А.П. Васильев

РАСЧЕТ ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ, ПОМЕЩЕННОЙ ВО ВНЕШНЕЕ ОДНОРОДНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Рассматриваются процессы схлопывания кавитационных пузырьков в вязкой электропроводной жидкости, помещенной в магнитное поле. Выводится система уравнений, описывающих процесс схлопывания пузырька и индуцированного магнитного поля, которая исследована численными методами. Показано, что происходит увлечение магнитного поля межфазной границей, причем чем больше скорость схлопывания, тем выше наведенное магнитное поле.

В жидкометаллических МГД-компрессорах холодильных установок сжатие пузырьков пара хладона происходит во внешнем магнитном поле. Попадая в область повышенного давления, пузырьки начинают схлопываться и порождают ударные явления [1]. В работе [2] расчет динамических и теплообменных процессов при схлопывании паровых пузырьков был выполнен в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса

$$\mathrm{Re_m} = \mu_0 \sigma_l w_a a << 1,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, σ_l – электропроводность окружающей жидкости, w_a – скорость межфазной границы парового пузырька, a – радиус пузырька. Приближение малых магнитных чисел Рейнольдса означает, что величиной индуцированного магнитного поля $\mathbf{b}$ можно пренебречь по сравнению с индукцией приложенного магнитного поля $\mathbf{B_0}$ [3].

Известно, что схлопывание паровых пузырьков может происходить в инерционном и термическом режимах. Если скорость отвода теплоты с поверхности пузырька будет много больше скорости выделения теплоты конденсации в самом пузырьке $Q_\Sigma >> Q_g$, то пузырек будет схлопываться в инерционном режиме. При $Q_\Sigma << Q_g$ схлопывание пузырька происходит в термическом режиме, т. е. под контролем внешнего теплообмена. В случае $Q\Sigma \sim Q_g$ схлопывание пузырька определяется и динамическими и теплофизическим процессами.

При интенсивном отводе теплоты от пузырька, имеющем место в МГД-компрессоре, схлопывание пузырька происходит в инерционном режиме, когда достигаются высокие скорости межфазной границы пузырька, а в окружающей жидкости наводятся значительные индукционные токи $\mathbf{j} = \sigma_l \mathbf{w}_l \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{w}_l$ – скорость в жидкости. С одной стороны, индукционные токи приводят к интенсивному рассеиванию кинетической энергии жидкости через механизм джоулевой диссипации, а с другой, – наводят в пространстве индуцированное магнитное поле $\mathbf{b}$, т. е. обратимо переводят часть кинетической энергии жидкости в магнитную энергию. И тот, и другой механизмы приводят к демпфированию гидравлического удара, возникающего при схлопывании парового пузырька.

При числах $1 < \mathrm{Re_m} < 10$ течение жидкости сильно искажает приложенное магнитное поле, однако влиянием поля на течение жидкости еще можно пренебречь [3].

С целью обоснования безиндукционного приближения представляет интерес оценить величину индуцированного магнитного поля при схлопывании парового пузырька.

Гидродинамическая часть системы уравнений динамики парового пузырька включает уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{w}_l = 0, \tag{1}$$

уравнение Навье-Стокса

$$\rho_l \frac{\partial \mathbf{w}_l}{\partial t} + \rho_l (\mathbf{w}_l \cdot \nabla) \mathbf{w}_l = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{w}_l, \tag{2}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ – плотность электромагнитной силы; уравнение Клапейрона-Клаузиуса для давления пара в пузырьке

$$\frac{dp_s}{dT_s} = \frac{l}{R_\mu (\upsilon'' - \upsilon')}, \tag{3}$$

условие напряжений на сферической поверхности раздела фаз

$$p_s = p_a + 2\frac{\Sigma}{a} - 2\mu \left. \frac{\partial w_l}{\partial r} \right|_{r=a}, \tag{4}$$

где p_a – давление в жидкости на межфазной поверхности, справедливое при однородном давлении пара в пузырьке и пренебрежении массообменом на поверхности пузырька.

Электродинамическая часть системы уравнений включает уравнения Максвелла в низкочастотном приближении для немагнитных сред

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5), (6), (7)$$

и закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma_l (\mathbf{E} + \mathbf{w}_l \times \mathbf{B}), \tag{8}$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля.

Пренебрегая влиянием индуцированного магнитного поля, из уравнений (1) и (2) в сферических эйлеровых координатах (r,t) получим уравнение динамики парового пузырька – уравнение Релея-Ламба

$$a\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{\sigma_l B_0^2}{\rho_l} a \frac{da}{dt} +$$

$$+ 4\nu \frac{1}{a}\frac{da}{dt} + 2\frac{\Sigma}{\rho_l a} = \frac{p(t) - p_\infty}{\rho_l}, \tag{9}$$

где $p(t) = p_s$ – давление пара в пузырьке, причем в инерционном режиме течения $p_s(T_s) = const$.

Коэффициент 2/3 у плотности электромагнитной силы обусловлен ее осреднением по поверхности сферы

$$\langle f_r \rangle = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -\frac{2}{3}\sigma_l w_l B_0^2,$$

при этом меридиональной компонентой f_θ электромагнитной силы пренебрегаем.

Для вывода уравнения магнитного поля выразим из закона Ома (8) напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma_l}\mathbf{j} - \mathbf{w}_l \times \mathbf{B}$$

и возьмем операцию вихря от обеих частей этого равенства

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma_l}\operatorname{rot}\mathbf{j} - \operatorname{rot}(\mathbf{w}_l \times \mathbf{B}).$$

Учитывая закон электромагнитной индукции Фарадея (7), перепишем последнее выражение в виде

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma_l \mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B} - \operatorname{rot}(\mathbf{w}_l \times \mathbf{B}).$$

Выражение $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$ с учетом соленоидальности магнитного поля равно $-\nabla^2\mathbf{B}$, поэтому уравнение магнитного поля принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda\nabla^2\mathbf{B} + \operatorname{rot}(\mathbf{w}_l \times \mathbf{B}), \tag{10}$$

где $\lambda = 1/(\sigma_l \mu_0)$, или, заменяя $\operatorname{rot}(\mathbf{w}_l \times \mathbf{B})$ по формулам векторного анализа с учетом уравнений (1) и (5), придадим уравнению (10) следующий вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{w}_l \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{w}_l + \lambda\nabla^2\mathbf{B}. \tag{11}$$

Если ввести субстационарьную производную $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{w}_l \cdot \nabla)$, то уравнение (11) примет канонический вид

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{w}_l + \lambda\nabla^2\mathbf{B}. \tag{12}$$

Запишем уравнения магнитного поля (11) в сферической системе координат (r, θ, φ), учитывая радиальность течения $\mathbf{w}_l(w_l, 0, 0)$, симметрию магнитного поля по широтному углу φ, т. е. $\mathbf{B}(B_r, B_\theta, 0)$. Вычислив конвективные производные $(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{w}_l$, $(\mathbf{w}_l \cdot \nabla)\mathbf{B}$ и оператор Лапласа $\nabla^2\mathbf{B}$, получим

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} + w_l \frac{\partial B_r}{\partial r} = B_r \frac{\partial w_r}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right) \tag{13}$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} + w_l \frac{\partial B_\theta}{\partial r} = -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right]. \tag{14}$$

К уравнениям (13), (14) необходимо добавить условия однозначности:

На бесконечности:

$$r \to \infty,\ \theta = \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ B_\theta = B_0,\ B_r = 0;$$

$$r \to \infty,\ \theta = 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ B_r = -B_0,\ B_\theta = 0;$$

$$\text{при } 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$$

$$-B_0\mathbf{k} = -B_0\cos\theta\,\mathbf{i}_r + B_0\sin\theta\,\mathbf{i}_\theta,$$

где $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$ – физический базис сферической системы координат.

При $r=a(t)$ имеет место скачок электропроводных свойств, поэтому на поверхности пузырька остается непрерывной нормальная составляющая магнитного поля: $B_{gr} = B_r\big|_{r=a}$, где B_g – индукция магнитного поля в пузырьке. В немагнитных средах на поверхности разрыва остается непрерывной и касательная компонента магнитного поля: $B_{g\theta} = B_\theta\big|_{r=a}$. Поскольку пар в пузырьке неэлектропроводен, то $\lambda \to \infty$, и поле внутри пузырька подчиняется уравнению Лапласа, причем в любой момент времени в центре пузырька

$$r = 0,\ \ \theta = \pi/2,\ \ B_r(t, \pi/2, 0) = 0,\ \ B_\theta(t, \pi/2, 0) = B(t).$$

Чтобы найти индукцию магнитного поля в центре пузырька, воспользуемся формулой Био-Савара – Лапласа. Компонента $\mathbf{b}||$ наведенного магнитного поля на направление приложенного поля $\mathbf{B}_0$ в декартовой системе координат определяется формулой

$$\mathrm{d}b_{\perp\perp} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|\sin\theta}{r^3}\mathrm{dV}.$$

Проинтегрируем это уравнение по всему пространству жидкости, где протекают индукционные токи, и получим

$$b_{\perp\perp} = -\int_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|\mathbf{j}|}{r^2}\sin\theta\, dV = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_a^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{j_\varphi}{r^2}\sin^2\theta\, r^2\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\mu_0\sigma_l w_a a(t) B_0. \tag{15}$$

При вычислении тройного интеграла учтено, что $j_\varphi = \sigma_l w_a B_0 \sin\theta$.

В случае малого радиуса пузырька индуцированное в его центре магнитное поле можно считать однородным в экваториальной плоскости вплоть до границы с жидкой фазой:

$$\mathrm{r} = \mathrm{a(t)}:\ \ \mathrm{B}_\theta = \mathrm{B}_0 + \mathrm{b}_{\perp\perp} = \left(1 - \frac{2}{3}\sigma_l \mathrm{w}_a(\mathrm{t})\mathrm{a(t)}\right)\mathrm{B}_0. \tag{16}$$

Наибольшее индуцированное поле возникает в экваториальной плоскости пузырька, где имеют место наибольшие азимутальные токи. По этой причине оценку величины индуцированного магнитного поля можно получить именно для этого сечения пузырька.

Уравнение, описывающее поле в этой плоскости, следует из уравнения (14) с учетом симметрии поля относительно экватора:

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ B_r = 0,\ \left.\frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2} = 0,$$

и имеет вид

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t}+w_l\frac{\partial B_\theta}{\partial r}=\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)\right]. \qquad (17)$$

Для решения уравнения (17) перейдем к системе приведенных координат

$$\eta=\frac{r}{a(t)}$$

и, используя формулы перехода

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{a(t)}\frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial t}(\ )_r=\frac{\partial}{\partial t}(\ )_\eta-\frac{\dot a}{a}\eta\frac{\partial}{\partial\eta},$$

преобразуем уравнение (17) с учетом того, что индукцию магнитного поля Bq на луче $[a,\infty)$ можно представить в виде суммы $B_\theta=B_0+b_\theta$, где b_θ – индуцированное магнитное поле, к виду

$$\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\dot a}{a}\eta\frac{\partial b}{\partial\eta}+w_a\frac{1}{\eta^2 a}\frac{\partial b}{\partial\eta}=\frac{\lambda}{a^2}\frac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}+2\frac{\lambda}{a^2\eta}\frac{\partial b}{\partial\eta},$$

причем индекс θ у индуцированного поля b опущен.

Перейдем к приведенным величинам:

$$b_*=\frac{b}{B_0},\ a_*=\frac{a}{a_0},\ \tau_*=\frac{t}{t_0},\ w_*=\frac{w}{w_0}$$

соответственно полю, радиусу, времени и скорости, где $t_0=\frac{a_0}{w_0},\ w_0=\sqrt{\frac{p_s}{\rho}}$ – характерные время и скорость в задаче, тогда последнее уравнение примет вид:

$$\frac{\partial b_*}{\partial\tau_*}+\frac{w_*}{a_*}\left(\frac{1}{\eta^2}-\eta\right)\frac{\partial b_*}{\partial\eta}=\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{1}{a_*^{\,2}}\frac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}+2\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{1}{a_*^{\,2}\eta}\frac{\partial b}{\partial\eta}, \qquad (18)$$

а магнитное число Рейнольдса определено равенством: $\mathrm{Re}_m=\mu_0\sigma_l a_0 w_0$.

Уравнение Релея-Ламба в приведенных переменных принимает вид

$$a_*\frac{d^2a_*}{d\tau_*^{\,2}}+\frac{3}{2}\left(\frac{da_*}{d\tau_*}\right)^2+\frac{2}{3}\frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Re}}a_*\frac{da_*}{d\tau_*}+$$

$$+\frac{4}{\mathrm{Re}}\frac{1}{a_*}\frac{da_*}{d\tau_*}+\frac{2}{\mathrm{We}}\left(\frac{1}{a_*}-1\right)=p_*-(k+1), \qquad (19)$$

где $k=\delta p_\infty/p_s$ – параметр возмущения, δp_∞ – скачок давления, выводящий систему из равновесия, а числа Гартмана, Рейнольдса и Вебера определены равенствами:

$$\mathrm{Ha}=a_0B_0\sqrt{\frac{\sigma_l}{\rho\nu_l}},\ \mathrm{Re}=\frac{a_0w_0}{\nu_l},\ \mathrm{We}=\frac{\rho w_0^2}{\Sigma/a_0}.$$

Систему уравнений (18), (19) следует дополнить условиями однозначности:

$$\begin{aligned}&\tau_*=0:\ b_*=0,\ a_*=1,\ w_*=0;\\&\eta=1:\ w_*=\dot a_*,\ b_*=\frac{2}{3}\mathrm{Re}_m\,w_*a_*,\ \tau_*>0;\\&\eta\to\infty:\ w_*\to 0,\ b_*\to 0,\tau_*>0.\end{aligned} \qquad (20)$$

Для численного решения полученной системы уравнений удобно уравнение (18) представить в виде

$$\frac{\partial b}{\partial\tau}+A(\tau,\eta)\frac{\partial b}{\partial\eta}-C(\tau)\frac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}=0, \qquad (20)$$

где функции $A(\tau,\eta)$ и $C(\tau)$ определены так:

$$A(\eta,\tau)=\frac{w_*}{a_*}\left(\frac{1}{\eta^2}-\eta\right)-\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{2}{\eta a_*^2},\ C(\tau)=\frac{1}{\mathrm{Re}_m}\frac{2}{a_*^2},$$

и звездочка у поля b опущена.

Пусть T и L – временной и пространственный интервалы, на которых ищутся решения системы уравнений (19), (21) с условиями однозначности (20), а $\delta\tau=\frac{T}{N}$, $\delta\eta=\frac{L}{M}$ – шаги на сетке по соответствующим переменным:

$$\tau=n\delta\tau,\ \eta=1+m\delta\eta,\ n\in[0,N],\ m\in[0,M-1].$$

Для решения уравнения (21) воспользуемся методом конечных разностей и заменим в нем производные по выражениям

$$\frac{\partial b}{\partial\tau}=\frac{b_{n,m}-b_{n-1,m}}{\delta\tau},\ \frac{\partial b}{\partial\eta}=\frac{b_{n,m+1}-b_{n,m}}{\delta\eta},$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}=\frac{b_{n,m+1}-2b_{n,m}+b_{n,m-1}}{\delta\eta^2}.$$

Уравнение (21) примет вид

$$-r_nb_{n,m-1}+\left(1+2r_n-A_n\frac{\delta\tau}{\delta\eta}\right)-r_nb_{n,m+1}=b_{n-1,m}, \qquad (22)$$

где $r_n=C_n\frac{\delta\tau}{\delta\eta^2}$.

Конечно-разностное уравнение (22) порождает неявную схему, хорошо исследованную в методах численного решения уравнения энергии [4].

Не останавливаясь на подробностях программной реализации решения системы уравнений пузырька и магнитного поля, приведем основные результаты численного исследования этой системы. Отметим лишь, что при решении уравнения (19) методом Рунге-Кутта становились известными на каждом временном шаге динамические параметры, которые программно передавались в подпрограмму решения уравнения (22).

Ниже обсуждаются результаты расчета индуцированного магнитного поля при схлопывании парового пузырька фреона в среде жидкого галлия: ρ=6093 кг/м^3, ν_l=3,11·10^{-7} м^2/с, Σ=0,487 Н/м, σ_l =3,86·10^6 (Ом·м)$^{-1}$, начальное давление пара фреона в пузырьке радиусом a_0=5 мм соответствовало температуре 5^{0}С и с учетом капиллярного давления составляло p_s=5·10^4 Па. Система мгновенно ставилась под конечное давление 5·10^5 Па, что соответствовало скачку давления с параметром возмущения k=9,1. Характерные скорость w_0=2,86 м/с и время τ_0=1,75·10^{-3} с порождали числа задачи Re=46000, We=510, Re_m=0,046, Ha=225 при индукции внешнего поля B_0=1 Т.

На рис. 1 показаны графики приведенного индуцированного магнитного поля b_* в пространстве окружающей жидкости для различных моментов времени τ_*. Кривые показывают увеличение индукции поля по мере приближения к поверхности пузырька из бесконечности, где оно равно нулю, а также со временем процесса. Первая особенность объясняется тем, что наибольшие скорости жидкости при схлопывании пузырька возникают вблизи межфазной поверхности, что в свою очередь приводит к большим индукционным токам именно вблизи пузырька, а они в свою очередь искажают приложенное магнитное поле. С увеличением времени процесса происходит нарастание скорости схлопывания межфазной границы, что и обуславливает рост индуцированного поля по времени.

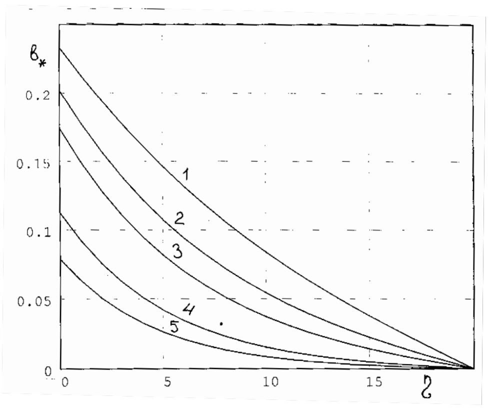

Рисунок 1. Зависимость индуцированного магнитного поля b_* от расстояния h от пузырька для различных моментов времени: кривая 1 – τ_*=(39/50)T, 2 – (38/50)T, 3 – (35/50)T, 4 – (25/50)T, 5 – (15/50)T, 6 – (10/50)T; T=0,316561 – приведенная длительность процесса

На рис. 2 изображены графики зависимости индуцированного магнитного поля b_* от времени τ_* на различных расстояниях от поверхности пузырька. Кривые показывают, что в процессе схлопывания пузырька во всем внешнем пространстве жидкости происходит искажение внешнего магнитного поля. Поле увлекается пузырьком, что является проявлением частичной «вмороженности» поля в жидкость. Этот эффект, хорошо известный в магнитной гидродинамике, иллюстрируется теми же графиками, изображенными на рис. 3, полученными при десятикратном увеличении электропроводности среды (электропроводность меди).

Кривые на рис. 3 показывают, что максимум индукции индуцированного магнитного поля не совпадает с поверхностью пузырька, а расположен от нее на некотором расстоянии вглубь жидкости (кривая 3 на этом рис.). Эту особенность можно обяснить влиянием не только величины индуцированного тока (или скорости межфазной границы), но и длиной его контура циркуляции (или радиусом). Максимум произведения $w_* a_*$ лежит не на межфазной границе, а с некоторым смещением, что и обуславливает смещение максимума индуцированного магнитного поля с поверхности пузырька. В то же время графики показывают, что происходит значительное усиление магнитного поля, порядка в 100 тысяч раз, но в очень короткие промежутки времени.

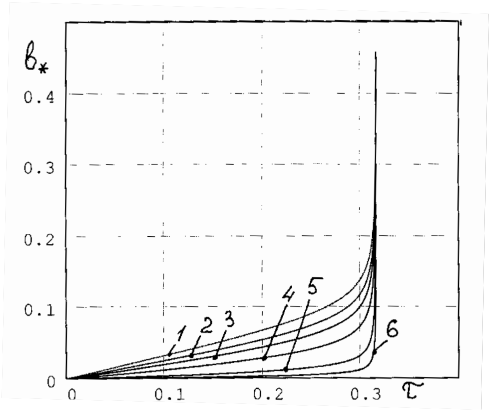

Рисунок 2. Зависимость приведенного индуцированного поля b_* от времени процесса t_* на различных расстояниях от пузырька: кривая 1 – поверхность пузырька, 2 – 1 пространственный шаг, 3 – 5 шагов, 4 – 15, 5 – 19 шагов

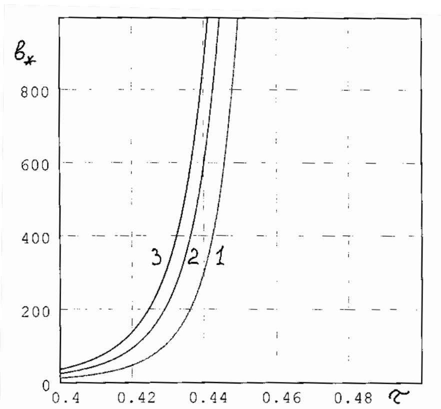

Рисунок 3. Зависимость приведенного индуцированного поля b_* от времени процесса t_* на различных расстояниях от пузырька: кривая 1 –1 шаг, 2 – 2 шага, 3– 5 (электропроводность увеличена в 10 раз по сравнению с рис. 2)

Таким образом, кавитационные пузырьки можно использовать в качестве генераторов магнитного поля по типу взрывомагнитных генераторов.

Список использованной литературы:

1. Васильев А.П., Бондаренко В.А., Тараков Д.А. Жидкометаллический МГД-компрессор // Холодильная техника. – 1991, №12. – С. 22-24.
2. Васильев А.П. Схлопывание пузырька с влажным паром в поле электромагнитной силы // ПМТФ, 2002.
3. Кирко И.М., Кирко Г.Е. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. Пермь, 1979. – 95 с.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – Энергоатомиздат, 1984. – 149 с.