МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

И.К. ЗУБОВА, О.В. ОСТРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для студентов всех специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования.

Оренбург 2009

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161 я 73
З91

Рецензенты
кандидат физико-математических наук И.В. Игнатушина

Зубова, И.К.
З91 Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие/И.К. Зубова, О.В. Острая – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009 – 132 с.

ISBN

Данное пособие содержит продолжение курса математического анализа, читающегося в первом семестре. Здесь вводятся основные понятия дифференциального исчисления функций одной переменной: даются определения производной, дифференциала, дифференцируемости функции в точке, доказываются теоремы о различных свойствах функций, дифференцируемых на некотором промежутке, которые затем применяются к исследованию функций. Здесь, как и в первом пособии авторов, где изложено введение в математический анализ, предлагаются примерные схемы проведения практических занятий и комплексы задач для самостоятельного решения по каждой теме.

Учебное пособие предназначено для преподавателей математического анализа и студентов всех специальностей.

З $\frac{1602070000}{\quad}$ ББК 22.161 я73

ISBN….

Содержание

1 Лекция №1. Введение

Первая глава курса математического анализа, в которой вводятся такие основные его понятия, как последовательность, функция, их предел, непрерывность функции и др., изложена в нашем пособии «Введение в математический анализ». Содержание этой главы изучается на первых одиннадцати лекциях и стольких же практических занятиях первого семестра. Изучение следующей главы, посвященной дифференциальному исчислению функций одной переменной, рассчитано на 34 часа: восемь лекций, восемь практических занятий и контрольная работа. Содержание этих лекций с планами проведения соответствующих практических занятий представлено в предлагаемой второй части пособия.

1.1 Производная функции

Определение 1. **Производной** от функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$.

Символически это определение можно записать так:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Для производной функции одной переменной существуют также следующие обозначения: $y'; \dfrac{df(x)}{dx}; \dfrac{dy}{dx}$. Смысл и происхождение двух последних обозначений мы проясним ниже.

При фиксированном x величина $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ есть функция от Δx: $\psi(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$.

Для существования производной от функции $y = f(x)$ в точке x необходимо, чтобы $y = f(x)$ была определена в некоторой окрестности точки x, в том числе в самой этой точке. Тогда функция $\psi(\Delta x)$ определена для достаточно малых, но не равных нулю Δx, т.е. для Δx, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\Delta x| < \delta$, где δ достаточно мало.

Но это условие не является достаточным для существования производной: не для всякой функции $y = f(x)$, определенной в окрестности точки x, существует предел (1).

Обычно, когда говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, имеют в виду, что предел (1) – конечен. Если предел (1) равен $\pm\infty$, то говорят, что в точке x функция $y = f(x)$ имеет бесконечную производную.

Если в формуле (1) предполагается, что $\Delta x \to 0$ и $\Delta x > 0$, то соответствующий предел, если он существует, называется правой производной от функции $y = f(x)$ в точке x:

$$f'_{пр.}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \qquad (2)$$

аналогично определяется левая производная функции $y = f(x)$ в точке x:

$$f'_{лев.}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке в точке x левую и правую производную, и эти производные равны, то функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x.

$$f'_{пр.}(x) = f'_{лев.}(x) = f'(x) \qquad (4)$$

Но если правая и левая производные в точке x существуют и не равны, то производная $f'(x)$ в точке x у функции $y = f(x)$ не существует.

Из непрерывности функции в точке не следует существования производной у функции в этой точке. В частности, существуют функции, которые непрерывны на всей действительной оси, но не во всякой точке имеют производную. Однако всякая функция, имеющая в точке x конечную производную, непрерывна в этой точке. Докажем это.

Пусть предел (1) существует и конечен в точке x. Этот факт можно записать следующим образом:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x), \text{ где } \varepsilon(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0. \qquad (5)$$

(Здесь мы воспользовались теоремой о представимости функции, имеющей предел, в виде суммы этого предела и бесконечно малой функции. См. [10, с. 61], теорема 7.2.1).

Умножим обе части равенства (5) на Δx. Получим: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$ в обеих частях полученного равенства, и увидим, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

1.2 Геометрический и механический смысл производной

Понятие производной сформировалось в самой тесной связи с решением двух задач: геометрической – о построении касательной к кривой, и физической – об отыскании скорости движения материальной точки, когда известен закон движения этой точки. Решая такие задачи, мы еще в школьных курсах математики и физики выяснили геометрический и физический смысл производной.

В XVII веке особенно возрос интерес к обеим задачам, решавшимся самыми разнообразными методами. Изучая эти методы, мы можем заметить связь между этими задачами и увидеть, как формировалось понятие производной. Рассмотрим, например, задачу о падении тела.

Великий итальянский ученый, астроном, механик и математик **Галилео Галилей (1564-1642)** был одним из первых в изучении движения падающих тел. Им, его учениками и последователями было установлено, что если тело брошено с некоторой горизонтальной начальной скоростью, то перемещения точки по горизонтали (оси x) будут пропорциональны отрезкам времени, за которое это перемещение осуществляется. Перемещения же по вертикали (оси y) пропорциональны квадратам этих отрезков времени. Траекторией движения точки при этом будет парабола. Рассмотрим параллелограмм, сторонами которого будут горизонтальная и вертикальная составляющие скорости движения тела по параболе. Сам вектор скорости, найденный как диагональ этого параллелограмма, будет направлен по касательной к параболе (см. рисунок 1).

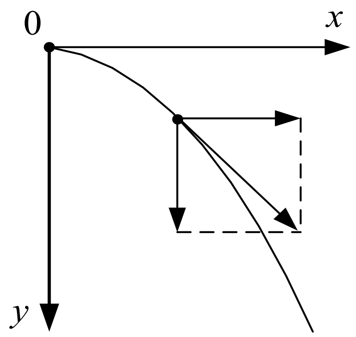

Рисунок 1

Из школьного курса физики должен быть известен механический смысл производной. Если некоторая функция задает закон движения тела, то, отыскав производную этой функции в некоторой точке, мы найдем скорость движения тела в данный момент времени.

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о геометрическом смысле производной функции в точке.

Пусть на интервале $(a;b)$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Её графиком будет непрерывная кривая $\Gamma = \{A(x;\, y) : y = f(x)\}$ (см. рисунок 2).

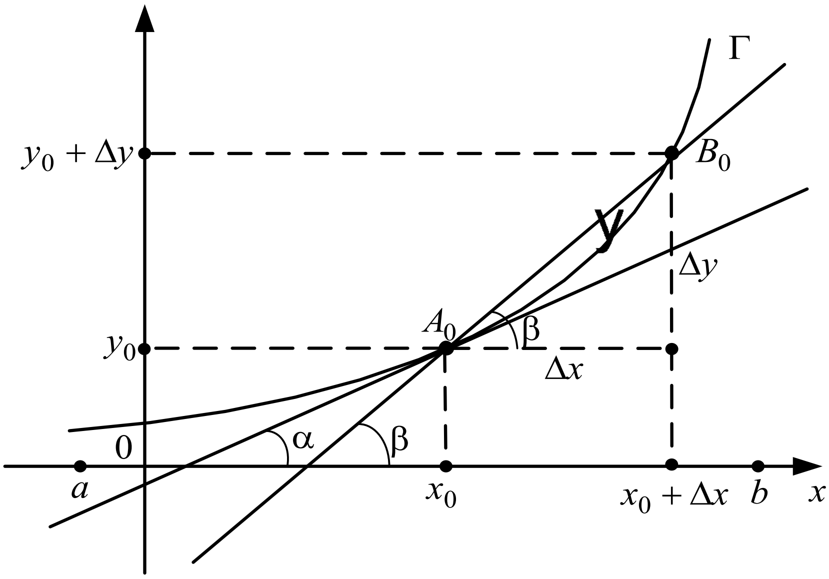

Рисунок 2

Возьмем на кривой Γ некоторую точку $A_0(x_0; y_0)$: $y_0 = f(x_0)$. Пусть точка $B_0(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ также лежит на кривой Γ.

Прямую, проходящую через точки A_0 и B_0, назовем секущей графика Γ. Обозначим буквой β угол, который эта секущая образует с положительным направлением оси Ox. Из рисунка 2 видно, что $tg\,\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, так как функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$. Тогда точка B_0, перемещаясь по кривой Γ, стремится к точке A_0. При этом секущая кривой стремится занять положение касательной к этой кривой в точке A_0. Если при этом угол β, образованный секущей и положительным направлением оси x, стремится к некоторому значению α, отличному от $\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = tg\,\alpha,$$

равный конечной производной от функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0) = tg\,\alpha.$$

Обратно, если существует конечная производная $f'(x_0)$, то $\beta \to \alpha = arctg\, f'(x_0)$.

Таким образом, если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в точке x_0, то график Γ в соответствующей точке имеет касательную с угловым коэффициентом $tg\,\alpha = f'(x_0)$, где $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Здесь α

– угол, образованный касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 и положительным направлением оси x.

Как мы уже отметили, может случиться, что функция в точке x_0 имеет правую и левую производные, не равные между собой:

$$f'_{пр.}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{лев.}(x_0).$$

Каков геометрический смысл этого случая?

Такая точка будет угловой. Касательная к кривой Γ в ней не существует, но можно сказать, что существуют «правая» и «левая» касательные с разными угловыми коэффициентами (см. рисунок 3).

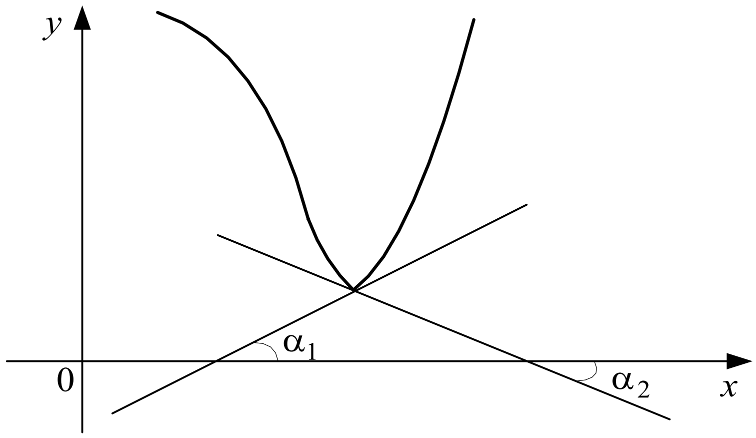

Рисунок 3

Пусть теперь производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 бесконечна:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty.$$

Здесь следует выделить четыре возможных случая:

1) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, см. рисунок 4.

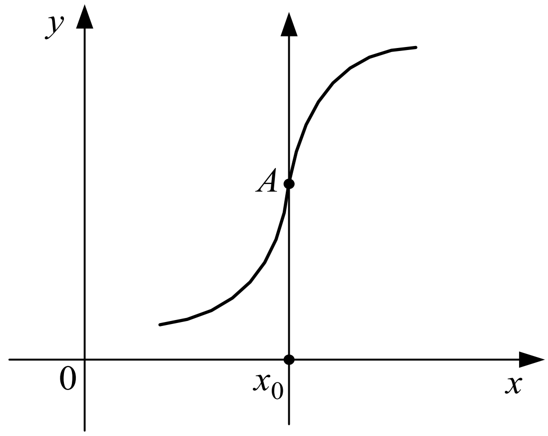

Рисунок 4

2) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, см. рисунок 5.

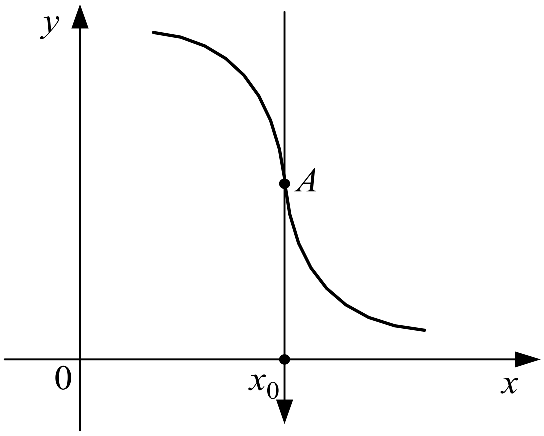

Рисунок 5

3) $f'_{лев.}(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ и $f'_{пр.}(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Левая касательная к графику функции в точке x_0 перпендикулярна оси x и направлена вниз. Правая касательная к графику в этой точке также перпендикулярна оси x, но направлена вверх. См. рисунок 6.

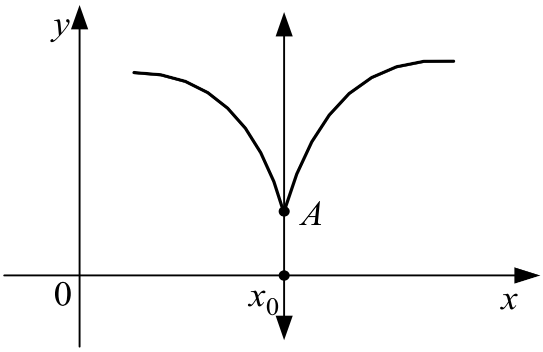

Рисунок 6

4) $f'_{лев.}(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $f'_{пр.}(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, $б = -\frac{р}{2}$.

Случай, противоположный предыдущему, см. рисунок 7.

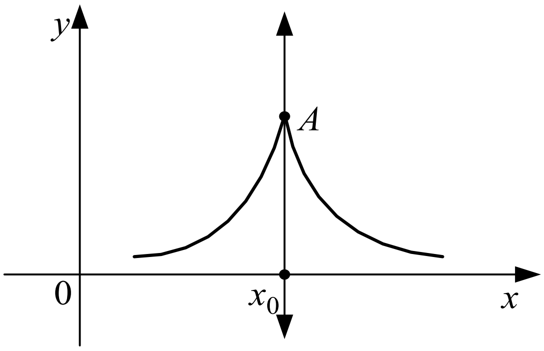

Рисунок 7

1.3 Практическое занятие №1. Вычисление производной функции по определению и ее геометрический смысл

Упражнение 1. Найти приращение Δy и отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y = \dfrac{1}{\left(x^2 - 2\right)^2}$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}4$;

б) $y = \sqrt{x}$ при $x = 0$ и $\Delta x = 0{,}0001$.

Решение: а) $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \dfrac{1}{\left((x + \Delta x)^2 - 2\right)^2} - \dfrac{1}{\left(x^2 - 2\right)^2} =$

$$= \frac{1}{\left((1 + 0{,}4)^2 - 2\right)^2} - \frac{1}{\left(1^2 - 2\right)^2} = \frac{1}{(1{,}96 - 2)^2} - 1 = \frac{1}{0{,}0016} - 1 = 625 - 1 = 624,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{624}{0{,}4} = 1560.$$

б) $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{0{,}0001} - \sqrt{0} = 0{,}01$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0{,}01}{0{,}0001} = 100$.

Ответ: а) $\Delta y = 624$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1560$.

б) $\Delta y = 0{,}01$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 100$.

Упражнение: 2. Найти приращение Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, соответствующие изменению аргумента от x до $x + \Delta x$ для функций:

а) $y = ax + b$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2}$;

в) $y = 2^x$.

Решение: а) $\Delta y = a(x+\Delta x)+b-(ax+b)=a\Delta x$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a\Delta x}{\Delta x}=a$.

б) $\Delta y=\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}\cdot\dfrac{1}{\Delta x}=$

$=-\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x\cdot x^2\cdot(x+\Delta x)^2}=-\dfrac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$.

в) $\Delta y=2^{x+\Delta x}-2^x=2^x\cdot 2^{\Delta x}-2^x=2^x\cdot\left(2^{\Delta x}-1\right)$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2^x\cdot\left(2^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$.

Ответ: а) $\Delta y=a\Delta x$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=a$.

б) $\Delta y=-\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$.

в) $\Delta y=2^x\cdot\left(2^{\Delta x}-1\right)$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2^x\cdot\left(2^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$.

Упражнение 3. Найти $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y=x^3$;

б) $y=\sqrt{x}$.

Решение: а) $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=$

$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x^2$.

б) $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ответ: а) $y=x^3$, $y'=3x^2$,

б) $y=\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Упражнение 4: Показать, что следующие функции не имеют конечных производных в указанных точках:

а) $y=\sqrt[5]{x-1}$ в точке $x=1$;

б) $y=|x|$ в точке $x=0$.

Решение: а) Найдем по определению $y'(1)$:

$$y'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+\Delta x)-1}-\sqrt[5]{1-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{1/5}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{4/5}}=\infty.$$ Значит $y'(1)=\infty$.

б) Учитывая, что $|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0;\\ -x, & x<0,\end{cases}$ вычислим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\begin{cases} 1, & x\ge 0 \quad (x\to +0);\\ -1, & x<0 \quad (x\to -0).\end{cases}$$

Пределы справа и слева в точке $x=0$ существуют, конечны, но не равны между собой, и поэтому предела в точке $x=0$ не существует. Следовательно, функция $y=|x|$ не имеет производной в этой точке.

Упражнение 5: Найти производные функций в точке x:

а) $y=C$, где $C=const$;

б) $y=x^n$;

в) $y=\log_a x$;

г) $y=\sin x$.

Решение: а) Воспользуемся определением производной:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0.$$

Итак, $y=C$, $y'=0$.

б) $y=x^n$ – степенная функция (где n – действительное число).

Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right],$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{n-1}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}}=$$

$$=x^{n-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{t}=n\cdot x^{n-1},\text{ где } t=\frac{\Delta x}{x}.$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью: $(1+t)^n-1\approx n\cdot t$, при $t\to 0$.

Таким образом, $y'=n\cdot x^{n-1}$.

В частности, по этой формуле будем иметь:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

в) $y = \log_a x$ – логарифмическая функция.

Рассмотрим приращение функции Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в точке x: $\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \dfrac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

По определению производной получим:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, \text{ где } t = \frac{\Delta x}{x}.$$

Таким образом, $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

г) $y = \sin x$.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Итак, воспользовавшись первым замечательным пределом и непрерывностью функции $\cos x$, имеем: $y' = \cos x$.

Рассуждая аналогично, получим: $y = \cos x,\ y' = -\sin x$.

Приведем теперь таблицу производных основных элементарных функций, причем производные некоторых из них будут найдены позже.

1) $(C)' = 0$, где $C = const$;

2) $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$, в частности $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

4) $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$;

5) $(\sin x)' = \cos x$;

6) $(\cos x)' = -\sin x$;

7) $(tg\,x)' = \dfrac{1}{cos^2 x}$;

8) $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Производные функций $y = a^x$, $y = tg\,x$, $y = ctg\,x$, $y = arctg\,x$, $y = arcctg\,x$, $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ найдем на следующем практическом занятии, после того как в следующей лекции будут рассмотрены правила дифференцирования произведения и частного функций, а также производная обратной функции.

Упражнение 6: В каких точках производная функции $f(x) = x^3$ численно совпадает со значением самой функции, т.е. $f(x) = f'(x)$?

Решение: $f'(x) = 3x^2$, значит должно выполняться равенство: $x^3 = 3x^2$, $x^3 - 3x^2 = 0$, $x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

Ответ: При $x_1 = 0, x_2 = 3$ производная функции совпадает со значением самой функции.

Упражнение 7: Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = 0{,}1x^3$, проведенной в точке с абсциссой $x = 2$.

Решение: Исходя из геометрического смысла производной $k = tg\,\alpha = f'(x_0)$, где k – угловой коэффициент касательной. Найдем производную функции, $y' = 0{,}1 \cdot 3x^2 = 0{,}3x^2$, значит в точке $x = 2$, имеем $k = 0{,}3 \cdot 2^2 = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$.

Ответ: $k = 1{,}2$.

Упражнение 8. Найти угол между кривыми $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^4$.

Решение: за угол между кривыми принимают наименьший из двух смежных углов, образуемых касательными к кривым в точке их пересечения. Найдем точки пересечения кривых y_1 и y_2 из уравнения $y_1 = y_2$, или $x^2 = x^4$. Отсюда $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$. Следовательно, точки $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$, $M_3(-1;1)$ – точки пересечения кривых.

Вычислим угловые коэффициенты $k_1(x)$ и $k_2(x)$ касательных к данным кривым y_1 и y_2 в точках их пересечения $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$, $M_3(-1;1)$:

$k_1(x) = y_1'(x) = 2x$, $k_2(x) = y_2'(x) = 4x^3$. В точке M_1 имеем: $k_1(0) = 0$, $k_2(0) = 0$; в точке M_2 – $k_1(1) = 2$, $k_2(1) = 4$, в точке M_3 – $k_1(-1) = -2$, $k_2(-1) = -4$.

Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3 углы между касательными к данным кривым соответственно в точках M_1, M_2, M_3. Если α и β – углы наклона к положительной полуоси Ox, то угол между этими прямыми $\varphi = \alpha - \beta$ $\left(\varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$. В данном случае $tg\,\alpha = k_1$, $tg\,\beta = k_2$.

Найдем $tg\,\varphi$, подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу тангенса разности двух углов: $tg\,\varphi = tg\,(\text{б} - \text{в}) = \dfrac{tg\,\text{б} - tg\,\text{в}}{1 + tg\,\text{б} \cdot tg\,\text{в}} = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Отсюда для точек M_1, M_2, M_3 соответственно получим: $tg\,\varphi_1 = 0$, $tg\,\varphi_2 = \dfrac{2}{9}$, $tg\,\varphi_3 = \dfrac{2}{9}$. Следовательно, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = arctg\,\dfrac{2}{9}$.

Ответ: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = arctg\,\dfrac{2}{9}$.

Упражнение 9. Пусть закон движения летательного аппарата по оси Ox имеет вид $x(t) = 3t^3 - t^2$. Найти скорость движения $v(t)$ летательного аппарата в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Решение: найдем скорость движения летательного аппарата в произвольной момент времени t: $v(t) = x'(t) = 9t^2 - 2t$.

Вычислим значение скорости в заданные моменты времени: $v(0) = x'(0) = 0$, $v(1) = x'(1) = 7$, $v(2) = x'(2) = 32$.

Ответ: $v(0) = 0$, $v(1) = 7$, $v(2) = 32$.

1.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти приращение Δy и отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции $y = \lg x$ при $x = 100\,000$ и $\Delta x = -90000$.

2. Найти приращение Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, соответствующие изменению аргумента от x до $x + \Delta x$ для функций:

а) $y = x^3$;

б) $y = \sqrt{x}$;

в) $y = \ln x$.

3. Найти $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y = \frac{1}{x^2}$;

б) $y = ctg\, x$.

4. Показать, что следующие функции не имеют конечных производных в указанных точках:

а) $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0$;

б) $y = |\cos x|$ в точках $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

5. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$, проведенной в точке $(\pi; 0)$.

6. Чему равны угловые коэффициенты касательных к кривым $y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2$ в точке их пересечения? Найти угол между этими касательными.

7. Найти углы между кривыми $y_1 = -x^2 + 2x$ и $y_2 = x^3$.

8. Угол φ поворота тела вращения вокруг оси вращения изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 3t - e^{-3t} + 1$. Найти угловую скорость ω вращения тела в момент $t = 2$ (угол φ измеряется в радианах).

2 Лекция №2. Дифференцируемость функции. Правила дифференцирования функции

2.1 Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал

Определение 1. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение Δy в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}. \tag{1}$$

Напомним, что $o(\Delta x)$ – это бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с Δx, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$; A не зависит от Δx, но, вообще говоря, зависит от x.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x, т.е., чтобы ее приращение в этой точке представлялось по формуле (1), необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в этой точке. И тогда $A = f'(x)$.

Доказав эту теорему, мы покажем, что утверждения «функция одной переменной имеет конечную производную в точке x» и «функция одной переменной дифференцируема в точке x» – равносильны. Поэтому процесс нахождения производной функции $f(x)$ называется также дифференцированием функции $f(x)$.

Доказательство: Сначала докажем теорему в части достаточности.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

По теореме о представимости функции, имеющей конечный предел, в виде суммы этого предела и бесконечно малой величины, можно написать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Тогда Δy можно записать в виде: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Поскольку произведение бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к каждому из сомножителей, то $\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$. Значит $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, и мы представили Δy в виде (1), где $A = f'(x)$.

Теперь докажем теорему в части необходимости.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. пусть Δy представляется по формуле (1).

Тогда, предполагая, что $\Delta x \neq 0$, получим: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$; перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.

Предел правой части равенства существует и равен A, значит $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$.

Это и означает, что существует производная $f'(x) = A$.

Теорема доказана.

Определим теперь понятие дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. для ее приращения Δy в точке x выполняется равенство (1). Тогда Δy есть сумма двух слагаемых. Первое из них $A \cdot \Delta x$ пропорционально Δx (напомним, что A не зависит от Δx). В таких случаях говорят, что первое слагаемое есть линейная однородная функция от Δx.

Второе слагаемое, $o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx. Если $A \neq 0$, то второе слагаемое стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем первое. В связи с этим первое слагаемое $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ называется *главной частью приращения* Δy при $\Delta x \to 0$. Это слагаемое называется *дифференциалом* функции и обозначается символом dy.

Итак, повторим определение.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. ее приращение в этой точке представляется по формуле

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}, \qquad (2)$$

то главная часть этого приращения, линейная относительно Δx называется **дифференциалом** функции y:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x .$$

Геометрический смысл дифференциала.

Изобразим график некоторой функции $y = f(x)$ (см. рисунок 8).

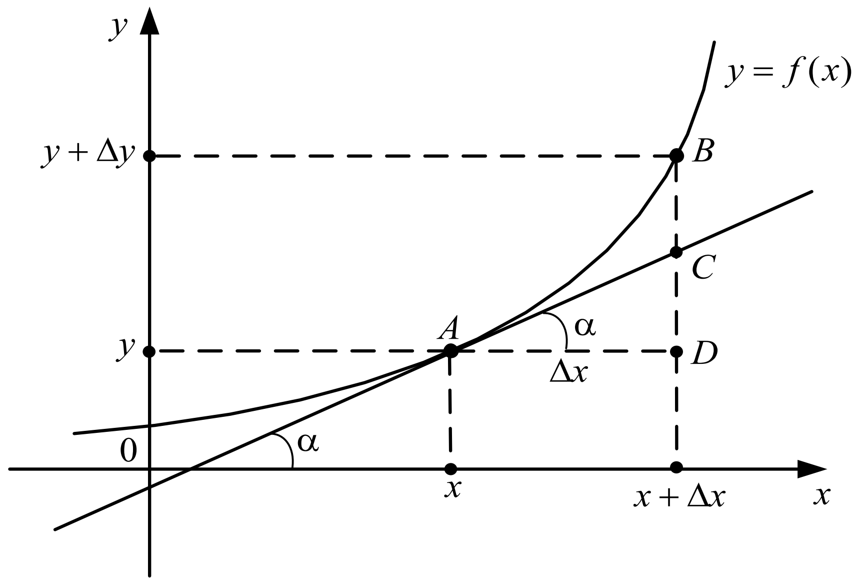

Рисунок 8

Выберем на нем точку $A(x; y)$ и точку $B(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Проведем касательную к графику функции в точке A. Напомним, что $f'(x) = tg\,\alpha$, где α – угол образованный касательной к графику функции в точке A и положительным направлением оси Ox. Из рисунка видно, что $dy = f'(x) \cdot \Delta x = tg\,\alpha \cdot \Delta x = CD$; $CB = BD - CD = \Delta y - dy = \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}$.

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x есть приращение ординаты точки, лежащей на касательной к графику функции в точке x.

Из рисунка видно также, что для линейной функции $y = Ax + B$ при всяком значении x имеет место равенство $\Delta y = A \cdot \Delta x = dy$.

В частности, для $y = x$ $dy = dx = \Delta x$.

Таким образом, дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой:

$$dx = \Delta x .$$

Поскольку $\Delta y = dy + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}$, дифференциал функции при достаточно малых Δx может считаться приближенным значением приращения функции.

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\, dx .$$

Теперь становится понятным обозначение производной, которое, несомненно, уже встречалось вам: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

Рассмотрим пример отыскания дифференциала функции.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y=(1+tg\ x)^8$.

Решение: $dy=f'(x)dx$; $y'=8(1+tg\ x)^7\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$; $dy=\dfrac{8(1+tg\ x)^7}{\cos^2 x}dx$.

Ответ: $y=(1+tg\ x)^8$, $dy=\dfrac{8(1+tg\ x)^7}{\cos^2 x}dx$.

Другой пример показывает применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Пример 2. Найти приближенное значение $arctg\,1{,}02$.

Решение: Формула (1) для нашего случая будет выглядеть так:

$$\Delta y=arctg(x+\Delta x)-arctg\,x\approx d(arctg\,x)=(arctg\,x)'\cdot\Delta x=\frac{1}{1+x^2}\cdot\Delta x,$$

$x+\Delta x=1{,}02$.

Пусть $x=1,\ \Delta x=0{,}02$. Тогда $arctg\,1{,}02\approx arctg\,1+\dfrac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}02\approx\dfrac{p}{4}+$ $+0{,}01\approx\dfrac{3{,}14}{4}+0{,}01\approx 0{,}795$.

Ответ: $arctg\,1{,}02\approx 0{,}795$.

2.2 Дифференцирование суммы, разности, произведения и частного функций

Теорема 2. Пусть функция $y=f(x)$ и $y=g(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма (разность) $f(x)\pm g(x)$, произведение $f(x)\cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, последнее при условии $g(x)\neq 0$, причем справедливы равенства:

1) $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$;

2) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство: при доказательстве используем определение производной и теорему об арифметических свойствах пределов.

Докажем первое равенство.

Пусть $z(x)=f(x)\pm g(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функции $f(x)$, $g(x)$ и $z(x)$ получат соответственно приращения $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, $\Delta g=g(x+\Delta x)-g(x)$ и $\Delta z=z(x+\Delta x)-z(x)=$
$=\left(\left(f(x)+\Delta f\right)\pm\left(g(x)+\Delta g\right)\right)-\left(f(x)\pm g(x)\right)=\Delta f\pm\Delta g$. Отсюда при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}\pm\frac{\Delta g}{\Delta x} \tag{3}$$

Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x) \text{ и } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=\dot{g}'(x). \tag{4}$$

Переходя в (3) к пределу при $\Delta x\to 0$, с учетом (4) и правила предельного перехода для суммы функций получаем, что существует конечный передел правой части (3), равный $f'(x)\pm g'(x)$. Но тогда существует равный ему конечный предел и левой части (3), причем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=z'(x).$$

Таким образом, в точке x существует конечная производная функции $z(x)=f(x)\pm g(x)$, равная

$$z'(x)=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x). \tag{5}$$

Докажем второе равенство.

Пусть теперь $z(x)=f(x)\cdot g(x)$, а приращению Δx соответствуют приращения $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, $\Delta g=g(x+\Delta x)-g(x)$ и $\Delta z=\left(f(x)+\Delta f\right)\cdot\left(g(x)+\Delta g\right)-f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot\Delta f+f(x)\cdot\Delta g+\Delta f\cdot\Delta g$. Отсюда, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=g(x)\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}+f(x)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}+\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta g. \tag{6}$$

Из дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x следует ее непрерывность в этой точке, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g=0 \tag{7}$$

В силу (4), (6), (7) и правил предельного перехода для суммы и произведения функций существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}+f(x)\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}+\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta g\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Таким образом, в точке x существует конечная производная функции $z(x)=f(x)\cdot g(x)$, равная

$$z'(x)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x). \tag{8}$$

Докажем третье равенство.

Если в точке x выполнено условие $g(x)\neq 0$, то в этой точке определена функция $z(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Приращению Δx соответствуют приращения $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$, $\Delta g = g(x+\Delta x)-g(x)$ и

$$\Delta z=\frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\cdot\Delta f-f(x)\cdot\Delta g}{g(x)\cdot\left(g(x)+\Delta g\right)}. \tag{9}$$

Отсюда при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{g(x)\cdot\dfrac{\Delta f}{\Delta x}-f(x)\cdot\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x)\cdot\left(g(x)+\Delta g\right)}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$. Согласно (4), (7), (9) и правилам предельного перехода для суммы и частного функций, заключаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$, т.е. в точке x существует конечная производная функции $z(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, равная

$$z'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}. \tag{10}$$

Таким образом, все три утверждения доказаны.

2.3 Производная обратной функции

Теорема 3. Пусть функция $y=f(x)$ в точке $x=a$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)\neq 0$. Пусть также у этой функции существует однозначная обратная функция $x=f^{-1}(y)=g(y)$, непрерывная в точке $y=b=f(a)$. Тогда существует производная функции g в точке b, и она равна $\dfrac{1}{f'(a)}$.

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}. \tag{11}$$

Доказательство: Сообщим значению $y=b$ приращение Δy. Тогда функция $x=g(y)$ тоже получит соответствующее приращение Δx. Если $\Delta y\neq 0$, то и $\Delta x\neq 0$, поскольку функция $x=g(y)$ однозначна. Поэтому допустимо рассматривать отношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{12}$$

Если теперь $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$ ввиду непрерывности функции $x = g(y)$. Но тогда знаменатель дроби в правой части равенства (12) при $\Delta x \to 0$ стремится к пределу $f'(a) \neq 0$. Таким образом, существует конечный предел правой части (12):

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta y \to 0)}} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Следовательно, существует конечный предел и у левой части равенства (12):

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta x \to 0)}} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Но этот предел по определению равен производной функции $x = g(y)$ в точке b:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = g'(b).$$

Таким образом, обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке b и ее производная в этой точке определяется формулой (11). Что и требовалось доказать.

2.4 Производная сложной функции

Пусть в некоторой окрестности точки $x = a$ определена функция $u = g(x)$, а в окрестности точки $b = g(a)$ определена функция $f(u)$. Тогда существует окрестность точки a, в которой определена суперпозиция функций, т.е. сложная функция $y(x) = f(g(x))$.

Теорема 4. Пусть функция $u = g(x)$ дифференцируема в некоторой точке a, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a)$. Тогда сложная функция $y(x) = f(g(x))$ дифференцируема в указанной точке a и

$$\left(f(g(x))\right)' = f'_u(b) \cdot g'_x(a). \qquad (13)$$

Доказательство: Пусть приращению Δx аргумента в точке a соответствует приращение Δu функции $u = g(x)$, а Δu, в свою очередь, вызывает приращение Δy функции $y = f(u)$. Так как $y = f(u)$ и $u = g(x)$ дифференцируемы в точках b и a соответственно, то приращения в этих точках, согласно определению дифференцируемости функции, можно записать в виде $\Delta y = f'(b) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u$, $\Delta u = g'(a) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta u)$ и $\beta(\Delta x)$ – функции, бесконечно малые при $\Delta u \to 0$ и $\Delta x \to 0$ соответственно.

Отсюда

$$\Delta y = \left(f'(b) + б(\Delta u)\right) \cdot \left(g'(a) + в(\Delta u)\right) \Delta x = f'(b) \cdot g'(a) \cdot \Delta x + г \cdot \Delta x. \qquad (14)$$

Здесь Δy – приращение сложной функции $y(x) = f(g(x))$, вызванное приращением Δx ее аргумента x, а $\gamma = f'(b) \cdot \beta(\Delta x) + g'(a) \cdot \alpha(\Delta u) + \alpha(\Delta u) \cdot \beta(\Delta x)$. Так как $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, γ есть функция, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, тогда равенство (14) показывает, что функция $y(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке a. Ее производная в этой точке определяется формулой (13). Что и требовалось доказать.

Сформулируем еще раз правило дифференцирования сложной функции, которое следует из доказанной теоремы.

Производная сложной функции $y(x) = f(g(x))$ по независимому переменному x равна произведению производной функции $y(u)$ по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента $u(x)$ по независимому x, т.е.

$$y'(x) = \left(y(u(x))\right)' = y'_u \Big|_{u=u(x)} \cdot u'(x). \qquad (15)$$

Пример 3. Пользуясь правилом (15), найдем производные следующих функций:

1) $F(x) = \sin^3 x$.

Пусть $y = u^3$, где $u = \sin x$. Обе эти функции дифференцируемы.

$y'_u = 3 \cdot u^2$, $u'_x = \cos x$.

$F'(x) = \left(\sin^3 x\right)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$.

2) $F(x) = 5^{\cos x}$.

Пусть $y = 5^u$, где $u = \cos x$. Обе эти функции дифференцируемы.

$y'_u = 5^u \cdot \ln 5$, $u'_x = -\sin x$.

$F'(x) = \left(5^{\cos x}\right)' = 5^{\cos x} \cdot \ln 5 \cdot \left(-\sin x\right) = -5^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \ln 5$.

Если сложная функция получена в результате нескольких суперпозиций, то ее производную следует искать последовательным применением изложенного выше правила.

3) $F(x) = \sin^3 \ln x$.

Пусть $y = u^3$, где $u = \sin \ln x$; обозначим $v = \ln x$. Тогда $F(x) = u^3$, где $u = \sin v$, $v = \ln x$.

$y'_u = 3 \cdot u^2$; $u'_v = \cos v$; $v'_x = \dfrac{1}{x}$.

$F'(x) = \left(\sin^3 \ln x\right)' = 3 \sin^2 \ln x \cdot \cos \ln x \cdot \dfrac{1}{x}$.

Промежуточные аргументы во всех примерах мы ввели для большей наглядности. Обычно правило дифференцирования сложной функции применяют, не вводя промежуточные аргументы в явном виде.

4) $y = \ln(\ln\cos x)$. $y' = \dfrac{1}{\ln\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\dfrac{tg\ x}{\ln\cos x}$.

2.5 Практическое занятие №2. Табличное дифференцирование. Производная сложной функции

Упражнение 1. Найти производные функций:

а) $y = tg\ x$;

б) $y = ctg\ x$;

в) $y = a^x$;

г) $y = \arcsin x$;

д) $y = arctg\ x$.

Решение: а) Так как $tg\ x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, воспользуемся правилом дифференцирования частного $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$. Поэтому

$$(tg\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

б) $ctg\ x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $(ctg\ x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\cdot\sin x - \cos x\cdot(\sin x)'}{(\sin x)^2} =$

$$= \frac{(-\sin x)\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{(\sin x)^2} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Итак, $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

в) $y = a^x$. Воспользуемся связью производных прямой и обратной функций: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Но из соотношения $y = a^x$ следует, что $x = \log_a y$, значит,

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}\log_a e = \dfrac{1}{a^x \ln a}$, поэтому $\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a$.

Итак, $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$.

г) $y = \arcsin x$. Воспользуемся связью производных прямой и обратной функций: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Так как $x = \sin y$, то $\frac{dx}{dy} = \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Перед знаком корня берем знак плюс, так как функция $y = \arcsin x$ принимает значения $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, для которых $\cos y$ не отрицателен. Поэтому $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично можно найти производную функции $y = \arccos x$. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

д) $y = arctg\ x$. Воспользуемся связью производных прямой и обратной функций: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Имеем $x = tg\ y$, отсюда $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$. Значит

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак. $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогично, $(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Ответ: а) $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

в) $(a^x)' = a^x \ln a$;

г) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Упражнение 2. Найти производные следующих функций:

1) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$;

2) $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$;

3) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$;

4) $y=2t\sin t-\left(t^2-2\right)\cos t$;

5) $y=x\cdot\arcsin x$;

6) $y=x^7\cdot e^x$;

7) $y=x^3\cdot\ln x-\dfrac{x^3}{3}$.

Решение: 1) $y=x^5-4x^3+2x-3$. Воспользуемся правилом дифференцирования суммы и разности функций.

$$y'=\left(x^5-4x^3+2x-3\right)'=\left(x^5\right)'-\left(4x^3\right)'+(2x)'-(3)'=5x^4-4\left(x^3\right)'+2-0=$$
$$=5x^4-4\cdot3x^2+2=5x^4-12x^2+2.$$

Итак, $y'=5x^4-12x^2+2$.

2) $y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$. Воспользуемся правилом дифференцирования разности и производной степенной функции.

$$y'=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'-\left(\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}\right)'==a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'-b\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)'=$$
$$=-\frac{2}{3}a\cdot x^{-\frac{5}{3}}-b\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot x^{-\frac{7}{3}}=-\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}+\frac{4}{3}b\cdot\frac{1}{x^{\frac{7}{3}}}=-\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{3}b\cdot\frac{1}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}=$$
$$=\frac{2}{3x}\left(\frac{2b}{x\sqrt[3]{x}}-\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}\right).$$ Итак, $y'=\dfrac{2}{3x}\left(\dfrac{2b}{x\sqrt[3]{x}}-\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$.

3) $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$. Воспользуемся правилом дифференцирования частного функций.

$$y'=\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+5}\right)'=\frac{(2x+3)'\cdot\left(x^2-5x+5\right)-(2x+3)\cdot\left(x^2-5x+5\right)'}{\left(x^2-5x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{2\cdot\left(x^2-5x+5\right)-(2x+3)\cdot(2x-5)}{\left(x^2-5x+5\right)^2}=\frac{2x^2-10x+10-4x^2+10x-6x+15}{\left(x^2-5x+5\right)^2}=$$
$$=\frac{-2x^2-6x+25}{\left(x^2-5x+5\right)^2}.$$ Итак, $y'=\dfrac{-2x^2-6x+25}{\left(x^2-5x+5\right)^2}$.

4) $y=2t\sin t-\left(t^2-2\right)\cos t$.

Воспользуемся правилом дифференцирования разности и произведения функций.

$$y' = \left(2t\sin t - \left(t^2-2\right)\cos t\right)' = \left(2t\sin t\right)' - \left(\left(t^2-2\right)\cos t\right)' = \left(2t\right)'\sin t + 2t\left(\sin t\right)' -$$

$$-\left(\left(t^2-2\right)'\cos t + \left(t^2-2\right)\left(\cos t\right)'\right) = 2\sin t + 2t\cos t - 2t\cos t - \left(t^2-2\right)\left(-\sin t\right) =$$

$= 2\sin t + t^2\sin t - 2\sin t = t^2\sin t$. Итак, $y' = t^2\sin t$.

5) $y = x\cdot\arcsin x$. Воспользуемся правилом дифференцирования произведения функций.

$$y' = \left(x\cdot\arcsin x\right)' = \left(x\right)'\cdot\arcsin x + x\cdot\left(\arcsin x\right)' = \arcsin x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$= \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Итак, $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6) $y = x^7\cdot e^x$. Воспользуемся правилом дифференцирования произведения.

$$y' = \left(x^7\cdot e^x\right)' = \left(x^7\right)'\cdot e^x + x^7\cdot\left(e^x\right)' = 7x^6\cdot e^x + x^7\cdot e^x = x^6e^x\left(7+x\right).$$

Итак, $y' = x^6e^x\left(7+x\right)$.

7) $y = x^3\cdot\ln x - \dfrac{x^3}{3}$. Воспользуемся правилами дифференцирования разности и произведения.

$$y' = \left(x^3\cdot\ln x - \frac{x^3}{3}\right)' = \left(x^3\cdot\ln x\right)' - \left(\frac{x^3}{3}\right)' = = \left(x^3\right)'\cdot\ln x + x^3\cdot\left(\ln x\right)' - \frac{1}{3}3x^2 =$$

$= 3x^2\cdot\ln x + x^3\cdot\dfrac{1}{x} - x^2 = 3x^2\cdot\ln x + x^2 - x^2 = 3x^2\cdot\ln x$. Итак, $y' = 3x^2\cdot\ln x$.

Ответ: 1) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$, $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$;

2) $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$, $y' = \dfrac{2}{3x}\left(\dfrac{2b}{x\sqrt[3]{x}} - \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$;

3) $y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$, $y' = \dfrac{-2x^2-6x+25}{\left(x^2-5x+5\right)^2}$;

4) $y = 2t\sin t - \left(t^2-2\right)\cos t$, $y' = t^2\sin t$;

5) $y = x\cdot\arcsin x$, $y' = \arcsin x + \dfrac{1x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $y = x^7\cdot e^x$, $y' = x^6e^x\left(7+x\right)$;

7) $y = x^3\cdot\ln x - \dfrac{x^3}{3}$, $y' = 3x^2\cdot\ln x$.

Упражнение 3. Найти производные сложных функций:

1) $y=\left(3+2x^2\right)^4$;

2) $y=(3-2\sin x)^5$;

3) $y=tg\ x-\frac{1}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x$;

4) $y=\sqrt{arctg\ x}-(\arcsin x)^3$;

5) $y=\sin\left(x^2-5x+1\right)+tg\ \frac{a}{x}$;

6) $y=arcctg\frac{1+x}{1-x}$;

7) $y=5\cdot e^{-x^2}$;

8) $y=x^2\cdot 10^{2x}$;

9) $y=\ln\left(1-x^2\right)$;

10) $y=arctg\ (\ln x)+\ln(arctg\ x)$;

11) $y=\frac{1}{15}\cos^3 x\cdot\left(3\cos^2 x-5\right)$;

12) $y=3\sin x\cdot\cos^2 x+\sin^3 x$.

Решение: Во всех задачах применим формулу дифференцирования сложной функции: если $y=y(u(x))$, то $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$.

1) $y=\left(3+2x^2\right)^4$.

$$y'=\left(\left(3+2x^2\right)^4\right)'=4\cdot\left(3+2x^2\right)^3\cdot\left(3+2x^2\right)'=4\cdot\left(3+2x^2\right)^3\cdot 4x=16\cdot\left(3+2x^2\right)^3.$$

Ответ: $y'=16\cdot\left(3+2x^2\right)^3$.

2) $y=(3-2\sin x)^5$.

$$y'=\left((3-2\cdot\sin x)^5\right)'=5\cdot(3-2\cdot\sin x)^4\cdot(3-2\cdot\sin x)'=5\cdot(3-2\cdot\sin x)^4\cdot(-2\cdot\cos x)=$$
$$=-10\cdot\cos x\cdot(3-2\cdot\sin x)^4.$$

Ответ: $y'=-10\cdot\cos x\cdot(3-2\cdot\sin x)^4$.

3) $y=tg\ x-\frac{1}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x$.

$$y'=\left(tg\ x-\frac{1}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot tg^2x\cdot(tg\,x)'+\frac{1}{5}\cdot 5\cdot tg^4x\cdot(tg\,x)'=$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}-tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+tg^4x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1-tg^2x+tg^4x}{\cos^2 x}.$$

Ответ: $y'=\frac{1-tg^2x+tg^4x}{\cos^2 x}$.

4) $y=\sqrt{arctg\ x}-(\arcsin x)^3$.

$$y'=\left(\sqrt{arctg\ x}-(\arcsin x)^3\right)'=\left(\sqrt{arctg\ x}\right)'-\left((\arcsin x)^3\right)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{arctg\ x}}\cdot(arctg\ x)'-$$

$$-3\cdot(\arcsin x)^2\cdot(\arcsin x)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{arctg\ x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}-3\cdot(\arcsin x)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{arctg\,x}}-\frac{3\cdot(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{arctg\ x}}-\dfrac{3\cdot(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

5) $y=\sin\left(x^2-5x+1\right)+tg\,\dfrac{a}{x}$.

$$y'=\left(\sin\left(x^2-5x+1\right)+tg\,\frac{a}{x}\right)'=\cos\left(x^2-5x+1\right)\cdot(2x-5)+\frac{1}{\cos^2\frac{a}{x}}\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=(2x-5)\cdot\cos\left(x^2-5x+1\right)-\frac{a}{x^2\cdot\cos^2\frac{a}{x}}.$$

Ответ: $y'=(2x-5)\cdot\cos\left(x^2-5x+1\right)-\dfrac{a}{x^2\cdot\cos^2\frac{a}{x}}$.

6) $y=arcctg\,\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$y'=\left(arcctg\,\frac{1+x}{1-x}\right)'=-\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=-\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\cdot\frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=-\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}=-\frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}=-\frac{2}{2+2x^2}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Ответ: $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

7) $y=5\cdot e^{-x^2}$.

$$y'=\left(5\cdot e^{-x^2}\right)'=5\cdot e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'=5\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=-10\cdot x\cdot e^{-x^2}.$$

Ответ: $y'=-10x\cdot e^{-x^2}$.

8) $y=x^2\cdot 10^{2x}$.

$$y'=\left(x^2\cdot 10^{2x}\right)'=2x\cdot 10^{2x}+x^2\cdot 10^{2x}\cdot\ln 10\cdot(2x)'=2x\cdot 10^{2x}+x^2\cdot 10^{2x}\cdot\ln 10\cdot 2=$$

$= 2x \cdot 10^{2x} \cdot (1 + x \ln 10)$.

Ответ: $y' = 2x \cdot 10^{2x} (1 + x \ln 10)$.

9) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$.

$$y' = \left(\ln\left(1 - x^2\right)\right)' = \frac{1}{1 - x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)' = \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{1 - x^2}.$$

Ответ: $y' = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$.

10) $y = arctg\,(\ln x) + \ln(arctg\ x)$.

$$y' = \left(arctg\,(\ln x) + \ln(arctg\ x)\right)' = \frac{1}{1 + \ln^2 x} \cdot (\ln x)' + \frac{1}{arctg\,x} \cdot (arctg\,x)' =$$

$$= \frac{1}{1 + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{arctg\,x} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{x \cdot \left(1 + \ln^2 x\right)} + \frac{1}{\left(1 + x^2\right) \cdot arctg\,x}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{x \cdot \left(1 + \ln^2 x\right)} + \dfrac{1}{\left(1 + x^2\right) \cdot arctg\,x}$.

11) $y = \dfrac{1}{15} \cdot \cos^3 x \cdot \left(3 \cdot \cos^2 x - 5\right)$.

$$y' = \left(\frac{1}{15} \cdot \cos^3 x \cdot \left(3 \cdot \cos^2 x - 5\right)\right)' = \frac{1}{15} \cdot 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\sin x) \cdot \left(3\cos^2 x - 5\right) + \frac{1}{15} \cdot \cos^3 x \times$$

$$\times \left(6 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)\right) = \frac{1}{15} \cdot \left(-9 \cdot \cos^4 x \cdot \sin x + 15 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x - 6 \cdot \cos^4 x \cdot \sin x\right) =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \left(15 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x - 15 \cdot \cos^4 x \cdot \sin x\right) = \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x.$$

Ответ: $y' = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$.

12) $y = 3 \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x$.

$$y' = \left(3 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x\right)' = 3 \cdot \cos x \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \sin x \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) + 3 \cdot \sin^2 x \times$$

$$\times \cos x = 3 \cdot \cos^3 x - 6 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x + 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = 3 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 3 \cdot \cos x \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 3 \cdot \cos x \cdot \cos 2x.$$

Ответ: $y' = 3 \cdot \cos x \cdot \cos 2x$.

2.6 Задачи для самостоятельного решения

Найти производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3} \cdot x + x^2 - 0{,}5 \cdot x^4$;
2. $y = 3 \cdot x^{2/3} - 2 \cdot x^{5/2} + x^{-3}$;
3. $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}$;
4. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

5. $y = x \cdot ctg\, x$;

6. $y = (x-1) \cdot e^x$;

7. $y = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x$;

8. $y = \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln x - \frac{\ln x}{x}$;

9. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$;

10. $y = 2x + 5 \cdot \cos^3 x$;

11. $y = -\frac{1}{6 \cdot \left(1 - \cos^2 x\right)^3}$;

12. $y = \frac{1}{arctg\, x}$;

13. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$;

14. $y = \arccos \sqrt{x}$;

15. $y = \lg \sin x$;

16. $y = \ln\left(e^x + 5 \cdot \sin x - 4 \cdot \arcsin x\right)$;

17. $y = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + x^3\right)^8} - \frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + x^3\right)^5}$;

18. $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

19. $y = e^{\sin^2 x}$;

20. $y = \frac{1}{10} \cdot e^{-x} \cdot (3 \cdot \sin 3x - \cos 3x)$.

3 Лекция №3. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная неявной функции. Логарифмическое дифференцирование

3.1 Производные и дифференциалы высших порядков

Производной второго порядка или **второй производной** заданной функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$:

$$[f'(x)]' = y'';$$

аналогично, **производной третьего порядка** или **третьей производной** данной функции называется производная от ее второй производной. Вообще, производной ***n*-го порядка** или ***n*-ой** производной данной функции, называется производная от $(n-1)$-ой производной от этой функции. Обозначение n-ой производной: $f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ является функцией от x: $dy = f'(x)dx$. Его можно назвать первым дифференциалом.

По определению **вторым дифференциалом** от функции $y = f(x)$ в точке x называется дифференциал от первого дифференциала в этой точке. Обозначение: $d^2 y = d(dy)$.

Чтобы вычислить второй дифференциал, необходимо взять производную по переменной x от произведения $f'(x)dx = dy$, считая, что dx есть постоянная (не зависящая от x), и результат умножить на dx:

$$d^2 y = d[f'(x)\,dx] = dx \cdot d[f'(x)] = dx \cdot [f'(x)]' dx = f''(x)\,dx^2 .$$

Вообще, по определению, **дифференциалом порядка *n*** функции $y = f(x)$ называется первый дифференциал от дифференциала $n-1$-го порядка этой функции и обозначается через

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Очевидно, что

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n, \tag{1}$$

поскольку эта формула верна при $n = 1$; если допустить, что она верна для $n-1$, то

$$d^n y = d\left\lfloor f^{(n-1)}(x) dx^{n-1} \right\rfloor = dx^{n-1} d\left\lfloor f^{(n-1)}(x) \right\rfloor = f^{(n)}(x)\, dx^n.$$

Разумеется, для существования дифференциала порядка n функции $y = f(x)$ в точке x необходимо, чтобы эта функция имела производную n-го порядка в этой точке $\left(f^{(n)}(x)\right)$.

В силу формулы (1) получим:

$$y_x^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{2}$$

То есть, производная n-го порядка от функции $y = f(x)$ по независимой переменной x равна частному от деления n-го дифференциала функции $y = f(x)$ на n-ю степень дифференциала независимой переменной $dx^n = (dx)^n$.

Формула (2) не будет верной, если в ней независимую переменную x заменить на зависимую переменную, например, на $z(x)$, т.е. если рассматривать сложную функцию $f(x) = \varphi(\psi(x)),\ z = \psi(x)$. Как тогда выразить дифференциалы функций?

Применим правило дифференцирования сложной функции.

$$dy = y'_x\, dx = y'_z \cdot z'_x\, dx = y'_z (z'_x\, dx) = y'_z\, dz.$$

Таким образом,

$$dy = y'_z\, dz. \tag{3}$$

Дифференциал функции y равен произведению ее производной y'_z на dz.

Таким образом, первый дифференциал функции y выражается по одной и той же формуле независимо от того, будет ли y рассматриваться как функция от независимой переменной x, или же как функция от зависимой переменной z. Форма первого дифференциала в этом случае сохраняется, поэтому говорят, что она инвариантна. Этого нельзя сказать о форме второго дифференциала.

Пусть $y = \varphi(z)$, где $z = \psi(x)$.

Найдем второй дифференциал функции y.

$$d^2 y = d(dy) = d[\varphi'(z)\, dz] = [\varphi'(z)\, dz]'\, dz = \left\lfloor \varphi''(z) \cdot dz + \varphi'(z)(dz)' \right\rfloor dz =$$
$$= \varphi''(z) \cdot dz^2 + \varphi'(z)(dz)'\, dz;$$

$$\text{но } \left(dz\right)' dz = d(dz) = d^2 z \text{; итак,}$$

$$d^2 y = \varphi''(z) \cdot dz^2 + \varphi'(z) \cdot d^2 z. \tag{4}$$

Здесь величина $d^2 z$ определяется равенством

$$d^2 z = \psi''(x) \cdot dz^2.$$

Правая его часть будет равной нулю для всех x, только если $\psi(x) = Ax + B$ (линейная функция).

Таким образом, выраженная через z форма второго дифференциала не сохранилась, к слагаемому $\varphi''(z) \cdot dz^2$ добавилось слагаемое $\varphi'(z) \cdot d^2 z$, которое, вообще говоря, не равно нулю.

3.2 Неявная функция и ее производная

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением:

$$F(x; y) = 0. \tag{5}$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале $(a; b)$, такова, что уравнение (5) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то функция $y = f(x)$ есть **неявная функция**, определенная уравнением (5).

Например, уравнение $x^2 + y^2 - 9 = 0$ неявно определяет две функции:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \text{ и } y = -\sqrt{9 - x^2}.$$

Мы получили их, разрешив уравнение относительно y. При подстановке любой из этих двух функций в исходное уравнение получится тождество.

Неявно заданную функцию не всегда удается представить явно, то есть не всегда можно, разрешив уравнение (5) относительно y, представить эту переменную в виде $y = f(x)$, где $f(x)$ – элементарная функция. Например, функции, заданные уравнениями

$$y^6 - y - x^2 = 0,$$

$$y - x - \frac{1}{4} \cdot \sin y = 0$$

не выражаются через элементарные функции, т.е. эти уравнения нельзя разрешить относительно y через элементарные функции.

Термины «явная функция» и «неявная функция» характеризуют не природу функции, а способ ее задания. Явно заданную функцию всегда можно представить как неявную, например, функцию $y = x^2 - 4$ можно представить и так: $x^2 - y + 4 = 0$ – это будет ее неявное задание.

Производную неявной функции можно найти, не преобразуя ее в явную.

Допустим, что функция задана уравнением

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0. \tag{6}$$

Если здесь y есть функция от x, определяемая этим равенством, то это равенство является тождеством.

Продифференцируем обе части этого тождества по x, не забывая, что y есть функция от x и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции. Получим

$$2x + 2y \cdot y' = 0.$$

Выразим y' из получившегося равенства:

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$

Полученный результат можно проверить. Возьмем одну из явных функций, соответствующих уравнению (6):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Найдем ее производную:

$$y' = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

т.е. получился результат (7).

Как нужно поступать, находя вторую производную неявно заданной функции? Вторая производная по определению является производной от первой производной. Значит, мы должны найденную первую производную неявно заданной функции дифференцировать по x, при этом также имея в виду, что y есть функция от x. Рассмотрим еще один пример.

Пусть неявная функция y от независимой переменной x определяется равенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{8}$$

Дифференцируем по x обе части уравнения, не забывая, что y есть функция от x:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0 \text{; отсюда находим}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{b^2}{2y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \tag{9}$$

Теперь равенство $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ нужно снова дифференцировать по x, по-прежнему помня, что y есть функция от x.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Подставим теперь вместо производной ее выражение из равенства (9).

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}}{y^2},$$ или после упрощения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2\left(a^2y^2+b^2x^2\right)}{a^4y^3}.$$

Из равенства (8) следует, что

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

поэтому вторую производную заданной невно функции можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

3.3 Логарифмическое дифференцирование

Функция вида $y=[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ называется **степенно-показательной**.

Найти ее производную невозможно ни по правилу дифференцирования степенной, ни по правилу дифференцирования показательной функции. Чтобы продифференцировать такую функцию, нужно сначала прологарифмировать обе части равенства, которое ее задает:

$$\ln y=\psi(x)\cdot\ln\varphi(x).$$

Теперь продифференцируем обе части получившегося равенства, не забывая, что y есть функция от x:

$$(\ln y)'_x=(\psi(x)\cdot\ln\varphi(x))'_x,$$

$$\frac{y'}{y}=\psi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\psi(x)\cdot[\ln\varphi(x)]'=\psi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\psi(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Наконец, выразим из получившегося равенства y':

$$y'=[\varphi(x)]^{\psi(x)}\cdot\left[\psi'(x)\cdot\ln\varphi(x)+\psi(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right].$$

Пример 1. Найти производную функции $y=x^x$.

Решение: Прологарифмируем обе части данного равенства.

$$\ln y=x\cdot\ln x.$$

Продифференцируем обе части получившегося равенства.

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1;$$

из этого равенства выразим y':

$$y' = y \cdot (\ln x + 1)$$

или, если подставить $y = x^x$, то

$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

Такой прием, называющийся **логарифмическим дифференцированием**, можно применять не только при дифференцировании степенно-показательной функции. Иногда его применение облегчает отыскание производной там, где эту производную можно было бы найти и непосредственным дифференцированием.

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\frac{x \cdot (1 + x^2)}{(1-x)^2}}$.

Решение: Прологарифмируем данное равенство:

$$\ln y = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{x(1 + x^2)}{(1-x)^2} = \frac{1}{3} \cdot \left[\ln x \cdot (1 + x^2) - \ln(1-x)^2\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\ln x + \ln(1 + x^2) - 2 \cdot \ln(1-x)\right].$$

Найдем производные от обеих частей полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1-x}\right);$$

выразим из получившегося равенства y':

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x \cdot (1 + x^2)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{(1+x^2)\cdot(1-x) + 2x^2 \cdot (1-x) + 2x \cdot (1+x^2)}{3x \cdot (1+x^2) \cdot (1-x)} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x \cdot (1 + x^2)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1 + x^2 - x - x^3 + 2x^2 - 2x^3 + 2x + 2x^3}{3x \cdot (1+x^2) \cdot (1-x)} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x \cdot (1 + x^2)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{3x \cdot (1+x^2) \cdot (1-x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x^2 (1+x^2) \cdot \sqrt{(1-x)^5}}}.$$

Проверьте результат обычным дифференцированием.

3.4 Практическое занятие №3. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная функции, заданной неявно. Логарифмическое дифференцирование

Упражнение 1. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 5x + x^2$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Решение: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 5 \cdot (x + \Delta x) + (x + \Delta x)^2 - 5x - x^2 =$

$= 5 \cdot \Delta x + 2 \cdot x\Delta x + (\Delta x)^2 = (5 + 2x) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = (5 + 2 \cdot 2) \cdot 0{,}001 + (0{,}001)^2 =$

$= 0{,}009001$. $dy = (5x + x^2)' \cdot \Delta x = (5 + 2x) \cdot \Delta x = 0{,}009$.

Ответ: $\Delta y = 0{,}009001$, $dy = 0{,}009$.

Упражнение 2. Пользуясь производной, найти дифференциал функции $y = \cos x$ при $x = \dfrac{\pi}{6}$ и $\Delta x = \dfrac{\pi}{36}$.

Решение: $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, $dy = (-\sin x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \Delta x = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{36} = -\dfrac{\pi}{72} \approx$ $\approx -0{,}0436$.

Ответ: $dy \approx -0{,}0436$.

Упражнение 3. Найти дифференциалы следующих функций для произвольных значений аргумента и его приращения:

а) $y = \dfrac{1}{x^m}$;

б) $y = \dfrac{x}{1-x}$;

в) $y = e^{-x^2}$;

г) $y = x \cdot \ln x - x$.

Решение: а) $y = \dfrac{1}{x^m}$, $dy = f'(x) \cdot dx = \left(\dfrac{1}{x^m}\right)' \cdot dx = -\dfrac{m}{x^{m+1}} \cdot dx$.

б) $y = \dfrac{x}{1-x}$, $dy = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' \cdot dx = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} \cdot dx = \dfrac{dx}{(1-x)^2}$.

в) $y = e^{-x^2}$, $dy = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot dx = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot dx = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$.

г) $dy = \left(x \cdot \ln x - x\right)' \cdot dx = \left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1\right) \cdot dx = \left(\ln x + 1 - 1\right) \cdot dx = \ln x \cdot dx$.

Ответ: а) $y = \dfrac{1}{x^m}$, $dy = -\dfrac{m}{x^{m+1}} \cdot dx$.

б) $y = \dfrac{x}{1-x}$, $dy = \dfrac{dx}{(1-x)^2}$.

в) $y = e^{-x^2}$, $dy = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot dx$.

г) $y = x \cdot \ln x - x$, $dy = \ln x \cdot dx$.

Упражнение 4. Найти приближенное значение функций:

а) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1{,}03$;

б) $y = e^{1-x^2}$ при $x = 1{,}05$.

Решение: а) Применим формулу приближенного вычисления с помощью дифференциала $\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx$, отсюда следует, что $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$. В нашем случае $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}03$.

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 5$, $f'(x_0) = f'(1) = 0$, $f(x_0) = f(1) = 5$, значит $y(1{,}03) \approx 0 \cdot 0{,}03 + 5 = 5$.

б) $y = e^{1-x^2}$, при $x = 1 + 0{,}05$, значит $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}05$.

$y' = \left(e^{1-x^2}\right)' = e^{1-x^2} \cdot (1 - x^2)' = (-2x) \cdot e^{1-x^2}$, $y'(1) = (-2) \cdot e^0 = -2$, $y(1) = e^0 = 1$.

$y(1{,}05) \approx (-2) \cdot 0{,}05 + 1 = 0{,}9$.

Ответ: а) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, $y(1{,}03) \approx 5$.

б) $y = e^{1-x^2}$, $y(1{,}05) \approx 0{,}9$.

Упражнение 5. Вычислить приближенно: $\lg 0{,}9$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \lg x$. Применим формулу приближенного вычисления с помощью дифференциала: $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x + f(x_0)$. В нашем случае $x = 0{,}9 = 1 - 0{,}1$, значит $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}1$. Находим производную функции $f'(x) = (\lg x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 10}$, тогда $f'(1) = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43$, $f(1) = \lg 1 = 0$. Значит, $\lg 0{,}9 \approx 0{,}43 \cdot (-0{,}1) + 0 = -0{,}043$.

Ответ: $\lg 0{,}9 \approx -0{,}043$.

Упражнение 6. Найти производные второго порядка от следующих функций: а) $y = e^{x^2}$;

б) $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$.

Решение: а) $y = e^{x^2}$, $y' = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cdot e^{x^2}$,

$$y'' = (y')' = \left(2x \cdot e^{x^2}\right)' = 2 \cdot e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = 2 \cdot e^{x^2} \cdot \left(1 + 2x^2\right).$$

б) $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$, $y' = \left(\ln \sqrt[3]{1 + x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + x^2\right)^2}} \cdot 2x = \dfrac{2x}{3\left(1 + x^2\right)}$,

$$y'' = (y')' = \left(\frac{2x}{3\left(1 + x^2\right)}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + x^2 - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$

Ответ: а) $y = e^{x^2}$, $y'' = 2 \cdot e^{x^2} \cdot \left(1 + 2x^2\right)$.

б) $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$, $y'' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$.

Упражнение 7. Найти производную n-го порядка от функции $y = \dfrac{1}{1-x}$.

Решение: $y = \dfrac{1}{1-x}$, $y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $y''' = \dfrac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$ и т.д. Теперь по виду первых трех производных запишем производную n-го порядка: $y^{(n)} = \dfrac{n\,!}{(1-x)^{n+1}}$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{1-x}$, $y^{(n)} = \dfrac{n\,!}{(1-x)^{n+1}}$.

Упражнение 8. Показать, что функция $y = \dfrac{1}{2} \cdot x^2 e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + y = e^x$.

Решение: $y' = \dfrac{1}{2}\left(2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x\right) = x \cdot e^x + \dfrac{1}{2} x^2 \cdot e^x = \dfrac{x}{2} \cdot e^x (2 + x)$,

$$y'' = \frac{1}{2}\left(e^x\left(2x + x^2\right) + e^x(2 + 2x)\right) = \frac{1}{2} e^x\left(2x + x^2 + 2 + 2x\right) = \frac{1}{2} e^x\left(x^2 + 4x + 2\right),$$

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2} e^x\left(x^2 + 4x + 2\right) - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot e^x(2 + x) + \frac{1}{2} x^2 e^x =$$

$= e^x\left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + 1 - 2x - x^2 + \dfrac{x^2}{2}\right) = e^x$ Итак, $y'' - 2y' + y = e^x$, что и требовалось показать.

Упражнение 9. Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, если $f(x) = e^x \cdot \sin x$.

Решение: $f(0) = e^0 \cdot \sin 0 = 0$,

$$f'(0) = \left(e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x\right)\Big|_{x=0} = e^x \cdot (\sin x + \cos x)\Big|_{x=0} = e^0 \cdot (\sin 0 + \cos 0) = 1,$$

$$f''(0) = e^x \cdot (\sin x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)\Big|_{x=0} = e^x \cdot (\sin x + \cos x + \cos x - \sin x)\Big|_{x=0} =$$

$$= 2 \cdot e^x \cdot \cos x\Big|_{x=0} = 2 \cdot e^0 \cdot \cos 0 = 2,$$

$$f'''(0) = 2 \cdot \left(e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x\right)\Big|_{x=0} = 2 \cdot e^x \cdot (\cos x - \sin x)\Big|_{x=0} =$$

$$= 2 \cdot e^0 \cdot (\cos 0 - \sin 0) = 2.$$

Ответ: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$.

Упражнение 10. Найти дифференциал второго порядка для следующих функций: а) $y = \arccos x$;

б) $y=\frac{\ln x}{x}$.

Решение: а) $d^2y=y''\cdot dx^2$, $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\cdot(-2x)=$

$=-\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$, $d^2y=-\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\cdot dx^2$.

б) $y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $y''=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\cdot\ln x}{x^4}=$

$=\frac{2x\cdot\ln x-3x}{x^4}=\frac{x\cdot(2\cdot\ln x-3)}{x^4}=\frac{2\cdot\ln x-3}{x^3}$, $d^2y=\frac{2\cdot\ln x-3}{x^3}\cdot dx^2$.

Ответ: а) $y=\arccos x$, $d^2y=-\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\cdot dx^2$,

б) $y=\frac{\ln x}{x}$, $d^2y=\frac{2\cdot\ln x-3}{x^3}\cdot dx^2$.

Упражнение 11. Найти производную от следующих функций, заданных неявно:

а) $x^3+x^2y+y^2=0$;

б) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$;

в) $y-0{,}3\cdot\sin y=x$;

г) $arctg\,\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)$.

Решение: а) $x^3+x^2y+y^2=0$. Дифференцируем по x обе части уравнения, не забывая, что y есть функция от x.

$$\left(x^3+x^2y+y^2\right)'_x=(0)'_x,$$

$$3x^2+2x\cdot y+x^2\cdot y'+2y\cdot y'=0.$$

Выражаем y' из последнего равенства: $y'=-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$.

Ответ: $y'=-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$.

б) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. Дифференцируем по x обе части уравнения, не забывая, что y есть функция от x.

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)'_x=\left(\sqrt[3]{a^2}\right)'_x,$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\cdot y'=0.$$

Выражаем y' из последнего равенства: $y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

Ответ: $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

в) $y - 0{,}3 \cdot \sin y = x$. Дифференцируем по x обе части уравнения, не забывая, что y есть функция от x.

$$(y - 0{,}3 \cdot \sin y)'_x = (x)'_x,$$
$$y' - 0{,}3 \cdot \cos y \cdot y' = 1.$$

Выражаем y' из последнего равенства: $y' = \frac{1}{1 - 0{,}3 \cdot \cos y}$.

Ответ: $y' = \frac{1}{1 - 0{,}3 \cdot \cos y}$.

г) $arctg\,\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right)$. Дифференцируем по x обе части уравнения, не забывая, что y есть функция от x.

$$\left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_x = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x,$$
$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = \frac{2x + 2y \cdot y'}{2 \cdot \left(x^2 + y^2\right)},$$
$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = \frac{x + y \cdot y'}{x^2 + y^2},$$
$$\frac{y' \cdot x - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y \cdot y'}{x^2 + y^2},$$
$$y' \cdot x - y = x + y \cdot y'.$$

Выражаем y' из последнего равенства: $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

Ответ: $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

Упражнение 12. Найти производную второго порядка для функции, заданной неявно: $y^2 = 2p \cdot x$.

Решение: Найдем производную первого порядка от функции, заданной неявно, помня, что y функция от x.

$$\left(y^2\right)'_x = (2p \cdot x)'_x,$$
$$2y \cdot y' = 2p,$$
$$y \cdot y' = p,$$

$$y' = \frac{p}{y}.$$

Продифференуруем обе части последнего равенства по переменной x:

$$y'' = -\frac{p \cdot y'}{y^2};$$

подставим вместо y' ранее полученное выражение. Получим:

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Ответ: $y^2 = 2p \cdot x$, $y'' = -\dfrac{p^2}{y^3}$.

Упражнение 13. Найти y'' в точке $(0;1)$, если $x^4 - xy + y^4 = 1$.

Решение: Найдем производную второго порядка от функции, заданной неявно.

$$4x^3 - y - x \cdot y' + 4y^3 \cdot y' = 0,$$

$$12x^2 - y' - y' - x \cdot y'' + 12y^2 \cdot (y')^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0.$$

Выражаем y' и y'', получаем: $y' = \dfrac{4x^3 - y}{x - 4y^3}$, $y'' = \dfrac{12x^2 - 2y' + 12y^2 \cdot (y')^2}{x - 4y^3} =$

$$= \frac{1}{x - 4y^3} \cdot \left(12x^2 - \frac{8x^3 - 2y}{x - 4y^3} + 12y^2 \cdot \left(\frac{4x^3 - y}{x - 4y^3} \right)^2 \right);$$

итак: $y'' = \dfrac{1}{x - 4y^3} \cdot \left(12x^2 - \dfrac{8x^3 - 2y}{x - 4y^3} + 12y^2 \cdot \left(\dfrac{4x^3 - y}{x - 4y^3} \right)^2 \right)$.

Подставляя координаты точки в выражение, полученное для второй производной, получаем: $y''\big|_{(0;\,1)} = -\dfrac{1}{16}$.

Ответ: $y''\big|_{(0;\,1)} = -\dfrac{1}{16}$.

Упражнение 14. Найти производную функции, применяя предварительно логарифмирование функции $y = f(x)$:

а) $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3 (x+3)^4}$;

б) $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$;

в) $y = x^{x^2}$;

г) $y = x^{\sqrt{x}}$;

д) $y = x^{\sin x}$.

Решение: а) $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$. Прологарифмируем обе части равенства и упростим, применив свойства логарифма.

$$\ln y = \ln \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4},$$

$$\ln y = 2\ln(x+2) - 3\ln(x+1) - 4\ln(x+3).$$

Продифференцируем обе части равенства по переменной x, не забывая, что y есть функция от x:

$$(\ln y)'_x = (2\ln(x+2) - 3\ln(x+1) - 4\ln(x+3))'_x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3} = \frac{2(x^2+4x+3) - 3(x^2+5x+6) - 4(x^2+3x+2)}{(x+2)(x+1)(x+3)},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-(5x^2+19x+20)}{(x+2)(x+1)(x+3)}, \; y' = y \cdot \frac{-(5x^2+19x+20)}{(x+2)(x+1)(x+3)},$$

$$y' = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4} \cdot \frac{-(5x^2+19x+20)}{(x+2)(x+1)(x+3)} = -\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}.$$

Ответ: $y' = -\dfrac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$.

б) $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$. Прологарифмируем обе части равенства и упростим, применив свойства логарифма.

$$\ln y = \ln\left[x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}\right],$$

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{3}\ln\frac{x^2}{x^2+1} = \ln x + \frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1) = \frac{5}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1).$$

Продифференцируем обе части равенства по переменной x, не забывая, что y есть функция от x:

$$(\ln y)'_x = \left(\frac{5}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)\right)'_x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+1}, \; y' = y \cdot \left(\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right) = y \cdot \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)},$$

$$y' = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} = \frac{3x^2+5}{3(x^2+1)} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{3x^2+5}{3\left(x^2+1\right)} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$.

в) $y = x^{x^2}$. $\ln y = \ln\left(x^{x^2}\right)$, $\ln y = x^2 \cdot \ln x$.

$$\left(\ln y\right)'_x = \left(x^2 \cdot \ln x\right)'_x,$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}, \ \frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln x + x, \ \frac{y'}{y} = x \cdot \left(2 \cdot \ln x + 1\right).$$

$$y' = y \cdot x \cdot \left(2 \cdot \ln x + 1\right) = x^{x^2} \cdot x \cdot \left(2 \cdot \ln x + 1\right) = x^{x^2+1} \cdot \left(2 \cdot \ln x + 1\right).$$

Ответ: $y' = x^{x^2+1} \cdot \left(2 \cdot \ln x + 1\right)$.

г) $y = x^{\sqrt{x}}$. $\ln y = \ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)$, $\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

$$\left(\ln y\right)'_x = \left(\sqrt{x} \cdot \ln x\right)'_x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}},$$

$$y' = y \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \ln x\right).$$

Ответ: $y' = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2} \cdot \ln x\right)$.

д) $y = x^{\sin x}$, где $x > 0$. $\ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right) = \sin x \cdot \ln x$.

$$\left(\ln y\right)'_x = \left(\sin x \cdot \ln x\right)'_x,$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}, \ y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right),$$

$$y' = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Ответ: $y' = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$.

3.5 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти дифференциалы следующих функций: а) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ при $x = 9$ и $\Delta x = -0{,}01$; б) $y = e^{3x}$ при $x = 0$ и $\Delta x = 0{,}1$.

2. Найти дифференциалы следующих функций для произвольных значений аргумента и его приращения: а) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

б) $y = ctg\ x + \dfrac{1}{\sin x}$;

в) $y = arcctg\ e^x$;

г) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

3. Вычислить приближенно: а) $tg\ 44^\circ$;

б) $\sin 31^\circ$;

в) $\sqrt[3]{0{,}988}$.

4. Найти производные второго порядка от следующих функций:

а) $y = \sin^2 x$;

б) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$;

в) $y = (\arcsin x)^2$.

5. Найти $f'''(3)$, если $f(x) = 5 \cdot (2x - 3)^5$.

6. Показать, что функция $y = e^{-x} \cdot \cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{IV} + 4y = 0$.

7. Найти производную n-го порядка от функции: $y = \sqrt{x}$.

8. Найти дифференциал второго порядка для следующих функций:

а) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

б) $y = \sin x \cdot \ln x$.

9. Найти производную следующих функций, заданных неявно:

а) $xy = arctg\dfrac{x}{y}$;

б) $e^y = x + y$;

в) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = C$.

10. Найти y'' в точке $(1;1)$, если $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$.

11. Найти производную функции, применяя предварительно логарифмирование функции $y = f(x)$:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$;

б) $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5 \cdot (x-3)^{11}}}$;

в) $y = \sqrt[x]{x}$;

г) $y = (\cos x)^{\sin x}$;

д) $y = (arctg\ x)^x$.

4 Лекция №4. Дифференцирование параметрически заданной функции

4.1 Параметрическое задание функции

Пусть даны два уравнения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad (1)$$

где t принимает значения, содержащиеся на отрезке $[\alpha; \beta]$. Каждому значению t соответствуют x и y, так как функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются однозначными. Если рассматривать значения x и y как координаты точки на координатной плоскости xOy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. При изменении t от α до β эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (1) называются **параметрическими уравнениями** этой кривой. Переменная t называется **параметром**, а способ задания кривой уравнениями (1) называется **параметрическим способом задания кривой**.

Предположим, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$. Тогда, очевидно, y является функцией от x:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \qquad (2)$$

Таким образом, уравнения (1) определяют y как функцию от x, поэтому можно сказать, что этими уравнениями **функция** $y(x)$ **задается параметрически**.

Выражение $y = f(x)$ непосредственной зависимости y от x может получиться путем исключения параметра t из уравнений (1).

4.2 Уравнения некоторых кривых в параметрической форме

1 Приведем в качестве первого примера параметрические уравнения окружности

Пусть центр окружности находится в начале координат, радиус окружности равен r. Обозначим через t угол, образованный радиусом, проведенным в некоторую точку $M(x; y)$ окружности, и осью Ox. Тогда координаты любой точки окружности выразятся через параметр t следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \text{ (см. рисунок 9).} \qquad (3)$$

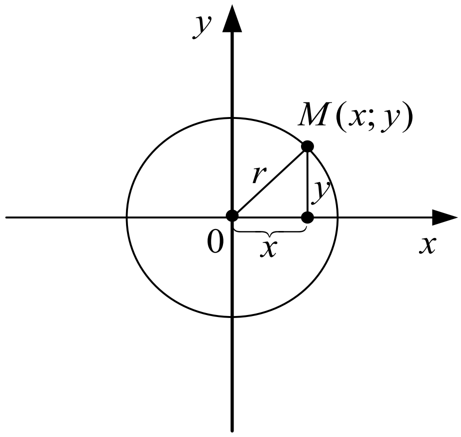

Рисунок 9

Это и есть параметрические уравнения окружности, центр которой совпадает с началом координат. Если мы исключим из них параметр t, то получим уравнение, содержащее только x и y:

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cdot \cos^2 t, \\ y^2 = r^2 \cdot \sin^2 t. \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right),$$

отсюда следует: $x^2 + y^2 = r^2$.

На рубеже XVI и XVII веков под влиянием развития техники в математику все активнее внедрялось изучение движения. Именно тогда ученые обратили особое внимание на так называемые механические кривые, то есть на кривые, порожденные движущимися точками. К таким кривым относятся, например, кривые, которые французские математики XVII века называли рулеттами (от слова roulette – колесико). Речь идет о кривых, описываемых точкой окружности, которая катится без скольжения по некоторой траектории. Рассмотрим две такие кривые.

2 Циклоида

Пусть окружность радиуса a катится по оси абсцисс. Получить параметрические уравнения линии, описываемой точкой, лежащей на окружности и в начальной момент движения находившейся в начале координат (см. рисунок 10).

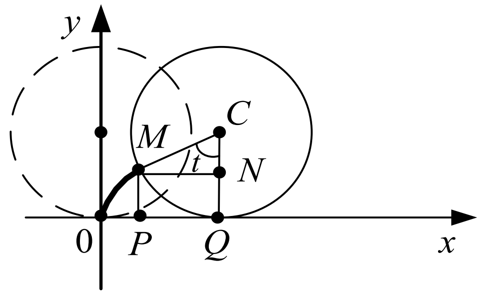

Рисунок 10

Пусть окружность проделала уже поворот на некоторый угол, и зафиксированная на ней в начальной момент движения точка занимает теперь положение $M(x; y)$. $x = OP = OQ - PQ$, но отрезок OQ равен по длине дуге окружности MQ. Значит,

$$x = \overset{\cup}{MQ} - PQ.$$

В качестве параметра будем рассматривать угол поворота окружности t.

$$t = \angle MCQ.$$

Тогда $y = PM = QN = QC - NC = a - a \cdot \cos t = a \cdot (1 - \cos t)$.

$$x = \overset{\cup}{MQ} - PQ = a \cdot t - a \cdot \sin t = a \cdot (t - \sin t).$$

Итак, параметрические уравнения циклоиды:

$$\begin{cases} x = a \cdot (t - \sin t), \\ y = a \cdot (1 - \cos t). \end{cases} \qquad (4)$$

При изменении t от 0 до 2π точка M описывает первую арку **циклоиды**. Циклоида изображена на рисунке 11.

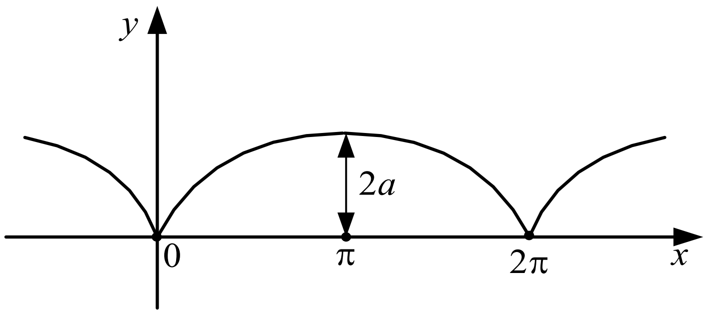

Рисунок 11

Исключим параметр t из уравнения (4). На отрезке $0 \le t \le \pi$ функция $y = a \cdot (1 - \cos t)$ имеет обратную: $t = \arccos \dfrac{a - y}{a}$.

Подставив выражение для t в первое из уравнений (4), мы сможем получить непосредственную зависимость x от y:

$$x = a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} - a \cdot \sin\left(\arccos \frac{a - y}{a}\right)$$

или

$$x = a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \text{ при } 0 \le x \le \pi a.$$

Непосредственно из рисунка 10 можно заметить, что при $0 \le x \le \pi a$

$$x = 2\pi a - \left(a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right).$$

Заметим, что функция

$$x = a \cdot (t - \sin t)$$

имеет обратную, но она не выражается через элементарные функции. Поэтому и функция $y = f(x)$ не выражается через элементарные функции.

3 Астроида

Эту кривую можно также отнести к рулеттам. Ее можно рассматривать как траекторию некоторой точки окружности радиуса $\frac{a}{4}$, катящейся по другой окружност радиуса a, причем меньшая окружность все время остается внутри большей.

Кривая, являющаяся траекторией точки, лежащей на окружности, которая катится без скольжения по другой, неподвижной окружности, называется **гипоциклоидой**.

Если же окружность катится без скольжения по другой, неподвижной окружности, оставаясь вне ее, то кривая, являющаяся траекторией точки, зафиксированной на движущейся окружности, называется **эпициклоидой**.

Итак, астроида относится к гипоциклоидам (см. рисунок 12).

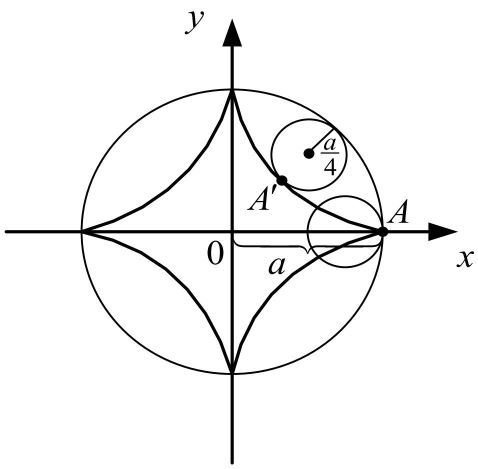

Рисунок 12

Однако эту кривую можно построить и другим, тоже механическим способом.

Рассмотрим прямоугольник, две стороны которого лежат на осях координат. Этот прямоугольник изменяется так, что его диагональ сохраняет постоянную длину a. Линия, описываемая основанием перпендикуляра, опущенного на диаголаль из вершины прямоугольника, противоположной началу координат, и будет **астроидой**.

Рассмотрим какой-либо из описанных выше прямоугольников $OLAN$ (см. рисунок 13).

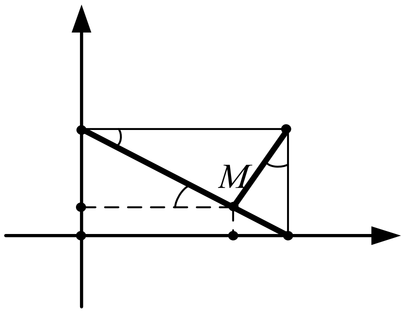

Рисунок 13

$LN = a$; $AM \perp LM$; $\angle\, ALM = t$, тогда и $\angle\, MAN = t$.

Точка $M(x; y)$ лежит на астроиде. Она будет иметь координаты

$$x = OP = QM,$$

$$y = MP;$$

выразим x и y через t: $x = QM = LM \cdot \cos t = \left(LA \cdot \cos t\right) \cdot \cos t = LA \cdot \cos^2 t =$
$= \left(LN \cdot \cos t\right) \cdot \cos^2 t = LN \cdot \cos^3 t = a \cdot \cos^3 t$.

$y = MP = MN \cdot \sin t = \left(AN \cdot \sin t\right) \cdot \sin t = AN \cdot \sin^2 t = \left(LN \cdot \sin t\right) \cdot \sin^2 t = LN \cdot \sin^3 t =$

$= a \cdot \sin^3 t$.

Таким образом, параметрические уравнения астроиды выглядят так:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{5}$$

Название астроиды происходит от греческого слова «астрон» – зведа, и означает «звездоподобная». Термин этот ввел в 1838 году австрийский астроном и математик **Й. фон Литтров (1781–1840)**.

Возведя все члены обоих уравнений (5) в степень $\frac{2}{3}$ и сложив уравнения, получим зависимость между x и y:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right), \text{ или } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

На примерах циклоиды и астроиды можно убедиться, что в некотрых случаях для исследования функций и кривых параметрические уравнения удобнее, чем уравнения, выражающие непосредственную зависимость y от x. Особенно часто это касается механических кривых. Поэтому параметрическое задание функций находит широкое применение в механике.

4.3 Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть зависимость переменной y от переменной x задана уравнениями (1)

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Предположим, что все эти функции имеют производные и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда определенную уравнениями (1) функцию можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, где $t = \Phi(x)$, то есть t здесь будет промежуточной переменной.

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t) \cdot \Phi'_x(x). \tag{6}$$

Производную обратной функции находим так:

$$\Phi'_x = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Подставляя это выражение в равенство (6), получим:

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} \text{ или } y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \text{ или}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{7}$$

Для нахождения второй производной $\frac{d^2 y}{dx^2}$ дифференцируем по x равенство (7), имея в виду, что t есть функция от x:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) \cdot \frac{dt}{dx}, \tag{8}$$

но $\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$; подставим два эти выражения в формулу (8).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \text{ или в более компактном виде:}$$

$$y''_{xx} = \frac{\varphi'_t(t) \cdot \psi''_{tt}(t) - \psi'_t(t) \cdot \varphi''_{tt}(t)}{\left[\varphi'_t(t)\right]^3}. \tag{9}$$

4.4 Практическое занятие №4. Производная функции заданной параметрически. Геометрические приложения производной

Упражнение 1. Найти производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$ для функций, заданных параметрически: а) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$,

б) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = b \cdot \sin^3 t \end{cases}$,

г) $\begin{cases} x = a \cdot \left(\ln tg\,\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t \right) \\ y = a \cdot (\sin t + \cos t) \end{cases}$.

Решение: а) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$. Применим формулу (7). $x'(t) = (2t-1)' = 2$, $y'(t) = \left(t^3\right)' = 3 \cdot t^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot t^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot t^2 .$$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2} \cdot t^2$.

б) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$. $x'(t) = \left(\sqrt{t}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $y'(t) = \left(\sqrt[3]{t}\right)' = \dfrac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{t}} .$$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[6]{t}}$.

в) $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = b \cdot \sin^3 t \end{cases}$. $x'(t) = a \cdot 3 \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t$,

$y'(t) = b \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t = 3b \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3b \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} = -\frac{b}{a} tg\ t .$$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a} tg\, t$.

г) $\begin{cases} x = a \cdot \left(\ln tg\, \dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t \right) \\ y = a \cdot (\sin t + \cos t) \end{cases}$.

$$x'(t) = a \cdot \left(\frac{1}{tg\, \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \sin t - \cos t \right) = a \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}} - \sin t - \cos t \right) =$$

$$= a \cdot \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t - \cos t \right) = a \cdot \frac{1 - \sin^2 t - \cos t \cdot \sin t}{\sin t} = a \cdot \frac{\cos^2 t - \cos t \cdot \sin t}{\sin t} =$$

$$= a \cdot \frac{\cos t \cdot (\cos t - \sin t)}{\sin t},\ y'(t) = a \cdot (\cos t - \sin t).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \cdot (\cos t - \sin t)}{a \cdot \dfrac{\cos t \cdot (\cos t - \sin t)}{\sin t}} = \frac{\sin t \cdot (\cos t - \sin t)}{\cos t \cdot (\cos t - \sin t)} = tg\, t.$$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = tg\, t$.

Упражнение 2. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ от следующих функций:

а) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$,

б) $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$.

Решение: а) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$. Применим формулу (9).

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot \sin 2t \\ y'(t) = 2 \sin t \cdot \cos t = \sin 2t \end{cases},\ \begin{cases} x''(t) = -4 \cdot \cos 2t \\ y''(t) = 2 \cdot \cos 2t \end{cases}.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \cdot \cos 2t \cdot (-2 \cdot \sin 2t) - \sin 2t \cdot (-4 \cdot \cos 2t)}{(-2 \cdot \sin 2t)^3} = \frac{-4 \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t + 4 \cdot \cos 2t \cdot \sin 2t}{-8 \cdot \sin^3 2t} =$$

$= 0$.

Ответ: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

б) $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$. $\begin{cases} x'(t) = -a \cdot e^{-at} \\ y'(t) = a \cdot e^{at} \end{cases}$, $\begin{cases} x''(t) = a^2 \cdot e^{-at} \\ y''(t) = a^2 \cdot e^{at} \end{cases}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2\cdot e^{at}\cdot\left(-a\cdot e^{-at}\right)-a\cdot e^{at}\cdot a^2\cdot e^{-at}}{\left(-a\cdot e^{-at}\right)^3}=\frac{-a^3\cdot e^{-at}\cdot e^{at}-a^3\cdot e^{-at}\cdot e^{at}}{-a^3\cdot e^{-3at}}=$$

$$=\frac{-2\cdot a^3}{-a^3\cdot e^{-3at}}=\frac{2}{e^{-3at}}=2\cdot e^{3at}.$$

Ответ: $\frac{d^2y}{dx^2}=2\cdot e^{3at}$.

Прежде чем продолжать практическое занятие, выведем уравнения касательной и нормали к графику функции в точке.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0;y_0)$. Поставим задачу о построении касательной к графику функции в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Из курса аналитичекской геометрии известно, что уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$, где k – угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$. Выделим из всего пучка прямую, являющуюся касательной к графику функции в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Исходя из геометрического смысла производной, имеем: угловым коэффициентом касательной к графику функции в точке $M_0(x_0;y_0)$ является значение производной функции в точке $M_0(x_0;y_0)$, т.е. $k_{кас.}=f'(x_0)$.

Значит, уравнение касательной имеет вид: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$, отсюда имеем уравнение касательной: $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ или

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0). \qquad (10)$$

Определение: **Нормалью** кривой называется прямая, перпендикулярная касательной к этой кривой и проходящая через точку касания.

Найдем угловой коэффициент нормали к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$. Так как касательная и нормаль – перпендикулярные прямые, их угловые коэффициенты связаны соотношением: $k_{нор.}=-\frac{1}{k_{кас.}}$. Исходя из геометрического смысла производной, имеем: $k_{нор.}=-\frac{1}{f'(x_0)}$. Значит, $\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{1}{f'(x_0)}$, отсюда имеем уравнение нормали: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\left(x-x_0\right)$ или $y=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\left(x-x_0\right)+f(x_0)$.

Упражнение 3. Составить уравнение касательной и нормали к кривым в указанных точках:

а) $y = tg\ 2x$ в начале координат;

б) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$ в точке пересечения с осью Ox;

в) $y = \arccos 3x$ в точке пересечения с осью Oy;

г) $y = \ln x$ в точке пересечения с осью Ox;

д) $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения с прямой $y = 1$.

Решение: а) Уравнение касательной к графику функции в точке имеет вид: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$. Найдем производную функции $y = tg\ 2x$ и составим уравнение касательной и нормали в точке $(0; 0)$.

$$y' = (tg\ 2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x},\ y'(0) = 2.$$

$y = 2\cdot(x-0)+0$, $y = 2x$ – уравнение касательной.

Уравнение нормали имеет вид: $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$. В нашем случае имеем: $y = -\dfrac{1}{2}\cdot(x-0)+0$, $y = -\dfrac{x}{2}$ – уравнение нормали.

Ответ: $y = 2x$, $y = -\dfrac{x}{2}$.

б) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2}$, $y' = \left(\arcsin\dfrac{x-1}{2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{x-1}{2}\right)' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{4-(x-1)^2}{4}}} = \frac{2}{2\sqrt{4-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}.$$

Найдем точку пересечения графика функции с осью Ox.

$y = 0$, $\arcsin\dfrac{x-1}{2} = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = 0$, значит $x = 1$. Имеем точку с координатами $(1; 0)$.

$$y'(1) = \frac{1}{\sqrt{4-0}} = \frac{1}{2}.$$

Составим уравнение касательной и нормали:

$y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-1)$, $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$ – уравнение касательной.

$y - 0 = -2(x-1)$, $y = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$ – уравнение нормали.

Ответ: $x - 2y - 1 = 0$, $2x + y - 2 = 0$.

в) $y = \arccos 3x$.

Найдем координаты точки касания: $x = 0 \Rightarrow y = \arccos(3\cdot 0) = \arccos 0 =$

$= \dfrac{\pi}{2}$.

Имеем точку касания с координатами: $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 = -\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$, $y'(0) = -\dfrac{3}{\sqrt{1-0}} = -3$.

Составим уравнение касательной и нормали к графику функции в точке касания.

$y - \dfrac{\pi}{2} = -3(x-0)$, $y - \dfrac{\pi}{2} = -3x \Rightarrow 6x + 2y - \pi = 0$ – уравнение касательной.

$y - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{3}(x-0)$, $y - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow 2x - 6y + 3\pi = 0$ – уравнение нормали.

Ответ: $6x + 2y - \pi = 0$, $2x - 6y + 3\pi = 0$.

г) $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x}$.

Найдем координаты точки касания: $y = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$. Точка касания имеет координаты: $(1; 0)$. $y'(1) = 1$.

$y - 0 = 1 \cdot (x-1) \Rightarrow y = x - 1$, $x - y - 1 = 0$ – уравнение касательной.

$y - 0 = -1 \cdot (x-1) \Rightarrow y = -x + 1$, $x + y - 1 = 0$ – уравнение нормали.

Ответ: $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$.

д) $y = e^{1-x^2}$. $y' = e^{1-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$.

Найдем координаты точки касания: $e^{1-x^2} = 1$, $e^{1-x^2} = e^0$, $1 - x^2 = 0$. Получаем: $x_1 = 1, x_2 = -1$. Прямая $y = 1$ пересекает график функции в двух точках $M_1(1; 1)$ и $M_2(-1; 1)$. Запишем уравнение касательной и нормали для каждой точки касания.

Рассмотрим точку $M_1(1; 1)$.

$y'(1) = -2 \cdot 1 \cdot e^{1-1} = -2$.

$y - 1 = -2(x-1)$, $2x + y - 3 = 0$ – уравнение касательной в точке $M_1(1; 1)$.

$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x-1)$, $x - 2y + 1 = 0$ – уравнение нормали в точке $M_1(1; 1)$.

Рассмотрим точку $M_1(1; -1)$. $y'(1) = -2 \cdot (-1) \cdot e^{1-1} = 2$.

$y - 1 = 2(x+1)$, $2x - y + 3 = 0$ – уравнение касательной в точке $M_2(1; -1)$.

$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x+1)$, $x + 2y - 1 = 0$ – уравнение нормали в точке $M_2(1; -1)$.

Ответ: $M_1(1; -1)$, $2x + y - 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.

$M_2(1; -1)$, $2x - y + 3 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.

Упражнение 4. Составить уравнение касательной и нормали в точке $(2;\,2)$ к кривой $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}. \end{cases}$

Решение: Найдем производную функции, заданной параметрически: $x'_t = \dfrac{t^3 - (1+t)\cdot 3\cdot t^2}{t^6} = -\dfrac{2t+3}{t^4}$, $y'_t = -\dfrac{3}{t^3} - \dfrac{1}{2t^2} = -\dfrac{6+t}{2t^3}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{6+t}{2t^3}\cdot\left(-\frac{t^4}{2t+3}\right) = \frac{t(6+t)}{2(2t+3)}.$$

Найдем значение параметра t, соответствующего точке с координатами $(2;\,2)$. Для этого подставим координаты точки в аналитическое выражение функции.

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ 2 = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}. \end{cases} \quad 2 = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t},\ 4t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{3}{4}.$$

Чтобы узнать какой параметр выбрать, подставим значение t_1 и t_2 в выражение $2 = \dfrac{1+t}{t^3}$. Этому уравнению удовлетворяет только $t_1 = 1$.

$$y'_x(1) = \frac{1\cdot(6+1)}{2\cdot(2+3)} = \frac{7}{10}.$$

$y - 2 = \dfrac{7}{10}(x-2)$, $7x - 10y + 6 = 0$ – уравнение касательной.

$y - 2 = -\dfrac{10}{7}(x-2)$, $10x + 7y - 34 = 0$ – уравнение нормали.

Ответ: $7x - 10y + 6 = 0$, $10x + 7y - 34 = 0$.

Упражнение 5. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y = 3$.

Решение: Найдем абсциссу точки касания: $y = 3$, значит $x^3 + 2x + 3 = 0$. Действительным корнем уравнения является $x = -1$. $M(-1;\,3)$ – точка касания.

Найдем производную функции, заданной неявно: $3x^2 + 2y\cdot y' + 2 = 0$.

Получаем: $y' = -\dfrac{3x^2+2}{2y}$. $y'(-1;\,3) = -\dfrac{3\cdot(-1)^2 + 2}{2\cdot 3} = -\dfrac{5}{6}$.

$y - 3 = -\dfrac{5}{6}(x+1)$, $5x + 6y - 13 = 0$ – уравнение касательной.

$y-3=\frac{6}{5}(x+1)$, $6x-5y+21=0$ – уравнение нормали.

Ответ: $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$.

Упражнение 6. Найти угол, под которым пересекаются параболы $y=(x-2)^2$ и $y=-x^2+6x-4$.

Решение: Найдем точку пересечения парабол.

$(x-2)^2=-x^2+6x-4$, $x^2-5x+4=0$, $x_1=4, x_2=1$. Параболы пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1=4, x_2=1$.

Углом между кривыми является угол между касательными к ним, проведенными в точках пересечения кривых. Тангенс этого угла равен: $tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты касательных, проведенных к соответствующим кривым.

Рассмотрим точку $x_1=4$. Обозначим через k_1' – угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=(x-2)^2$ в точке с абсциссой $x_1=4$, а через k_2' – угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=-x^2+6x-4$ в точке с абсциссой $x_1=4$.

Найдем угловые коэффициенты k_1' и k_2', исходя из геометрического смысла производной.

$y=(x-2)^2, y'=2\cdot(x-2)$.

$y=-x^2+6x-4$, $y'=-2x+6$.

$k_1'=y'(4)=2\cdot(4-2)=4$, $k_2'=y'(4)=-2\cdot4+6=-2$.

$tg\,\varphi_1=\frac{k_2'-k_1'}{1+k_1'\cdot k_2'}=\frac{-6}{1-8}=\frac{6}{7}$, значит $\varphi_1=40^\circ36'$.

Рассмотрим точку $x_2=1$. Обозначим через k_1'' – угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=(x-2)^2$ в точке с абсциссой $x_2=1$, а через k_2'' – угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=-x^2+6x-4$ в точке с абсциссой $x_2=1$.

Найдем угловые коэффициенты k_1'' и k_2'', исходя из геометрического смысла производной.

$y=(x-2)^2, y'=2\cdot(x-2)$.

$y=-x^2+6x-4$, $y'=-2x+6$.

$k_1''=y'(1)=2\cdot(1-2)=-2$, $k_2''=y'(1)=-2\cdot1+6=4$.

$tg\,\varphi_2=\frac{k_2''-k_1''}{1+k_1''\cdot k_2''}=\frac{4+2}{1-8}=-\frac{6}{7}$, значит $\varphi_2=139^\circ24'$.

Ответ: $\varphi_1=40^\circ36'$, $\varphi_2=139^\circ24'$.

4.5 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную $y' = \frac{dy}{dx}$ для функций y, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

2. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

а) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = arctg\, t, \\ y = \frac{1}{2}\cdot t^2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t-1}. \end{cases}$

3. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt[3]{x-1}$ в точке с координатами $(1; 0)$.

4. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = t\cdot\cos t, \\ y = t\cdot\sin t. \end{cases}$ в точке $(0; 0)$ и в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

5. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y^4 = 4x^4 + 6xy$ в точке $(1; 2)$.

6. Под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $y = x^3$?

5 Лекция №5. Теоремы о среднем значении и их применение

5.1 "Французские" теоремы

Мы докажем четыре замечательные теоремы о дифференцируемых функциях. Следствия из этих теорем дадут нам средства для исследования функций, правила раскрытия неопределенностей и другие важные сведения. Эти теоремы носят имена французских математиков XVII-XIX веков, и поэтому их часто называют французскими теоремами. Прежде чем приступить к формулировке первой из них, дадим определение локального экстремума функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ **локального максимума (минимума)**, если существует окрестность этой точки $U(c) = (c - \delta, c + \delta)$, на которой выполняется неравенство $f(c) \geq f(x)$ для $\forall x \in U(c)$ (соответственно $f(c) \leq f(x)$ для $\forall x \in U(c)$).

Локальный максимум или минимум называется **локальным экстремумом**. Точка c называется **точкой локального экстремума**.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и достигает на нем максимума (минимума) в точке $c \in (a; b)$, то, очевидно, c является в то же время точкой локального максимума (минимума) $f(x)$.

Но если максимум (минимум) $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ достигается в точке a или b, то такая точка не является точкой локального экстремума, потому что $f(x)$ не определена в полной окрестности точки, справа и слева.

Вероятно, уже изучая начала анализа в школе, вы узнали, что производная функции $f(x)$ в точке локального экстремума равна нулю. Этот факт установил **Пьер Ферма (1601–1665)**, потомственный юрист, который математикой занимался как любитель, в свободное время. Тем не менее, его по праву называют одним из основоположников различных разделов этой науки: аналитической геометрии, теории чисел, теории вероятностей, математического анализа. Для становления дифференциального исчисления большое значение имело предложенное Ферма правило нахождения экстремума. Это правило было выработано в ходе решения задачи о проведении касательной к кривой. С ним читатель, несомненно, уже познакомился в школе. Сейчас сформулируем и докажем теорему, из которой оно следует.

Теорема 1 (Ферма). Если функция $f(x)$ имеет производную в точке c и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(c)=0$.

Доказательство: для определенности будем считать, что функция $y=f(x)$ имеет в точке c локальный максимум. По определению производной $f'(c)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. По определению локального максимума, $f(c)\geq f(x)$ для любого $x\in U(c)$, значит, для достаточно малых $\Delta x>0$ будет выполняться неравенство: $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$, откуда, перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим, что

$$f'(c)\leq 0. \tag{1}$$

Если же $\Delta x<0$, то $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$; переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ в этом неравенстве, получим

$$f'(c)\geq 0. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $f'(c)=0$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл теоремы очевиден: в точке локального экстремума функции касательная к графику этой функции будет параллельна оси Ox ($tg\,\alpha=0$, см. рисунок 14).

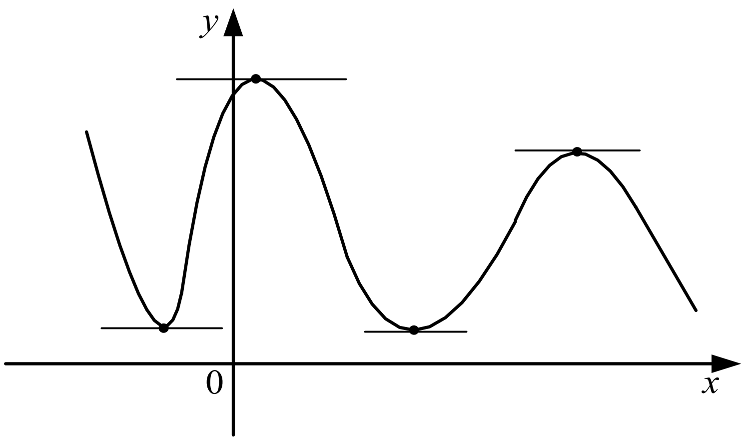

Рисунок 14

Следующая теорема связана с именем другого французского математика, **Мишеля Ролля (1652–1719)**. Основные работы этого ученого были посвящены алгебре. Он выступал с критикой анализа бесконечно малых и аналитической геометрии, которые в XVII веке только зарождались. Однако названная его именем теорема вошла в число важнейших в курсе математического анализа. Эта и следующие теоремы будут касаться функций, непрерывных на отрезке и дифференцируемых в каждой внутренней точке этого отрезка.

Теорема 2 (Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, имеет производную во всех внутренних точках этого отрезка, и принимает равные значения на концах отрезка $(f(a)=f(b))$, то существует хотя бы одна внутренняя точка отрезка $(\xi : a<\xi<b)$, в которой производная функции равна нулю $(f'(\xi)=0)$.

Доказательство: если $f(x)$ постоянна на отрезке $[a;b]$, то производная ее во всех точках этого отрезка равна нулю.

Будем считать, что функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ не является постоянной. Она непрерывна на этом отрезке, значит, согласно теореме Вейерштрасса, существует точка $x_1 \in [a;b]$, в которой функция достигает максимума, и точка $x_2 \in [a;b]$, в которой функция достигает минимума. Эти точки не могут одновременно оказаться концами отрезка, поскольку иначе оказалось бы следующее: $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(a)=f(b)$ (по условию теоремы функция принимает одинаковые значения на концах отрезка). Функция тогда была бы постоянной на отрезке $[a;b]$. Но функция по предположению не является постоянной, значит, хотя бы одна из точек x_1 и x_2 – внутренняя точка отрезка. Обозначим ее буквой c. В ней достигается локальный экстремум. Производная в этой точке существует, так как по условию она существует в каждой внутренней точке отрезка. Поэтому по теореме Ферма $f'(c)=0$, что и требовалось доказать.

Теорема Ролля теряет силу, если хотя бы в одной точке интервала $(a;b)$ не существует производная функции.

В этой теореме нельзя заменить непрерывность на отрезке $[a;b]$ непрерывностью на интервале $(a;b)$, тогда теорема также теряет силу.

Геометрический смысл теоремы виден на рисунке 15.

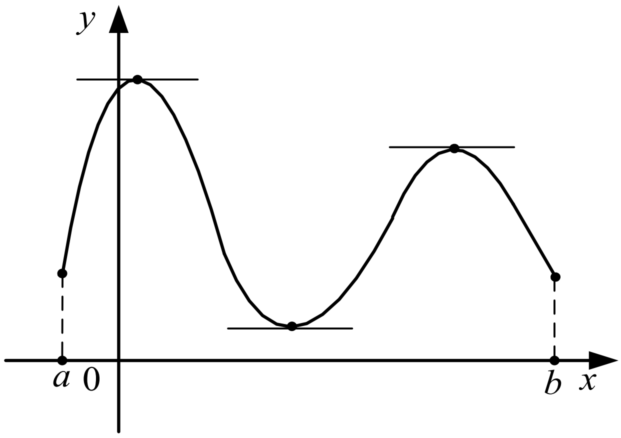

Рисунок 15

Изображая график непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции, дифференцируемой во всех внутренних точках отрезка, мы должны помнить, что такая кривая имеет касательную в каждой точке отрезка $[a;b]$.

Учитывая также условие $f(a)=f(b)$, увидим, что существует хотя бы одна внутренняя точка c отрезка $[a;b]$, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси Ox.

Следующая теорема названа именем **Огюстена Луи Коши (1789–1857)**, в работах которого заложены основы всего современного математического анализа.

Теорема 3 (Коши). Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы в каждой точке интервала $(a;b)$, и если $g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a;b)$, то существует точка $c\in(a;b)$, такая, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{3}$$

Доказательство: отметим, что $g(b)-g(a)\neq 0$, так как в противном случае, по теореме Ролля, нашлась бы такая точка $c\in(a;b)$, что $g'(c)=0$, чего не может быть по условию теоремы.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)].$$

В силу условий теоремы эта функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $F(a)=0$, $F(b)=0$. Для функции $F(x)$ выполняются все условия теоремы Ролля. Согласно этой теореме, существует точка $c: c\in(a;b)$, $F'(c)=0$. Найдем производную функции $F(x)$:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x).$$

Подставив вместо x точку c, получим:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

что и требовалось доказать.

Следствием из теоремы Коши является теорема Лагранжа.

Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) – один из крупнейших ученых, живших на рубеже XVIII и XIX веков, основоположник теоретической механики, неоценимо много сделавший для развития математического анализа и теории дифференциальных уравнений.

Теорема 4 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала $(a;b)$. Тогда на интервале $(a;b)$ найдется хотя бы одна точка c, для которой выполняется равенство:

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c) \quad (a<c<b), \tag{4}$$

или

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (a<c<b). \tag{5}$$

Доказательство: достаточно в условии теоремы Коши взять $g(x) = x$, и мы получим теорему Лагранжа как частный случай теоремы Коши.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно тангенсу угла, образованного секущей графика $y = f(x)$ с осью Ox (см. рисунок 16).

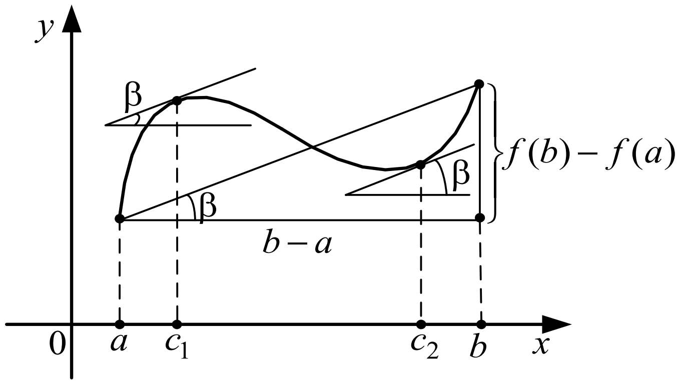

Рисунок 16

Теорема доказывает, что внутри интервала $(a;b)$ в данных условиях найдется хотя бы одна точка c, в которой касательная к графику будет параллельна секущей графика на отрезке $[a;b]$, так как $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\,\beta$.

На рисунке 16 таких точек две: c_1, c_2.

5.2 Следствия из «французских теорем»

5.2.1 Связь между поведением функции и ее производной (следствия из теоремы Лагранжа)

Следствие 1. Функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, где $a < b$, и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале $(a;b)$, не убывает (строго возрастает) на отрезке $[a;b]$.

Докажем это следствия для случая, когда производная $f'(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$. По теореме Лагранжа, для указанной функции найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, для которой $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Если производная функции на всём интервале $(a;b)$ положительна, то $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$. Отсюда следует, что если $b-a > 0$, то $f(b)-f(a) > 0$, или $f(b) > f(a)$, когда $b > a$. Это означает, что функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$. Аналогично доказывается и второе следствие.

Следствие 2. Функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, и имеющая неположительную (отрицательную) производную на интервале $(a; b)$, не возрастает (строго убывает) на отрезке $[a; b]$.

Эти следствия проиллюстрированы рисунками 17 и 18.

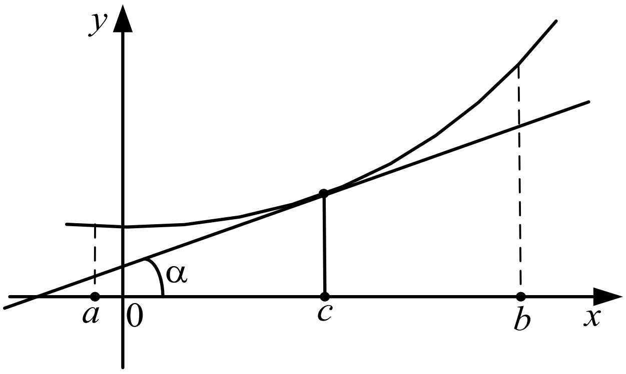

Рисунок 17

$$f'(c) = tg\ \alpha > 0;\ \ f'(x) > 0\ \forall x \in (a; b)$$

В любой точке интервала $(a; b)$ тангенс угла, образованного касательной к графику этой функции и положительным направлением оси Ox положителен. В этом случае функция на отрезке $[a; b]$ возрастает.

Следующий рисунок – это иллюстрация ко второму следствию.

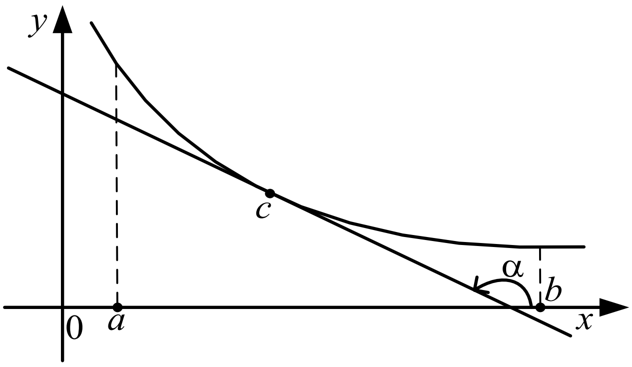

Рисунок 18

$$f'(c) = tg\ \alpha < 0;\ \ f'(x) < 0\ \forall x \in (a; b)$$

Функция $y = f(x)$ убывает на всем отрезке $[a; b]$.

5.2.2 Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции в точке

Теорема Ферма и два следствия из теоремы Лагранжа дают нам необходимое и достаточное условия существования экстремумов функции, а также первое правило отыскания точек экстремума.

Необходимым условием существования экстремума в точке является равенство нулю производной функции в этой точке. Значит, отыскав производную заданной функции, приравняв ее к нулю и разрешив уравнение $f'(x)=0$ относительно x, мы найдем абсциссы точек, подозрительных на экстремум.

Будет ли такая точка действительно точкой экстремума? Это зависит от того, будет ли выполняться достаточное условие существования экстремума.

Достаточным условием существования экстремума является перемена знака производной при переходе через точку, подозрительную на экстремум. На рисунке 19 показан случай, когда функция имеет максимум в точке $C(c;\, f(c))$.

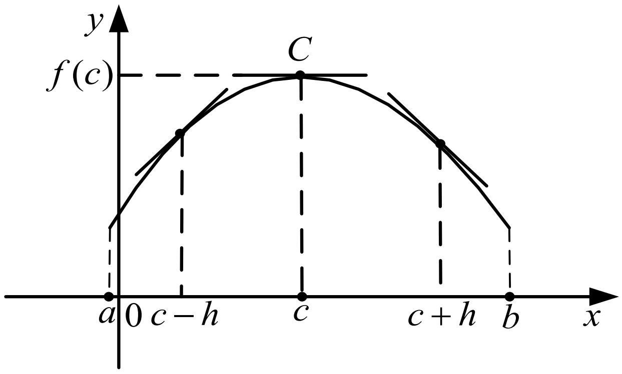

Рисунок 19

Производная функции $f(x)$ в интервале $(a;c)$ принимает положительные значения; функция в этом интервале возрастает, $f'(c)=0$.

В интервале $(c;b)$ производная функции принимает отрицательные значения; функция в этом интервале убывает.

Функция имеет максимум в точке $x=c$.

На рисунке 20 показан случай, когда функция при $x=c$ имеет минимум.

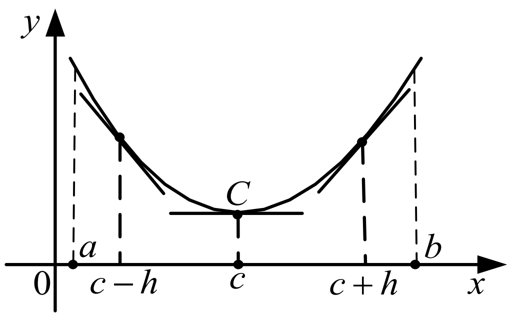

Рисунок 20

Производная функции $f(x)$ в интервале $(a;c)$ принимает отрицательные значения; функция в этом интервале убывает, $f'(c)=0$.

В интервале $(c; b)$ производная функции принимает положительные значения; функция в этом интервале возрастает.

Функция имеет минимум в точке $x = c$.

Наконец, на рисунке 21 показан случай, когда в точке $x = c$ производная функции равна нулю, но экстремума в этой точке функция не имеет.

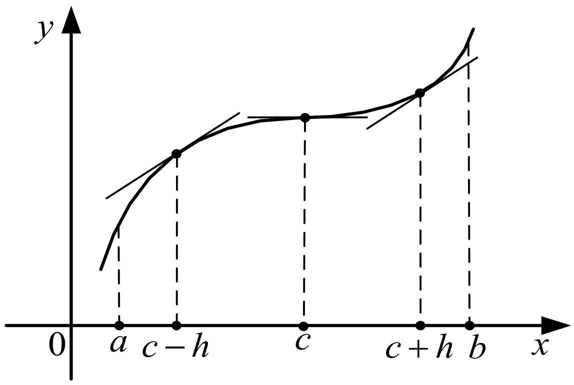

Рисунок 21

Производная функции $f'(c) = 0$. $f'(x) > 0\ \forall x \in (a; c)$ – значит, функция возрастает на интервале $(a; c)$. $f'(x) > 0\ \forall x \in (c; b)$ – значит, функция продолжает возрастать на интервале $(c; b)$. В точке $x = c$ экстремума нет.

Заметим, что экстремум функции может достигаться и в точке, в которой производная не существует (см. рисунок 22).

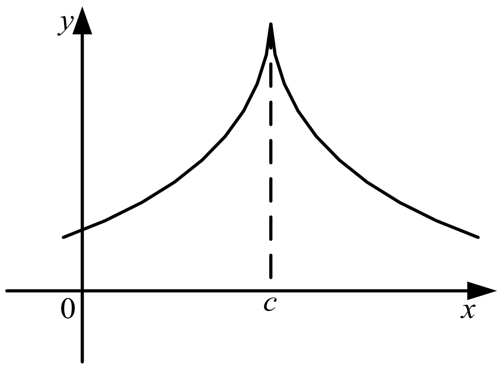

Рисунок 22

Здесь $\forall x < c\ f'(x) > 0$ и функция возрастает, а $\forall x > c\ f'(x) < 0$ и функция убывает.

В точке $x = c$ она достигает максимума. Таким образом, если в точке c функция $f(x)$ определена, а производная её $f'(c)$ не существует, то это условие также должно рассматриваться как необходимое условие экстремума. Для такой точки c также должно проверяться выполнение достаточного условия.

5.3 Практическое занятие №5. Применение теорем о среднем и следствий из них к исследованию функций

Упражнение 1. Пусть $P(x)=(x+3)(x+2)(x-1)$. Показать, что на интервале $(-3;1)$ найдется корень уравнения $P''(c)=0$.

Решение: Многочлен $P(x)$ обращается в нуль в точках $x_1=-3$, $x_2=-2$, $x_3=1$. на каждом из интервалов $(-3;-2)$ и $(-2;1)$ к функции $P(x)$ применима теорема Ролля, так как $P(x)$ всюду дифференцируема и $P(-3)=P(-2)=0$, $P(-2)=P(1)=0$. Поэтому найдутся точки c_1, $-3<c_1<-2$, и c_2, $-2<c_2<1$, такие, что

$$P'(c_1)=P'(c_2)=0.$$

К функции $P'(x)$ на отрезке $[c_1;c_2]$ теорема Ролля опять применима, и поэтому найдется точка c, $c_1<c<c_2$, в которой $P''(c)=0$.

Упражнение 2. Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x)=x^2-2x$ на отрезке $[-1;3]$, найти соответствующее значение c (если оно существует).

Решение: Функция непрерывна на отрезке $[-1;3]$ и дифференцируема на интервале $(-1;3)$. Кроме того, $f(-1)=f(3)=3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдем значение $c\in(-1;3)$, для которого $f'(c)=0$, из равенства $\left(x^2-2x\right)'=0$, т.е. $2x-2=0$, откуда $x=1$. Поскольку $1\in(-1;3)$, то $c=1$ – искомое значение.

Упражнение 3. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y=\arcsin x$ на отрезке $[-1;1]$. Найти значение c, при котором выполнено условие (5).

Решение: Функция определена и непрерывна при $-1\le x\le 1$. Найдем $f'(x)$.

Имеем $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, производная конечна всюду внутри интервала $(-1;1)$; при $x=\pm 1$ производная не существует, но это не нарушает условий применимости теоремы Лагранжа.

Точка c, удовлетворяющая условию (5), должна существовать. Найдем эту точку:

$$\frac{\arcsin 1-\arcsin(-1)}{1-(-1)}=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\,;\ \frac{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

откуда

$$\sqrt{1-c^2}=\frac{2}{\pi},\ \text{или}\ c_{1,\,2}=\pm\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}\,.$$

Итак, в данном случае условие (5) выполняется для двух точек (см. рисунок 23).

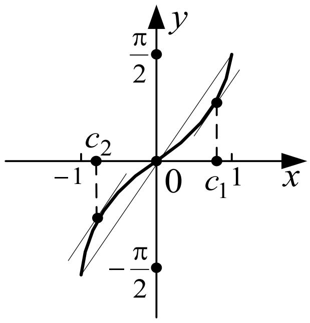

Рисунок 23

Упражнение 4. Пользуясь формулой

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(c), \tag{6}$$

оценить значение $\ln(1+e)$.

Решение: Рассмотрим функцию $y = \ln x$. Эта функция дифференцируема всюду при $x > 0$ и $f'(x) = \frac{1}{x}$. Для отрезка $[e; e+1]$ пишем формулу (6):

$$\ln(1+e) = \ln e + [(e+1) - e] \cdot \frac{1}{c} = 1 + \frac{1}{c},$$

где $e < c < 1+e$.

Оценим выражение $1 + \frac{1}{c}$ при $e < c < 1+e$. Имеем

$$\ln(1+e) = 1 + \frac{1}{c} < 1 + \frac{1}{e}, \text{ так как } c > e \text{ и}$$

$$1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{1+e}, \text{ так как } c < 1+e.$$

Таким образом,

$$1 + \frac{1}{1+e} < \ln(1+e) < 1 + \frac{1}{e}.$$

Подставляя в эту оценку $e \approx 2{,}7$ получаем окончательно

$$1{,}27 < \ln(1+e) < 1{,}37.$$

Ответ: $1{,}27 < \ln(1+e) < 1{,}37$.

Упражнение 5. Определить интервалы монотонности функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Решение: Очевидно, что данная функция всюду имеет производную

$$f'(x) = \left(x^2 - 6x + 8\right)' = 2x - 6 = 2(x-3).$$

При $x > 3$ $f'(x) > 0$, функция возрастает на интервале $(3; +\infty)$.

При $x < 3$ $f'(x) < 0$, функция убывает на интервале $(-\infty; 3)$.

Эскиз графика функции представлен на рисунке 24.

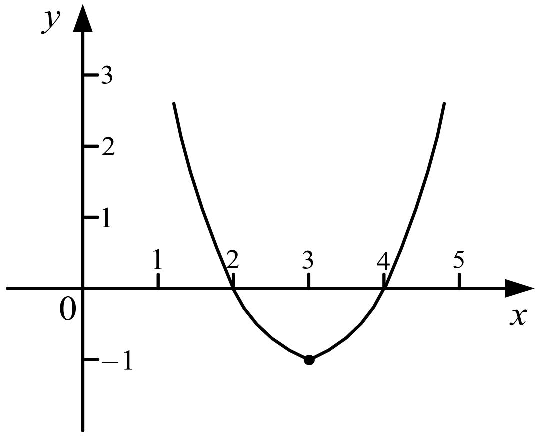

Рисунок 24

Ответ: Функция возрастает на интервале $(3;+\infty)$ и убывает на интервале $(-\infty;3)$.

Упражнение 6. Определить интервалы монотонности функции $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$.

Решение: Функция имеет производную всюду, кроме точки $x=1$, в которой сама функция не определена.

На каждом из интервалов $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$ определим знаки $f'(x)$. Имеем

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^4}=\frac{2x(x-1)\left[x^2-x-x^2-1\right]}{(x-1)^2}=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Находим, что $f'(x)<0$ на интервале $(-\infty;-1)$, так как на этом интервале $(x+1)<0$ и $(x-1)^2<0$. На интервале $(-1;1)$ $f'(x)>0$, а на интервале $(1;+\infty)$ $f'(x)<0$.

Получаем, что функция убывает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$, и возрастает на интервале $(-1;1)$. Эскиз графика функции изображен на рисунке 25.

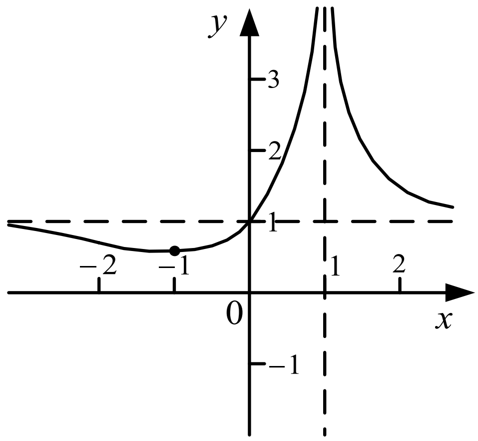

Рисунок 25

Ответ: Функция убывает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, и возрастает на интервале $(-1; 1)$.

Упражнение 7. Найти экстремум функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

Решение: Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$. Применим сначала необходимое условие экстремума, для этого найдем производную функции и приравняем ее к нулю.

$$y' = x^3 - 2x^2 - 3x.$$

Решаем уравнение $y' = 0$, т.е. $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$. Получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ и $x_3 = -1$.

Производная конечна всюду, поэтому критическими точками будут только найденные точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ и $x_3 = -1$.

Рассмотрим интервалы

$$(-\infty; -1);\ (-1; 0);\ (0; 3);\ (3; +\infty).$$

Применим теперь достаточное условие экстремума функции, для этого выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак производной (см. рисунок 26).

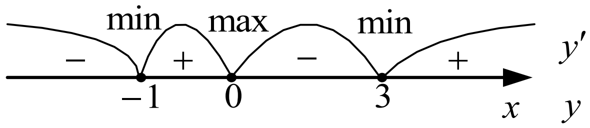

Рисунок 26

Приходим к заключению, что в критических точках $x = -1$ и $x = 3$ имеет место минимум, в критической точке $x = 0$ – максимум.

$$y_{\min}(-1) = \frac{17}{12},\ y_{\max}(0) = 2,\ y_{\min}(3) = -\frac{37}{4} \text{ (см. риунок 27).}$$

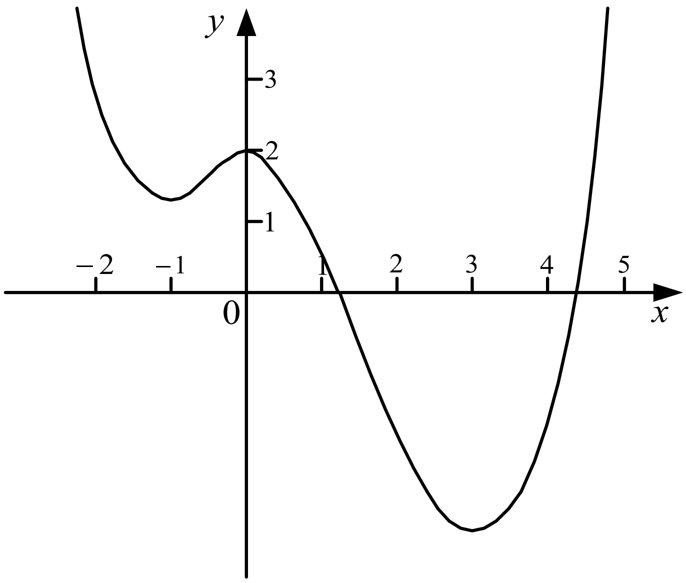

Рисунок 27

Ответ: В точках $x=-1$ и $x=3$ функция имеет минимум $y_{\min}(-1)=\frac{17}{12}$, $y_{\min}(3)=-\frac{37}{4}$; в точке $x=0$ – максимум, $y_{\max}(0)=2$.

Упражнение 8. Найти экстремум функции $y=x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x+2}$.

Решение: Функция существует всюду, кроме точки $x=-2$, т.е. на интервалах $(-\infty;-2)$; $(-2;+\infty)$. Определим критические точки:

$$y'=\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2)-x^{\frac{2}{3}}}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2}=\frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2}.$$

$y'(x)=0$ при $x=4$ и не существует при $x=0$ и $x=-2$.

Таким образом, имеем две критические точки $x=4$ и $x=0$.

Применим достаточное условие экстремума функции, для этого определим знак производной на каждом из интервалов:

$(-\infty;-2)$; $(-2;0)$; $(0;4)$; $(4;+\infty)$ (см. рисунок 28).

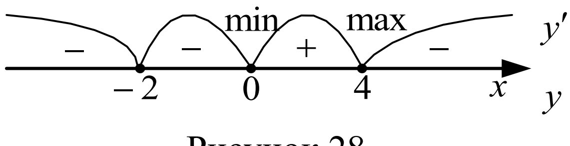

Рисунок 28

Приходим к заключению, что в критической точке $x=0$ имеет место минимум (так как производная меняет свой знак при переходе через эту точку с минуса на плюс), в критической точке $x=4$ – максимум (так как производная меняет свой знак при переходе через эту точку с плюса на минус). В точке $x=-2$ функция не определена и поэтому она не может быть точкой экстремума, даже если в ее окрестности выполняется достаточное условие экстремума функции.

$$y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}(4)=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\ \text{(см. рисунок 29).}$$

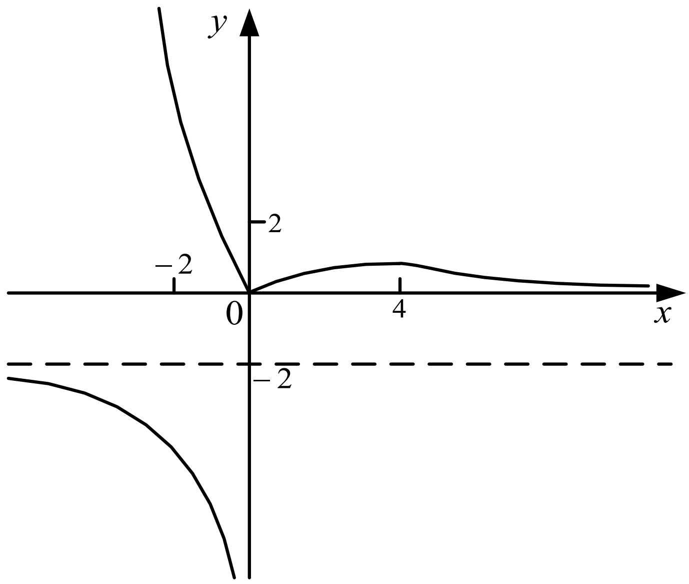

Рисунок 29

Ответ: В точке $x=0$ функция имеет минимум, $y_{\min}(0)=0$; в точке $x=4$ функция имеет максимум, $y_{\max}(4)=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

Упражнение 9. Найти экстремум функции $y=x^3\cdot e^{-x}$.

Решение: Функция определена на всей числовой прямой. Найдем критические точки функции, для этого применим необходимое условие экстремума функции.

$$y'=3x^2\cdot e^{-x}-x^3\cdot e^{-x}=x^2\cdot e^{-x}(3-x);$$

$y'(x)=0$ при $x=0$ и $x=3$. Точки $x=0$ и $x=3$ являются критическими.

Применим достаточное условие экстремума функции, для этого определим знак производной на каждом из интервалов (см. рисунок 30):

$$(-\infty;0);\ (0;3);\ (3;+\infty).$$

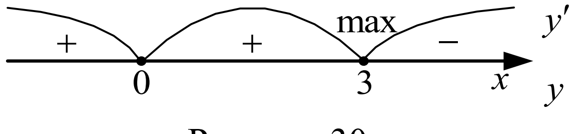

Рисунок 30

Итак, в точке $x=0$ функция не имеет экстремума, так как производная не меняет знака при переходе через эту точку, в точке $x=3$ функция имеет максимум, $y_{\max}(3)=\dfrac{9}{e^3}$ (см. рисунок 31).

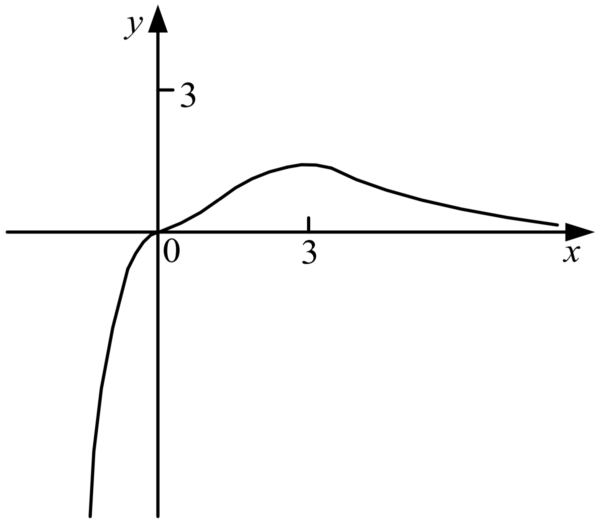

Рисунок 31

Ответ: В точке $x = 3$ функция имеет максимум, $y_{\max}(3) = \dfrac{9}{e^3}$.

Упражнение 10. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 4]$.

Решение: Определим точки максимума и минимума:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2);$$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$; эти точки являются критическими точками. В точке $x = 0$ функция имеет максимум, в точке $x = 2$ – минимум (проверьте самостоятельно).

$$f_{\min}(0) = 1,\ f_{\max}(2) = -3.$$

Вычислим значения функции на концах интервала:

$$f(-1) = -3,\ f(4) = 17.$$

Окончательно,

$$\max_{[-1;\,4]} f(x) = \max\{-3; 17; 1\} = 17,$$

$$\min_{[-1;\,4]} f(x) = \min\{-3; 17; 1\} = -3.$$

Наибольшее значение при $-1 \le x \le 4$ функция принимает в правом конце отрезка при $x = 4$. Наименьшее значение достигается в двух точках: в точке минимума функции и на левом конце отрезка, при $x = -1$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;\,4]} f(x) = 17$, $\min\limits_{[-1;\,4]} f(x) = -3$.

Упражнение 11. Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна a.

Решение: Обозначим высоту треугольника x (см. рисунок 32).

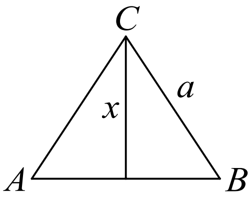

Рисунок 32

Тогда $AB = 2\sqrt{a^2 - x^2}$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$. Площадь треугольника, таким образом, выражена как функция высоты этого треугольника.

Первоначальная задача теперь может быть сформулирована следующим образом: определить наибольшее значение функции $S(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ на отрезке $[0; a]$. Вычислим значения функции на концах отрезка $S(0) = 0$, $S(a) = 0$. Так как площадь – величина неотрицательная, то, очевидно, функция достигает максимума внутри интервала.

Найдем $S'(x)$:

$$S'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$S'(x) = 0 \text{ при } x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ и } S'(x) = \infty \text{ при } x = \pm a.$$

Нас интересует только критическая точка $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, так как точки $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $x = -a$ лежат вне отрезка $[0; a]$, а значение функции в точке $x = a$ уже вычислено, $S(a) = 0$.

Легко убедиться, что в точке $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ функция $S(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ достигает максимума и в ней принимает свое наибольшее значение.

Вычислим максимальную площадь треугольника:

$$S_{\max} = S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S_{\max} = \frac{a^2}{2}$ (кв. ед.).

5.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, справедлива ли теорема Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

а) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $[0; 4]$;

б) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $[-1; 1]$.

2. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке. Найти значение c (если оно существует).

а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$;

б) $f(x) = e^x$, $[0; 1]$.

3. Пользуясь формулой (6), оценить значение $arctg\, 1{,}5$.

4. Определить интервалы монотонности следующих функций:

а) $f(x) = \ln\sqrt{1 + x^2}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

5. Найти экстремум следующих функций:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

б) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)(x+3)}$;

в) $y = \ln\sqrt{1 + x^2} + arctg\, x$.

6. Определить наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 1]$;

б) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}$ на отрезке $[-1; 3]$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2} + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

7. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

8. Число 66 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение этих чисел было бы наибольшим.

Лекция №6. Следствия из «французских теорем» (продолжение)

6.1 Раскрытие неопределенностей по правилу Бернулли-Лопиталя

Правило, по которому можно будет раскрывать неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, мы получим как следствие из теоремы Коши, хотя появилось это правило существенно раньше доказательства теоремы, подтвердившей его.

Его сформулировал родоначальник знаменитой династии швейцарских ученых **Иоганн Бернулли (1667–1748)**, один из основателей дифференциального и интегрального исчисления, в котором он развивал идеи Лейбница. Ученик И.Бернулли, французский математик **Гийом Франсуа де Лопиталь (1661–1704)** положил курс лекций учителя в основу своей книги «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696 г.), которая стала первым учебником математического анализа. В этой книге и было изложено правило, о котором пойдет речь ниже. Сначала сформулируем теорему:

Теорема 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции, определенные и дифференцируемые в окрестности точки $x = a$, кроме, может быть, самой этой точки. Число a может быть, в частности, и бесконечностью. Пусть также в этой окрестности:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$);
2) $g(x) \neq 0$;
3) $g'(x) \neq 0$.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказав эту теорему, мы сможем, находясь в ее условиях, заменять предел отношения функций пределом отношения производных в случае, когда предел отношения функций дает неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Докажем теорему для случая неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ и считая, что a – конечное число.

Доказательство: доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a: пусть $f(a) = g(a) = 0$.

Тогда эти функции будут непрерывны в точке a. Рассмотрим отрезок $[a; x]$, где $x > a$ или $x < a$. На этом отрезке функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, а на интервале $(a;\, x)$ они дифференцируемы. Значит, по теореме Коши, внутри интервала $(a;\, x)$ существует точка c, такая, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Но если $x \to a$, то и $c \to a$, и тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, если такой предел существует. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если выражение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ представляет собой неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to a$, и функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$; если существует последний предел, то существуют и предыдущие.

Замечание 2. Если $a=\infty$, то замена $x=\frac{1}{t}$ сводит задачу к $a=0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6.2 Примеры применения правила Бернулли-Лопиталя

Рассмотрим некоторые примеры отыскания пределов, в которых потребуется раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-1\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$. $\left(x^3-1\right)'=3x^2$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Условия последней теоремы выполнены. Применим правило Бернулли-Лопиталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}3x^3=3.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=3$.

Пример 2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$. $\left(x^2\right)'=2x$, $\left(e^x\right)'=e^x$; условия теоремы (1) выполняются, но после первого применения правила Бернулли-Лопиталя мы вновь получим неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Правило можно применить второй раз, поскольку условия теоремы по-прежнему выполняются:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$.

Пример 3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ln x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$. Получается неопределенность вида $(\infty-\infty)$, т.е. разность бесконечно больших величин. Ее, как известно, нужно свести к частному двух бесконечно больших или бесконечно малых величин: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}$ получается предел отношения двух бесконечно малых функций, к которому применимо правило Бернулли-Лопиталя.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-1-\ln x\right)'}{\left(\ln x\cdot(x-1)\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+x-1};$$ применим правило Бернулли-Лопиталя второй раз:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x\cdot\ln x+x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x-1\right)'}{\left(x\cdot\ln x+x-1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Пример 4. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-2x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$. Неопределенность вида $(\infty\cdot0)$ сведем к неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, после чего можно будет дважды применить правило Бернулли-Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-2x} = 0$.

6.3 Применение правила Бернулли-Лопиталя к вычислению пределов от функции вида $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$

Правило Бернулли-Лопиталя помогает и при отыскании пределов функций вида $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$. Здесь могут возникнуть случаи, когда нельзя подставить в $f(x)$ предельное значение x. Рассмотрим эти случаи.

1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$ (неопределенность вида (0^0)).

2) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 0$ (неопределенность вида (∞^0)).

3) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$ (неопределенность вида (1^∞)).

Вычисление предела функции в любом из этих случаев можно свести к раскрытию неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ при помощи следующего преобразования функции: $f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)} = \left[e^{\ln\varphi(x)}\right]^{\psi(x)} = e^{\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)}$.

Тогда, в силу непрерывности показательной функции, получим:

$$f(a) = \lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\cdot\ln\varphi(x)}.$$

При отыскании предела в показателе степени мы и получим неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Ее нужно свести к отношению бесконечно больших или бесконечно малых величин, а затем применить правило Бернулли-Лопиталя. Рассмотрим следующий простой пример.

Пример 5. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+0} x^x = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+0}\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$ Значит $\lim\limits_{x\to+0} x^x = e^0 = 1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$.

6.4 Практическое занятие №6. Применения правила Бернулли-Лопиталя к вычислению пределов

Упражнение 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$.

Решение: Если в данную дробь поставить -1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применяя правило Бернулли-Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-5x^2+2x+8)'}{(x^4-2x^3-16x^2+2x+15)'}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\dfrac{5}{8}$.

Упражнение 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x+\ln x)'}{\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=-\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2}=-1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=-1$.

Упражнение 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x\cos x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cos x=-\frac{1}{3}$$

В данном упражнении правило Бернулли-Лопиталя было применено дважды, можно было также применить первый «замечательный» предел.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$.

Упражнение 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\sqrt[3]{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}=0$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=0$.

Упражнение 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$.

Упражнение 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)=(\infty-\infty)=$

Здесь имеем «неопределенность» вида $(\infty-\infty)$, поэтому приведем дроби, стоящие под знаком предела к общему знаменателю, чтобы получить «неопределенность» вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6-5x+15}{(x-3)\left(x^2-x-6\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+7}{(x-3)\left(x^2-x-6\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to3}\frac{\left(x^2-6x+7\right)'}{\left((x-3)\left(x^2-x-6\right)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{x^2-x-6+(x-3)(2x-1)}=\lim_{x\to3}\frac{2x-6}{3x^2-8x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(2x-6)'}{\left(3x^2-8x-3\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{2}{6x-8}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)=\dfrac{1}{5}$.

Упражнение 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}=(0\cdot\infty)$

Здесь имеем «неопределенность» вида $(0\cdot\infty)$, поэтому преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, так чтобы получилась «неопределенность» вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Так как $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}=0$.

Упражнение 8. Вычислить: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Значит $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$.

Упражнение 9. Вычислить: $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}=\left(1^\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}\cdot\ln x}$; $\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$,

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}\cdot\ln x=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=-1.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{e}$.

Упражнение 10. Вычислить: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to0} tg\,x\cdot\ln\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{1}{x}=+\infty$,

$$\lim_{x\to 0} tg\ x\cdot\ln\frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0} tg\ x\cdot\ln x = (0\cdot\infty) = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{tg\ x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{tg\ x}\right)'} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{tg^2 x}\cdot\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot(-\cos x)}{1} = -2\lim_{x\to 0}(\sin x\cdot\cos x) = 0.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = e^0 = 1.$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = 1.$

6.5 Задачи для самостоятельного решения

Найти указанные пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ x-\sin x}{x-\sin x}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x-1}.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctg\ 2x}.$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}.$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctg\ x).$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}.$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x^3}-\frac{1}{1-x^2}\right).$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$

11. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} (ctg\ x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

7 Лекция №7. Применение средств дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков

7.1 Два правила отыскания точек экстремума

Пример 1. Найти максимум и минимум функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение: с первым правилом отыскания точек экстремума функции мы уже знакомы. Поскольку необходимым условием существования экстремума функции в точке является равенство нулю производной функции в этой точке, прежде всего следует найти производную данной функции: $y' = 6 \cdot \left(x^2 - x\right)$.

Найдем точки, в которых эта производная равна нулю (точки, подозрительные на экстремум).

$$6 \cdot \left(x^2 - x\right) = 0;\ x^2 - x = 0;\ x \cdot (x - 1) = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Достаточным условием существования экстремума функции в точке c, в которой первая производная равна нулю, является перемена знака этой производной при переходе через точку c. На рисунке 33 показаны знаки производной данной функции в интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ и поведение функции в этих интервалах.

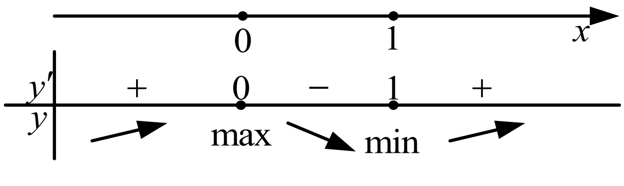

Рисунок 33

Видно, что функция достигает максимума в точке $x = 0$. Значение ее в этой точке равно $f(0) = 1$.

В точке $x = 1$ функция достигает минимума. Значение ее в этой точке равно $f(1) = 0$.

Рассмотрим второе правило отыскания точек экстремума.

Исследование знаков производной в окрестности точки, подозрительной на экстремум, можно заменить исследованием знака второй производной функции в этой точке. Вторая производная по отношении к первой играет ту же роль, что и первая производная по отношению к самой функции. Если вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ непрерывна и в точке c отрицательна $\left(f''(c) < 0\right)$, то в силу ее непрерывности $f''(x) < 0$ в некоторой достаточно малой окрестности точки c. Это значит, что $f'(x)$ в этой окрестности точки c монотонно убывает.

Другими словами: при $x < c$ $f'(x) > f'(c)$, и при $x > c$ $f'(x) < f'(c)$. Если $f'(c) = 0$, то $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $f(x)$ возрастает при $x < c$ и убывает при $x > c$, а значит, в самой точке c имеет максимум.

Аналогично доказывается, что если в точке c первая производная равна нулю $\left(f(c) = 0\right)$, а вторая положительна $\left(f''(c) > 0\right)$, то в точке c функция достигает минимума.

Для рассмотренного примера $f''(x) = 6 \cdot \left(2x - 1\right)$. Найдем значения второй производной в точках, подозрительных на экстремум $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

$f''(0) = -6 < 0$, значит, в этой точке функция достигает максимума.

$f''(1) = 6 > 0$, значит, в этой точке функция достигает минимума.

7.2 Геометрический смысл второй производной. Вогнутость и выпуклость кривой. Точки перегиба

Вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ представляет собой скорость изменения первой производной $f'(x)$, т.е. тангенса угла α касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x; y)$ с положительным направлением оси Ox.

Если $f''(x) > 0$ в некотором интервале $\left(a - h; a + h\right)$, где $h > 0$, то $tg\,\alpha$ возрастает с возрастанием x, а так как угол и его тангенс возрастают одновременно, то возрастает и угол α. На рисунках 34 и 35 показано, какой вид может при этом иметь график функции.

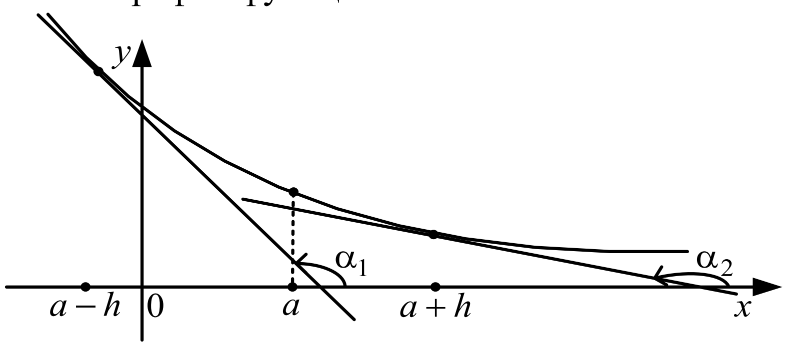

Рисунок 34

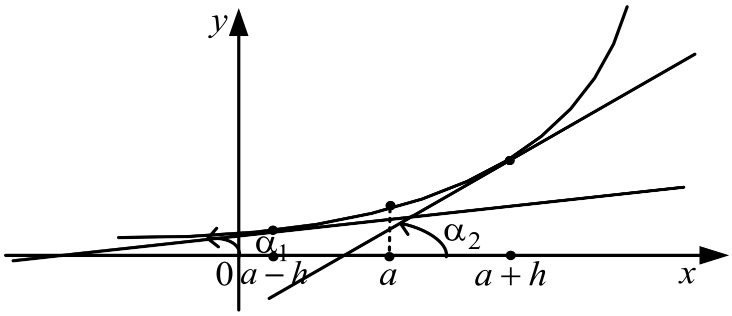

Рисунок 35

О кривой в таких случаях говорят, что она в точке $(a;\, f(a))$ и на интервале $(a-h;\, a+h)$ вогнута.

Если вторая производная отрицательна на интервале $(a-h;\, a+h)$, то $tg\,\alpha$ и угол α убывают с возрастанием x (см. рисунки 36 и 37).

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a-h;\, a+h).$$

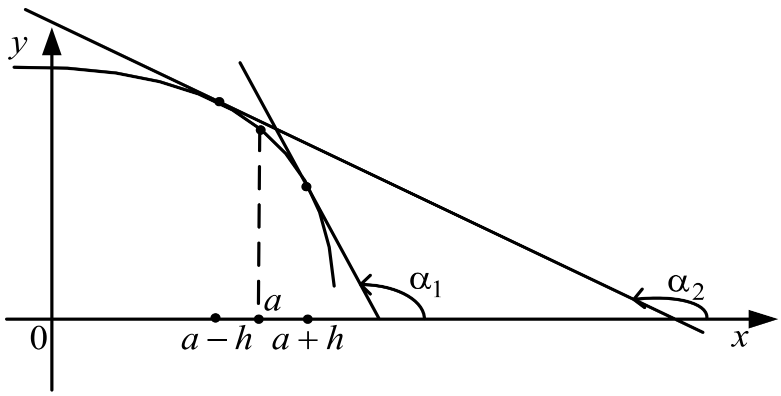

Рисунок 36

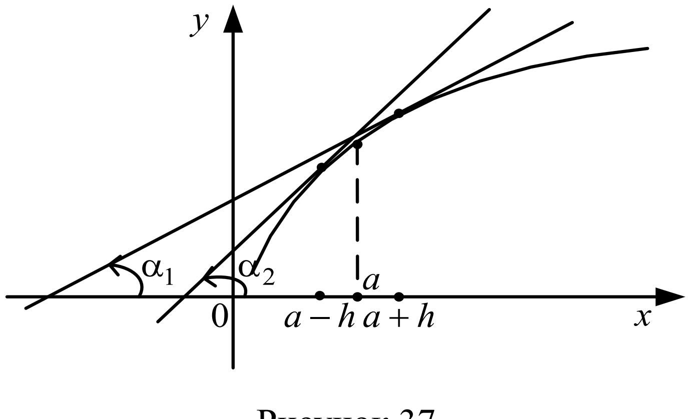

Рисунок 37

В этих случаях кривая будет выпуклой на интервале $(a-h;\, a+h)$ и в точке $(a;\, f(a))$.

Дадим геометрическое определение графика, выпуклого или вогнутого в промежутке.

Определение 1. График функции $y = f(x)$ называется **вогнутым** в промежутке $(a; b)$, если соответствующая дуга кривой расположена выше касательной в любой точке $(x; f(x))$ этой дуги кривой, где $x \in (a; b)$. График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** в промежутке $(a; b)$, если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной проведенной, в любой точке $(x; f(x))$ этой кривой, где $x \in (a; b)$.

Таким образом, если вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и положительна внутри промежутка $(a; b)$, то график функции в этом промежутке вогнут, если же вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и отрицательна внутри промежутка $(a; b)$, то график функции в этом промежутке выпуклый.

Это правило носит шуточное название «правила дождика».

Если $f''(x) > 0$ для $\forall x \in (a; b)$, то кривая в этом промежутке изображает «ямку», в которой во время дождика скапливается вода (см. рисунок 38).

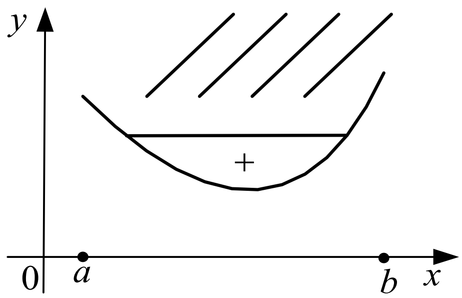

Рисунок 38

Если же $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b)$, то кривая изображает «горку», с которой вода во время дождя стекает (см. рисунок 39).

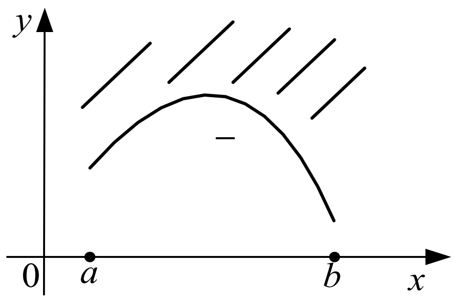

Рисунок 39

Определение 2. Точка, в которой выпуклость графика меняется на вогнутость, или, наоборот, вогнутость меняется на выпуклость, называется **точкой перегиба**.

Касательная к кривой в точке перегиба будет пересекать эту кривую (см. рисунок 40).

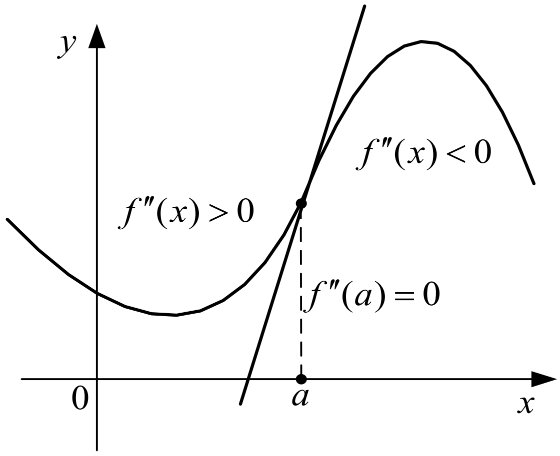

Рисунок 40

Вторая производная функции в этой точке равна нулю или ее не существует.

Равенство нулю второй производной функции в точке a – это необходимое условие существования перегиба графика в точке a. Если это условие выполняется в точке, эта точка будет подозрительной на перегиб.

Если в точке a вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а при переходе через эту точку меняет знак, то $x = a$ будет и в самом деле точкой перегиба.

Таким образом, перемена знака второй производной при переходе через точку, в которой вторая производная равна нулю – это достаточное условие существования точки перегиба.

Пример 1. Построить эскиз графика функции $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение: заметим, что $f(x) > 0 \;\; \forall x \in (-\infty; +\infty)$, значит, весь график лежит выше оси Ox.

Заметим также, что функция четная: $f(-x) = f(x)$. Отсюда следует, что график функции симметричен относительно оси Oy.

$\lim\limits_{x \pm \infty} e^{-x^2} = 0$, значит, при удалении точки графика от начала координат она будет неограниченно приближаться к оси Ox.

Найдем значение функции при $x = 0$: $f(0) = e^0 = 1$. Отсюда следует, что график функции пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$.

Найдем производную функции: $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$; $f'(x) > 0 \;\; \forall x < 0$; $f'(x) < 0 \;\; \forall x > 0$; $f'(0) = 0$.

Видно, что функция возрастает при всех $x \in (-\infty; 0)$ и убывает при всех $x \in (0; +\infty)$. В точке $x = 0$ функция имеет максимум.

Теперь найдем вторую производную функции: $f''(x) = 2(2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}$.

Она будет равна нулю при $x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Для $\forall x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ график на этом промежутке вогнут.

Для $\forall x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ график на этом промежутке выпуклый.

Для $\forall x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f''(x) > 0 \Rightarrow$ график на этом промежутке вогнут.

Таким образом, точками перегиба являются точки $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. $f(x_1) = f(x_2) = e^{-1/2}$.

Эскиз графика представлен на рисунке 41.

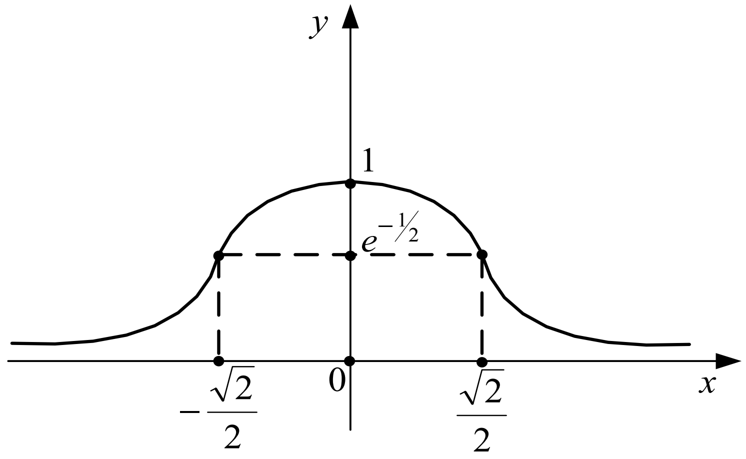

Рисунок 41

7.3 Асимптоты графика функции

Определение 3.: Прямая ℓ называется **асимптотой** некоторой кривой, если при неограниченном удалении точки кривой от начала координат расстояние δ от этой точки до кривой ℓ стремится к нулю (см. рисунки 42, 43).

Точки кривой могут приближаться к асимптоте теми же способами, как и переменная к своему пределу: оставаясь с одной стороны от асимптоты или с разных сторон, бесконечное число раз пересекая асимптоту и переходя с одной ее стороны на другую.

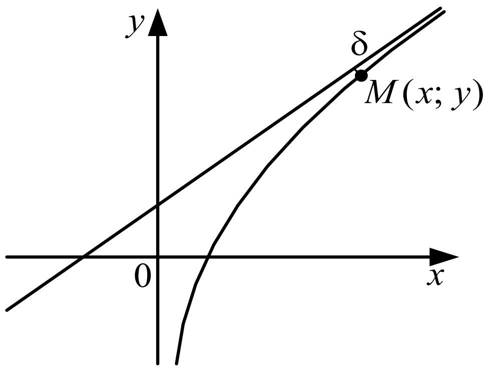

Рисунок 42

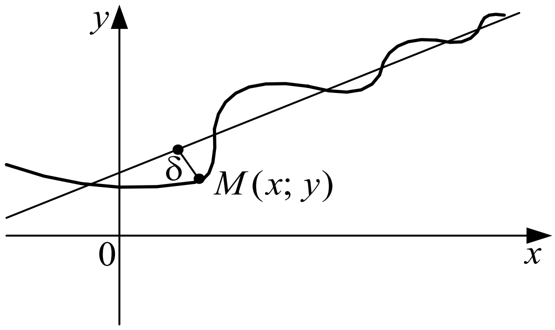

Рисунок 43

Различаются асимптоты вертикальные и невертикальные (наклонные). Горизонтальная асимптота – частный случай невертикальной.

1) Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty, \text{ или } \lim_{x\to a} f(x)=\infty, \tag{1}$$

то прямая $x=a$ есть асимптота кривой $y=f(x)$; и обратно, если прямая $x=a$ есть асимптота кривой $y=f(x)$, то выполняется одно из равенств (1).

Следовательно, нужно найти такие значения $x=a$, при приближении к которым функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности. Тогда прямая $x=a$ будет вертикальной асимптотой. Другими словами: в точке бесконечного разрыва функции ее график будет иметь вертикальную асимптоту.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции: $y=\dfrac{2}{x-5}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 5-0}\dfrac{2}{x-5}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5+0}\dfrac{2}{x-5}=+\infty$, прямая $x=5$ является вертикальной асимптотой графика функции (см. рисунок 44).

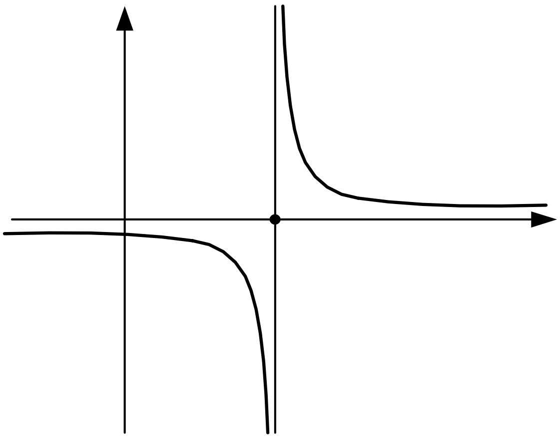

Рисунок 44

Пример 3. График функции $y = tg\,x$ имеет бесчисленное множество вертикальных асимптот: $x = \pm\frac{\pi}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{2}$; $x = \pm\frac{5\pi}{2}$; …(см. рисунок 45).

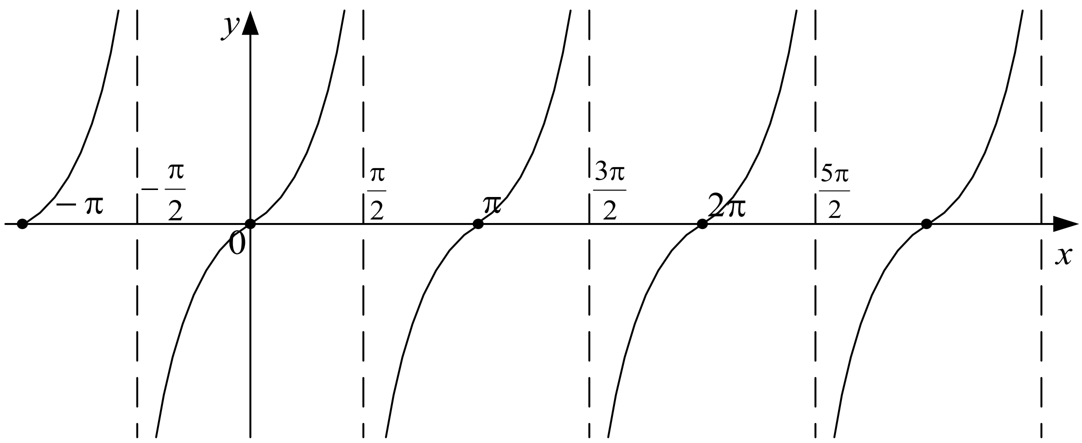

Рисунок 45

2) Невертикальные асимптоты.

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет невертикальную асимптоту, уравнение которой имеет вид

$$y = kx + b\,.$$

Определим числа k и b (см. рисунок 46).

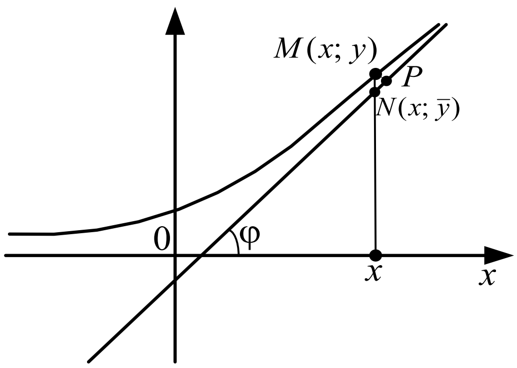

Рисунок 46

$M(x;\,y)$ – точка, лежащая на кривой.

$N(x; \bar{y})$ – точка, лежащая на асимптоте.

Длина отрезка MP – расстояние от точки до асимптоты. По условию,

$$\lim_{x\to+\infty} MP = 0. \qquad (2)$$

Обозначим через φ угол наклона асимптоты к оси Ox. Тогда из треугольника NMP найдем: $NM = \dfrac{MP}{\cos\varphi}$; так как φ – постоянный угол (не равный $\dfrac{\pi}{2}$), то в силу предыдущего равенства имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} NM = 0. \qquad (3)$$

И наоборот, $(3) \Rightarrow (2)$.

Но $NM == |y - \bar{y}| = |f(x) - kx - b|$ и, значит, равенство (3) можно записать так:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx - b\right] = 0. \qquad (4)$$

Итак, если прямая $y = kx + b$ – асимптота кривой $y = f(x)$, то выполняется равенство (4). Определим теперь k и b. В равенстве (4) вынесем x за скобки.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Так как $x \to +\infty$, то должно выполняться равенство: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$; при b постоянном $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k\right] = 0$, или

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad (5)$$

Зная k, из равенства (4) найдем b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx\right]. \qquad (6)$$

Итак, если прямая $y = kx + b$ есть асимптота кривой $y = f(x)$, то k и b находятся по формулам (5) и (6).

Обратно, если существуют пределы (5) и (6), то выполняется равенство (4) и прямая $y = kx + b$ есть асимптота кривой $y = f(x)$. Если хотя бы один из пределов (5) и (6) не существует, то кривая не имеет невертикальной асимптоты.

Все рассуждения будут справедливы и для случая $x \to -\infty$.

Пример 4. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Ищем вертикальные асимптоты.

При $x \to -0$ $y \to +\infty$, при $x \to +0$ $y \to -\infty$.

Следовательно, $x = 0$ есть вертикальная асимптота.

2) Ищем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right]=1,\ k=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x}=2$$

$b=2$.

Уравнение асимптоты имеет вид: $y=x+2$. Эскиз графика функции представлен на рисунке 47.

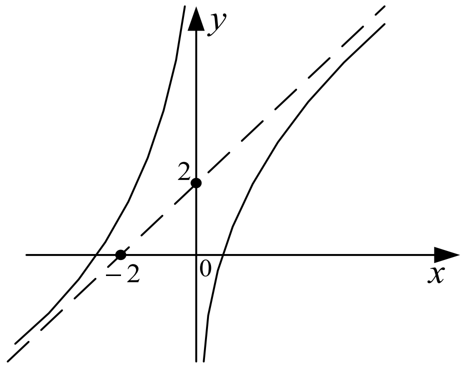

Рисунок 47

7.4 Практическое занятие №7. Второе правило отыскания точек экстремума. Исследование графика функции на вогнутость и выпуклость. Точки перегиба. Асимптоты графика функции

Упражнение 1. Найти экстремум функции, используя второе правило нахождения экстремума: $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-7x^2+24x+1$.

Решение: Область существования функции – бесконечный интервал $(-\infty;+\infty)$. Первая производная функции равна:

$$y'=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-7x^2+24x+1\right)'=x^3-x^2-14x+24.$$

Для определения критических точек решаем уравнение $x^3-x^2-14x+24=0$; $x=-4$, $x=2$, $x=3$. Найдем теперь вторую производную функции: $y''=\left(x^3-x^2-14x+24\right)'=3x^2-2x-14$. Согласно второму правилу определяем знак второй производной в каждой критической точке:

$y''(-4)=42>0$; при $x=-4$ функция имеет минимум, $y_{\min}(-4)=-\dfrac{365}{3}$,

$y''(2)=-8<0$; при $x=2$ функция имеет максимум, $y_{\max}(2)=\dfrac{67}{3}$,

$y''(3) = 7 > 0$; при $x = 3$ функция имеет минимум, $y_{\min}(3) = \dfrac{85}{4}$.

Эскиз графика функции представлен на рисунке 48.

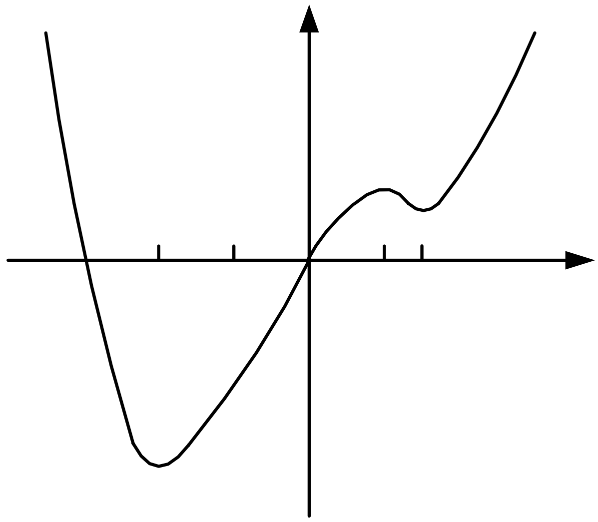

Рисунок 48

Ответ: В точках $x = -4$ и $x = 3$ функция имеет минимум, $y_{\min}(-4) = -\dfrac{365}{3}$, $y_{\min}(3) = \dfrac{85}{4}$; в точке $x = 2$ функция имеет максимум, $y_{\max}(2) = \dfrac{67}{3}$.

Упражнение 2. Найти экстремум функции, используя второе правило нахождения экстремума $y = (x-1)^3(x+1)^2$.

Решение: Область определения функции – бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$. Первая производная функции равна:

$$y' = \left((x-1)^3(x+1)^2\right)' = 3(x-1)^2(x+1)^2 + 2(x+1)(x-1)^3 = (x-1)^2(x+1)(5x+1).$$

Для определения критических точек решаем уравнение $(x-1)^2(x+1)(5x+1) = 0$; $x = -1$, $x = -\dfrac{1}{5}$, $x = 1$. Найдем теперь вторую производную функции:

$$y'' = \left((x-1)^2(x+1)(5x+1)\right)' = 2(x-1)(x+1)(5x+1) + (x-1)^2(5x+1) + 5(x-1)^2(x+1).$$

Согласно второму правилу определяем знак второй производной в каждой критической точке:

$y''(-1) = -16 < 0$; при $x = -1$ функция имеет максимум, $y_{\max}(-1) = 0$,

$y''\left(-\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{143}{25} > 0$; при $x = -\dfrac{1}{5}$ функция имеет минимум, $y_{\min}\left(-\dfrac{1}{5}\right) = -1\dfrac{331}{3125}$,

$y''(1)=0$, для заключения о поведении функции в этой точке надо прибегнуть к исследованию по первой производной.

Рассмотрим знаки первой производной в интервалах $\left(-\frac{1}{5};1\right)$ и $(1;+\infty)$ (см. рисунок 49).

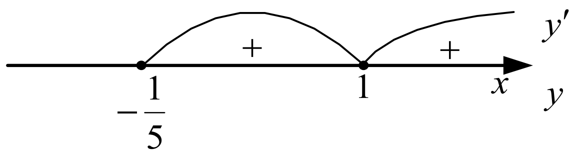

Рисунок 49

Так как первая производная не меняет знака при переходе через точку $x=1$, функция в ней экстремума не имеет.

Эскиз графика функции представлен на рисунке 50.

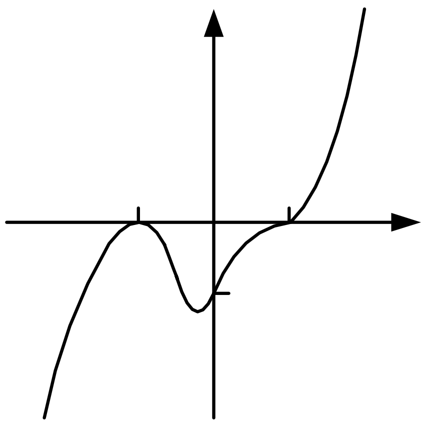

Рисунок 50

Ответ: В точке $x=-1$ функция имеет максимум, $y_{\max}(-1)=0$; в точке $x=-\frac{1}{5}$ функция имеет минимум, $y_{\min}\left(-\frac{1}{5}\right)=-1\frac{331}{3125}$; в точке $x=1$ функция экстремума не имеет.

Упражнение 3. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y=5x^2+20x+9$.

Решение: Область существования функции – интервал $(-\infty;+\infty)$; $y'=10x+20$; $y''=10>0$, и так как $y''>0$ при любом значении x, то кривая вогнута на всем интервале $(-\infty;+\infty)$. Точек перегиба нет.

у

Эскиз графика функции представлен на рисунке 51.

-1

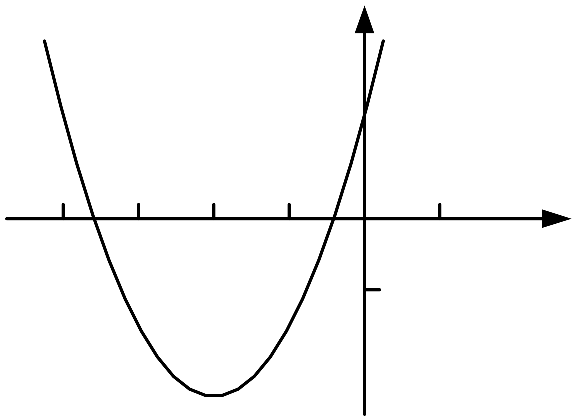

Рисунок 51

Ответ: Кривая вогнута на всем интервале $(-\infty; +\infty)$. Точек перегиба нет.

Упражнение 4. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = -6x^2 + 8x - 11$.

Решение: Область существования функции – интервал $(-\infty; +\infty)$.

$$y' = -12x + 8\,;\ \ y'' = -12 < 0\,.$$

Так как неравенство $y'' < 0$ выполняется при любом значении x из области существования функции, то кривая на всем интервале $(-\infty; +\infty)$ выпукла. Точек перегиба нет.

Эскиз графика функции представлен на рисунке 52.

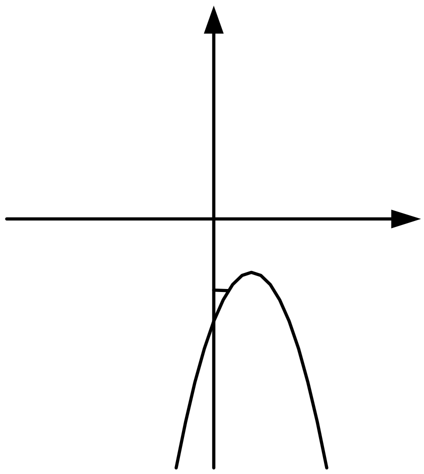

Рисунок 52

Ответ: Кривая выпукла на всем интервале $(-\infty; +\infty)$. Точек перегиба нет.

Упражнение 5. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = x^6 - 6x^5 + \dfrac{15}{2}x^4 + 3x$.

Решение: Функция определена и дважды дифференцируема для всех x. Для определения критических точек II рода найдем $y''(x)$. Имеем

$$y' = 6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 3,$$

$$y'' = 30x^4 - 120x^3 + 90x^2 = 30x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = 30x^2(x-3)(x-1).$$

$y'' = 0$ при $x = 0$ и при условии $x^2 - 4x + 3 = 0$, т.е. $x = 2 \pm 1$.

Точки $x = 0$, $x = 1$ и $x = 3$ являются критическими точками II рода. Отметим эти точки на числовой прямой и найдем знаки второй производной в каждом из интервалов: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$ и $(3; +\infty)$ (см. рисунок 53).

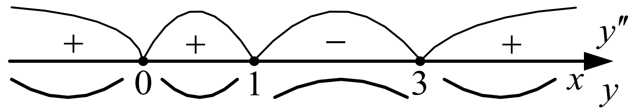

Рисунок 53

При $x \in (-\infty; 0)$ $y'' > 0$, значит график функции – вогнутая кривая на этом интервале. При переходе через точку $x = 0$ вторая производная знака не меняет, поэтому точка $x = 0$ не является точкой перегиба.

При $x \in (0; 1)$ $y'' > 0$, значит график функции – вогнутая кривая на этом интервале. При переходе через точку $x = 1$ вторая производная меняет знак, поэтому точка $x = 1$ является точкой перегиба.

При $x \in (1; 3)$ $y'' < 0$, значит график функции – выпуклая кривая на этом интервале. При переходе через точку $x = 3$ вторая производная меняет знак, поэтому точка $x = 3$ является точкой перегиба.

При $x \in (3; +\infty)$ $y'' > 0$, значит график функции – вогнутая кривая на этом интервале.

Эскиз графика функции представлен на рисунке 54.

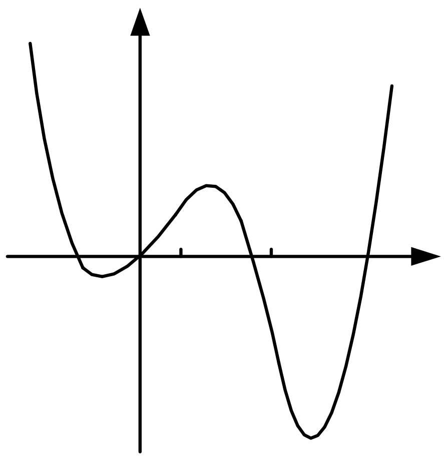

Рисунок 54

Ответ: При $x \in (-\infty; 0)$ график функции – вогнутая кривая, точка $x = 0$ не является точкой перегиба; при $x \in (0; 1)$ график функции – вогнутая кривая, точка $x = 1$ является точкой перегиба; при $x \in (1; 3)$ график функции – выпуклая кривая, точка $x = 3$ является точкой перегиба; при $x \in (3; +\infty)$ график функции – вогнутая кривая.

Упражнение 6. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$.

Решение: Функция определена и дважды дифференцируема для всех x. Находим вторую производную:

$$y' = -\frac{7}{5}(x+2)^{\frac{2}{5}}; \; y'' = -\frac{14}{25}(x+2)^{-\frac{3}{5}} = -\frac{14}{25 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^3}}.$$

Здесь y'' нигде не обращается в нуль, а при $x = -2$ она не существует.

При $x = -2$ кривая может иметь перегиб, так как эта точка принадлежит области определения функции.

Исследуем поведение второй производной функции в окрестности точки $x = -2$ (см. рисунок 55).

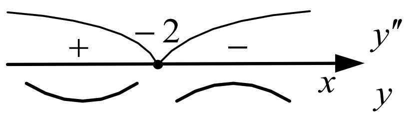

Рисунок 55

При $x \in (-\infty; -2)$ $y'' > 0$, значит, график функции на этом промежутке – вогнутая кривая, при $x \in (-2; +\infty)$ $y'' < 0$, значит, на этом промежутке график функции – выпуклая кривая. Так как при переходе через точку $x = -2$ вторая производная меняет свой знак, значит, точка $x = -2$ является точкой перегиба для функции $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$. Эскиз графика функции представлен на рисунке 56.

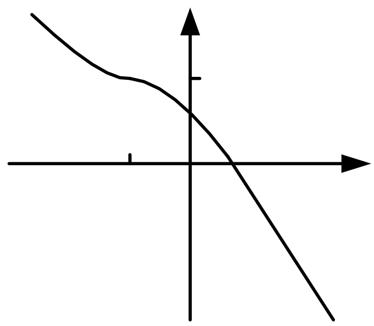

Рисунок 56

Ответ: При $x \in (-\infty; -2)$ график функции – вогнутая кривая; при $x \in (-2; +\infty)$ график функции – выпуклая кривая; точка $x = -2$ является точкой перегиба.

Упражнение 7. Найти асимптоты графика функции: $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

Решение: функция существует всюду, кроме точки $x=-1$, т.е. $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

1) Найдем вертикальные асимптоты. Проверим выполнение условия (1) при $x\to-1-0$ и $x\to-1+0$.

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2+3x+1}{x+1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+3x+1}{x+1}=+\infty.$$

Следовательно, прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

2) Найдем невертикальные асимптоты: $y=kx+b$. Проверим выполнение условий (5) и (6) при $x\to\pm\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1}{x(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1}{x^2+x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2-x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2.$$

Прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Эскиз графика функции представлен на рисунке 57.

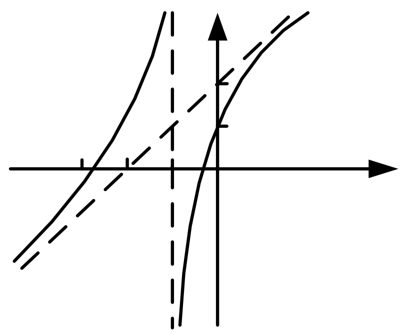

Рисунок 57

Ответ: график функции имеет вертикальную асимптоту $x=-1$ и наклонную $y=x+2$.

Упражнение 8. Найти асимптоты графика функции: $y=\ln\left(4-x^2\right)$.

Решение: функция определена на множестве $D(y)=(-2;2)$.

1) Найдем вертикальные асимптоты. Проверим выполнение условия (1) при $x\to-2+0$ и $x\to2-0$.

$$\lim_{x\to-2+0}\ln\left(4-x^2\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2-0}\ln\left(4-x^2\right)=-\infty.$$

Следовательно, прямые $x=-2$ и $x=2$ являются вертикальными асимптотами.

2) Невертикальных асимптот график функции $y=\ln\left(4-x^2\right)$ не имеет, так как ее областью определения является интервал $(-2;2)$, поэтому x не может стремиться к бесконечности. Эскиз графика функции представлен на рисунке 58.

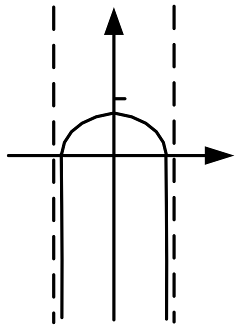

Рисунок 58

Ответ: прямые $x=-2$ и $x=2$ являются вертикальными асимптотами графика функции, наклонных асимптот кривая не имеет.

Упражнение 9. Найти асимптоты графика функции: $y=(x+1)\cdot e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}$.

Решение: функция существует на множестве $D(y)=(0;+\infty)$.

1) Найдем вертикальные асимптоты. Проверим выполнение условия (1) при $x\to 0+0$:

$$\lim_{x\to 0+0}(x+1)\cdot e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0+0}(x+1)\cdot\lim_{x\to 0+0}e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}=1\cdot e^{-\infty}=0.$$

Следовательно, прямая $x=0$ не является вертикальной асимптотой.

2) Найдем невертикальные асимптоты: $y=kx+b$. Проверим выполнение условий (5) и (6) при $x\to+\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\cdot e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\cdot e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}x\left[e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}-1\right]=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}\cdot\frac{3}{2}x^{-5/2}}{-x^{-2}}=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}=1+0=1.$$

При $x \to +\infty$ функция $y = (x+1) \cdot e^{-\frac{1}{x\sqrt{x}}}$ имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$. Эскиз графика функции представлен на рисунке 59.

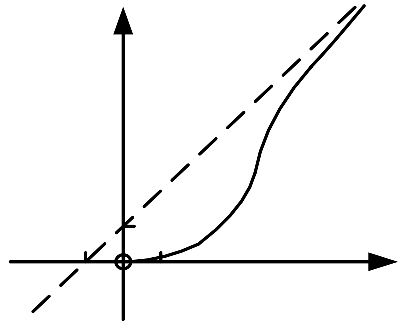

Рисунок 59

y

Ответ: вертикальных асимптот кривая не имеет, при $x \to +\infty$ функция имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

Упражнение 10. Найти асимптоты графика функции: $y = x \cdot arcctg\ x$.

Решение: функция определена при всех действительных x.

1) Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она непрерывна для всех действительных x.

2) Невертикальные асимптоты. Проверим выполнение условий (5) и (6) при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

1

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot arcctg\ x}{x} = \lim_{x \to +\infty} arcctg\ x = 0,$$

-1 0 1

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} x \cdot arcctg\ x = \lim_{x \to +\infty} \frac{arcctg\ x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(arcctg\ x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$.

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot arcctg\ x}{x} = \lim_{x \to -\infty} arcctg\ x = \pi,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to -\infty} (x \cdot arcctg\ x - \pi x) = \lim_{x \to -\infty} x(arcctg\ x - \pi) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{arcctg\ x - \pi}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(arcctg\ x - \pi)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = \pi x + 1$.

Ответ: кривая не имеет вертикальных асимптот, при $x \to +\infty$ кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$, при $x \to -\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = \pi x + 1$.

7.5 Полное исследование функции методами дифференциального исчисления и построение её графика

Приведем примерную схему исследования графика функции, чтобы затем построить эскиз её графика.

1) Найти область определения функции и исследовать поведение функции вблизи граничных точек области определения, включая и $x = \pm\infty$.

2) Написать уравнения асимптот графика:

а) вертикальных;

б) невертикальных.

3) Выяснить является ли функция четной, нечетной, периодической. Если она обладает каким-либо из этих свойств, то как это отразится на графике?

4) Найти точки пересечения графика с осями координат.

5) Найти точки экстремума и интервалы монотонности функции.

6) Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

7) Построить эскиз графика функции.

Пример 5. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ и построить ее график.

Решение: 1) Найдем область определения функции: $x - 4 \neq 0$, $x \neq 4$. $D(y) = (-\infty;\, 4) \cup (4;\, +\infty)$.

2) Найдем асимптоты графика функции:

а) вертикальные.

$x = 4$ – точка разрыва функции. Исследуем поведение функции слева и справа от этой точки.

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} = +\infty.$$

Так как пределы оказались бесконечными, то $x = 4$ – вертикальная асимптота.

б) невертикальные: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x(x - 4)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x} = 1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[y(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-4x+1}{x-4}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-4}=0.$$

$y=x$ – наклонная асимптота.

3) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

Так как область определения функции – множество, не симметричное относительно нуля, то функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодическая.

4) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$y(0)=-\frac{1}{4}$, $\left(0;-\frac{1}{4}\right)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy.

$y(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$, решая квадратное уравнение, находим два корня:

$$x_1=2+\sqrt{3}\approx 3{,}7,$$

$$x_2=2-\sqrt{3}\approx 0{,}3.$$

$(3{,}7;\,0)$ и $(0{,}3;\,0)$ – точки пересечения графика функции с осью Ox.

5) Найдем точки экстремума и интервалы монотонной функции.

$$y'=\left(\frac{x^2-4x+1}{x-4}\right)'=\frac{(2x-4)(x-4)-(x^2-4x+1)}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-4x-8x+16-x^2+4x-1}{(x-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$$

$y'(x)=0\Leftrightarrow x^2-8x+15=0$, решая квадратное уравнение, находим корни:

$$x_1=3,$$

$$x_2=5.$$

Областью определения первой производной является множество: $D(y')=(-\infty;\,4)\cup(4;\,+\infty)$. Критическими точками являются найденные точки: $x_1=3$, $x_2=5$ и $x_3=4$.

Рассмотрим интервалы

$$(-\infty;\,3);\ (3;\,4);\ (4;\,5);\ (5;\,+\infty).$$

Применим теперь достаточное условие экстремума функции, для этого выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак производной (см. рисунок 60).

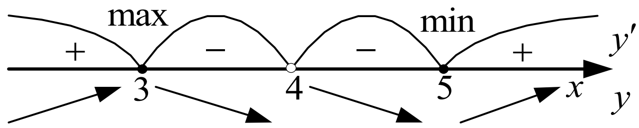

Рисунок 60

Приходим к заключению, что в критической точке $x=3$ имеет место максимум, а в точке $x=5$ имеет место минимум.

$$y_{\min}(5)=6,\ y_{\max}(3)=2.$$

При $x \in (-\infty; 3)$ и $x \in (5; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (3; 4)$ и $x \in (4; 5)$ функция убывает.

6) Найдем точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x^2 - 8x + 15)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2(x-4)\left((x-4)^2 - x^2 + 8x - 15\right)}{(x-4)^4} = \frac{2\left(x^2 - 8x + 16 - x^2 + 8x - 15\right)}{(x-4)^3} = \frac{2}{(x-4)^3}.$$

Вторая производная функции не обращается в нуль ни в одной точке действительной оси, отсюда следует, что функция не имеет точек перегиба.

Областью определения второй производной является множество: $D(y'') = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Точка $x = 4$ является критической точкой II рода. Отметим эту точку на числовой прямой и найдем знаки второй производной в каждом из интервалов: $(-\infty; 4)$ и $(4; +\infty)$ (см. рисунок 61).

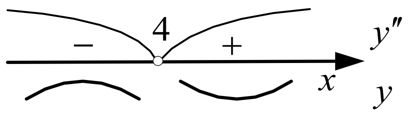

Рисунок 61

При $x \in (-\infty; 4)$ $y'' < 0$, значит график функции – выпуклая кривая на этом интервале. При $x \in (4; +\infty)$ $y'' > 0$, значит график функции – вогнутая кривая на этом интервале.

7) Построим эскиз графика функции (рисунок 62).

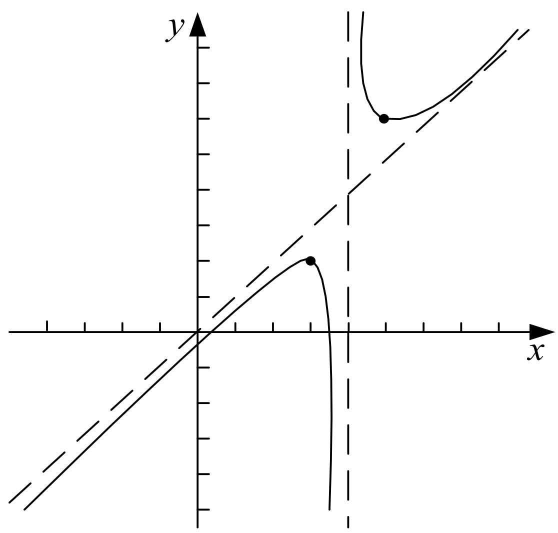

Рисунок 62

Пример 6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x+2)^3}$ и построить ее график.

Решение: 1) Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Найдем асимптоты графика функции:

а) вертикальные.

Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как функция определена на всей числовой оси.

б) невертикальные: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2(x+2)^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2+4x+4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+4+\frac{4}{x}} = \infty.$$

Так как последний предел бесконечен, то наклонных асимптот график функции не имеет.

3) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2\cdot(-x+2)^2} = \sqrt[3]{x^2\cdot(2-x)^2},$$

так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной ни нечетной.

Функция не периодическая.

4) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$y(0) = 0$, $(0; 0)$ – точка пересечения графика функции с осями.

$y(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = -2$, $(-2; 0)$ – точка пересечения графика функции с осью Ox.

5) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности функции.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2\cdot(x+2)^2}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\left(x^2\cdot(x+2)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2x(x+2)^2 + x^2\cdot 2(x+2)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4\cdot(x+2)^4}}\cdot\left(2x\left(x^2+4x+4\right)+2x^3+4x^2\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3+8x^2+8x+2x^3+4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4x^3+12x^2+8x}{x\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4x\cdot\left(x^2+3x+2\right)}{x\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot(x+1)(x+2)}{(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}}.$$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0$, $x = -1$.

Областью определения первой производной является множество: $D(y') = (-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup(0; +\infty)$. Критическими точками функции являются точки: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 0$.

Рассмотрим интервалы

$$(-\infty; -2);\ (-2; -1);\ (-1; 0);\ (0; +\infty).$$

Применим теперь достаточное условие экстремума функции. Для этого выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак производной (см. рисунок 63).

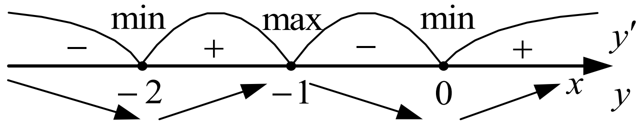

Рисунок 63

Приходим к заключению, что в критических точках $x=-2$ и $x=0$ имеет место минимум, а в точке $x=-1$ имеет место максимум.

$$y_{\min}(-2)=0,\ y_{\max}(-1)=1,\ y_{\min}(0)=0.$$

При $x\in(-\infty;-2)$ и $x\in(-1;0)$ функция убывает, а при $x\in(-2;-1)$ и $x\in(0;+\infty)$ функция возрастает.

6) Найдем точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

$$y''=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}}\right)'=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}-(x+1)\cdot\frac{1}{3}(x(x+2))^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+2)}{\sqrt[3]{x^2\cdot(x+2)^2}}=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}-\frac{2}{3}(x+1)^2\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2\cdot(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{x^2\cdot(x+2)^2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{x(x+2)-\frac{2}{3}(x+1)^2}{\sqrt[3]{x^4\cdot(x+2)^4}}=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3x^2+6x-2x^2-4x-2}{x\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{x^2+2x-2}{x\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)}}.$$

$y''(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$, решая квадратное уравнение, находим корни:

$$x_1=-1+\sqrt{3}\approx 0{,}7,$$

$$x_2=-1-\sqrt{3}\approx -2{,}7.$$

Областью определения второй производной является множество: $D(y'')=(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;+\infty)$.

Точки $x_1=-2{,}7$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=0{,}7$ являются критическими точками II рода. Отметим эти точки на числовой прямой и найдем знаки второй производной в каждом из интервалов: $(-\infty;-2{,}7)$, $(-2{,}7;-2)$, $(-2;0)$, $(0;0{,}7)$ и $(0{,}7;+\infty)$ (см. рисунок 64).

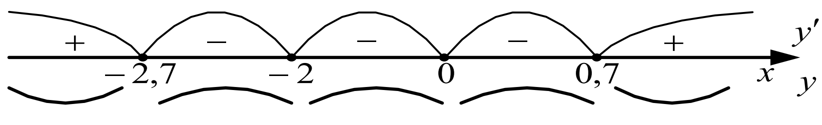

Рисунок 64

$$y(-2{,}7)\approx 1{,}6,\ y(0{,}7)\approx 1{,}6,$$

$(-2{,}7;1{,}6)$, $(0{,}7;1{,}6)$ – точки перегиба графика функции.

При $x \in (-\infty; -2{,}7)$, $x \in (0{,}7; +\infty)$ $y'' > 0$, значит график функции – вогнутая кривая на этих интервалах. При $x \in (-2{,}7; -2)$, $x \in (-2; 0)$, $x \in (0; 0{,}7)$ $y'' < 0$, значит график функции – выпуклая кривая на этих интервалах.

7) Построим эскиз графика функции (рисунок 65).

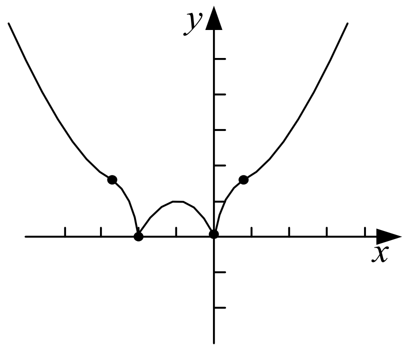

Рисунок 65

Пример 7. Исследовать функцию $y = \dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$ и построить ее график.

Решение: 1) Найдем область определения функции: $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Найдем асимптоты графика функции:

а) вертикальные.

$x = 1$ – точка разрыва функции, исследуем поведение функции слева и справа от точки $x = 1$.

-4 -3 -2 -1

0

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{e^{2(1-x)}}{2(x-1)} = +\infty.$$

Так как пределы оказались бесконечными, то $x = 1$ – вертикальная асимптота.

б) невертикальные: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2(x-1)}}{2x(x-1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{2(x-1)}\right)'}{\left(2x(x-1)\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot e^{2(x-1)}}{4x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 \cdot e^{2(x-1)}}{4} = +\infty;$$

при $x \to +\infty$ график функции асимптот не имеет.

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2(x-1)}}{2x(x-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-2|x-1|}}{2(-|x|)(-|x-1|)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2 \cdot |x| \cdot |x-1| \cdot e^{2|x-1|}} = 0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[y(x)-kx\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-2|x-1|}}{-2|x-1|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2|x-1|\cdot e^{2|x-1|}}=0.$$

$y=0$ – горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$.

3) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

Так как область определения функции – множество, не симметричное относительно нуля, то функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодическая.

4) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

$y(0)=-\dfrac{1}{2e^2}\approx-0{,}07$, $(0;-0{,}07)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy.

$y(x)=0\Leftrightarrow e^{2(x-1)}=0$, данное уравнение не имеет решения. График функции не пересекается с осью Ox

5) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности функции.

$$y'=\left(\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}\right)'=\frac{2e^{2(x-1)}\cdot2(x-1)-e^{2(x-1)}\cdot2}{4(x-1)^2}=\frac{2e^{2(x-1)}(2(x-1)-1)}{4(x-1)^2}=\frac{e^{2(x-1)}(2x-3)}{2(x-1)^2}.$$

$y'(x)=0\Leftrightarrow 2x-3=0$, $x=\dfrac{3}{2}$.

Областью определения первой производной является множество: $D(y')=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Критическими точками функции являются точки: $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{3}{2}$.

Рассмотрим интервалы

$$(-\infty;1);\ \left(1;\frac{3}{2}\right);\ \left(\frac{3}{2};+\infty\right).$$

Применим теперь достаточное условие экстремума функции. Для этого выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак производной (см. рисунок 66).

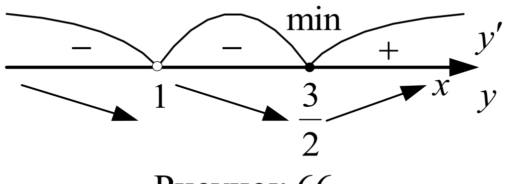

Рисунок 66

Приходим к заключению, что в критической точке $x=\dfrac{3}{2}$ функция имеет минимум.

$$y_{\min}\left(\frac{3}{2}\right)=e.$$

При $x \in (-\infty; 1)$ и $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$ функция убывает, а при $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ функция возрастает.

6) Найдем точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

$$y'' = \left(\frac{e^{2(x-1)} \cdot (2x-3)}{2(x-1)^2}\right)' = \frac{\left(2e^{2(x-1)} \cdot (2x-3) + e^{2(x-1)} \cdot 2\right) \cdot 2(x-1)^2 - e^{2(x-1)}(2x-3)4(x-1)}{4(x-1)^4} =$$

$$= \frac{4e^{2(x-1)}(x-1)((2x-2)(x-1)-(2x-3))}{4(x-1)^4} = \frac{e^{2(x-1)}\left(2x^2-6x+5\right)}{(x-1)^3}.$$

$y''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0$, действительных корней уравнение не имеет.

Вторая производная не обращается в нуль ни в одной действительной точке, значит точек перегиба у функции нет.

Областью определения второй производной является множество: $D(y') = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Точка $x = 1$ являются критической точкой II рода. Отметим эту точку на числовой прямой и найдем знаки второй производной в каждом из интервалов: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$ (см. рисунок 67).

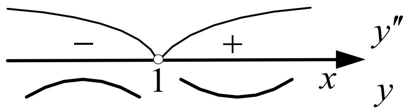

Рисунок 67

При $x \in (-\infty; 1)$ $y'' < 0$, значит график функции – выпуклая кривая на этом интервале. При $x \in (1; +\infty)$ $y'' > 0$, значит, график функции – вогнутая кривая на этом интервале.

7) Построим эскиз графика функции (рисунок 68).

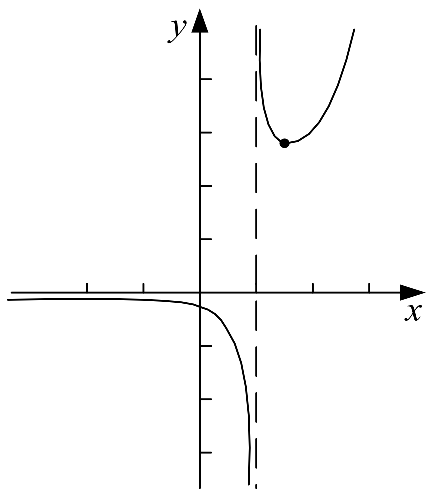

Рисунок 68

Пример 8. Исследовать функцию $y = 3 - 3 \cdot \ln \frac{x}{x+4}$ и построить ее график.

Решение: 1) Найдем область определения функции: $\begin{cases} x + 4 \neq 0 \\ \frac{x}{x+4} > 0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x \neq -4 \\ x \in (-\infty; -4) \in (0; +\infty) \end{cases}$. $D(y) = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

2) Найдем асимптоты графика функции:

а) вертикальные.

$x = -4$ – точка разрыва функции, исследуем поведение функции слева от точки $x = -4$.

$$\lim_{x \to -4-0} \left(3 - 3 \cdot \ln \frac{x}{x+4} \right) = -\infty,$$

значит $x = -4$ – вертикальная асимптота.

$x = 0$ – точка разрыва функции, исследуем поведение функции справа от точки $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0+0} \left(3 - 3 \cdot \ln \frac{x}{x+4} \right) = +\infty,$$

значит $x = 0$ – вертикальная асимптота.

б) невертикальные: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 3 \cdot \ln \frac{x}{x+4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{x} \cdot \ln \frac{x}{x+4} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} - 3 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{x}{x+4} =$$

$$= 0 - 3 \lim_{x \to \infty} \ln \left(\frac{x}{x+4} \right)^{\frac{1}{x}} = -3 \cdot \ln \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+4} \right)^{\frac{1}{x}} = -3 \cdot \ln 1 = -3 \cdot 0 = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [y(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left(3 - 3 \cdot \ln \frac{x}{x+4} \right) = 3 - 3 \cdot \lim_{x \to \infty} \ln \frac{x}{x+4} = 3 - 3 \cdot \ln \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+4} =$$

$$= 3 - 3 \cdot \ln 1 = 3 - 0 = 3.$$

$y = 3$ – горизонтальная асимптота.

3) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность.

Так как область определения функции – множество, не симметричное относительно нуля, то функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодическая.

4) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Oy график функции не пересекается.

$$y(x)=0 \Leftrightarrow 3-3\cdot\ln\frac{x}{x+4}=0,\ -3\cdot\ln\frac{x}{x+4}=-3,\ \ln\frac{x}{x+4}=1,\ \ln\frac{x}{x+4}=\ln e,$$

$\frac{x}{x+4}=e$, $x=e(x+4)$, $x=\frac{4e}{1-e}\approx-6{,}4$, $\left(\frac{4e}{1-e};0\right)$ – точка пересечения с осью Ox.

5) Найдем точки экстремума и интервалы монотонности функции.

$$y'=\left(3-3\cdot\ln\frac{x}{x+4}\right)'=0-3\cdot\frac{x+4}{x}\cdot\frac{x+4-x}{(x+4)^2}=-3\cdot\frac{x+4}{x}\cdot\frac{4}{(x+4)^2}=-\frac{12}{x(x+4)}.$$

Первая производная не обращается в нуль ни в одной точке. Функция экстремума не имеет.

Областью определения первой производной является множество: $D(y')=(-\infty;-4)\cup(-4;0)\cup(0;+\infty)$. Критическими точками функции являются точки: $x_1=-4$ и $x_2=0$.

Рассмотрим интервалы

$$(-\infty;-4);\ (0;+\infty).$$

Применим теперь достаточное условие экстремума функции, для этого выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак производной (см. рисунок 69).

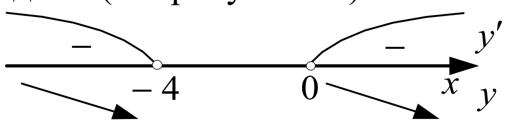

Рисунок 69

Функция убывает на всей области определения.

6) Найдем точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.

$$y''=\left(\frac{-12}{x(x+4)}\right)'=-12\cdot\frac{x+2}{x^2(x+4)^2}.$$

$$y''(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0,\ x=-2.$$

Данная точка не принадлежит области определения функции. Точек перегиба график функции не имеет.

Областью определения второй производной является множество: $D(y'')=(-\infty;-4)\cup(-4;0)\cup(0;+\infty)$.

Точки $x=-4$ и $x=0$ являются критическими точками II рода. Отметим эти точки на числовой прямой и найдем знаки второй производной в каждом из интервалов: $(-\infty;-4)$ и $(0;+\infty)$ (см. рисунок 70).

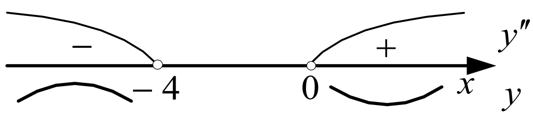

Рисунок 70

При $x \in (-\infty; -4)$ $y'' < 0$, значит график функции – выпуклая кривая на этом интервале. При $x \in \left(0; +\infty\right)$ $y'' > 0$, значит график функции – вогнутая кривая на этом интервале.

7) Построим эскиз графика функции (рисунок 71).

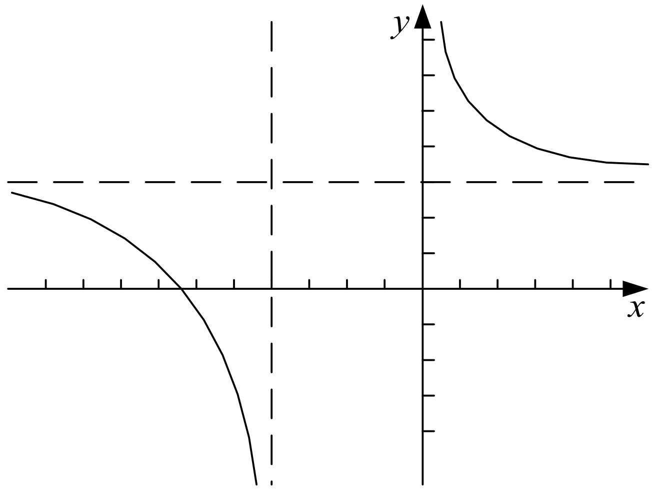

Рисунок 71

7.6 Задачи для самостоятельного решения

1. Найти экстремумы функций, используя второе правило нахождения экстремума:

а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$;

б) $y = e^{-x} + e^{2x}$.

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3

2. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функций:

а) $y = x^3 - 3x^3 - 9x + 9$;

б) $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$;

в) $y = 1 - \ln\left(x^2 - 4\right)$;

г) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

3. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = 2x + \dfrac{2}{x-1}$;

б) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$;

в) $y = x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$;

г) $y = \dfrac{\ln\left(x+1\right)}{x}$;

д) $y = x \cdot arctg\, x$.

4. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$;

б) $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$;

в) $y = \left(2x^2 + x + 1\right) \cdot e^{1-x}$;

г) $y = 2 \cdot \ln \dfrac{x+3}{x} - 3$.

8 Лекция №8. Формула Тейлора

8.1 Формула Тейлора

Формула Тейлора широко используется как в теоретических математических исследованиях, так и в вычислительной практике. Она позволяет заменить n раз дифференцируемую функцию, которая задана сложным аналитическим выражением, удобным для анализа многочленом, что особенно важно для различных областей прикладной математики.

Эта формула связана с именем английского математика **Брука Тейлора (1685–1731)**. Современник и последователь Ньютона, Тейлор является одним из основоположников математического анализа, теоретической механики, теории дифференциальных уравнений.

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке a. Это значит, что функция определена и имеет конечные производные всех порядков до n-го включительно в некоторой окрестности точки a и, кроме того, имеет конечную производную n-го порядка $f^{(n)}(a)$ в самой точке a.

Найдем многочлен $y = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в точке a равняется значению функции $f(x)$ в этой точке, а значения его производных до n-го порядка в точке $x = a$ равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке.

$$
\begin{aligned}
&P_n(a) = f(a),\\
&P_n'(a) = f'(a),\\
&P_n''(a) = f''(a), \qquad\qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).
\end{aligned}
$$

Естественно ожидать, что такой многочлен будет в некотором смысле «близок» к функции $f(x)$.

Будем искать этот многочлен в форме многочлена по степеням $(x - a)$ с неопределенными коэффициентами.

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n. \qquad (2)$$

Неопределенные коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ будем определять так, чтобы удовлетворялись условия (1).

Предварительно найдем производные многочлена $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} &P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1}, \\ &P_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \\ &\ldots, \\ &P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot c_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Подставляя в левые и правые части равенств (2) и (3) вместо x значение a и заменяя на основании равенств (1) $P_n(a)$ на $f(a)$, $P_n'(a)$ на $f_n'(a)$ и т.д., получим:

$$\begin{aligned} &f(a) = c_0, \\ &f'(a) = c_1, \\ &f''(a) = 2\cdot 1\cdot c_2, \\ &f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3, \\ &\ldots, \\ &f^{(n)}(a) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot c_n, \end{aligned} \qquad (4)$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} &c_0 = f(a), \\ &c_1 = f'(a), \\ &c_2 = \frac{f''(a)}{1\cdot 2}, \\ &c_3 = \frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3}, \\ &\ldots, \\ &c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Подставляя найденные значения $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в формулу (2), получим искомый многочлен:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(a) \quad (6)$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$:

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, откуда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, или, в развернутом виде

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x), (7)$$

Формула (7) называется **формулой Тейлора**, а $R_n(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора. Это не что иное, как погрешность приближения функции $f(x)$ многочленом Тейлора.

При $x \to a$ $R_n(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $(x-a)^n$. Это мы покажем, доказав следующую теорему.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке a, то при $x \to a$

$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right). \tag{8}$$

Доказательство: для доказательства достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Отношение под знаком предела представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Условие теоремы и то, что $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, где $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, позволяют для раскрытия этой неопределенности последовательно $(n-1)$ раз применить правило Бернулли-Лопиталя.

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!\cdot(x-a)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\cdot \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Но по условию теоремы в точке a существует производная $f^{(n)}(a)$, а значит, существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a)$.

Таким образом, правая часть предыдущего равенства равна нулю. Отсюда следует справедливость равенства (8), что и требовалось доказать.

Вернемся к формуле (7). Положим в ней $n = 1$. Получим:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a);$$

или, что то же самое

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a). \tag{9}$$

Эта формула должна напомнить равенство, которое мы в свое время получили из теоремы Лагранжа о функции, непрерывной на отрезке $[a; x]$ и имеющей непрерывную производную во всякой внутренней точке этого отрезка. Для такой функции существует $c \in (a; x)$:

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a);$$

но если $x \to a$, то и $c \to a$, таким образом, у нас получается формула (9).

Формула (7), таким образом, представляет собой обобщение формулы (9) для функции, имеющей n непрерывных производных на данном интервале.

Покажем далее, что многочлен Тейлора является единственным многочленом степени n, который в окрестности точки a представляет n раз дифференцируемую в этой точке функцию с погрешностью более высокого порядка малости при $x \to a$, чем $(x-a)^n$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$, n раз дифференцируемая в точке a, представима с погрешностью $o\left((x-a)^n\right)$ при $x \to a$ многочленом по степеням разности $(x-a)$ до n-ой степени, то коэффициенты этого многочлена являются коэффициентами Тейлора, а сам многочлен – многочленом Тейлора степени n.

Доказательство: пусть функция $f(x)$ представлена многочленом по степеням $(x-a)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right). \tag{10}$$

Функцию $o\left((x-a)^n\right)$ при $x \to a$ можно представить в виде $\beta(x)(x-a)^n$, где $\beta(x)$ – функция, бесконечно малая при $x \to a$. Приравняем представление (10) функции $f(x)$ и ее представление в виде (7) с учетом условия (8): $\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \beta(x)(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \gamma(x)(x-a)^n$, где $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ функции (вообще говоря, различные). При переходе к пределу при $x \to a$ все слагаемые, кроме первых в левой и правой частях записанного равенства, обращаются в нуль. Отсюда $c_0 = f(a)$. Отбрасывая равные между собой первые слагаемые и разделив обе части равенства на $(x-a)$, получим:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^{k-1} + \beta(x)(x-a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} + \gamma(x)(x-a)^{n-1}.$$

Переход к пределу при $x \to a$ в этом равенстве даст $c_1 = f'(a)$; последовательно продолжая описанную процедуру, получаем $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, т.е. при сделанных предположениях c_k являются коэффициентами Тейлора, а $\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-a)^k$ – многочленом Тейлора функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что если мы в качестве приближения функции $f(x)$ возьмем многочлен вида $\sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-a)^k$ с коэффициентами c_k, отличными от $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то всякой такой многочлен задаст $f(x)$ в окрестности точки a с погрешностью, которая будет при $x \to a$ бесконечно малой функцией более низкого порядка, чем при приближении многочленом Тейлора. В этом смысле многочлен Тейлора называют многочленом наилучшего приближения среди всех многочленов той же степени.

8.2 Различные представления остаточного члена формулы Тейлора

Формулу (7) предыдущего параграфа запишем в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right). \qquad (11)$$

Эту формулу будем называть формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом **в форме Пеано**.

Джузеппе Пеано (1858−1932) − итальянский математик, главные исследования которого посвящены основаниям математики, математической логике, неевклидовой геометрии. Сам учёный из всех своих работ наиболее ценными считал труды по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

Форма Пеано для записи остаточного члена формулы Тейлора удобна для того, чтобы показать, что погрешность представления функции многочленом Тейлора достаточно мала. Но эта форма не позволяет вычислить такую погрешность при заданном значении x из окрестности точки a, не даёт возможности установить размеры такой окрестности, в которой многочлен воспроизводил бы эту функцию с наперёд заданной точностью, не показывает, как можно влиять на погрешность за счёт роста степени n многочлена.

В дополнение к условиям теорем предыдущего параграфа потребуем, чтобы в точке существовала ещё и конечная производная $f^{(n-1)}(a)$ функции $f(x)$. Тогда можно установить, что $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}+o\left((x-a)^{n+1}\right)$ (Установите это самостоятельно).

Мы получим тогда другое представление остаточного члена **в форме Пеано:** $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(a)+б(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, где $б(x)=(n+1)!\dfrac{o\left((x-a)^{n+1}\right)}{(x-a)^{n+1}}$ (ясно, что $б(x)$ − функция, бесконечно малая при $x\to a$).

Теперь стоило бы получить такое представление остаточного члена $R_n(x)$, которое допускало бы возможность непосредственной количественной оценки приближения функции многочленом при конкретных значениях x и n. Пусть функция $f(x)$ определена и n раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;a+h]$ $(h>0)$ и, кроме того, по крайней мере в интервале $(a;a+h)$ существует и конечна производная $f^{(n+1)}(x)$ (рассуждения в случае отрезка $[a;a+h]$ аналогичны).

Рассмотрим остаточный член формулы Тейлора:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) =$$
$$= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{12}$$

Зафиксируем произвольное $x \in (a; a+h)$ и заменим в (12) постоянное значение a переменным z, $z \in [a; x]$. Затем составим вспомогательную функцию
$$\varphi(x) = f(x) - f(z) - f'(z)(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n .$$
На отрезке $[a; x]$ функция $\varphi(x)$ непрерывна как алгебраическая сумма непрерывных функций. На концах этого отрезка она принимает значения $\varphi(a) = R_n(x)$ и $\varphi(x) = 0$. Кроме того, в интервале $(a; x)$ у этой функции существует производная:
$$\varphi(x) = -f'(z) - \left(f''(z)(x-z) - f'(z)\right) - \left(\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - f''(z)(x-z)\right) - \ldots -$$
$$-\left(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

Возьмём произвольную функцию $\text{ш}(z)$, непрерывную на отрезке $[a; x]$ и имеющую не равную нулю производную $\text{ш}'(z)$ по крайней мере в интервале $(a; x)$. К функциям $\varphi(z)$ и $\text{ш}(z)$ применим на отрезке $[a; x]$ теорему Коши.
$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(z) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}, \tag{13}$$
где c – точка, лежащая между точками a и x. Поскольку $\varphi(x) = 0$, $\varphi(a) = R_n(x)$, $\varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$, из равенства (13) мы получим:
$$R_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(a)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n . \tag{14}$$

Если теперь мы подставим в равенство (13) вместо $\text{ш}(z)$ любые, но удовлетворяющие указанным выше условиям функции, то получим различные формы записи остаточного члена формулы Тейлора.

Пусть $\text{ш}(z) = (x-z)^p$, $(p > 0)$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a; x]$ и её производная $\text{ш}'(z) = -p \cdot (x-z)^p \neq 0$ для $\forall z \in (a; x)$. Тогда из (14) следует:
$$R_n(x) = \frac{-(x-a)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p .$$
Так как $c = a + \vartheta(x-a)$ при $0 < \vartheta < 1$, то $x - c = x - a - \vartheta(x-a) = (1-\vartheta)(x-a)$. И окончательно:
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{n!\,p}(1-\vartheta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1},\ 0 < \vartheta < 1 . \tag{15}$$

Выражение (15) даёт представление остаточного члена **в общей форме или в форме Шлёмильха-Роша**.

Оскар Шлёмильх (1823–1901) – немецкий математик, исследования которого были посвящены теории определённых интегралов, теории рядов, теории функций и высшей геометрии.

Э. Рош (1820–1883) – французский математик и астроном.

В частном случае $p = n+1$ из формы (15) получим остаточный член **в форме Лагранжа:**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a))}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1},\ 0<\Theta<1. \qquad (16)$$

Как видим, остаточный член в такой форме очень похож на последнее слагаемое многочлена Тейлора. Отличие состоит в том, что производная $f^{(n+1)}(x)$ вычислена не в точке a, а в некоторой точке $c = a+\Theta(x-a)$ между точками a и x. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a))}{(n+1)!}\left(x-a\right)^{n+1}. \qquad (17)$$

Эту формулу наиболее часто используют на практике.

При $p=1$ из формулы (15) получим остаточный член **в форме Коши:**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\text{и}(x-a))}{n!}(1-\text{и})^n\left(x-a\right)^{n+1},\ 0<\text{и}<1. \qquad (18)$$

Отметим, что значения ϑ, Θ, и в формулах (15), (16), (17) различны для одной и той же функции $f(x)$ даже при фиксированных точках a и x, поскольку зависят от значения p.

8.3 Практическое занятие №8. Формула Тейлора

Упражнение 1. Разложить многочлен $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ по степеням $(x-2)$.

Решение: многочлен имеет всюду производные любого порядка. Поэтому для всякого x можно выразить значение этой функции по формуле Тейлора.

Положим $a = 2$. Вычислим коэффициенты $c_n = \dfrac{P^{(n)}(2)}{n!}$:

n	$P^{(n)}(x)$	$P^{(n)}(2)$	$c_n = \dfrac{P^{(n)}(2)}{n!}$
0	$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8x + 4$	0	0
1	$P'(x) = 8x^3 - 15x^2 - 6x + 8$	0	0

2	$P''(x)=24x^2-30x-6$	30	15
3	$P'''(x)=48x-30$	66	11
4	$P^{(4)}(x)=48$	48	2
5	$P^{(5)}(x)=0$	0	0

Применим формулу Тейлора:

$$P(x)=15(x-2)^2+11(x-2)^3+2(x-2)^4,$$

$$R_5(x)=0 \text{, так как } P_5(x)\equiv 0.$$

Ответ: $P(x)=15(x-2)^2+11(x-2)^3+2(x-2)^4$.

Частный, простейший вид формулы Тейлора при $a=0$ принято называть формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n \text{; где}$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Упражнение 2. Написать разложение функции по формуле Маклорена: $f(x)=e^x$.

Решение: функция e^x имеет всюду производные любого порядка. Поэтому при любом x можно выразить значения функции e^x по формуле Маклорена.

Найдем выражение n-ой производной этой функции:

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x;$$

при дифференцировании вид функции в данном случае не изменился, поэтому

$$f^{(n)}(x)=e^x.$$

Вычислим коэффициенты разложения

$$c_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\ k=0,1,2,\ldots,n,$$

$$c_0=f(0)=1;\ c_1=\frac{f'(0)}{1!}=1;\ c_2=\frac{f''(0)}{2!}=\frac{1}{2};\ \ldots,$$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}.$$

Подставляя найденные значения в формулу Маклорена, получаем

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где ξ лежит в интервале $(0;x)$ при $x>0$ или в интервале $(x;0)$, при $x<0$.

Ответ: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Упражнение 4. Написать разложение функции по формуле Маклорена: $f(x)=\sin x$.

Решение: функция всюду имеет производные любого порядка, поэтому при любом x можно выразить значения функции $\sin x$ по формуле Маклорена. Найдем коэффициенты разложения $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Найдем выражение n-ой производной этой функции:

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x.$$

Понятно теперь, что продолжать процесс последовательного вычисления производных нет надобности: $y^{(5)}$ будет равно y', $y^{(6)}=y''$ и т.д.

Находим теперь, что $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$, откуда $f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Для n четных $n=2k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ $f^{(2k)}(0)=\sin k\pi=0$, поэтому $c_{2k}=0$ и в разложении отсутствуют члены с четными номерами.

Для n нечетных $n=2k-1$ $(k=1,2,3,\ldots)$ $f^{(2k-1)}(0)=\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2}=(-1)^{k-1}$, так что знаки нечетных членов чередуются:

$$c_1=1,\ c_3=-\frac{1}{3!},\ c_5=\frac{1}{5!},\ c_7=-\frac{1}{7!},\ \ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k},$$

где

$$R_{2k}=x^{2k}\frac{f^{(2k)}(\xi)}{2k!}=\frac{x^{2k}\cdot\sin\left(\xi+\frac{2k}{2}n\right)}{2k!}=(-1)^k\frac{x^{2k}\sin\xi}{2k!}.$$

Ответ: $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{x^{2k}\sin\xi}{2k!}$.

Упражнение 5. Написать разложение функции по формуле Маклорена: $f(x)=\ln(1+x)$.

Решение: функция имеет производные любого порядка на интервале $(-1;+\infty)$. Поэтому в окрестности точки $x=0$ она может быть представлена по формуле Маклорена.

Найдем выражение n-ой производной:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x};\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2};\ f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3};\ f^{(4)}(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4};$$

наблюдается закон, по которому строятся последовательные производные функции $f(x)=\ln(1+x)$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ n=2,3,4,\ldots.$$

Вычислим коэффициенты разложения $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$:

$$c_0 = f(0) = \ln 1 = 0;\ c_1 = \frac{1}{1+0} = 1;\ c_2 = -\frac{1}{2};\ \ldots;$$

$$c_{n-1} = \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!} = (-1)^{n-2}\,\frac{(n-2)!}{(1+0)^n\,(n-1)!} = (-1)^n\,\frac{1}{n-1};$$

$$R_n = \frac{x^n f^n(0)}{n!} = (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{(1+\xi)^n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Подставляя найденные значения в формулу Маклорена, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^n.$$

Ответ: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\,\dfrac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n+1}\,\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{1+\xi}\right)^n$.

Для практических задач наиболее важны следующие пять основных разложений:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \tag{19}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}); \tag{20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}); \tag{21}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n\,\frac{x^{n-1}}{n-1} + o(x^n); \tag{22}$$

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n). \tag{23}$$

Разложения функций $y = \cos x$ и $y = (1+x)^{\mu}$ по формуле Маклорена мы предлагаем читателю получить самостоятельно.

Упражнение 6. Оценить ошибку, которую мы допускаем, вычисляя значение $\ln 1{,}5$ по приближенной формуле

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

т.е. используя четыре первых члена разложения (22).

Решение: Оценить погрешность формулы при $x = 0{,}5$ – это значит оценить разность

$$\delta = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) \text{ при } x = 0{,}5.$$

Запишем формулу (22) для $n = 5$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^5,\ 0<\xi<x.$$

Это точное равенство отличается от приближенной формулы величиной остаточного члена

$$R_5=\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^5,\ 0<\xi<x.$$

Отсюда следует, что величина ошибки δ равна значению остаточного члена. В данном случае

$$\delta=\frac{1}{5}\left(\frac{0{,}5}{1+\xi}\right)^5=R_5.$$

Остаточный член может быть оценен так:

$$0<R_5\le\max_{0\le\xi\le 0{,}5}\frac{1}{5}\left(\frac{0{,}5}{1+\xi}\right)^5<0{,}007$$

и

$$R_5\ge\min_{0\le\xi\le 0{,}5}\frac{1}{5}\left(\frac{0{,}5}{1+\xi}\right)^5>0{,}0008.$$

По формуле (22) вычислим $\ln(1+0{,}5)$:

$$\ln(1+0{,}5)\approx 0{,}5-\frac{1}{2}(0{,}5)^2+\frac{1}{3}(0{,}5)^3-\frac{1}{4}(0{,}5)^4\approx 0{,}4010.$$

Истинное значение $\ln(1+0{,}5)$ заключено, таким образом, в пределах

$$0{,}4002<\ln(1+0{,}5)<0{,}4080.$$

Ответ: $0{,}4002<\ln(1+0{,}5)<0{,}4080$.

Упражнение 7. Используя разложение функции $f(x)=e^x$, оценить абсолютную погрешность приближенной формулы

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}$$

на отрезке $[-0{,}1;\,0{,}1]$.

Решение: оценить абсолютную погрешность формулы на отрезке $[-0{,}1;\,0{,}1]$ – это значит оценить по модулю разность $\delta=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)$ при $-0{,}1\le x\le 0{,}1$.

Формула (19) для $n=3$ имеет вид

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{3!}x^3e^{\xi},$$

где ξ – внутренняя точка интервала $(0;\,x)$.

Так же, как и в предыдущем упражнении, точная формула отличается от приближенной величиной остаточного члена

$$\delta(x)=R_4(x)=\frac{1}{3!}x^3e^{\xi}.$$

Надо оценить $|R_4(x)|$ на отрезках $[-0{,}1;\,0]$ и $[0;\,0{,}1]$:

$$\max_{0\le x\le 0{,}1}|R_4(x)|=\max_{0\le x\le 0{,}1}\frac{1}{3!}\left|x^3e^{\xi}\right|<\frac{(0{,}1)^3e^{0{,}1}}{6}<0{,}0004,$$

так как в данном случае $0<\xi<x\le 0{,}1$;

$$\max_{-0{,}1\le x\le 0}|R_4(x)|=\max_{-0{,}1\le x\le 0}\frac{1}{3!}\left|x^3e^{\xi}\right|<\frac{1}{6}(0{,}1)^3e^0<0{,}0002,$$

так как $-0{,}1<\xi<x\le 0$.

Сравнивая полученные оценки, заключаем, что абсолютная погрешность формулы на отрезке $[-0{,}1;\,0{,}1]$ не превосходит 0,0004.

Ответ: абсолютная погрешность не превосходит 0,0004.

Упражнение 8. Вычислить с точностью до 10^{-5} приближенное значение: $\cos 5^\circ$.

Решение: в формулу (21)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}$$

подставляем $x=5^\circ=\dfrac{\pi}{36}$; так как

$$\frac{x^2}{2!}=\frac{\pi^2}{2\cdot 36^2}=0{,}003808,\ \frac{x^4}{4!}=\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=2{,}4\cdot 10^{-6},$$

то ограничимся только следующими членами:

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}.$$

При этом погрешность оценивается величиной

$$|R_4(x)|=\left|\frac{\cos\theta x}{4!}x^4\right|\le\frac{|x|^4}{4!}<2{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Итак, с требуемой точностью,

$$\cos 5^\circ=\cos\frac{\pi}{36}=1-0{,}00381=0{,}99619.$$

Ответ: $\cos 5^\circ=0{,}99619$.

Упражнение 9. Написать разложение функции $f(x)=\sin^2x-x^2e^{-x}$ по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до четвертого порядка малости относительно x.

Решение: воспользуемся разложениями (20) и (19). Имеем

$$f(x)=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]^2-x^2\left[1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]=$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^5)-x^2+x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^3-\frac{5}{6}x^4+o(x^4).$$

Ответ: $f(x)=x^3-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$.

Упражнение 10. С помощью формулы Тейлора вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{tg^4 x}$.

Решение: используя разложения (13) и (15), сохраняя в знаменателе и числителе члены до четвертого порядка относительно x, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{tg^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x^2\right)^{1/2}\cos x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1/2(-1/2)}{2}x^4+o(x^4)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{tg^4 x}=\frac{1}{3}$.

8.4 Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить многочлен $P(x)=x^4-2x^3+7x-4$ по степеням $(x-1)$.

2. Разложить по формуле Маклорена функции:
   а) $f(x)=\cos x$;
   б) $f(x)=\left(1+x\right)^{\mu}$.

3. Используя разложение (14), оценить погрешность приближенной формулы $\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

4. Вычислить с точностью до 10^{-5} приближенное значение $\sin 20^\circ$.

5. Вычислить с точностью до 10^{-6} приближенное значение $\sqrt[4]{83}$.

Указание. Используйте разложение по формуле Маклорена функции $f(x)=\left(1+x\right)^{\mu}$.

6. Написать разложение функций:
   а) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}-\cos x\cdot\ln(1+x)$;
   б) $f(x)=\ln(1+\sin x)$

по целым положительным степеням x, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно x.

7. С помощью формулы Тейлора вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

9 Контрольная работа по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Вариант 1

1 Найти производные функции:

а) $y = \cos^3 x \cdot \ln\sqrt[5]{x}$;

б) $y = \ln^6(x+5) + \arccos\sqrt{x^3 - 1}$;

в) $y = 2^{\cos^2 x}$;

г) $y = (tg\sqrt[6]{x+9})^{\cos x^2}$.

2 Показать, что функция удовлетворяет уравнению:

$y = x(c - \ln x)$, $x - y + xy' = 0$.

3 Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в соответствующей точке:

а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2}, x_0 = 2$;

б) $\begin{cases} x = t\sin t + \cos t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

4 Найти вторую производную функции:

а) $\begin{cases} x = arctgt \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$;

б) $y = x + arctg\, y$.

5 Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

Вариант 2

1 Найти производные функции:

а) $y = tg^4 x \cdot \ln\sqrt[5]{x}$;

б) $y = \ln(e^x + \sin x^2)$;

в) $y = e^{\arccos x^4}$;

г) $y = (tg\sqrt[6]{x-11})^{\sin x^2}$.

2 Показать, что функция удовлетворяет уравнению:

$y = e^{tg\frac{x}{2}}$, $y'\sin x = y\ln y$.

3 Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в соответствующей точке:

а) $y = x - x^2, x_0 = 1$;

б) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4 Найти вторую производную функции:

а) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$;

б) $y = x + \ln y$.

5 Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}.$$

10 Вопросы к экзамену

1 Производная функции в точке. Определение и геометрический смысл.

2 Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке.

3 Геометрический смысл дифференциала. Геометрический смысл дифференцируемости функции в точке.

4 Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций.

5 Производная обратной функции.

6 Производная сложной функции.

7 Производная функции одной переменной, заданной неявно.

8 Логарифмическое дифференцирование.

9 Различные кривые, заданные параметрическими уравнениями.

10 Дифференцирование функции, заданной параметрически.

11 Производные и дифференциалы высших порядков.

12 Локальные экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума. Теорема Ферма. Два правила отыскания точек экстремума.

13 Теорема Ролля: формулировка, доказательство, геометрический смысл.

14 Теорема Лагранжа: формулировка, доказательство, геометрический смысл. Следствия из теоремы Лагранжа. Промежутки возрастания и убывания функции.

15 Теорема Коши о среднем значении функции. Правило Бернулли-Лопиталя как следствие из неё.

16 Применение второй производной к исследованию функции. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия их существования.

17 Асимптоты графика функции.

18 Исследование функций и построение их графиков с помощью средств дифференциального исчисления.

19 Формула Тейлора.

Список использованных источников

1 **Боголюбов, А.Н.** Математики. Механики. Биографический справочник / А.Н. Боголюбов – Киев: Наукова думка, 1983. – 168 с.

2 **Бугров, Я.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1984. – 431 с.

3 **Бутузов, В.Ф.** Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.

4 **Гусак, А.А.** Пособие к решению задач по высшей математике / А.А. Гусак – Минск: Изд. БГУ, 1973. – 532 с.

5 **Гусак, А.А**. Справочное пособие к решению задач. Математический анализ и дифференциальные уравнения / А.А. Гусак– Минск: НТООО «ТетраСистемс», 2003. – 414 с.

6 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч.: учебное пособие для вузов /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Д. Кожевникова – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»; Мир и Образование, 2003. – Ч. 1.

7 **Демидович, Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Наука, 1990. – 516 с.

8 **Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов**: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений /Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко [и др.]; под ред. Б.П. Демидовича – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.

9 **Запорожец, Г.И**. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И.Запорожец – М.: Высшая школа, 1965.

10 **Зубова, И.К.** Введение в математический анализ: учебное пособие / И.К. Зубова, О.В. Острая – Оренбург.: ГОУ ОГУ, 2006. – 117 с.

11 **Зубова, И.К.** Исследование функций методами дифференциального исчисления: методические указания / И.К. Зубова, О.В. Острая – Оренбург.: ГОУ ОГУ, 2003 – 24 с.

12 **Иванова, Е.Е.** Дифференциальное исчисление функций одного переменного / Е.Е. Иванова – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. – 407 с.

13 **Ильин, В.А.** Основы математического анализа / В.А. Ильин, И.Г. Позняк – М.: Наука, 1982. – 616 с.

14 **Ким, В.С.** Исследование функций. Методические указания / В.С. Ким – Оренбург: Политехнический институт, 1988. – 15 с.

15 **Каплан, И.А.** Практикум по высшей математике: в 2 т.: учебное пособие / И.А. Каплан, В.И. Пустынников – М.: Эксмо, 2006. – Т.1. –576 с.

16 **Козлова, В.А.** Саморепетитор по математике / В.А. Козлова, Г.Г. Левитас – М.: Школа – Пресс, 1996. – 272 с.

17 **Кудрявцев, Л.Д.** Краткий курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев – М.: Наука, 1989.

18 **Кудрявцев, Л.Д.** Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: сборник задач по математическому

анализу:в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабулин ;под ред. Л.Д. Кудрявцева – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т.1.

19 **Кузнецов, Л.А.** Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л.А. Кузнецов – СПб.: Издательство «Лань», 2005.

20 **Лунгу, К.Н.** Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко – М.: Рольф, 2001. – 576 с.

21 **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов – М.: Физматгиз, 1961. – 748 с.

22 **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д.Т. Письменный – М.: Айрис-пресс, 2004. – Ч.1.– 288 с.

23 **Понтрягин, Л.С.** Математический анализ для школьников / Л.С. Понтрягин – М.: Наука, 1983. – 96 с.

24 **Садовничий, В.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 т. / В.А. Садовничий – М.: Высшая школа, 2002. – Т.1. – 725 с.

25 **Фихтенгольц, Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц – М.: Наука, 1970. – Т.1. – 440 с.

26 **Шипачев, В.С.** Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998.

27 **Шипачев, В.С.** Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев – М.: Высшая школа, 1998. – 192 с.