О.А. Сотникова

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ (НА ПРИМЕРЕ КУРСА АЛГЕБРЫ)

Анализируются причины слабой предметной подготовки учителя математики. Предлагается целостный подход к изучению математических дисциплин, основанный на вскрытии связей в изучаемом материале. На примере алгебраического содержания показаны виды связей и их роль в усвоении материала. По мнению автора, модель организации обучения высшей алгебре в целостном подходе адекватна сущности формализованных связей.

Настоящее время систему образования в России характеризует разнообразие средних учебных заведений: государственные основные школы, лицеи, гимназии, колледжи, авторские школы и др. Общая парадигма школьного образования акцентируется в направлении культурной составляющей. Приоритетной признается развивающая функция обучения. Появляется выбор учебников и пособий для школ. Все это ставит необходимость решения важной задачи подготовки такого учителя математики, который готов к проектированию и осуществлению профессионально-педагогической деятельности в школе в обновляющемся содержании образования, способен к инновациям. Математическая подготовка учителя в решении этой проблемы признается базовой.

В последнее время рядом исследователей отмечается снижение уровня математического образования в подготовке учителя математики. Выделяются причины создавшегося положения. Помимо социальных и экономических существенными в этом вопросе указываются следующие причины, решаемые силами вузов, преподавателей и методической наукой.

С самых начальных этапов подготовки в высшей школе уровень абстрактности изучаемого математического содержания имеет значительный разрыв в сравнении со школьным материалом. При отборе фактологического знания на начальном этапе вузовской подготовки и выборе форм проведения учебных занятий не учитывается и так называемый «период адаптации» начинающих студентов. Количество учебных часов на математические дисциплины реально уменьшается, а подходы к обучению остаются прежними, что обуславливает высокую интенсивность информационного потока. Преимущественное положение в вузе занимает информационная линия обучения, концентрирующая свою функцию на передаче накопленной информации, слабо учитывая индивидуальные особенности студентов, стиля мышления, уровня их познавательной самостоятельности. Недостаточная развитость у студентов функциональных механизмов восприятия математического содержания, обработки учебного материала, умений учебно-познавательной деятельности при большом объеме информации ведет к зазубриванию. Установка на запоминание занимает преимущественное положение у обучающихся. Ориентиры в обучении математике связаны в основном с усвоением фактологических знаний на уровне воспроизведения. Студенты имеют слабую мотивацию к изучению математических дисциплин. Учебные цели изучения этих дисциплин ими не осознаются и не принимаются.

Исследователи и преподаватели, говоря о низкой математической подготовке учителей математики, как правило, имеют в виду слабое владение основными фактами математики в том смысле, что студенты не знают определений, не формулируют важные (фундаментальные) теоремы, не могут привести примеров (хотя в курсе называлось много примеров) и т. д. Точнее сказать, «студенты не помнят математических фактов…». Создается впечатление, что главное в изучении математики – запомнить и уметь воспроизвести фактологическое знание. При таких требованиях к результату обучения математике естественным образом формируется установка на запоминание, проявляется слабая мотивация («Зачем это помнить, если в школе мы этому учить не будем?»), развитие приемов учебно-познавательной деятельности следует неэффективным путем.

В отыскании путей устранения названных недостатков в подготовке специалиста в современном образовании возникают новые направления, связанные с характеристикой и структурой обучения, подходами к процессу его осуществления, оценке его качества. Взят курс к образовательной системе культуротворческого типа, реализующей потребность демократического общества в личности креативного типа, человека культуры, способного к созидающей деятельности [3]. В этой модели системы образования в отличие от укоренившейся в России рациональной модели акценты смещаются с содержания знаний на их методологически-конструктивный компонент, культурное измерение. При этом знания не отрицаются, поскольку без них нет смысла говорить о созидании нового. Культуротворческий тип определяет парадигму логики личностного становления, совершающегося в процедурах обучения (личностно-деятельностный подход). Оценка результата обучения смещается в инструментальном направлении, на форму «живого знания» (термин В.П. Зинченко): «главный итог обучения состоит не в полученной сумме знаний, которая всегда сомнительна и недостаточна, а в формировании установок на понимание» [2, с. 32]. Герменевтическая тенденция в духовной культуре современного общества ориентирует на понимание изучаемого в широком смысле этого слова, его восприятие как части в «ее принадлежности к некому завершенному культурному целому, как документ для познания более широкой историко-культурной взаимосвязи» [6, с. 67], необходимость воспроизводства познаваемого объекта в целостности.

Одна из основных качественных особенностей современного учителя математики, обеспечивающая воспроизводство математической культуры и обусловленная предметными дисциплинами, нам видится в целостном представлении о математике, ее идеях. Инструментальность математических знаний, заложенная природой математической науки, обеспечивает творческое начало и тем самым способствует развитию человека и его поля деятельности. Учитель, «схватывающий» идейный смысл изучаемой темы, конструирует «осмысленное» обучение. Умение дать осмысленный анализ и реализовать заложенную идею в обучении адекватно принципу научности обучения обеспечивается целостностью математических знаний учителя.

Математика – одна из наиболее развитых наук, достигшая высшего этапа становления, характеризующегося дедуктивным подходом к исследованию проблем. Охарактеризовать целостность математики – весьма сложное дело, поскольку это свойство означает взаимосвязанность и взаимопроникновение идей, положений, категорий, структуры и т. д. – всего того, что составляет науку в *единстве* отдельно взятых частей, а «целое есть поле исследования, умопостигаемое само по себе» (А. Тойнби). Свойство целостности проявляется в общности природы понятий, в единстве принципов построения теорий, форме выражения знания, специфике фундаментальных положений, в общих идеях, методах и конструкциях и т. д. Применительно к математике сюда можно отнести в самом общем смысле следующее:

– абстрактный характер изучаемых объектов, теоретико-множественный подход к их описанию;

– дедуктивный характер математических теорий, специфические особенности математического языка и символики и др.;

– фундаментальность понятий множества, функции, алгебраической структуры, изоморфизма, топологии; их инструментальная роль в математике;

– идеи математики: координатизация (термин Г. Вейля), симметрия, упорядоченность, непрерывность, предельный переход и т. д.;

– методы доказательств, их теоретическое основание и приемы математических конструкций (опредмечивание, факторизация и т. д.) и другие.

Целостность математики – это то общее, что присутствует в каждом ее разделе, «духовная часть» математики, то, что питает математику к движению, что определяет ее понимание субъектом.

Алгебра, как составная часть математики, несет в себе ее отдельные черты и вместе с тем имеет специфическую особенность. При этом алгебра, рассматриваемая как отдельная часть математики, – это уже иной *целостный* объект. Г. Вейль рассматривал абстрактную алгебру как один из двух основных *способов понимания* в математике. Именно этой особенностью и определяется одно из основных назначений алгебраической дисциплины.

При построении изучения алгебры мы исходим из положения, что «познание объекта как целого является одной из вершин познания, к достижению которого должна стремиться любая наука» [5, с. 6]: обучение, ориентированное на целостность изучаемых вопросов, способствует пониманию содержания дисциплины и ее назначению. Поскольку «целостность характеризуется качествами и свойствами, не присущими отдельным частям, но возникающими в результате их взаимодействия в *определенной системе связей*» [10, с. 475], то **целостный подход** к обучению определяется вскрытием связей. При этом имеются в виду не столько связи «межпредметного» характера, сколько *взаимопроникающие* связи, характеризующиеся проявлениями методов и идей алгебры (проявлением ее целостности). Обучать целостно – это значит обучать посредством раскрытия связей.

Вскрывая связи, человек не просто констатирует ее наличие (или отсутствие), но и ставит проблемы, возникающие в процессе установления связей. Вскрыть связь – это не только обнаружить ее наличие, но и поставить вопрос, адекватный специфике обнаруженной взаимной обусловленности. Если вопросы (проблемы, задачи) не возникли, то связь, возможно, установлена, но не вскрыта: «главное звено процесса понимания заключается не только и не столько в установлении связей, сколько главным образом в определении значимости их» [2, с. 138].

Связи в алгебре, как отношение взаимной зависимости, взаимной обусловленности, общности между отдельными компонентами целостного алгебраического знания, можно разделить на несколько видов.

Поскольку основное содержание знания структурируется (выстраивается, формируется, комплектуется) понятиями, то имеет смысл говорить о связях между понятиями. Если понятие определяется посредством дефиниции (определения), то в зависимости от ее вида можно выделить три вида связующих образований.

Связи, обусловленные родовым понятием. Например, «определитель квадратной матрицы – это число, вычисляемое по правилу…». Родовым понятием выступает понятие числа. Это накладывает особенности на определяемое понятие. В частности, например, числа можно представлять определителями матриц. Определитель – величина скалярная, можно говорить о числе, обратном определителю, противоположном определителю, отрицательном определителе и прочее. Это порождает ряд вопросов, нацеленных на вскрытие других связей. Например, если имеет смысл говорить о числе, обратном определителю, т. е. $|A|^{-1}$, то возникает проблема в установлении зависимости между $|A|$ и $|A^{-1}|$.

Связи, обусловленные видовым отличием определения. Здесь имеется в виду не только логическая сторона видового отличия, но и природа его. Иначе говоря, отношение зависимости между природой определяемого понятия и природой видового отличия. Например, в понятии определителя квадратной матрицы видовое отличие – это есть правило, по которому вычисляется число, т. е. результат алгебраического действия. Природа видового отличия заключена в природе бинарной операции, т. е. вычисление определителя сводится к выполнению арифметических действий над числами и нахождении знака подстановки.

Связи, обусловленные термином. Это могут быть различные связи по сущности термина, как языковому выражению понятия. Возможно рассмотрение обусловленности этимологической стороной нескольких терминов. Например, два понятия – «минор элемента» и «минор *к*-того порядка». В терминах этих понятий присутствует одно общее слово – «минор». Имеет ли смысловое содержание частичное совпадение терминов? Постановка подобных вопросов и отыскание ответа на них – вскрытие связей, обусловленных термином. Другого типа связь терминов может быть в таком виде, который раскрывает *смысл* этимологической стороны вводимого термина. Например, определение определителя квадратной матрицы. В термине определяемого понятия присутствуют термин «квадратная матрица». Это влечет, что об определителе говорят только в том случае, когда есть некоторая матрица, причем она является квадратной. Иначе нет смысла употреблять этот термин.

Отношения между различными понятиями в контексте их существенных свойств можно структурировать следующими видами связей.

Логические связи. Это связи структурного характера. Причинно-следственный характер связей между понятиями, обусловленный логической структурой определения, находит свое выражение в получении следствий из того, что объект принадлежит или не принадлежит объему понятия в зависимости от специфики связи в видовом отличии и т. д.

Иерархические связи. Эти связи состоят в том, что определяется отношение понятия к уровню абстракции, его месту в дедуктивной математической теории. В алгебре можно рассматривать уровневое построение понятий. Если теория задается аксиоматически, то указаны первичные понятия и отношения между ними. Новые понятия в теории вводятся посредством определений. Если они определяются только через первичные понятия, то это понятия первого уровня, понятия второго уровня определяются через понятия первого уровня и т. д. Выстраиваемая цепочка уровней понятий вскрывает иерархические связи теории.

Идейные связи. В предметном содержании алгебры ведущей является линия алгебраических структур. В рассмотрении абстрактных теорий идейные связи – это связи общности в излагаемых вопросах теорий. Например, идея опредмечивания. Человеку присуща потребность в конкретизации абстрактных идей в форме особых вещей, обладающих «бытовой» определенностью. Тенденция к опредмечиванию означает рассмотрение некоторого гипотетического воображаемого мира, в котором и содержатся предметное значение термина (денотата имени) рассматриваемых математических понятий. Так, понятие функции возникло в результате абстракции особого вида деятельности, а потому на начальном этапе оно воспринималось как действие, а не предмет. Тенденция к опредмечиванию интерпретировала его как объект. И в этом объекте «заложена» идея действия. Опредмечивание абстрактного явления является творческим актом, поскольку приводит к созданию нового объекта – денотата абстрактного.

Другой пример. Рассмотрим понятие определителя квадратной матрицы. Вычисляя определитель, находим некоторое число. И правило вычисления позволяет для любой квадратной матрицы найти однозначно определенное число. Значит, понятие определителя порождает функцию, которая каждой квадратной матрице сопоставляет однозначно определенное число. Понятие функции имеет свои особенности и свойства (инъективность, сюръективность, биективность, различный способ задания и т. д.). Это влечет появление новых знаний о понятии определителя (аксиоматическое определение и др.).

Интерпретационные связи (или связи по абстракции). Это связи вида «одно является моделью такой-то структуры, но не является интерпретацией другой» или «данный объект лежит в объеме понятия» или обратного хода связь: понятие является обобщением понятий. Этот вид связи имеет существенное значение для обретения смысла изучаемого. Кроме того, вскрытие таких видов связей «выходит» на методологические основания математики (непротиворечивость и категоричность теорий, корректность определяемых понятий и пр.).

В смысловом подходе связи в алгебре можно разделить на две большие группы.

Связи содержательного характера. Связи между отдельными существенными признаками понятий. Содержательное проникновение, осуществляемое в процессе выделения таких связей между содержанием отдельных разделов (понятиями), в познавательном плане обогащает теоретические представления студентов. Они различны по форме.

а) Связи-теоремы (утверждения). Они представляются в форме фактологических знаний о понятиях (теорем, лемм, утверждений). Например, «всякое поле является кольцом», «ранг ненулевой матрицы равен наибольшему из порядков ненулевых ее миноров» и т. д.

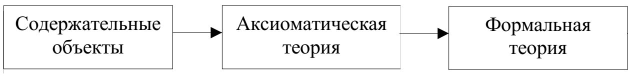
б) Связи-аналогии. Многие алгебраические знания проникнуты аналогией, выражающейся не только в созвучии терминов, но и в содержательном единстве. Аналогия в изучении вопросов тем «Теория групп» и «Кольца и идеалы» представлена следующей таблицей:

№ п/п	ТЕОРИЯ ГРУПП	КОЛЬЦА И ИДЕАЛЫ
1.	Группа	Кольцо
2.	Простейшие свойства группы	Простейшие свойства кольца
3.	Подгруппа	Подкольцо
4.	Нормальный делитель	Идеал
5.	Фактор-группа	Фактор-кольцо
6.	Гомоморфизм и изоморфизм групп	Гомоморфизм и изоморфизм колец
7.	Образ и ядро гомоморфизма групп	Образ и ядро гомоморфизма колец
8.	Теорема о гомоморфизмах групп	Теорема о гомоморфизмах колец
9.	Циклические группы	Главные идеалы

Связи содержательного характера так или иначе раскрываются в процессе трансляции математического знания. Лектор, формулируя и доказывая теоремы, приводя примеры и контрпримеры, иллюстрирует содержательные связи изучаемых понятий. Другого вида связи, а именно те, которые являются идейными носителями, составляющие основу целостности, остаются при традиционном обучении у последней черты. Это *связи формализованного характера.* К ним относятся логические связи и связи, обусловленные аксиоматическим методом (формализацией). «Формализация – это такой путь исследования каких-либо объектов, когда их содержание познается с помощью выявленных элементов его формы» [7, с. 646].

Анализируя предметное содержание алгебраической дисциплины, можно заключить, что основная общематематическая идея, воплощенная в содержании алгебраического курса, – идея формализации.

Суть идеи формализации в обучении видится следующим образом. Особый класс математических объектов, которые имеют низкий уровень абстрактности, могут быть описаны с помощью «житейских представлений», графиков, иллюстраций на чертеже, рисунке, аналогами объектов реальной жизни. Назовем их содержательными объектами. Например, функции, числа, арифметические векторы, матрицы, многочлены и т. д. С этими объектами в алгебре производятся различные математические операции. Выясняя свойства этих операций, путем обобщения эти классы объектов объединяются в совокупности, имеющие общие свойства операций. Объявляется некоторая аксиоматически построенная содержательная теория. Смысл построенной теории описывается множествами содержательных объектов, рассматриваемых в единстве с операциями, производимыми над ними. Для теории уже не имеет значения природа объектов, ею описываемая. Имеют значение только свойства этих объектов и отношений между ними. Следующим шагом создается формализованная теория, которая задает множество символов (алфавит), используемых в данной теории, язык (слово, формула, терм и т. д.). Интерпретациями формализованных теорий являются аксиоматические теории. Таким образом, метод формализации описывается следующей последовательностью:



В процессе обучения студенты вовлекаются в исследование математических объектов, а потому их познавательные действия адекватны действиям математика-исследователя в этой области. Студенты, выявляя особенности не столько самих элементов, сколько специфику свойств производимых над ними операций, познают сущность метода формализации.

Формализация как процесс является моделью деятельностной составляющей обучения алгебре. Если взять это положение за основополагающее, то обучение алгебре должно быть адекватно сущности формализации в процессуальном плане: через обобщение и интерпретацию, как вскрытие содержательных и формализованных связей. Приоритетное положение идеи формализации в каждом отдельно рассматриваемом разделе – та целостность, которая является «скелетом» алгебры, а потому прежде всего подлежит усвоению. Усвоенная идея неразрывным образом связана с интериоризацией фактологического знания, поскольку в нем она материализуется.

Список использованной литературы:
1. Афанасьев В.Г. О целостных системах // Вопросы философии. 1980. №6. – С. 62-78.
2. Брудный А.А. Психологическая герменевтика. – М.: Лабиринт, 1998.
3. Валицкая А.П. Образование в России: Стратегия выбора. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 1998.
4. Вейль Г. Математическое мышление / Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
5. Ганзен В.А. Восприятие целостных объектов. – Л.: ЛГУ, 1973.
6. Запесоцкий А.С. Образование: философия, культурология, политика. – М.: Наука, 2002.
7. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. – М.: Наука, 1971.
8. Мадер В.В. Введение в методологию математики (Гносеологические, методологические и мировоззренческие аспекты математики. Математика и теория познания). – М.: Интерпракс, 1994.
9. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы / Под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002.
10. Философская энциклопедия. / Гл. ред. Ф.В. Константинов. Т. 5. – М.: Сов. энц., 1970.