

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ

Рассматривается задача теплообмена между ламинарным потоком в круглоцилиндрической трубе и ее изотермической стенкой. Получено точное аналитическое решение.

В настоящее время тепловой расчет при ламинарном течении жидкости в трубах ведут по критериальным уравнениям. Точность такого расчета невысокая и составляет не менее 15%. В связи с этим остается актуальной задача получения точного аналитического решения задачи конвективно-теплообмена.

Рассмотрим решение задачи о температурном поле в ламинарном потоке жидкости, протекающей в изотермической круглоцилиндрической трубе. При $x < 0$ стеники трубы адиабатически изолированы, а при $x \geq 0$ температура стенок поддерживается постоянной, т. е. $T_{ст} = \text{const}$, и не равна температуре жидкости $T_{ж}$, отчего между потоком и стенкой возникает теплообмен, формирующий в жидкости неоднородное температурное поле. Очевидно, что на бесконечности температура жидкости становится равной температуре стенки, и теплообмен завершается $T_{ж}(r, \infty) = T_{ст} = \text{const}$. Ламинарное течение жидкости в трубе считается динамически стабилизированным.

Задача описывается стационарным уравнением энергии:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\theta = a \nabla^2 \theta, \quad (1)$$

где $\theta(r, x) = T_{ст} - T_{ж}(r, x)$ – избыточная температура, $\vec{v} = \{u, 0, 0\}$ – вектор скорости потока, причем в цилиндрической системе координат продольная скорость u – суть пуазейлев профиль

$$u(r) = U \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (2)$$

где U – скорость потока на оси, a – коэффициент температуропроводности, причем считается, что поле температур не искажает поля скоростей, что возможно при постоянных теплофизических характеристиках потока.

Примем допущение, что плотность конвективного потока теплоты вдоль течения $q_{\text{хк}} = \rho c_v u(r) \frac{\partial \theta}{\partial x}$ много больше плотности теплового потока за счет молекулярной теплопроводности $q_{\text{хл}} = -\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$, т. е. $q_{\text{хк}} \gg q_{\text{хл}}$, что справедливо при больших числах Пекле

$$Pe = \frac{q_{\text{хк}}}{q_{\text{хл}}} = \frac{UL}{a} \gg 1,$$

где L – характерный продольный размер течения.

Данное допущение позволяет упростить уравнение энергии и записать его в цилиндрической системе координат так:

$$u(r) \frac{\partial \theta}{\partial x} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) решаем с граничными условиями I рода:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \theta(r, 0) = F(r), \quad r = 0: \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \\ r = R: \quad \theta(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из этих условий задает распределение температуры в потоке на входе в канал: $F(r)$ – в дальнейшем четная функция; второе – требует, чтобы искомая функция была бы симметричной относительно оси трубы; третье – означает, что на стенке трубы температура жидкости совпадает с температурой стенки (граничное условие I рода в задачах теории теплопроводности).

Задачу (3), (4) решаем методом Фурье, для чего представим искомую функцию в виде произведения $\theta(r, x) = \Phi(x)\Psi(r)$, тогда переменные в уравнении (3) разделяются и оно принимает вид

$$\frac{UR}{a} \frac{1}{R} \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{\Psi''(r) + \frac{1}{r} \Psi'(r)}{\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \Psi(r)} = -l^2. \quad (5)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от x , а правая – только от r , поэтому равенство возможно, когда они порознь равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-l^2$ (постоянная разделения должна быть отрицательной, иначе получаются расходящиеся на бесконечности решения).

Уравнение (5) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\Phi'(x) + \frac{l^2}{Pe} R \Phi(x) = 0, \quad (6)$$

$$\Psi''(r) + \frac{1}{r} \Psi'(r) + l^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \Psi(r) = 0, \quad (7)$$

где число Пекле определено так: $Pe = UR/a$.

Общее решение уравнения (6) имеет вид:

$$\Phi(x) = C \exp\left(-\frac{l^2 R}{Pe} x\right), \quad (8)$$

где C – постоянная, подлежащая определению.

Для решения уравнения (7) введем новую независимую переменную $\eta = r/R$ и приведем его к виду уравнения Штурма – Лиувилля [1]

$$\eta^2 \frac{d^2\Psi}{d\eta^2} + \eta \frac{d\Psi}{d\eta} + \eta^2 m^2 (1 - \eta^2) \Psi = 0, \quad (9)$$

где параметр $m^2 = l^2 R^2$.

Будем искать решение уравнения (9) в виде суммы обобщенного степенного ряда

$$\Psi(\eta) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \eta^{n+p}. \quad (10)$$

Дифференцируя этот ряд дважды и подставляя соответствующие производные в уравнение (9), получим следующее условие для нахождения коэффициентов A_p степенного ряда:

$$\sum_{p=0}^{\infty} (n+p-1)(n+p)A_p \eta^{n+p} + \sum_{p=0}^{\infty} (n+p)A_p \eta^{n+p} + \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_p \eta^{n+p+2} - \alpha \sum_{p=0}^{\infty} A_p \eta^{n+p+4} = 0,$$

где через α обозначен параметр m^2 , т. е. $\alpha = m^2 = l^2 R^2$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях η , получим:

$$\begin{aligned} (n-1)nA_0 + nA_0 &= 0, \\ n(n+1)A_1 + (n+1)A_1 &= 0, \\ (n+1)(n+2)A_2 + (n+2)A_2 + \alpha A_0 &= 0, \\ (n+2)(n+3)A_3 + (n+3)A_3 + \alpha A_1 &= 0, \\ (n+3)(n+4)A_4 + (n+4)A_4 + \alpha A_2 - \alpha A_0 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ (n+p)^2 A_p + \alpha A_{p-2} - \alpha A_{p-4} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие условия: если $A_0 \neq 0$, коэффициент A_0 можно без потери общности принять равным единице, тогда из первого уравнения системы следует, что параметр $n=0$. В этом случае из системы уравнений последовательно найдем, что все коэффициенты A_p с нечетными индексами равны нулю, т. е. $A_{2p+1} = 0$, а для коэффициентов с четными индексами получим рекуррентную формулу

$$A_{2p} = \frac{\alpha}{(2p)^2} (A_{2p-4} - A_{2p-2}),$$

из которой последовательно найдем несколько первых коэффициентов ряда ($A_{-2}=0$):

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_2 = -\frac{\alpha}{2^2}, \quad A_4 = \frac{\alpha}{4^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2^2}\right) \\ A_6 &= -\frac{\alpha}{6^2} \left[\frac{\alpha}{2^2} + \frac{\alpha}{4^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2^2}\right) \right], \dots \end{aligned}$$

Степенной ряд с коэффициентами A_{2p} является знакопеременным, кроме того, $\lim_{p \rightarrow \infty} (A_{2p}) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2p+2}}{A_{2p}} < 1$, тогда по теореме Лейбница ряд будет сходящимся.

При $n=0$ и $A_0=1$ получаем следующее частное решение уравнения (9):

$$\Psi\left(\frac{r}{R}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} \eta^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{2p} \left(\frac{r}{R}\right)^{2p} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p} \left(\frac{r}{R}\right)^{2p},$$

тогда частное решение уравнения (3) можно записать так:

$$\theta\left(\frac{r}{R}, x\right) = C \exp\left(-\frac{\alpha}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p} \left(\frac{r}{R}\right)^{2p} \right]. \quad (11)$$

Чтобы найти постоянную разделения α , обратимся к условиям на стенке: $r = R, \theta(1, x) = 0$, т. е.

$$\theta(1, x) = C \exp\left(-\frac{\alpha}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left[1 + \sum_{p=1}^k A_{2p} \right] = 0,$$

откуда следует, что при $k \rightarrow \infty$ коэффициенты ряда должны удовлетворять условию

$$1 + A_2 + A_4 + \dots + A_{2k} = 0. \quad (12)$$

Решение этого уравнения относительно α дает множество собственных значений постоянной разделения α_n . Относительно просто это уравнение решается при небольших натуральных k :

$$k = 1: 1 + A_2 = 1 - \frac{\alpha}{2^2} = 0, \quad \alpha_0 = 4,$$

$$k = 2: 1 + A_2 + A_4 = 1 - \frac{\alpha}{2^2} + \frac{\alpha}{4^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2^2}\right) = 0, \quad \alpha_0 = \begin{pmatrix} 6 + i2\sqrt{7} \\ 6 - i2\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$k = 3: 1 + A_2 + A_4 + A_6 =$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{2^2} + \frac{\alpha}{4^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2^2}\right) - \frac{\alpha}{6^2} \left(\frac{\alpha}{2^2} + \frac{\alpha}{4^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2^2}\right)\right) = 0$$

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}a + \frac{16}{3} - \frac{260}{3a} \\ -\frac{2}{3} + \frac{16}{3} + \frac{130}{3a} \pm i2\sqrt{3} \left(\frac{a}{3} + \frac{65}{3a}\right) \\ a = \sqrt[3]{64 + 9\sqrt{3441}} \end{pmatrix}.$$

Однако при больших значениях k даже применение численных процедур нахождения корней указанного уравнения становится технически затруднительным по причине громоздкости записи этого уравнения. Тем не менее, использование рекурсии позволяет программно обойти это препятствие. Рассмотрим алгоритм нахождения корней характеристического уравнения.

Вначале описываем функцию $A(\alpha, p)$ коэффициентов ряда

V_i – элементы вектора-столбца правой части, причем $i=1,2,\dots,m+1$, $j=1,2,\dots,m$, $m \leq k$, тогда систему линейных уравнений можно записать в матричном виде $A \cdot C = B$, а ее решение так: $C^* = B \cdot A^{-1}$, где A^{-1} – матрица, обратная A . Решения системы уравнений являются искомыми коэффициентами ряда $\{C_1^*, C_2^*, \dots, C_m^*\}$. Теперь распределение температуры в потоке описывается функцией:

$$\theta\left(\frac{r}{R}, x\right) = \sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \sum_{p=0}^k A_{2p}(\alpha_n) \left(\frac{r}{R}\right)^{2p}, \quad (16)$$

причем $k \rightarrow \infty$.

Найденное температурное поле позволяет рассчитать коэффициент теплоотдачи на стенке трубы: по закону теплопроводности Фурье плотность теплового потока на стенке равна

$$q_c = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial \theta\left(\frac{r}{R}, x\right)}{\partial \left(\frac{r}{R}\right)} \Bigg|_{r=R} = -\lambda \frac{2}{R} \sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \sum_{p=1}^k p A_{2p}(\alpha_n).$$

Этот же тепловой поток рассчитаем по закону Ньютона – Рихмана, однако результат расчета будет зависеть от определяющей температуры, точнее, от способа определения этой температуры.

Если в качестве определяющей температуры выбрать максимальную температуру между стенкой и осью потока, то для конвективного теплового потока на стенке следует написать

$$q_c = \beta_{\max} \theta(0, x) = \beta_{\max} \sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right),$$

где β_{\max} – коэффициент теплоотдачи, подсчитанный по максимальному температурному напору.

Приравнивая вычисленные плотности тепловых потоков и вводя число Нуссельта, найдем

$$Nu_{\max}(x) = \frac{\beta_{\max} 2R}{\lambda} = -4 \frac{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \sum_{p=1}^k p A_{2p}(\alpha_n)}{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right)}.$$

Если же в качестве определяющей температуры выбрать среднюю на интервале $[0, R]$

$$\bar{\theta}(x) = \frac{1}{R} \int_0^R \theta(r, x) dr = \sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left(1 + \sum_{p=1}^k \frac{A_{2p}(\alpha_n)}{2p+1}\right),$$

тогда закон Ньютона – Рихмана примет вид $q_c = \beta \bar{\theta}$, а число Нуссельта оказывается равным

$$Nu_{\text{mid}}(x) = \frac{\beta 2R}{\lambda} = -4 \frac{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \sum_{p=1}^k p A_{2p}(\alpha_n)}{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left(1 + \sum_{p=1}^k \frac{A_{2p}(\alpha_n)}{2p+1}\right)}$$

Наконец, если в качестве определяющей температуры выбрать среднюю в сечении

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x) &= \frac{1}{S} \int_S \theta(r, x) dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r \theta(r, x) dr = \\ &= \sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left(1 + \sum_{p=1}^k \frac{A_{2p}(\alpha_n)}{p+1}\right), \end{aligned}$$

то число Нуссельта будет равно

$$Nu_{\min}(x) = \frac{\beta 2R}{\lambda} = -4 \frac{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \sum_{p=1}^k p [A_{2p}(\alpha_n)]}{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left(1 + \sum_{p=1}^k \frac{A_{2p}(\alpha_n)}{p+1}\right)}.$$

На рис. 1 показано распределение приведенной температуры $\theta(r/R, x)/\Theta$ вдоль канала для различных значений радиуса. Расчеты проводились для воды при $R=0,01$ м, $Pe=50$, при однородной начальной температуре $\Theta=100^\circ\text{C}$, базисная система функций определялась при $k=8$. Действительные положительные корни уравнения (12) составляли $\alpha_1=7,3115$, $\alpha_2=31,89$, а решения линейной системы уравнений при однородной начальной температуре, нормированной на единицу, были: $C_1=1,2976$ и $C_2=-0,2976$.

Характер изменения избыточной температуры на любых расстояниях от оси течения говорит о быстром ее изменении вдоль потока, так что уже на расстоянии 40 калибров от входного сечения наступает термическое равновесие. На рис. 2 представлены графики распределения приведенной температуры по радиусу для различных сечений x . К таким же результатам приводит расчет, выполненный в рамках теории теплового пограничного слоя.

На рис. 3 приведены графики зависимости чисел Нуссельта по длине канала x .

Графики показывают, что происходит непрерывное уменьшение чисел Нуссельта по потоку. Асимптотические значения этих чисел составляют: $Nu_{\max}=2,0$ и $Nu_{\text{mid}}=3,5$, $Nu_{\min}=5,2$. К близким, но большим значениям по числу Nu_{mid} приводит и теория теплового пограничного слоя, однако с погрешностью в 10% эти результаты совпадают.

Сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе данными [2] можно провести по среднemasсовой температуре

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle &= \frac{1}{\dot{m} c_v} \int_S \rho u(r) c_v \theta(r, x) dS = \frac{4}{R^2} \int_0^R r \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \theta(r, x) dr = \\ &= \sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n|}{Pe} \frac{x}{R}\right) \left(1 + 2 \sum_{p=1}^k \frac{A_{2p}(\alpha_n)}{(p+1)(p+2)}\right) \dot{m} = \pi R^2 \frac{U}{2}. \end{aligned}$$

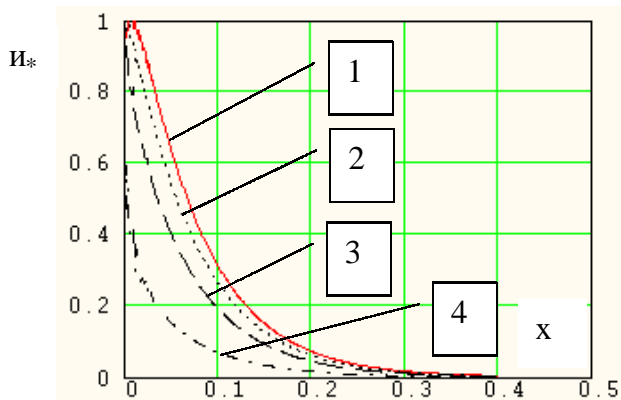


Рисунок 1. Зависимости приведенной температуры I_* при различных радиусах трубы по длине канала x , м: кривая 1 – $r/R=0$, 2 – $r/R=0,3$, 3 – $r/R=0,5$, 4 – $r/R=0,8$.

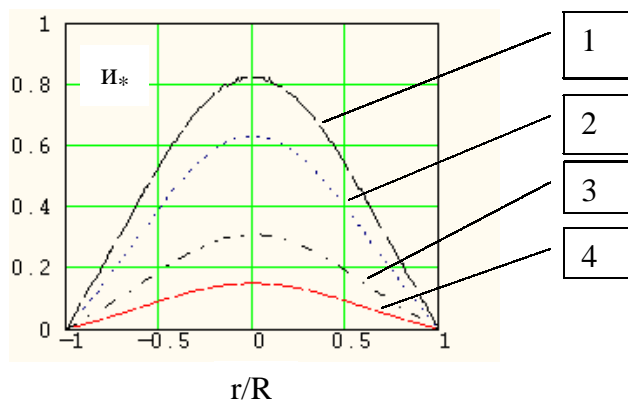


Рисунок 2. Распределение приведенной температуры

$\theta_* = \theta\left(\frac{r}{R}, x\right) / \Theta$ по радиусу в различных сечениях канала: кривая 1 – $x=3R$, 2 – $5R$, 3 – $10R$ и 4 – $15R$.

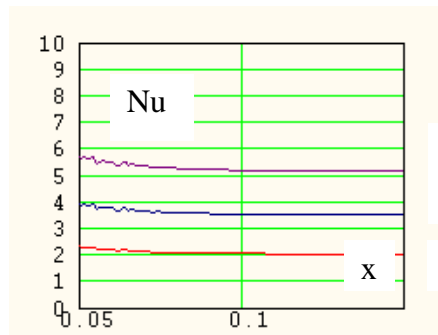


Рисунок 3. Зависимость чисел Нуссельта от длины трубы x , м: кривая 1 – Nu_{max} , 2 – Nu_{mid} , 3 – Nu_{min} , x – продольная координата, м.

Число Нуссельта, порождаемое этой температурой, имеет вид:

$$Nu(x) = \frac{\beta 2R}{\lambda} = -4 \frac{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n| x}{Pe R}\right) \sum_{p=1}^k p A_{2p}(\alpha_n)}{\sum_{n=1}^m C_n^* \exp\left(-\frac{|\alpha_n| x}{Pe R}\right) \left(1 + 2 \sum_{p=1}^k \frac{A_{2p}(\alpha_n)}{(p+1)(p+2)}\right)}$$

Автор книги [2] приводит значение числа Нуссельта, равное $Nu=3,658$. Это значение также проверялось экспериментально и показало хорошее соответствие опыту. Расчет по приведенной формуле на участке стабилизации эпюры температур ($x>0.1$ м) дает значение $Nu=3,653$, которое также близко к значению чисел Nu_{mid} . В [2] данная задача решается последовательным уточнением эпюры температур в потоке до полного удовлетворения балансовому уравнению энергии, что не всегда удобно.

Таким образом, можно сделать вывод о достаточно хорошем соответствии полученных аналитических результатов данным опытов.

Список использованной литературы:

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1979. – 710 с.
2. Кэйс В.М. Конвективный тепло- и массообмен. М.: Энергия, 1972. – 445 с.