60°$.

Определить: реакции опор X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B Т.

Решение.

Рассмотрим равновесие рамы BAE (рисунок 41). На неё действуют: вес рамы $\overline{G}$, в точке К приложим силу натяжения нити (предварительно оборвав нить), которая направлена вдоль нити, в сторону обрыва и по модулю равна весу груза Р, так как натяжение нити во всех ее точках одинаково. Связями для рамы являются опоры в точках А, В, С. Отбросим связи и заменим их действие силами реакции связей: в точке В – две составляющих силы реакции $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси петли и совпадающие с положительным направлением координатных осей., в точке А – три составляющих силы реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, в точке С – сила натяжения нити $\overline{T}$, которая направлена вдоль нити, в сторону обрыва (рисунок 41).

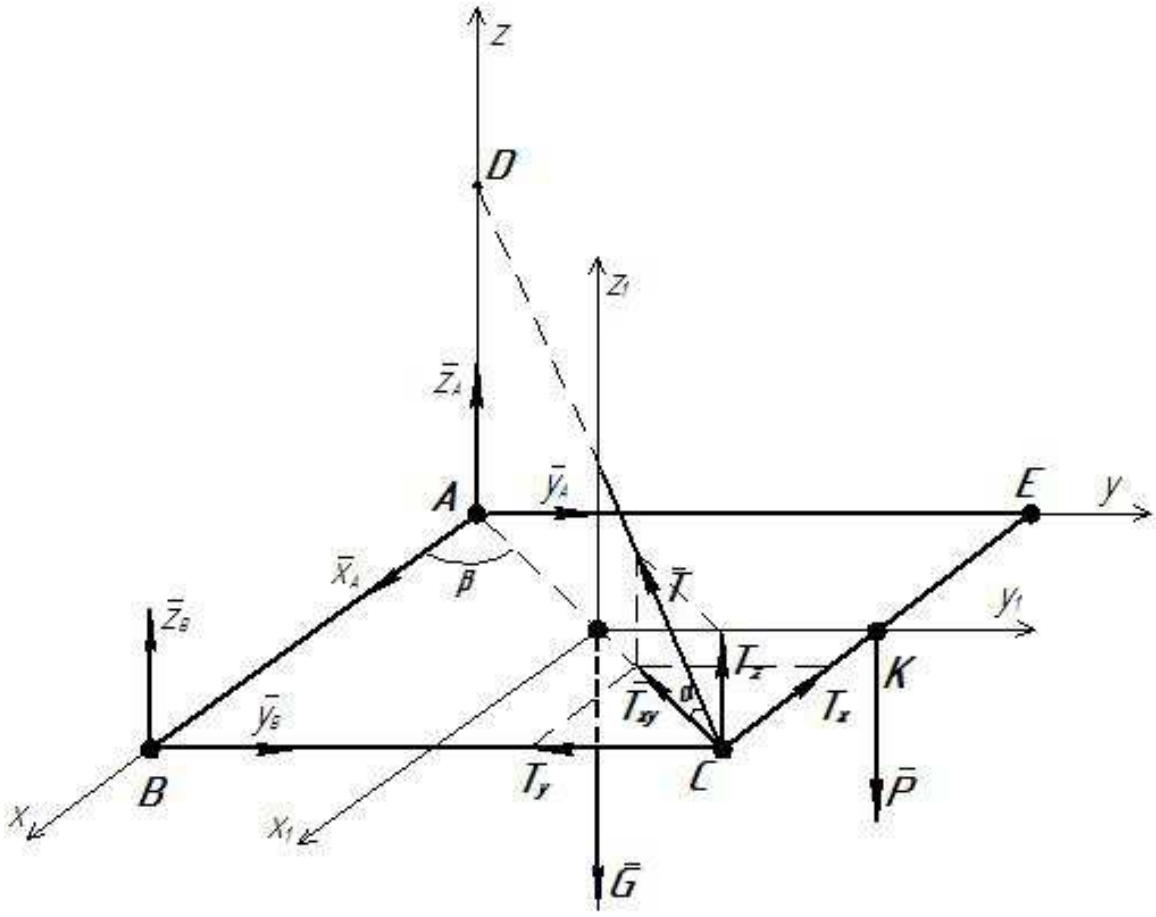


Рисунок 41

Получили произвольную пространственную систему сил, которая имеет шесть уравнений равновесия. Данная задача является статически определенной, так как число неизвестных (X_A, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, T) равно числу уравнений равновесия.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A - T\cos\alpha\cos\beta = 0 \tag{47}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_A + Y_B - T\cos\alpha\sin\beta = 0 \tag{48}$$

$$\sum F_{kz} = 0, \qquad Z_A + Z_B - G - P + T\sin\alpha = 0 \tag{49}$$

$$\sum M_X(\overline{F}_k) = 0, \quad T\cdot\sin\alpha\cdot l - P\cdot l - G\cdot\frac{l}{2} = 0 \tag{50}$$

$$\sum M_Y(\overline{F}_k) = 0, \quad \mathrm{P}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{2} + \mathrm{G}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{2} - T\cdot\sin\alpha\cdot AB - Z_B\cdot AB = 0 \tag{51}$$

$$\sum M_Z(\overline{F}_k) = 0, \quad \mathrm{Y_B}\cdot AB = 0 \tag{52}$$

Моменты силы $\overline{T}$ относительно осей X и Y найдены по теореме Вариньона путем разложения этой силы на три составляющие $T_x = T\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$, $T_y = T\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta$, $T_z = T\cdot\sin\alpha$, параллельные координатным осям (рисунок 41).

Из уравнения (52)

$$Y_B = 0$$

Из уравнения (50)

$$T = \frac{l\left(P + \frac{G}{2}\right)}{l\cdot\sin\alpha} = \frac{50 + \frac{400}{2}}{0{,}866} = 288{,}68\ кН$$

Из уравнения (51)

$$Z_B = \frac{P}{2} + \frac{G}{2} - T\cdot\sin\alpha = \frac{50}{2} + \frac{400}{2} - 288{,}68\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -25\ кН$$

Из уравнения (49)

$$Z_A = -Z_B + G + P - T\sin\alpha = 25 + 400 + 50 - 288{,}68\cdot 0{,}866 = 225\ кН$$

Из уравнения (48)

$$Y_A = T \cdot \cos\alpha \sin\beta - Y_B = 288{,}68 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 - 0 = 125 \ \ кН$$

Из уравнения (47)

$$X_A = T \cos\alpha \cos\beta = 288{,}68 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 72{,}17 \ \ кН$$

Проверка:

$$\sum M_{X1}(\overline{F}_k) = -Z_B \cdot \frac{BC}{2} - Z_A \cdot \frac{BC}{2} - P \cdot \frac{BC}{2} + \mathrm{T}\sin\alpha \cdot \frac{BC}{2} =$$

$$= \frac{BC}{2} \cdot (25 - 225 - 50 + 288{,}68 \cdot 0{,}866) = \frac{BC}{2}(275 - 275) = 0$$

$$\sum M_{Z1}(\overline{F}_k) = \mathrm{Y}_B \cdot \frac{AB}{2} - Y_A \cdot \frac{AB}{2} + X_A \cdot \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} \cdot \left(0 - 125 + 72{,}17 \cdot \frac{BC}{AB}\right) =$$

$$= \frac{AB}{2} \cdot \left(-125 + 72{,}17 \cdot tg60°\right) = \frac{AB}{2} \cdot \left(-125 + 125\right) = 0,$$

где $\dfrac{BC}{AB} = tg60° = 1{,}73$

Следовательно, реакции опор найдены верно.

Ответ: $X_A = 72{,}17$ кН; $Y_A = 125$ кН; $Z_A = 225$ кН;

$Y_B = 0$; $Z_B = -25$ кН; $T = 288{,}68$ кН.

Знак минус, полученный для значения силы Z_B указывает, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рисунке 41.

4 Простейшие движения твердого тела

4.1 Основные понятия и определения

4.1.1 Поступательное движение

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во время движения параллельной своему первоначальному направлению.

Траектории точек при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть получены одна из другой путем параллельного смещения. При поступательном движении скорости и ускорения всех точек твердого тела в данный момент геометрически равны. Следовательно, при исследовании поступательного движения твердого тела достаточно определить движение одной какой-либо точки тела.

Таким образом, задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче кинематики точки.

4.1.2 Вращательное движение

Вращательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными.

Эта прямая называется осью вращения тела. При этом движении все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Если провести через ось вращения две полуплоскости: неподвижную $П_1$ и подвижную $П_2$, жестко связанную с телом (рисунок 42), то положение подвижной полуплоскости (а значит, и жестко связанного с ней тела) относительно неподвижной полностью определяется линейным углом φ двугранного угла между полуплоскостями $П_1$ и $П_2$. Этот угол называется *углом поворота*.

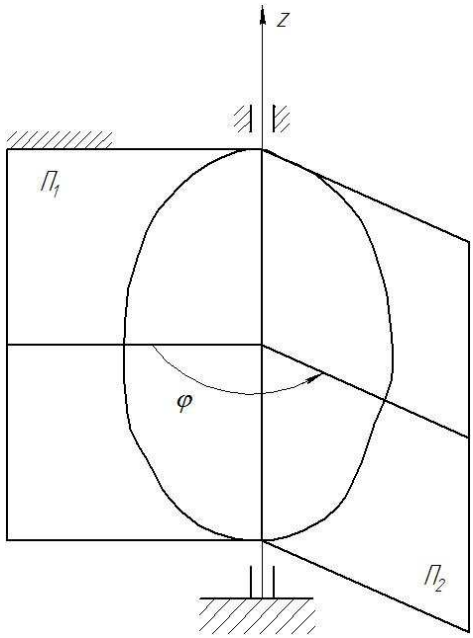


Рисунок 42

Числовые значения угла поворота выражаются в *радианах*.

Угол поворота φ в *радианах*, соответствующий N оборотам,

$$\varphi = 2\pi N.$$

При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени, то есть является функцией времени t:

$$\varphi = f(t) \qquad (53)$$

Уравнение (53) называется *уравнением* или *законом вращательного движения твердого тела* относительно неподвижной оси.

На чертежах угол поворота тела принято обозначать дуговой стрелкой (рисунок 42). При этом за положительное направление отсчета угла φ принимают направление, противоположное направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с положительного направления координатной оси, совмещенной с осью вращения тела.

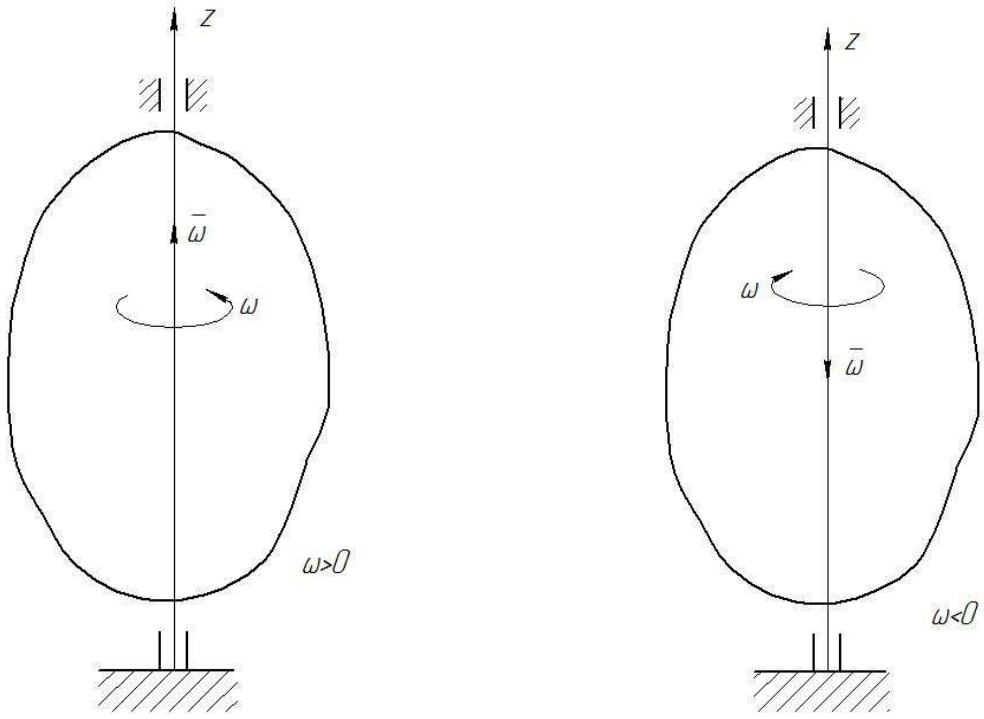
При вращательном движении тела различные его точки движутся по-разному. Однако существуют такие кинематические характеристики, которые являются общими для всех точек тела, то есть для всего тела в целом. Такими

кинематическими характеристиками будут: угол поворота φ, угловая скорость тела ω и угловое ускорение тела ε. Поэтому имеют научный смысл понятия «угловая скорость *тела*» и «угловое ускорение *тела»*, но нельзя говорить об «угловой скорости *точки»* и «угловом ускорении *точки»*.

Угловая скорость тела в данный момент времени численно равна первой производной по времени от угла поворота

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

На чертежах угловую скорость принято обозначать дуговой стрелкой (рисунок 43). Знак ω определяет направление вращения тела: когда вращение происходит против хода часовой стрелки, ω > 0, когда по ходу часовой стрелки, то ω < 0, если смотреть с положительного конца оси вращения.



а) б)

Рисунок 43

Единицей угловой скорости является 1 рад/с (радиан в секунду).

В технике часто при равномерном вращении тела пользуются *числом оборотов в минуту*. Зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту определяется по следующей формуле:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad рад/с,$$

где n – число оборотов в минуту.

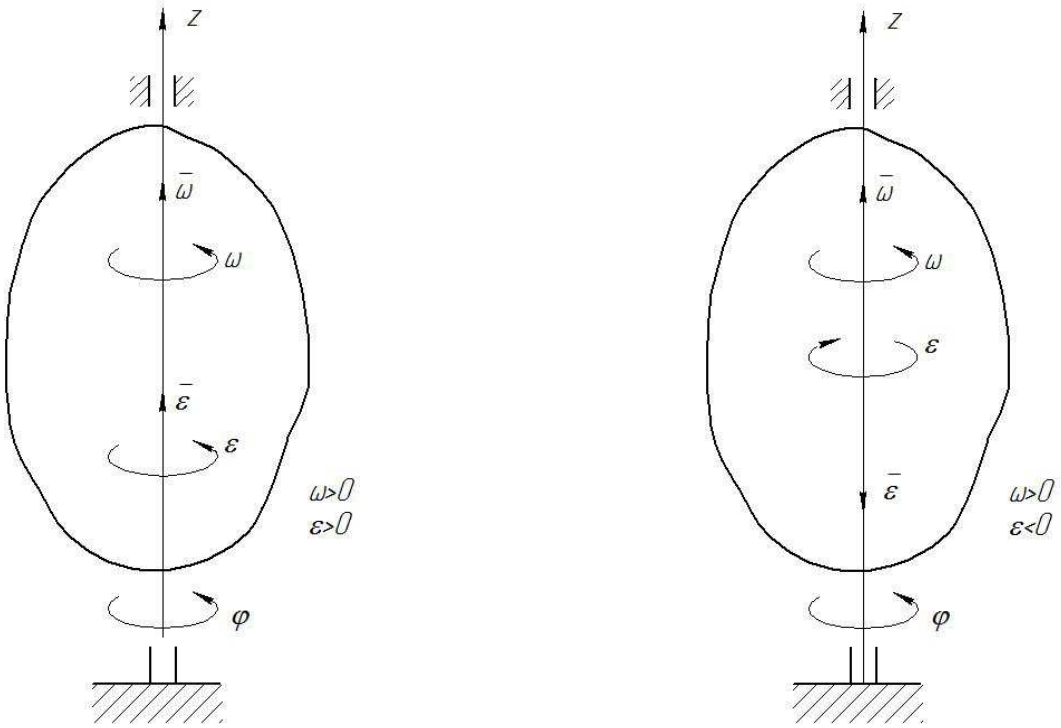
Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, численная величина которого $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 43).

Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Единицей углового ускорения является 1 рад/с^2 (радиан на секунду в квадрате).

На чертежах угловое ускорение принято обозначать дуговой стрелкой, направленной при $\ddot{\varphi} > 0$ так же, как и стрелка, задающая положительное направление отсчета угла φ, и противоположно при $\ddot{\varphi} < 0$ (рисунок 44).



а) б)

Рисунок 44

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется *ускоренным* (это будет, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки) (рисунок 44а). Если модуль угловой скорости со временем убывает, вращение тела называется *замедленным* (это будет, когда величины ω и ε имеют разные знаки) (Рисунок 44б).

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно изобразить в виде вектора $\bar{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\bar{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рисунок 44а), и противоположно $\bar{\omega}$ при замедленном вращении (рисунок 44б).

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются скользящими векторами, расположенными на оси вращения тела и не имеющими на ней конкретной точки приложения.

4.1.3 Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

Линейная скорость точки вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения

$$V = \omega \cdot h .$$

Направлена линейная скорость по касательной к описываемой точкой М окружности в сторону вращения тела (рисунок 45).

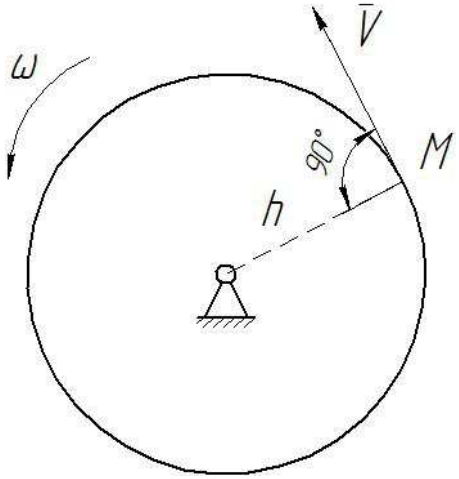


Рисунок 45

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент одно и то же значение, то линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рисунок 46).

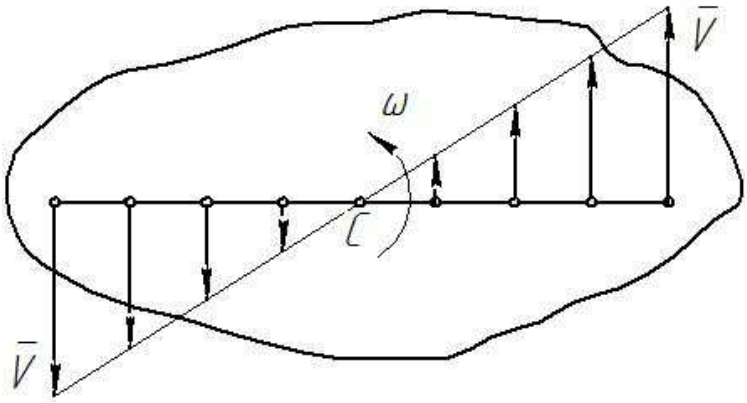


Рисунок 46

Ускорение точки вращающегося тела определяют по его составляющим

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

Здесь $\bar{a}_\tau$ - *касательное ускорение*;

$\bar{a}_n$ - *нормальное ускорение*.

Модуль касательного ускорения:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h.$$

Модуль нормального ускорения

$$a_n = \omega^2 \cdot h.$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории (в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в обратную сторону, если тело вращается замедленно); нормальное ускорение всегда направлено по радиусу h к оси вращения (рисунок 47).

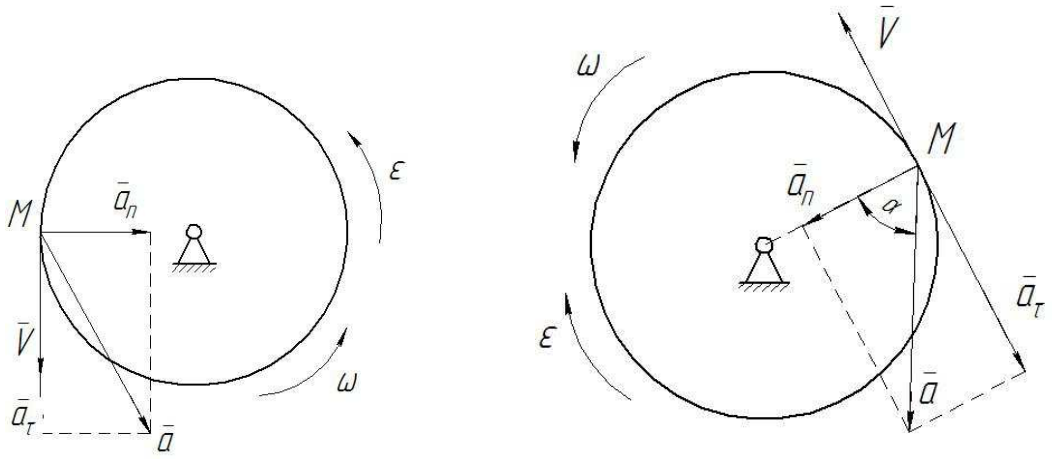


Рисунок 47

Полное ускорение точки М будет равно

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

или

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Так как ε и ω имеют в данный момент для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рисунок 48).

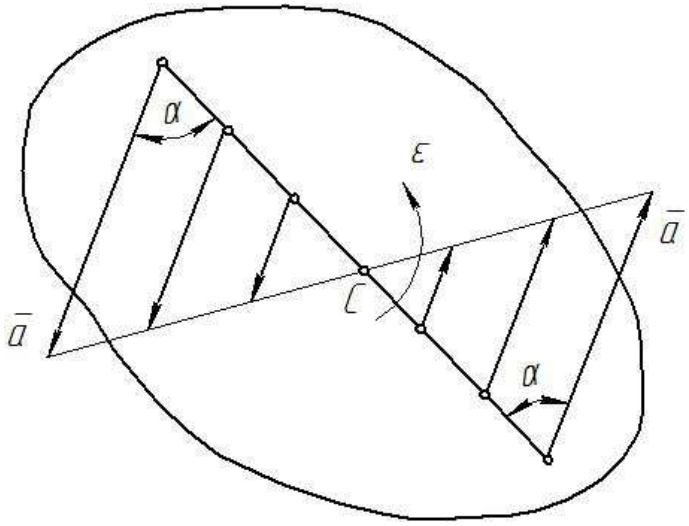


Рисунок 48

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом α (рисунки 47, 48), который вычисляется по формуле

$$tg\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

4.1.4 Векторные формулы для определения скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Формула

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

называется *формулой Эйлера*: вектор скорости любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, взятой на оси вращения тела. (рисунок 49).

Формула Эйлера позволяет определить скорость любой точки вращающегося тела.

Дифференцируя обе ее части по времени, найдем ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рисунок 50):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

Первое слагаемое является касательным ускорением:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r},$$

а второе слагаемое — это нормальное ускорение:

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Полное ускорение складывается из этих двух ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

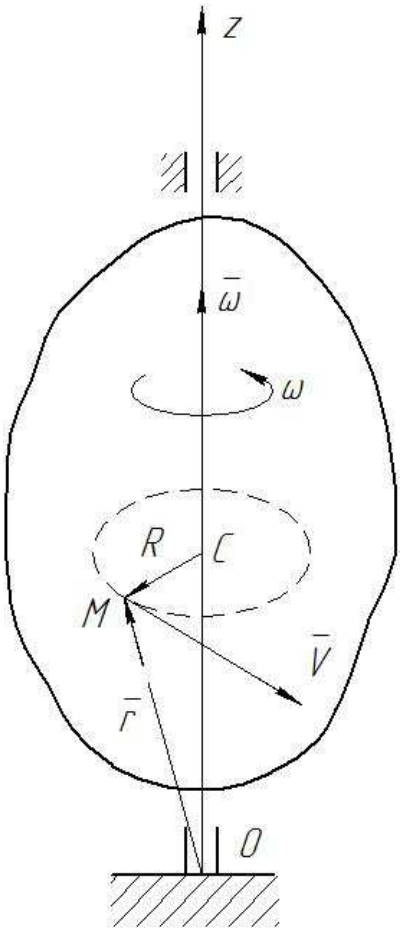


Рисунок 49

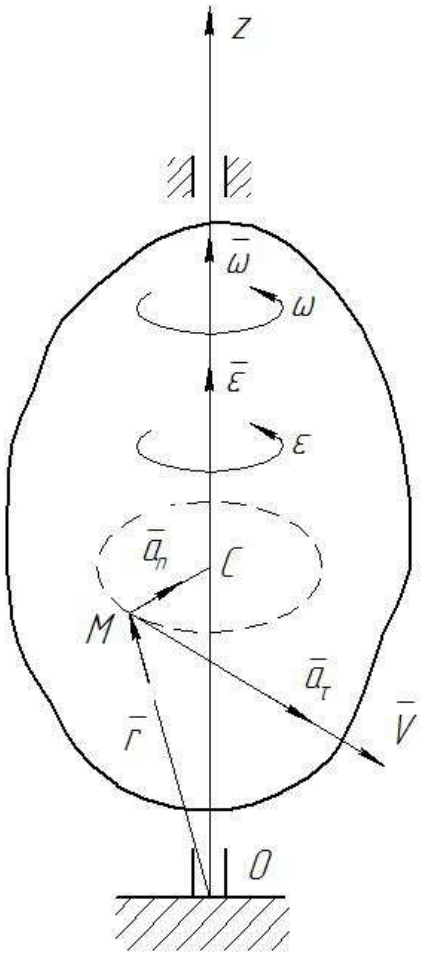


Рисунок 50

4.1.5 Передаточные механизмы

Передаточные механизмы предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого *ведущим*, к другому, называемому *ведомым*. Если оси ведущего и ведомого валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать с помощью фрикционной или зубчатой передачи (рисунки 51-56).

Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы сцепления на поверхности соприкасающихся колес, в зубчатой передаче - от зацепления зубьев.

Вращательная скорость **V** в точке соприкосновения колес относится к точкам обоих колес, т. е. ее модуль определяется как

$$V = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2, \qquad (54)$$

Откуда

$$\omega_1 / \omega_2 = r_2 / r_1$$

Таким образом, угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес.

При внешнем зацеплении (рисунок 51) направление вращения ведущего и ведомого колес противоположное, а при внутреннем (рисунок 52) - одинаковое.

Кроме фрикционной и зубчатой передач существует ременная передача - передача на расстоянии с помощью гибкой связи (ремня, троса, цепи) (рисунок 53).

Так как скорости всех точек ремня одинаковы, и ремень не скользит по поверхности шкива, то к ременной передаче относится то же соотношение (54).

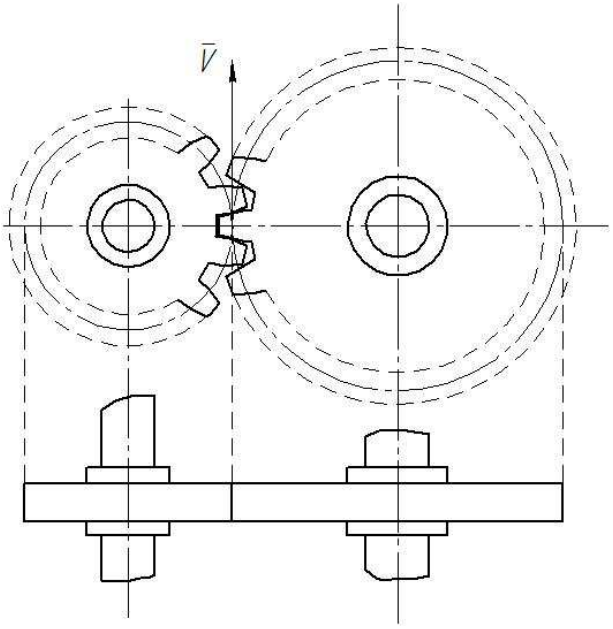


Рисунок 51

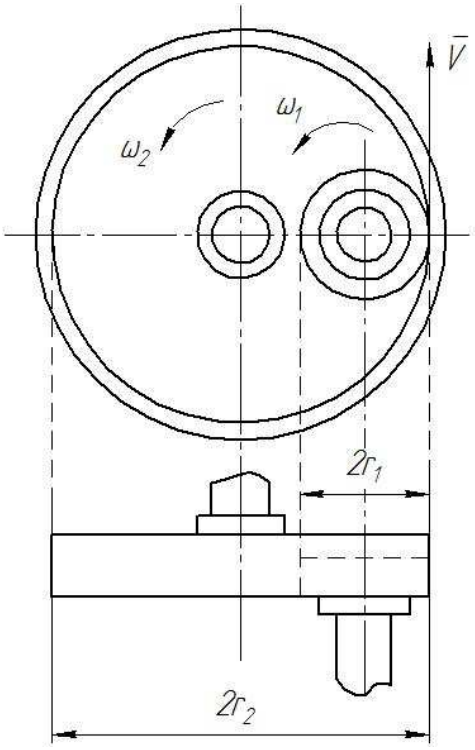


Рисунок 52

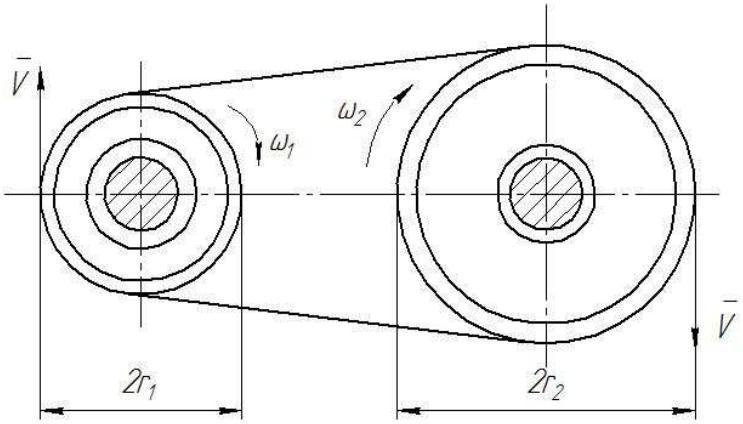


Рисунок 53

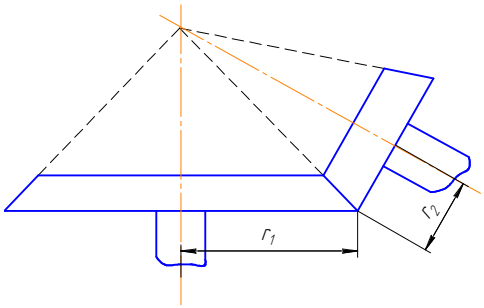


Рисунок 54

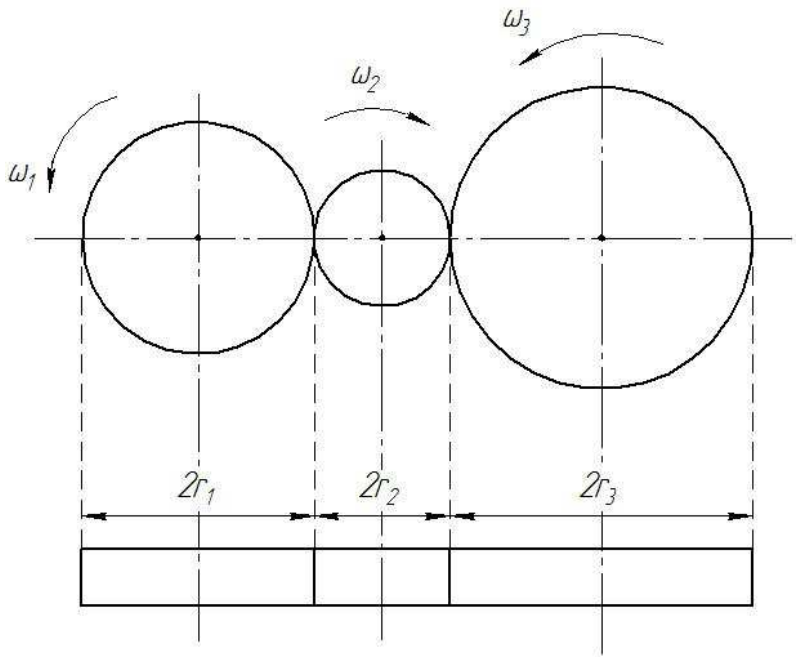


Рисунок 55

Применяются также серии колес с неподвижными осями вращения в виде последовательного ряда с паразитными колесами (рисунок 55) и последовательного ряда с кратным зацеплением (рисунок 56), называемые *рядовыми соединениями колес*.

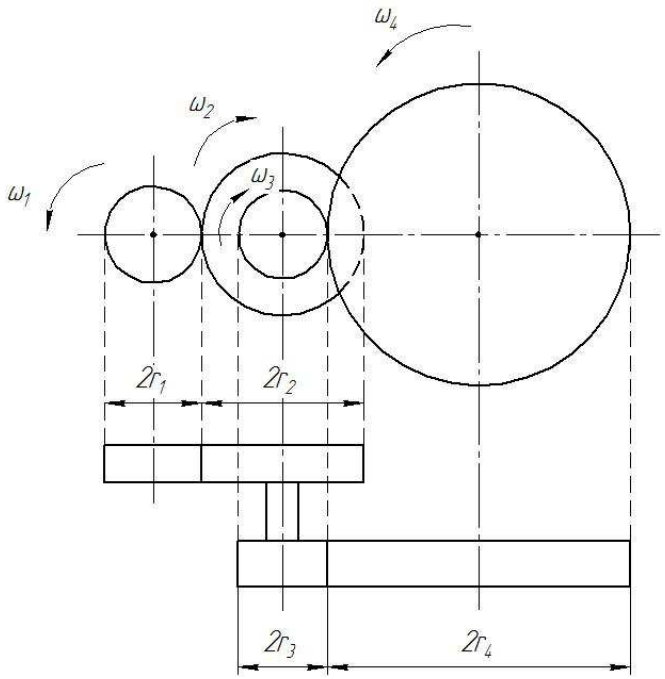


Рисунок 56

В рассмотренных передачах при равномерном вращении ведущего вала ведомый вал вращается тоже равномерно.

4.2 Вопросы для самоконтроля

Какое движение твердого тела называют поступательным?

Могут ли траектории точек тела при его поступательном движении быть окружностями? Привести примеры.

Перечислить основные свойства поступательного движения твердого тела.

Какими уравнениями задается поступательное движение тела?

Какое движение твердого тела называют вращательным вокруг неподвижной оси? Каковы траектории точек тела при этом движении?

Каким уравнением задается вращение тела вокруг неподвижной оси?

Какие зависимости существуют между углом поворота, угловой скоростью и угловым ускорением тела?

Как направлен вектор угловой скорости?

Как определяется скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

Как определяется ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Как направлены и чему равны его составляющие?

Формулы Эйлера для скорости и ускорения точки.

4.3 Лабораторная работа №4

Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

4.3.1 Содержание задания

Движение тела 1 описывается уравнением $x = c_2 t^2 + c_1 t + c_o$,

где c_2, c_1 и c_o – некоторые постоянные коэффициенты;

t – время, с.

В начальный момент времени (при $t_o = 0$) координата тела 1 соответствовала значению x_o, а его скорость $-v_o$. В момент времени t_2 координата тела соответствует значению x_2.

Для заданного механизма (рисунок 57, таблица 9) определить:

1) уравнение движения тела 1;

2) скорость и ускорение тела 1;

3) скорость и ускорение точки М в момент времени t_1;

4) на схеме механизма вычертить скорость и ускорения (касательное, нормальное и полное) точки М без учета масштаба.

4.3.2 Рекомендации к решению задач

При решении задач на преобразование простейших движений рекомендуется следующая последовательность:

1) исходя из условий задачи, записать уравнения движения того твердого тела, движение которого известно;

2) пользуясь формулами кинематики точки и кинематики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, найти кинематические характеристики другого твердого тела, которому передается движение;

3) найти скорости и ускорения точек этого твердого тела.

Таблица 9 – Исходные данные

Номер строки	Радиусы колес, см				Координаты и скорость тела			Расчетные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_o, см	v_o,см/с	x_2, см	t_1	t_2
1	80	65	60	45	5	10	41	1	2
2	100	60	75	65	8	6	40	2	4
3	60	45	60	50	4	4	172	3	4
4	80	70	45	30	3	15	102	2	3
5	100	60	30	25	7	16	215	2	4
6	45	35	105	90	8	5	124	3	4
7	35	10	25	10	5	2	111	2	3
8	40	30	20	15	10	7	48	1	2
9	20	10	30	10	6	5	356	2	5
0	60	45	40	30	2	12	173	2	3

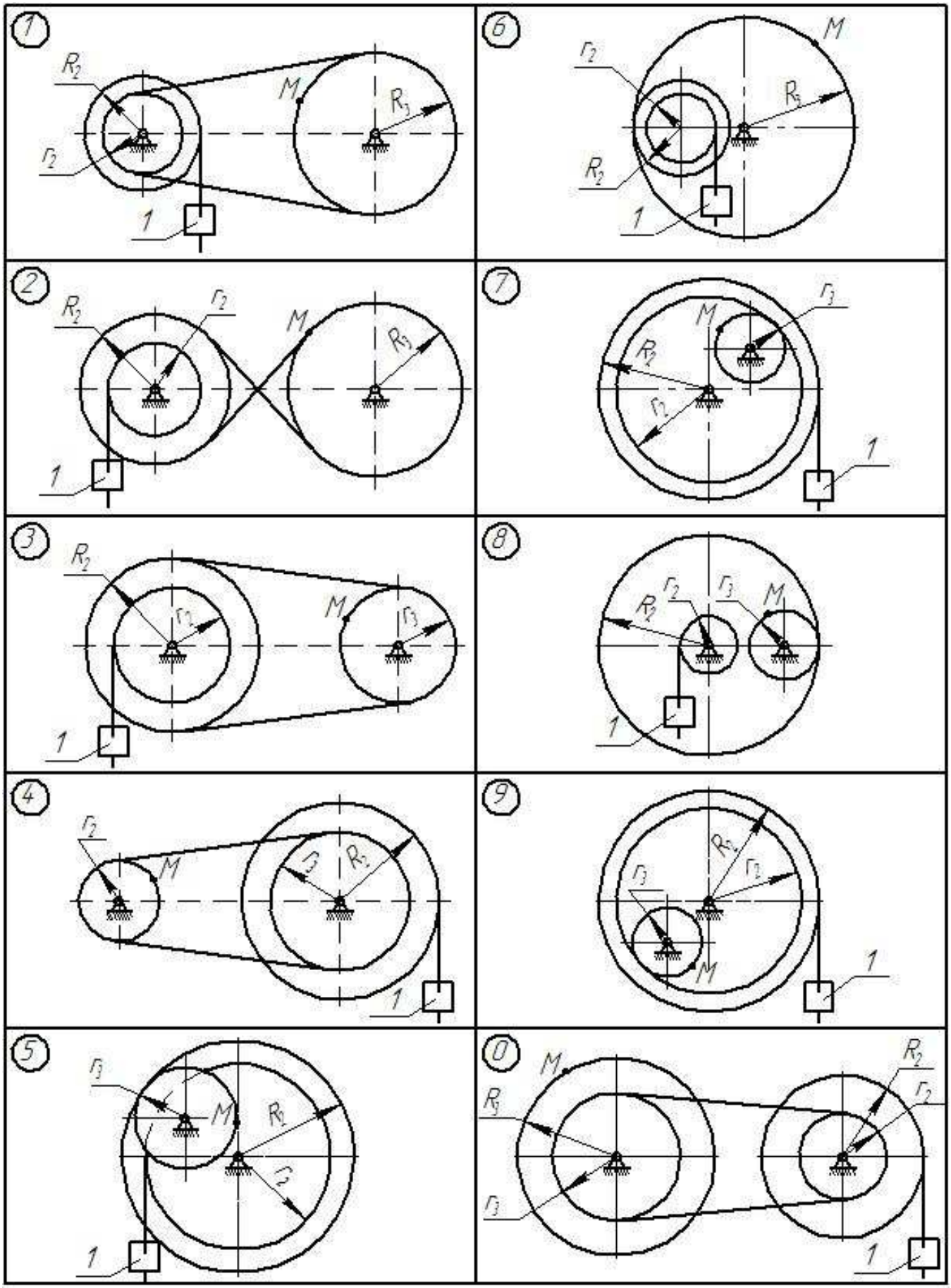

1
R2
r2
M
R3
1
6
r2
M
R3
R2
1
2
R2
r2
M
R3
1
7
r3
M
R2
r2
1
3
R2
r2
M
r3
1
8
r2
r3
M
R2
1
4
r2
M
r3
R3
1
9
R2
r2
r3
M
1
5
r3
M
R2
r2
1
0
M
R2
R3
r2
r3
1

Рисунок 57

4.4 Пример выполнения лабораторной работы №4

Движение тела 1 описывается уравнением $x = c_2 t^2 + c_1 t + c_o$,

где c_2, c_1 и c_o – некоторые постоянные коэффициенты;

t – время, с.

В начальный момент времени (при $t_o = 0$) координата тела 1 соответствовала значению x_o, а его скорость $-v_o$. В момент времени t_2 координата тела соответствует значению x_2.

Для заданного механизма (рисунок 58) требуется определить:

1) уравнение движения тела 1;

2) скорость и ускорение тела 1;

3) скорость и ускорение точки М в момент времени t_1;

4) на схеме механизма вычертить скорость и ускорение (касательное, нормальное и полное) точки М без учета масштаба.

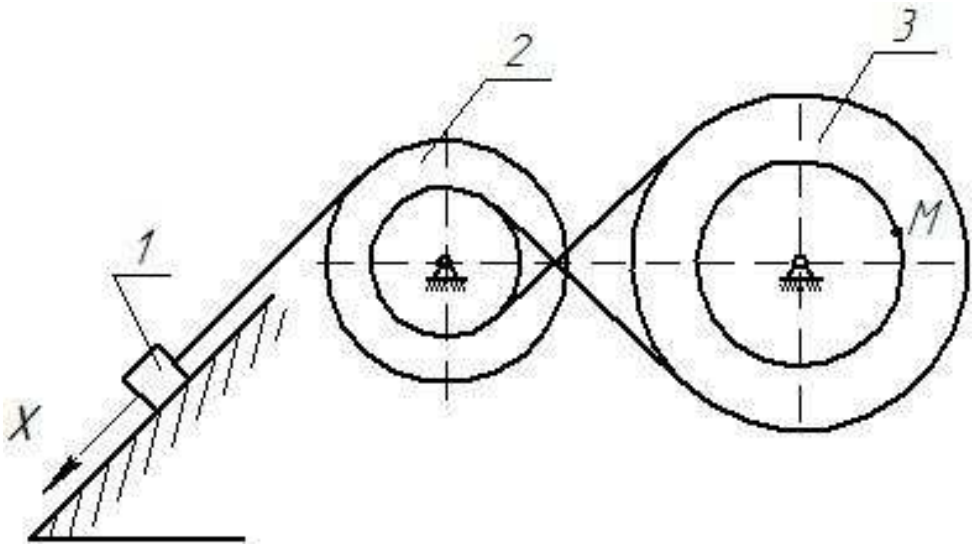


Рисунок 58

Таблица 10 - Исходные параметры

x_o, см	v_o, см/с	x_2, см	t_1, с	t_2, с	r_2, см	R_2, см	r_3, см	R_3, см
10	5	158	2	4	50	80	70	100

Решение:

Движение тела 1 описывается уравнением

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_o .$$

1. Определение уравнения движения тела.

Определяем коэффициенты c_o, c_1, c_2.

По условию при t_o=0 перемещение

$$x_o = 10 \text{ см},$$

следовательно,

$$10 = c_2 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_0 \quad \text{и} \quad c_0 = 10.$$

Скорость тела 1:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2c_2 t + c_1 .$$

При $t_o = 0$ скорость тела

$$v_o = 5 \text{ см/с},$$

значит,

$$5 = 2 \cdot c_2 \cdot 0 + c_1 \quad \text{и} \quad c_1 = 5 .$$

При $t_2 = 4$ с перемещение тела соответствовало $x_2 = 158$ см:

$$x_2 = 158 = c_2 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 10$$

$$158 = c_2 4^2 + 5 \cdot 4 + 10$$

$$158 = 16c_2 + 30,$$

отсюда

$$c_2 = \frac{158 - 30}{16} = 8.$$

Таким образом, уравнение движения тела 1 принимает вид

$$x = 8t^2 + 5t + 10.$$

2. Вычисляем скорость и ускорение тела 1.

Скорость тела 1

$$v = \frac{dx}{dt} = 16t + 5, \text{ см/с}.$$

Ускорение тела 1

$$a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} = 16 \text{ см/с}^2; \qquad a_1 = \text{const}.$$

3. Определение скорости и ускорений точки М при $t_1 = 2$ с.

В соответствии с заданной схемой механизма, уравнения, связывающие скорость тела 1 (v_1) и угловые скорости колес 2 и 3 (ω_2 и ω_3) имеют вид:

$$v_1 = R_2 \cdot \omega_2 \qquad \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}.$$

Так как

$$v_B = v_D,$$

то

$$r_2 \cdot \omega_2 = R_3 \cdot \omega_3.$$

Следовательно, угловая скорость колеса 3

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{V_1 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3}$$

или, с учетом

$$v_1 = 16t + 5,$$

получаем

$$\omega_3 = \frac{(16t + 5) \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3} = \frac{(16t + 5) \cdot 50}{80 \cdot 100} = 0{,}1t + 0{,}031.$$

В момент времени $t_1 = 2$с угловая скорость

$$\omega_3 = 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}31 = 0{,}231 \text{ рад/с}.$$

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 0{,}1 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки М ($v_м$), ее касательное ($a_м^\tau$), нормальное ($a_м^n$) и полное ($a_м$) ускорения вычисляем, соответственно, из соотношений

$$v_м = r_3 \cdot \omega_3 = 70 \cdot 0{,}231 = 16{,}17 \quad см/с;$$

$$a_м^\tau = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 70 \cdot 0{,}1 = 7 \quad см/с^2;$$

$$a_м^n = r_3 \cdot \omega_3^2 = 70 \cdot 0{,}231^2 = 3{,}735 \quad смм/^2;$$

$$a_м = \sqrt{(a_м^\tau)^2 + (a_м^n)^2} = \sqrt{7^2 + 3{,}735^2} = 7{,}934 \quad см/с^2.$$

4. На схеме вычерчиваем скорость и ускорения точки М без учета масштаба (рисунок 59).

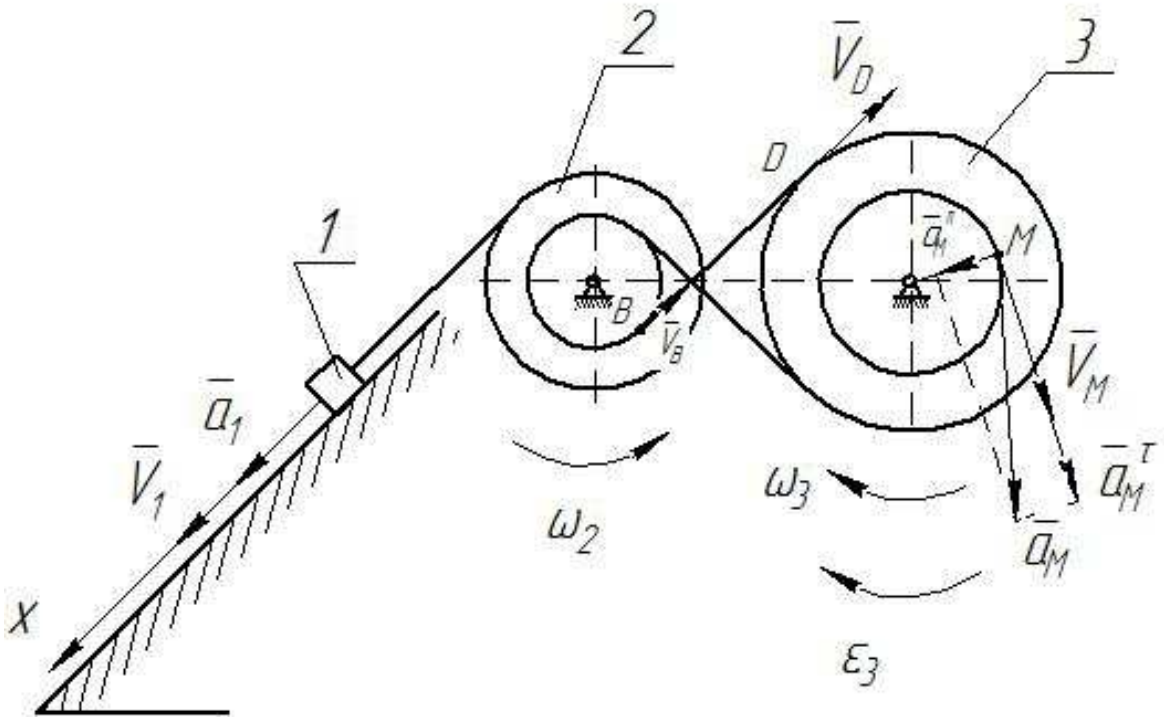


Рисунок 59

Результаты вычислений сводим в таблицу 11:

Таблица 11 – Результаты вычислений

Коэффициенты			Тело 1		Колесо 3		Точка М			
c_2	c_1	c_0	v_1, см/с	a_1, $см/с^2$	ω_3, рад/с	ε_3, $рад/с^2$	$v_м$, $см/с$	$a_м^\tau$, $см/с^2$	$a_м^n$, $см/с^2$	$a_м$, $см/с^2$
8	5	10	16t+5	16	0,231	0,1	16,17	7	3,735	7,934

5 Плоскопараллельное движение твердого тела

5.1 Основные понятия и определения

5.1.1 Уравнения движения. Разложение движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости П (рисунок 60).

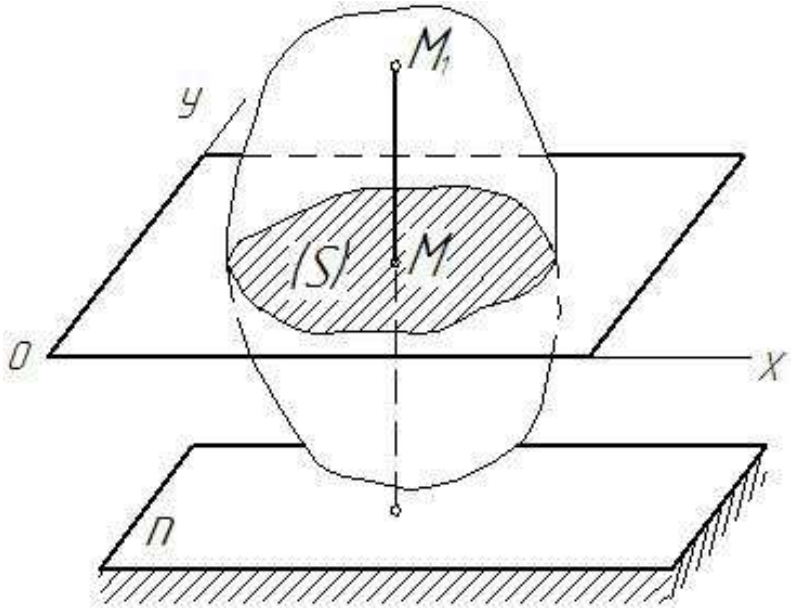


Рисунок 60

Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например, катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-шатунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела. Примером плоского движения тела может служить качение цилиндра по горизонтальной плоскости, при котором его основание остается все время параллельным плоскости yz (рисунок 61).

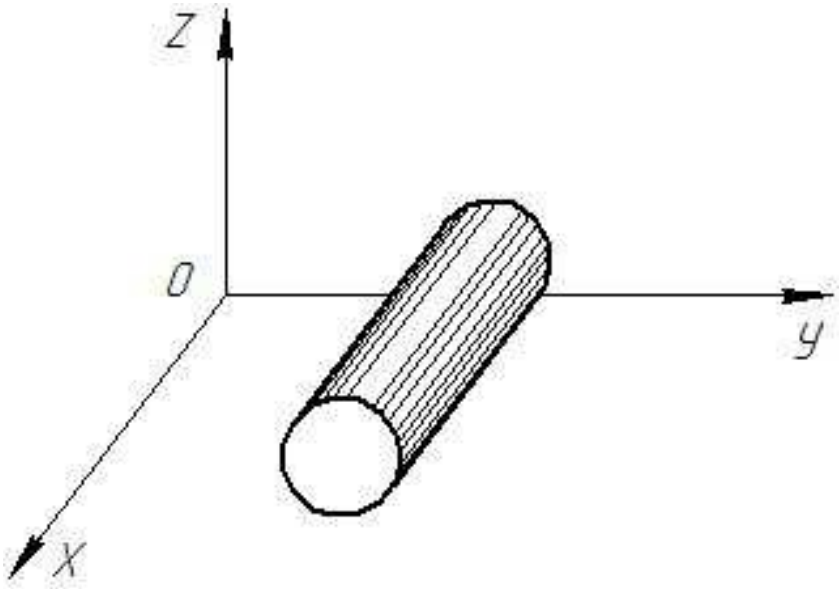


Рисунок 61

При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой MM_1, перпендикулярной к сечению S, т. е. к плоскости П (рисунок 60), движутся тождественно. Поэтому *для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение S тела в плоскости Oxy* (рисунок 62).

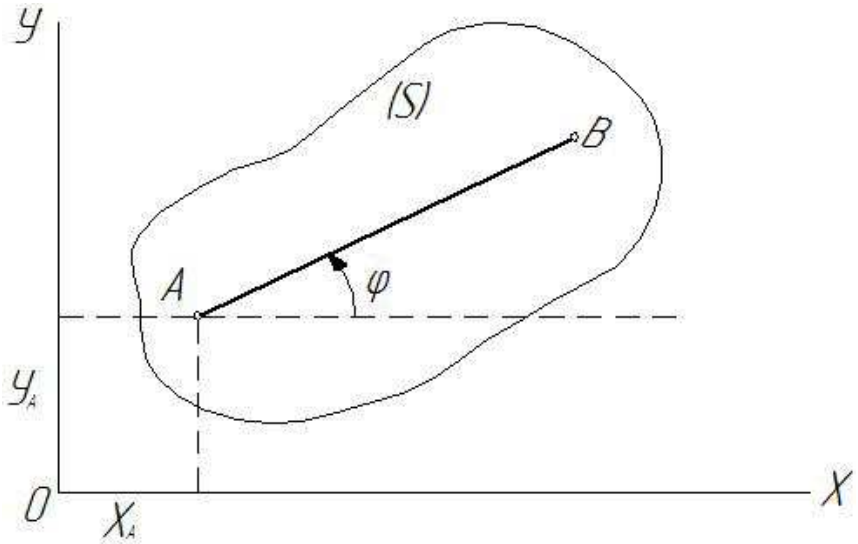


Рисунок 62

Положение сечения S в плоскости Oxy определяется, очевидно, положением проведенного в этом сечении отрезка AB (рисунок 62). В свою очередь, положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A, y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x.

Точку А, выбранную для определения положения сечения S, называют *полюсом*.

При движении тела величины x_A, y_A, φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения тела, т. е. знать его положение в пространстве в любой момент времени, надо знать зависимости:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) \tag{55}$$

Уравнения (55), определяющие закон происходящего движения, называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.*

Плоское движение слагается из поступательного и вращательного.

Из рисунка 63 видно, что сечение S, а с ним и все тело, переходит из положения I в положение II следующим образом: сначала тело перемещается поступательно, так, что полюс А, двигаясь вдоль своей траектории, приходит в положение A_2, (при этом отрезок A_1B_1 займет положение $A_2B'_1$), а затем поворачивается вокруг полюса A_2, на угол $\Delta\varphi_1$. Таким же путем можно переместить тело из положения II в следующее его положение и т. д. Следовательно, *плоскопараллельное движение твердого тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения вместе с точкой, выбранной за полюс, и вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной плоскости движения.*

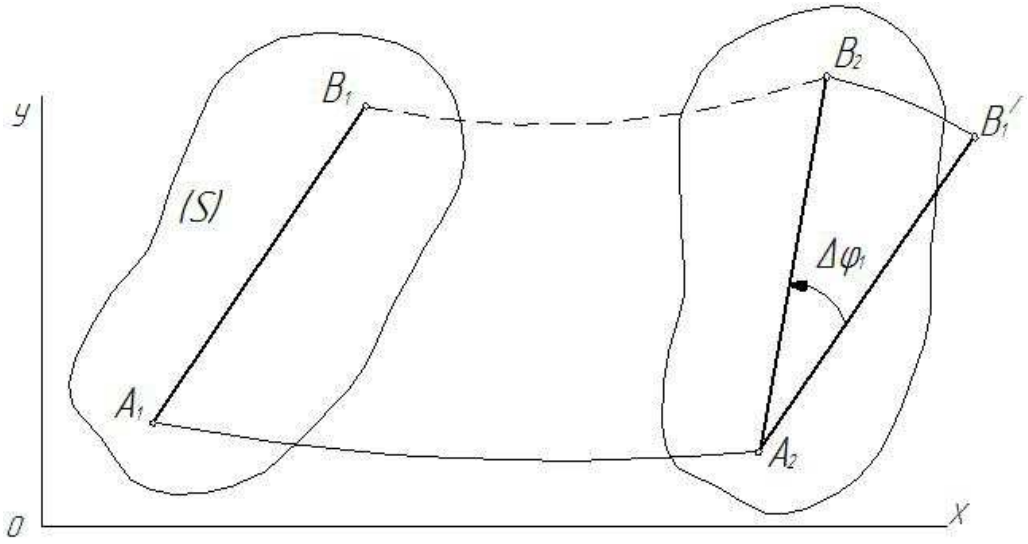


Рисунок 63

Очевидно, что характеристики поступательной части плоского движения, такие, как перемещение, скорость и ускорение полюса будут зависеть от того, какая точка выбрана за полюс, ибо в противном случае при равенстве в каждый момент времени перемещений, скоростей и ускорений двух точек плоской фигуры, последняя совершала бы поступательное движение. Характеристики вращательной части плоского движения, т. е. угловая скорость ω и угловое ускорение ε, остаются неизменными, не зависящими от выбора полюса.

5.1.2 Определение скоростей точек тела

5.1.2.1 Теорема о сложении скоростей точек плоской фигуры

Т е о р е м а .

Скорость любой точки B плоской фигуры в каждый данный момент геометрически складывается из скорости точки A плоской фигуры, принятой за полюс, и скорости данной точки B в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг этого полюса (рисунок 64):

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} \qquad (56),$$

где $\overline{V}_B$ - искомая скорость точки B плоской фигуры;

$\overline{V}_A$ - скорость полюса A (за полюс принимается та точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент известна или может быть легко определена);

$\overline{V}_{BA}$ - скорость точки B во вращении плоской фигуры вокруг полюса A.

$$V_{BA} = \omega \cdot BA, \qquad \overline{V}_{BA} \perp BA \qquad (57)$$

Модуль и направление скорости $\overline{V}_B$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рисунок 64).

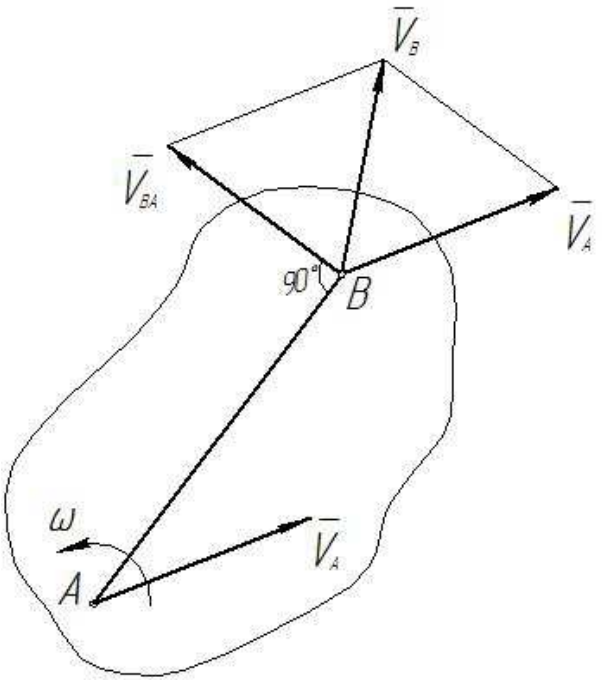


Рисунок 64

5.1.2.2 Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Т е о р е м а .

Проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой (рисунок 65):

$$пр._{AB}\,\bar{V}_B = пр._{AB}\,\bar{V}_A$$

или

$$V_B \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha \qquad (58)$$

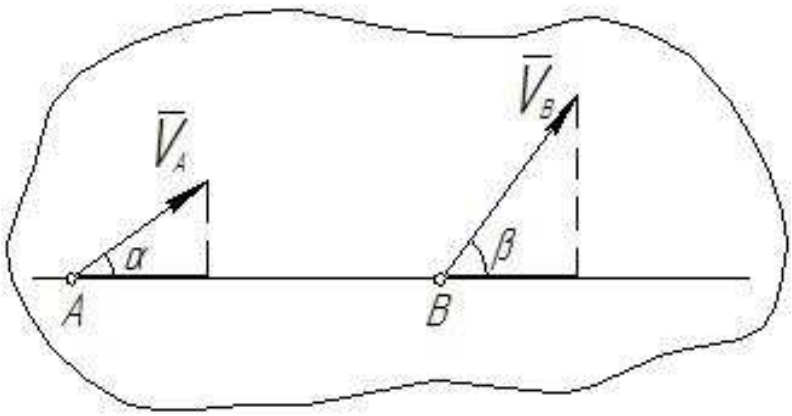


Рисунок 65

5.1.2.3 Мгновенный центр скоростей

Точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей.*

При движении плоской фигуры положение её мгновенного центра скоростей непрерывно изменяется. Каждому моменту времени (мгновению) соответствует свое положение мгновенного центра скоростей.

Зная положение мгновенного центра скоростей, можно найти скорости всех точек плоской фигуры, если известна скорость какой-либо ее точки.

Скорость любой точки плоской фигуры численно равна произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры (рисунок 66):

$$\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot AP, \qquad \bar{V}_A \perp AP; \\ V_B &= \omega \cdot BP, \qquad \bar{V}_B \perp BP; \\ V_M &= \omega \cdot MP, \qquad \bar{V}_M \perp MP \ \ и\ т.д. \end{aligned} \tag{59}$$

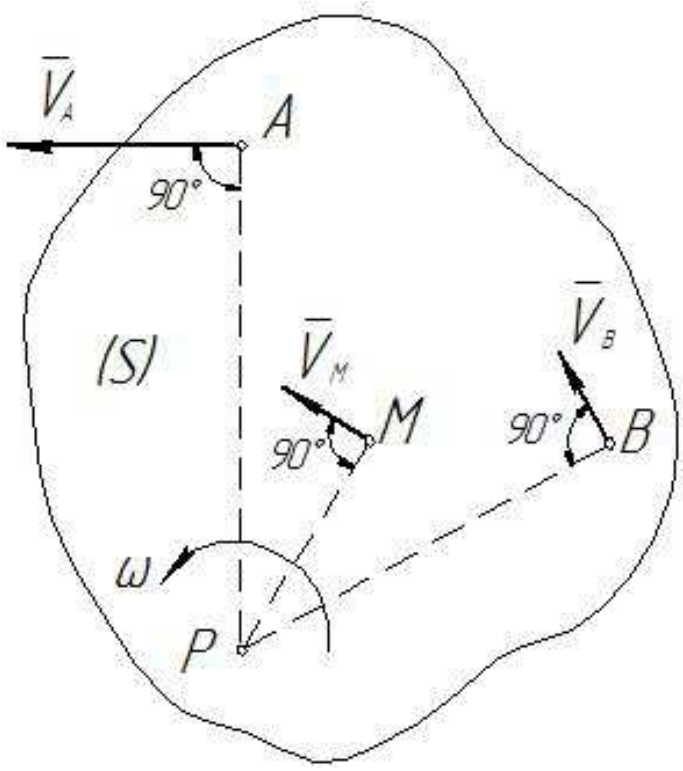


Рисунок 66

Из выражений (59) следует, что

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_M}{MP}, \qquad (60)$$

т. е. угловая скорость плоской фигуры равна отношению скорости какой-либо ее точки к длине отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, а модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны длинам отрезков, соединяющих эти точки с мгновенным центром скоростей.

Таким образом, в каждый данный момент скорости точек плоской фигуры расположены так, как если бы плоская фигура вращалась вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей плоской фигуры и перпендикулярной к ее плоскости (рисунок 66).

В реальных механизмах при произвольных положениях звеньев определение расстояний от точек до мгновенного центра скоростей приводит к громоздким вычислениям. Поэтому в практических расчетах эти расстояния обычно определяют графически по чертежу механизма, выполненному в масштабе.

Мгновенный центр скоростей, очевидно, может лежать вне плоской фигуры. Однако и в этом случае считается, что он принадлежит фигуре: с последней мысленно связывают нематериальную плоскость и считают размеры плоской фигуры неограниченными.

Частные случаи определения положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры представлены на рисунках 67, 68.

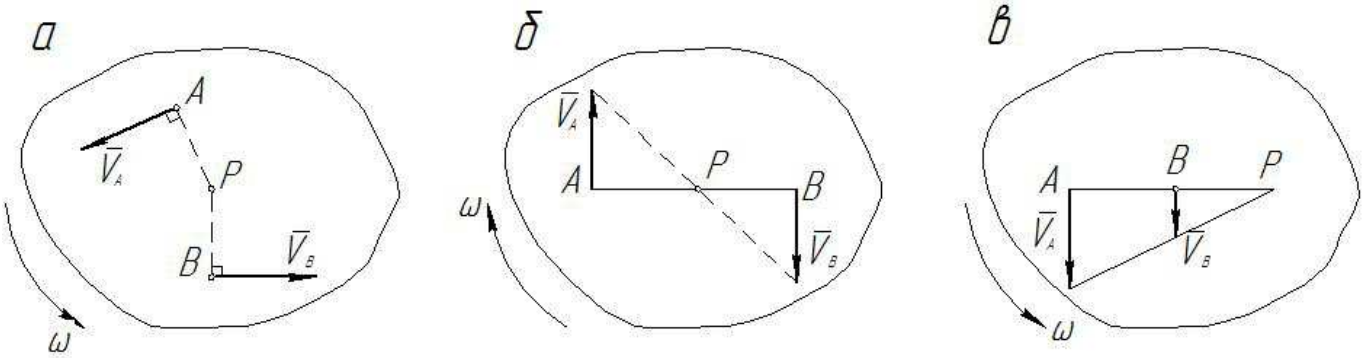


Рисунок 67

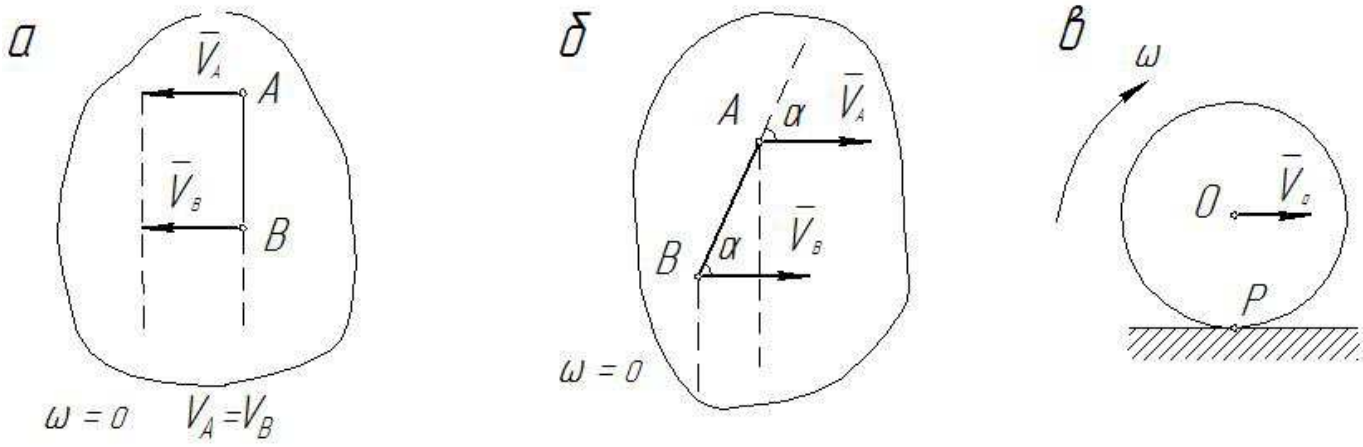


Рисунок 68

В случае, если скорости $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$ двух точек А и В параллельны друг другу (рисунки 68а и 68б), мгновенный центр скоростей находится на бесконечно большом расстоянии, т.е. АР = ВР = ∞. Угловая скорость фигуры в этот момент времени равна нулю, а скорости всех точек фигуры равны по модулю и одинаковы по направлению.

На рисунке 69 показано нахождение мгновенного центра скоростей и распределение скоростей точек для различных положений кривошипно-ползунного механизма.

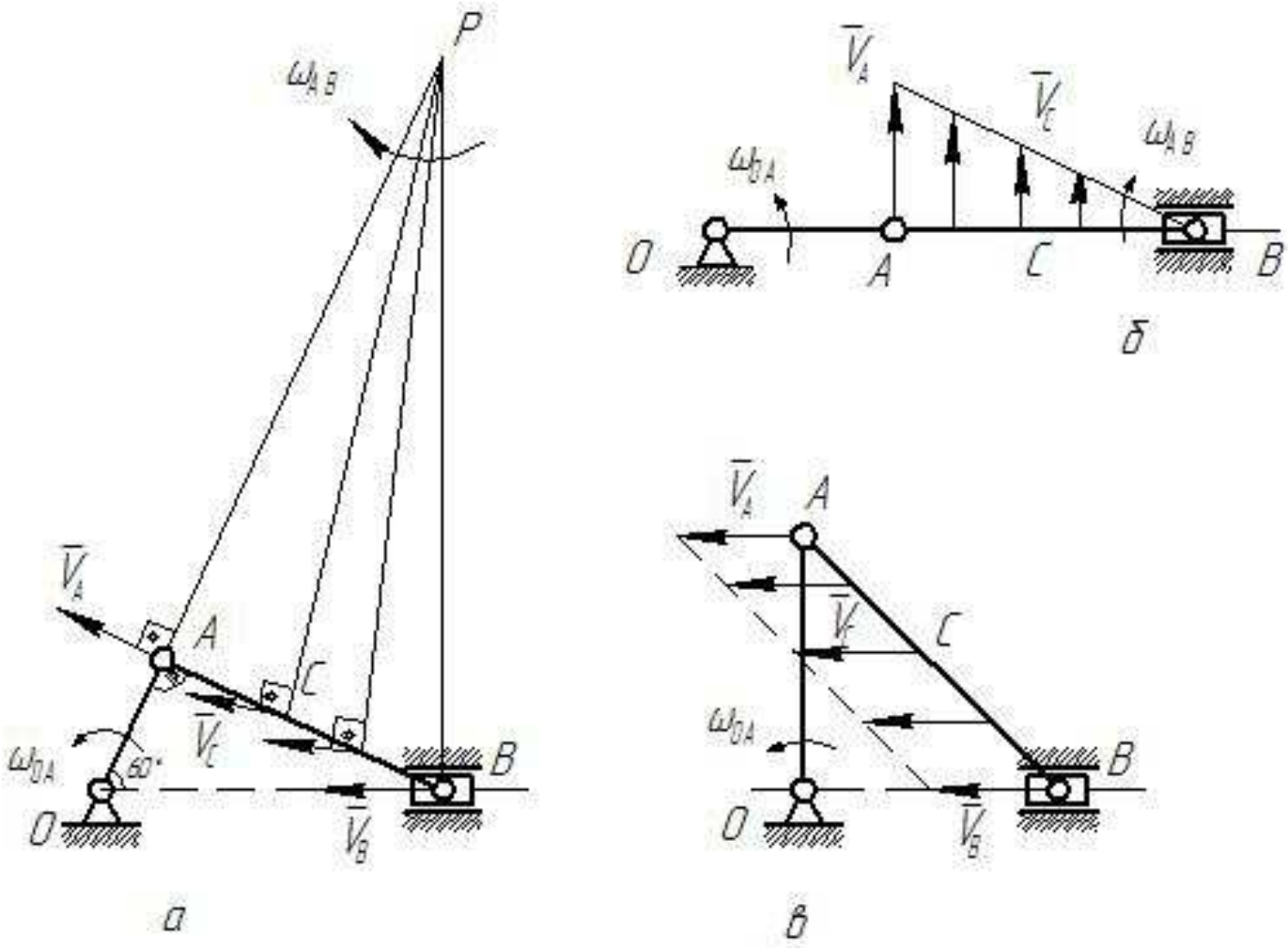


Рисунок 69

5.1.3 Определение ускорений точек тела

Теорема.

Ускорение любой точки В плоской фигуры в каждый данный момент геометрически складывается из ускорения точки А плоской фигуры, принятой за полюс, и ускорения данной точки В в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг этого полюса

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} \qquad (61),$$

где $\overline{a}_B$ - искомое ускорение точки В плоской фигуры;

$\bar{a}_A$ - ускорение полюса А (за полюс принимается та точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент известно или может быть легко определено);

$\bar{a}_{BA}$ - ускорение точки В во вращении плоской фигуры вокруг полюса А.

Ускорение $\bar{a}_{BA}$ раскладывается на нормальную и касательную составляющие

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA}.$$

Тогда теорема (61) запишется в виде

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^\tau_{BA} \qquad (62),$$

где модули векторов $\bar{a}^n_{BA}$ и $\bar{a}^\tau_{BA}$ находятся по формулам:

$$a^n_{BA} = \omega^2 \cdot BA \qquad (63)$$

$$a^\tau_{BA} = \varepsilon \cdot BA \qquad (64)$$

Вектор $\bar{a}^n_{BA}$ всегда направлен от точки В к полюсу А, вектор $\bar{a}^\tau_{BA}$ направлен перпендикулярно к ВА соответственно направлению углового ускорения ε тела (рисунок 70).

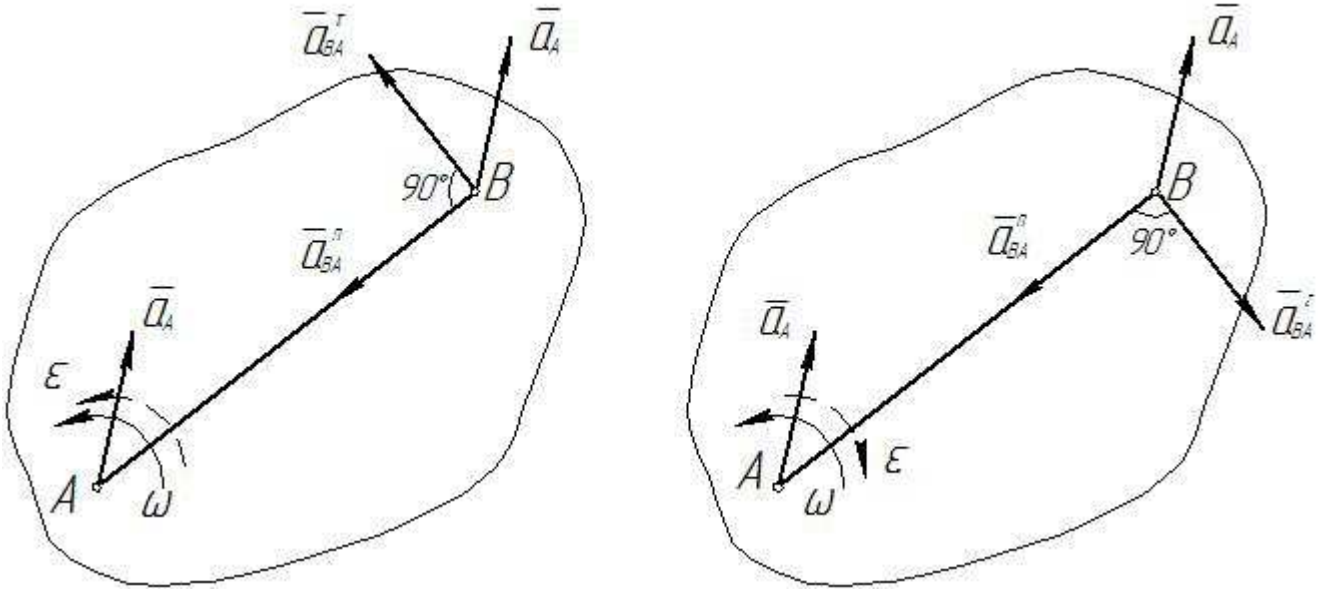


Рисунок 70

5.2 Вопросы для самоконтроля

Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?

Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?

Зависит ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее вращение от выбора полюса?

Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость?

Как связать между собой скорость произвольной точки плоской фигуры и скорость точки, принятой за полюс?

Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как он определяется в различных случаях?

Чему равна скорость любой точки плоской фигуры, если известно положение мгновенного центра скоростей?

Как формулируется теорема о сложении скоростей точек плоской фигуры?

Как формулируется теорема о сложении ускорений точек плоской фигуры?

5.3 Лабораторная работа №5

Кинематический анализ плоского механизма

5.3.1 Содержание задания

Плоский механизм состоит из стержней OA, AB и ползуна B (схемы 0-7; рисунок 71) или стержней O_1A, AB и O_2B (схемы 8, 9; рисунок 71), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O, O_1, O_2 шарнирами. Длины стержней равны OA=0,1 м; O_2B=0,235 м. Положение механизма определяется углом φ, значения которого указаны в таблице 12. Значения других заданных величин указаны в таблице 13 и на схемах (рисунок 71).

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Таблица 12 – Исходные данные (угол φ)

№ условий	Номер схемы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	30°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
1	60°	30°	30°	45°	30°	60°	30°	30°	60°	30°
2	90°	60°	45°	60°	45°	90°	60°	60°	90°	60°
3	120°	90°	90°	90°	90°	120°	90°	90°	120°	90°
4	150°	120°	135°	120°	120°	150°	120°	120°	150°	150°
5	180°	150°	180°	135°	150°	180°	180°	180°	180°	180°
6	210°	210°	210°	180°	210°	210°	210°	210°	210°	210°
7	240°	240°	240°	225°	270°	240°	240°	240°	240°	240°
8	300°	300°	300°	270°	300°	270°	270°	270°	300°	270°
9	330°	330°	330°	300°	330°	300°	300°	330°	330°	330°

Таблица 13 – Исходные данные

№ услов.	AC	Угловая скорость ω_{OA}, рад/с	Угловое ускорение ε_{OA}, рад/с^2
0	$0{,}5 \cdot AB$	2	3
1	$0{,}3 \cdot AB$	3	2
2	$0{,}4 \cdot AB$	1	2
3	$0{,}5 \cdot AB$	4	3
4	$0{,}3 \cdot AB$	5	2
5	$0{,}4 \cdot AB$	2	3
6	$0{,}5 \cdot AB$	3	2
7	$0{,}3 \cdot AB$	1	2
8	$0{,}4 \cdot AB$	4	2
9	$0{,}25 \cdot AB$	5	3

Указания. Схему механизма построить в масштабе. Построение начинать со звена, положение которого определяется углом φ. Заданные угловую скорость ω_{OA} и угловое ускорение ε_{OA} считать направленными против хода часовой стрелки. Необходимые при решении задачи расстояния и углы обозначать на чертеже и измерять с учетом масштаба (или вычислять аналитически).

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$, где А – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой определяется по условиям задачи (если точка А движется по окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$); В – точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить.

Случай, когда точка В движется по дуге окружности рассмотрен в примере.

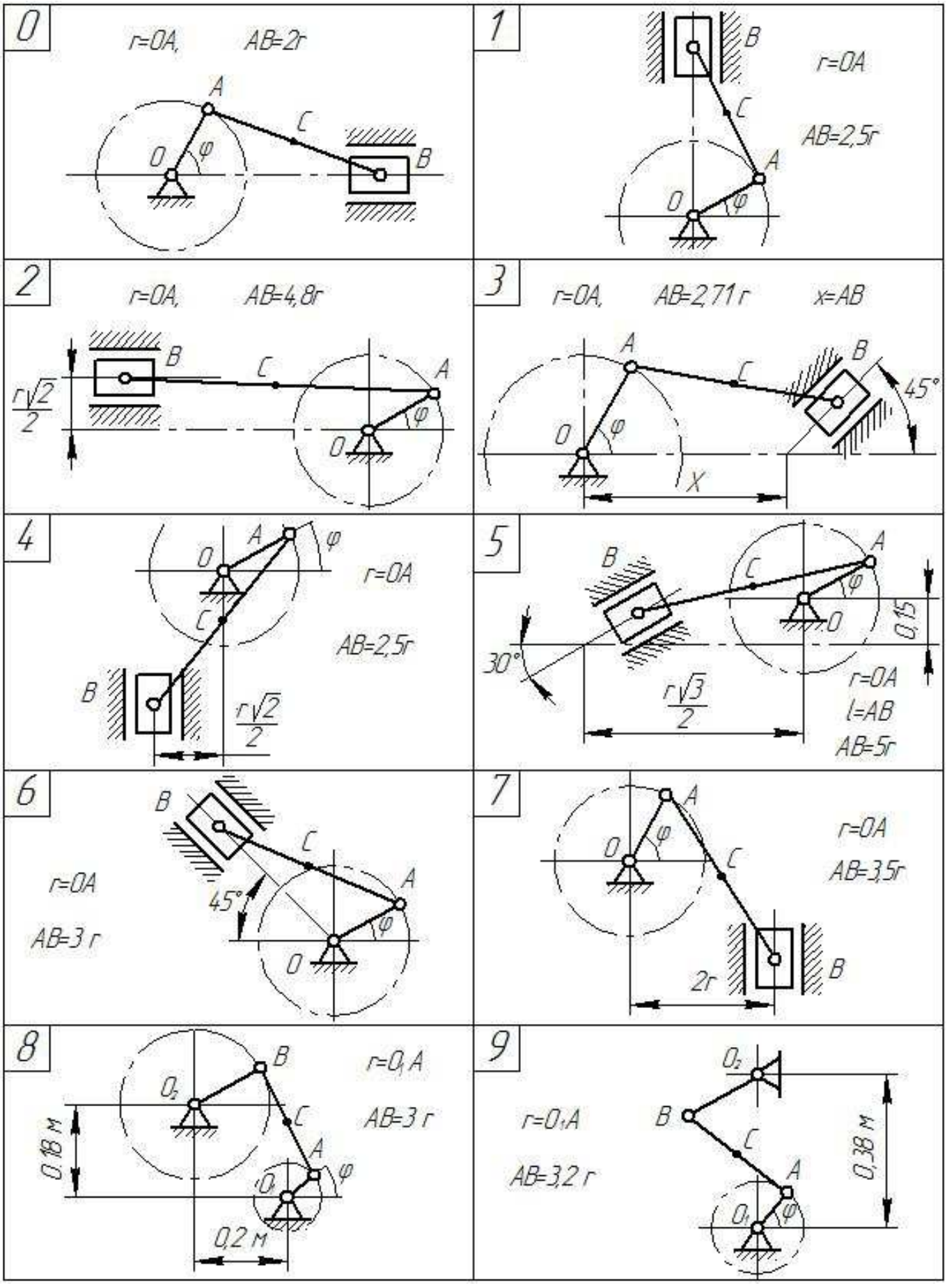

0
r=OA,
AB=2r
A
C
O
φ
B
1
B
r=OA
C
AB=2,5r
A
O
φ
2
r=OA,
AB=4,8r
B
C
A
r√2/2
φ
O
3
r=OA,
AB=2,71r
x=AB
A
B
C
45°
O
φ
X
4
A
φ
O
r=OA
C
AB=2,5r
B
r√2/2
5
B
C
A
φ
O
0,15
30°
r√3/2
r=OA
l=AB
AB=5r
6
B
C
r=OA
A
45°
AB=3 r
φ
O
7
A
φ
O
r=OA
C
AB=3,5r
2r
B
8
B
O₂
r=0,1A
C
AB=3 r
0,18 м
A
φ
O₁
0,2 м
9
O₂
r=0,1A
B
C
AB=3,2 r
0,38 м
A
O₁
φ

Рисунок 71

5.3.2 Рекомендации к решению задач

При решении задач на определение скоростей и ускорений точек плоской фигуры рекомендуется следующая последовательность:

1) определить положение мгновенного центра скоростей (МЦС) плоской фигуры;

2) найти расстояние от МЦС до той точки плоской фигуры, скорость которой известна или легко определяется из условия задачи;

3) определить угловую скорость плоской фигуры, разделив величину скорости этой точки на величину расстояния от МЦС до точки;

4) найти искомые величины скоростей точек плоской фигуры, умножая угловую скорость фигуры на величину расстояния от МЦС до соответствующих точек;

5) выбрать за полюс точку плоской фигуры, ускорение которой можно легко определить из условия задачи;

6) определить нормальное ускорение точки, траектория движения которой известна, относительно выбранного полюса;

7) записать для этой точки теорему о сложении ускорений точек плоской фигуры и спроецировать полученное уравнение на две взаимно перпендикулярные оси;

8) решить полученные уравнения и определить угловое ускорение плоской фигуры;

9) найти ускорение заданной точки плоской фигуры.

5.4 Пример выполнения лабораторной работы №5

Для заданного положения механизма (рисунок 72) определить скорости и ускорения точек D и E, а также угловую скорость и угловое ускорение звена AD.

Дано: OA=0,25м; ω_{OA}=2 рад/с; ε_{OA}=2 рад/с^2; CD=AD=0,46 м; AE=ED; $\angle CDA = 30^o$; $\angle OAD = 60^o$.

Найти: V_D; V_E; a_D; a_E; ω_{AD}; ε_{AD}.

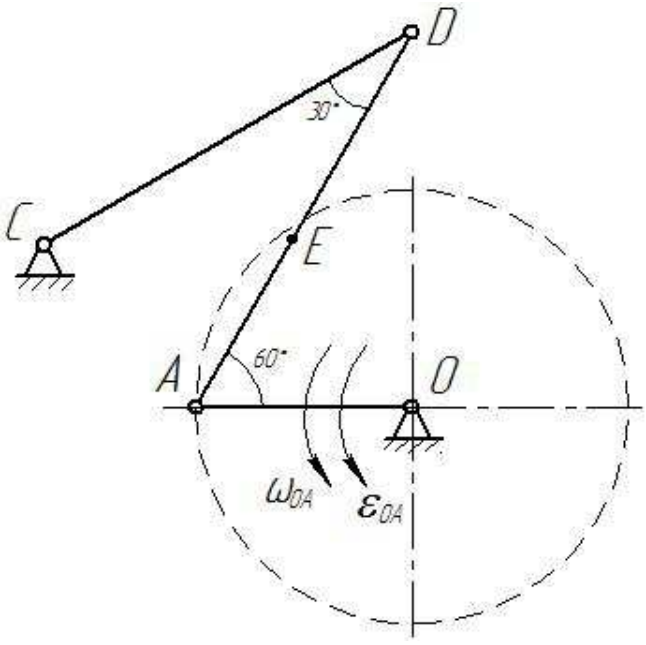


Рисунок 72

Решение:

1. Строим механизм в заданном положении в выбранном масштабе (рисунок 73).

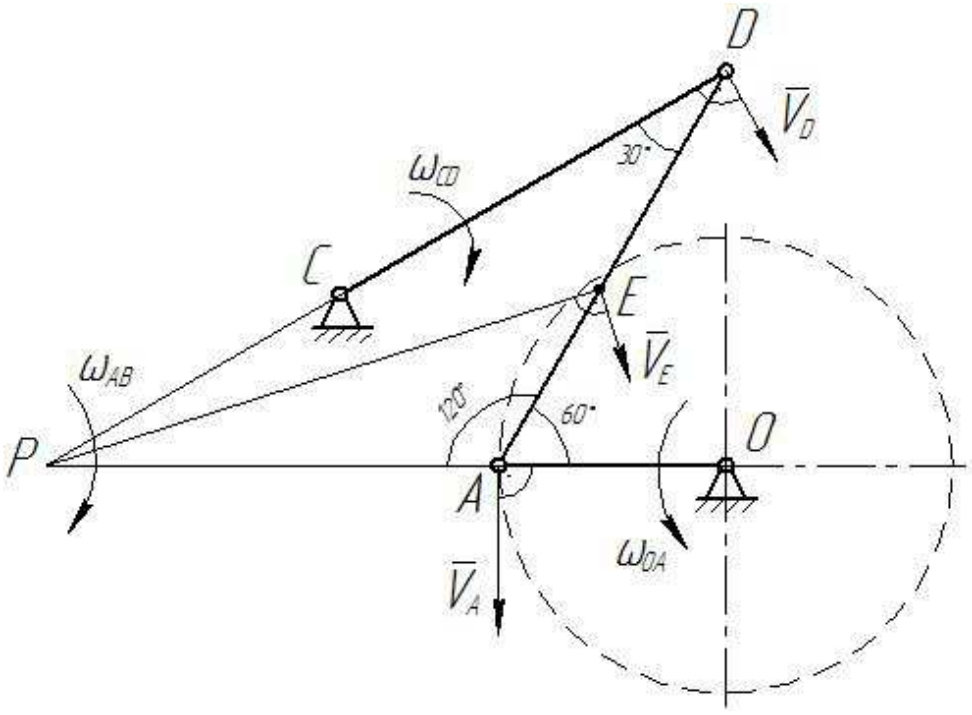


Рисунок 73

2. Определяем скорости точек и угловые скорости звеньев.

Скорость точки А звена ОА

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5 \quad м/с .$$

Вектор $\overline{V_A}$ перпендикулярен ОА и направлен соответственно вращению звена ОА.

Учитывая, что точка D принадлежит одновременно звену CD, вращающемуся вокруг С, найдем направление вектора скорости точки D: вектор $\overline{V_D}$ перпендикулярен CD.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) Р звена AD находится на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек А и D к их скоростям.

Угловая скорость звена AD

$$\omega_{AD} = \frac{V_A}{AP} \tag{65}$$

Скорости точек D и E звена AD

$$V_D = \omega_{AD} \cdot DP; \qquad V_E = \omega_{AD} \cdot PE; \tag{66}$$

Расстояния AP, DP, PE измеряем на чертеже (рисунок 73) с учетом масштаба или вычисляем аналитически:

ΔAPD – равнобедренный; AP=AD=0,46 м;

$$DP = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2 \cdot AP \cdot AD \cos 120^o} =$$
$$= \sqrt{0{,}46^2 + 0{,}46^2 - 2 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}46 \cdot \cos 120^o} = 0{,}8 \ м$$

PE=0,6 м (измеряем по чертежу с учетом масштаба).

По формулам (65), (66)

$$\omega_{AD} = \frac{0{,}5}{0{,}46} = 1{,}09 \quad рад/с ;$$

$$V_D = 1{,}09 \cdot 0{,}8 = 0{,}87 \quad м/с; \quad V_E = 1{,}09 \cdot 0{,}6 = 0{,}65 \quad м/с .$$

По направлению $\overline{V_A}$ определяем направление поворота стержня AD вокруг МЦС звена AD (точки Р) – по ходу часовой стрелки. Вектор $\overline{V_E}$ перпендикулярен отрезку ЕР и направлен в сторону этого поворота.

Угловая скорость звена CD

$$\omega_{CD} = \frac{V_D}{CD} = \frac{0,87}{0,46} = 1,86 \text{ рад/с.}$$

По направлению $\overline{V}_D$ определяем направление поворота стержня CD вокруг центра вращения C – по часовой стрелке.

3. Определяем ускорения точек и угловые ускорения звеньев.

По данным задачи можно определить ускорение точки A звена OA. Точка A движется по окружности, поэтому

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n}.$$

Численно

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,25 = 0,5 \quad м/с^2;$$
$$a_A^{n} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \cdot 0,25 = 1 \quad м/с^2.$$

Вектор $\overline{a}_A^{n}$ направлен вдоль AO, от точки A к центру вращения O звена OA; вектор $\overline{a}_A^{\tau}$ перпендикулярен AO и совпадает с вектором $\overline{V}_A$ (рисунок 74), так как вращение звена OA – ускоренное.

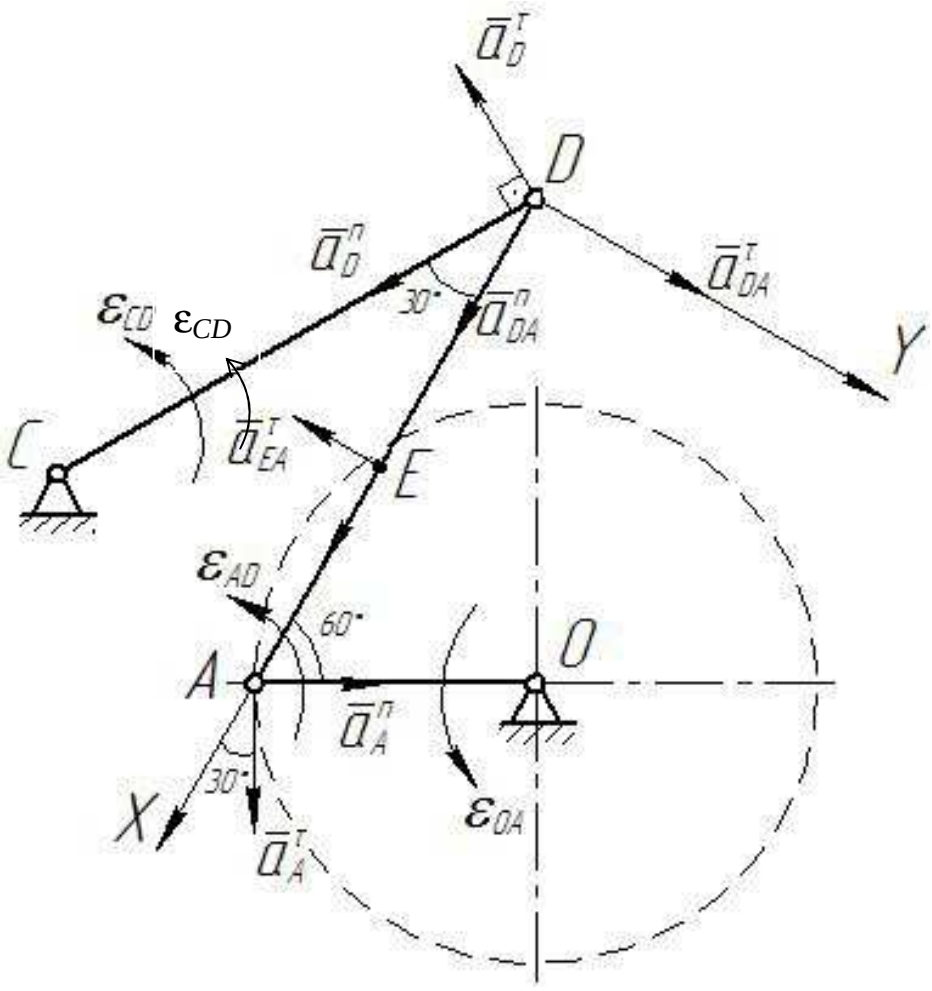


Рисунок 74

Примем точку A за полюс. Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры ускорение точки D:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{DA}^\tau + \bar{a}_{DA}^n \qquad (67)$$

Так как точка D одновременно принадлежит звену CD, вращающемуся вокруг точки C, то

$$\bar{a}_D = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau$$

Следовательно, выражение (67) примет вид

$$\bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{DA}^n + \bar{a}_{DA}^\tau \qquad (68)$$

Вектор $\bar{a}_D^n$ направлен вдоль DC от точки D к центру вращения C звена CD, вектор $\bar{a}_D^\tau$ - перпендикулярно DC.

Числовое значение

$$a_D^n = \omega_{CD}^2 \cdot CD = \frac{V_D^2}{CD} = \frac{0{,}87^2}{0{,}46} = 1{,}65 \quad м/с^2.$$

Нормальное ускорение точки D во вращательном движении стержня AD вокруг полюса A:

$$a_{DA}^n = \omega_{AD}^2 \cdot DA = 1{,}09^2 \cdot 0{,}46 = 0{,}55 \quad м/с^2.$$

Вектор $\bar{a}_{DA}^n$ направлен от точки D к полюсу A.

Для ускорения $\bar{a}_{DA}^\tau$ известна только линия действия – перпендикулярно DA.

Зададимся направлениями $\bar{a}_D^\tau$ и $\bar{a}_{DA}^\tau$ по указанным линиям (рисунок 15). Значения этих ускорений найдем из проекций векторного равенства (68) на оси координат.

Выбрав направление осей X и У, как показано на рисунке 74, получаем:

$$a_D^n cos30^o - a_D^\tau \cos 60^o = -a_A^n \cos 60^o + a_A^\tau \cos 30^o + a_{DA}^n \qquad (69)$$

$$-a_D^n \sin 30^o - a_D^\tau \sin 60^o = a_A^n \sin 60^o + a_A^\tau \sin 30^o + a_{DA}^\tau \qquad (70)$$

Из уравнения (69) находим

$$a_D^\tau = \frac{a_D^n \cos 30^O + a_A^n \cos 60^O - a_A^\tau \cos 30^O - a_{DA}^n}{\cos 60^O} =$$

$$= \frac{1{,}65 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}55}{0{,}5} = 1{,}9 \quad м/с^2$$

Из уравнения (70) находим

$$a_{DA}^{\tau} = -a_D^n \sin 30^o - a_D^{\tau} \sin 60^o - a_A^n \sin 60^o - a_A^{\tau} \sin 30^o = -1{,}65 \cdot 0{,}5 -$$
$$-1{,}9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}5 \cdot 0{,}5 = -3{,}6 \quad м/с^2.$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}_D^{\tau}$ направлен как указано на рисунке 74, вектор $\bar{a}_{DA}^{\tau}$ противоположен указанному на рисунке 74.

Угловое ускорение звена AD

$$\varepsilon_{AD} = \frac{\left|a_{DA}^{\tau}\right|}{DA} = \frac{3{,}6}{0{,}46} = 7{,}83 \quad рад/с^2$$

Истинное направление $\bar{a}_{DA}^{\tau}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AD} (в данном случае – против хода часовой стрелки).

Ускорение точки D

$$a_D = \sqrt{\left(a_D^n\right)^2 + \left(a_D^{\tau}\right)^2} = \sqrt{1{,}65^2 + 1{,}9^2} = 2{,}52 \quad м/с.$$

Найдем ускорение точки E, приняв за полюс точку A:

$$\bar{a}_E = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_{EA}^n + \bar{a}_{EA}^{\tau}$$

Нормальное и касательное ускорения точки E во вращательном движении стержня AD вокруг полюса A:

$$a_{EA}^n = \omega_{AD}^2 \cdot EA = 1{,}09^2 \cdot \frac{0{,}46}{2} = 0{,}27 \quad м/с^2;$$

$$a_{EA}^{\tau} = \varepsilon_{AD}^2 \cdot EA = 7{,}83 \cdot \frac{0{,}46}{2} = 1{,}8 \quad м/с^2;$$

Вектор $\bar{a}_{EA}^n$ направлен к полюсу A; вектор $\bar{a}_{EA}^{\tau}$ перпендикулярен вектору $\bar{a}_{EA}^n$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AD}.

Ускорение точки Е находим способом проекций (рисунок 74):

$$a_{EX} = -a_A^n cos60^o + a_A^\tau \cos 30^o + a_{EA}^n = -1 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}27 = 0{,}20 \quad м/с^2;$$

$$a_{EУ} = a_A^n \sin 60^o + a_A^\tau \sin 30^o - a_{EA}^\tau = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} - 1{,}8 = -0{,}68 \quad м/с^2;$$

$$a_E = \sqrt{a_{EX}^2 + a_{EУ}^2} = \sqrt{0{,}20^2 + 0{,}68^2} = 0{,}71 \quad м/с^2.$$

Угловое ускорение звена CD

$$\varepsilon_{CD} = \frac{\left|a_D^\tau\right|}{CD} = \frac{1{,}9}{0{,}46} = 4{,}13 \quad рад/с^2$$

Истинное направление $\overline{a}_D^\tau$ относительно центра вращения С звена CD определяет направление углового ускорения ε_{CD} (в данном случае – против хода часовой стрелки).

Ответ:

$V_D = 0{,}87\ м/с; \quad V_E = 0{,}65\ м/с; \quad a_D = 2{,}52\ м/с^2;$

$a_E = 0{,}71\ м/с^2; \quad \omega_{AD} = 1{,}09\ рад/с; \quad \varepsilon_{AD} = 7{,}83\ рад/с^2$

6 Сложное движение точки

6.1 Общие сведения

6.1.1 Основные определения

Сложное движение точки – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях. Например, сложное движение совершает лодка, переплывающая реку, пассажир, перемещающийся в вагоне движущегося поезда или по палубе плывущего парохода, а также человек, перемещающийся по лестнице движущегося эскалатора. Сложным является и движение шаров C и D центробежного регулятора Уатта (рисунок 75), вращающегося вокруг вертикальной оси, когда при изменении нагрузки машины шары удаляются от этой оси или приближаются к ней, вращаясь со стержнями AC и BD вокруг шарниров A и B.

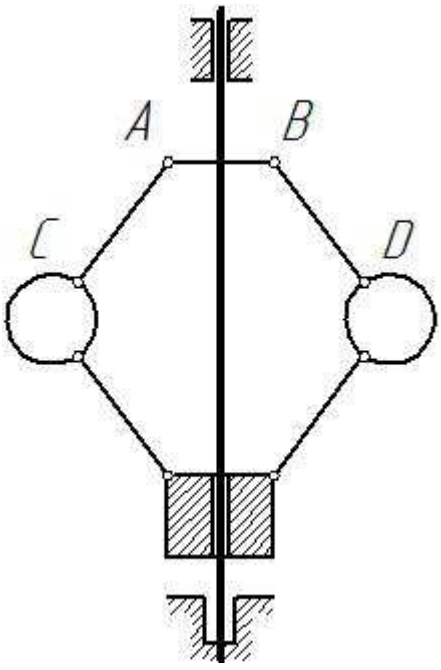


Рисунок 75

Рассмотрим движущееся тело A (рисунок 76) и точку M, не принадлежащую этому телу, а совершающую по отношению к нему некоторое движение. Через

произвольную точку О движущегося тела проведем неизменно связанные с этим телом оси x, y, z. Систему осей Oxyz называют *подвижной* системой отсчета.

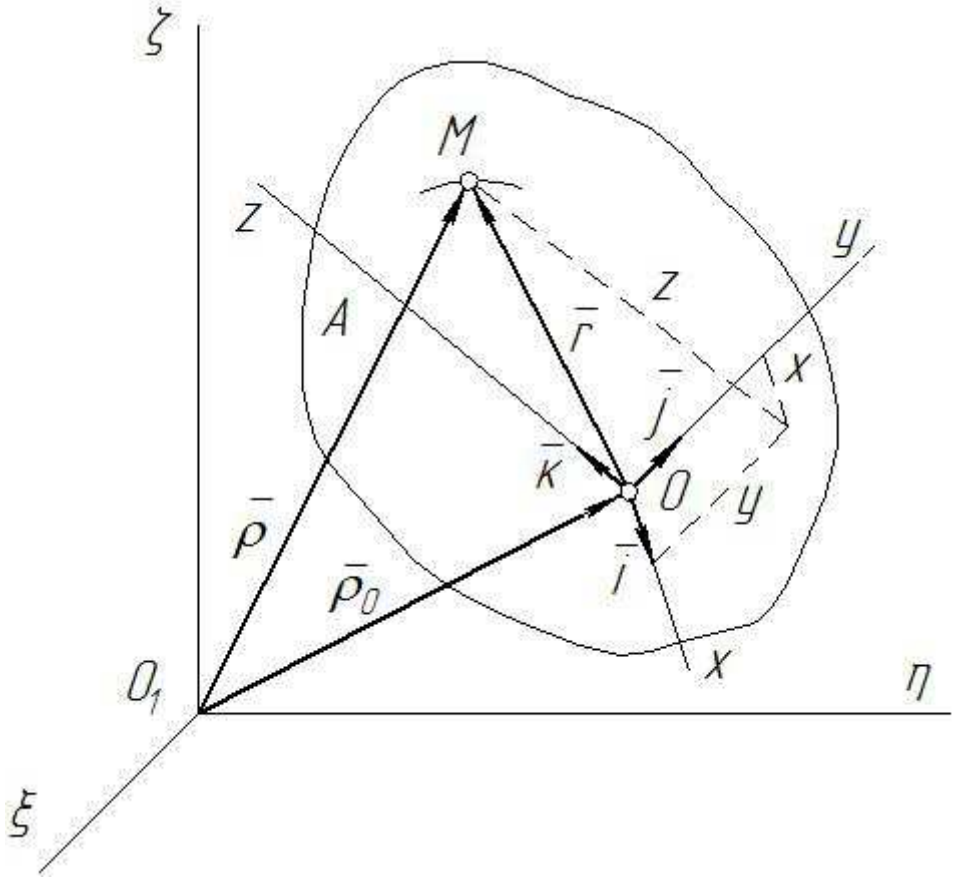


Рисунок 76

Неподвижной системой отсчета называют систему осей $O_1\xi\eta\zeta$, связанную с некоторым условно неподвижным телом, обычно с Землей.

Движение точки М относительно неподвижной системы отсчета называют *абсолютным движением точки.*

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют *абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки* и обозначают $\bar{V}_a$ и $\bar{a}_a$.

Движение точки М относительно подвижной системы отсчета называют *относительным движением точки*.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют *относительной скоростью и относительным ускорением точки* и обозначают $\bar{V}_r$ и $\bar{a}_r$. (relative – относительный).

Движение подвижной системы отсчета Oxyz и неизменно связанного с ней тела А по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1\xi\eta\zeta$ является для точки М *переносным движением*. Точки тела А, совершая различные движения, имеют в данный момент различные скорости и ускорения. Скорость и ускорение той точки тела А, связанного с подвижной системой отсчета, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка, называют *переносной скоростью и переносным ускорением точки* М и обозначают $\overline{V}_{å}$ и $\overline{a}_{å}$, (emporter – увлекать).

Например, если человек идет вдоль радиуса вращающейся платформы (рисунок 77), то с платформой можно связать подвижную систему отсчета, а с поверхностью Земли – неподвижную. Тогда движение платформы является переносным, движение человека по отношению к ней – относительным, а движение человека по отношению к Земле – абсолютным. Переносной скоростью человека $\overline{V}_{å}$, и его переносным ускорением $\overline{a}_{å}$, являются скорость и ускорение той точки платформы, где находится в данный момент человек.

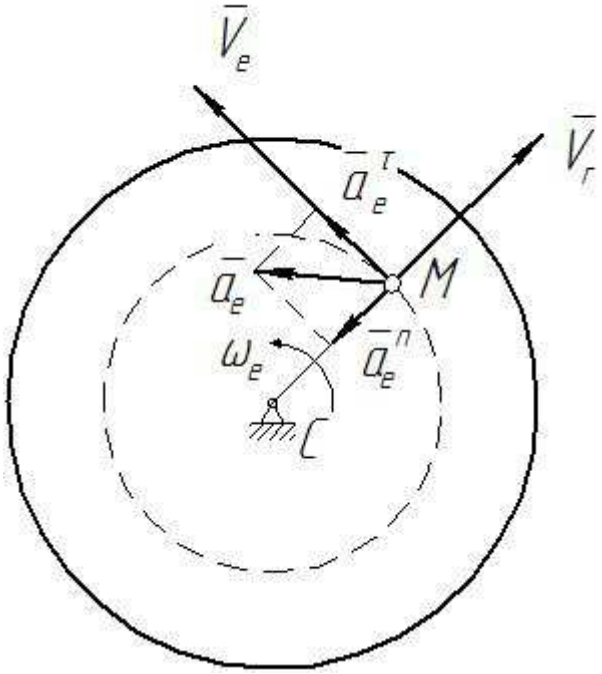


Рисунок 77

Движение точки М (рисунок 76) по отношению к неподвижной системе отсчета, которое названо абсолютным движением, является сложным, состоящим из относительного и переносного движений точки.

Абсолютное движение точки можно назвать результирующим движением, поскольку его можно рассматривать как результат сложения относительного и переносного движений, которые по отношению к абсолютному движению являются составляющими движениями.

Основная задача кинематики в случае сложного движения точки состоит в том, чтобы, зная относительное движение точки и переносное движение, т. е. движение подвижной системы отсчета, найти абсолютное движение точки и, следовательно, определить её траекторию, скорость и ускорение в этом движении.

6.1.2 Теорема сложения скоростей

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e$$

Это равенство выражает *теорему сложения скоростей*: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей, или, другими словами, абсолютная скорость точки равна по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на относительной и переносной скоростях (рисунок 78).

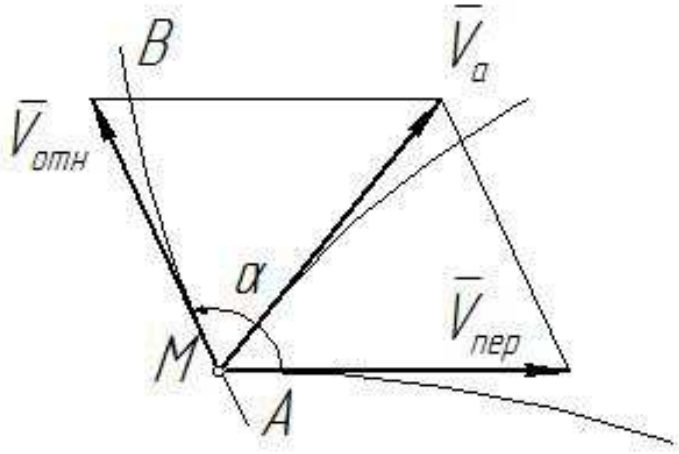


Рисунок 78

Отсюда следует, что если известны переносная и относительная скорости и угол α между ними, то модуль абсолютной скорости определяется по известной формуле, выражающей длину диагонали параллелограмма, т. е.

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos\left(\overline{V}_e \hat{,} \overline{V}_r\right)}$$

Если α = 0, т. е. если скорости $\overline{V}_e$ и $\overline{V}_r$ направлены по одной прямой в одну сторону, то cos α = 1 и

$$V_a = V_e + V_r.$$

Если α = 180°, т. е. если скорости $\overline{V}_e$ и $\overline{V}_r$ направлены по одной прямой в противоположные стороны, то cos α = – 1 и

$$|V_a| = |V_e - V_r|.$$

Если α = 90°, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$$

6.1.3 Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса)

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_к$$

Это равенство выражает *теорему Кориолиса о сложении ускорений* в случае непоступательного переносного движения, которая формулируется так: в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса.

6.1.4 Модуль и направление ускорения Кориолиса

Ввиду того, что ускорение Кориолиса появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его называют еще *поворотным* ускорением.

Появление поворотного ускорения точки объясняется взаимным влиянием переносного и относительного движений.

Это ускорение характеризует изменение относительной скорости точки в переносном движении и изменение переносной скорости точки в относительном движении.

Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки:

$$\overline{a}_{к} = 2\overline{\omega}_{e} \times \overline{V}_{r}$$

По модулю

$$a_{к} = 2\left|\omega_{e}\right| \cdot \left|V_{r}\right| \cdot \sin\left(\overline{\omega}_{e}\,\hat{},\overline{V}_{r}\right).$$

Ускорение Кориолиса равно нулю в трех случаях:

1) если $\omega_e = 0$, т. е. в случае поступательного переносного движения или в моменты обращения в ноль угловой скорости непоступательного переносного движения;

2) если $V_r = 0$, т. е. в случае относительного покоя точки или в моменты равенства нулю относительной скорости движущейся точки;

3) если $\sin\left(\overline{\omega}_{e}\,\hat{},\overline{V}_{r}\right) = 0$, т. е. в случае, когда $\left(\overline{\omega}_{e}\,\hat{},\overline{V}_{r}\right) = 0$ или $\left(\overline{\omega}_{e}\,\hat{},\overline{V}_{r}\right) = \pi$;

иначе, когда относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения, как, например, при движении точки М вдоль образующей цилиндра, вращающегося вокруг своей оси (рисунок 79).

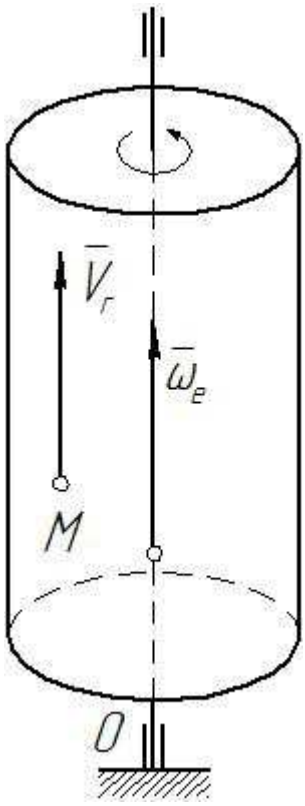


Рисунок 79

Направление ускорения Кориолиса можно определить по следующим правилам:

1) *по правилу векторного произведения* векторов $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$: ускорение Кориолиса направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ в ту сторону, откуда кратчайший переход от $\bar{\omega}_e$ к $\bar{V}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 80).

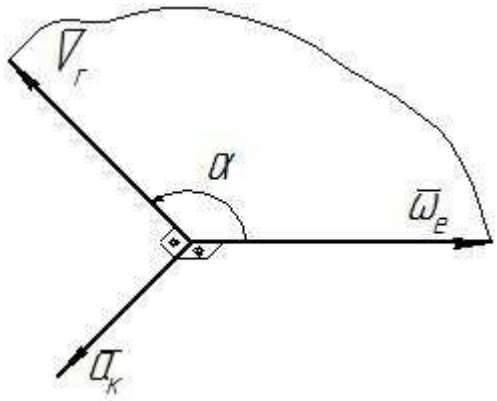


Рисунок 80

2) *по правилу Н.Е. Жуковского*: чтобы найти направление ускорения Кориолиса, следует спроецировать относительную скорость точки $\overline{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения ($\overline{\omega}_e$), и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° в сторону переносного вращения (рисунок 81).

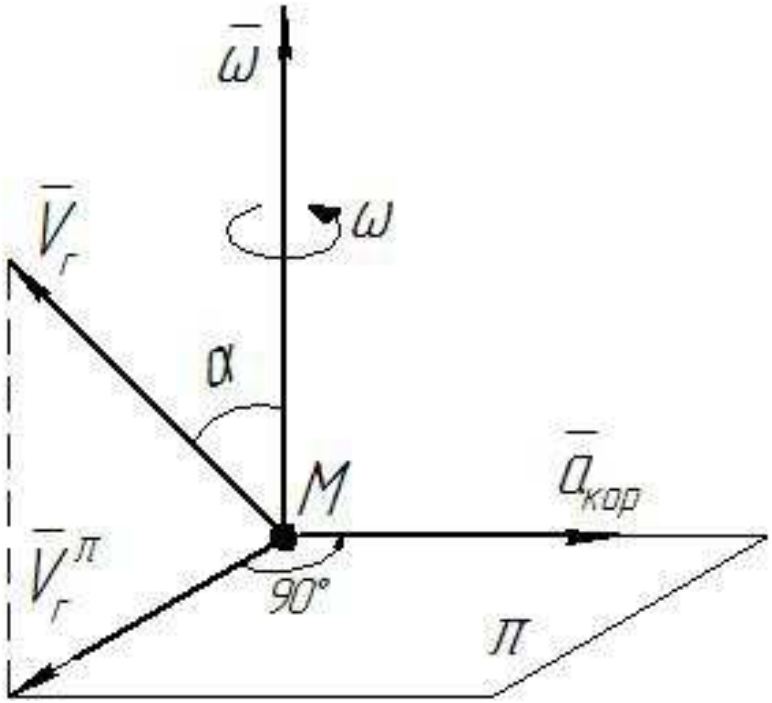


Рисунок 81

Если $\overline{\omega}_e \perp \overline{V}_r$, то $\sin\left(\overline{\omega}_e \overset{\wedge}{,} \overline{V}_r\right) = 1$, тогда

$$a_к = 2|\omega_e| \cdot |V_r|$$

В этом случае три вектора взаимно перпендикулярны (рисунок 82).

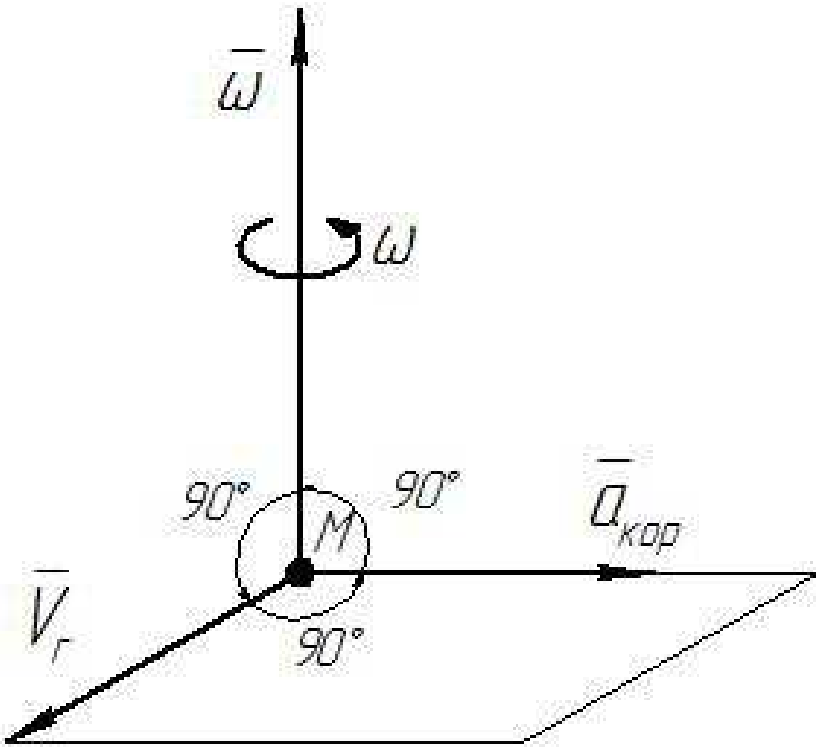


Рисунок 82

Это возможно тогда, когда относительное движение точки происходит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения. Кроме того, в этом случае (рисунок 82) направление $\bar{a}_к$ можно найти, повернув вектор относительной скорости $\bar{V}_r$ на 90° в сторону переносного вращения.

На рисунках 83, 84, 85 для иллюстрации приведенных правил показано направление ускорения Кориолиса точки М. На рисунках 83 и 84 точка М движется вдоль трубки АВ в случаях, когда трубка вращается в плоскости чертежа (рисунок 83) и когда она при вращении описывает конус (рисунок 84).

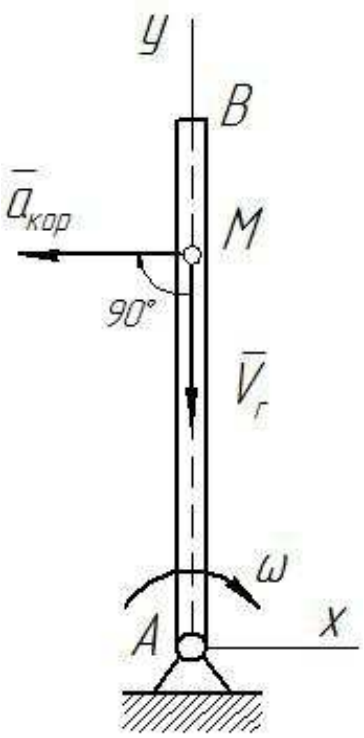


Рисунок 83

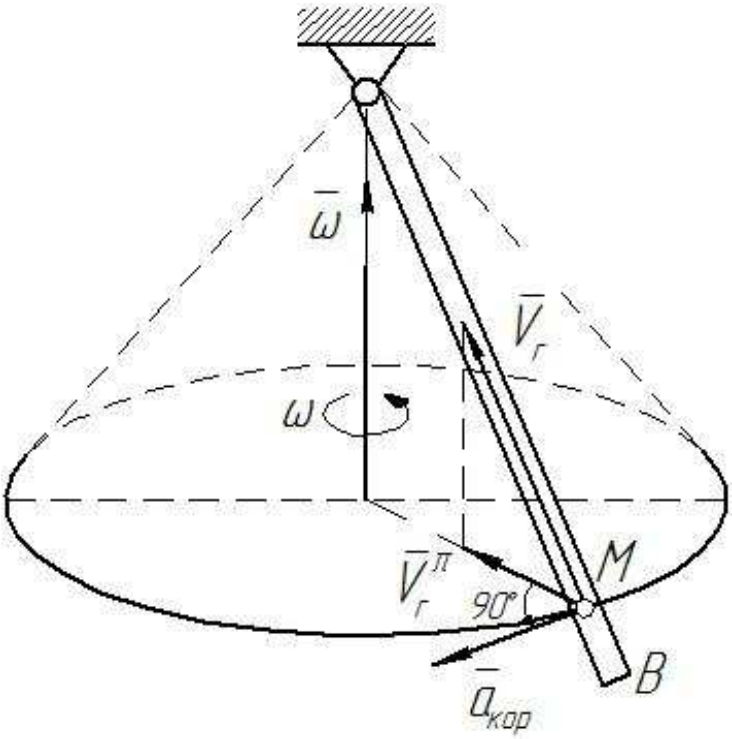


Рисунок 84

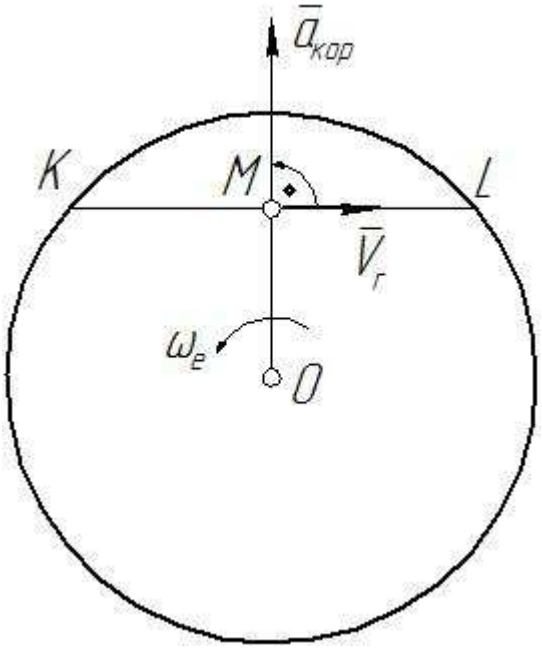


Рисунок 85

6.2 Вопросы для самоконтроля

Дайте определение абсолютного и относительного движений точки, а также скоростей и ускорений этих движений.

Дайте определение переносного движения, а также переносной скорости и переносного ускорения точки.

Сформулируйте теорему сложения скоростей.

Сформулируйте теорему сложения ускорений.

Каковы причины появления ускорения Кориолиса?

Как определяется модуль ускорения Кориолиса?

При каких условиях ускорение Кориолиса равно нулю?

Как определяется направление ускорения Кориолиса?

6.3 Лабораторная работа №6

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

6.3.1 Содержание задания

Зная относительное и переносное движения, определить для момента времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М.

Схемы механизмов показаны на рисунке 86, а необходимые для расчета данные приведены в таблице 14.

Таблица 14 – Исходные данные

№ услов.	Относительное движение	Переносное движение	t_1, с	R, м
	$OM=S_r=S_r(t)$, м	$\varphi_e=\varphi_e(t)$, рад		
1	2	3	4	5
0	$0{,}025\pi t^2$	$2t^3-5t$	2	0,4
1	$0{,}075\pi(0{,}1t+0{,}3t^3)$	$2t-0{,}3t^2$	1	0,9
2	$0{,}06\pi t^2$	$\frac{\pi t^3}{6}$	1	0,18
3	$0{,}4\pi\cos\frac{\pi t}{6}$	$3t-0{,}5t^3$	2	0,3
4	$0{,}2\pi\cos\frac{\pi t}{4}$	$1{,}2t-t^2$	$\frac{4}{3}$	0,2
5	$\frac{0{,}15\pi t^3}{8}$	$5t-4t^2$	2	0,3
6	$1{,}2\pi t^2$	$8t-3t$	$\frac{1}{3}$	0,4
7	$0{,}3\pi\cos\frac{\pi t}{6}$	$6t+t^2$	2	0,6
8	$0{,}025\pi(t+t^2)$	$2t-4t^2$	$\frac{1}{2}$	0,25
9	$0{,}1\pi\sin\frac{\pi t}{4}$	$4t-0{,}2t^2$	$\frac{2}{3}$	0,3

Примечание – Для каждого варианта положение точки М на схеме соответствует положительному значению S_r (S_r = ОМ – дуга, соответствующая меньшему центральному углу). При $S_r < 0$ точка М находится по другую сторону от точки О.

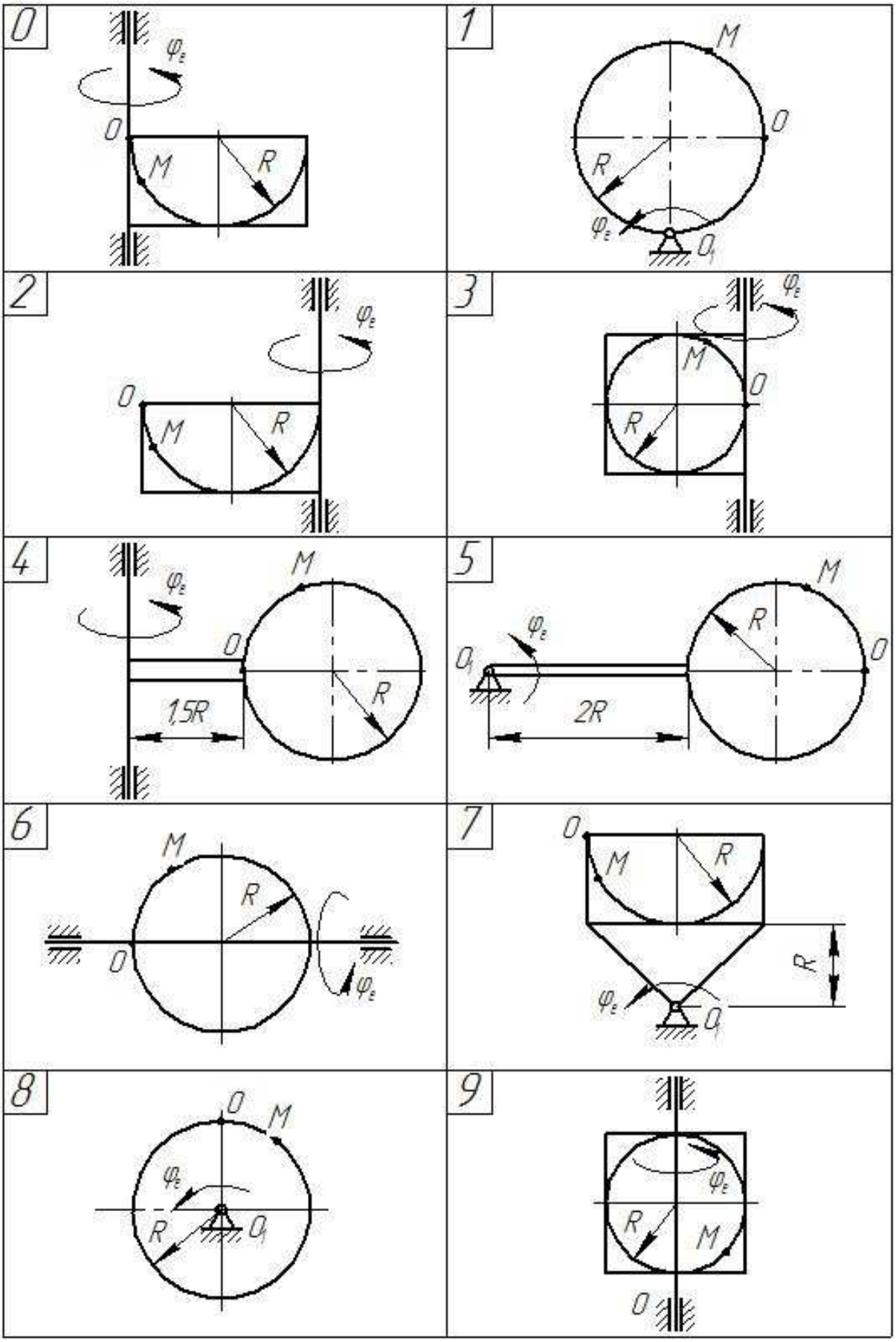

0
φe
O
M
R
1
M
O
R
φe
O1
2
φe
O
M
R
3
φe
M
O
R
4
φe
M
O
R
1,5R
5
M
R
O
O1
φe
2R
6
M
R
O
φe
7
O
M
R
R
φe
O1
8
O
M
φe
R
O1
9
φe
R
M
O

Рисунок 86

6.3.2 Рекомендации к решению задач

При решении задач на сложное движение точки рекомендуется следующая последовательность:

1) выбрать две системы координат – неподвижную и подвижную;

2) разложить движение на составляющие, определив абсолютное, относительное и переносное движения;

3) найти положение точки на относительной траектории в данный момент времени;

4) определить скорость и ускорение точки в относительном движении;

5) найти угловую скорость и угловое ускорение переносного движения;

6) определить скорость и ускорение точки в переносном движении;

7) по известным угловой скорости переносного движения и скорости точки в относительном движении найти ускорение Кориолиса точки;

8) вычислить абсолютную скорость точки;

9) определить проекции абсолютного ускорения точки на оси неподвижной системы координат;

10) по найденным проекциям абсолютного ускорения найти модуль абсолютного ускорения точки.

6.4 Пример выполнения лабораторной работы №6
Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Диск радиуса R=1 м вращается в своей плоскости вокруг неподвижной оси О против хода часовой стрелки по закону $\varphi = \pi t^2$ (t – в с, φ – в рад); где φ - угол, составляемый диаметром окружности ОА с горизонтальной прямой (рисунок 87). По ободу диска из точки О движется точка М по ходу часовой стрелки согласно уравнению $OM = S = \pi t^2$ (t – в с, S – в м). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени $t_1 = \frac{1}{2}$ с.

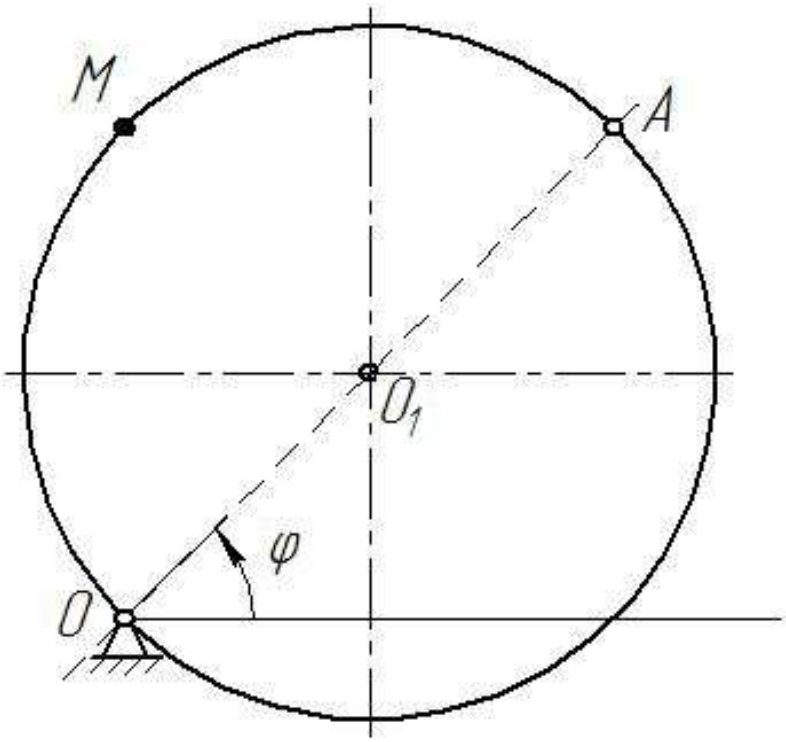


Рисунок 87

Решение.

Будем рассматривать движение точки М как сложное: движение по дуге ОМ относительно диска и движение вместе с вращающимся диском.

Неподвижную систему координат OXYZ жестко свяжем с неподвижной опорой (рисунок 88), причем ось OX совпадет с осью вращения тела и перпендикулярна плоскости чертежа. Подвижную систему координат жестко свяжем с диском (на рисунке 88 эта система координат не показана).

Тогда переносным движением будет вращение тела (диска) относительно оси OX, а относительным – движение точки по дуге ОМ.

Найдем положение точки М в момент времени $t_1 = \frac{1}{2}$ с:

$$S_r = OM\Big|_{t=1/2} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{м}.$$

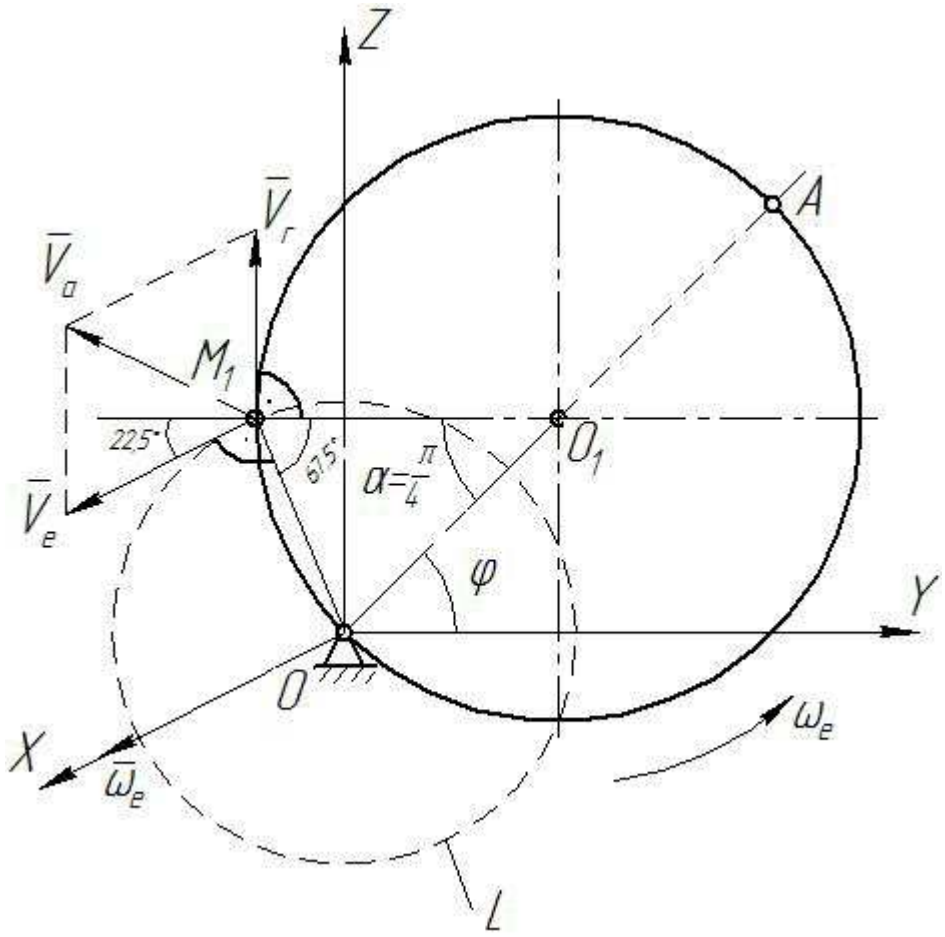


Рисунок 88

Следовательно, центральный угол, на который опирается дуга ОМ:

$$\alpha = \frac{S}{R} = \frac{\pi}{4 \cdot 1} = \frac{\pi}{4}, \text{ рад.}$$

Отложим этот угол от радиуса OO_1 по ходу часовой стрелки (в сторону положительного отсчета координаты S_r) (рисунок 88).

Покажем положение точки М на чертеже в момент времени $t_1 = \frac{1}{2}$ с, обозначим его M_1 (рисунок 88).

Найдем абсолютную скорость точки M_1 как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e.$$

Относительная – это скорость точки M_1 в относительном движении (по дуге ОМ).

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 2\pi t\Big|_{t=1/2} = \pi = 3{,}14 \quad м/с > 0.$$

Положительный знак в результате указывает, что вектор $\bar{v}_r$ направлен в сторону возрастания S_r. Так как относительное движение происходит по дуге окружности ОМ, то вектор $\bar{V}_r$ направлен по касательной к этой окружности.

Переносной скоростью точки М, когда она занимает положение M_1, будет скорость этой точки окружности:

$$\left|V_e\right| = \left|\omega_e\right| \cdot h \qquad (71),$$

где $h=OM_1$ – радиус окружности L, описываемой точкой M_1 заданной окружности. Найдем h из ΔOM_1O_1:

$$OM_1 = \sqrt{O_1M_1^2 + OO_1^2 - 2O_1M_1 \cdot OO_1 \cdot cos\alpha} = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}77 м;$$

Угловая скорость тела (окружности)

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 2\pi t\Big|_{t=1/2} = \pi = 3{,}14 \quad рад/с > 0.$$

Положительный знак показывает, что вращение окружности совпадает с направлением возрастания угла φ. Поэтому вектор $\bar{\omega}_e$ направлен по оси ОХ в сторону положительных значений координаты Х.

Модуль переносной скорости находим по формуле (71)

$$V_e = 3{,}14 \cdot 0{,}77 = 2{,}42 \quad м/с.$$

Вектор $\bar{V}_e$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела (рисунок 88).

Абсолютную скорость точки найдем по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2 \cdot V_r \cdot V_e \cdot \cos\left(\bar{V}_r \overset{\wedge}{,} \bar{V}_e\right)} =$$

$$= \sqrt{3{,}14^2 + 2{,}42^2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}42 \cdot \cos(90° + 22{,}5°)} = 3{,}15 \ м/с$$

где $cos\left(\overline{V}_r \,\hat{,}\, \overline{V}_e\right) = \cos\left(90^o + 22{,}5^o\right)$, так как в Δ M_1O_1O – равнобедренном – $\angle OM_1O_1 = \angle M_1OO_1 = 67{,}5^o$.

Абсолютное ускорение точки:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^{\tau} + \overline{a}_r^{n} + \overline{a}_e^{n} + \overline{a}_e^{\tau} + \overline{a}_к \qquad (72)$$

Определим ускорение точки M_1 в относительном движении по дуге ОМ:

$$a_r^{\tau} = \frac{dV_r}{dt} = 2\pi = 6{,}28 м/с^2 > 0\,.$$

Положительный знак указывает, что вектор относительного касательного ускорения $\overline{a}_r^{\tau}$ направлен в сторону положительных значений S_r, т.е. совпадает с вектором $\overline{V}_r$ (рисунок 89).

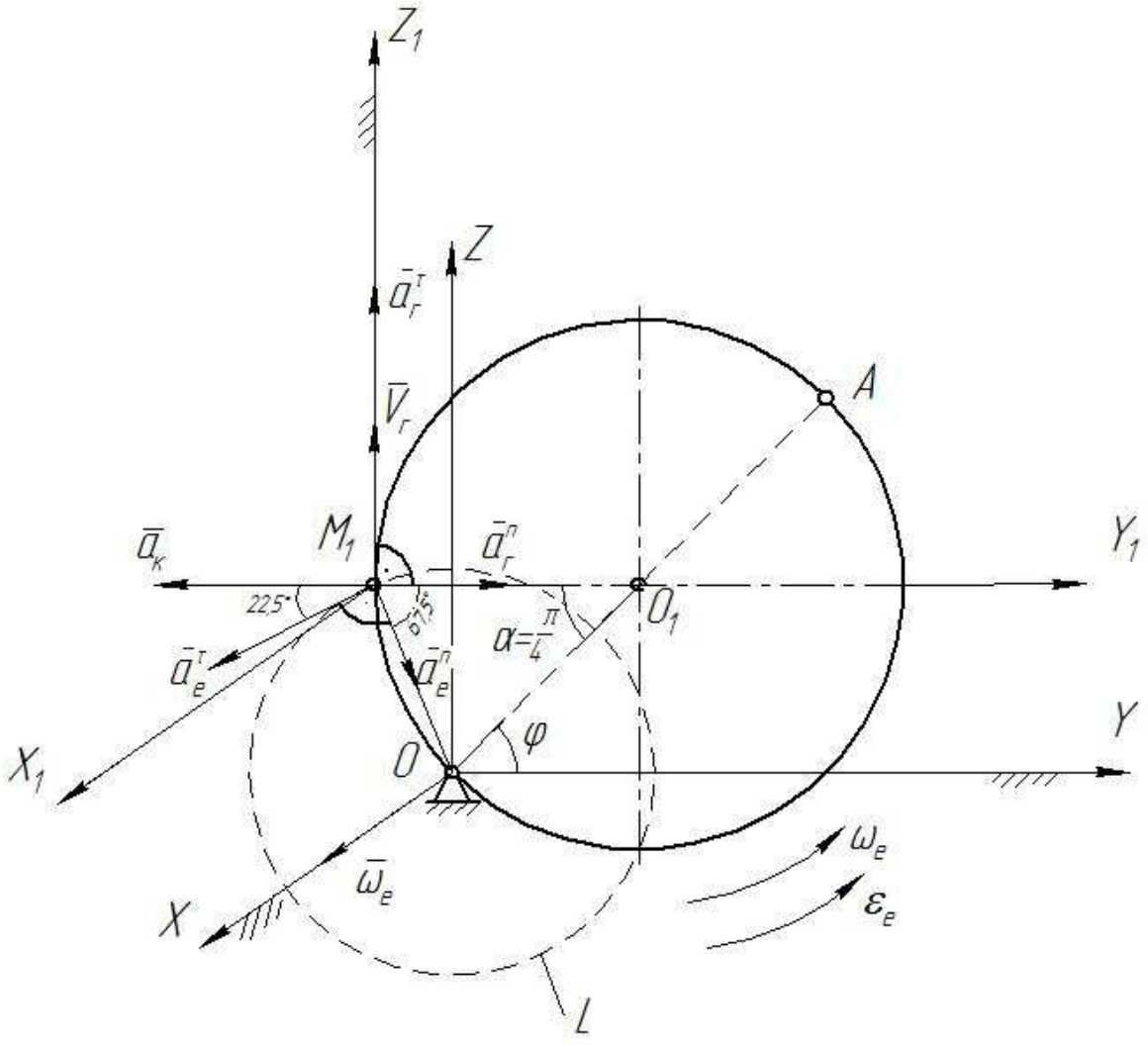


Рисунок 89

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{3{,}14^2}{1} = 9{,}86 \quad м/с^2;$$

где $\rho = R = 1$ м – радиус кривизны траектории относительного движения точки.

Вектор относительного нормального ускорения $\bar{a}_r^n$ направлен по радиусу к центру O_1 окружности.

Определим переносное ускорение точки M_1 как ускорение той точки тела (заданной окружности), с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.

Переносное нормальное ускорение

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 7{,}59 \ м/с^2$$

Вектор переносного нормального ускорения направлен по радиусу окружности L к центру O (рисунок 89).

Переносное тангенциальное ускорение

$$a_e^\tau = |\varepsilon_e| \cdot h \qquad (73),$$

где ε_e - угловое ускорение тела.

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 2\pi = 6{,}28 \quad рад/с^2 > 0.$$

Знаки ω_e и ε_e одинаковы, следовательно, вращение тела ускоренное, направления $\bar{\omega}_e$; $\bar{\varepsilon}_e$ совпадают (рисунок 89).

Согласно (73)

$$a_e^\tau = 6{,}28 \cdot 0{,}77 = 4{,}84 \quad м/с^2.$$

Так как вращение тела ускоренное, то вектор переносного касательного ускорения направлен в ту же сторону, что и $\bar{V}_e$.

Ускорение Кориолиса $\bar{a}_к = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r$, а его модуль

$$a_к = 2|\omega_e| \cdot |V_r| \sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_r) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}14 \sin 90^o = 19{,}72 \quad м/с^2.$$

Вектор угловой скорости $\overline{\omega}_e$ перпендикулярен плоскости чертежа. Вектор относительной скорости $\overline{V}_r$ точки направлен по касательной к окружности ОМ и лежит в плоскости чертежа, векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ взаимно перпендикулярны ($\overline{\omega}_e, \overline{V}_r$) = =90°, следовательно, чтобы определить направление $\overline{a}_к$ достаточно повернуть вектор $\overline{V}_r$ в плоскости чертежа на 90° в сторону переносного вращения (рисунок 89).

Для определения $\overline{a}_a$ применим метод проекций. Проецируя правую и левую части векторного равенства (72) на оси координат $M_1x_1y_1z_1$, получим:

$$a_{ax1} = 0$$

$$a_{ay1} = a_r^n + a_e^n \cos 67{,}5° - a_e^\tau \cos 22{,}5° - a_к = 9{,}86 + 7{,}59 \cdot 0{,}38 - 4{,}84 \cdot 0{,}92 - 19{,}72 = \\ = -11{,}45 \ м/с^2$$

$$a_{az1} = a_r^\tau - a_e^n \sin 67{,}5° - a_e^\tau \sin 22{,}5° = 6{,}28 - 7{,}59 \cdot 0{,}92 - 4{,}84 \cdot 0{,}38 = -2{,}54 \ м/с^2$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{11{,}4^2 + 2{,}54^2} = 11{,}73 \ м/с^2$$

Ответ: V_a=1,32 м/с; a_a=11,73 м/с^2.

7 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студ. втузов /А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 11-е изд., стер.-М.;Иитеграл-Пресс, 2010.-382 с.

2 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов/С.М.Тарг.-15-е изд., стер.-М.:Высш. шк.,2010.- 416 с.

3 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебное пособие для для студ. вузов по техн. спец. В 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. 5-ое изд.,–испр. СПб.:Лань, 1998. - Т.2 - 729 с.

4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 т. /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб.- М.:Наука, 1990. - Т.2 - 670 с.

5. Куча, Г.В. Равновесие твердого тела [Электронный ресурс] : метод. указания к лаб. работе по дисциплине "Теорет. механика" / Г. В. Куча, И. И. Мосалева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. теорет. механики. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 515,11 КБ). - Оренбург : ОГУ, 2011. -Adobe Acrobat Reader 5.0.

6.Куча, Г.В. Равновесие твердого тела. Произвольная пространственная система сил [Электронный ресурс] : метод. указания / Г. В. Куча, И. И. Мосалева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. теорет. механики. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 599,59 КБ). - Оренбург : ОГУ, 2012. -Adobe Acrobat Reader 5.0.

7. Куча, Г.В. Кинематический анализ плоского механизма [Электронный ресурс] : метод. указания к курсовой работе по дисциплине "Теорет. механика" / Г. В. Куча, И. И. Мосалева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования

"Оренбург. гос. ун-т", Каф. теорет. механики. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 659 КБ). - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2011. -Adobe Acrobat Reader 5.0.

8. Куча, Г.В. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки [Электронный ресурс] : метод. указания к курсовой работе по дисциплине "Теорет. механика" / Г. В. Куча, И. И. Мосалева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. теорет. механики. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 567КБ). - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2011. -Adobe Acrobat Reader 5.0.

9. Куча, Г. В. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях [Электронный ресурс] : метод. указания к расчет.-граф. работе по дисциплине "Теорет. механика" / Г. В. Куча, И. И. Мосалева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. теорет. механики. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 668 КБ). - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2010. -Adobe Acrobat Reader 5.0.

10. Куча, Г.В. Определение усилий в стержнях плоской фермы [Электронный ресурс] : метод. указания для лаб. работы / Г. В. Куча, И. И. Мосалева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т", Каф. теорет. механики. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 599,59 КБ). - Оренбург : ОГУ, 2013. -Adobe Acrobat Reader 5.0.

Помимо указанных в списке, могут быть использованы любые учебники и пособия по теоретической механике.

Список использованных источников

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студ. втузов /А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 11-е изд., стер.-М.;Иитеграл-Пресс, 2010.-382 с.

2 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов: в 2 т. /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-9-е изд., перераб.- М.:Наука, 1990. - Т.1 - 670 с.

3 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для втузов / О.Э. Кепе [и др]; под ред. О.Э.Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

4 Попов, М.В. Теоретическая механика: Краткий курс: учебник для втузов / М.В. Попов. – М.: Наука, 1986. – 336 с.

5 Дырдина, Е.В. Теоретическая механика в таблицах и схемах: учебное пособие для студ.: в 2 ч. /Е.В. Дырдина, Т.И. Коршунова. – Оренбург: ОГУ, 2001. – Ч.1 – 40 с.