

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Оренбургский государственный университет"

А. А. ЧАКАК

# **КУРС ФИЗИКИ**

## **МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет" в качестве учебного пособия для студентов факультета дистанционных образовательных технологий.

Оренбург 2009

УДК 531 (075.8)

ББК 22.2я 73

Ч 16

Научный редактор

доктор физико-математических наук, профессор М. Г. Кучеренко

Рецензент

доктор физико-математических наук, профессор Н. А. Манаков

**Чакак А. А.**

Ч 16

**Курс физики. Молекулярная физика: учебное пособие для студентов заочного отделения высших учебных заведений / А. А. Чакак. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 377с.**

В учебном пособии дается систематическое изложение основных фундаментальных понятий и закономерностей статистической физики на примере молекулярных систем. При рассмотрении свойств газов, жидкостей и твёрдых тел применяются статистический и термодинамический методы, как взаимно дополняющие друг друга. В конце учебного пособия приведены контрольные задачи и экзаменационные тестовые задания. В приложении к пособию имеются справочные материалы по математике и общей физике, которые могут оказаться хорошим подспорьем при выполнении практических заданий.

Учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения «Молекулярной физики» студентами заочного отделения высших учебных заведений. Пособие может оказаться полезным для студентов вузов и старшекласников при контроле ими знаний, полученных при изучении данного раздела «Курса физики».

Учебное пособие рекомендовано к изданию кафедрой общей физики ОГУ. Составитель Чакак А. А.

Ч 1603010000

ББК 22.2я 73

© Чакак А.А., 2009

© ГОУ ОГУ, 2009

## Содержание

Введение.....	6
Глава 1 Кинетическая теория идеальных газов.....	13
§ 1.1 Идеальный газ.....	13
§ 1.2 Давление газа.....	14
§ 1.3 Температура.....	19
§ 1.4 Уравнение состояния идеального газа.....	27
§ 1.5 Скорости газовых молекул.....	35
§ 1.6 Барометрическая формула.....	38
§ 1.7 Понятие о вероятности.....	41
§ 1.8 Функция распределения.....	44
§ 1.9 Закон Максвелла распределения молекул по скоростям.....	46
Контрольные вопросы.....	52
Тесты .....	53
Упражнения для самоконтроля.....	57
Глава 2 Кинетическая теория теплоты. Закон сохранения энергии.....	58
§ 2.10 Внутренняя энергия идеального газа. Количество теплоты.....	58
§ 2.11 Первое начало термодинамики.....	61
§ 2.12 Теплоёмкость идеальных газов.....	66
§ 2.13 Теплоёмкость одноатомных газов.....	68
§ 2.14 Теплоёмкость газов и число степеней свободы молекул.....	70
§ 2.15 Изменение состояния при изменении объёма газа.....	72
§ 2.16 Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах.....	73
§ 2.17 Расширение газа в пустоту.....	80
Контрольные вопросы.....	81
Тесты.....	82
Упражнения для самоконтроля.....	86
Глава 3 Столкновения молекул и явления переноса.....	87
§ 3.18 Молекулярные движения и явления переноса.....	87
§ 3.19 Средняя длина свободного пробега молекул.....	90
§ 3.20 Диффузия в газах.....	95
§ 3.21 Стационарная диффузия. Коэффициент диффузии.....	97
§ 3.22 Коэффициент взаимной диффузии.....	100
§ 3.23 Теплопроводность газов.....	103
§ 3.24 Стационарная теплопроводность. Коэффициент теплопроводности.....	105
§ 3.25 Вязкость газов (внутреннее трение).....	110
§ 3.26 Соотношения между коэффициентами переноса.....	114
Контрольные вопросы.....	115
Тесты.....	116
Упражнения для самоконтроля.....	120
Глава 4 Реальные газы.....	121
§ 4.27 Молекулярные силы и отклонения свойств газов от идеальности.....	122
§ 4.28 Сжижение газов (конденсация).....	126

§ 4.29 Фазовый переход (фазовое превращение).....	129
§ 4.30 Методы определения критических параметров.....	132
§ 4.31 Уравнение Ван-дер-Ваальса.....	134
§ 4.32 Изотермы газа Ван-дер-Ваальса.....	140
§ 4.33 Критическая температура и критическое состояние.....	143
Контрольные вопросы.....	149
Тесты.....	149
Упражнения для самоконтроля.....	152
Глава 5 Элементы термодинамики.....	153
§ 5.34 Равновесные состояния.....	153
§ 5.35 Обратимые и необратимые процессы.....	155
§ 5.36 Взаимные превращения механической и тепловой энергии.....	160
§ 5.37 Преобразование теплоты в механическую работу.....	163
§ 5.38 Цикл Карно.....	166
§ 5.39 Холодильная машина.....	173
§ 5.40 Энтропия.....	174
§ 5.41 Энтропия при обратимых процессах в замкнутой системе.....	181
§ 5.42 Энтропия при необратимых процессах в замкнутой системе.....	183
§ 5.43 Второе начало термодинамики и превращение теплоты в работу	189
§ 5.44 Теплоёмкость неидеальных газов.....	194
§ 5.45 Термодинамическая шкала температур.....	196
§ 5.46 Третье начало термодинамики.....	198
Контрольные вопросы.....	199
Тесты.....	200
Упражнения для самоконтроля.....	204
Глава 6 Свойства жидкостей.....	205
§ 6.47 Строение жидкостей.....	205
§ 6.48 Поверхностное натяжение жидкостей.....	207
§ 6.49 Смачивание.....	210
§ 6.50 Давление под искривлённой поверхностью жидкости.....	212
§ 6.51 Капиллярные явления.....	214
§ 6.52 Испарение и кипение жидкостей.....	216
§ 6.53 Давление насыщенных паров над искривлённой поверхностью	
жидкости.....	218
§ 6.54 Кипение жидкостей.....	222
§ 6.55 Осмотическое давление.....	225
Контрольные вопросы.....	227
Тесты.....	228
Упражнения для самоконтроля.....	231
Глава 7 Твёрдые тела.....	232
§ 7.56 Симметрии твердых тел.....	234
§ 7.57 Кристаллические решётки.....	236
§ 7.58 Переход в твёрдое состояние.....	245
§ 7.59 Диаграмма состояния. Тройная точка.....	248
§ 7.60 Тепловые свойства твёрдых тел.....	251

§ 7.61 Тепловое расширение твёрдых тел.....	253
§ 7.62 Теплопроводность.....	256
Контрольные вопросы.....	257
Тесты.....	258
Упражнения для самоконтроля.....	261
Глава 8 Контрольная работа .....	262
§ 8.63 Общие методические указания к решению задач и выполнению контрольных работ.....	262
§ 8.64 Контрольные задачи.....	263
Глава 9 Экзамены.....	274
§ 9.65 Общие положения.....	274
§ 9.66 Экзаменационные тестовые задания.....	275
Глава 10 Примеры решения задач.....	292
Литература, рекомендуемая для изучения физики.....	311
Список использованных источников.....	312
Приложение А. Основные физические константы.....	313
Приложение Б. Соотношения между единицами некоторых физических величин.....	314
Приложение В. Основные формулы по математике.....	315
Приложение Г. Некоторые сведения из математики.....	318
Приложение Д. Основные формулы по физике.....	324
Приложение Е.....	366

## Введение

Молекулярная физика, излагаемая в рамках курса общей физики, не должна, разумеется, быть ни курсом термодинамики, ни курсом статистической физики. Но без элементов той и другой обойтись нельзя. Именно элементы этих фундаментальных теорий и введены в пособие.

**Молекулярная физика** – раздел физики, в котором изучаются физические свойства тел на основе рассмотрения их молекулярного строения. Задачи молекулярной физики решаются методами, связанными с изучением движения и взаимодействия частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих физические тела. Молекулы любого вещества находятся в беспорядочном, хаотическом, не имеющем какого-либо преимущественного направления движении. Его интенсивность зависит от температуры вещества. Непосредственным доказательством существования хаотического движения молекул служит броуновское движение.

Круг вопросов, охватываемых молекулярной физикой, очень широк. В ней рассматриваются: строение веществ и его изменение под влиянием внешних факторов (давления, температуры, электрических и магнитных полей), явления переноса (диффузия, теплопроводность, вязкость), фазовое равновесие и процессы фазовых переходов (кристаллизация, плавление, испарение, конденсация и др.), критическое состояние вещества, поверхностные явления на границах раздела фаз.

Развитие молекулярной физики привело к выделению из нее самостоятельных разделов: статистической физики, физической кинетики, физики твёрдого тела, физической химии, молекулярной биологии. На основе общих теоретических представлений молекулярной физики получили развитие физика металлов, физика полимеров, физика плазмы, кристаллофизика, физикохимия дисперсных систем и поверхностных явлений, теория массо- и теплопереноса, физико-химическая механика. При всём различии объектов и методов исследования здесь сохраняется, однако, главная идея молекулярной физики – описание макроскопических свойств вещества на основе микроскопической (молекулярной) картины его строения.

**Термодинамика** – наука о наиболее общих тепловых свойствах макроскопических тел. Термодинамический подход не требует привлечения упрощённых моделей рассматриваемых явлений, поэтому выводы термодинамики имеют универсальный характер.

Зарождение термодинамики связано с именем Г. Галилея, который ввёл понятие температуры и сконструировал первый прибор, реагирующий на изменение температуры окружающей среды.

В термодинамике изучают макроскопические системы, т.е. системы, состоящие из большого числа частиц, причём исследуют наиболее общие свойства таких систем, для описания которых не требуется привлечения микроскопических характеристик системы. Термодинамический подход оказывается тем точнее, чем больше частиц в системе.

## Молекулярно-кинетические представления о веществе

Представление о прерывном, молекулярном строении вещества зародилось еще в глубокой древности. Но долгое время оно было лишь догадкой выдающихся умов, некоторым гипотетическим представлением. В наше время оно стало стройной теорией, хорошо проверенной тысячами экспериментов. Множество прямых и косвенных доказательств реальности молекул позволяют считать молекулярные представления о строении вещества установленными с достоверностью, которая может конкурировать со степенью достоверности коперниковой системы. Множество фактов заставляет нас считать, что между молекулами в веществе действуют силы отталкивания и притяжения, зависящие от расстояния между частицами. Это следует хотя бы из того, что, например, при сколько-нибудь заметном изменении объема твёрдого тела в нём возникают весьма значительные силы. Ясно, что растяжению тела препятствуют силы притяжения, а сжатию – силы отталкивания между его молекулами. Само существование трёх агрегатных состояний вещества – твёрдого, жидкого и газообразного – указывает на существование межмолекулярных сил. В твёрдом и жидком состоянии силы взаимодействия значительно меньше, так, что газ заполняет весь предоставленный ему объём, как бы велик он ни был.

Этот последний факт, как и многие другие, указывает еще на одну важную особенность частиц вещества. Способность газа распространяться по всему объёму сосуда, в котором он заключён, показывает, что молекулы газа находятся в постоянном движении. Ряд свойств газа показывает также, что эти движения молекул отличаются полной беспорядочностью, хаотичностью. Это значит, что не существует какого-либо направления для движения частиц, которое было бы преимущественным по сравнению с другими. Это хаотическое движение молекул носит название **теплового движения**. Свойство молекул вещества находиться в тепловом движении не является, конечно, особенностью именно газообразного состояния. Состояние непрерывного движения в равной мере свойственно также молекулам жидкостей и твёрдых тел, в которых, однако, молекулярные движения имеют несколько иной характер, чем в газах.

Таким образом, вещество состоит из мельчайших частиц – молекул, которые взаимодействуют друг с другом и находятся в непрерывном беспорядочном движении (тепловом движении).

В некоторых состояниях вещества (например, в плазме, в некоторых кристаллах) от молекул отрываются отрицательно заряженные частицы – электроны. В этом случае в тепловом движении участвуют как ионы, так и электроны.

**Молекула** – это наименьшая частица вещества, сохраняющая все его химические свойства. Не имеет, например смысла говорить о половине молекулы воды, и не потому, что молекула неделима, а потому, что если ее дробить, то получившееся при этом частицы уже не будут частицами воды. Сами молекулы в обычных условиях могут состоять из более простых частиц – **атомов**.

Мы упомянули здесь об «обычных условиях» потому, что молекулы можно расщепить на составляющие атомы. Такой процесс расщепления молекул

называется **диссоциацией**. Молекулы могут диссоциировать под действием высокой температуры и некоторых других внешних факторов.

Размеры молекул и атомов чрезвычайно малы. Их размеры имеют численное значение порядка  $10^{-10}$  м. Зато их число необычайно велико. В одном грамме воды, например, содержится  $3,3 \cdot 10^{22}$  молекул. Способы экспериментального определения размеров и числа молекул будут описаны в соответствующих разделах пособия.

Таковы в общих чертах основные представления молекулярно-кинетической теории строения вещества, лежащие в основе молекулярной физики, которой посвящено это пособие. Предметом молекулярной физики является изучение тех свойств вещества, которые обусловлены именно тем, что оно является совокупностью огромного числа движущихся молекул.

### Как устроены атомы

В пособии будут рассматриваться главным образом такие физические явления и процессы, для описания которых достаточно знать о частицах вещества только то, что они малы и что их много. Эти явления можно объяснить и качественно и количественно, если считать атомы (а из них составлены и молекулы) маленькими твёрдыми упругими шариками, отличающимися, например, от биллиардных шаров только своими размерами. На самом деле это, конечно, не соответствует действительности, но для рассматриваемых явлений это не существенно, так же как при изучении механических движений не играет роли тот факт, что тела состоят из отдельных частиц, а не являются сплошными.

Но в некоторых случаях нельзя обойтись такими простыми представлениями об атомах и необходимо учесть, что атом не является пределом деления вещества, чем-то, ни из чего не состоящим, как думали древние атомисты (слово «атом» и означает неделимый). Поэтому кратко рассмотрим современные представления о строении атомов, не приводя, однако те экспериментальные и теоретические данные, которые приводят к этим представлениям. О них можно узнать в других разделах курса физики.

Существует множество фактов, указывающих на то, что в атомах содержатся электрически заряженные частицы. Прежде всего, это следует из самого существования электрических и магнитных явлений. Как известно, электрические явления связаны с особым свойством тел – электрическим зарядом, а магнитные – с движущимися зарядами (электрическими токами). Так как носителями электрических и магнитных свойств всегда являются тела, а все тела, в конечном счете, состоят из атомов, то атомы непременно должны содержать движущиеся электрические заряды.

В настоящее время надёжно установлен не только сам факт существования в атомах движущихся заряженных частиц, но столь же надёжно выяснена и «архитектура» атома. Однако прежде чем представить современную картину строения атомов, необходимо рассказать кое-что о тех законах, которые управляют внутриатомными процессами. При изучении таких процессов выяснилось, что они не могут быть полностью описаны с помощью классической механики.



Более того, к ним как оказалось вообще неприменимы обычные наглядные представления о движении. В этом нет ничего удивительного, так как классическая механика родилась из наблюдений над движениями тел больших масштабов, которые мы можем видеть и ощущать. Частицы, из которых составлены атомы, малы даже по сравнению с самими атомами. Их размеры имеют порядок  $10^{-15}$  м, т.е. в сто миллионов раз меньше частицы, различимой в оптическом микроскопе. Массы же этих частиц лежат в пределах от  $10^{-25}$  до  $10^{-30}$  кг. Для сравнения укажем, что на лучших современных весах можно взвесить частицы, массы которых в  $10^{16}$ – $10^{21}$  раз больше.

Вся совокупность опытных данных показывает, что по характеру своего движения и по другим свойствам атомные частицы качественно отличаются от обычных тел, рассматриваемых в механике.

Частицы, образующие атомы, обладают особыми, так называемыми квантовыми свойствами, и подчиняются законам квантовой механики. Законы эти таковы, что нельзя дать точное и в то же время наглядное описание атомной системы и ее движений, такое описание, которое позволило бы нам представить себе ее геометрический и механический образы, с которыми, и связано то, что называется наглядностью. Поэтому здесь пренебрежём строгой точностью ради наглядности и дадим грубую, заведомо неверную, но зато похожую на механическую, картину строения атома.

Согласно этой «механизированной» модели атом представляет собой миниатюрное подобие планетной системы. В ее центре расположено «солнце» – **атомное ядро**, которое заряжено положительно, а вокруг него вращаются «планеты» – отрицательно заряженные частицы – **электроны**. Заметим, что электрический заряд, равный по абсолютной величине заряду электрона, является своеобразным «атомом» электрического заряда. В природе пока не обнаружены электрические заряды, меньшие заряда электрона, и все без исключения элементарные частицы, каковы ни были их свойства и природа (а таких частиц сейчас известно несколько десятков), либо вовсе не имеют заряда, либо обладают зарядом, численно равным или кратным заряду электрона ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  кулона). Понятно, что любой электрический заряд – положительный или отрицательный – непременно кратен заряду электрона, так что заряд электрона может служить своеобразной единицей электрического заряда.

Электрические силы притяжения, действующие между ядром и электронами, удерживают электроны вокруг ядра и играют в атоме ту же роль, какую в «настоящих» планетных системах играют силы всемирного тяготения.

Атомы различных химических элементов содержат в себе различное число электронов. Они отличаются друг от друга не только этим. Так как в нормальных условиях атомы электрически нейтральны, то это значит, что, сколько бы электронов ни содержалось в атоме того или иного элемента, их общий отрицательный заряд должен быть численно равен положительному заряду ядра атома. Значит не только числом электронов, окружающих ядро, но и величиной заряда ядра отличаются атомы различных элементов друг от друга. Как мы увидим, это различие более важно, чем разница в числе электронов.

Порядковый номер элемента в таблице Менделеева непосредственно даёт нам число электронов в атоме, когда он электрически нейтрален. Но атом может содержать и больше и меньше электронов, чем это требуется для компенсации заряда ядра. Дело в том, что от атома можно оторвать один или несколько электронов, что обычно не требует особенно больших усилий потому, что внешние, наиболее удалённые от ядра электроны сравнительно слабо связаны с ядром. Ядро при таком отрыве электронов не претерпевает никаких изменений, но заряд его уже не компенсируется зарядом оставшихся электронов и атом перестаёт быть нейтральным, и превращается в положительно заряженный **ион**. С другой стороны, к нейтральному атому может присоединиться «лишний» электрон, в результате чего атом станет отрицательно заряженным ионом, так как и в этом случае, заряд ядра остаётся неизменным.

Ионизация атомов может быть осуществлена различными способами: трением, нагреванием, освещением тел, ударами быстрых частиц, в результате химических реакций и т.д. От атома можно оторвать и все его электроны, но в случае многоэлектронных атомов для такой полной ионизации требуется значительно более сильное воздействие, чем для отрыва только внешних электронов.

Частицы, образующие атомы, – электроны и ядра, – имеют примерно одинаковые размеры – около  $10^{-15}$  м, в то время как атом в целом имеет размеры около  $10^{-10}$  м. Значит, частицы, из которых состоит атом, много меньше, чем он сам, также как размеры планет солнечной системы и самого Солнца малы по сравнению с радиусами планетных орбит.

Что касается масс атомных частиц, то ядра и электроны сильно отличаются друг от друга. Почти вся масса атома сконцентрирована в его ядре, так что на долю электронов остаются лишь тысячные доли от массы атома. Так, например, масса атома железа равна примерно  $9 \cdot 10^{-26}$  кг, а масса всех 26 электронов атома железа равна  $2,3 \cdot 10^{-29}$  кг, так что масса ядра железа более чем в 4 000 раз превосходит массу электронов атома.

Атомное ядро, несмотря на его крайне малые размеры, тоже имеет сложное строение. Оно состоит из частиц двух видов: положительно заряженных **протонов**, заряд которых численно равен заряду электрона, и незаряженных **нейтронов**; обе эти ядерные частицы часто объединяют одним именем – **нуклоны**. Масса этих частиц почти одинакова и равна примерно  $1,7 \cdot 10^{-27}$  кг. Очевидно, что число протонов в ядре равно числу электронов в электронной оболочке атома (когда он нейтрален).

Число протонов в ядре равно, следовательно, порядковому номеру элемента в таблице Менделеева, и именно оно определяет химическую индивидуальность атома, а не число электронов (последнее, как мы видели, можно легко изменить). Если, например, от атома железа оторвать один из его 26 электронов, то получится ион, но ион железа. Но если вырвать из ядра атома железа один протон (это можно сделать, но совсем другими средствами), то это приведет к коренному изменению свойств атома – атом железа превратится в атом марганца.

В настоящее время известно 105 различных атомов, т.е. существует 105 атомов с различным числом протонов, 105 различных химических элементов.

Что касается нейтронов, то в ядрах атомов одного и того же элемента их может быть и различное число. Так, например, в ядре атома железа помимо 26 протонов содержится 30 нейтронов (это наиболее распространенное ядро железа, число таких ядер в обычном железе составляет 91,7 %). Но есть и такие ядра железа, в которых число нейтронов (при тех же 26 протонах) равно 28, 31, и 32. И всё это – ядра железа, и химические свойства атомов с такими различными ядрами совершенно одинаковы. Неодинаковы только их массы. Такие атомы, ядра которых отличаются друг от друга только числом нейтронов в них, называются **изотопами**. Если считать, что атомы-изотопы – это разные атомы, то их число значительно больше и в настоящее время достигает 1 200. Следует заметить, что хотя атомы изотопов по своим химическим свойствам неотличимы друг от друга, некоторые свойства их ядер могут кардинальным образом различаться.

Ядерные частицы (протоны и нейтроны) связаны друг с другом в ядре особыми силами притяжения – ядерными силами, которые не являются ни электрическими, ни гравитационными. По своей величине они в миллионы раз превосходят те электрические силы, которые связывают между собой электроны и ядра. Именно ядерные силы и являются источником так называемой атомной энергии. Важной особенностью этих сил является то, что они действуют только тогда, когда расстояние между нуклонами очень мало – порядка размеров ядра. С увеличением расстояния они резко уменьшаются. Поэтому ядерные силы часто называют короткодействующими силами.

### **Некоторые особенности квантовых систем**

Как уже упоминалось, атомные частицы подчиняются особым законам – законам квантовой механики.

Главная особенность этих законов, отличающая их от законов классической физики, заключается в том, что величины, характеризующие движение частицы в атоме (например, энергия и импульс), могут принимать не любые, а только вполне определенные значения. Все же другие мыслимые значения запрещены. Так, например, если мы будем пользоваться описанной выше картиной строения атома (которая, правда, уже значительно устарела), то мы должны будем сказать, что радиусы орбит, на которых электроны обращаются вокруг ядра, могут иметь только определённые избранные значения, а на других орбитах электрон ни при каких условиях находиться не может.

Например, в простейшем из атомов, в атоме водорода, его единственный электрон в нормальных условиях вращается вокруг ядра на орбите радиусом  $r_0 = 5,3 \cdot 10^{-11}$  м и ни при каких обстоятельствах не может находиться еще ближе к ядру. Это – самое малое из дозволенных природой расстояний, на которое электрон в атоме водорода может отстоять от ядра. Вторая, более удалённая от ядра «разрешённая» орбита имеет радиус в 4 раза больший, чем первая, третья – в 9 раз, четвертая – в 16 раз и т.д. Но находиться где-нибудь между этими

дозволенными орбитами электрону «запрещено». Правда, электрон может переходить с одной из дозволенных орбит на другую, но такой переход должен происходить весьма странным с точки зрения обычной логики образом: при переходе с одной орбиты на другую электрон не может находиться ни в одном из промежуточных положений. Переход должен происходить скачком. Электрон как бы исчезает на одной орбите и появляется на другой. Разумеется, частица, следующая законам обычной механики, таким образом «скакать» не может.

Впрочем, как указывалось выше, картина атома как некоторой «планетарной» системы на самом деле не отражает истинного строения атома, и от этой картины лучше вообще отказаться, заменив ее иной, не столь наглядной.

Орбитам нашей механической модели атома можно сопоставить определённые значения энергии электрона, так как, двигаясь под действием сил притяжения к ядру, электрон обладает кинетической и потенциальной энергией, различной на разных орбитах. Поэтому вместо того, чтобы говорить об орбитах, на которых вращается электрон, часто говорят об **энергетических уровнях**, на которых он находится. То, что мы раньше называли переходом электрона с одной орбиты на другую, есть на самом деле не пространственный переход, а переход энергетический: переход из состояния с одним значением энергии в состояние с другой энергией. Разумеется, такие переходы тоже происходят скачком: энергия электрона изменяется сразу на определённую величину (квант), минуя все промежуточные значения. В классической механике такие скачки, конечно, немыслимы. В тех случаях, когда нам придётся использовать представления о строении атома, мы будем пользоваться концепцией энергетических уровней, а не электронных орбит.

На рисунке 1 представлена схема энергетических уровней электрона в атоме водорода. Каждая из горизонтальных линий условно представляет определённое значение энергии электрона. Нижний уровень соответствует наименьшей возможной энергии электрона, в атоме водорода она равна  $-13,6$  эВ ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж). На этом уровне электрон и находится в нормальных условиях (этот уровень соответствует ближайшей к ядру орбите в «планетарной» модели). Более высокие уровни – это тоже «дозволенные» уровни, но электрон может попасть на них, только поглотив энергию извне. Но и поглотив энергию и перейдя на более высокий уровень, который в этом случае называется возбуждённым, электрон недолго на нем остаётся. Через очень короткое время он вернётся на нижний уровень. При этом испускается порция (квант) света, энергия которой равна энергии возбуждения. Число «дозволенных» уровней бесконечно велико, но чем выше уровни, тем ближе (в энергетическом смысле) они друг к другу, как бы сливаясь в энергетическую полосу.

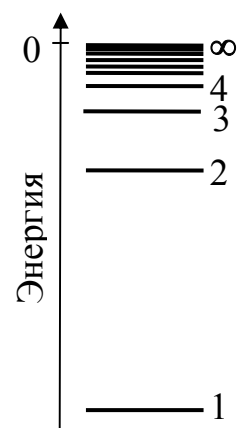


Рисунок 1

Теперь становится понятной природа сил, действующих между молекулами или атомами. Поскольку атомы состоят из электрически заряженных частиц с зарядами обоих знаков, то между ними должны действовать как силы притя-

жения, так и силы отталкивания. Но силы эти имеют очень сложный характер, так как в каждом атоме содержится много заряженных частиц.

## Глава 1 Кинетическая теория идеальных газов

### § 1.1 Идеальный газ

В большей части явлений, которым посвящено пособие, нет нужды не только считаться с квантовым характером внутриатомных процессов, но даже учитывать сам факт существования какой-то структуры атомов. В нашу задачу входит изучение систем, состоящих из большого числа молекул, рассматриваемых как тела малых размеров и масс.

Понятно, что теоретическое изучение таких молекулярных систем связано с большими трудностями, так как для этого требуется учесть все те силы, которые действуют на каждую молекулу со стороны всех других. Если предположить, что движения молекул являются чисто механическими и подчиняются законам механики, то для полного описания всякой молекулярной системы нужно как будто бы решить механическую задачу о движении всех молекул под действием всех заданных сил. Это значит, что должны быть написаны и решены уравнения движения, число которых равно числу молекул в данной системе (точнее говоря, число уравнений должно быть втрое больше, поскольку положение молекулы определяется тремя координатами, т.е. каждая молекула имеет три степени свободы). Если учесть, что например в  $1 \text{ см}^3$  газа при обычных условиях содержится  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул, то станет ясно, что не только решить, но даже написать такое чудовищное число уравнений невозможно.

Но именно грандиозность числа молекул делает ненужным рассмотрение движения каждой из них в отдельности. При таком большом числе частиц оказывается возможным ограничиться знанием лишь средних значений величин, характеризующих их движение: их средней скорости, средней энергии и т.д. Этим приёмом будем пользоваться при изучении молекулярных систем.

Из трёх агрегатных состояний, в которых может находиться всякое вещество, наиболее простым является газообразное, так как в этом случае силы, действующие между молекулами, очень малы, и ими при определённых условиях можно пренебречь. Поэтому изложение молекулярной физики начнём с рассмотрения свойств газов. При этом сначала будем полагать, что межмолекулярные силы в них даже не малы, а полностью отсутствуют. Для простоты пренебрежём также размерами молекул, т.е. будем считать их материальными точками. Газ, обладающий такими же свойствами, как и совокупность невзаимодействующих материальных точек, называется **идеальным газом**.

В дальнейшем при рассмотрении реальных газов мы снимем эти произвольные допущения, оправданные, впрочем, тем, что при определённых условиях такая идеализация не уводит нас слишком далеко от действительности.

Итак, **идеальный газ** – теоретическая модель газа, в которой пренебрегают размерами и взаимодействием молекул и учитывают лишь упругие столкновения. Это первоначальное представление было расширено, в более широком по-



нимании идеальный газ состоит из молекул, представляющих собой упругие сферы радиуса  $R$  или эллипсоиды, у них проявляется атомная структура. Расширенная модель идеального газа позволяет учитывать не только поступательное, но и вращательное и колебательное движения его частиц, вводить в рассмотрение наряду с центральным и нецентральное соударение, исследовать переходы энергии из одной степени свободы в другую и т.д.

Наиболее полно изучены свойства достаточно разреженных газов, в которых расстояния между молекулами (при нормальных условиях  $\sim 10$  нм) значительно больше радиуса действия сил межмолекулярного взаимодействия (менее  $0,5 - 1$  нм). Сближение молекул на расстояния меньше радиуса действия межмолекулярных сил принято трактовать как столкновение молекул, а общий объём, в котором эти силы сказываются, – как собственный объём молекул, который в разреженных газах пренебрежимо мал ( $\sim 10$  нм<sup>3</sup>). В этом случае молекулы можно рассматривать как невзаимодействующие материальные точки, а модель газа, состоящего из них, называют идеальным газом. У разреженных газов молекулы практически не взаимодействуют между собой. Они лишь иногда сталкиваются друг с другом. Однако эти столкновения происходят настолько редко, что большую часть времени молекулы движутся свободно. Газ, взаимодействием между молекулами которого можно пренебречь, называют **идеальным**.

Чем слабее взаимодействие между частицами, тем свойства газа ближе к свойствам идеального газа. Все газы при не слишком высоких давлениях и при не слишком низких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу, и их поведение можно описывать уравнениями, выведенными для идеального газа.

При повышении плотности газа его свойства перестают быть идеальными, процессы столкновения играют всё большую роль и размерами молекул и их взаимодействием уже нельзя пренебречь. Такой газ называют **реальным** (неидеальным). Размеры молекул являются одной из основных характеристик неидеального газа.

Все газы из-за малости межмолекулярных взаимодействий способны неограниченно расширяться и занимать весь предоставленный им объём, причём для смеси газов это справедливо по отношению к каждой компоненте смеси.

Нашей первой задачей будет изложение кинетической теории идеальных газов. В молекулярно-кинетической теории пользуются моделью идеального газа, согласно которой считают, что:

- собственный объём молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объёмом сосуда;
- между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

## § 1.2 Давление газа

Молекулы газа сталкиваются с поверхностью любого тела, находящегося в газе, в частности со стенками сосуда, содержащего газ, и друг с другом. Столк-

новения молекул между собой играют очень большую роль в поведении газа. Сейчас рассмотрим столкновения молекул со стенками сосуда или с любой другой поверхностью, соприкасающейся с газом. Именно взаимодействием молекул газа и стенок определяется сила, испытываемая стенками со стороны газа, которая тем больше, чем больше площадь ее поверхности. Чтобы не пользоваться величиной, зависящей от такого случайного фактора, как размеры стенки, принято характеризовать действие газа на стенку не силой, а давлением  $P$ , т.е. силой  $F$ , отнесенной к единице площади  $S$  поверхности стенки, нормальной к этой силе:

$$P = \frac{F}{S}.$$

Свойство газа оказывать давление на стенки содержащего его сосуда – одно из основных свойств газа. Именно своим давлением газ чаще всего и обнаруживает свое присутствие. Поэтому величина давления является одной из главных характеристик газа.

Давление газа на стенки сосуда, как это предположил ещё в XVIII в. Даниил Бернулли, есть следствие бесчисленных столкновений газовых молекул со стенками. Эти удары молекул о стенки приводят к некоторым смещениям частиц материала стенки, и значит, к её деформации. Деформированная же стенка действует на газ упругой силой, направленной в каждой точке перпендикулярно к стенке. Эта сила равна по абсолютному значению и противоположна по направлению силе, с которой газ действует на стенку.

Хотя силы взаимодействия каждой отдельной молекулы с молекулами стенки при столкновении неизвестны, тем не менее, законы механики позволяют найти среднюю силу, возникающую от совокупного действия всех молекул газа, т.е. найти давление газа.

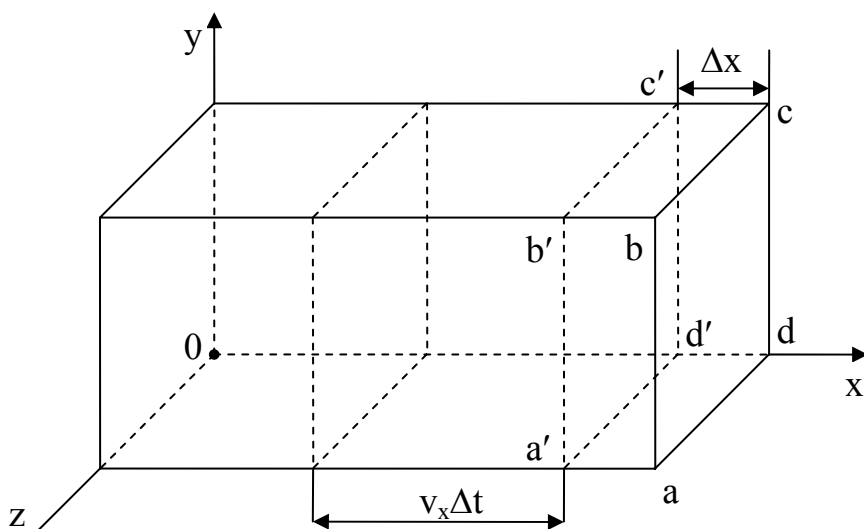


Рисунок 2

Допустим, что газ заключен в сосуд, имеющий форму параллелепипеда (рисунок 2), и что газ находится в состоянии равновесия. В данном случае это означает, что газ как целое покоится относительно стенок сосуда: число молекул, движущихся в каком-нибудь произвольном направлении, в среднем равно

числу молекул, скорости которых направлены в противоположную сторону.

Вычислим давление газа на одну из стенок сосуда, например на правую боковую стенку  $abcd$ . Направим координатную ось  $Ox$  вдоль ребра параллеле-

пипеда перпендикулярно к стенке  $abcd$ , как это показано на рисунке 2. Как бы ни были направлены скорости  $v$  молекул, нас будут интересовать только проекции  $v_x$  скоростей молекул на ось  $Ox$ : по направлению к стенке  $abcd$  молекулы движутся со скоростью  $v_x$ .

Выделим мысленно слой газа толщиной  $\Delta x$ , прилегающий к выбранной стенке. На него со стороны деформированной стенки действует упругая сила  $F$ . С такой же по абсолютному значению силой и газ действует на стенку. По второму закону Ньютона импульс силы  $F\Delta t$  (где  $\Delta t$  – некоторый произвольный промежуток времени) равен изменению импульса газа в выбранном слое. Так как газ находится в состоянии равновесия, то слой никакого приращения импульса в направлении импульса силы (против направления оси  $Ox$ ) не получает. Происходит это потому, что из-за молекулярных движений выделенный слой получает импульс противоположного направления и, конечно, такой же по абсолютному значению. Его нетрудно вычислить.

При беспорядочных движениях газовых молекул за время  $\Delta t$  в выбранный слой газа слева направо входит некоторое число молекул и столько же молекул выходит из него в обратном направлении – справа налево. Входящие молекулы несут с собой определённый импульс. Выходящие молекулы несут такой же импульс противоположного знака, так что импульс, получаемый слоем, равен алгебраической сумме импульсов входящих в слой и выходящих из него молекул.

Найдём число молекул, входящих в слой слева за время  $\Delta t$ .

За это время к границе  $a'b'c'd'$  слева могут подойти те молекулы, которые находятся от нее на расстоянии, не превышающем  $v_x\Delta t$ . Все они находятся в объёме параллелепипеда с площадью основания  $S$  (это площадь рассматриваемой стенки) и длиной  $v_x\Delta t$ , т.е. в объёме  $Sv_x\Delta t$ . Если в единице объёма содержится  $n$  молекул, то в указанном объёме находится  $nSv_x\Delta t$  молекул. Но из них лишь половина движется слева направо и попадет в слой. Другая половина движется от него и в слой не попадает. Следовательно, за время  $\Delta t$  в слой слева направо входит  $\frac{1}{2}nSv_x\Delta t$  молекул. Каждая из молекул обладает импульсом  $mv_x$  ( $m$  – масса молекулы), и общий импульс, вносимый ими в слой, равен:

$$\frac{1}{2}nmv_x^2S\Delta t.$$

За это же время слой покидает, двигаясь справа налево, такое же число молекул с таким же общим импульсом, но обратного знака. Таким образом, из-за прихода в слой молекул с положительным импульсом и ухода из него молекул с отрицательным импульсом общее изменение импульса слоя равно:

$$\frac{1}{2}nmv_x^2S\Delta t - \left(-\frac{1}{2}nmv_x^2S\Delta t\right) = nmv_x^2S\Delta t.$$



Это изменение импульса слоя и компенсирует то изменение, которое должно было бы произойти под действием импульса силы  $F\Delta t$ . Поэтому можем написать:

$$F\Delta t = nmv_x^2 S\Delta t.$$

Разделив обе части этого равенства на  $S\Delta t$ , получаем:

$$\frac{F}{S} = P = nmv_x^2. \quad (2.1)$$

До сих пор предполагали, что у всех молекул газа одинаковые проекции скорости  $v_x$ . В действительности это, конечно, не так. И скорости молекул  $v$ , и их проекции  $v_x$  на ось  $Ox$  у разных молекул, разумеется, различны. Вопрос о различии скоростей газовых молекул в условиях равновесия подробно рассмотрим позже в § 1.9. Пока же учтём различие скоростей молекул и их проекций на оси координат тем, что заменим величину  $v_x^2$ , входящую в формулу (2.1), ее средним значением  $\overline{v_x^2}$ , так что формуле для давления газа (2.1) придадим вид:

$$P = nm\overline{v_x^2}. \quad (2.2)$$

Для скорости  $v$  каждой молекулы можно написать:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

поэтому

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (2.3)$$

(последнее равенство означает, что порядок проведения операций усреднения и сложения можно изменять).

Из-за полной беспорядочности молекулярных движений можно полагать, что средние значения квадратов проекций скоростей на три оси координат равны друг другу, т.е.

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}. \quad (2.3)$$

А это значит, принимая во внимание (2.3), что

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}.$$

Подставив это выражение в формулу (2.2), получаем:

$$P = \frac{1}{3} nm \overline{v^2},$$

Или, умножив и разделив правую часть этого равенства на двойку, имеем:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{mv^2}{2}. \quad (2.4)$$

Приведенные простые рассуждения справедливы для любой стенки сосуда и для любой площадки, которую мысленно можно поместить в газ. Во всех случаях мы получим для давления газа результат, выраженный формулой (2.4). Величина  $m\overline{v^2}/2$  в формуле (2.4) представляет собой среднюю кинетическую энергию одной молекулы газа. Следовательно, **давление газа равно двум третям средней кинетической энергии молекул, содержащихся в единице объёма газа.**

Это – один из важнейших выводов кинетической теории идеального газа. Формула (2.4) устанавливает связь между молекулярными величинами, т.е. величинами, относящимися к отдельной молекуле, и величиной давления, характеризующей газ как целое, – величиной макроскопической, непосредственно измеряемой на опыте. Уравнение (2.4) иногда называют **основным уравнением кинетической теории идеальных газов.**

Важно подчеркнуть, что давление газа определяется средней кинетической энергией его молекул. Это значит, что давление газа – величина, органически связанная с тем, что газ состоит из большого числа молекул. Поэтому не имеет смысла говорить, например, о давлении, создаваемом одной или немногими молекулами. О таких понятиях, которые имеют смысл только для систем, содержащих очень много частиц, говорят, что они имеют **статистический** характер.

Отметим, что в формулу (2.4) входит величина среднего значения квадрата скорости поступательного движения  $\overline{v^2}$ . Величину, равную корню квадратному из него, называют **средней квадратичной скоростью**  $\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$ . Если в системе (сосуде), состоящей из  $n$  молекул, скорость  $i$ -ой молекулы равна  $v_i$ , то средняя квадратичная скорость определяется следующим образом:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n}}.$$

А средняя (среднеарифметическая) скорость  $\overline{v}$ , как известно, определяется выражением:

$$\overline{v} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n}.$$

Таким образом, с точки зрения молекулярно-кинетической теории давление является результатом многочисленных ударов молекул газа о стенки сосуда, усреднённых по времени и площади поверхности сосуда. При нормальных условиях и макроскопических размерах сосуда число ударов об  $1 \text{ см}^2$  поверхности  $\sim 10^{24}$  в секунду, заметных флуктуаций даже за время  $\sim 10^{-13}$  с не возникает.

**Единицы давления.** В системе единиц СИ за единицу давления принимается давление, при котором на  $1 \text{ м}^2$  поверхности нормально к ней действует сила в 1 ньютон. Такая единица называется паскаль (сокращенно Па):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Далее приведем некоторые внесистемные единицы измерения давления.

Ввиду малости единицы измерения 1 Па пользуются единицей в  $10^5$  раз большей, которой присвоено название бар:

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}.$$

В технике широко применяется единица давления, называемая технической атмосферой (сокращенно ат), равная  $1 \text{ кгс/см}^2$ . Эта единица лишь на 2 % отличается от бара:

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98\,066,5 \text{ Па} \approx 0,98 \text{ бар}.$$

Иногда используется единица – физическая атмосфера (сокращенно атм), равная давлению столба ртути высотой 760 мм. Считая плотность ртути равной  $13\,595,1 \text{ кг/м}^3$  и ускорение свободного падения равным  $9,80665 \text{ м/с}^2$ , получаем:

$$1 \text{ атм} = 101\,325 \text{ Па} \approx 1,01 \text{ бар}.$$

В области низких давлений применяется единица давления тор (миллиметр ртутного столба):

$$1 \text{ тор} = \frac{1}{760} \text{ атм} = 133,322 \text{ Па}.$$

### § 1.3 Температура

Из уравнения (2.4)

$$P = \frac{2}{3} n \overline{mv^2}$$

следует, что давление идеального газа пропорционально его плотности (плотность газа определяется числом молекул  $n$  в единице объёма) и средней кинетической энергии поступательного движения молекул. При неизменном  $n$ , а значит, при неизменном объёме  $V$  газа ( $n = N/V$ , где  $N$  – число молекул в сосуде) давление газа зависит только от средней кинетической энергии молекул.

Между тем из опыта известно, что при постоянном объёме давление газа можно изменять только одним способом: его нагреванием или охлаждением; при нагревании газа его давление растёт, при охлаждении уменьшается. Нагретый или охлаждённый газ, как и всякое тело, характеризуется своей температурой – особой величиной, которой издавна пользуются в науке, технике и быту. Следовательно, между температурой и средней кинетической энергией молекул должна существовать связь.

До выяснения этой связи посмотрим, что представляет собой температура как физическая величина.

В повседневной жизни температура для нас – величина, которая отличает «горячее» от «холодного». И первые представления о температуре возникли из ощущений тепла и холода. Мы можем использовать эти знакомые нам ощущения, чтобы выяснить главную особенность температуры как физической величины.

Возьмём три сосуда. В один из них нальём горячую воду, в другой – холодную, а в третий – смесь горячей и холодной воды. Опустим одну руку, например правую, в сосуд с горячей водой, а левую – в сосуд с холодной. Подержав руки некоторое время в этих сосудах, перенесём их в третий сосуд. Каковы же наши ощущения о воде в этом сосуде? Правой руке покажется, что вода в нём холодная, а левой – что она теплая. Но эти различные ощущения исчезнут, если подержать обе руки в третьем сосуде подольше. Через некоторое время обе руки станут испытывать совершенно одинаковые ощущения, соответствующие температуре воды в третьем сосуде.

Дело в том, что руки, побывавшие сначала в сосудах с горячей и холодной водой, имели различные температуры, отличные и одна от другой, и от температуры в третьем сосуде. И требуется некоторое время, чтобы температура каждой из рук стала равной температуре воды, в которую они погружены. Тогда и температуры рук станут одинаковы. Одинаковы будут и ощущения. Необходимо, как говорят, чтобы в системе тел «правая рука – левая рука – вода» установилось **тепловое равновесие**.

Этот простой опыт показывает, что **температура** – это величина, количественно характеризующая состояние теплового равновесия: у тел, находящихся в состоянии теплового равновесия, температуры одинаковы. И наоборот, тела с одинаковой температурой находятся в тепловом равновесии друг с другом. **А если два тела находятся в тепловом равновесии с каким-нибудь третьим телом, то оба тела находятся в тепловом равновесии и между собой**. Это важное утверждение является одним из основных законов природы. И на нём основана сама возможность измерения температуры. В описанном опыте, например, речь шла о тепловом равновесии обеих рук, после того как каждая из них оказалась в тепловом равновесии с водой.

Если тело или система тел не находится в состоянии теплового равновесия и если система изолирована (не взаимодействует с другими телами), то через некоторое время состояние теплового равновесия устанавливается само собой. Состояние теплового равновесия – это и есть состояние, в которое переходит любая изолированная система. После того как это состояние достигнуто, оно

уже больше не изменяется и никакие макроскопические изменения в системе не происходят. Одним из признаков состояния теплового равновесия и является равенство температур всех частей тела или всех тел системы. Известно, что в процессе установления теплового равновесия, т.е. при выравнивании температуры двух тел, происходит передача теплоты от одного тела к другому. Следовательно, с экспериментальной точки зрения температура тела – это величина, которая определяет, будет ли оно другому телу с иной температурой передавать теплоту или получать от него теплоту.

Температура занимает несколько особое место в ряду физических величин. Это и неудивительно, если учесть, что в ту эпоху, когда эта величина появилась в науке, не было известно, какие именно процессы в веществе вызывают ощущения тепла и холода.

Своеобразие температуры как физической величины состоит, прежде всего, в том, что она, в отличие от многих других величин, **не аддитивна**. Это значит, что если мысленно разделить тело на части, то температура всего тела не равна сумме температур его частей. Этим температура отличается от таких, например, величин, как длина, объём, масса, значения которых для всего тела складываются из значений соответствующих величин для его частей.

Вследствие этого температуру тела нельзя измерять непосредственно, как измеряют длину или массу, т.е. методом сравнения с эталоном. Если об одном стержне можно сказать, что его длина во столько-то раз больше длины другого стержня, то вопрос о том, сколько раз одна температура содержится в другой, не имеет смысла.

Для измерения температуры издавна пользуются тем, что при изменении температуры тела изменяются и его свойства. Следовательно, изменяются величины (термодинамические параметры), характеризующие эти свойства. На этом основано измерение температуры при помощи термометра. Поэтому для создания **термометра**, выбирают какое-либо вещество (**термометрическое вещество**) и определенную величину, характеризующую свойство вещества (**термометрическую величину**). Выбор того и другого произволен. По этой причине в качестве термометра можно взять любое тело, термодинамические параметры которого зависят от температуры. В бытовых термометрах, например, термометрическим веществом является ртуть, а термометрической величиной – длина ртутного столбика.

Для того чтобы величине температуры можно было сопоставить определенные числовые значения, нужно ещё задаться той или иной зависимостью термометрической величины от температуры. Выбор этой зависимости тоже произволен: ведь пока нет термометра, нельзя опытным путём установить эту зависимость. В случае ртутного термометра, например, избирается линейная зависимость длины ртутного столбика (объёма ртути) от температуры.

Остаётся ещё установить единицу температуры – градус (хотя в принципе её можно было бы выражать в тех же единицах, в которых измеряется термометрическая величина, например по ртутному термометру – в сантиметрах). Величина градуса избирается тоже произвольно (как и термометрическое вещество, термометрическая величина и вид функции, связывающей термометриче-

скую величину с температурой). Размер градуса устанавливается следующим образом. Выбирают, опять-таки произвольно, две температуры (их называют реперными точками) – обычно это температуры таяния льда и кипения воды при атмосферном давлении. Затем делят этот температурный интервал на некоторое (тоже произвольное) число равных частей – градусов, а одной из этих температур приписывают определенное числовое значение. Тем самым определяется значение второй температуры и любой промежуточной. Таким образом, получают **температурную шкалу**. Понятно, что с помощью описанной процедуры можно получить бесчисленное множество различных термометров и температурных шкал.

Современная термометрия основана на шкале идеального газа, устанавливаемой с помощью газового термометра. В принципе газовый термометр – это закрытый сосуд, наполненный идеальным газом и снабжённый манометром для измерения давления газа. Значит, термометрическим веществом в таком термометре служит идеальный газ, а термометрической величиной – давление газа при постоянном объёме. Зависимость давления от температуры принимается (именно принимается!) линейной. Такое допущение приводит к тому, что отношение давлений при температурах кипения воды ( $P_k$ ) и таяния льда ( $P_0$ ) равно отношению этих самых температур:

$$\frac{P_k}{P_0} = \frac{T_k}{T_0}.$$

Отношение  $P_k/P_0$  легко определить из опыта. Многочисленные измерения показали, что

$$P_k/P_0 = 1,3661.$$

Таково, следовательно, и значение отношения температур:

$$T_k/T_0 = 1,3661.$$

Размер градуса выбирается делением разности  $T_k - T_0$  на сто частей:

$$T_k - T_0 = 100.$$

Из последних двух равенств следует, что температура таяния льда по выбранной шкале равна  $T_0 = 273,15$  градусов, а температура кипения воды равна  $T_k = 373,15$  градусов. Для того чтобы при помощи газового термометра измерить температуру какого-нибудь тела, надо привести тело в контакт с газовым термометром и, дождавшись равновесия, измерить давление  $P$  газа в термометре. Тогда температура тела  $T$  определяется по формуле:

$$T = \frac{273,15}{P_0} P,$$

где  $P_0$  – давление газа в термометре, помещённом в тающий лёд.

В практике газовым термометром пользуются крайне редко. На него возложена более ответственная роль – по нему градуируются все употребляемые вторичные термометры. К числу распространенных вторичных термометров относятся жидкостные термометры, термометры сопротивления, термометры, основанные на температурной зависимости ЭДС термопар, электрической ёмкости сегнетоэлектрика, падения напряжения на полупроводниковом диоде и другие.

Температура, равная нулю в нашей шкале, – это, очевидно, температура, при которой давление идеального газа было бы равно нулю (это, конечно, не значит, что идеальный газ, в самом деле, можно настолько охладить, что его давление станет равным нулю). Если при нуле температурной шкалы термометрическая величина обращается в нуль, то такая шкала называется **абсолютной шкалой**, а температура, отсчитанная по такой шкале, называется **абсолютной температурой**. Описанная здесь шкала газового термометра является абсолютной. Её часто называют также **шкалой Кельвина**, а единицу температуры в этой шкале – градусом Кельвина или просто кельвином (обозначение: К).

В технике и быту часто используется температурная **шкала Цельсия**, в которой температуре таяния льда приписывается значение нуль, а температуре кипения воды – 100 градусов. Температура  $t$ , отсчитываемая по шкале Цельсия, связана с абсолютной температурой  $T$  очевидным соотношением:

$$t = T - 273,15.$$

Определение температурной шкалы неоднозначно и зависит от способа градуировки термометра. Общепринятой является температурная **шкала Кельвина**. В некоторых зарубежных странах также используют температурную шкалу Фаренгейта (обозначение  $^{\circ}\text{F}$ ), в которой первой реперной точке – температуре плавления льда приписывают значение  $32^{\circ}\text{F}$ , второй реперной точке – температуре кипения воды при атмосферном давлении –  $212^{\circ}\text{F}$ . Разность температур между этими реперными точками определяет основной интервал температурной шкалы Фаренгейта  $180^{\circ}\text{F}$ . Температура  $t$ , отсчитываемая по шкале Цельсия, связана с температурой  $T_{\text{F}}$  по шкале Фаренгейта соотношением:

$$t = \frac{5}{9}(T_{\text{F}} - 32).$$

Из того, что здесь было сказано, следует, что температура характеризует тепловое равновесие тел: при переходе к состоянию равновесия температуры тел выравниваются, а в состоянии равновесия температура всех частей тела или системы тел одна и та же. С этим связана сама процедура измерения температуры. Ведь для того, чтобы измерить значение термометрической величины при температурах таяния льда и кипения воды, термометр необходимо привести в состояние равновесия с тающим льдом и с кипящей водой, а чтобы измерить



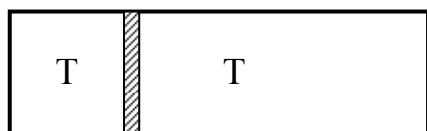
температуру какого-нибудь тела, необходимо обеспечить возможность установления теплового равновесия между термометром и телом. И только тогда, когда такое равновесие достигнуто, можно считать, что температура тела равна температуре, отсчитанной по термометру.

Итак, температура – это то, что выравнивается в процессе установления равновесия в системе. Но само понятие выравнивания означает, что от одной части системы что-то передаётся к другой. Полученное нами уравнение (2.4) для давления идеального газа позволит нам понять, что представляет это «что-то».

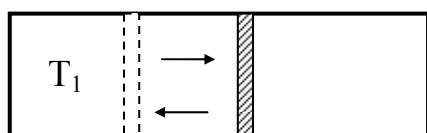
Представим себе изолированный цилиндр с идеальным газом, в котором уже установилось тепловое равновесие, так что температура во всех частях объема газа одинакова. Допустим, что без нарушения равновесия в цилиндр помещён подвижный поршень, разделяющий объём газа на две части (рисунок 3а). В условиях равновесия поршень будет находиться в покое. Это значит, что при равновесии не только температуры, но и давления по обе стороны поршня одинаковы. Согласно уравнению (2.4) одинаковы и величины  $n\overline{mv^2}$ :

$$\left( n \frac{\overline{mv^2}}{2} \right)_{\text{слева}} = \left( n \frac{\overline{mv^2}}{2} \right)_{\text{справа}} .$$

Нарушим теперь временно изоляцию нашего цилиндра с газом и нагреем одну из его частей, например ту, что по левую сторону от поршня, после чего снова восстановим изоляцию. Теперь газ в цилиндре не находится в равновесии – температура  $T_1$  в левом отделении выше, чем в правом (рисунок 3б).



а)



б)

Рисунок 3

Но система изолирована, и сам собой начнётся переход к состоянию равновесия. При этом мы увидим, что поршень начнёт двигаться слева направо. А это значит, что совершается работа и, следовательно, от газа в левом отделении газу в правом отделении через поршень передаётся энергия. Значит, то, что передаётся в процессе установления теплового равновесия, – это энергия. Через некоторое

время движение поршня прекратится. Но остановится поршень после ряда колебаний. И остановится он в том же самом месте, где он находился до того, как левое отделение цилиндра подверглось нагреванию. В цилиндре с газом вновь установилось состояние равновесия. Но теперь температура газа и его давление, конечно, выше, чем до нагревания.

Так как поршень остановился на прежнем месте, то концентрация  $n$  молекул (т.е. число молекул в единице объёма) осталась прежней. Это значит, что в результате нагревания газа изменилась только средняя кинетическая энергия его молекул. **Выравнивание температуры, следовательно, означает выравнивание значений средней кинетической энергии молекул** по обе стороны поршня. При переходе к равновесию от одной части газа к другой передаётся энергия,



но выравнивается не энергия всего газа как целого, а средняя кинетическая энергия, отнесённая к одной молекуле. Именно средняя кинетическая энергия молекулы ведёт себя как температура.

Эти две величины сходны ещё и тем, что средняя кинетическая энергия, как и температура, – величина не аддитивная, она одинакова для всего газа и для любой его части (содержащей достаточно большое число молекул). Энергия же всего газа – величина, конечно, аддитивная, – она складывается из энергий его частей.

Не следует думать, что наши рассуждения относятся только к случаю, когда газ в цилиндре разделён на две части поршнем. И без поршня молекулы при столкновениях между собой обменивались бы энергией, и она передавалась бы от более нагретой части к менее нагретой части, в результате чего выравнивались бы средние кинетические энергии молекул. Поршень лишь делает передачу энергии как бы видимой, так как его движение связано с совершением работы.

Приведённые простые, хотя и не очень строгие рассуждения показывают, что величина, давно известная под названием температуры, в действительности представляет собой среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул. То, что мы получили этот результат для случая идеального газа, не меняет дела. Нет оснований считать, что это не относится также к жидким и твёрдым телам.

Энергию, которой обмениваются тела, имеющие различную температуру, называют теплотой. Таким образом, при взаимодействии двух тел, имеющих различную температуру, происходит процесс установления равновесия между ними, сопровождающийся теплопередачей. При этом количество теплоты, отданное одним телом, равно количеству теплоты, приобретённому другим. На этом основано количественное измерение переданной теплоты при помощи калориметра, который служит источником или стоком тепла. В качестве калориметра можно использовать любое тело, термодинамические параметры которого зависят от количества переданной ему теплоты.

В применении к идеальному газу удобнее считать, что температура равна двум третям средней кинетической энергии молекул, так как это упростит вид формулы (2.4) для давления газа. Обозначив определённую таким образом температуру буквой  $\vartheta$ , можем написать:

$$\frac{2}{3} \overline{mv^2} = \vartheta.$$

Тогда уравнение (2.4) примет простой вид:

$$P = n\vartheta.$$

При таком определении температуры она, очевидно, должна измеряться в единицах энергии (в системе СИ – в джоулях). Однако практически пользоваться такой единицей температуры неудобно. При пользовании ею обычно встре-

чающиеся температуры выражались бы ничтожно малыми числами. Например, температура таяния льда равнялась бы  $5,65 \cdot 10^{-21}$  Дж. К тому же и измерение температуры, выражаемой в джоулях, было бы очень затруднительно.

По этой причине, а также потому, что величиной температуры пользовались ещё задолго до того, как были развиты молекулярно-кинетические представления, разъяснившие истинный смысл температуры, её всё-таки измеряют в старых единицах – градусах, несмотря на условность этой единицы.

Но если измерять температуру в градусах, то необходимо ввести соответствующий коэффициент, переводящий единицы энергии в градусы. Его принято обозначать буквой  $k$ . Тогда связь между температурой  $T$ , измеряемой в градусах, и средней кинетической энергией выражается равенством:

$$\frac{2}{3} \frac{\overline{mv^2}}{2} = kT,$$

отсюда

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT. \quad (3.1)$$

Напомним, что формула (3.1) относится к молекуле, которую мы условились считать подобной точке. Её кинетическая энергия – это кинетическая энергия **поступательного** движения, скорость которого может быть разложена на три составляющие. Вследствие хаотичности молекулярных движений можно принять, что энергия молекулы равномерно распределяется по всем трём составляющим скорости, так что на каждую из них приходится энергия  $\frac{1}{2} kT$ .

Множитель  $k$ , выражающий соотношение между единицей энергии и единицей температуры – кельвином, называется постоянной Больцмана. Понятно, что его числовое значение должно быть установлено экспериментально. Ввиду особой важности этой постоянной она была определена многими методами. Её значение равно:

$$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Из формулы (3.1) следует, что нулём температуры является температура, при которой средняя кинетическая энергия беспорядочных движений молекул равна нулю, т.е. температура, при которой хаотические движения молекул прекращаются. Это и есть тот абсолютный нуль, начало отсчёта абсолютной температуры, о котором упоминалось выше. Из формулы (3.1) вытекает также, что отрицательных температур быть не может, так как кинетическая энергия – существенно положительная величина.

Так как температура определяется средней энергией движения молекул, то она, как и давление, является статистической величиной. Нельзя говорить о «температуре» одной или немногих молекул, о «горячих» или «холодных» мо-

лекулах. Не имеет смысла, например, говорить о температуре газа в космическом пространстве, где число молекул в единице объёма настолько мало, что они не образуют газа в обычном смысле слова и нельзя говорить о средней энергии движения молекул.

Энергии, связанные с хаотическими движениями частиц газа, очень малы. Из формулы (3.1) и из приведённого значения постоянной Больцмана видно, что температуре в 1 К соответствует энергия, равная  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж. При наименьшей достигнутой к настоящему времени температуре (порядка  $10^{-6}$  К) средняя энергия молекул равна приблизительно  $10^{-29}$  Дж. Даже наивысшей искусственно полученной – около 100 миллионов градусов, развивающейся при взрыве ядерной бомбы, – соответствует ничтожная энергия частиц  $\sim 10^{-15}$  Дж.

В СИ единица температуры (кельвин) устанавливается не на основе температурного интервала «температура тающего льда – температура кипящей воды», а на основе интервала «абсолютный нуль – температура тройной точки воды». Тройная точка воды – это температура, при которой вода, водяной пар и лёд находятся в равновесии. Температуре тройной точки воды приписывается значение 273,16 К (точно). Таким образом, **1 кельвин равен 1/273,16 части температурного интервала от абсолютного нуля температуры до температуры тройной точки воды.**

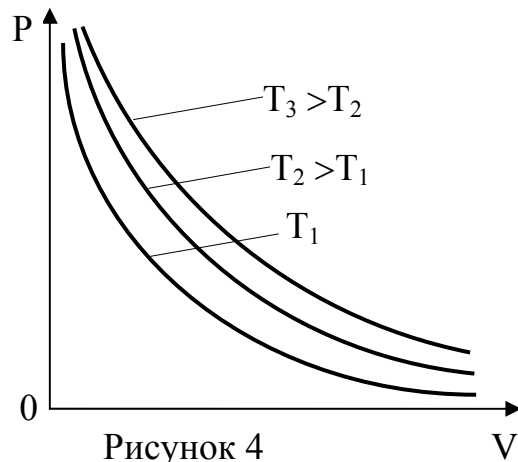
Так как температура тройной точки воды равна  $0,01$  °С, то размеры градуса в шкалах Цельсия и Кельвина одинаковы и любая температура может выражаться либо в градусах Цельсия (°С), либо в кельвинах (К). Это означает, что изменения температуры по обоим шкалам численно совпадают – так, например, если температура увеличилась на  $5$  °С, то это равносильно увеличению температуры на 5 К.

## § 1.4 Уравнение состояния идеального газа

Развитые выше молекулярно-кинетические представления и полученные на их основе уравнения позволяют найти те соотношения, которые связывают между собой величины, определяющие состояние газа. Этими величинами являются параметры состояния. **Параметры состояния** (термодинамические параметры) – физические величины, характеризующие равновесное состояние термодинамической системы: температура, объём, давление, плотность. Различают **экстенсивные** параметры состояния, пропорциональные объёму (или массе) системы (внутренняя энергия  $U$ , энтропия  $S$ , энтальпия  $H$ , энергия Гельмгольца или свободная энергия  $F$ , энергия Гиббса  $G$ ), и **интенсивные** параметры состояния, не зависящие от массы системы (температура  $T$ , давление  $P$ , концентрация  $n$ , химический потенциал  $\mu$ ). В состоянии термодинамического равновесия параметры состояния не зависят от времени и пространственных координат. В неравновесном (квазиравновесном) состоянии параметры состояния могут зависеть от координат и от времени.

Термодинамическое состояние определяется заданием совокупности независимых параметров состояния. Однако не все параметры состояния являются независимыми. **Уравнение состояния** идеального газа выражает зависимые па-

параметры состояния через независимые; например, давление является функцией температуры и объёма  $P = P(V, T)$ . Это значит, что состояние газа определяется только двумя параметрами (например, давлением и объёмом, давлением и температурой или, наконец, объёмом и температурой), третий параметр однозначно определяется двумя другими. Если уравнение состояния известно в явном виде, то любой параметр можно вычислить, зная два других.



Объём является **внешним** параметром состояния, так как определяется положением внешних тел (стенки сосуда, положением поршня). Температура зависит только от внутреннего состояния системы и называется **внутренним** параметром состояния.

Для изучения различных процессов в газах (и не только в газах) удобно пользоваться графическим представлением уравнения состояния в виде кривых зависимости одного из параметров от другого при заданном постоянном третьем. Например, при заданной постоянной температуре зависимость давления газа от его объёма имеет вид, изображённый на рисунке 4, где разные кривые соответствуют разным значениям температуры: чем выше температура, тем выше на графике лежит кривая. На такой диаграмме состояние газа изображается точкой. Кривая зависимости одного параметра от другого показывает изменение состояния, называемое процессом в газе. Так, например, кривые рисунка 4 изображают процесс расширения или сжатия газа при данной постоянной температуре.

Очень удобно пользоваться подобными графиками при изучении различных процессов в молекулярных системах.

Для идеальных газов уравнение состояния легко получить из основных уравнений кинетической теории (2.4) и (3.1).

Действительно, подставив в уравнение (2.4) вместо средней кинетической энергии молекул её выражение из уравнения (3.1), получаем:

$$P = nkT. \quad (4.1)$$

Если в объёме  $V$  содержится  $N$  частиц, то  $n = N/V$ ; подставив это выражение в (4.1), имеем:

$$PV = NkT. \quad (4.2)$$

Это уравнение, в которое входят все три параметра состояния, и является уравнением состояния идеальных газов.

Его, однако, полезно преобразовать так, чтобы в него вместо недоступного прямому измерению числа частиц  $N$  входила легко измеряемая масса газа  $M$ . Для такого преобразования воспользуемся понятием о моле. **Моль** – это такое

количество вещества, масса которого выраженная в граммах равна относительной молекулярной массе вещества (иногда говорят: молекулярному весу). Эта своеобразная единица количества вещества примечательна тем, что моль любого вещества содержит одно и то же число молекул. Действительно, если обозначить молярные массы двух каких-либо веществ через  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , а массы молекул этих веществ – через  $m_1$  и  $m_2$ , то можно написать такие очевидные равенства:

$$\mu_1 = m_1 N_1, \quad \mu_2 = m_2 N_2, \quad (4.3)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – числа частиц в моле этих веществ. Так как из самого определения относительной массы вытекает, что  $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{m_1}{m_2}$ , то, разделив первое из равенств (4.3) на второе, получим, что  $N_1 = N_2$ , т.е. что моль любого вещества содержит одинаковое число молекул.

Число частиц в моле, одинаковое для всех веществ, называется **числом Авогадро**. Мы будем его обозначать через  $N_A$ . Теперь можем определить моль как единицу особой величины – количества вещества: **1 моль** – это количество вещества, содержащее число молекул или других частиц (например, атомов, если вещество состоит из атомов), равное числу Авогадро.

Если разделить число молекул  $N$  в данной массе газа на число Авогадро  $N_A$ , то мы получим число молей  $\nu$  в этой массе газа. Но эту же величину можно получить, разделив массу  $M$  газа на его молярную массу  $\mu$ , так что

$$\frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A}, \quad \text{отсюда} \quad N = \frac{M}{\mu} N_A.$$

Подставим это выражение для  $N$  в формулу (4.2). Тогда уравнение состояния примет вид:

$$pV = \frac{M}{\mu} N_A kT. \quad (4.4)$$

В это уравнение входят две универсальные константы: число Авогадро  $N_A$  и постоянная Больцмана  $k$ . Зная одну из них, например постоянную Больцмана, можно другую (число Авогадро) определить простыми опытами, пользуясь самым уравнением (4.4). Для этого следует взять какой-нибудь газ с известным значением молярной массы  $\mu$ , заполнить им сосуд известного объёма  $V$ , измерить давление  $P$  этого газа и его температуру  $T$  и определить его массу  $M$ , взвесив пустой (откачанный) сосуд и сосуд, наполненный газом. Число Авогадро  $N_A$  оказалось равным  $6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

Наиболее точное к настоящему времени значение числа Авогадро:

$$N_A = 6,0220943 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Произведение универсальных констант  $N_A k$ , очевидно, также является универсальной константой. Она получила название универсальной газовой постоянной и обычно обозначается через  $R$ :

$$R = N_A k \approx 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

(точное значение  $R = 8,31441 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ ).

Заменив в уравнении (4.4)  $N_A k$  универсальной газовой постоянной  $R$ , получим:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \quad (4.5)$$

Представленное в таком виде уравнение состояния идеального газа часто называют **уравнением Клапейрона-Менделеева**. Величина  $M/\mu$ , входящая в это уравнение, представляет собой количество вещества (число молей в данной массе газа). Для одного моля газа, т.е. для случая, когда  $M = \mu$ , уравнение (4.5) имеет вид:

$$pV = RT. \quad (4.6)$$

Из уравнения (4.5) следует, что

$$\frac{pV}{T} = \frac{M}{\mu} R.$$

Следовательно, если состав (молярная масса  $\mu$ ) и масса ( $m$ ) газа неизменны в процессах, производимых над газом, то

$$\frac{pV}{T} = \text{const.}$$

Это соотношение, впервые полученное Б. Клапейроном, называют **уравнением Клапейрона**. Оно показывает, что для данной массы идеального газа отношение произведения численных значений давления  $p$  и объема  $V$  к абсолютной температуре  $T$  есть величина постоянная. Численное значение постоянной зависит от массы и химического состава газа, а также от выбора единиц измерения  $p$ ,  $V$  и  $T$ .

**Законы идеального газа.** Известные уже давно законы, управляющие поведением газов, были в свое время открыты опытным путем (закон Бойля-Мариотта установлен еще в XVII в.). Нетрудно убедиться, что все эти законы могут быть получены из приведенных выше уравнений кинетической теории газов.

**Закон Бойля-Мариотта.** Рассмотрим газ в условиях, когда его температура поддерживается постоянной (такие условия называются **изотермическими**).

Если в уравнении состояния (4.5) положить  $T = \text{const}$ , то ясно, что вся правая часть уравнения оказывается величиной постоянной, так что

$$PV = \text{const}. \quad (4.7)$$

Эта формула, которую называют **уравнением изотермы**, и выражает закон Бойля-Мариотта, согласно которому при постоянной температуре сжатие и расширение газа, т.е. изменение его объёма, сопровождается таким изменением давления, что произведение давления на объём остается величиной постоянной. Графически зависимость  $P$  от  $V$  для различных температур изображена на рисунке 4. Из формулы (4.7) видно, что эти кривые, называемые **изотермами**, представляют собой гиперболы. Гиперболы расположены тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс.

Закон Бойля-Мариотта показывает, как изменяется давление газа с изменением его объёма при постоянной температуре и, конечно, при неизменной массе и постоянном составе газа.

**Сжимаемость идеального газа. Изотермический коэффициент сжимаемости.** Свойство газа, как и всякого другого тела, изменять давление при изменении объёма называется **сжимаемостью**. Если изменение объёма происходит так, что температура газа при этом не меняется, то сжимаемость характеризуется **изотермическим коэффициентом сжимаемости**  $\chi$ , который определяется как относительное изменение объёма, вызывающее изменение давления на единицу. Очевидно, что

$$\chi = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_T. \quad (4.8)$$

Здесь  $dV$  – изменение объёма газа, вызывающее изменение давления на величину  $dP$ ;  $V$  – первоначальный объём (относительным изменением какой-либо величины и называется отношение изменения этой величины к ее первоначальному значению). Индекс  $T$  у производной показывает, что она берется при  $T = \text{const}$ .

Для идеального газа легко вычислить значение  $\chi$ . Из уравнения состояния (4.5) получаем:

$$d(PV) = VdP + PdV = 0, \quad \text{т.к.} \quad \frac{M}{\mu} RT = \text{const}.$$

Отсюда

$$\chi = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_T = - \frac{1}{P}. \quad (4.9)$$

Знак минус указывает на то, что увеличение объёма приводит к уменьшению давления.



Изотермический коэффициент сжимаемости идеального газа равен, таким образом, обратной величине его давления и измеряется в системе СИ в единицах  $\text{м}^2/\text{Н}$ .

С ростом давления величина  $\chi$ , конечно, уменьшается, так как чем больше давление, тем меньше у газа возможностей для того, чтобы еще больше сжиматься.

Закон Бойля-Мариотта является приближенным. Так, все газы при очень больших давлениях сжимаются меньше, чем это следует из закона Бойля-Мариотта. Однако большинство газов при температурах, близких к комнатным, и давлениях, не слишком отличающихся от атмосферного, подчиняются закону Бойля-Мариотта с достаточно большой точностью.

**Закон Гей-Люссака.** Пусть теперь газ находится в условиях, когда постоянным сохраняется его давление  $P$ , но изменяется температура. Такие условия можно осуществить, если поместить газ в цилиндр, закрытый подвижным поршнем. В таком цилиндре изменение температуры вызывает перемещение поршня и изменение объема. Давление в цилиндре остается постоянным и равным внешнему давлению.

Из уравнения состояния (4.5) видно, что в этом случае постоянным будет отношение объема газа к его температуре:

$$\frac{V}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{P} = \text{const.} \quad (4.10)$$

Это уравнение, называемое **уравнением изобары** (процесс, происходящий при постоянном давлении, называется **изобарическим**), выражает известный закон Гей-Люссака (иногда его называют, без достаточных, впрочем, оснований, законом Шарля).

График изобары  $V = f(T)$ , как это видно из (4.10), имеет вид прямой, исходящей из начала координат.

**Коэффициент объемного расширения газа при постоянном давлении.** Коэффициент объемного расширения  $\alpha$  может быть представлен в виде, аналогичном коэффициенту сжимаемости:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P. \quad (4.11)$$

Из уравнения состояния (4.5) следует, что  $\left( \frac{dV}{dT} \right)_P = \frac{M}{\mu} \frac{R}{P}$ , откуда

$$\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P = \frac{1}{T},$$



т. е. коэффициент объёмного расширения идеального газа равен обратной величине абсолютной температуры. При  $0^{\circ}\text{C}$ , например, он равен  $1/273\text{ K}^{-1}$ .

**Изохорический процесс.** Когда газ находится в таких условиях, что постоянным остается его объём (происходящие в таких условиях процессы называются **изохорическими**), то, как это видно из уравнения состояния газа (4.5), изменение давления газа при изменении его температуры происходит так, что отношение  $P/T$  остается постоянным:

$$\frac{P}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{V} = \text{const.} \quad (4.12)$$

Это утверждение, однако, нельзя считать законом природы. Температурная шкала идеального газа строится именно на основе предположения, что  $P/T = \text{const}$  (см. § 1.3). Поэтому экспериментальная проверка этого «закона» не может дать иного результата.

**Закон Авогадро.** Из уравнения состояния идеального газа непосредственно следует и закон Авогадро, согласно которому **при одинаковых давлениях и температурах в равных объёмах любого газа содержится одинаковое число молекул**. Действительно, пусть мы имеем два одинаковых объёма двух различных газов при одинаковых давлениях и температурах. Для каждого из них можно написать уравнение состояния в форме (4.2):

$$PV = N_1 kT, \quad PV = N_2 kT,$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – число молекул в каждом из объёмов.

Из этих двух равенств непосредственно следует, что

$$N_1 = N_2.$$

Это и есть закон Авогадро.

Из этого закона с очевидностью следует, что и, наоборот, различные газы, но содержащие одинаковое число молекул, будут при одинаковых давлениях и температурах занимать одинаковые объёмы. Поэтому моль любого газа при данных давлении и температуре занимает одинаковый объём. В частности, при температуре  $0^{\circ}\text{C}$  ( $273,15\text{ K}$ ) и давлении  $1\text{ атм}$  ( $1,013 \cdot 10^5\text{ Н/м}^2$ ) моль любого газа занимает объём

$$V_0 = \frac{RT}{P} = \frac{8,31 \cdot 273}{1,013 \cdot 10^5} \approx 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3/\text{моль}.$$

Точное значение:  $V_0 = 22,41383 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3/\text{моль} = 22,41383\text{ л/моль}$ .

Легко вычислить и число  $n_0$  молекул в  $1\text{ м}^3$  при этих (так называемых нормальных) условиях:

$$n_0 = \frac{N_A}{V_0} = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4 \cdot 10^{-3}} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Это число называется **числом Лошмидта**.

**Закон Дальтона.** Пусть в сосуде объёмом  $V$  имеется находящаяся в состоянии теплового равновесия смесь различных газов, не реагирующих химически друг с другом. Для такой смеси уравнение состояния имеет вид

$$PV = (N_1 + N_2 + N_3 + \dots)kT,$$

где  $N_1, N_2, N_3, \dots$  – числа молекул соответствующих компонентов смеси. Очевидно, что

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots = N,$$

где  $N$  – общее число молекул в сосуде.

Давление газа

$$P = \frac{N_1}{V} kT + \frac{N_2}{V} kT + \frac{N_3}{V} kT + \dots$$

Это выражение показывает, что каждая группа молекул оказывает давление, не зависящее от того, какое давление оказывают другие молекулы. Это обусловлено тем, что в идеальном газе между молекулами нет взаимодействия, молекулы «не знают» о существовании других молекул. Выражения

$$\frac{N_1}{V} kT = P_1, \quad \frac{N_2}{V} kT = P_2, \quad \frac{N_3}{V} kT = P_3 \dots$$

представляют собою давление каждого из компонентов смеси, занимающей объём  $V$ , т.е.  $P_1, P_2, P_3, \dots$  являются **парциальными** давлениями компонентов смеси. Напомним, что парциальным давлением какого-либо газа – компонента газовой смеси – называется давление, которое оказывал бы этот газ, если бы он один занимал весь объём, занимаемый смесью.

Таким образом,

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots,$$

т. е. давление смеси газов равно сумме парциальных давлений ее компонентов. Это и есть содержание закона Дальтона, который, очевидно, справедлив только для идеальных газов.

Опыт показывает, что при достаточно высоких давлениях (порядка десятков атмосфер), когда газы уже нельзя считать идеальными, наблюдаются отклонения (в ту и другую сторону) от закона Дальтона.

Пользуясь основными результатами кинетической теории газов, мы, таким образом, получили законы, управляющие поведением газов, установленные

экспериментально задолго до того, как была развита теория. Это в какой-то мере подтверждает правильность теории, позволяет считать ее проверенной опытом. Это указывает также на то, что газовые законы, рассмотренные выше, относятся только к идеальным газам, что, вообще говоря, не было известно до появления кинетической теории газов. Опыт в самом деле показывает, что когда условия идеальности не выполнены, то наблюдаются отклонения от газовых законов. Можно поэтому считать, что строгое следование приведенным выше газовым законам является признаком идеальности газа. Именно поэтому идеальным иногда называют газ, следующий, например, законам Бойля-Мариотта или Гей-Люссака.

## § 1.5 Скорости газовых молекул

Основное уравнение кинетической теории идеальных газов устанавливает связь между средней кинетической энергией поступательного движения молекул и абсолютной температурой:

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Тем самым определяется и средняя квадратичная скорость молекул:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \overline{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (5.1)$$

которая для данного газа (при данном значении массы молекулы  $m$ ) зависит только от температуры. Если числитель и знаменатель дроби в подкоренном выражении правой части равенства (5.1) умножить на число Авогадро, то

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (5.2)$$

так как  $N_A k = R$  и  $N_A m = \mu$ . Поскольку по уравнению состояния (4.5)  $PV = MRT/\mu$ , равенство (5.2) можно представить в виде:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}, \quad (5.3)$$

где  $\rho = M/V$  – плотность газа.

Формула (5.3) показывает, что средняя квадратичная скорость молекул может быть вычислена из данных измерений чисто макроскопических величин – давления газа и его плотности. Так, например, плотность азота при атмосферном давлении и температуре  $0^\circ\text{C}$  равна  $1,25 \text{ кг/м}^3$ . Средняя квадратичная скорость молекул азота в этом случае равна

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{1,25}} \approx 500 \text{ м/с.}$$

Плотность водорода при тех же условиях примерно в 15 раз меньше, чем у азота. Поэтому средняя квадратичная скорость молекул водорода почти в 4 раза больше и равна примерно 2 000 м/с.

Интересно отметить, что скорости молекул газа близки к скорости звука в том же газе. Это объясняется тем, что звуковые волны в газе переносятся движущимися молекулами. Неудивительно поэтому, что скорость звука  $c$  в газе приближенно определяется формулой:

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Большой интерес представляет экспериментальное определение скорости газовых молекул, так как это даёт возможность определить опытным путём значение постоянной Больцмана  $k$ , важность которой в кинетической теории очевидна. Первое экспериментальное определение скорости газовых молекул было проведено Штерном (1920 г.).

**Опыт Штерна.** Схема опыта (в плане) представлена на рисунке 5. Источником частиц (в данном случае атомов), скорость которых исследуется, в опыте служила платиновая проволока, покрытая слоем серебра. Она окружена двумя цилиндрическими диафрагмами, в которых прорезаны узкие щели  $S_1$  и  $S_2$  так, что проволока и щели лежат в одной вертикальной плоскости. Это устройство помещено внутрь цилиндра  $P$ , на внутренней поверхности которого против щели  $S_2$  имеется мишень – съёмная латунная пластинка. Вся эта система помещена под колокол насоса, создающего высокий вакуум ( $\sim 10^{-6}$  тора), и может вращаться с большой скоростью около оси, вдоль которой натянута проволока  $L$ .

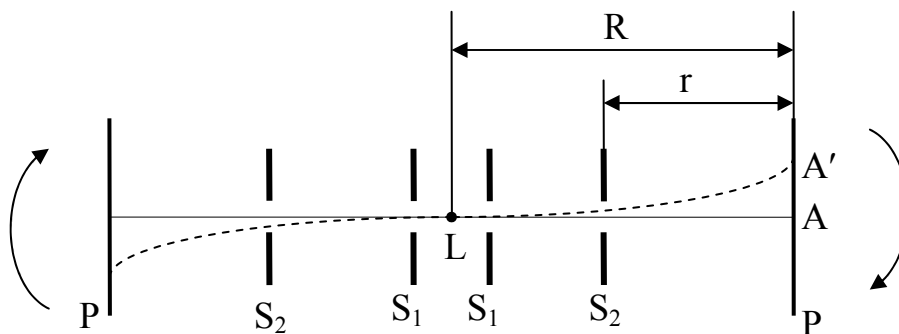


Рисунок 5

Пропусканием электрического тока через проволоку  $L$  Штерн нагревал её до температуры, при которой серебро заметно испарялось (1 235 К). При этом атомы серебра, скорости которых соответствуют температуре проволоки, вылетают по всем направлениям. Часть атомов проходит через щели  $S_1$  и  $S_2$ , которые вырезают из потока атомов узкий пучок, состоящий из движущихся в од-

ном направлении и не сталкивающихся между собой частиц (такие направленные потоки молекул носят название **молекулярных пучков**).

Когда вся система неподвижна, атомы серебра, образующие пучок, конденсируются на мишени в месте, обозначенном на рисунке 5 буквой А, образуя на мишени полосу, являющуюся как бы изображением щели  $S_2$ . Но если прибор привести во вращение, атомы пучка попадут уже не в точку А, а окажутся смещёнными относительно А на некоторое расстояние  $\delta$  (на рисунке  $\delta = AA'$ ). Расстояние  $r$  от щели  $S_2$  до мишени атомы, движущиеся со скоростью  $v$ , проходят за время  $t = r/v$ . Но за это время каждая точка вращающегося цилиндра сместится на расстояние  $\delta$ , равное  $2\pi v R t$ , где  $\nu$  – частота вращения цилиндра и  $R$  – радиус этого цилиндра:

$$\delta = 2\pi\nu R t.$$

Подставив сюда вместо  $t$  его значение  $r/v$ , получаем:

$$\delta = \frac{2\pi\nu R r}{\nu}. \quad (5.4)$$

При вращении прибора в обратном направлении полоска сместится на такое же расстояние по другую сторону от А. Таким образом на мишени получаются две полоски, разделенные расстоянием  $2\delta$ . Это повышает точность измерения  $\delta$ .

Измерив расстояние между полосками и зная  $\nu$ ,  $r$  и  $R$ , по формуле (5.4) вычисляют скорость атомов  $v$  при данной температуре проволоки. Измеренные таким образом значения скорости атомов оказались близкими к значениям, вычисленным по формуле (5.1).

Метод молекулярных пучков, разработанный Штерном, до сих пор широко используется для исследования различных свойств частиц.

Важно отметить, что смещённые полоски на мишени в опытах Штерна получались довольно широкими, размытыми и вовсе не были изображением щели, в отличие от резкой, узкой несмещённой полоски. Этого следовало ожидать, имея в виду, что атомы серебра вылетают из источника с различными скоростями. Ясно, что более быстрые атомы попадают на мишень с меньшим смещением относительно места попадания атомов при неподвижном приборе, чем более медленные атомы. Расстояние  $2\delta$  между полосками – это расстояние между теми их частями, где наблюдалась наибольшая плотность серебра и куда, следовательно, попадало наибольшее число молекул.

Можно показать, что с максимальной плотностью на мишень попадут молекулы, скорость которых примерно в 1,3 раза больше средней квадратичной скорости. Поэтому скорость  $v$ , вычисленная из формулы (5.4), в которой  $\delta$  – половина расстояния между наиболее плотными частями осадков серебра, равна:

$$v \approx 1,3 \bar{v}.$$

Получив значение средней квадратичной скорости из описанных опытов Штерна, можно пользуясь (5.1) определить значение постоянной Больцмана. Опыты Штерна позволяют не только измерить среднюю квадратичную скорость, но и по размытию осадка грубо определить распределение молекул по скоростям.

## § 1.6 Барометрическая формула

Хаотические молекулярные движения приводят к тому, что молекулы газа равномерно распределяются по объёму сосуда, так что в каждой единице объёма в среднем содержится одинаковое число молекул. В равновесном состоянии давление и температура газа также одинаковы во всём объёме. Но так обстоит дело только в том случае, когда на молекулы не действуют внешние силы. При наличии же таких сил молекулярные движения приводят к своеобразному поведению газов.

Рассмотрим, например, газ (воздух), находящийся под действием силы тяжести. Если бы отсутствовало тепловое движение молекул, то все они под действием силы тяжести «упали» бы на Землю, и весь воздух собрался бы тончайшим слоем у поверхности Земли. Если бы отсутствовала сила тяжести, но существовали бы молекулярные движения, молекулы разлетелись бы по всему мировому пространству. Атмосфера, воздушная оболочка Земли, обязана своим существованием в её теперешнем виде наличию одновременно и теплового движения молекул, и силы притяжения к Земле. При этом в атмосфере устанавливается вполне определённое распределение молекул по высоте. Соответственно этому распределению молекул устанавливается и определённый закон изменения давления газа с высотой, который нетрудно найти.

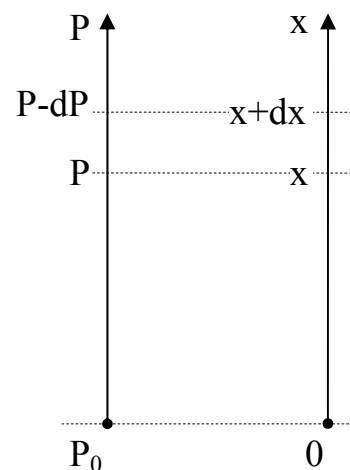


Рисунок 6

Рассмотрим вертикальный столб воздуха (рисунок 6). Пусть у поверхности Земли, где  $x = 0$ , давление равно  $P_0$ , а на высоте  $x$  равно  $P$ . При изменении высоты на  $dx$  давление изменяется на  $dP$ . Давление воздуха на некоторой высоте равно весу столба воздуха, находящегося на этой высоте над площадью, равной единице. Поэтому  $dP$  равно разности весов столбов воздуха над площадью, равной единице, на высотах  $x$  и  $x+dx$ , т.е. равно весу столба воздуха высотой  $dx$  с площадью основания в одну единицу:

$$dP = - \rho g dx,$$

где  $\rho$  – плотность воздуха (масса единицы объёма) и  $g$  – ускорение свободного падения.

Плотность  $\rho$  газа равна, очевидно, произведению массы  $m$  молекулы на их число  $n$  в единице объёма:

$$\rho = mn.$$

Из кинетической теории известно (формула (4.1)), что  $n = P/kT$ . Следовательно,  $\rho = mP/kT$  и

$$dP = - \frac{mg}{kT} P dx.$$

Это уравнение разделением переменных можно переписать в виде:

$$\frac{dP}{P} = - \frac{mg}{kT} dx. \quad (6.1)$$

Считая, что температура на всех высотах одна и та же (что, вообще говоря, неверно), то, интегрируя это уравнение, получим:

$$\ln P = - \frac{mg}{kT} x + \ln C, \quad (6.2)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

Потенцируя это выражение, получим:

$$P = C e^{-\frac{mg}{kT} x}. \quad (6.3)$$

Постоянная  $C$  определяется из условия, что при  $x = 0$  давление  $P = P_0$ . Подставив в уравнение (6.3) эти значения  $x$  и  $P$ , получим:

$$C = P_0.$$

Следовательно, интересующая нас зависимость давления воздуха от высоты над поверхностью Земли имеет вид:

$$P = P_0 e^{-\frac{mg}{kT} x}, \quad (6.4)$$

или, учитывая, что  $m = \mu/N_A$  и  $R = kN_A$  (где  $\mu$  – молярная масса,  $N_A$  – число Авогадро,  $R$  – универсальная газовая постоянная), получаем:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} x}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.4), устанавливающее закон убывания давления с высотой, называется **барометрической формулой**. Из этого уравнения видно, что давление газа убывает с высотой по экспоненциальному закону. Этим законом пользуются для определения высоты над Землёй путём измерения давления на дан-

ной высоте и на уровне моря (конечно, последнее достаточно измерить один раз).

Приборы, служащие для измерения высоты горных вершин, полёта самолёта и т.д., представляют собой специальные барометры, шкала которых градуирована непосредственно в метрах. Для этих целей, однако, необходимо в уравнении (6.4) внести поправку на температуру, которая, как известно, понижается с ростом высоты, тогда как барометрическая формула получена нами в предположении постоянства температуры на всех высотах.

Пользуясь барометрической формулой (6.4), также можно определить постоянную Больцмана  $k$ , но точность в этом случае невелика именно из-за температурной поправки.

Так как давление газа, как мы видели раньше, пропорционально числу молекул  $n$  в единице объёма ( $P = nkT$ ), то формула (6.4) выражает также закон убывания концентрации молекул с высотой:

$$n = n_0 e^{-\frac{mg_x}{kT}}, \quad (6.6)$$

где  $n$  и  $n_0$  – число молекул в единице объёма в точках, между которыми разность высот равна  $x$ . Эта формула, так же как и формула (6.5), показывает, что атмосфера Земли должна простирается до бесконечности.

При выводе барометрической формулы (6.4) или (6.6) мы предполагали, что ускорение свободного падения  $g$  постоянно, т.е. не зависит от высоты  $x$ . на этом основании мы при интегрировании уравнения (6.1) вынесли  $g$  за знак интеграла. Такое упрощение приемлемо для сравнительно небольших значений  $x$  (порядка десятков километров). При больших высотах необходимо принять во внимание, что ускорение свободного падения убывает по мере удаления от поверхности Земли.

**Закон Больцмана.** Полученная выше барометрическая формула относится к случаю, когда газ находится под действием силы тяжести. Величина  $mgx$  в формуле (6.6)

$$n = n_0 e^{-\frac{mg_x}{kT}}$$

представляет собой потенциальную энергию молекулы на высоте  $x$ . Поэтому можно сказать, что формула (6.6) даёт нам число частиц  $n$ , энергия которых  $U = mgx$ , если число частиц с энергией, равной нулю, равно  $n_0$  (высота  $x$  отсчитывается от нуля). Нет никаких оснований считать, что поведение газа существенно изменится, если вместо силы тяжести на него будет действовать какая-либо другая сила, а выражение для энергии будет иметь другой вид. Если газ находится в каком-нибудь силовом поле, так что его частицы обладают некоторой потенциальной энергией, то число частиц, обладающих заданной энергией  $U$ , определяется формулой:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (6.7)$$



Формула (6.7) называется **формулой Больцмана**. Она позволяет определить долю молекул, которые в условиях теплового равновесия обладают энергией  $U$ :

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (6.8)$$

Из формулы (6.8) видно, что доля  $n/n_0$  частиц с данной энергией  $U$ , кроме величины этой энергии, зависит только от температуры. Это позволяет трактовать и саму температуру несколько иначе, а именно как величину, от которой зависит, как распределяется молекулы по энергиям.

При данной температуре доля молекул, обладающих той или иной энергией  $U$ , зависит от значения  $U$  и быстро уменьшается с ростом  $U$ . Это значит, что доля молекул с очень большой энергией всегда очень мала. И чем ниже температура, тем быстрее  $n/n_0$  убывает с ростом  $U$ .

## § 1.7 Понятие о вероятности

К термину вероятность мы прибегаем в тех случаях, когда речь идёт о **случайных событиях**, т.е. таких, условия наступления которых по тем или иным причинам неизвестны, и которые поэтому нельзя заранее с уверенностью предсказать.

Приобретая, например, билет в автобусе, мы обычно заранее не знаем, будет ли его номер чётным или нечётным. Поэтому такое «событие», как приобретение билета именно с чётным номером, можно считать случайным событием. Если мы, например, приобретём (разумеется, не в одну покупку) 10 билетов, то в их числе могут оказаться и три, и шесть, и восемь билетов с чётными номерами. Но может случиться и так, что среди них не окажется ни одного чётного, или наоборот, чётными окажутся все 10 билетов.

Однако в этой кажущейся полнейшей произвольности есть и определённая закономерность. Она заключается в том, что, если повторять опыт (покупки билетов) достаточно большое число раз, то приблизительно в половине случаев билет будет иметь чётный номер. И чем больше будет число таких «опытов», тем ближе к половине будет доля билетов с чётными номерами. В таком случае говорят, что вероятность приобретения билета с чётным номером равна  $\frac{1}{2}$ .

Точно так же, бросая много раз монету, мы можем быть уверены, что приблизительно в половине случаев она упадёт обращённой вверх стороной с гербом. И это будет тем вероятнее, чем больше будет число бросков.

Эти и другие подобные им опыты позволяют нам дать следующее определение вероятности: **вероятностью события называется предел, к которому стремится отношение числа опытов, приводящих к его осуществлению, к общему числу опытов при беспредельном увеличении последнего.**

Если в  $N$  опытах (случаях)  $i$ -е событие происходит  $N_i$  раз, то вероятностью  $P_i$  этого события называют величину:

$$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}. \quad (7.1)$$

Так как на практике  $N$  всегда конечно, то для вычисления вероятности стараются, чтобы  $N$  и  $N_i$  были достаточно большими. Тогда можно считать, что

$$P_i \approx N_i / N. \quad (7.2)$$

Ясно, что сумма вероятностей всех возможных результатов измерений равна единице:

$$\sum P_i = \sum (N_i / N) = 1. \quad (7.3)$$

В рассмотренном нами случае с номерами билетов вероятность чётного номера равна  $1/2$ . Такова же, конечно, и вероятность нечётного номера. Сумма этих двух вероятностей равна единице. Она, очевидно, даёт нам вероятность «события», заключающегося в том, что билет будет иметь или чётный или нечётный номер. Но такое событие неизбежно, так что вероятность, равная единице, означает достоверность. Наоборот, если какое-то событие невозможно (например, полное отсутствие номера), то его вероятность равна нулю.

**Теорема сложения вероятностей.** Если в результате  $N$  бросаний кубика в  $N_i$  случаях выпадает число  $i$ , а в  $N_k$  случаях выпадает число  $k$ , то вероятность выпадения  $i$  или  $k$  равна

$$P(i \text{ или } k) = \frac{N_i + N_k}{N} = P_i + P_k. \quad (7.4)$$

Это значит, что при бросании кубика вероятность выпадения, скажем, 2 или 5 равна  $P = 1/6 + 1/6 = 1/3$ .

Этот результат выражает одно из важных положений теории вероятностей – теорему сложения вероятностей, которая утверждает: **если  $P_1, P_2, P_3$  и т.д. – вероятности нескольких исключających друг друга событий, то вероятность  $P$  того, что осуществится какое-нибудь одно из них, равна сумме вероятностей всех этих событий ( $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$ ).**

Значит, сумма вероятностей нескольких событий даёт нам вероятность того, что наступит или одно событие, или другое, или третье и т.д. При этом предполагается, что эти события, или два из них, не могут произойти одновременно.

С учётом теоремы сложения вероятностей можем определить **вероятность** данного события как отношение числа случаев, благоприятствующих его наступлению, к общему числу возможных случаев, если все случаи равновозможны. Это определение вероятности принадлежит Лапласу.

**Теорема умножения вероятностей.** Данная теорема относится к случаю, когда определяется вероятность сложного события, состоящего в совмещении двух или более независимых событий. События называются независимыми, ес-

ли вероятность любого из них не зависит от того, наступит или не наступит любое другое.

Рассмотрим такую задачу: какова вероятность того, что стрелок, отправляясь в тир на автобусе, приобретёт билет с чётным номером, а вслед за этим его первый выстрел увенчается попаданием? Ясно, что эти два события являются независимыми.

Допустим, что для нашего стрелка вероятность  $P_1$  попадания равна 0,8. Это значит, что в среднем из 10 посещений тира он в 8 случаях первым выстрелом попадает в цель. Но при этом только в половине из них он приобретёт в то же время билет с чётным номером, так как вероятность  $P_2$  получить чётный билет равна  $\frac{1}{2}$ . Значит, искомая вероятность  $P_{12}$  сложного события – совпадения чётного номера и успешного выстрела – равна произведению вероятностей каждого из них:

$$P_{12} = P_1 \cdot P_2 = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4. \quad (7.5)$$

В общем случае теорема умножения вероятностей утверждает: **вероятность совмещения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей каждого из них в отдельности.**

**Средние значения случайных величин.** В предыдущих параграфах мы уже неоднократно пользовались средними значениями различных физических величин, характеризующих движение молекул: средней скоростью, средней энергией и т.д. Мы прибегали к этому приёму описания молекулярных систем потому, что при большом числе частиц, из которых они состоят, нет ни возможности, ни необходимости рассматривать величины, относящиеся к каждой из них в отдельности. При этом использование средних значений величин не помешало нам получить вполне точные законы, как, например, уравнение состояния идеального газа.

Нетрудно видеть, что средние значения физических величин тоже тесно связаны с понятием вероятности.

В силу непрерывных хаотических движений частиц всякая молекулярная система в течение достаточно большого промежутка времени должна пройти через бесчисленный ряд состояний, сменяющих друг друга очень сложным образом из-за многочисленных взаимодействий. В каждом из состояний наша система за длительное время побывает не один, а много раз.

Пусть требуется определить некоторую величину  $x$ , относящуюся к системе или к любой её части. Для этого мы должны проделать (конечно, мысленно) множество наблюдений над системой в различных её состояниях. Обозначим число таких наблюдений через  $N$ . Тогда окажется, что при  $N_1$  наблюдениях (из  $N$ ) мы найдём, что интересующая нас величина имеет значение  $x_1$ ;  $N_2$  наблюдений дадут для  $x$  значение  $x_2$ , и т.д. Среднее значение  $x$  по определению равно:

$$x_{\text{ср}} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + \dots}{N_1 + N_2 + N_3 + \dots} = \frac{\sum N_i x_i}{\sum N_i}.$$

Так как сумма  $\sum N_i = N_1 + N_2 + \dots$  равна общему числу наблюдений  $N$ , то

$$x_{\text{ср}} = \frac{N_1}{N} x_1 + \frac{N_2}{N} x_2 + \dots = \sum \frac{N_i}{N} x_i.$$

Но  $N_i/N$ , т.е. отношение числа наблюдений, при которых величина  $x$  имеет значение  $x_i$ , к общему числу наблюдений  $N$ , есть вероятность  $P_1$  этого значения. Точно также  $N_2/N$  – это вероятность  $P_2$  того, что значение  $x$  равно  $x_2$ , и т.д. Следовательно, **среднее значение величины  $x$  равно сумме произведений отдельных её значений на соответствующие вероятности:**

$$x_{\text{ср}} = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots = \sum P_i x_i. \quad (7.6)$$

Мы уже отмечали, что законы молекулярной физики всегда имеют вероятностный характер, но из-за этого они ничего не теряют в своей точности и определённости. Происходит это потому, что для всякой системы, находящейся в неизменных внешних условиях, физические величины, описывающие её, как оказывается, тоже практически постоянны и равны их средним значениям. В таких случаях говорят, что система находится в состоянии равновесия.

## § 1.8 Функция распределения

Рассмотрим случай, когда случайная величина  $x$  имеет непрерывный характер (например, скорости молекул). Для этого разобьём всю область изменения  $x$  на отдельные интервалы и будем считать число попаданий случайной величины в тот или иной интервал. Интервалы должны быть во избежание заметных флуктуаций достаточно большими, чтобы в каждом интервале число попаданий было  $N_i \gg 1$  и чтобы с помощью (7.2) можно было определить вероятность попадания случайной величины в данный интервал. Вместе с тем, интервалы должны быть достаточно небольшими, чтобы более детально характеризовать распределение величины  $x$ .

Итак, мы имеем достаточно большое число достаточно небольших интервалов и, допустим, нам известна вероятность  $\Delta P_x$  попадания в тот или иной интервал  $\Delta x$ . Сама величина  $\Delta P_x$  весьма мала, поэтому в качестве характеристики случайной величины берут отношение  $\Delta P_x / \Delta x$ , которое для достаточно малых  $\Delta x$  не зависит от величины самого интервала  $\Delta x$ .

Это отношение при  $\Delta x \rightarrow 0$  называют функцией распределения  $f(x)$  случайной величины  $x$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} = \frac{dP_x}{dx}. \quad (8.1)$$

Видно, что функции распределения  $f(x)$  можно приписать смысл плотности вероятности, т.е. вероятности интересующей нас величины оказаться в единичном интервале вблизи значения  $x$ .

В разных случаях функция распределения имеет различный вид, один из которых в качестве примера приведён на рисунке 7. В соответствии с (8.1) площадь полоски шириной  $dx$  на этом рисунке равна вероятности того, что случайная величина  $x$  окажется в пределах интервала  $(x, x+dx)$ :

$$dP_x = f(x)dx. \quad (8.2)$$

Вероятность того, что величина  $x$  попадёт в интервал  $(a, b)$ :

$$P = \int_a^b f(x)dx. \quad (8.3)$$

Ясно, что вероятность того, что величина  $x$  может принять хотя бы какое-нибудь значение (достоверное событие), равна единице. Это называют условием нормировки:

$$\int f(x)dx = 1, \quad (8.4)$$

где интегрирование производится по всему интервалу возможных значений величины  $x$ .

Из этого условия следует, что вся площадь под кривой  $f(x)$  равна единице (см. рисунок 7). Заметим, что (8.4) является аналогом формулы (7.3).

**Средние значения.** Среднее значение величины  $x$  можно найти, зная её нормированную на единицу функцию распределения  $f(x)$ . Обратимся к формуле (7.6). Она справедлива и для случая, когда интервал изменения величины  $x$  будет разбит на небольшие участки. Уменьшая участки, мы должны, в конце концов, заменить  $P_i$  на  $dP$  и  $\Sigma$  – на интеграл  $\int$ . Тогда

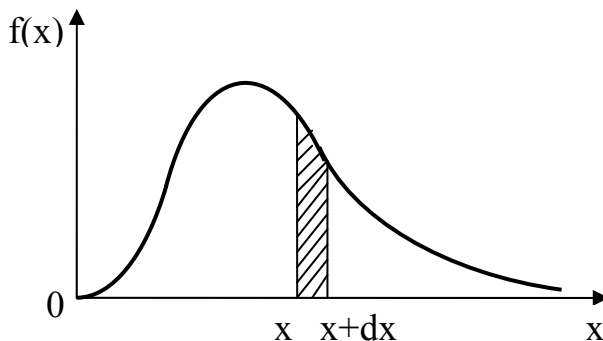


Рисунок 7

$$x_{cp} = \int x dP = \int x f(x) dx, \quad (8.5)$$

где интегрирование проводится по интересующему нас интервалу значений  $x$ .

Аналогичные формулы справедливы для любой величины, например

$$(x^2)_{cp} = \overline{x^2} = \int x^2 f(x) dx.$$

**Флуктуации.** Вероятность случайного события и экспериментально наблюдаемая доля результатов, когда событие осуществляется, – это не одно и то же. Последняя (доля результатов) испытывает случайные отклонения от предсказываемой вероятности. Именно такого рода отклонения происходят в любых макросистемах. Эти отклонения и обуславливают **флуктуации**.

Согласно теории вероятности с увеличением числа  $N$  испытаний относительная флуктуация любой величины уменьшается по закону  $1/\sqrt{N}$ . Именно грандиозность числа  $N$  молекул и объясняет, почему макроскопические законы, получаемые на основе статистических представлений о движении частиц макросистемы, оказываются точными.

В дальнейшем мы часто будем использовать понятие бесконечно малого объёма  $dV$  макросистемы. Под  $dV$  будет пониматься такой объём, размеры которого ничтожны по сравнению с размерами самой макросистемы, но всё же намного превосходящие характерный размер её микростроения. Каждая бесконечно малая область, предполагается, содержит число частиц  $dN$  настолько большое, что относительной флуктуацией их можно пренебречь.

### § 1.9 Закон Максвелла распределения молекул по скоростям

Закон распределения по скоростям молекул газа, находящегося в термодинамическом равновесии, был найден Максвеллом (1859). Мы ограничимся в основном рассмотрением подхода к решению этой проблемы, а также физического смысла закона Максвелла и некоторых его следствий.

Следуя Максвеллу, представим себе пространство скоростей с прямоугольными координатными осями, по которым будем откладывать значения проекций  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  отдельных молекул. Тогда скорости каждой молекулы будет соответствовать точка в этом пространстве – конец вектора  $\mathbf{v}$ . Из-за столкновений молекул положение точек будет стремительно меняться (при нормальных условиях каждая молекула газа испытывает порядка  $10^9$  столкновений в секунду; с такой частотой непредсказуемо меняется модуль и направление её скорости.), но их распределение в целом будет оставаться неизменным, поскольку макросистема находится в термодинамическом равновесии.

Вследствие равноправности всех направлений движения расположение точек относительно начала координат будет сферически симметричным. Поэтому плотность точек может зависеть только от модуля скорости  $v$  (но не от  $\mathbf{v}$ ).

Итак, пусть макросистема (газ) содержит  $N$  молекул. Выделим в некоторой точке – конце вектора  $\mathbf{v}$  – малый объём  $dv_x dv_y dv_z$  (рисунок 8, где ось  $v_z$  направлена на нас). Этот малый объём должен быть таким, чтобы число  $dN$  молекул в нём было достаточно большим (во избежание заметных флуктуаций). Если, например, макросистема содержит  $N \sim 10^{20}$  молекул, то число  $dN \sim 10^6$  на много порядков меньше  $N$ , и

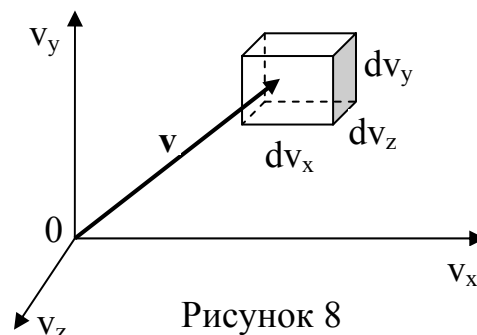


Рисунок 8

это даёт нам право рассматривать  $dN$  как физически бесконечно малую величину, относительные флуктуации которой пренебрежимо малы. В дальнейшем под  $dN$  мы будем понимать среднее число молекул в соответствующем интервале той или иной величины.

Относительное число точек (молекул) в этом объёме  $dN/N$ , или другими словами, вероятность  $dP$  того, что скорость молекулы, т.е. конец вектора  $\mathbf{v}$ , попадёт в этот объём, можно записать так:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z, \quad (9.1)$$

где  $f(\mathbf{v})$  имеет смысл **объёмной плотности вероятности**.

Вероятность же того, что молекула (точка) будет иметь проекции скорости в интервале  $(v_x, v_x + dv_x)$ , есть

$$dP(v_x) = \frac{dN(v_x)}{N} = \varphi(v_x)dv_x, \quad (9.2)$$

где  $\varphi(v_x)$  – функция распределения по  $v_x$ .

Выражение (9.2) – это по существу интеграл от (9.1) по  $v_y$  и  $v_z$ , т.е. относительное число молекул (точек) в тонком слое от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ .

Вероятности того, что молекула имеет проекции скорости в интервалах  $(v_x, v_x + dv_x)$ ,  $(v_y, v_y + dv_y)$ ,  $(v_z, v_z + dv_z)$ , являются независимыми, поэтому в соответствии с теоремой об умножении вероятностей независимых событий можно записать:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = dP(v_x)dP(v_y)dP(v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z. \quad (9.3)$$

Из соображений равноправия осей  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$  ясно, что функции  $\varphi$  должны одинаковым образом зависеть от соответствующих проекций скоростей. Сопоставив (9.3) с (9.1), находим:

$$f(\mathbf{v}) = \varphi(v_x)\cdot\varphi(v_y)\cdot\varphi(v_z). \quad (9.4)$$

С учётом условия нормировки получаем окончательные результаты:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right), \quad (9.5)$$

аналогичный вид имеют функции  $\varphi(v_y)$  и  $\varphi(v_z)$ . И тогда согласно (9.4)

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \quad (9.6)$$



График функции  $\varphi(v_x)$  изображён на рисунке 9. Он совпадает с гауссовой кривой погрешностей. Площадь заштрихованной полоски на рисунке 9 – это вероятность того, что проекция скорости молекулы лежит в интервале  $(v_x, v_x + dv_x)$ .

Функция (9.5) нормирована на единицу, т.е. площадь под кривой  $\varphi(v_x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1. \quad (9.7)$$

Интегрирование в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$  не означает, что в газе есть молекулы с такими большими скоростями. Это следует рассматривать только как вычислительный приём. Молекул с весьма большими скоростями очень мало, и они практически не вносят никакого вклада в нормировочный интеграл. Это и позволяет записывать такие пределы.

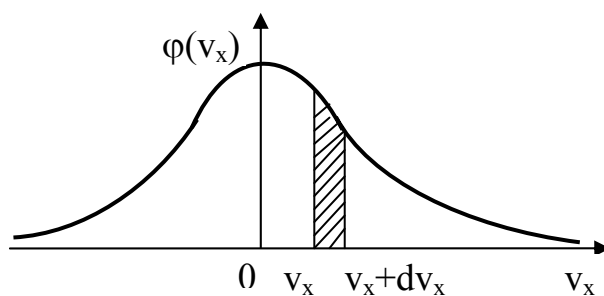


Рисунок 9

**Распределение молекул по модулю скорости.** Величина (9.6) не может, конечно, зависеть от направления вектора скорости  $\mathbf{v}$ . Теперь найдём функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления, т.е. найдём вероятность или относительное число молекул, модуль скорости которых заключён в интервале  $(v, v + dv)$ . Таким молекулам соответствуют все точки, попадающие в шаровой слой с радиусами  $v$  и  $v + dv$  (рисунок 10). Объём этого слоя равен произведению площади поверхности слоя на его толщину, т.е.  $4\pi v^2 dv$ , объёмная же плотность вероятности  $f(v)$  во всех точках слоя одинакова. Следовательно, согласно теореме сложения вероятностей, вероятность попадания в этот слой равна:

$$dP = f(v) \cdot 4\pi v^2 dv. \quad (9.8)$$

Величина  $dP/dv$  – мы её обозначим  $F(v)$  – характеризует искомую вероятность, т.е.  $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$ . Учитывая (9.6), получим:

$$F(v) = 4\pi \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \cdot \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (9.9)$$

Эта формула выражает **закон Максвелла распределения молекул по скоростям**. Вид функции  $F(v)$  показан на рисунке 11. Эта функция тоже нормирована на единицу:

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = 1. \quad (9.10)$$



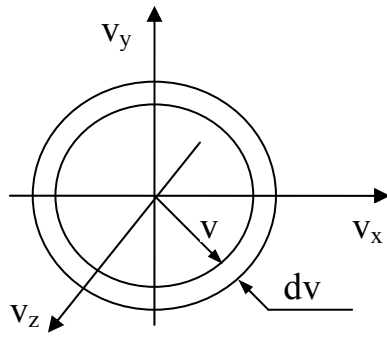


Рисунок 10

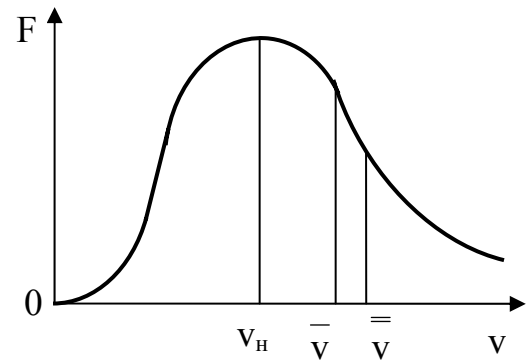


Рисунок 11

Следует отметить, что полученные Максвеллом распределения по скоростям не зависят ни от структуры молекул, ни от того, как они взаимодействуют друг с другом. Поэтому они применимы не только к газам, но и к другим агрегатным состояниям вещества.

Как видно из формулы (9.9), вид кривой распределения зависит от природы газа (в формулу входит масса молекулы  $m$ ) и от температуры. На рисунке 12 приведены кривые распределения молекул по скоростям при различных температурах. Из них видно, что при повышении температуры скорости молекул возрастают,

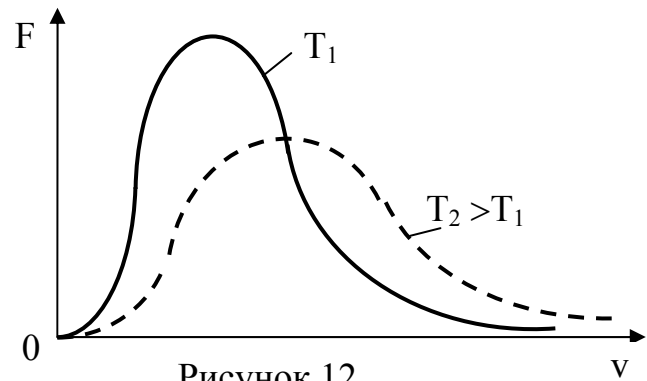


Рисунок 12

так что вся кривая смещается в сторону больших скоростей. Но площади, ограниченные кривыми и осью скоростей, остаются, конечно, неизменными. Вследствие этого максимум кривой при повышении температуры уменьшается.

Максвелловское распределение по скоростям устанавливается только благодаря столкновениям между молекулами. В самом деле, представим себе, что газ находится в таком состоянии, что все молекулы имеют одинаковые по модулю скорости. Такое состояние не может быть устойчивым (равновесным), потому что столкновения между молекулами непременно приведут к тому, что скорости молекул перестанут быть одинаковыми. При каждом столкновении двух молекул скорость одной из них увеличивается, а скорость другой уменьшается. И Максвелл впервые обратил внимание на то, что должно существовать такое состояние, при котором число молекул, скорость которых при столкновениях увеличивается, равно числу молекул, у которых скорость в результате столкновений уменьшается. Такое состояние и является равновесным. Именно такому состоянию и соответствует максвелловское распределение по скоростям. Позже Больцман показал, что если газ находится в состоянии, в котором его молекулы распределены по скоростям не по Максвеллу, то такой газ благодаря столкновениям молекул сам собой переходит в состояние с максвелловским равновесным распределением.

Молекулярные движения, происходящие в газе, мы всё время называли хаотическими. Теперь можем дать точное определение понятию хаотичности

тепловых движений: **движение молекул полностью беспорядочно (хаотично), если скорости молекул распределены по закону Максвелла.**

Такие вполне хаотические движения молекулы совершают, когда газ находится в состоянии равновесия. Как мы видели в § 1.3, это состояние характеризуется величиной температуры, которая в свою очередь определяется средней кинетической энергией движения молекул. Отсюда следует, что температура определяется средней кинетической энергией именно хаотических движений. Всякое же направленное движение молекул, каковы бы ни были их скорости в таком движении, никакого отношения к температуре не имеет. Как бы велика ни была скорость воздуха, образующего сильный ветер, она не сделает его горячим. Ветры даже самые сильные, могут быть и тёплыми и холодными, потому что температура газа определяется не направленной скоростью ветра, а теми хаотическими движениями, которые молекулы совершают наряду с направленным движением газа как целого и независимо от него.

**Средние скорости молекул.** Пользуясь функцией распределения Максвелла, можно вычислить ряд величин, важных для молекулярной физики. В качестве примеров рассмотрим вычисления средней арифметической скорости  $\bar{v}$ , среднеквадратичной скорости  $\bar{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$ , уже вычисленной нами ранее (см. § 1.5), и наивероятнейшей скорости  $v_H$ .

**Средняя арифметическая скорость**  $\bar{v}$  по определению равна отношению суммы скоростей всех молекул в единице объёма к числу молекул в единице объёма.

Число молекул в единице объёма, скорости которых заключены в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , равно, очевидно,  $nF(v)dv$ . Сумма скоростей всех таких молекул равна  $vnF(v)dv$ . Чтобы найти сумму скоростей всех молекул, обладающих любыми скоростями, нужно эту функцию проинтегрировать по всем возможным скоростям от нуля до бесконечности. Следовательно, сумма всех скоростей равна

$$\int_0^{\infty} vnF(v)dv,$$

и средняя арифметическая скорость  $\bar{v}$  равна

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} vnF(v)dv = \int_0^{\infty} vF(v)dv. \quad (9.11)$$

Подставляя в (9.11) полученное ранее выражение (9.9) для  $F(v)$ , находим в результате интегрирования для  $\bar{v}$  выражение:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (9.12)$$

Подобным же образом можно вычислить и **среднее арифметическое значение составляющей скорости** по какой-либо координатной оси. Собственно говоря, среднее значение любой компоненты скорости равно нулю, так как она с равной вероятностью может быть и положительной и отрицательной. Но этого нельзя сказать о среднем значении модуля такой компоненты. Например, среднее арифметическое значение модуля x-компоненты скорости, т.е. величина  $\overline{v_x}$  оказывается равной

$$\overline{v_x} = \frac{1}{2} \overline{v} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\pi \mu}}. \quad (9.13)$$

Выражение (9.13) позволяет решить интересную задачу о среднем числе ударов молекул о единицу площади стенки сосуда в единицу времени. В § 1.2 мы видели, что число молекул, пересекающих за время  $\Delta t$  площадку  $S$ , равно  $\frac{1}{2} n S v_x \Delta t$ . Отсюда следует, что на единицу площади в единицу времени падает  $\frac{1}{2} n v_x$  молекул. Заменив здесь  $v_x$  её средним значением  $\overline{v_x}$ , мы получим, что **среднее число ударов  $\overline{\nu}$  молекул об единицу площади в единицу времени** равно:

$$\overline{\nu} = \frac{1}{2} n \overline{v_x} = \frac{1}{4} n \overline{v}.$$

**Среднеквадратичная скорость  $\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$**  находится из условия:

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{\mu},$$

отсюда следует, что среднеквадратичная скорость равна

$$\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (9.14)$$

Этот результат мы получали и без интегрирования, как следствие формулы (3.1).

Наивероятнейшая скорость  $v_n$  – это скорость, около которой группируются скорости наибольшего числа молекул газа. Этой скорости соответствует максимум кривой распределения Максвелла (см. рисунок 11). Поэтому, чтобы найти  $v_n$ , нужно приравнять нулю производную от функции распределения (9.9)

$$\frac{dF}{dv} = 0,$$

откуда следует

$$v_{\text{н}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (9.15)$$

### Контрольные вопросы

1 Почему термодинамический и молекулярно-кинетический (статистический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?

2 Дайте определение теоретической модели идеального газа.

3 Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры вам известны?

4 Какими законами описываются изотермические, изобарные и изохорические процессы?

5 Каков физический смысл постоянной Авогадро? универсальной газовой постоянной?

6 При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества 1 моль занимает объём 20 л. Какой объём при этих же условиях займёт водород количеством вещества 1 моль?

7 В чём заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? термодинамической температуры?

8 Дайте соотношения между температурными шкалами Кельвина, Цельсия и Фаренгейта.

9 В чём содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов?

10 Какие единицы измерения давления вы знаете?

11 Что понимают под функцией распределения случайной величины?

12 Каков физический смысл функции распределения молекул по скоростям?

13 В каком случае движение молекул полностью беспорядочно (хаотично)?

14 Опишите опыт Штерна.

15 Как определяется наивероятнейшая скорость? средняя арифметическая скорость? среднеквадратичная скорость?

16 Во сколько раз и как изменится среднеквадратичная скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?

17 Дайте вывод барометрической формулы.

18 В чём суть формулы Больцмана?

19 Что понимают под термином «вероятность события»?

20 Как находят средние значения случайных величин?

## Тесты

1. В дизеле в начале такта сжатия температура воздуха равна  $27^{\circ}\text{C}$ , а давление  $70\text{ кПа}$ . Во время сжатия объём воздуха уменьшается в 15 раз, а давление возрастает до  $3,5\text{ МПа}$ . При этих условиях температура воздуха в конце такта сжатия равна ...

- А)  $1\,000^{\circ}\text{C}$     В)  $727^{\circ}\text{C}$     С)  $427^{\circ}\text{C}$     Д)  $517^{\circ}\text{C}$     Е)  $600^{\circ}\text{C}$

2. Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло  $5,4^{\circ}$  при частоте вращения прибора  $150\text{ с}^{-1}$ ? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно  $2\text{ см}$ .

- А)  $100\text{ м/с}$     В)  $150\text{ м/с}$     С)  $200\text{ м/с}$     Д)  $250\text{ м/с}$     Е)  $300\text{ м/с}$

3. Чему равна плотность кислорода при температуре  $47^{\circ}\text{C}$  и давлении  $1\text{ МПа}$ ? Молярная масса кислорода  $\mu = 32\text{ г/моль}$ .

- А)  $1,2\text{ кг/м}^3$     В)  $12\text{ кг/м}^3$     С)  $16\text{ кг/м}^3$     Д)  $68\text{ кг/м}^3$     Е)  $6,8\text{ кг/м}^3$

4. Если при постоянной температуре число молекул идеального газа, содержащегося в замкнутом сосуде, увеличить на  $220\%$ , объём сосуда увеличить на  $40\%$ , то давление газа увеличится в ...

- А)  $1,7$  раза    В)  $1,9$  раза    С)  $2,1$  раза    Д)  $2,3$  раза    Е)  $2,5$  раза

5. Чему равна плотность водорода при нормальных условиях? Молярная масса водорода  $\mu = 2\text{ г/моль}$ .

- А)  $0,02\text{ кг/м}^3$     В)  $0,04\text{ кг/м}^3$     С)  $0,09\text{ кг/м}^3$     Д)  $0,86\text{ кг/м}^3$     Е)  $1,26\text{ кг/м}^3$

6. Определите, во сколько раз увеличивается среднее расстояние между молекулами воды, когда она переходит из жидкого в газообразное состояние при нормальном атмосферном давлении?

- А) в  $10^2$  раз    В) в  $10^4$  раз    С) в  $10$  раз    Д) в  $10^3$  раз    Е) не изменится

7. При неизменной концентрации молекул гелия средняя кинетическая энергия теплового движения его молекул увеличилась в 4 раза. Как при этом изменилось давление газа?

- А) не изменилось    В) уменьшилось в 2 раза    С) увеличилось в 2 раза  
Д) увеличилось в 4 раза    Е) увеличилось в 16 раз

8. Если масса молекулы первого газа в 4 раза меньше массы молекулы второго газа, а концентрация молекул первого вдвое больше второго, то отношение плотности первого газа к плотности второго  $\frac{c_1}{c_2}$  равно ...

- А) 2                      **В)  $\frac{1}{2}$**                       С) 4                      Д)  $\frac{1}{4}$                       Е)  $\frac{1}{8}$

9. Средний квадрат скорости поступательного движения молекул некоторого газа, находящегося под давлением  $8 \cdot 10^4$  Па, равен  $6 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Чему равна плотность этого газа при данных условиях?

- А) 1 кг/м<sup>3</sup>              В) 0,5 кг/м<sup>3</sup>              С) 0,8 кг/м<sup>3</sup>              Д) 0,3 кг/м<sup>3</sup>              **Е) 0,4 кг/м<sup>3</sup>**

10. Определите температуру газа, находящегося в закрытом сосуде, если давление газа увеличивается на 0,4 % первоначального давления при нагреве на 1 °С.

- А) 225 К              **В) 250 К**              С) 275 К              Д) 300 К              Е) 325 К

11. Из сосуда объемом 1 дм<sup>3</sup> выкачивается воздух. Рабочий объем цилиндра насоса 0,1 л. Через сколько циклов работы насоса давление в сосуде уменьшится в 2 раза?

- А) 10              **В) 7**              С) 5              Д) 4              Е) 3

12. Средняя квадратичная скорость молекул газа 400 м/с. Определите объем, который займет газ при среднем давлении 0,1 МПа и массе 1,0 кг.

- А) 0,93 м<sup>3</sup>              В) 0,83 м<sup>3</sup>              С) 0,73 м<sup>3</sup>              Д) 0,63 м<sup>3</sup>              **Е) 0,53 м<sup>3</sup>**

13. Изобарический процесс для постоянной массы идеального газа выражается зависимостью ...

- А)  $P_1 V_1 = P_2 V_2$               **В)  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$**               С)  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$               Д)  $PV = \frac{m}{\mu} RT$               Е)  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$

14. По какой из формул можно рассчитать среднюю квадратичную скорость молекул газа при заданной температуре? Масса одной молекулы –  $m_0$ . Постоянная Больцмана –  $k$ . Абсолютная температура –  $T$ .

- А)  $\frac{3kT}{m_0}$               В)  $\sqrt{\frac{3kT}{2m_0}}$               **С)  $\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$**               Д)  $\sqrt{3kTm_0}$               Е)  $\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$

15. По какой из приведенных формул можно определить число  $N$  молекул в газе массой  $m$ , если его молярная масса  $\mu$ ? Число Авогадро равно  $N_A$ .

- A)  $\frac{m}{\mu} N_A$       B)  $\frac{m}{\mu} N_A$       C)  $\frac{3}{2} \frac{m}{\mu} N_A$       D)  $m\mu N_A$       E)  $\frac{2}{3} \frac{m}{\mu} N_A$

16. Среднее расстояние между центрами молекул идеального газа при температуре  $190^\circ\text{C}$  и давлении  $10^5$  Па равно (постоянная Больцмана равна  $1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К):

- A)  $1 \cdot 10^{-7}$  м      B)  $6 \cdot 10^{-10}$  м      C)  $8 \cdot 10^{-11}$  м      D)  $2 \cdot 10^{-8}$  м      E)  $4 \cdot 10^{-9}$  м

17. На глубине 40 м в стоячей воде пузырек воздуха имеет объем  $3 \text{ мм}^3$ . Определите объем этого же пузырька при подъеме его на поверхность воды. Процесс считайте изотермическим. Атмосферное давление  $1 \cdot 10^5$  Па. Плотность воды  $1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение силы тяжести  $10 \text{ м/с}^2$ .

- A)  $12 \text{ мм}^3$       B)  $120 \text{ мм}^3$       C)  $60 \text{ мм}^3$       D)  $24 \text{ мм}^3$       E)  $15 \text{ мм}^3$

18. Определите концентрацию молекул водорода, находящегося под давлением  $2,67 \cdot 10^4$  Па, если среднеквадратичная скорость поступательного движения молекул при этих условиях равна  $2 \cdot 10^3$  м/с. Молярная масса водорода равна  $\mu = 2$  г/моль. Число Авогадро равно  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

- A)  $3 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$       B)  $6 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$       C)  $5 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$       D)  $4 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$       E)  $2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$

19. Газ занимает объем  $V_1 = 8$  л при температуре 300 К. Определите массу газа, если после изобарического нагревания его до температуры  $T_2 = 900$  К его плотность стала равна  $\rho_2 = 0,6 \text{ кг/м}^3$ .

- A) 12,4 г      B) 13,4 г      C) 14,4 г      D) 15,4 г      E) 16,4 г

20. Каково давление азота, если средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с, а его плотность  $1,35 \text{ кг/м}^3$ ? Молярная масса азота 28 г/моль.

- A) 107,3 кПа      B) 112,5 кПа      C) 120,1 кПа      D) 125,7 кПа      E) 130,8 кПа

21. Чему равна масса газа в сосуде, если концентрация молекул кислорода в сосуде вместимостью 5 л равна  $9,41 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$ ? Молярная масса кислорода  $\mu = 32$  г/моль. Число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

- A) 0,10 г      B) 0,25 г      C) 0,75 г      D) 1,25 г      E) 2,05 г

22. Найдите объем  $V_0$  засасывающей камеры поршневого насоса, если при откачивании этим насосом воздуха из баллона объема  $V=4$  л давление уменьшается при каждом цикле в  $n=1,2$  раза.

- А) 1,25 л      В) 0,6 л      С) 1,2 л      Д) 1 л      Е) 0,8 л

23. Как взаимодействуют между собой молекулы любого вещества?

А) притягиваются и отталкиваются, на очень маленьких расстояниях силы отталкивания больше сил притяжения

В) притягиваются и отталкиваются, на очень маленьких расстояниях силы отталкивания меньше сил притяжения

С) только отталкиваются

Д) только притягиваются

Е) в условии задачи не хватает данных

24. Концентрация молекул идеального газа уменьшилась в 4 раза, а средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул увеличилась в 4 раза. Давление газа при этом...

А) увеличилось в 16 раз      В) уменьшилось в 16 раз

С) увеличилось в 4 раза      Д) уменьшилось в 4 раза      Е) не изменилось

25. Газ с концентрацией молекул  $n$  и температурой  $T$  оказывает на стенки сосуда давление  $P$ . Какое давление на стенки сосуда оказывает газ с концентрацией молекул  $2n$  и температурой  $2T$ ?

- А)  $\frac{P}{2}$       В)  $P$       С)  $2P$       Д)  $4P$       Е)  $\frac{P}{4}$

26. При температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$  идеальный газ, взятый количеством вещества 1 моль, занимает объем  $V_0$ . Чему равен объем газа, количество вещества которого равно 2 моль, при том же давлении  $P_0$  и температуре  $2T_0$ ?

- А)  $V_0$       В)  $2V_0$       С)  $4V_0$       Д)  $8V_0$       Е)  $\frac{1}{2}V_0$

27. Объем водорода, взятого количеством вещества 3 моль, в сосуде при температуре 300 К и давлении  $P_1$  равен  $V_1$ . Чему равен объем кислорода, взятого в количестве вещества 3 моль, в сосуде при той же температуре и том же давлении? Молярные массы водорода 2 г/моль, кислорода – 32 г/моль.

- А)  $V_1$       В)  $8V_1$       С)  $16V_1$       Д)  $24V_1$       Е)  $\frac{1}{8}V_1$



28. Процесс в идеальном газе сначала идет так, что давление и объём связаны равенством  $P\sqrt{V}=B$ . Когда температура газа достигает значения  $T$ , процесс продолжается при другом характере зависимости давления от объёма:  $P=DV^{-2}$ . Найдите температуру  $T$ , считая константы  $B$  и  $D$ , газовую постоянную  $R$ , а так же количество молей газа  $\nu$  известными.

А)  $\frac{D^{\frac{2}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{\nu R}$       В)  $\frac{D^{\frac{1}{3}}B^{\frac{1}{3}}}{\nu R}$       **С)  $\frac{D^{\frac{1}{3}}B^{\frac{2}{3}}}{\nu R}$**       Д)  $\frac{D^{\frac{3}{2}}B^{\frac{3}{2}}}{\nu R}$       Е)  $\frac{D^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}}{\nu R}$

29. Если  $\mu$  - молярная масса,  $m_0$  – масса молекулы, а  $\overline{v^2}$  - средний квадрат скорости молекул идеального газа, имеющего температуру  $T$  и давление  $P$ , то концентрация молекул этого газа может быть вычислена по формуле (постоянная Больцмана –  $k$ , газовая постоянная  $R$ )...

А)  $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$       В)  $\frac{2kT}{3}$       С)  $\frac{3RT}{2}$       **Д)  $\frac{3P}{m_0 \overline{v^2}}$**       Е)  $\frac{3kP}{2}$

30. Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа? Постоянная Больцмана  $k=1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

А)  $1,94 \cdot 10^{22}$       В)  $1,94 \cdot 10^{23}$       С)  $2,14 \cdot 10^{23}$       Д)  $2,04 \cdot 10^{23}$       **Е)  $2,04 \cdot 10^{22}$**

Верные ответы в тестах отмечены **красным цветом**.

### Упражнения для самоконтроля

1.1. Начертить и объяснить графики изотермического и изобарного процессов в координатах  $P$ - $V$ ,  $P$ - $T$ ,  $T$ - $V$ .

1.2. В сосуде при температуре  $t = 20$  °С и давлении  $P = 0,2$  МПа содержится смесь газов – кислорода массой  $m_1 = 16$  г и азота массой  $m_2 = 21$  г. Определить плотность смеси. [ $2,5$  кг/м<sup>3</sup>]

1.3. Определить наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет  $0,35$  кг/м<sup>3</sup>. [ $478$  м/с]

1.4. Используя закон для распределения молекул идеального газа по скоростям, найти закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям  $u$  ( $u = v/v_H$ ).

$[f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$  – в таком виде распределение Максвелла является универсальным: оно не зависит ни от температуры, ни от рода газа]

1.5. Воспользовавшись законом распределения идеального газа по относительным скоростям (см. задачу 1.4), определить, какая доля молекул кислорода, находящегося при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ , имеет скорости от 100 до 110 м/с. [0,4]

1.6. На какой высоте плотность воздуха в два раза меньше, чем его плотность на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна 273 К. [5,5 км]

1.7. Вычислить с помощью распределения Максвелла число  $\nu$  молекул газа, падающих каждую секунду на единичную площадь стенки сосуда. Температура газа  $T$ , концентрация молекул  $n$  и масса каждой молекулы  $m$  предполагаются известными.  $[\nu = \frac{1}{4} n \bar{v}, \text{ где } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}]$

1.8. Определить с помощью распределения Максвелла давление  $P$ , оказываемое газом на стенку, если температура газа  $T$  и концентрация молекул  $n$  известны.  $[nkT]$

## Глава 2 Кинетическая теория теплоты. Закон сохранения энергии

### § 2.10 Внутренняя энергия идеального газа. Количество теплоты

Внутренняя энергия является одной из важнейших величин, характеризующих систему в состоянии термодинамического равновесия. **Внутренней энергией**  $U$  макросистемы называют величину, состоящую из:

- суммарной кинетической энергии хаотического движения самих молекул в системе отсчёта, связанной с самой системой (в этой системе суммарный импульс всех молекул равен нулю, и система как целое покоится);

- потенциальной энергии взаимодействия всех молекул, принадлежащих данной системе;

- внутренней энергии самих молекул, атомов, ядер (сюда входят кинетическая энергия движения атомов внутри молекулы, если молекула не одноатомная, потенциальная энергия взаимодействия между атомами внутри молекулы и кинетическая энергия частиц, входящих в состав атомов, ядер...).

Внутренняя энергия, однако, не включает ту кинетическую энергию, которой газ может обладать, если он, как целое, движется, и ту потенциальную энергию, которой он может обладать, если находится в поле каких-нибудь сил.

Пока мы не будем включать во внутреннюю энергию  $U$  внутреннюю энергию молекул, атомов, ядер, считая во многих процессах вклад этой составляющей энергии в  $U$  постоянным, не зависящим от вида процесса. Т.е. будем считать, что внутренняя энергия  $U$  определена с точностью до некоторой постоянной. Поскольку в термодинамические формулы входит не сама энергия, а её изменение либо производная по какому-либо параметру, то эту составляющую энергии будем просто отбрасывать, так как в нашем курсе будем изучать процессы, при которых внутримолекулярная энергия остаётся постоянной.

Средняя энергия молекулы идеального газа, если считать его материальной точкой, определяется выражением (3.1):

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

Это выражение справедливо для молекул-точек, способных совершать только поступательное движение. Такое представление о газе может считаться справедливым **для одноатомных газов**. Если же молекула газа содержит более одного атома, то она может совершать и другие виды движения – вращательное и колебательное, с которыми тоже связана некоторая энергия.

Так как для идеального газа потенциальной энергией взаимодействия молекул по сравнению с их кинетической энергией пренебрегаем, то поэтому внутренняя энергия  $N$  молекул идеального газа будет равна

$$U = \frac{3}{2}NkT. \quad (10.1)$$

Если газ содержит  $\nu$  молей  $\left( \nu = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A} \right)$ , то его внутренняя энергия равна

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} N_A kT = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} RT = \frac{3}{2} \nu RT, \quad (10.2)$$

где  $M$  – масса газа,  $\mu$  – его молярная масса,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $N_A$  – число Авогадро,  $T$  – абсолютная температура.

Внутренняя энергия данной массы идеального газа зависит, как это видно из формул (10.1) и (10.2), только от температуры и не зависит ни от давления, ни от объёма газа (для неидеальных – реальных газов это неверно). Таким образом, внутренняя энергия  $U(T)$  является **функцией состояния** системы. Это означает, что внутренняя энергия в данном состоянии имеет присущее этому состоянию значение и не зависит от того, каким путём система пришла в это состояние. Поэтому при изменении состояния системы приращение внутренней энергии определяется только конечным и начальным состояниями и не зависит от характера процесса, который перевёл систему из одного состояния в другое.

В отличие, например, от температуры  $T$ , которая характеризует равновесное состояние макросистемы, внутренняя энергия  $U$  присуща как равновесным, так и неравновесным состояниям. В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать внутреннюю энергию лишь равновесных состояний.

Если макросистема состоит из нескольких частей, то энергией межмолекулярного взаимодействия на границах этих частей (в тонком слое) можно пренебречь и считать, что внутренняя энергия всей системы практически равна сумме внутренних энергий ее частей. Это значит, что внутренняя энергия является величиной **аддитивной**.

Внутреннюю энергию макросистемы можно изменить, совершив над системой работу  $A'$  внешними макроскопическими силами, либо путём **теплопередачи**. Совершение работы сопровождается перемещением внешних тел, действующих на систему (так, например, ведёт себя поршень в цилиндре с газом). Передача макросистеме тепла  $Q$  не связана с перемещением внешних тел. Она осуществляется путём непосредственной передачи внутренней энергии макросистеме от внешних тел при контакте с ними за счёт **теплопроводности**. Передача энергии при этом может происходить и через **излучение**.

Механизм передачи энергии за счёт теплопроводности заключается в том, что молекулы соприкасающихся тел при взаимных столкновениях обмениваются энергией, так что частицы сильнее нагретого тела теряют энергию, передавая её частицам менее нагретого тела. Значит, в этом случае вместо изменения энергии за счёт затраты работы тот же результат достигается путём передачи энергии хаотически движущихся молекул одного тела молекулам другого.

Однако в силу обстоятельств, связанных с историей развития физики, в том случае, когда изменение температуры (нагрев или охлаждение) тела производится за счёт теплопроводности, говорят, что к телу подводится или от него отводится некоторое **количество теплоты**.

Итак, количество теплоты представляет собой энергию, которая передаётся от одного тела к другому путём теплопроводности или излучения. По существу при теплопередаче мы тоже имеем дело с работой, но работу в этом случае совершают не макроскопические упорядоченно движущиеся тела, а беспорядочно движущиеся молекулы.

Никакой другой разницы между теплотой и работой (энергией) нет. Поэтому они должны измеряться в одних и тех же единицах. В СИ за единицу количества теплоты принят 1 джоуль (Дж). Но в силу исторических причин количество теплоты измеряют и в **калориях**. Эта единица была введена в те времена, когда теплота считалась особым веществом, способным подобно некоторой жидкости перетекать из одного тела в другое. Калория определяется как количество теплоты, подвод (или отвод) которого вызывает нагревание (или, соответственно, охлаждение) одного грамма воды при атмосферном давлении на 1 кельвин. Эквивалентность теплоты и энергии была определена Д. Джоулем, показавшим, что нагрев 1 калорией теплоты такой же, какой даёт вполне определённая и всегда одна и та же работа. Именно оказалось, что

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж.}$$

Число, показывающее отношение единицы механической работы к единице теплоты, называют **механическим эквивалентом теплоты**:

$$I = 4,1868 \text{ Дж/кал.}$$

Обратная ему величина называется **тепловым эквивалентом механической работы**:

$$I' = 0,239 \text{ кал/Дж.}$$

В дальнейшем будем считать, что и количество теплоты и работа или энергия измеряются в джоулях.

## § 2.11 Первое начало термодинамики

Изменение состояния любого тела или системы тел, вообще говоря, сопровождается работой, произведённой этой системой, или работой, совершаемой над ней внешними силами. Эта работа может быть выражена через параметры, определяющие состояние системы. Если, как мы уже знаем, состояние системы определяется двумя из трёх параметров  $P$ ,  $V$ ,  $T$ , то в общем случае изменение любого из них должно сопровождаться внешней работой. Так, например, изменение температуры газа, т.е. его нагревание или охлаждение, может быть осуществлено в результате затраты механической работы извне (нагревание) или за счёт работы, произведённой против внешних сил (охлаждение). Эта механическая работа совершается при сжатии газа внешней силой, когда газ нагревается, или при расширении газа, когда он сам производит работу, охлаждаясь при этом. Изменение объёма газа может быть произведено и без изменения его температуры (см. ниже), тогда соответственно требуется меньшая работа.

**Телом** в термодинамике называют макроскопическую систему, заключённую в определённый объём.

Но, как было указано, состояние газа (или других тел) можно изменить, сообщив ему или, наоборот, отняв от него некоторое **количество теплоты**, т.е. приведя его в контакт с более нагретым или более холодным телом.

Какая работа будет совершена при этом способе изменения состояния? Ответ на этот даёт закон сохранения энергии (применительно к механическим и тепловым процессам) – **работа, совершаемая системой, равна разности между количеством теплоты, сообщаемой системе, и изменением её внутренней энергии**:

$$dA = dQ - dU, \quad (11.1)$$

или

$$dQ = dU + dA. \quad (11.2)$$

Этот закон получил название **первого начала термодинамики**. Согласно (11.2) можно дать и такую формулировку первого начала термодинамики: **количество теплоты, сообщаемое системе, идёт на приращение её внутренней энергии и на совершение работы над внешними телами**.

Если рассматривать работу  $dA'$  над системой, выражение первого начала термодинамики примет вид:

$$dU = dQ + dA', \quad (11.3)$$

т.е. приращение внутренней энергии системы равно сумме совершенной над системой работы всех внешних сил и количества теплоты, переданной системе.

Все входящие в уравнения (11.1), (11.2) и (11.3) величины являются алгебраическими, т.е. могут иметь как положительные, так и отрицательные знаки. Если, например,  $dQ < 0$ , то это значит, что тепло отводится от системы, если  $dA < 0$ , то работа производится над системой. Приращение  $dU$  внутренней энергии может иметь любой знак, в частности быть равной нулю.

Можно говорить о приращении внутренней энергии  $U$ , но нельзя говорить о приращении работы или тепла. Говорят только о количестве последних двух величин в том или ином процессе, т.е.  $A$  и  $Q$  являются функциями процесса.

**Работа при изменении объёма газа.** Вычислим работу, связанную с расширением или сжатием газа, т.е. с изменением его объёма. Пусть газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным, легко скользящим невесомым поршнем (рисунок 13). Пусть под действием приложенной внешней силы  $F$  поршень переместился на расстояние  $dh$ , сжав при этом газ. Газ будет сжиматься до тех пор, пока сила  $F$  не уравнивается силой, действующей на поршень со стороны газа и равной  $PS$ , где  $P$  – давление газа,  $S$  – площадь поршня. Работа  $dA$ , затраченная на перемещение поршня на расстояние  $dh$ , равна, очевидно,  $PSdh$ . Но  $Sdh$  есть изменение объёма газа  $dV$  при сжатии, т.е.

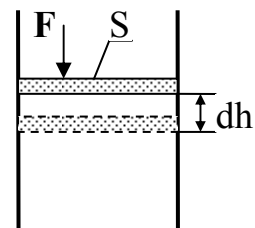


Рисунок 13

$$Sdh = - dV,$$

откуда

$$dA = - PdV. \quad (11.4)$$

Наоборот, при расширении газа, т.е. при увеличении объёма на  $dV$ , газ сам совершает работу против внешних сил, равную  $+PdV$ .

**Изменение элементарного объёма газа сопровождается элементарной работой, равной произведению давления, под которым находится газ, на изменение его объёма** (при элементарном перемещении давление можно считать постоянным).

Формула (11.4) верна не только для газа, но и для любых тел. если при изменении состояния тела внешняя работа совершается только за счёт изменения объёма, то первое начало термодинамики можно написать в виде:

$$dQ = dU + PdV. \quad (11.5)$$

Возможны случаи, когда изменение состояния тел сопровождается изменением электрических, магнитных или других параметров, тогда к правой части уравнения следует добавить соответствующие слагаемые: электрическую, магнитную и другие виды энергии. Мы ограничимся здесь рассмотрением изменения только параметров  $P$  и  $V$ .

Если же при изменении объёма давление меняется, то при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 работа  $A$  определяется путём интегрирования уравнения (11.4):



$$A = \int_1^2 dA = \int_{V_1}^{V_2} PdV . \quad (11.6)$$

Этот интеграл можно определить графически. Действительно, состояние системы, как было указано, характеризуется точкой на кривой  $P = f(V)$ . Поэтому, если зависимость  $P = f(V)$  построена графически, например, если эта зависимость выражается кривой I на рисунке 14, то

$$\int_{V_1}^{V_2} PdV$$

равен заштрихованной площади под этой кривой.

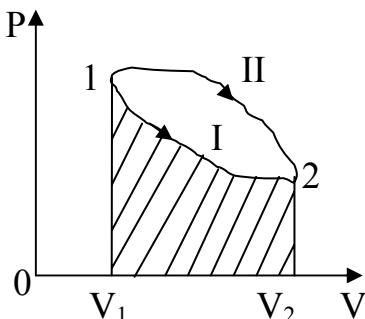


Рисунок 14

Если переход из состояния 1 в состояние 2 происходит так, что изменение давления с объёмом изображается кривой II, то связанная с этим переходом работа будет другой.

Внешняя работа, произведённая системой (или над ней) при изменении его объёма, зависит от последовательности состояний, которую проходит система при переходе от начального в конечное состояние.

Что касается внутренней энергии  $U$ , то она зависит только от состояния системы и её изменение не зависит от промежуточных состояний, в которых система пребывала.

Поэтому уравнение (11.5) может быть переписано в виде:

$$\int_1^2 dQ = U_2 - U_1 + \int_{V_1}^{V_2} PdV , \quad (11.7)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  – значения внутренней энергии в состояниях 1 и 2 соответственно.

В частном случае, если система в результате всех изменений состояния вернулась в исходное состояние, т.е.  $U_1 = U_2$ , то в этом случае говорят, что процесс изменения состояния – круговой, или **циклический**. На диаграмме P-V такой процесс имеет вид замкнутой кривой (рисунок 15). Совершаемая (или затраченная) работа при таком процессе определяется заштрихованной площадью.

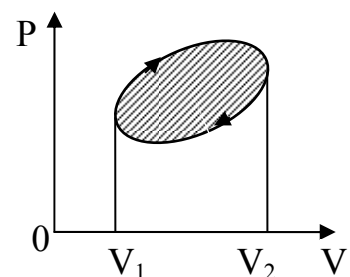


Рисунок 15

Очевидно, если работа

$$\oint PdV$$

за цикл положительна, т.е. сама система совершила работу против внешних сил, то это означает, что она получила извне равное этой работе количество теплоты  $Q$ . Если же работа  $A$  за цикл отрицательна, т.е. над системой совершена работа внешними силами, то при этом выделилось равное ей количество теплоты. Таким образом, при циклическом процессе  $Q = A$ .

Нас не должно смущать, что на некоторых участках кривых  $P(V)$  рисунков 14 и 15 давление возрастает при увеличении объёма. «Обычная» зависимость, при которой давление обратно пропорционально объёму газа наблюдается только при постоянной температуре, т.е. при изотермическом процессе. Рассматриваемый же нами процесс изменения объёма газа относится к случаю, когда газу сообщается или от него отнимается некоторое количество теплоты и над ним совершается (или он сам совершает) работа, и на разных стадиях изменения объёма температура газа разная. Поэтому одновременно с расширением газ может за счёт источника тепла настолько повысить свою температуру, что его давление, несмотря на увеличение объёма, повысится (и, наоборот, при сжатии газ может отдать тепло более холодному телу, и его давление понизится).

Этим объясняется и то обстоятельство, что при переходе из одного и того же начального состояния  $(P_1, V_1)$  в одно и то же конечное состояние  $(P_2, V_2)$ , но через различные промежуточные состояния работа получается разной и, следовательно, при круговом процессе она не равна нулю. Именно на этом основана работа всех тепловых машин (двигателей).

Ясно, что никакая положительная работа не может быть произведена системой, если в течение всего кругового процесса температура системы неизменна (т.е. если процесс изотермический). В газе, очевидно, такой изотермический круговой процесс вообще невозможен, так как, если изменение давления с объёмом происходит вдоль изотермы, то вернуться в исходное состояние можно только вдоль той же изотермы; но такой процесс нельзя назвать круговым в упомянутом выше смысле.

**Процессом** в термодинамике называют изменение состояния тела со временем. Важными характеристиками процесса являются поглощённое телом количество теплоты  $Q$ , а также совершенная над ним работа  $A$ . Обе эти величины существенно зависят от хода процесса.

Внутреннее строение молекул газа слабо влияет на термические свойства – давление, температуру, плотность – и на связь между ними. По этой причине все выражения для состояния идеального газа и процессов над идеальным газом справедливы для всех газов (например, для водорода, кислорода, азота, паров воды и др.), когда их ещё можно принять за идеальный газ.

**Квазистатические процессы.** При выводе уравнения (11.4) для работы газа, связанной с изменением его объёма, молчаливо предполагалось, что в течение всего процесса изменения объёма давление в каждый момент времени одинаково во всех точках газа. В противном случае значение давления  $P$  было бы совершенно неопределённо. Между тем обеспечить такое постоянство давления во всём объёме газа в процессе его расширения или сжатия вовсе не так просто.

Если расширение или сжатие газа происходит быстро, то давления в разных его частях не успевают выравниваться. Под действием разности давлений



возникают течения газа с различными скоростями в разных точках, в частности вихревые течения. Эти движения требуют для своего создания некоторой работы. Кроме того, разные части газа могут при этом иметь разные температуры и плотности.

Следовательно, при быстром изменении объёма газ не находится в **состоянии равновесия**. Для того чтобы в процессе изменения своего объёма (или другой величины, характеризующей состояние) газ находился в равновесии, необходимо, чтобы этот процесс протекал весьма медленно, в пределе – бесконечно медленно. В этом случае все отклонения от равновесия будут успевать исчезать, газ будет проходить через **ряд состояний равновесия**, переходящих одно в другое. **Равновесным состоянием** называют состояние системы, в котором отсутствуют потоки (массы, заряда, энергии, импульса и т.п.) между ее подсистемами.

Такие процессы называются **квазистатическими (равновесными)**, потому что при этом в любой момент состояние газа мало отличается от статического состояния, при котором параметры состояния одинаковы во всём объёме. Ясно, что только квазистатические процессы можно графически представить в виде кривых, подобных, например, приведённым на рисунках 4 или 14. Неквазистатический процесс изобразить нельзя. Уравнением (11.4) и следствиями из него можно пользоваться только для квазистатических процессов. Все реальные процессы неравновесны (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

Если процесс изменения объёма, т.е. сжатие или расширение газа, происходит неквазистатически, то совершённая при сжатии или расширении работа будет меньше, чем при квазистатическом процессе. Это можно понять из следующих соображений. Представим себе, что газ в сосуде с поршнем (см. рисунок 13) находится сначала в равновесии; это значит, что давление газа  $P$  внутри сосуда равно внешнему давлению. Пусть под действием тех или иных причин газ стал расширяться (неквазистатически), т.е. поршень стал перемещаться вверх. Значит, внешнее  $P_1$  стало меньше равновесного давления  $P$  и, следовательно, внешняя работа

$$P_1 dV < PdV.$$

Соответственно при неквазистатическом сжатии газа внешнее давление  $P_1$  больше равновесного и поэтому работа (на этот раз она отрицательная)

$$- P_1 dV < - PdV.$$

И только при квазистатическом процессе внешнее давление бесконечно мало отличается от равновесного и, следовательно, работа, произведённая в этом случае, наибольшая.

Более того, газ может расширяться, вовсе не совершив никакой внешней работы. Такой случай можно осуществить, соединив друг с другом два сосуда,

из которых один наполнен газом, а другой пустой. Тогда газ перетечёт из первого сосуда во второй и займет, следовательно, больший объём. Но при этом никакой внешней работы не будет совершено, так как нет внешних сил, против которых эта работа могла совершаться. Это так называемый процесс расширения в пустоту (вакуум). И действительно, в течение всего этого процесса газ не находится в равновесии, как бы медленно он ни протекал.

## § 2.12 Теплоёмкость идеальных газов

Идеальный газ – система, состоящая из невзаимодействующих материальных точек. Вместе с тем, взаимодействие между молекулами даже в случае идеальных газов должно быть, но весьма слабое. Оно необходимо, так как только благодаря нему в системе может установиться равновесие. Уравнение состояния идеального газа для  $\nu$  молей имеет вид:  $PV = \nu RT$ .

Из первого начала термодинамики ( $dQ = dU + dA = dU + PdV$ ) ясно, что количество теплоты, необходимое для изменения температуры газа, зависит от того, совершается ли при этом работа, т.е. изменяется ли при этом объём. Если нагреваемый (или охлаждаемый) газ заключён в закрытый сосуд **постоянного объёма**, то подводимое к нему тепло  $dQ$  затрачивается исключительно на изменение его внутренней энергии. Если же газ находится в сосуде, подобном изображённому на рисунке 13, то он будет расширяться, совершая работу подъёма поршня и сохраняя при этом давление постоянным. В этом случае из уравнения

$$dQ = dU + PdV$$

следует, что при сохранении давления газа постоянным требуется большее количество теплоты.

Количество теплоты, необходимое для нагревания газа, зависит от количества нагреваемого газа и от того, на сколько градусов должна быть изменена его температура. Чем больше то и другое, тем больше требуется количества теплоты. Поэтому для характеристики тепловых свойств газа, как и любого другого тела, пользуются особой величиной – теплоёмкостью.

**Теплоёмкостью** тела (газа) называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно подвести к нему или отнять от него для изменения его температуры на 1 К (1 кельвин).

Теплоёмкость, отнесённая к единице массы вещества, называется **удельной теплоёмкостью**. Она характеризует уже не тело, а вещество, из которого тело состоит.

Теплоёмкость, отнесённая к одному молю вещества, называется **молярной теплоёмкостью**. Как и удельная теплоёмкость, она является характеристикой вещества.

Из приведённых определений ясно, что теплоёмкость тела выражается в Дж/К, удельная теплоёмкость – в Дж/(кг·К), а молярная теплоёмкость – в Дж/(моль·К).

Между удельной теплоёмкостью, которую будем обозначать через  $c$ , и молярной  $C$  существует очевидное соотношение:

$$c = C/\mu,$$

где  $\mu$  – молярная масса вещества (численно равная массе моля).

Если 1 моль вещества нагревается не на 1 градус, а на  $dT$  градусов, то количество тепла, затрачиваемое на это, равно

$$dQ = CdT,$$

откуда

$$C = \frac{dQ}{dT}. \quad (12.1)$$

Пусть нагревание происходит в условиях, когда объём остаётся постоянным ( $V = \text{const}$ ). Соответствующая молярная теплоёмкость называется теплоёмкостью при постоянном объёме и обозначается  $C_V$ :

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V. \quad (12.2)$$

Так как теплота при этом тратится только на изменение внутренней энергии  $dU$ , то  $dQ = dU$  и

$$C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V. \quad (12.3)$$

Отсюда  $dU = C_V dT$ . Уравнение для первого начала термодинамики (11.5) можно теперь переписать в виде

$$dQ = C_V dT + PdV. \quad (12.4)$$

Следовательно, в общем случае подводимое к телу тепло расходуется на изменение температуры  $dT$  (изменение внутренней энергии) и изменение объёма  $dV$  (с этим связана механическая работа  $dA$ ). При изохорном процессе ( $V = \text{const}$ ) работа  $dA = PdV = 0$ .

Если при нагревании постоянным остаётся давление, то теплоёмкость называется теплоёмкостью при постоянном давлении  $C_P$ :

$$C_P = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P. \quad (12.5)$$

Пользуясь результатами кинетической теории газов легко вычислить молярные теплоёмкости идеального газа.

### § 2.13 Теплоёмкость одноатомных газов

Для идеального одноатомного газа согласно (10.2) внутренняя энергия 1 моля равна  $\frac{3}{2}RT$ , значит,

$$C_V = \frac{3}{2}R. \quad (13.1)$$

Если разделить это значение молярной теплоёмкости на число молекул в 1 моле, т.е. на число Авогадро, то получим выражение для среднего вклада, вносимого каждой молекулой в теплоёмкость газа:

$$\frac{3}{2} \frac{R}{N_A} = \frac{3}{2}k. \quad (13.2)$$

Следовательно, при повышении температуры на 1 кельвин энергия каждой одноатомной молекулы возрастает в среднем на  $\frac{3}{2}k$  джоулей.

Теплоёмкость  $C_P$  идеального газа при постоянном давлении найдём, подставив выражение (12.4) в (12.5):

$$C_P = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P = \left( \frac{C_V dT + PdV}{dT} \right)_P = C_V + P \left( \frac{dV}{dT} \right)_P = \frac{3}{2}R + P \left( \frac{dV}{dT} \right)_P. \quad (13.3)$$

Для 1 моля идеального газа в соответствии с (4.5)  $V = RT/P$ . Продифференцировав это выражение по  $T$  в предположении, что  $P = \text{const}$ , получим

$$\left( \frac{dV}{dT} \right)_P = \frac{R}{P}. \quad (13.4)$$

Подстановка этого выражения в (13.3) приводит к соотношению:

$$C_P = C_V + R = \frac{5}{2}R. \quad (13.5)$$

Из формулы (13.5) видно, что молярная теплоёмкость при постоянном давлении превосходит молярную теплоёмкость при постоянном объёме на величину газовой постоянной  $R$ :

$$C_P - C_V = R. \quad (13.6)$$

Значит, универсальная газовая постоянная численно равна работе, которую 1 моль идеального газа совершает, расширяясь изобарически (при постоянном давлении) при нагревании на 1 кельвин. Соотношение (13.6) называют формулой Майера.

**Тепловая функция.** Если сообщить газу некоторое количество теплоты так, чтобы давление его оставалось постоянным, т.е. давая ему возможность свободно расширяться, то уравнение, выражающее первое начало термодинамики, можно переписать в виде:

$$(dQ)_P = d(U + PV).$$

Действительно,

$$d(U + PV) = dU + PdV + VdP.$$

Но если давление остаётся постоянным, то  $dP = 0$  и соответственно

$$d(U + PV) = dU + PdV.$$

Это значит, что если процесс нагревания или охлаждения газа (или любого тела) совершается при постоянном давлении, то сообщённое ему или отнятое от него тепло оказывается равным изменению величины

$$I = U + PV, \quad (13.7)$$

которая получила название **тепловой функции** или **энтальпии**. В технике эту величину часто называют **теплосодержанием**.

Тепловая функция тоже может служить параметром, определяющим состояние газа, если изменение состояния происходит при постоянном давлении. Очевидно, что теплоёмкость газа при постоянном давлении можно выразить через тепловую функцию:

$$C_P = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P = \frac{dI}{dT}.$$

Для идеального одноатомного газа тепловая функция данной массы газа пропорциональна температуре и не зависит от занимаемого им объёма:

$$I = U + PV = \frac{3}{2} RT + RT = \frac{5}{2} RT.$$

Следовательно,

$$C_P = \frac{5}{2} R.$$

Для неидеального газа тепловая функция зависит от объёма. Очевидно, что при постоянном давлении свойства тепловой функции  $I$  аналогичны свойствам внутренней энергии  $U$  при постоянном объёме.

Важной характеристикой газов является отношение  $C_p/C_v$ , которое обозначают  $\gamma$  и называют **постоянной (показателем) адиабаты**. Имея в виду (13.5), запишем

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v},$$

Откуда молярная теплоёмкость при постоянном объёме

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (13.8)$$

Учитывая (12.3), (13.8) и (4.5), получаем для внутренней энергии 1 моля идеального газа формулы:

$$U = C_v T = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{PV}{\gamma - 1}. \quad (13.9)$$

## § 2.14 Теплоёмкость газов и число степеней свободы молекул

Для теоретических вычислений теплоёмкости мы выбирали одноатомные газы, т.е. газы, молекулы которых состоят из одного единственного атома. И это не случайно. Одно из предположений, лежащих в основе кинетической теории, из которой и следует изложенная выше теория теплоёмкости, состоит в том, что молекулы идеального газа можно рассматривать как точки или, по крайней мере, мельчайшие шарики. А такому представлению о газе ближе всего отвечают именно одноатомные газы.

Средняя энергия такой частицы полностью определяется средней кинетической энергией ее поступательного движения  $m\overline{v^2}/2$ . Эту энергию можно представить как сумму трёх слагаемых – кинетических энергий по трём взаимно перпендикулярным направлениям:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{m\overline{v_x^2}}{2} + \frac{m\overline{v_y^2}}{2} + \frac{m\overline{v_z^2}}{2},$$

где  $v_x, v_y, v_z$  – составляющие скорости молекулы по трём осям координат. Полная хаотичность молекулярных движений позволяет считать, что средние значения кинетических энергий по трём направлениям равны друг другу:

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} = \frac{m\overline{v_y^2}}{2} = \frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{3} \frac{m\overline{v^2}}{2}. \quad (14.1)$$

Так как согласно основному уравнению кинетической теории

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

то каждое из трёх слагаемых равенства (14.1) равно  $kT/2$ .

Разделение кинетической энергии молекулы на три независимые составляющие связано с тем, что одноатомная молекула рассматривается как свободная материальная точка, обладающая **тремя степенями свободы**.

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых координат, определяющих её положение и конфигурацию в пространстве. Значит, на каждую степень свободы одноатомной молекулы приходится энергия, равная  $kT/2$ . К одноатомным газам относятся инертные газы.

Теперь рассмотрим другой случай – двухатомной молекулы, например, водорода ( $H_2$ ). Её можно представить себе в виде системы, состоящей из двух атомов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга (рисунок 16). Если расстояние между этими атомами не меняется (такие молекулы называют жёсткими), то такая система, вообще говоря, имеет шесть степеней свободы.

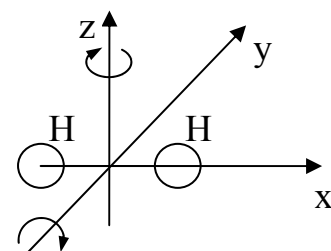


Рисунок 16

Действительно, положение и конфигурация такой молекулы определяется: тремя координатами ее центра масс, которыми определяется поступательное движение молекулы как целого, и тремя координатами, определяющими возможные вращения молекулы около взаимно перпендикулярных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Однако опыт и теория показывают, что вращение молекул около оси  $Ox$  (см. рисунок 16), на которой лежат центры обоих атомов, может быть возбуждено лишь при очень высоких температурах. При обычных температурах вращение около оси  $Ox$  не происходит, так же как не вращается отдельный атом. Поэтому для описания возможных вращений двухатомной молекулы достаточно двух координат.

Следовательно, **число степеней свободы жёсткой двухатомной молекулы равно 5**, из них три поступательные и две вращательные степени свободы. К двухатомным газам относятся водород ( $H_2$ ), кислород ( $O_2$ ), азот ( $N_2$ ), воздух.

Если молекула упругая, то возможны колебания атомов. Если амплитуды колебаний атомов в молекуле достаточно малы (по сравнению с расстоянием между ними), то такие колебания можно считать гармоническими. Атомы в этом случае являются гармоническими осцилляторами. Но осциллятор обладает не только кинетической, но и потенциальной энергией, обусловленной силами, возвращающими атом в положение равновесия. Для гармонического осциллятора, как известно из механики, средние значения кинетической и потенциальной энергии равны между собой. Следовательно, если в молекуле возбуждены гармонические колебания атомов, то по закону равнораспределения на каждую колебательную степень свободы приходится  $kT/2$  в виде кинетической энергии и  $kT/2$  в виде потенциальной. Для ангармонических (не гармонических) колебаний это неверно. Другими словами: энергия, приходящаяся на каждую колебательную степень свободы, равна не  $kT/2$ , а  $2 \cdot (kT/2) = kT$ .

Упомянутый выше вывод, что на каждую степень свободы одноатомной молекулы приходится энергия, равная  $kT/2$ , **Больцман** обобщил в виде **гипотезы (теоремы) о равном распределении средней энергии по степеням свободы**. Согласно этой теореме: если система молекул находится в тепловом равновесии при температуре  $T$ , то средняя энергия равномерно распределена между всеми степенями свободы и для каждой степени свободы молекулы она равна  $kT/2$ .

Итак, если число степеней свободы молекулы газа равно  $i$ , то её средняя энергия равна

$$i \frac{kT}{2},$$

а внутренняя энергия одного моля такого газа

$$U = \frac{i}{2} RT. \quad (14.2)$$

Соответственно этому молярные теплоёмкости газа

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R \quad (14.3)$$

и

$$C_P = C_V + R = \left( \frac{i}{2} + 1 \right) R. \quad (14.4)$$

При подсчёте числа степеней свободы  $i$  необходимо число колебательных степеней свободы удвоить.

## § 2.15 Изменение состояния при изменении объёма газа

Из уравнения закона сохранения энергии (12.4)

$$dQ = C_V dT + PdV$$

видно, что подводимая к газу теплота может вызывать изменения температуры газа ( $dT$ ) и изменение его объёма ( $dV$ ). Ранее мы рассмотрели с энергетической точки зрения процесс изменения температуры газа. Теперь обратимся к вопросу о расширении и сжатии идеального газа, т.е. к вопросу об изменении его состояния при изменении объёма.

Было показано, что количество теплоты, необходимое для изменения температуры газа, зависит от условий, в которых это изменение происходит, от того, сохраняется ли при нагревании газа неизменным его объём или давление, т.е. является ли изменение температуры изохорическим или изобарическим.



Сжатие и расширение газа тоже может происходить в различных условиях, и от условий опыта зависит энергетический результат процесса, т.е. совершаемая при этом работа (ведь изменение объёма газа связано именно с работой).

Сжатие и расширение газа можно произвести так, чтобы его температура оставалась постоянной. Такой процесс называется **изотермическим**. Его можно осуществить, поместив газ в сосуд, снабжённый поршнем, причём температура сосуда поддерживается постоянной. Для этого его помещают в термостат – аппарат, снабжённый каким-нибудь источником энергии (электрической печью, горелкой и т.д.). При хорошем контакте газа со средой термостата можно добиться того, чтобы при выделении энергии газом количество тепла, подводимого от источника, уменьшалось, а при поглощении газом энергии оно увеличивалось и тем самым обеспечивалось постоянство температуры. Специальное устройство – терморегулятор – автоматически поддерживает температуру в термостате постоянной.

Если в этих условиях перемещать с помощью внешней силы поршень вниз (см. рисунок 13), газ будет сжиматься, а внешняя сила – совершать работу. Наоборот, при расширении положительная работа совершается силой, с которой газ давит на поршень.

Изменение объёма можно также произвести в условиях, когда к газу не подводится и от него не отводится теплота. Такой процесс называется **адиабатным**. В отличие от изотермического процесса, требующего хорошего контакта со средой термостата, адиабатный процесс, напротив, требует тщательной тепловой изоляции газа от окружающей среды.

## § 2.16 Работа, совершаемая идеальным газом при различных процессах

**Работа при изотермическом изменении объёма газа.** Чтобы определить работу при изотермическом изменении объёма газа, необходимо, согласно уравнению (11.4), вычислить интеграл

$$\int dA = \int PdV$$

вдоль изотермы. Мы не можем вынести  $P$  за знак интеграла, так как давление во время расширения газа непрерывно изменяется.  $A$  изменяется оно с изменением объёма по закону Бойля-Мариотта, т.е.

$$PV = RT = \text{const}, \quad \text{откуда} \quad P = \frac{RT}{V}.$$

Подставив это выражение для  $P$  под знак интеграла, получим для работы  $A_{12}$  при изменении объёма от  $V_1$  до  $V_2$ :

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} RT \frac{dV}{V} = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.1)$$

Это и есть выражение для работы изотермического расширения (или сжатия) 1 моля идеального газа. Если масса газа не равна 1 молю, то формула (16.1) принимает вид:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (16.2)$$

где  $M/\mu$  – число молей (количество вещества).

Из формул (16.1) и (16.2) видно, что работа изотермического расширения зависит не от разности объёмов, между которыми происходит расширение, а от их отношения. То же относится, конечно, и к сжатию.

Так как по закону Бойля-Мариотта  $P_1 V_1 = P_2 V_2$  (зависимость давления от объёма – гипербола), то

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Поэтому в формулах (16.1) и (16.2) вместо отношения объёмов можно подставить обратное отношение давлений. Тогда

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} RT \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (16.3)$$

Как уже указывалось, при изотермическом расширении подводимая к газу теплота тратится только на совершение внешней работы. Наоборот, при изотермическом сжатии работа внешних сил идёт на увеличение внутренней энергии (нагревание) окружающих тел. Формально это соответствует тому, что теплоёмкость газа  $\frac{dQ}{dT}$  равна  $\infty$  (так как  $dT = 0$ ).

**Адиабатный процесс.** При адиабатном процессе газ не отдаёт окружающим телам теплоту, так же как и не получает её извне ( $dQ = 0$ ). Закон сохранения энергии (12.4) принимает в этом случае вид:

$$- PdV = C_v dT. \quad (16.4)$$

Это значит, что работа, связанная с изменением объёма газа, должна сопровождаться изменением внутренней энергии, а значит, и температуры. Знак минус в выражении (16.4) означает, что увеличение объёма газа (расширение) сопровождается понижением его температуры, а сжатие – повышением температуры. В первом случае работа совершается газом за счёт убыли его собственной внутренней энергии, поэтому его температура понижается. Во втором случае работа совершается внешней силой и за счёт этой работы растёт внутренняя энергия, а значит, и температура газа.

**Уравнение Пуассона.** Прежде чем вычислить работу при адиабатном изменении объёма газа, необходимо найти соотношение между объёмом газа и

его давлением, так как при адиабатном процессе оно уже не будет определяться законом Бойля-Мариотта. Для этого следует из уравнения

$$C_V dT + PdV = 0 \quad (16.5)$$

исключить  $T$ . Это можно сделать, воспользовавшись уравнением состояния

$$PV = RT,$$

дифференцирование которого даёт:

$$PdV + VdP = RdT, \quad \text{откуда} \quad dT = \frac{PdV + VdP}{R}.$$

Подставив это значение  $dT$  в (16.5), получаем:

$$C_V \frac{PdV + VdP}{R} + PdV = 0,$$

или после замены  $R$  равным ему значением  $C_P - C_V = R$  имеем:

$$C_V VdP + C_P PdV = 0.$$

Обозначим отношение  $C_P/C_V = \gamma$ , тогда последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \quad (16.6)$$

В предположении, что  $\gamma$  постоянно, можно написать:

$$\int \frac{dP}{P} + \gamma \int \frac{dV}{V} = 0.$$

После интегрирования получаем:  $\ln P + \gamma \ln V = \text{const}$ , или

$$PV^\gamma = \text{const}. \quad (16.7)$$

Это и есть искомое соотношение между давлением и объёмом идеального газа при адиабатном процессе изменения объёма. Уравнение (16.7) называется **уравнением Пуассона** или уравнением адиабаты, а величина  $\gamma = C_P/C_V$  – **показателем адиабаты**.

При интегрировании уравнения (16.6) мы приняли величину  $\gamma$  постоянной. Строго говоря, это не совсем точно. Теплоёмкость  $C_V$ , а следовательно,  $C_P$  и  $\gamma$

могут меняться с изменением объёма, давления и температуры. Поэтому уравнение (16.7) строго справедливо для ограниченного интервала значений давлений и объёмов. Дифференциальное же уравнение (16.6) является точным.

Из уравнения Пуассона видно, что, в отличие от изотермического процесса, при адиабатном изменении объёма газа его давление меняется обратно пропорционально не первой степени объёма, а  $V^\gamma$ , причём  $\gamma > 1$ , так как  $C_p > C_v$ . Понятно, что график зависимости давления от объёма теперь уже не будет гиперболой.

Так как  $\gamma > 1$ , то кривая  $P(V)$  при адиабатном процессе, называемая **адиабатой**, круче изотермы, как это видно из рисунка 17, на котором изображена адиабата и, для сравнения, изотерма идеального газа. Более крутое падение давления с увеличением объёма при адиабатном процессе объясняется тем, что при адиабатном расширении идеального газа его давление уменьшается не только за счёт увеличения объёма, но и вследствие происходящего при этом понижения температуры газа.

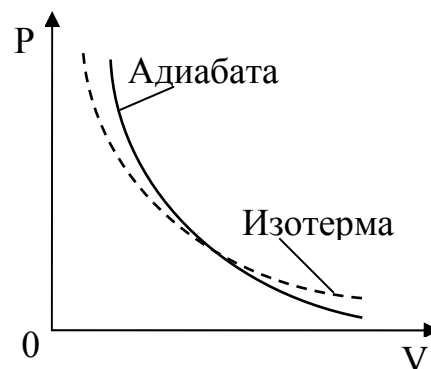


Рисунок 17

Нетрудно найти соотношения между другими параметрами газа при адиабатном процессе.

Так, например, исключив из уравнения (16.7) и уравнения состояния  $PV=RT$  давление  $P$ , получим соотношение между температурой и объёмом газа при его адиабатном изменении. Подставив в уравнение (16.7) значение  $P=RT/V$ , получаем:

$$\frac{RT}{V} V^\gamma = \text{const},$$

или

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (16.8)$$

(поскольку  $R$  – постоянная).

Точно так же, подставив в уравнение (16.7) значение  $V$  из уравнения состояния,  $V = RT/P$ , получим соотношение между давлением и температурой при адиабатном процессе:

$$P \left( \frac{RT}{P} \right)^\gamma = \text{const}$$

или

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (16.9)$$

Возведя обе части равенства (16.9) в степень  $1/\gamma$ , получаем:

$$T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const.} \quad (16.10)$$

Так как  $\gamma > 1$ , то из (16.8) следует, что при адиабатном сжатии газ нагревается, а при адиабатном расширении – охлаждается. На этом основано явление **пневматического огня**. Это явление находит применение в дизелях, где воспламенение горючей смеси осуществляется путём адиабатного сжатия. Нагревание газа при адиабатном сжатии объясняется тем, что во время сжатия над газом производится работа, которая идёт на увеличение его внутренней энергии. А так как внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, то это увеличение внутренней энергии проявляется в повышении его температуры. Аналогично объясняется и охлаждение газа при адиабатном расширении.

**Работа при адиабатном изменении объёма газа.** Пользуясь полученным уравнением адиабаты, мы теперь можем вычислить работу, совершаемую газом при его адиабатном расширении (или работу, производимую внешними силами при сжатии газа).

Вычислим работу расширения 1 моля газа от некоторого начального значения объёма  $V_1$  до  $V_2$ . По-прежнему элементарная работа при изменении объёма на  $dV$  равна

$$dA = PdV.$$

Связь между давлением газа  $P$  и его объёмом  $V$  определяется уравнением адиабаты (чтобы быть равновесным, процесс расширения должен вестись вдоль адиабаты):

$$PV^\gamma = \text{const},$$

которое мы можем написать и в таком виде:

$$PV^\gamma = P_1 V_1^\gamma,$$

где  $P_1$  – начальное давление газа,  $V_1$  – начальный его объём.

Отсюда

$$P = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}.$$

Подставив это значение  $P$  в формулу для работы, получим:

$$dA = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV.$$

Чтобы получить работу расширения от  $V_1$  до  $V_2$  надо проинтегрировать выражение для  $dA$  в этих пределах:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma}.$$

После интегрирования получаем для интеграла в правой части равенства выражение:

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right).$$

Поэтому выражение для работы  $A_{12}$  принимает вид:

$$A_{12} = \frac{P_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Из уравнения состояния следует, что  $P_1 = RT_1/V_1$ , откуда получаем окончательное выражение:

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (16.11)$$

Если масса газа  $M$ , эта формула принимает вид:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (16.12)$$

Так как  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ , то  $\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$ . Поэтому формулу для работы при адиабатном изменении объёма 1 моля газа можно представить в виде:

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) = C_V (T_1 - T_2), \quad (16.13)$$

так как  $\frac{R}{\gamma-1} = C_V$ .

При адиабатном расширении совершается меньшая работа, чем при изотермическом (при одном и том же изменении объёма). Это связано с большей крутизной адиабаты по сравнению с изотермой, так как из-за этого при одинаковых начальных условиях в любой стадии процесса расширения давление при адиабатном процессе будет меньше, чем при изотермическом.

Работа при адиабатном расширении газа существенно зависит от значения показателя адиабаты  $\gamma = C_p/C_v$ . Легко видеть, что если  $\gamma \rightarrow 1$ , работа адиабатного расширения стремится к значению работы при изотермическом процессе. У многоатомных газов, для которых  $\gamma$  ближе всего к единице, разница в значениях работ изотермического и адиабатного процессов наименьшая.

**Работа при изобарном изменении объёма газа.**  $P$   
 Диаграмма этого процесса (**изобара**) на графике  $P(V)$  изображается прямой, параллельной оси  $V$ . При изобарном процессе работа газа (см. рисунок 18) при увеличении объёма от  $V_1$  до  $V_2$  равна

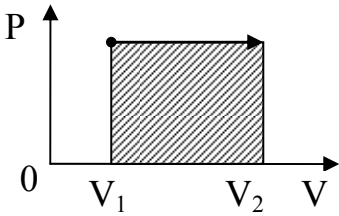


Рисунок 18

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1) \quad (16.14)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника. Если использовать уравнение состояния для выбранных нами двух состояний, то

$$PV_1 = \frac{M}{\mu} RT_1, \quad PV_2 = \frac{M}{\mu} RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{M}{\mu} \frac{R}{P} (T_2 - T_1).$$

Тогда выражение (16.14) для изобарного расширения примет вид:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (16.15)$$

**Измерение отношения  $C_p/C_v$ .** Как выше было показано, отношение теплоёмкостей газов  $\gamma = C_p/C_v$  играет важную роль в теории идеальных газов, так как оно зависит от числа степеней свободы  $i$  молекул. Кроме того, эта величина входит в уравнение адиабаты. Роль этой величины заключается ещё и в том, что, зная её, можно не прибегать к измерениям  $C_v$ , которые всегда трудны. Значение  $C_v$  можно получить из измеренных значений  $C_p$  и  $\gamma$ . Часто именно так и поступают.

Существует несколько способов измерения  $C_p/C_v$ . Наиболее удобным и точным из них следует считать метод, основанный на измерении скорости звука. Дело в том, что скорость звука  $v_{зв}$  в газе определяется формулой:



$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}},$$

где  $P$  – давление газа,  $\rho$  – его плотность. Если  $P$  и  $\rho$  известны, то, измерив скорость звука, мы получаем и значение величины  $\gamma = C_p/C_v$ . Метод этот удобен тем, что, используя его, нет необходимости измерять ни количество теплоты, ни температуру.

## § 2.17 Расширение газа в пустоту

В основу наших рассуждений о тепловых процессах в газах был положен закон сохранения энергии, выраженный уравнением (11.5):

$$dQ = dU + PdV.$$

Действительно, газ, находящийся, например, в сосуде с подвижным поршнем, производит на него давление и при расширении совершает работу. При изотермическом процессе работа совершается за счёт подводимой извне теплоты, при адиабатном – за счёт внутренней энергии. В этом последнем случае газ при расширении охлаждается. Взамен энергии, которую теряют молекулы, получается кинетическая энергия поршня, если ему сообщается заметная скорость, или потенциальная энергия, если, например, вместе с поршнем поднимается некоторый груз или сжимается пружина. Этой энергией можно воспользоваться для приведения в движение машины, если её должным образом соединить с поршнем.

При адиабатном сжатии, наоборот, внутренняя энергия газа увеличивается за счёт работы внешних сил. Энергия же тела, совершающего эту работу, уменьшается.

Следует, однако, заметить, что само по себе расширение газа не может привести к его охлаждению, если при расширении газ не производит работу. Это значит, что если идеальный газ расширяется таким образом, что к сосуду, в котором он находится, присоединяется другой, пустой сосуд, то температура газа не изменяется. При таком **расширении в пустоту (в вакуум)** идеальный газ не совершает работу.

Неизменность температуры газа при этом следует из того, что внутренняя энергия идеального газа не зависит от занимаемого объёма. Это было показано экспериментально Джоулем ещё в 1845 г. Опыт Джоуля состоял в следующем. Два баллона, один – наполненный воздухом до сравнительно высокого давления (около 20 атмосфер), другой – пустой (откачанный), могут быть соединены друг с другом при помощи крана. Оба баллона помещались в водяной калориметр, тщательно изолированный от окружающего пространства. Через некоторое время после открытия соединительного крана измерялось изменение температуры воды в калориметре. Опыт показал, что температура калориметра не изменялась. Это доказывает, что и газ сохранил свою начальную температуру.

Опыт Джоуля вместе с тем может служить экспериментальным доказательством того, что внутренняя энергия идеального газа при постоянной температуре не зависит от объёма.

Более поздние точные опыты показали, что при расширении сильно сжатого газа в пустоту температура газа изменяется. Но это изменение температуры связано с неидеальностью газа.

В XIX столетии, когда кинетическая теория не получила ещё достаточного развития, было потрачено немало усилий для опытного доказательства справедливости соотношения (11.2). После того как оно было твёрдо установлено, оно получило название первого начала термодинамики.

С точки зрения кинетической теории, согласно которой внутренняя энергия есть энергия хаотических движений молекул, первое начало термодинамики попросту является выражением закона сохранения энергии.

### Контрольные вопросы

1 Что такое внутренняя энергия идеального газа? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?

2 Что такое теплоёмкость газа? молярная теплоёмкость при постоянном объёме и при постоянном давлении? Какая из молярных теплоёмкостей  $C_V$  или  $C_p$  больше и почему? Что такое число степеней свободы молекул газа?

3 Чему равна работа изобарного расширения 1 моля одноатомного идеального газа при нагревании на 1 К?

4 Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется при постоянном давлении?

5 Температура газа в цилиндре постоянна. Запишите на основе первого начала термодинамики соотношение между сообщённым количеством теплоты и совершённой работой.

6 Изобразить для идеального газа примерные графики изохорного, изобарного, изотермического и адиабатного процессов на диаграммах: а) P-V; б) T-V; в) T-P. Графики изобразить проходящими через общую для них точку.

7 Газ переходит из одного и того же начального состояния 1 в одно и то же конечное состояние 2 в результате следующих процессов: а) изобарного процесса; б) последовательных изохорного и изотермического процессов. Рассмотрите эти переходы графически. Одинаковы или различны в обоих случаях: 1) изменение внутренней энергии? 2) затраченное количество теплоты?

8 Дайте вывод уравнения Пуассона. Чему равен показатель адиабаты?

9 Запишите уравнение адиабатического процесса в координатах T-V и T-P.

10 На P-V диаграмме почему адиабата более крута, чем изотерма?

11 Как изменяется температура газа при его адиабатическом сжатии?

12 Чему равна работа расширения идеального газа в пустоту?

13 Что такое тепловая функция (энтальпия или теплосодержание)?

14 Какие процессы называются квазистатическими (равновесными)?

15 Какой процесс изменения состояния системы называют круговым, или циклическим?

16 Чему равен механический эквивалент теплоты?

17 Что понимают под количеством теплоты?

18 Дайте определения первого начала термодинамики. Что оно выражает?

### Тесты

1. Газ находится в сосуде под давлением 50 МПа. При сообщении газу 60 МДж теплоты он изобарно расширился на  $0,5 \text{ м}^3$ . На сколько изменилась внутренняя энергия газа?

- А) 50 МДж      В) 45 МДж      С) 40 МДж      **Д) 35 МДж**      Е) 30 МДж

2. Для реализации изотермического сжатия газа, необходимо ...

- А) теплоизолировать сосуд с газом  
В) необходимо поддерживать постоянное давление  
С) постоянно подводить определенное количество теплоты  
**Д) постоянно отводить определенное количество теплоты**  
Е) среди приведенных ответов

3. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса водорода при температуре 300 К, занимающая при давлении 0,1 МПа объем 6 л. На сколько градусов изменится температура водорода, если при неизменном давлении совершена работа по сжатию, равная 50 Дж?

- А) 25 К**      В) 20 К      С) 15 К      Д) 10 К      Е) 5 К

4. Каково давление одноатомного идеального газа, занимающего объем 2 л, если его внутренняя энергия равна 300 Дж?

- А)  $1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$       В)  $1,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$       С)  $6 \cdot 10^6 \text{ Па}$       Д)  $1 \cdot 10^6 \text{ Па}$       **Е)  $1 \cdot 10^5 \text{ Па}$**

5. Какая из приведенных формул выражает зависимость внутренней энергии  $\nu$  молей идеального одноатомного газа от температуры?

- А)  $\nu RT$       В)  $\frac{1}{3} \nu RT$       С)  $\frac{1}{2} \nu RT$       **Д)  $\frac{3}{2} \nu RT$**       Е)  $\frac{2}{3} \nu RT$

6. Если смешать в калориметре две жидкости, имеющие одинаковые удельные теплоемкости, но разные массы ( $m_2=2m_1$ ) и разные температуры ( $T_2=\frac{1}{2} T_1$ ), то температура смеси будет равна

- А)  $\frac{3}{8}T_1$       В)  $\frac{3}{4}T_1$       С)  $\frac{4}{5}T_1$       **Д)  $\frac{2}{3}T_1$**       Е)  $\frac{5}{8}T_1$

7. Сосуд, содержащий некоторую массу азота при нормальных условиях, движется со скоростью 100 м/с. Какова будет максимальная температура азота при внезапной остановке сосуда? Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме равна 745 Дж/(кг·К).

- А) 273 К      В) 320 К      С) 300 К      Д) 400 К      **Е) 280 К**

8. Масса  $m$  идеального газа, находящегося при температуре  $T$ , охлаждается изохорно так, что давление падает в  $n$  раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определите совершенную газом работу. Молярная масса газа  $\mu$ . Универсальная газовая постоянная  $R$ .

- А)  $\frac{n+1}{n} \frac{m}{\mu} RT$       **В)  $\frac{n-1}{n} \frac{m}{\mu} RT$**       С)  $n \frac{m}{\mu} RT$       Д)  $\frac{1}{n} \frac{m}{\mu} RT$       Е)  $\frac{n}{n+1} \frac{m}{\mu} RT$

9. Свинцовая пуля, летящая со скоростью 500 м/с, попадает в стенку и входит в нее. На сколько повышается температура пули, если 10 % кинетической энергии пули идет на ее нагревание?

- А) 81 К      В) 90 К      **С) 96 К**      Д) 105 К      Е) 120 К

10. При изобарическом процессе газ совершает работу 100 Дж при изменении его температуры от  $T_1=2T_2$  до  $T_2$ . Какая работа будет совершена, если начальную температуру газа увеличить вдвое ( $T_1=4T_2$ )?

- А) 300 Дж**      В) 500 Дж      С) 200 Дж      Д) 100 Дж      Е) 400 Дж

11. В цилиндре при температуре  $t=20$  °С находится  $m=2$  кг воздуха ( $\mu=29$  г/моль) под давлением  $P=9,8 \cdot 10^5$  Па. Определите работу воздуха при его изобарном нагревании на  $\Delta t=100$  °С.

- А) 57,3 кДж**      В) 47,3 кДж      С) 37,3 кДж      Д) 27,3 кДж      Е) 17,3 кДж

12. Некоторая установка, выделяющая мощность  $N=30$  кВт, охлаждается проточной водой, протекающей по спиральной трубке диаметром  $d=15$  мм. При установившемся режиме проточная вода нагревается на  $\Delta t=15$  °С. Определите скорость воды, предполагая, что вся выделяемая мощность установки идет на нагрев воды.

- А) 1,5 м/с      В) 1,8 м/с      С) 2,0 м/с      Д) 2,5 м/с      **Е) 2,7 м/с**

13. Какое количество теплоты нужно передать 2 молям идеального одноатомного газа, чтобы изобарно увеличить его объем в 2 раза? Начальная температура газа  $T_0$ . Газовая постоянная  $R$ .

- А)  $2RT_0$       В)  $3RT_0$       С)  $4RT_0$       **Д)  $5RT_0$**       Е)  $6RT_0$

14. Идеальный одноатомный газ находится в сосуде с жесткими стенками объемом  $0,6 \text{ м}^3$ . При нагревании его давление возросло на 3 кПа. Насколько увеличилась внутренняя энергия газа?

- А) 2,7 кДж**      В) 3,6 кДж      С) 1,8 кДж      Д) 2,4 кДж      Е) 4,5 кДж

15. Нагреваемый при постоянном давлении идеальный двухатомный газ совершил работу 400 Дж. Какое количество теплоты было передано газу?

- А) 200 Дж      **В) 1 400 Дж**      С) 400 Дж      Д) 800 Дж      Е) 1 000 Дж

16. Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно, а затем – изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 4,5 кДж. Чему равна работа газа за весь процесс?

- А) 7,0 кДж      В) 9,0 кДж      С) 8,5 кДж      Д) 8,0 кДж      **Е) 7,5 кДж**

17. В кастрюле с водой, поставленной на электроплиту, теплообмен между конфоркой и водой осуществляется путем ...

- А) конвекции и теплопроводности**      В) излучения и теплопроводности  
С) излучения и конвекции      Д) излучения      Е) теплопроводности

18. Когда в стакан с теплой водой массой 200 г при  $75^\circ\text{C}$  опустили ложку, имевшую температуру  $10^\circ\text{C}$ , температура воды понизилась до  $70^\circ\text{C}$ . Чему равна теплоемкость ложки? Теплоемкостью стакана пренебрегайте.

- А) 70 Дж/К**      В) 55 Дж/К      С) 60 Дж/К      Д) 65 Дж/К      Е) 75 Дж/К

19. В ходе нагревания газу передана от нагревателя энергия 3 МДж. При этом, расширяясь, газ совершил работу, равную 1 МДж. Чему равно изменение внутренней энергии газа?

- А) 4 МДж      В) 3 МДж      **С) 2 МДж**      Д) 1 МДж      Е) 0

20. При изобарном расширении азота газ совершил работу, равную 157,1 Дж. Какое количество теплоты было сообщено азоту? Молярная масса азота равна 28 г/моль, его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна 745 Дж/(кг·К).

- А) 1 400 Дж      В) 740 Дж      С) 680 Дж      **Д) 550 Дж**      Е) 325 Дж

21. Молот массой 2 т падает на стальную болванку массой 10 кг с высоты 3 м. Насколько нагреется болванка при ударе, если на нагревание идет 50 % всей энергии молота. Удельная теплоемкость стали равна 460 Дж/(кг·К). Ускорение силы тяжести 10 м/с<sup>2</sup>.

- А) 9,5 К      В) 3,2 К      С) 19 К      Д) 12,9 К      Е) 6,5 К

22. Определите радиус полости, образующейся при подводном взрыве на глубине  $h=100$  м заряда взрывчатого вещества массой  $m=1$  т. Удельная теплота сгорания взрывчатого вещества  $q=4$  МДж/кг. Плотность воды  $\rho=1\,000$  кг/м<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

- А) 5 м      В) 7,1 м      С) 10 м      Д) 20 м      Е) 25 м

23. 1 моль газа, имевший начальную температуру  $T_1=300$  К, изобарно расширился, совершив работу  $A=12,5$  кДж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа?

- А) 7      В) 5      С) 8      Д) 4      Е) 6

24. В каких из перечисленных ниже процессов газ совершает работу?

- А) при изотермическом расширении      В) при изобарическом расширении  
С) при адиабатическом расширении      Д) во всех перечисленных процессах  
Е) ни в одном из перечисленных процессов

25. Гелий в количестве  $\nu=4$  моль сжимают в процессе с постоянной теплоемкостью  $C$ . В результате от газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на 100 К. Определить теплоемкость  $C$ . Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- А) -50 Дж/К      В) -10 Дж/К      С) -75 Дж/К      Д) -25 Дж/К      Е) 0

26. Гелий из состояния с температурой  $T_1=200$  К расширяется в процессе  $PV^2=\text{const}$  ( $P$  – давление,  $V$  – объем газа) с постоянной теплоемкостью  $C$ . От газа отвели количество теплоты 400 Дж, и конечный объем газа стал вдвое больше начального. Определите теплоемкость  $C$ .

- А) 16 Дж/К      В) 2 Дж/К      С) 8 Дж/К      Д) 32 Дж/К      Е) 4 Дж/К

27. Гелий в количестве  $\nu = 4$  моль сжимают в процессе с постоянной теплоемкостью  $C$ . В результате, от газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на 100 К. Чему равна работа, совершаемая газом?

А)  $-2 \cdot 10^4$  Дж В)  $-2 \cdot 10^5$  Дж С) 0 Д)  $-1 \cdot 10^5$  Дж Е)  $-1 \cdot 10^4$  Дж

28. При изобарном расширении 80 г кислорода с температурой 300 К его объем увеличился в 1,5 раза. Определите работу, совершенную для расширения кислорода. Молярная масса кислорода  $\mu=32$  г/моль.

А) 2,28 кДж В) 2,56 кДж С) 2,81 кДж Д) 3,12 кДж Е) 3,48 кДж

29. Кислород массой  $m=1$  кг находится при температуре  $T=320$  К. Определите внутреннюю энергию молекул кислорода. Молярная масса кислорода  $\mu=32$  г/моль.

А) 202 кДж В) 205 кДж С) 208 кДж Д) 212 кДж Е) 214 кДж

30. Если бы удалось полностью использовать энергию, которая выделяется при остывании 250 г воды от температуры  $100^\circ\text{C}$  до  $20^\circ\text{C}$ , то на какую высоту можно было бы поднять груз массы 1 000 кг? Удельная теплоемкость воды  $4\,200$  Дж/(кг·К). Ускорение свободного падения  $9,8$  м/с<sup>2</sup>.

А) 8,2 м В) 8,6 м С) 6,5 м Д) 7,8 м Е) 7,2 м

Верные ответы в тестах отмечены красным цветом.

### Упражнения для самоконтроля

2.1. Азот массой 1 кг находится при температуре 280 К. Определить: 1) внутреннюю энергию молекул азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул азота. Газ считать идеальным.

[1) 208 кДж; 2) 83,1 кДж]

2.2. Определить удельные теплоёмкости  $c_v$  и  $c_p$  некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях равна  $1,43$  кг/м<sup>3</sup>.

[ $c_v = 650$  Дж/(кг·К),  $c_p = 910$  Дж/(кг·К)]

2.3. Водород массой  $m = 20$  г был нагрет на  $\Delta T = 100$  К при постоянном давлении. Определить: 1) количество теплоты  $Q$ , переданное газу; 2) приращение  $\Delta U$  внутренней энергии газа; 3) работу  $A$  расширения. [1) 29,3 кДж; 2) 20,9 кДж; 3) 8,4 кДж]

2.4. Кислород объёмом 2 л находится под давлением 1 МПа. Определить, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. [5 кДж]

2.5. Некоторый газ массой 2 кг находится при температуре 300 К и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в три раза. Работа, затраченная на сжатие,  $A = -1,37$  кДж. Определить: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объём газа. [1) гелий; 2)  $1,25$  м<sup>3</sup>/кг]

2.6. Двухатомный идеальный газ занимает объём  $V_1 = 1$  л и находится под давлением  $P_1 = 0,1$  МПа. После адиабатического сжатия газ характеризуется



объёмом  $V_2$  и давлением  $P_2$ . В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление  $P_2 = 0,2$  МПа. Определить: 1) объём  $V_2$ ; 2) давление  $P_2$ . Представить эти процессы графически. [1) 0,5 л; 2) 0,26 МПа]

2.7. Определить постоянную адиабаты  $\gamma$  для газовой смеси, состоящей из  $\nu_1$  молей газа с постоянной адиабаты  $\gamma_1$  и  $\nu_2$  молей газа с постоянной  $\gamma_2$ .

$$\left[ \frac{\nu_1 \gamma_1 (\gamma_2 - 1) + \nu_2 \gamma_2 (\gamma_1 - 1)}{\nu_1 (\gamma_2 - 1) + \nu_2 (\gamma_1 - 1)} \right]$$

2.8. Идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma$  расширили в  $\eta$  раз по закону  $P = \alpha V$ , где  $\alpha$  – постоянная. Первоначальный объём газа  $V_1$ . Найти: 1) приращение внутренней энергии газа; 2) работу, совершённую газом; 3) молярную теплоёмкость газа в этом процессе.

$$[1) \alpha V_1^2 (\eta^2 - 1) / (\gamma - 1); 2) \frac{1}{2} \alpha V_1^2 (\eta^2 - 1); 3) \frac{R}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}]$$

### Глава 3 Столкновения молекул и явления переноса

Столкновения между молекулами играют очень важную роль во всех процессах, происходящих в газах. В частности, столкновения «ответственны» за установление равновесного максвелловского распределения молекул по скоростям. Столкновения это и есть механизм, обеспечивающий переход газа к равновесному состоянию и поддержание равновесного состояния.

#### § 3.18 Молекулярные движения и явления переноса

Вычисление скоростей газовых молекул из основного уравнения кинетической теории

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT$$

приводит к весьма высокому численному значению для скорости молекул. При комнатной температуре она оказывается равной (и это подтверждается прямым опытом) приблизительно 500 м/с для молекул воздуха и 1 800 м/с для молекул водорода. Эти значения кажутся неожиданно большими, потому что на первый взгляд противоречат некоторым хорошо известным фактам.

Поясним это примерами. В равновесном состоянии температура газа во всех частях занимаемого им объёма одинакова. Это значит, что средняя кинетическая энергия частиц повсюду в газе одна и та же. Если каким-нибудь образом одну часть газа нагреть, то тем самым равновесие будет нарушено. Но если после этого предоставить газ самому себе, то через некоторое время равновесие восстановится – температура снова станет одинаковой во всех частях газа. Очевидно, что это выравнивание температуры происходит благодаря непрерывным движениям молекул. В нагретой части газа быстрых молекул больше чем в дру-

гих его частях, но из-за молекулярных движений эти быстрые молекулы устремляются туда, где их меньше, и таким образом их число становится равным повсюду.

Конечно, одновременно происходит перемещение молекул и в нагретую область, так что число молекул в единице объёма не изменяется ни в нагретой, ни в других частях газа. Происходит только выравнивание давления и **перенос энергии** из той части газа, где она больше, туда, где она меньше. Этот процесс называется **теплопроводностью**.

Из того факта, что скорости молекул очень велики, следует, как будто бы, что температура должна выравниваться очень быстро. Между тем опыт показывает, что теплопроводность газов очень мала; проходит значительное время, прежде чем температура газа выровняется, если одна его часть нагрета больше другой.

Другой пример. Если к газу, заполняющему некоторый объём, добавить примесь другого газа так, чтобы при одинаковых во всём объёме давлении и температуре концентрация примеси в одной части была выше, чем во всех других, то, как показывает опыт, через некоторое время примесь распределится по всему объёму и смесь станет однородной. Такое выравнивание концентраций вызывается, очевидно, перемещением молекул примеси в направлении меньшей концентрации этих молекул и называется **диффузией**. На место переместившихся молекул примеси приходят другие молекулы, так что давление газа и здесь остаётся неизменным. Происходит лишь **перенос массы** примешанного газа.

Так как и этот перенос обеспечивается движением молекул, а скорости этих движений велики, то диффузия, казалось бы, должна происходить быстро – концентрации должны выравниваться почти мгновенно. Опыт, однако, показывает, что при атмосферном давлении диффузия – весьма медленный процесс и перемешивание при отсутствии движения газа как целого может длиться сутками.

Наконец равновесие газа может быть нарушено тем, что одной из его частей сообщена скорость течения, отличная от скорости течения соседних частей. И в этом случае благодаря **переносу импульса** от быстро движущихся к медленнее движущимся частям газа скорость течения всего газа станет через некоторое время одинаковой во всех его частях. Это явление называется **внутренним трением** или **вязкостью**. И в этом случае причиной выравнивания скорости течения газа являются тепловые движения его молекул. Опыт показывает, что восстановление равновесия происходит и в этом случае медленнее, чем можно было бы ожидать исходя из больших скоростей молекулярных движений.

Чем же объяснить, что во всех трёх приведённых примерах **явления переноса** протекают медленно, хотя все они происходят благодаря быстрым движениям молекул? Причина этого несоответствия состоит в том, что в этих явлениях установления равновесия важную роль играют не только скорости движения молекул, но и столкновения между ними, которые, очевидно, препятствуют свободным движениям молекул. При огромном числе молекул, которое характерно для газа при обычных давлениях, нельзя себе представить, чтобы они

могли весь свой путь в газе проходить без взаимодействия друг с другом, приводящего к изменению направления движения, т.е. не сталкиваясь между собой. Столкновение молекул и есть результат их взаимодействия.

Вообще говоря, взаимодействие молекул может приводить к самым различным результатам. Молекулы могут отклоняться от своего прямолинейного пути (рассеиваться), они могут распадаться на более простые части (диссоциировать), например, на атомы и т.д. В нашем курсе нас будет интересовать только процесс изменения направления движения молекулы в результате столкновения. Такой процесс часто называют **рассеянием** молекул.

Изменение направления движения молекул вызывается силами их взаимодействия, которые становятся заметными лишь при малых расстояниях между ними. Поэтому отклонение молекул от начального направления происходит только при достаточном их сближении. Изменение направления движения молекулы называют **столкновением** молекул.

Именно с таким понятием столкновения связана величина, которой характеризуют геометрические размеры молекул. При этом используется понятие о размерах макроскопических тел, взятое из повседневной практики. Представим себе, например, столкновение двух бильярдных шаров. Столкновение всегда приводит к изменению начального направления движения шаров и (или) их скорости. Ясно, что радиус каждого из шаров равен половине расстояния между их центрами при взаимном соприкосновении: именно в таком положении находятся шары в момент столкновения (рисунок 19). Подобно этому мы можем определить **радиус**  $r$  молекулы как половину расстояния между ее центром и центром другой такой же молекулы, вызвавшей отклонение нашей молекулы от начального направления ее движения.

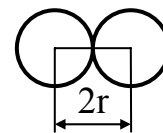


Рисунок 19

Другими словами, при рассмотрении столкновений между молекулами мы их будем считать твёрдыми упругими шариками. Такое грубое (и заведомо неверное) приближение оправдано тем, что во многих отношениях молекулы действительно ведут себя подобно твёрдым упругим шарикам.

В действительности эти «шарики» являются сложными системами заряженных частиц, ядер и электронов, между которыми действуют силы притяжения и отталкивания, сложным образом зависящие от расстояния между молекулами-«шариками». Хотя в этом случае и нельзя говорить о соприкосновении «поверхностей» молекул, тем не менее, размеры молекул можно определить как расстояние между их центрами при столкновении.

Вопрос о столкновениях частиц имеет в физике значительно более широкое значение, чем рассматриваемый нами случай столкновения молекул. Во многих областях физики приходится рассматривать взаимодействие частиц друг с другом или световых квантов с частицами вещества, в частности с ядрами атомов. Такое взаимодействие может привести к самым различным последствиям, процессам. В результате взаимодействия может, например, последовать упругое или неупругое рассеяние частицы (или кванта света – фотона), захват ее (так, нейтрон при некоторых условиях может быть захвачен ядром, с которым он столкнулся, образуя новое, искусственное ядро), ионизация атома и т.д.

Во всех этих случаях для количественной характеристики процесса вводят понятие **эффективной площади сечения**, или, для краткости, **сечения** данного процесса. Оно вполне аналогично введённому нами понятию о размерах молекул.

Представим себе частицу 1, летящую прямолинейно (рисунок 20). Положим далее, что для того, чтобы произошёл тот или иной из интересующих нас процессов при взаимодействии этой частицы с другой частицей 2, необходимо, чтобы частица 1 пролетала достаточно близко от частицы 2, например, на расстоянии не больше некоторого значения  $r$ .

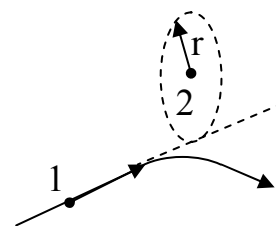


Рисунок 20

Если провести вокруг частицы 2 круг радиусом  $r$ , плоскость которого перпендикулярна к направлению движения частицы 1, то можно утверждать, что только в том случае взаимодействие частиц 1 и 2 приведет к интересующему нас процессу, если **прицельное направление** частицы 1, т.е. прямая, совпадающая с направлением движения ее центра, пройдет внутри круга радиусом  $r$ .

Площадь этого круга  $\sigma = \pi r^2$  и носит название **сечения** данного процесса. В частности, на рисунке 20 представлен случай, когда в результате столкновения произошло отклонение (рассеяние) частицы 1 от своего начального направления движения.

Если представлять столкновение молекул как столкновение твёрдых шариков, то радиус этих молекул равен  $r/2$ , поскольку при столкновении двух шаров расстояние между их центрами равно удвоенному радиусу шаров (если шары одинаковые). Площадь поперечного сечения такого шара, т.е. площадь его большого круга равен  $\pi r^2/4$ . Это значит, что эффективный поперечник молекул  $\sigma$  в 4 раза больше площади поперечного сечения молекулы.

### § 3.19 Средняя длина свободного пробега молекул

По-прежнему будем считать газ идеальным, т.е. будем считать, что за исключением момента столкновения молекулы не взаимодействуют, не подвергаются действию каких-либо сил и движутся поэтому прямолинейно. В момент столкновения направление скорости молекулы изменяется, после чего она снова движется прямолинейно. Путь молекулы в газе представляет, таким образом, ломаную линию, подобную, например, изображённой на рисунке 21. Каждый излом траектории отмечает место столкновения. Расстояние, которое молекула проходит между двумя последовательными столкновениями, называется **длиной свободного пробега**.

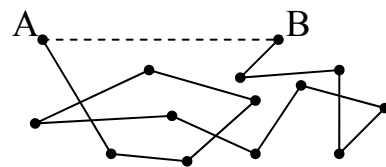


Рисунок 21

Так как число молекул в газе чрезвычайно велико, то не может быть и речи о какой-либо регулярности в процессе столкновений, и длины прямолинейных участков на зигзагообразном пути молекулы могут быть различными. Поэтому нас будет интересовать **средняя длина свободного пробега**. Точно так же различным может быть и **число столкновений**, испытываемых молекулой в едини-

цу времени, и следует говорить только о **среднем числе столкновений в единицу времени**.

Эти две связанные между собой величины – средняя длина свободного пробега и среднее число столкновений в единицу времени – являются главными характеристиками процесса столкновений газовых молекул. В частности, те «помехи» явлениям переноса, о которых упоминалось выше, зависят от числа столкновений. Именно от этого зависит длина пути, который молекула проходит между двумя данными точками в объёме газа. Как это видно из рисунка 21, истинный путь молекулы между точками А и В много больше, чем расстояние АВ по соединяющей их прямой. Ясно, что, например, процесс диффузии, т.е. проникновение одного газа в другой, не может происходить быстро, несмотря на большую скорость молекул: столкновения в значительной степени компенсируют влияние скорости.

Среднее число столкновений, испытываемых молекулой газа в единицу времени, можно вычислить из весьма простых соображений. Молекулы будем считать твёрдыми упругими шариками радиуса  $r$ . Пусть одна из молекул движется в газе, в котором молекулы равномерно распределены по объёму. Обозначим концентрацию молекул (число молекул в единице объёма) через  $n$ . Предположим сначала, что все молекулы, кроме одной, находятся в покое. Тогда наша единственная движущаяся молекула, пройдя за  $t$  с расстояние, равное ее средней скорости  $\bar{v}$ , столкнётся со всеми молекулами, которые окажутся на ее пути. Это будут те молекулы, центры которых расположены в объёме цилиндра длиной  $\bar{v}$  и с площадью основания, равной эффективному поперечнику столкновения (рисунок 22). Объём этого цилиндра равен  $\sigma \bar{v}$ , а число молекул в нём  $\sigma \bar{v} n$ . Таким же будет и число столкновений  $Z$ , которые испытывает наша молекула:

$$Z = \sigma \bar{v} n. \quad (19.1)$$

Конечно, молекула не может двигаться прямолинейно, раз она сталкивается с другими молекулами. На самом деле путь, проходимый молекулой, зигзагообразный, как это показано, скажем, на рисунке 23. Это, однако, не изменяет результаты расчёта; полагая, что молекула движется по прямой, мы только мысленно «выпрямили» ломаный цилиндр, изображённый на рисунке 23.

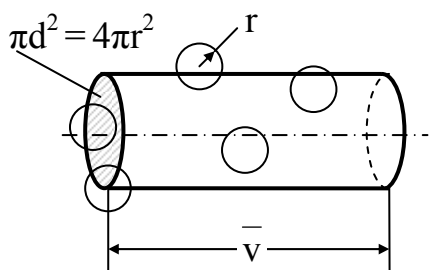


Рисунок 22

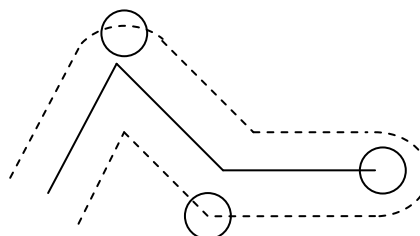


Рисунок 23

Следует учесть, что движется не одна, а все молекулы газа. Это значит, что в выражение для  $Z$  должна входить не абсолютная (относительно стенок сосуда) скорость молекулы, а скорость ее  $v_{\text{отн}}$  относительно тех молекул, с которы-

ми она сталкивается. Можно показать, приняв во внимание максвелловское распределение молекул по скоростям, что относительная скорость  $v_{\text{отн}}$  связана с абсолютной скоростью  $\bar{v}$  соотношением

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{2} \bar{v}.$$

Тогда для **среднего числа столкновений молекулы в единицу времени** получим формулу:

$$Z = \sqrt{2} \sigma \bar{v} n. \quad (19.2)$$

Так как молекулы мы условились считать шариками, то  $\sigma = 4\pi r^2 = \pi d^2$ , где  $r$  – радиус молекул, а  $d$  – их диаметр, то формула (19.2) примет вид:

$$Z = 4\sqrt{2} \pi r^2 \bar{v} n. \quad (19.3)$$

Чтобы найти среднее число столкновений, происходящих в единицу времени в газе, т.е. столкновений, испытываемых всеми молекулами, нужно умножить  $Z$  на число молекул  $N$  в газе. Но так как в каждом столкновении участвуют две молекулы (встреча одновременно трёх и более молекул крайне маловероятна), то это число нужно ещё разделить на 2, чтобы не считать каждое столкновение два раза. Следовательно, полное число столкновений в газе, содержащем  $N$  молекул, равно

$$Z' = \frac{NZ}{2} = 2\sqrt{2} \pi r^2 \bar{v} nN.$$

Таким образом, в **единице объёма** газа число столкновений, происходящих **за секунду**, равно

$$Z'' = \frac{nZ}{2} = 2\sqrt{2} \pi r^2 \bar{v} n^2,$$

где  $n$  – число молекул в единице объёма.

Зная число столкновений, испытываемых одной молекулой в единицу времени, легко вычислить и среднюю длину свободного пробега.

За время  $t$  молекула проходит некоторый зигзагообразный путь, равный  $\bar{v}t$ . Изломов на этом пути столько, сколько произошло столкновений, так как каждый излом и вызван столкновением. Средняя длина свободного пробега, т.е. средняя длина прямолинейного отрезка  $\lambda$  между столкновениями, равна отношению длины пути, пройденного молекулой, к числу испытанных ею на этом пути столкновений:

$$\lambda = \frac{\bar{v}t}{Zt} = \frac{\bar{v}}{Z},$$

или, подставив вместо  $Z$  его значение из (19.3), получим:



$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n} = \frac{0,057}{r^2 n}. \quad (19.4)$$

Пользуясь формулами (19.3) и (19.4), можно найти численные значения для  $Z$  и  $\lambda$ . Проведём такой расчёт, например, для воздуха (азота) при нормальных условиях (давление 1 атм, температура 273 К). Радиус  $r$  молекулы азота можно считать равным  $1,9 \cdot 10^{-10}$  м, средняя скорость  $\bar{v} \approx 500$  м/с, число молекул в единице объёма  $n = 2,7 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>. Отсюда

$$Z = 4\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (1,9 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 500 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \approx 8,6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Средняя длина свободного пробега молекулы в рассматриваемых условиях равна

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{Z} \approx 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Естественно возникает вопрос, можно ли считать идеальным такой газ, в котором молекулы каждую секунду сталкиваются миллиарды раз, а между столкновениями, т.е. «свободно», они проходят ничтожные отрезки пути, не превосходящие нескольких сотых долей сантиметра? Можно ли считать молекулы такого газа невзаимодействующими? Ведь столкновение – это **взаимодействие**, приводящее к изменению направления скорости молекул, а столь частые столкновения означают, как будто бы, весьма сильное взаимодействие. Легко, однако, видеть, что это не так. Действительно, молекулы, как уже было указано, взаимодействуют друг с другом только в течение того времени, пока они находятся друг от друга на расстоянии порядка их диаметра  $d$ , т.е.  $10^{-10}$  м. Остальное время между столкновениями молекулы движутся свободно. Так как при атмосферном давлении длина свободного пробега молекулы  $\lambda \approx 10^{-7}$  м, что примерно в 1 000 раз больше размеров молекул, то время пребывания молекул под взаимным воздействием во столько же раз ( $\lambda/d$ ) меньше времени их свободного движения.

Другими словами, время столкновения молекул примерно в 1 000 раз меньше времени между столкновениями. Следовательно, подавляющую часть времени молекулы движутся свободно, а столкновения, даже при атмосферном давлении, можно считать редким событием в их жизни.

**Зависимость длины свободного пробега от давления.** При постоянной температуре давление  $P$  пропорционально концентрации молекул  $n$  (см. формулу (4.1)). Как видно из формулы (19.4) длина свободного пробега молекул  $\lambda$  обратно пропорциональна их числу в единице объёма  $n$ , а следовательно, его давлению  $P$ , так что можно написать:

$$\lambda \sim \frac{1}{P}.$$



С уменьшением давления длина свободного пробега молекул возрастает в такой же мере, в какой падает давление. При определённом значении давления она станет равной размерам сосуда, в котором газ заключён, а при дальнейшем понижении давления превзойдёт их. Например, в сосуде размером около 25 см (размеры, обычные в лабораторной практике) длина свободного пробега молекул сравняется с размерами сосуда уже при давлении около  $10^{-7}$  атм ( $7 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст.). Такое давление сравнительно легко создать, так как современные средства откачки позволяют получить давления до  $10^{-12}$  мм рт. ст.

Когда длина свободного пробега становится равной или большей размеров сосуда, столкновения молекул в газе практически уже не происходят, и весь путь от стенки до стенки молекулы проходят, двигаясь прямолинейно. Естественно, что разрежённый газ, в котором молекулы не сталкиваются между собой, отличается по своим свойствам от обычного газа.

**Зависимость длины свободного пробега от температуры.** Из формулы (19.4) следует, что длина свободного пробега молекул не должна зависеть от температуры. Опыт, между тем, показывает, что такая зависимость, хотя и слабая, существует: с повышением температуры длина свободного пробега возрастает. Это объясняется тем, что согласно формуле (19.4) длина свободного пробега молекул  $\lambda$  обратно пропорциональна поперечному сечению молекулы. А оно, как мы уже знаем, определяется расстоянием, на которое сближаются молекулы при столкновении, т.е. расстоянием, при котором сила взаимодействия между молекулами вызывает уже заметное изменение направления их движения.

Легко видеть, что поперечное сечение молекул должно зависеть от их скорости (энергии), так как при одной и той же силе взаимодействия быстрые молекулы испытывают меньшее отклонение от своего пути, чем более медленные молекулы. Поэтому, чем больше скорость молекул, тем больше должна быть сила, вызывающая их отклонение, следовательно, тем меньше должно быть расстояние между ними при столкновении. Это и значит, что с увеличением скорости молекул, т.е. с повышением температуры газа, поперечное сечение молекул уменьшается. Длина же свободного пробега  $\lambda$  с повышением температуры слабо растёт.

Факт зависимости длины свободного пробега молекул от температуры может служить подтверждением изложенных выше соображений о смысле понятия «размер молекулы». Если бы молекулы действительно были твёрдыми шариками, то не могло бы быть и речи об изменении их размеров при изменении скорости. На самом деле размеры частиц (не только молекул газа!) определяются расстоянием между ними при максимальном сближении, а оно не может не зависеть от скорости частиц, а значит (в случае газовых молекул) и от температуры. Это, однако, не мешает тому, что в целом ряде случаев взаимодействие между молекулами можно с достаточной степенью точности рассматривать как взаимодействие между твёрдыми шариками.

### § 3.20 Диффузия в газах

**Диффузией** называется явление проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ друг в друга. Процесс диффузии возникает в газе (так же как и в любом веществе), если газ неоднороден по составу, т.е. если он состоит из двух или нескольких различных компонентов, концентрация которых изменяется от точки к точке. Процесс диффузии заключается в том, что каждый из компонентов смеси переходит из тех частей объёма газа, где его концентрация больше, туда, где она меньше, т.е. **в направлении падения концентрации**.

Перемещение того или иного компонента под действием разности концентраций называется **диффузионным потоком** этого компонента. Измеряется он количеством диффундирующего компонента, проходящего в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к направлению диффузии, т.е. к направлению падения концентрации.

Диффузионный поток можно выражать в единицах массы. Тогда он измеряется в системе СИ в  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ . Его можно выражать также числом молей, т.е. в  $\text{моль}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$  или молекул – в  $\text{молекула}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ . То же относится и к концентрации данного компонента, которая может быть выражена  $\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\text{моль}/\text{м}^3$  и т.д.

Возникающий при наличии разности концентраций диффузионный поток приводит к выравниванию концентраций, т.е. к уменьшению той разности концентраций, которая вызвала этот поток. Неоднородная газовая смесь, предоставленная самой себе, станет с течением времени, благодаря диффузии, однородной (газы перемешаются).

Всякий процесс, при котором параметры системы, участвующей в нём, с течением времени изменяются, называется **нестационарным** процессом, в отличие от стационарного процесса, при котором величины, характеризующие систему, не изменяются со временем. Диффузия, приводящая к выравниванию концентраций, т.е. к изменению разностей концентраций и самих концентраций компонентов, называется **нестационарной диффузией**. Можно себе представить и стационарную диффузию, когда тем или иным искусственным путём разность концентраций компонентов смеси поддерживается неизменной. Для этого нужно, например, в одной части сосуда непрерывно добавлять данный компонент, а из другой части сосуда отбирать его в таком же количестве. Практически чаще всего приходится иметь дело с нестационарной диффузией.

**Основной закон диффузии (закон Фика).** Опыт показывает, что диффузионный поток какого-либо компонента пропорционален градиенту концентрации этого компонента, взятому с обратным знаком (закон Фика).

Напомним, что градиентом какой-нибудь величины (скалярной)  $G$ , зависящей от координат, называется вектор, характеризующий быстроту изменения этой величины в пространстве. Этот вектор направлен в сторону наиболее быстро возрастания  $G$  и численно равен скорости этого возрастания.

Нас в дальнейшем будут интересовать величины, меняющиеся вдоль какого-нибудь одного направления, например, вдоль оси  $Ox$ . В этом случае числен-

ное значение градиента  $G$  (обозначение  $\text{grad } G$ ) равно скорости изменения величины  $G$  с изменением  $x$ , т.е. производной  $\frac{\partial G}{\partial x}$ . Таким образом,

$$\text{grad } G = \frac{\partial G}{\partial x},$$

т.е. изменению величины  $G$  на единице длины.

Если концентрация  $n$  интересующего нас компонента газовой смеси меняется вдоль оси  $Ox$  (а по другим направлениям остаётся одинаковой), то градиентом концентрации  $n$  называется величина

$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx}.$$

Основной закон диффузии (**закон Фика**), следовательно, гласит:

$$I = -D \frac{dn}{dx}. \quad (20.1)$$

где  $I$  – диффузионный поток интересующего нас компонента в направлении оси  $Ox$ .

Знак минус в правой части уравнения (20.1) показывает, что диффузионный поток направлен в сторону убывания концентрации. Коэффициент  $D$  в уравнении (20.1) называется **коэффициентом диффузии**. Смысл его заключается в том, что он численно равен диффузионному потоку при градиенте концентрации, равном единице.

Очевидно, что коэффициент диффузии измеряется в системе СИ в  $\text{м}^2/\text{с}$ . Действительно, диффузионный поток  $I$  измеряется в  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ , концентрация  $n$  измеряется в  $\text{кг}/\text{м}^3$ , а градиент концентрации  $\frac{dn}{dx}$  измеряется в  $\text{кг}/\text{м}^4$ . Отсюда

следует, что  $D = I / \left( \frac{dn}{dx} \right)$  измеряется в  $\text{м}^2/\text{с}$ .

В уравнении (20.1) необходимо, конечно, выражать количество вещества в обеих частях равенства в одних и тех же единицах. Это значит, что если поток диффундирующего компонента выражать его массой  $M$  (число килограммов), протекающей через  $1 \text{ м}^2$  в единицу времени, то концентрация  $n$  должна быть выражена числом килограммов данного компонента в  $1 \text{ м}^3$  смеси; концентрация  $n$  в этом случае представляет собой парциальную плотность компонента,  $n = \rho$ . Уравнение (20.1) в этом случае принимает вид:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx}. \quad (20.2)$$

Если поток диффундирующего компонента выразить не массой, а числом частиц  $N$ , проходящих через  $1 \text{ м}^2$  в  $1 \text{ с}$ , то концентрация должна быть выражена числом молекул в  $1 \text{ м}^3$ , и уравнение (20.1) запишется в виде:

$$N = -D \frac{dn}{dx}. \quad (20.3)$$

Коэффициент диффузии  $D$  зависит от свойств диффундирующего вещества и от свойств остальных компонентов, составляющих смесь (в дальнейшем будем предполагать, что компонентов всего два). Однако при не слишком больших концентрациях примеси он в очень слабой степени зависит от самой концентрации.

При стационарной диффузии градиент концентрации остаётся постоянным (неизменным во времени). Остаётся поэтому постоянным и диффузионный поток. При нестационарной диффузии градиент концентрации изменяется (концентрации выравниваются). Соответственно этому изменяется со временем и диффузионный поток.

### § 3.21 Стационарная диффузия. Коэффициент диффузии

Как уже упоминалось, кинетическая теория газов позволяет просто объяснить факт медленности процесса диффузии, несмотря на большие значения скоростей тепловых движений молекул. Это обусловлено тем, что молекулы газа, чтобы попасть из одной точки в другую, вследствие столкновений вынуждены пройти длинный зигзагообразный путь, во много раз превосходящий расстояние по прямой между этими точками.

Кроме такого качественного объяснения, кинетическая теория позволяет и количественно оценить величину коэффициента диффузии и выразить его через молекулярные величины – длину свободного пробега молекул и скорости их тепловых движений.

Рассмотрим площадку  $S$  в сосуде с газовой смесью, перпендикулярную к оси  $Ox$  (рисунок 24), вдоль которой поддерживается постоянная разность концентраций  $\Delta n = n_1 - n_2$  (речь идёт, следовательно, о стационарном процессе). Примем для определённости, что  $n_1 > n_2$ . Из-за тепловых движений молекулы интересующего нас компонента будут переходить через площадку  $S$  как слева направо, так и справа налево. Ввиду существующей разности концентраций по обе стороны площадки возникнет некоторый диффузионный поток вдоль оси  $Ox$ , равный, очевидно, разности между числом молекул  $N_1$ , пересекающих  $1 \text{ м}^2$  площадки  $S$  в  $1 \text{ с}$  (перпендикулярно к ее плоскости) в направлении положительных значений  $x$  (вправо), и числом молекул  $N_2$ , пересекающих то же сечение и за то же время в противоположном направлении (влево):

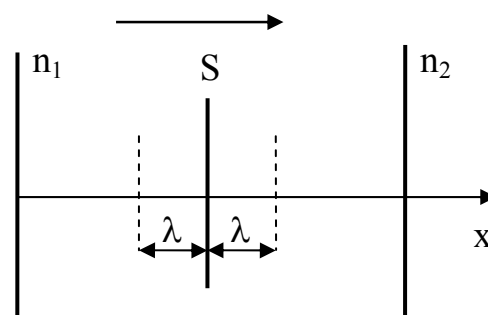


Рисунок 24

$$N = N_1 - N_2.$$

Как определить число молекул, пересекающих  $1 \text{ м}^2$  площадки? Если бы все молекулы двигались с одинаковой скоростью  $\bar{v}$ , направленной по оси  $Ox$ , то число молекул, переходящих в 1 с единичную площадку, было бы равно  $n\bar{v}$ , где  $n$  – число молекул в единице объёма (их концентрация).

В действительности существует распределение молекул по скоростям, но для грубой оценки мы примем, что у всех молекул одна и та же скорость, равная средней скорости  $\bar{v}$ . Примем также, что тепловые скорости молекул равномерно распределены по трём взаимно перпендикулярным направлениям. Тогда из всех молекул единицы объёма  $1/3$  движется вдоль оси  $Ox$  и из них половина движется в положительном направлении оси  $Ox$ , т.е. по направлению к площадке, в то время как другая половина движется в противоположном направлении – от нее.

Следовательно, число молекул  $N_1$ , пересекающих  $1 \text{ м}^2$  площадки  $S$  в 1 с слева направо, и число молекул  $N_2$ , пересекающих ту же площадку в противоположном направлении, выразятся соотношениями:

$$N_1 = \frac{1}{6} n' \bar{v}, \quad N_2 = \frac{1}{6} n'' \bar{v}.$$

Здесь  $n'$  и  $n''$  – концентрации молекул с одной и с другой стороны от площадки. Относительно значений величин  $n'$  и  $n''$  необходимо заметить, что они изменяются вдоль оси  $Ox$  вследствие столкновений молекул между собой. Поэтому к выделенной нами площадке молекулы подходят, имея те значения концентраций  $n'$  и  $n''$ , которые создались при последнем столкновении перед площадкой. Значит, мы должны считать, что  $n'$  и  $n''$  – это те числа молекул в единице объёма, которые были на расстоянии  $\lambda$  (средняя длина свободного пробега) от площадки, по обе стороны от нее.

Диффузионный поток  $N$ , следовательно, определяется выражением

$$N = N_1 - N_2 = \frac{1}{6} (n' - n'') \bar{v},$$

где  $n' - n''$  – разность концентраций между точками, отделёнными друг от друга расстоянием в  $2\lambda$ .

Эту разность  $n' - n''$  нетрудно определить, если известно значение градиента концентрации  $\frac{dn}{dx}$  (будем полагать, что  $n$  изменяется только вдоль оси  $Ox$ , т.е.

вместо  $\frac{\partial n}{\partial x}$  можно писать  $\frac{dn}{dx}$ ). Так как  $\frac{dn}{dx}$  есть разность концентраций, приходящихся на единицу длины, то на расстоянии  $2\lambda$  она равна:

$$n' - n'' = -2\lambda \frac{dn}{dx}.$$

Эта формула справедлива, если  $\lambda$  достаточно мала.

Таким образом, для диффузионного потока получаем выражение:

$$N = -\frac{1}{3} \lambda \bar{v} \frac{dn}{dx},$$

или, умножив обе части этого равенства на массу молекулы  $m$ , имеем:

$$M = -\frac{1}{3} \lambda \bar{v} \frac{d\rho}{dx},$$

Сравнивая его с уравнениями (20.2) и (20.3) закона Фика

$$M = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad N = -D \frac{dn}{dx},$$

находим интересующее нас выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}. \quad (21.1)$$

Из этого выражения видно, что коэффициент диффузии обратно пропорционален давлению газа (потому что  $\lambda \sim 1/P$ ) и прямо пропорционален квадратному корню из температуры ( $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ ).

При выводе формулы (21.1) не принималась во внимание диффузия второго компонента, которая, разумеется, тоже происходит. И она не может не влиять на диффузию рассматриваемого компонента смеси.

Так, например, в смеси водорода и углекислого газа водород должен диффундировать значительно быстрее, чем углекислый газ, потому что при данной температуре средняя скорость тепловых движений молекул водорода почти в пять раз больше и, кроме того, длина свободного пробега молекул водорода тоже больше. Но это значит, что объём водорода, переносимого в одном направлении, больше объёма углекислого газа, переносимого в противоположном направлении. В таком случае в газе неизбежно возникает разность давлений, а значит, и поток газа в целом. Между тем мы определили диффузию как процесс, при котором давление газовой смеси во всех точках остаётся постоянным и газ, как целое, покоится. На самом же деле в процессе взаимной диффузии двух различных газов, одного в другой, превышение диффузионного потока одного из них над потоком другого уравнивается течением всего газа по направлению к той области, где первоначально находились более быстро диффундирующие молекулы.

Этого обстоятельства мы, однако, не принимали во внимание при выводе формулы (21.1) для коэффициента диффузии, и эта формула справедлива, в сущности, только для диффузии молекул газа в среде того же газа. Такой процесс называется **самодиффузией**, а формула (21.1) выражает, следовательно, **коэффициент самодиффузии**.

С таким явлением мы имеем дело, например, когда газовая смесь состоит из двух различных изотопов одного и того же вещества, лишь незначительно отличающихся друг от друга своей массой, но не отличающихся никакими другими свойствами. Если один из изотопов радиоактивен, то такую самодиффузию легко наблюдать, так как за проникновением радиоактивных частиц можно следить по их излучению.

### § 3.22 Коэффициент взаимной диффузии

Можно, однако, исправить выражение (21.1) так, чтобы оно было справедливо и для смеси двух разных газов. Но для этого нужно учесть существование компенсирующего газового потока. Будем считать, что уравнение (21.1) относится к одному из компонентов смеси и характеризует чисто диффузионный поток этого компонента:

$$M_1' = - \frac{1}{3} \lambda_1 \bar{v}_1 \frac{d\rho_1}{dx}. \quad (22.1)$$

Индексы 1 указывают на то, что уравнение относится к первому компоненту, а штрих у символа массы означает, что  $M_1'$  – это масса, переносимая диффузионным путём. Совершенно такое же уравнение мы должны написать и для второго компонента:

$$M_2' = - \frac{1}{3} \lambda_2 \bar{v}_2 \frac{d\rho_2}{dx}. \quad (22.2)$$

Здесь  $\frac{d\rho_1}{dx}$  и  $\frac{d\rho_2}{dx}$  – градиенты плотности первого и второго компонентов вдоль оси  $Ox$ . При одинаковом во всём объёме давлении должно выполняться условие:

$$\frac{d\rho_1}{dx} = - \frac{d\rho_2}{dx}.$$

Для того чтобы давление газа оставалось во всём объёме одинаковым, газ в целом должен прийти в движение и скорость  $u$  этого движения должна быть такой, чтобы поток газа  $\rho u$  (где  $\rho$  – плотность смеси) уравновешивал избыточный диффузионный поток лёгкого компонента, т.е. должно выполняться равенство:

$$M_1' + M_2' + \rho u = 0.$$

Подставив сюда вместо  $M_1'$  и  $M_2'$  их значения из (22.1) и (22.2), получим:

$$- \rho u = - \frac{1}{3} \lambda_1 \bar{v}_1 \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{1}{3} \lambda_2 \bar{v}_2 \frac{d\rho_2}{dx}.$$



Или, так как  $\frac{d\rho_1}{dx} = -\frac{d\rho_2}{dx}$ , то

$$-\rho u = \frac{1}{3}(\lambda_2 \bar{v}_2 - \lambda_1 \bar{v}_1) \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{1}{3} \left( \frac{\lambda_2 \bar{v}_2}{\rho} - \frac{\lambda_1 \bar{v}_1}{\rho} \right) \frac{d\rho_1}{dx}. \quad (22.3)$$

Если движется весь газ, то массы первого и второго компонентов, действительно пересекающие единичную площадку, не равны  $M_1'$  и  $M_2'$ , так как и тот и другой компонент переносятся не только из-за диффузии, но и из-за движения газа как целого.

Масса первого компонента, пересекающая единичную площадку, равна поэтому не  $M_1'$ , а  $M_1' + \rho_1 u$ . Подставим сюда вместо  $M_1'$  и  $u$  их значения (22.1) и (22.3). Тогда

$$M_1 = \left( -\frac{1}{3} \lambda_1 \bar{v}_1 - \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_2 \bar{v}_2 + \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_1 \bar{v}_1 \right) \frac{d\rho_1}{dx}$$

или

$$M_1 = -\frac{1}{3} \left( \frac{\rho - \rho_1}{\rho} \lambda_1 \bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_2 \bar{v}_2 \right) \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Так как  $\rho - \rho_1 = \rho_2$ , то

$$M_1 = -\frac{1}{3} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \lambda_1 \bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_2 \bar{v}_2 \right) \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Для второго компонента таким же образом получим:

$$M_2 = -\frac{1}{3} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \lambda_1 \bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_2 \bar{v}_2 \right) \frac{d\rho_2}{dx}.$$

Сравнивая эти два выражения с уравнением диффузии (20.2), мы видим, что выражения, стоящие перед градиентами плотности (эти выражения одинаковы в обоих равенствах), представляют собой коэффициент диффузии. Но теперь это уже не коэффициент самодиффузии, а коэффициент диффузии  $D_{12}$  одного газа в другой (взаимной диффузии):

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \lambda_1 \bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_2 \bar{v}_2 \right). \quad (22.4)$$

Отношения  $\rho_1/\rho$  и  $\rho_2/\rho$  парциальных плотностей компонентов к плотности смеси называются относительными концентрациями компонентов.

Легко видеть, что если концентрация одного из компонентов мала, то формула (22.4) переходит в формулу (21.1). Если, например, мала концентрация  $\rho_1/\rho$ , то в равенстве (22.4) можно пренебречь вторым членом, а концентрация  $\rho_2/\rho$  близка к единице. Тогда

$$D_{12} = \frac{1}{3} \lambda_1 \bar{v}_1 = D.$$

Выражение (21.1), полученное нами раньше, оказывается справедливым, таким образом, не только для самодиффузии, но и для смеси различных газов, если один из компонентов является малой примесью.

Пользуясь выражением (21.1), можно оценить порядок величины коэффициента диффузии (самодиффузии) идеальных газов.

Так, например, для кислорода при атмосферном давлении

$$\lambda \approx 10^{-8} \text{ м}, \quad \bar{v} \approx 500 \text{ м/с};$$

следовательно, при этих условиях коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \cdot 500 \approx 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Опыты по измерению коэффициента диффузии показали медленность процесса диффузии при нормальном давлении. Опыты также свидетельствуют о том, что коэффициент диффузии слабо зависит от концентрации компонентов в смеси. Это показывает, что уравнение (22.4), из которого следует, что коэффициент диффузии должен сильно зависеть от концентрации, не вполне точно.

**Термическая диффузия.** Явление диффузии, которое мы только что описали, возникает тогда, когда в газе существует разность (градиент) концентрации какого-нибудь компонента. Процесс диффузии в этом случае приводит к исчезновению градиента и превращает неоднородную газовую смесь в однородную.

Наряду с такой «концентрационной» диффузией существует и другого рода диффузия, называемая **термической диффузией** (термодиффузия), приводящая к противоположному результату – к частичному **разделению** однородной газовой смеси и превращению ее в неоднородную смесь. Явление термодиффузии заключается в том, что разность температур в однородной газовой смеси приводит к возникновению разности концентраций компонентов смеси в направлении падения температуры. В большинстве случаев в более тёплых областях объёма увеличится концентрация лёгкого компонента смеси, а в более холодных – тяжёлого, хотя и не всегда. При стационарном распределении температур устанавливается стационарное распределение концентраций, однако говорят о процессе термической диффузии. Дело в том, что наличие градиента

концентраций создаёт обычную диффузию молекул и, следовательно, стационарность обеспечивается тем, что одновременно в противоположном направлении происходит диффузия, обусловленная градиентом температур, которая и называется термической диффузией.

По своей природе термодиффузия отличается от только что рассмотренных процессов переноса, которые обуславливались самим фактом столкновения молекул между собой. Явление термодиффузии нельзя объяснить простыми молекулярно-кинетическими представлениями, которыми мы с таким успехом пользовались для объяснения обычной диффузии. Было выяснено, что в этом явлении существенную роль играют силы отталкивания между молекулами компонентов при их столкновении, которые можно представить убывающими по закону  $F \sim 1/r^n$ , где  $r$  – расстояние между молекулами.

Оказывается, что если показатель степени  $n > 5$ , то в более нагретой области оказывается избыток лёгких молекул, а в холодной – избыток тяжёлых. Если  $n < 5$ , то знак термодиффузионной разности концентраций меняется на обратный, и, наконец, при  $n = 5$  термодиффузия отсутствует.

Термодиффузия получила, в частности, важное применение для разделения изотопов. Ввиду близости масс изотопов обогащение состава смеси одним из изотопов при разумных градиентах температур невелико. Для значительного разделения изотопов используется многоступенчатый процесс, когда на каждом последующем этапе обогащения в качестве исходной смеси берётся смесь, обогащённая на предыдущем этапе. В результате удаётся достигнуть желаемых результатов.

### § 3.23 Теплопроводность газов

Если газ неравномерно нагрет, т.е. температура в одной его части выше или ниже, чем в другой, то наблюдается выравнивание температуры: более нагретая часть охлаждается, тогда, как более холодная нагревается. Очевидно, что это связано с потоком тепла от более нагретой части к более холодной. Это явление потока тепла в газе (или в любом другом веществе) называется **теплопроводностью**. В любом теле, в частности в газе, предоставленном самому себе, теплопроводность приводит к выравниванию температур, и этот процесс, конечно, нестационарный. Но часто встречаются и случаи, когда разность температур искусственно поддерживается постоянной.

Например, в электрической лампе накаливания газ, находящийся непосредственно около накалённой нити, имеет высокую температуру (равную температуре нити), тогда как газ, прилегающий к стенкам стеклянного баллона лампы, обладает значительно более низкой температурой. Через некоторое время после включения лампы устанавливается постоянная разность температур между нитью и стенками. Это постоянство обеспечивается, с одной стороны, электрической энергией, подводимой к нити из электрической сети, с другой стороны – отдачей тепла от стенок лампы к окружающему воздуху. При этих условиях в газе, находящемся в лампе, устанавливается стационарный, т.е. не изменяющийся со временем, поток тепла. Установившаяся стационарная

разность температур зависит от теплопроводности газа. Для лампы накаливания надо иметь в виду, что кроме отвода тепла через газ в данном частном случае отвод тепла происходит главным образом в результате излучения.

В дальнейшем будем предполагать, что передача тепла осуществляется исключительно путём теплообмена. Будем полагать, что конвекции нет (конвекция – это перемешивание различно нагретых частей). Точно также предполагаем, что потерями тепла на излучение можно пренебречь. Кроме того, будем предполагать, что объём системы остаётся постоянным, так что никаких перемещений вещества в процессе передачи тепла не возникает. Ограничимся, наконец, рассмотрением только одномерной задачи, когда температура вещества (газа), помимо времени, зависит только от одной пространственной координаты.

Пусть вдоль какого-нибудь направления в газе, например, вдоль оси  $Ox$ , температура меняется от точки к точке, т.е. является функцией координаты  $x$ , в то время как в плоскости, перпендикулярной к этой оси, температура всюду одинакова (рисунок 25).

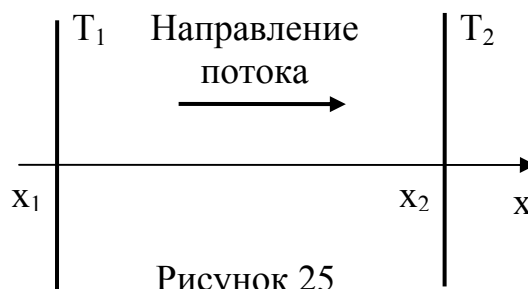


Рисунок 25

Изменение температуры вдоль оси  $Ox$  характеризуется градиентом температуры  $\frac{\partial T}{\partial x}$  (если температура, как мы предположили, изменяется только по оси

$Ox$ , то вместо  $\frac{\partial T}{\partial x}$  можно написать  $\frac{dT}{dx}$ ). Как и всегда, смысл градиента темпера-

туры заключается в том, что он равен изменению температуры от одной точки к другой, отнесённому к единице расстояния между ними. Существование градиента температуры и является необходимым условием для возникновения теплопроводности, как наличие градиента концентрации необходимо, чтобы происходил процесс диффузии.

Направление потока тепла совпадает с направлением падения температуры. Если возрастанию  $x$  (т.е.  $dx > 0$ ) соответствует падение температуры ( $dT < 0$ ), то тепло течёт (в математической теории теплопроводности распространение тепла рассматривается подобно течению жидкости) в направлении возрастающего  $x$ : поток тепла направлен так, чтобы уменьшить существующий градиент температуры, который его вызвал. Опыт показывает, что поток тепла  $Q$  пропорционален градиенту температуры (**закон Фурье**):

$$Q = - \alpha \frac{dT}{dx}. \quad (23.1)$$

Под потоком тепла мы опять будем понимать количество теплоты, протекающей через единицу площади в единицу времени.

Коэффициент  $\alpha$  в равенстве (23.1) носит название **коэффициента теплопроводности**. Как это видно из (23.1) он численно равен потоку тепла при градиенте температуры, равном единице (1 К/м). Легко видеть, что коэффициент

теплопроводности в системе СИ выражается в единицах Дж/(м·с·К) или Вт/(м·К).

При стационарных условиях количество тепла  $Q$ , протекающего в единицу времени через газ, равно мощности источника энергии, за счёт которого поддерживается заданный градиент температуры. В тех случаях, когда газ, в котором существует градиент температуры, предоставлен самому себе, т.е. к нему извне не подводится энергия, теплопроводность приводит к выравниванию температуры.

### § 3.24 Стационарная теплопроводность. Коэффициент теплопроводности

В результате теплового движения газовых молекул любое сечение в объёме, занимаемом газом, пересекаются молекулами. Рассмотрим, как это мы делали в § 3.21, некоторую площадку  $S$  (рисунок 26), перпендикулярную к оси  $Ox$ , вдоль которой поддерживается постоянная разность температур (процесс стационарный). Примем, что температура  $T_1$  больше, чем  $T_2$ .

Через площадку  $S$  проходят молекулы как слева направо, так и справа налево, и если давление газа во всех точках одно и то же, то число молекул, пересекающих в 1 с единицу площади  $S$  слева и справа, очевидно, одинаково. Но молекулы, движущиеся слева, несут с собой большую энергию, чем молекулы, приходящие к площадке справа, потому что они приходят из области более высокой температуры. Поэтому возникает поток тепла (слева направо), равный разности энергий, переносимых молекулами слева и справа.

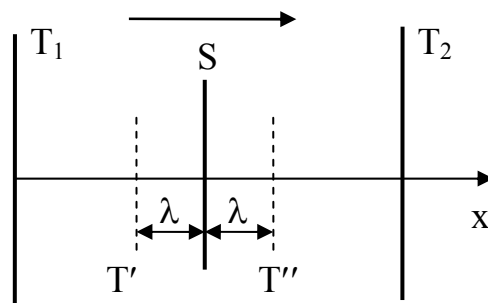


Рисунок 26

Можно по-прежнему принять, что число молекул  $N_1$ , пересекающих  $1 \text{ м}^2$  площадки в 1 с слева направо, равно  $\frac{1}{6} n \bar{v}$ . Точно так же справа налево проходит

$N_2$  молекул, где  $N_2 = \frac{1}{6} n \bar{v}$ . Здесь  $\bar{v}$  – средняя скорость теплового движения молекул и  $n$  – число молекул в единице объёма. Как только отмечалось, числа молекул  $N_1$  и  $N_2$  одинаковы, но энергии несут различные. Найдём теперь эти энергии.

Молекулы, приходящие к площадке  $S$  слева, приходят к ней с той энергией, которой они обладали после последнего перед площадкой столкновения. Длина свободного пробега у разных молекул разная, но для сравнительно грубой оценки можно принять, что все молекулы, приходящие к площадке  $S$ , испытали последнее столкновение на расстоянии от нее, равном средней длине свободного пробега  $\lambda$ . Соответственно этому можно считать, что молекулы, пришедшие к площадке слева, обладают средней энергией  $U_1$ , отвечающей температуре  $T'$  в точке, отстоящей слева от площадки  $S$  на расстоянии  $\lambda$ . Количество энергии, приносимой в 1 с этими молекулами к  $1 \text{ м}^2$  площадки, равно

$$Q_1 = \frac{1}{6} n \bar{v} U_1.$$

Аналогично этому, количество энергии, приносимое молекулами, приходящими справа,

$$Q_2 = \frac{1}{6} n \bar{v} U_2,$$

где  $U_2$  – энергия молекул, соответствующая температуре  $T''$  в точке, отстоящей от площадки на расстоянии  $\lambda$  справа.

Следовательно, результирующее количество энергии, протекающее через  $1 \text{ м}^2$  площадки в  $1 \text{ с}$ , равно

$$Q = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{6} n \bar{v} (U_1 - U_2),$$

где  $U_1$  и  $U_2$  – средние значения энергии одной молекулы, соответствующие температурам  $T'$  и  $T''$  в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии  $2\lambda$ .

Средняя энергия одной молекулы  $U$  пропорциональна температуре, и ее можно выразить через теплоёмкость газа  $C_V$ .

Действительно, средняя энергия молекулы равна  $\frac{i}{2} kT$ , где  $i$  – число степеней свободы. С другой стороны, молярная теплоёмкость газа  $C_V = \frac{i}{2} R = \frac{i}{2} kN_A$ , где  $N_A$  – число Авогадро. Следовательно,

$$U = \frac{i}{2} kT = \frac{C_V}{N_A} T.$$

Выражение для  $Q$  можно поэтому переписать в виде:

$$Q = \frac{1}{6} n \bar{v} \frac{C_V}{N_A} (T' - T'').$$

Разность температур  $T' - T''$  между точками, находящимися по обе стороны от площадки на расстоянии  $\lambda$  от нее, нетрудно определить из значения градиента температуры:

$$T' - T'' = -2\lambda \frac{dT}{dx},$$

так как градиент температуры  $\frac{dT}{dx}$  есть изменение температуры на единицу длины. Знак минус показывает, что возрастанию  $x$  соответствует падение  $T$ . Отсюда

$$Q = - \frac{1}{3} n \bar{v} \lambda \frac{C_V}{N_A} \frac{dT}{dx}. \quad (24.1)$$

Сопоставляя (24.1) и (23.1), получаем выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\kappa = \frac{1}{3} n \bar{v} \lambda \frac{C_V}{N_A}. \quad (24.2)$$

Если учесть, что  $C_V = \mu c_v$ , где  $c_v$  – удельная теплоёмкость,  $\mu$  – молярная масса и  $\mu/N_A = m$  – масса одной молекулы, то формулу (24.2) можно переписать в виде:

$$\kappa = \frac{1}{3} m n \bar{v} \lambda c_v = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda c_v, \quad (24.3)$$

где  $\rho$  – плотность газа, равная  $mn$  (произведению массы молекулы на число молекул в единице объёма).

Выражения (24.2) и (24.3) дают лишь приближённое значение коэффициента теплопроводности газа, так как численный множитель в этих формулах зависит от предположений, сделанных при вычислениях, и только приблизительно равен  $1/3$ . Точное вычисление этого множителя представляет большие трудности.

**Зависимость коэффициента теплопроводности от давления и температуры.** Полученные формулы (24.2) и (24.3) позволяют судить о том, как коэффициент теплопроводности должен зависеть от давления и температуры газа.

Из входящих в (24.2) и (24.3) величин только число молекул в единице объёма  $n$  и длина свободного пробега  $\lambda$  зависят от давления. Но первая из этих двух величин пропорциональна, а вторая – обратно пропорциональна давлению газа. Это приводит к важному заключению, что коэффициент теплопроводности газов не зависит от давления.

Этот на первый взгляд парадоксальный вывод находится, однако, в превосходном согласии с опытными данными, которые показывают, что при изменении давления газа в широких пределах коэффициент теплопроводности остаётся неизменным. И только при самых малых давлениях коэффициент теплопроводности начинает уменьшаться с понижением давления. Как мы увидим ниже, это обстоятельство ни в какой степени не противоречит изложенным выше представлениям о механизме теплопроводности.

Что касается зависимости от температуры, то из формулы (24.3) следует, что коэффициент теплопроводности, пропорциональный средней скорости теп-

лового движения молекул, должен меняться с изменением температуры так же, как меняется  $\bar{v}$ , т.е. пропорционально  $\sqrt{T}$ .

В действительности коэффициент теплопроводности, как показывает опыт, растёт с температурой несколько быстрее, чем  $\sqrt{T}$ . Этого следовало ожидать, так как коэффициент теплопроводности пропорционален, кроме того, и средней длине свободного пробега, а эта величина тоже растёт с температурой. Для многоатомных газов необходимо ещё учесть возрастание теплоёмкости с температурой.

Возрастание длины свободного пробега с температурой связано, как мы знаем, с тем, что молекулы нельзя рассматривать как твёрдые шарики. Найденный на опыте более быстрый, чем по закону  $\sqrt{T}$ , рост коэффициента теплопроводности с температурой является подтверждением этому.

**Теплопередача в газах при малых давлениях.** Из полученного ранее выражения для коэффициента теплопроводности  $\alpha = \frac{1}{3} n m c_v \lambda \bar{v}$  следует, что этот коэффициент не зависит от давления, потому что из входящих в это выражение величин только  $n$  и  $\lambda$  зависят от давления, но они входят в виде произведения, которое от давления не зависит. Это следствие кинетической теории, хорошо оправдывающееся на опыте при обычных давлениях, оказывается неверным в газе низкого давления (в вакууме).

Если давление газа достигло значения, при котором средняя длина свободного пробега молекул  $\lambda$  становится больше размеров сосуда, в котором газ заключён, то обычное понятие теплопроводности – явления, обусловленного столкновениями молекул, – теряет смысл. Именно поэтому мы пользуемся здесь термином «теплопередача», а не теплопроводность.

Перенос же тепла (теплопередача) существует и в разрежённом газе, но механизм его совсем иной. Так как молекулы здесь сталкиваются только со стенками сосуда, то процесс теплопередачи в вакууме от более нагретой поверхности к менее нагретой можно приблизительно описать так. Молекулы газа при ударах о более нагретую поверхность приобретают энергию, соответствующую температуре этой поверхности. Отразившись от нее, молекулы, не сталкиваясь между собой, достигают более холодной поверхности, передают ей избыток энергии и отражаются от нее с энергией, соответствующей температуре холодной стенки. При таком способе передачи тепла от одной поверхности к другой внутри газа нет градиента температуры, почему и теряет смысл понятие теплопроводности.

Очевидно, что количество тепла, переносимого газом, пропорционально числу ударов молекул о стенки, т.е. давлению газа. Этим и отличается разрежённый газ от обычного, плотного газа.

Хотя в вакууме и нельзя говорить о градиенте температуры, мы можем по аналогии с уравнением Фурье (23.1) написать:

$$q = - \alpha \frac{T_1 - T_2}{d},$$



где вместо градиента  $dT/dx$  поставлена величина  $(T_1 - T_2)/d$  (здесь  $T_1 - T_2$  – разность температур между стенками,  $d$  – расстояние между ними). Тогда для коэффициента «теплопроводности» формально можно написать прежнее выражение (24.3):

$$\alpha = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda c_v.$$

Но здесь под длиной свободного пробега  $\lambda$  нужно понимать расстояние  $d$ , так что

$$\alpha = \frac{1}{3} \rho \bar{v} d c_v.$$

Подставив в этом выражении вместо плотности  $\rho$  величину  $mp$  и вместо  $p$  величину  $P/kT$ , получим:

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{Pm\bar{v}d c_v}{kT}.$$

Наконец, умножив и разделив правую часть этого равенства на число Авогадро  $N_A$  и имея в виду, что  $mN_A c_v = C_v$ , а  $kN_A = R$ , получаем:

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{Pd\bar{v}C_v}{RT}.$$

Из этого выражения и видно, что коэффициент «теплопроводности» газа пропорционален давлению  $P$ . Нужно, однако, иметь в виду, что коэффициент этот не является характеристикой только газа, так как он зависит от расстояния  $d$  между стенками.

С зависимостью теплопередачи в вакууме от давления связано, например, то обстоятельство, что **сосуды Дьюара** (в обиходе часто называемые **термосами**) изготавливаются с двойными стенками, пространство между которыми откачивается до минимально возможного давления газа. Эти сосуды, изготавливаемые обычно в виде цилиндра или шара, предназначаются для изоляции их содержимого от теплообмена с внешней средой. Сосуды Дьюара, в частности, используются для хранения в них жидкостей, кипящих при низких температурах, таких, как жидкий воздух, жидкий водород или жидкий гелий. Благодаря плохой теплопередаче через вакуум, созданный между стенками сосуда Дьюара, жидкость внутри него получает мало тепла извне, и испарение ее происходит достаточно медленно. По тем же причинам горячая жидкость в сосуде Дьюара, отдавая мало тепла наружу, остывает медленно.

Пока давление воздуха между стенками сосуда Дьюара таково, что средняя длина свободного пробега молекул меньше расстояния между стенками, теплопередача через воздух определяется его теплопроводностью и практически не зависит от давления. Хотя, как мы знаем, теплопроводность газов мала, она всё же слишком велика для того, чтобы сосуд Дьюара мог выполнить свою роль

теплового изолятора, и ее необходимо уменьшить понижением давления. При обычных для сосудов Дьюара расстояниях между стенками (около 1 см) уменьшение давления в пространстве между ними до величины порядка  $10^{-2}$  мм рт. ст. ещё не приводит к уменьшению теплопроводности по сравнению с ее значением при атмосферном давлении. Но при дальнейшем уменьшении давления теплопередача становится пропорциональной давлению, и когда  $P$  достигнет значения около  $10^{-3}$  мм рт. ст., теплопередача станет уже в 10 раз меньше, чем при атмосферном давлении, и далее при уменьшении давления теплопередача продолжает уменьшаться.

Использованное здесь понятие «**вакуум**» – является относительным. Вакуумом называют ситуацию, когда средняя длина свободного пробега молекул превышает линейные геометрические размеры объекта (сосуда, если объём ограничен стенками). Чем больше линейные размеры области, в которой содержится газ, тем при меньшем давлении он достигается.

### § 3.25 Вязкость газов (внутреннее трение)

Вязкость газов (то же относится и к жидкостям) – это свойство, благодаря которому выравниваются скорости движения различных слоёв газа. Этому свойству мы обязаны, например, тем, что ветер или буря с течением времени утихают. Выравнивание скоростей соседних слоёв газа, если эти скорости различны, происходит потому, что из слоя газа с большей скоростью движения переносится импульс (количество движения) к слою, движущемуся с меньшей скоростью.

Если внешними силами поддерживается постоянной разность скоростей движения различных слоёв газа, то и поток импульса от слоя к слою будет постоянным (стационарным), причём этот поток будет направлен вдоль падения скорости. С таким случаем мы, например, встречаемся при медленном течении газа (или жидкости) между двумя пластинами или в трубе под действием постоянной внешней разности давлений, направленной вдоль движения.

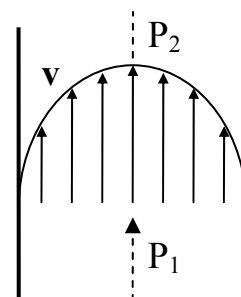


Рисунок 27

Известно, что при течении газа вдоль трубы скорости разных слоёв распределены так, как это показано на рисунке 27, где стрелки представляют векторы скорости движения газа. Наибольшая скорость наблюдается в средней, прилегающей к оси части трубы. По мере приближения к стенкам скорость уменьшается, а слой, непосредственно прилегающий к стенкам трубы, покоится. При таком течении происходит перенос импульса от центрального слоя газа, где скорость наибольшая, к слоям, движущимся с меньшей скоростью. Так как этот процесс связан с изменением импульса, то газ ведёт себя так, как если бы на него действовала некоторая сила (сила внутреннего трения).

Количественно перенос импульса может быть описан так же, как мы описали перенос энергии в процессе теплопроводности. Пусть изменение скорости движения газа происходит в направлении оси  $Ox$ , которое в данном случае перпендикулярно к направлению самой скорости движения газа (рисунок 28).

В направлении, перпендикулярном к оси  $Ox$ , скорость движения во всех точках одинакова. Это значит, что скорость  $v$  является функцией только  $x$ . Тогда, как показывает опыт, импульс  $L$ , переносимый за 1 с через  $1 \text{ м}^2$  сечения, перпендикулярного к оси  $Ox$ , определится уравнением

$$L = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (25.1)$$

где  $dv/dx$  – градиент скорости вдоль оси  $Ox$ , характеризующий быстроту изменения скорости вдоль этой оси (изменение скорости на каждую единицу длины).

Знак минус означает, что импульс переносится в направлении уменьшения скорости.

Коэффициент  $\eta$  называется коэффициентом вязкости или коэффициентом внутреннего трения газа и так же, как коэффициенты диффузии и теплопроводности, зависит от свойств газа.

Физический смысл коэффициента вязкости заключается в том, что он численно равен импульсу, который переносится в единицу времени (1 с) через площадку в  $1 \text{ м}^2$  при градиенте скорости (в направлении, перпендикулярном к площадке), равном единице (1 м/с на 1 м длины).

За единицу вязкости в системе СИ принимается коэффициент вязкости такого вещества (газа), в котором при градиенте скорости, равном единице ( $1 \text{ с}^{-1}$ ), через площадку в  $1 \text{ м}^2$  переносится импульс  $1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$  за 1 с. Значит, коэффициент вязкости измеряется в единицах  $\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$  или в  $\text{Па}\cdot\text{с}$  (паскаль - секундах).

При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоёв (увеличение или уменьшение). Это значит, что на каждый из слоёв действует сила, равная изменению импульса в единицу времени (второй закон Ньютона). Ведь  $L$  в уравнении (25.1) – это перенос импульса в единицу времени! Следовательно, вязкость приводит к тому, что любой слой газа, движущийся относительно соседнего, испытывает действие некоторой силы.

Сила эта есть не что иное, как сила трения между слоями газа, движущимися с различными скоростями. Отсюда и название **внутреннее трение**. Уравнение (25.1) можно поэтому записать и виде:

$$F = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (25.2)$$

где  $F$  – сила, действующая на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа.

Уравнение (25.2) представляет собой **закон Ньютона** для силы внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости). Коэффициент вязкости численно



Рисунок 28

равен силе, действующей на единицу площади при градиенте скорости, равном единице.

Внутреннее трение является причиной того, что для протекания газа (или жидкости) через трубу требуется некоторая разность давлений. Чтобы скорость течения имела некоторое данное значение, эта разность давлений должна быть тем больше, чем больше коэффициент внутреннего трения  $\eta$ .

Зависимость между объёмом  $V$  протекающего в единицу времени через сечение трубы газа и требуемой для этого разностью давлений  $\Delta P$  устанавливается известной формулой Пуазейля:

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{\ell}, \quad (25.3)$$

где  $\ell$  – длина трубы и  $R$  – ее радиус.

Пользуясь этой формулой, можно, измерив объём газа, протекшего за некоторый промежуток времени через трубу, разность давлений  $\Delta P = P_1 - P_2$  на ее концах и зная геометрические размеры трубы, определить коэффициент вязкости газа.

**Вычисление коэффициента вязкости газов.** Величину коэффициента вязкости газа можно оценить способом, подобном тому, который был применён при вычислении коэффициента теплопроводности и диффузии.

Если газ течёт с некоторой скоростью  $v$ , то это значит, что все его молекулы обладают этой скоростью сверх скорости теплового движения, которое в текущем газе происходит совершенно так же, как и в покоем. Каждая молекула имеет, следовательно, импульс  $mv$  ( $m$  – масса молекулы), направленный в одном для всех молекул направлении. Обычно скорость течения газа значительно меньше средней скорости теплового движения его молекул.

Рассмотрим площадку  $S$ , параллельную скорости течения газа и, следовательно, перпендикулярную к направлению переноса импульса (рисунок 29). Пусть скорость течения газа убывает в направлении оси  $Ox$ , т.е. скорость течения справа от площадки меньше, чем слева от нее. Благодаря обмену молекулами между обоими слоями газа (обмен происходит из-за тепловых движений) это различие уменьшается. Молекулы справа от  $S$  замещаются другими молекулами, пришедшими слева, имеющими большую скорость и, следовательно, больший импульс. При столкновении этих молекул с молекулами, находившимися до этого справа от  $S$ , большая скорость течения распределится между всеми молекулами справа, после чего скорость течения этого слоя, а, следовательно, и импульс, станут больше, в то время как скорость и импульс слоя газа слева от  $S$  уменьшатся.

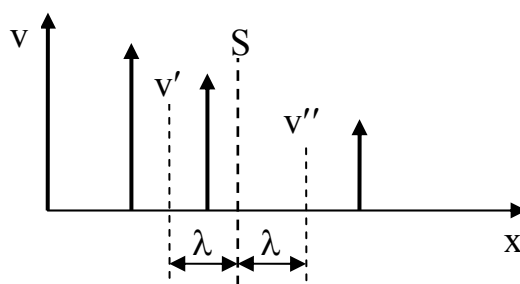


Рисунок 29

Другими словами, обмен молекулами, обусловленный тепловыми движениями, приводит к выравниванию скоростей течения различных слоёв газа. Та-

ков механизм переноса импульса в направлении оси  $Ox$  от одного слоя текущего газа к другому.

Величина потока импульса  $L$ , переносимого в единицу времени (1 с) через единицу площади площадки  $S$ , определится разностью импульсов  $L_1$  и  $L_2$ , переносимых молекулами, пересекающими площадку  $S$  слева и справа. Импульс  $L_1$ , переносимый молекулами слева направо, равен произведению импульса отдельной молекулы на число молекул, пересекающих единицу площади в единицу времени. Последнее, как было показано выше, равно  $\frac{1}{6} n \bar{v}$  ( $n$  – число мо-

лекул в единице объёма,  $\bar{v}$  – средняя скорость теплового движения молекулы). Импульс отдельной молекулы, который она приносит, пересекая площадку  $S$ , – это тот импульс, которым молекула обладала при последнем столкновении перед площадкой, т.е. на расстоянии порядка средней длины свободного пробега  $\lambda$  от площадки.

Если скорость течения газа на расстоянии  $\lambda$  слева от  $S$  равна  $v'$ , то импульс молекулы, связанный с течением газа, равен  $mv'$  ( $m$  – масса молекулы). Таким образом,

$$L_1 = \frac{1}{6} n \bar{v} m v'.$$

Соответственно для молекул, пересекающих площадку  $S$  справа,

$$L_2 = \frac{1}{6} n \bar{v} m v'',$$

где  $v''$  – скорость течения газа на расстоянии  $\lambda$  справа от  $S$ . Результирующий поток импульса  $L$  через единицу площади за 1 с равен

$$L = L_1 - L_2 = \frac{1}{6} m n \bar{v} (v' - v''),$$

где  $v' - v''$  – разность скоростей течения газа в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии  $2\lambda$ , т.е.

$$v' - v'' = -2\lambda \frac{dv}{dx},$$

откуда

$$L = -\frac{1}{3} m n \bar{v} \lambda \frac{dv}{dx}.$$

Сравнивая это выражение с (25.1), получаем выражение для коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} mn \bar{v} \lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda, \quad (25.4)$$

где  $\rho$  – плотность газа.

Выражение (25.4), так же как и полученное ранее значение коэффициента теплопроводности, даёт оценку коэффициента вязкости с точностью до численного множителя, который только приблизительно равен 1/3.

Из этого выражения видно, что коэффициент вязкости тоже не должен зависеть от давления, так как произведение  $\rho \lambda$  не зависит от давления. Опыты по измерению вязкости в широком диапазоне давлений подтверждают этот вывод.

Коэффициент внутреннего трения должен, так же как и коэффициент теплопроводности, зависеть от температуры, так как в выражение для  $\eta$  входит средняя скорость тепловых движений молекул, зависящая от температуры по закону  $\sqrt{T}$ . Значит, коэффициент вязкости тоже должен расти с повышением температуры пропорционально  $\sqrt{T}$ .

В действительности вязкость растёт несколько быстрее, чем  $\sqrt{T}$ . Это связано с тем, что с повышением температуры не только растёт тепловая скорость молекул, но и уменьшается эффективное поперечное сечение молекул и поэтому растёт длина свободного пробега; расстояние от места последнего перед данным слоем столкновения становится большим, и, следовательно, увеличивается изменение импульса, которое молекула с собой приносит.

Таким образом, изложенные здесь молекулярно-кинетические представления о механизме вязкости находятся в хорошем качественном и количественном согласии с опытом.

Так как в выражение для  $\eta$  входит средняя длина свободного пробега, то измерение коэффициента вязкости, так же как и теплопроводности, позволяет определить (или, по крайней мере, оценить) размеры молекул.

Коэффициент внутреннего трения  $\eta$  часто называют **динамической вязкостью**. Наряду с динамической вязкостью используется также **кинематическая вязкость**  $\nu$ , определяемая как динамическая вязкость, отнесённая к плотности:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (25.5)$$

Единицей кинематической вязкости является  $1 \text{ м}^2/\text{с}$ .

### § 3.26 Соотношения между коэффициентами переноса

Из сравнения выражений для коэффициентов теплопроводности (24.3) и вязкости (25.4) видно, что между ними существует простое соотношение:

$$\alpha = \eta c_v, \quad (26.1)$$

где  $c_v$  – удельная теплоёмкость при постоянном объёме.

Это уравнение устанавливает связь между чисто механическими и тепловыми явлениями (теплопроводность) в газе. Входящие в него величины непосредственно измеряются на опыте.

Если теперь сравнить выражения (25.4) и (21.1) для коэффициентов диффузии и теплопроводности, то получим соотношение:

$$D = \frac{\kappa}{\rho c_v}, \quad (26.2)$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $c_v$  – его удельная теплоёмкость.

Проведём анализ правой части уравнения (26.2). Коэффициент теплопроводности  $\kappa$  определяет **поток** количества теплоты, переносимой газом. Величина же  $\rho c_v$  есть не что иное, как теплоёмкость единицы объёма газа. Изменение температуры газа, как известно, определяется отношением сообщённого количества теплоты к теплоёмкости газа ( $\Delta T = \Delta Q/C$ ). Поэтому отношение **потока** количества теплоты к **теплоёмкости**, т.е.  $\frac{\kappa}{\rho c_v}$ , представляет собою, очевидно, **поток** температуры при градиенте температуры, равном единице. Таким образом, выражение (26.2) характеризует скорость выравнивания температуры. Эта величина получила поэтому название коэффициента **температуропроводности газа**

(или любого другого тела). Выражение  $\frac{\kappa}{\rho c_v}$  можно назвать коэффициентом «диффузии температуры».

Из сказанного следует, что рассмотренные нами явления переноса можно трактовать как процессы диффузии: вещества, температуры и скорости соответственно. Этим и объясняются приведённые количественные соотношения между коэффициентами переноса  $D$ ,  $\kappa$  и  $\eta$ , которые хорошо оправдываются на опыте.

Любой из коэффициентов переноса, будучи измерен на опыте, позволяет оценить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекулы, а, следовательно, и размеры молекулы. Вычисленные значения сечений молекул данного газа из различных коэффициентов переноса близко совпадают и называются **газокинетическими** сечениями.

«диффузии температуры».

Из сказанного следует, что рассмотренные нами явления переноса можно трактовать как процессы диффузии: вещества, температуры и скорости соответственно. Этим и объясняются приведённые количественные соотношения между коэффициентами переноса  $D$ ,  $\kappa$  и  $\eta$ , которые хорошо оправдываются на опыте.

Любой из коэффициентов переноса, будучи измерен на опыте, позволяет оценить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекулы, а, следовательно, и размеры молекулы. Вычисленные значения сечений молекул данного газа из различных коэффициентов переноса близко совпадают и называются **газокинетическими** сечениями.

### Контрольные вопросы

1 Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?

2 Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?

3 Запишите выражения для числа столкновений, испытываемых одной молекулой в единицу времени, и средней длины свободного пробега.



4 Почему поперечное сечение столкновений несколько уменьшается с увеличением температуры?

5 В чём сущность явлений переноса (диффузии, теплопроводности, внутреннего трения – вязкости)? Каковы они и при каких условиях возникают? Какие признаки, связанные с молекулярным движением, переносятся в процессах диффузии, теплопроводности, вязкости?

6 Объясните физическую сущность законов Фурье, Фика, Ньютона.

7 Какой процесс называют самодиффузией? Запишите выражение для коэффициента самодиффузии.

8 Как проходит диффузия для смеси двух разных газов. Запишите выражение для коэффициента взаимной диффузии.

9 Объясните суть явления термодиффузии. Какая особенность столкновения молекул обуславливает возникновение термодиффузии? Где находит применение явление термодиффузии?

10 Каков механизм стационарной теплопроводности? Запишите выражение для коэффициента теплопроводности.

11 Какова зависимость коэффициента теплопроводности от давления и температуры?

12 Каков механизм теплопередачи в газах при малых давлениях? Что представляют собой сосуда Дьюара (термосы)?

13 Запишите формулу Пуазейля? Что она выражает?

14 Запишите выражение для коэффициента вязкости газов.

15 Какова зависимость коэффициента вязкости газов от давления и температуры?

16 Каковы соотношения между коэффициентами переноса (диффузии, теплопроводности, внутреннего трения – вязкости)?

17 Что такое динамическая и кинематическая вязкость? Каково соотношение между ними?

## Тесты

1. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул азота 0,31 нм.

А) 0,03 мкм    В) 0,04 мкм    С) 0,05 мкм    **Д) 0,06 мкм**    Е) 0,07 мкм

2. Найти среднее время между столкновениями молекул азота при нормальных условиях.

**А) 0,13 нс**    В) 0,23 нс    С) 0,33 нс    Д) 0,43 нс    Е) 0,53 нс

3. Найти среднюю длину свободного пробега молекул азота при температуре 0 °С и давлении 1,0 нПа (такое давление позволяют получать современные вакуумные насосы).



- А)  $8 \cdot 10^5$  м      В)  $6 \cdot 10^5$  м      **С)  $6 \cdot 10^6$  м**      Д)  $8 \cdot 10^6$  м      Е)  $4 \cdot 10^4$  м

4. Найти среднее время между столкновениями молекул азота при температуре  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $1,0$  нПа.

- А) 4,5 мин      В) 45 мин      С) 1,5 ч      Д) 2,5 ч      **Е) 3,8 ч**

5. Кислород находится при  $0^\circ\text{C}$  в сосуде с характерным размером  $\ell=10$  мм (это линейный размер, определяющий характер интересующего нас процесса). Эффективный диаметр молекул кислорода  $0,29$  нм. Найти давление газа, ниже которого средняя длина свободного пробега молекул  $\lambda > \ell$ .

- А) 0,1 Па      В) 4 Па      С) 0,4 Па      Д) 7 Па      **Е) 0,7 Па**

6. Кислород находится при  $0^\circ\text{C}$  в сосуде с характерным размером  $\ell=10$  мм. Найти концентрацию молекул.

- А)  $2 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>      **В)  $2 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>**      С)  $2 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>      Д)  $1 \cdot 10^{14}$  см<sup>-3</sup>      Е)  $1 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>

7. Кислород находится при  $0^\circ\text{C}$  в сосуде с характерным размером  $\ell=10$  мм. Найти среднее расстояние между молекулами.

- А) 0,2 мкм**      В) 0,3 мкм      С) 0,02 мкм      Д) 0,03 мкм      Е) 0,05 мкм

8. В результате некоторого процесса вязкость идеального газа увеличилась в 2 раза, а коэффициент диффузии – в 4 раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

- А) в 4 раза увеличилось      В) не изменилось      С) в 4 раза уменьшилось      Д) в 2 раза уменьшилось      **Е) в 2 раза увеличилось**

9. Найти предельное значение давления, ниже которого теплопроводность воздуха, заключённого между стенками сосуда Дьюара, начинает зависеть от давления. Расстояние между стенками  $\ell = 6$  мм. Диаметр молекулы воздуха принять равным  $d = 0,3$  нм. Температура газа  $t = 17^\circ\text{C}$ .

- А) 4,7 Па      В) 3,7 Па      С) 2,7 Па      **Д) 1,7 Па**      Е) 0,7 Па

10. Определить теплопроводность аргона при нормальных условиях. Диаметр атома аргона  $0,29$  нм.

- А) 3 мВт/(м·К)      В) 5 мВт/(м·К)      **С) 7 мВт/(м·К)**      Д) 1 мВт/(м·К)      Е) 9 мВт/(м·К)

11. Определить теплопроводность хлора, если известно, что динамическая вязкость для него при этих условиях равна 12,9 мкПа·с. Диаметр молекулы хлора принять равным  $d = 0,37$  нм.

- А) 2,78 мВт/(м·К)      В) 3,78 мВт/(м·К)      С) 4,78 мВт/(м·К)      Д) 5,78 мВт/(м·К)      Е) 6,78 мВт/(м·К)

12. Средняя длина свободного пробега молекул гелия при нормальных условиях 0,23 мкм. Определить коэффициент диффузии гелия при этих условиях. Диаметр молекулы гелия принять равным  $d = 0,19$  нм.

- А) 92 мм<sup>2</sup>/с      В) 82 мм<sup>2</sup>/с      С) 72 мм<sup>2</sup>/с      Д) 62 мм<sup>2</sup>/с      Е) 52 мм<sup>2</sup>/с

13. Определить коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода 0,29 нм.

- А) 44 мм<sup>2</sup>/с      В) 34 мм<sup>2</sup>/с      С) 24 мм<sup>2</sup>/с      Д) 14 мм<sup>2</sup>/с      Е) 4 мм<sup>2</sup>/с

14. Каков коэффициент диффузии водорода при некоторых условиях, если коэффициент диффузии гелия при этих условиях 92 мм<sup>2</sup>/с? Диаметр молекул водорода 0,23 нм, диаметр молекул гелия 0,19 нм.

- А) 89 мм<sup>2</sup>/с      В) 79 мм<sup>2</sup>/с      С) 69 мм<sup>2</sup>/с      Д) 59 мм<sup>2</sup>/с      Е) 49 мм<sup>2</sup>/с

15. Для гелия вязкость при температуре 0 °С равна 16,3 мкПа·с. Определить диаметр молекул гелия.

- А) 0,39 нм      В) 0,34 нм      С) 0,29 нм      Д) 0,24 нм      Е) 0,19 нм

16. Коэффициент диффузии кислорода при нормальных условиях равен 14,1 мм<sup>2</sup>/с. Определить каким будет коэффициент диффузии при температуре 50 °С, если нагревание газа происходит при постоянном объёме.

- А) 12,1 мм<sup>2</sup>/с      В) 15,4 мм<sup>2</sup>/с      С) 18,7 мм<sup>2</sup>/с      Д) 17,2 мм<sup>2</sup>/с      Е) 11,5 мм<sup>2</sup>/с

17. Найти динамическую вязкость воздуха при температуре 100 °С и нормальном давлении, если при нормальных условиях она равна 17,2 мкПа·с.

- А) 20,1 мкПа·с.      В) 17,2 мкПа·с.      С) 15,1 мкПа·с.      Д) 14,3 мкПа·с.      Е) 12,9 мкПа·с.

18. Во сколько раз изменится коэффициент диффузии двухатомного газа при уменьшении давления в 2 раза в результате изотермического расширения.

А) не изменилось    В) в 2 раза уменьшилось    С) **в 2 раза увеличилось**    Д) в 4 раза увеличилось    Е) в 4 раза уменьшилось

19. При какой температуре динамическая вязкость азота равна динамической вязкости водорода при температуре  $19^{\circ}\text{C}$ ? Диаметр молекул азота  $0,31\text{ нм}$ , диаметр молекул водорода  $0,23\text{ нм}$ .

А)  $240\text{ К}$     В)  $120\text{ К}$     С)  $81\text{ К}$     **Д)  $69\text{ К}$**     Е)  $54\text{ К}$

20. Коэффициент диффузии углекислого газа при нормальных условиях равен  $10\text{ мм}^2/\text{с}$ . Определить динамическую вязкость углекислого газа при этих условиях.

А)  $10\text{ мкПа}\cdot\text{с}$     **В)  $20\text{ мкПа}\cdot\text{с}$**     С)  $30\text{ мкПа}\cdot\text{с}$     Д)  $40\text{ мкПа}\cdot\text{с}$     Е)  $50\text{ мкПа}\cdot\text{с}$

21. В межзвёздном пространстве содержится 1 молекула в объёме  $15\text{ см}^3$ . Какова средняя длина свободного пробега молекул, если предположить, что окружающие молекулы являются молекулами водорода? Диаметр молекул водорода  $0,23\text{ нм}$ .

А)  $50\text{ Тм}$     В)  $45\text{ Тм}$     С)  $40\text{ Тм}$     Д)  $35\text{ Тм}$     **Е)  $64\text{ Тм}$**

22. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул гелия, если среднее расстояние между ними  $4\text{ нм}$ ? Диаметр молекул гелия  $0,31\text{ нм}$ .

**А)  $0,4\text{ мкм}$**     В)  $0,5\text{ мкм}$     С)  $0,6\text{ мкм}$     Д)  $0,7\text{ мкм}$     Е)  $0,8\text{ мкм}$

23. Средняя длина свободного пробега молекул воздуха при нормальном давлении  $62,1\text{ нм}$ . Определить среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при сверхвысоком вакууме ( $1,3\text{ нПа}$ ). Температуру считать одной и той же. Диаметр молекул воздуха  $0,31\text{ нм}$ .

А)  $2,7\text{ Мм}$     В)  $3,7\text{ Мм}$     **С)  $4,7\text{ Мм}$**     Д)  $5,7\text{ Мм}$     Е)  $6,7\text{ Мм}$

24. В баллоне вместимостью  $10\text{ л}$  находится гелий массой  $2\text{ г}$ . Определить среднюю длину свободного пробега молекул гелия.

А)  $0,11\text{ мкм}$     **В)  $0,21\text{ мкм}$**     С)  $0,31\text{ мкм}$     Д)  $0,41\text{ мкм}$     Е)  $0,51\text{ мкм}$

25. Какова плотность разрежённого кислорода, если средняя длина свободного пробега его молекул  $1\text{ см}$ ? Диаметр молекул кислорода  $0,29\text{ нм}$ .

А)  $44\text{ мг}/\text{м}^3$     В)  $34\text{ мг}/\text{м}^3$     С)  $24\text{ мг}/\text{м}^3$     **Д)  $14\text{ мг}/\text{м}^3$**     Е)  $4\text{ мг}/\text{м}^3$

26. Определить среднюю квадратичную скорость молекул аргона, находящегося под давлением 0,1 МПа, если известно, что средняя длина свободного пробега его молекул 0,1 мкм. Диаметр молекул аргона 0,29 нм.

- А) 0,41 км/с    В) 0,48 км/с    С) 0,55 км/с    Д) 0,62 км/с    Е) 0,77 км/с

27. Какое давление нужно создать в колбе диаметром 10 см, содержащей азот при температуре 20 °С, чтобы получить вакуум? Диаметр молекул азота равен 0,31 нм.

- А) 14,8 мПа    В) 34,8 мПа    С) 54,8 мПа    Д) 74,8 мПа    Е) 94,8 мПа

28. Каково среднее значение промежутка времени между двумя последовательными столкновениями молекул водорода при давлении 13,3 Па и температуре 100 °С? Диаметр молекул водорода равен 0,23 нм.

- А) 0,43 мкс    В) 0,63 мкс    С) 0,83 мкс    Д) 0,93 мкс    Е) 0,72 мкс

29. Сколько столкновений за 1 с испытывают молекулы углекислого газа, находящегося при нормальных условиях? Диаметр молекул углекислого газа равен 0,33 нм.

- А) 3,7 Гс<sup>-1</sup>    В) 4,7 Гс<sup>-1</sup>    С) 5,7 Гс<sup>-1</sup>    Д) 6,7 Гс<sup>-1</sup>    Е) 7,7 Гс<sup>-1</sup>

30. В сосуде вместимостью 1 л находится азот при температуре 7 °С и давлении 0,2 МПа. Определить число столкновений молекул азота в этом сосуде за 1 с. Диаметр молекул азота 0,31 нм.

- А)  $2,6 \cdot 10^{32} \text{ с}^{-1}$     В)  $3,6 \cdot 10^{32} \text{ с}^{-1}$     С)  $4,6 \cdot 10^{32} \text{ с}^{-1}$     Д)  $5,6 \cdot 10^{32} \text{ с}^{-1}$     Е)  $6,6 \cdot 10^{32} \text{ с}^{-1}$

Верные ответы в тестах отмечены **красным цветом**.

### Упражнения для самоконтроля

3.1. Во сколько раз средняя длина свободного пробега молекул азота, находящегося при нормальных условиях, больше среднего расстояния между его молекулами? [в 18 раз]

3.2. Азот находится при нормальных условиях. Найти: 1) число столкновений, испытываемых в среднем каждой молекулой за одну секунду; 2) число всех столкновений между молекулами в 1 см<sup>3</sup> азота ежесекундно. Эффективный диаметр молекул азота 0,31 нм.

$$[1) v = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v} = 0,74 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}; 2) Z = \pi d^2 n^2 \bar{v} / \sqrt{2} = 1,0 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3},$$

$$\text{где } n = \frac{P_0}{kT_0}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}]$$

3.3. Как зависят средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени от температуры  $T$  идеального газа в следующих процессах: 1) изохорическом; 2) изобарическом?

[1)  $\lambda = \text{const}$ ,  $v \sim \sqrt{T}$ ; 2)  $\lambda \sim T$ ,  $v \sim 1/\sqrt{T}$ ]

3.4. Идеальный газ совершил процесс, в результате которого его давление возросло в  $n$  раз. Как и во сколько раз изменились средняя длина свободного пробега и число столкновений каждой молекулы в единицу времени, если процесс: 1) изохорический; 2) изотермический?

[1)  $\lambda = \text{const}$ ,  $v$  увеличится в  $\sqrt{n}$  раз; 2)  $\lambda$  уменьшится в  $n$  раз,  $v$  увеличится в  $n$  раз]

3.5. Как изменятся коэффициент диффузии  $D$  и вязкость  $\eta$  идеального газа, если его объём увеличить в  $n$  раз: 1) изотермически; 2) изобарически?

[1)  $D$  увеличится в  $n$  раз,  $\eta = \text{const}$ ; 2)  $D$  увеличится в  $n^{3/2}$  раз,  $\eta$  – в  $\sqrt{n}$  раз]

3.6. Определить среднюю продолжительность свободного пробега молекул водорода при температуре 300 К и давлении 5 кПа. Эффективный диаметр молекулы водорода 0,28 нм. [170 нс]

3.7. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения при некоторых условиях равны соответственно  $1,42 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$  и  $8,5 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$ . Определить концентрацию молекул воздуха при этих условиях. [ $1,25 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$ ]

3.8. Вычислить коэффициент диффузии и динамическую вязкость азота при давлении 0,1 МПа и температуре  $7^\circ\text{C}$ . [ $14 \text{ мм}^2/\text{с}$ ;  $17 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$ ]

3.9. Как изменится число ударов молекул одноатомного газа о стенку баллона площадью  $1 \text{ м}^2$  за 1 с, если давление газа увеличится в 4 раза, в случае: 1) изотермического и 2) изохорного процессов?

[Увеличится: 1) в 4 раза; 2) в 2 раза]

## Глава 4 Реальные газы

В предыдущих главах было показано, что уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева) достаточно хорошо описывает известные из опыта свойства газов. Но является ли это уравнение действительно точным, справедливым при всех условиях, или оно лишь с определённым приближением соответствует наблюдаемым на опыте соотношениям?

Известно, что при изучении тех или иных явлений природы физики на основании данных опыта – измерений – устанавливают количественные соотношения между величинами, характеризующими изучаемое явление. Часто эти соотношения носят приближённый характер. Это значит, что они справедливы лишь тогда, когда значения величин, входящих в эти соотношения, лежат в определённых пределах. Вне этих пределов они становятся неверными и нужно искать более общие соотношения, пригодные для более широких пределов значений интересующих нас величин. Указание пределов применимости того или иного физического закона очень важно, так как применение данного закона вне области его применимости часто приводит к значительным ошибкам.

Очень немногие физические законы имеют универсальный характер, т.е. верны всегда. Такими являются, например, законы сохранения энергии и им-

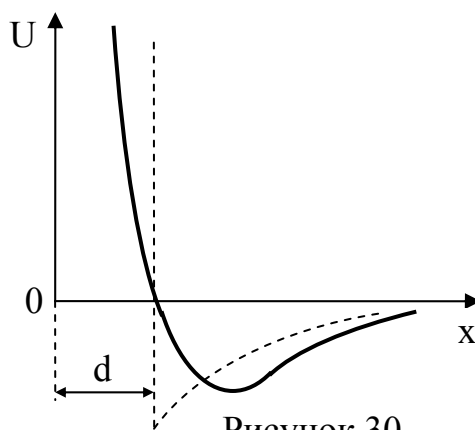
пульса (для замкнутых систем). Эти законы и следствия из них являются вполне точными законами, не знающими исключений. Но такой, например, закон, как закон вязкого (жидкого) трения – закон приближённый; сила жидкого трения пропорциональна скорости относительного движения только при малых скоростях. При больших значениях скорости зависимость силы трения от скорости становится более сложной.

#### § 4.27 Молекулярные силы и отклонения свойств газов от идеальности

Законы идеальных газов также являются приближёнными законами. Отклонения от них носят как количественный, так и качественный характер. Количественные отклонения проявляются в том, что уравнение Клапейрона-Менделеева  $PV = RT$  соблюдается для реальных газов только приближённо. Качественные отклонения носят более глубокий характер. Реальные газы могут быть переведены в жидкое и твёрдое состояния. Это было бы невозможно, если бы газы строго следовали уравнению Клапейрона-Менделеева.

Отклонения от законов идеальных газов связаны с тем, что между молекулами газа действуют силы, которые в теории идеальных газов во внимание не принимаются.

Эти силы могут приводить к образованию химических соединений. Тогда они называются **химическими**, или **валентными, силами**. Мы будем предполагать, что в газе химические реакции не происходят или закончились, так что химические силы нас интересовать не будут. Если газ ионизован, то появляются силы **кулоновского притяжения** и **отталкивания** между ионами, имеющимися в газе. Такими силами определяется поведение **плазмы**, т.е. **квазинейтрального ионизованного газа** (квазинейтральным называется такой газ, в котором с большой точностью заряды положительных ионов компенсируются зарядами отрицательных ионов). Физика плазмы представляет обширный раздел физики, имеющий широкие применения в астрофизике, теории распространения радиоволн, в проблеме управляемых термоядерных реакций и пр. Однако о свойствах плазмы здесь не будем говорить. Здесь мы будем рассматривать только газы, состоящие из **электрически нейтральных** молекул или атомов. Химические силы по своей природе не отличаются от молекулярных сил. И те и другие сводятся к силам **электрических взаимодействий** между элементарными зарядами, из которых построены атомы и молекулы. Однако полное понимание природы молекулярных и химических сил стало возможным только после возникновения квантовой механики. Не имея возможности останавливаться на этом вопро-



се, ограничимся некоторыми замечаниями, оставаясь в рамках классических представлений и не интересуясь природой молекулярных сил.

На далёких расстояниях молекулярные силы являются силами притяжения. Эти силы притяжения называют также **силами Ван-дер-Ваальса** (1837-1923) по имени голландского учёного, заложившего основы молекулярной теории реальных газов. Если расстояние между молекулами велико по сравнению с их размерами, эти силы убывают обратно пропорционально седьмой степени расстояния. На близких расстояниях, когда электронные оболочки взаимодействующих частиц взаимно проникают друг в друга, силы молекулярного притяжения переходят в силы отталкивания. Теория, основанная на квантовой механике, показывает, что силы отталкивания очень велики, когда расстояние между взаимодействующими частицами мало. Они очень быстро убывают с увеличением расстояния. Когда расстояние превосходит «диаметр» взаимодействующих частиц, силы отталкивания экспоненциально убывают с возрастанием расстояния.

Взаимодействие молекул удобно характеризовать потенциальной энергией взаимодействия  $U(x)$  как функцией расстояния  $x$  между центрами сблизившихся молекул. Сами молекулы для простоты можно считать сферическими. На основании изложенного функция  $U(x)$  должна иметь вид, графически представленный на схематическом рисунке 30 жирной кривой. Она имеет минимум, в котором силы притяжения уравновешиваются силами отталкивания.

Во многих вопросах теории газов к хорошим результатам приводит следующая аппроксимация функции  $U(x)$ :

$$U(x) = \frac{a_1}{x^{12}} - \frac{a_2}{x^6}, \quad (27.1)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – постоянные.

Она называется **потенциалом Леннарда-Джонса** (1894-1954). Первый член соответствует силам отталкивания, второй – силам притяжения Ван-дер-Ваальса. Сила притяжения убывает обратно пропорционально седьмой степени расстояния (так как  $F = -dU/dx$ ). Поэтому член  $-a_2/x^6$  может считаться обоснованным теоретически (при больших  $x$ ). Что касается первого члена, то на него следует смотреть как на простую аппроксимацию.

В теории уравнения состояния Ван-дер-Ваальса применяется ещё более грубая аппроксимация. Так как кривая  $U(x)$  слева круто поднимается вверх, то этот участок кривой заменяется вертикальной прямой, как это изображено на рисунке 30 штриховой линией. Если  $d$  – расстояние этой прямой от начала координат, то центры взаимодействующих частиц не могут сблизиться на расстояние, меньшее  $d$ . Рассматриваемая аппроксимация соответствует поэтому **модели твёрдых упругих шаров**, между которыми действуют силы притяжения. Этой моделью мы и будем пользоваться в дальнейшем. Силы отталкивания учитываются тем, что размеры шаров считаются конечными. Эти силы проявляются только в моменты столкновений. Расстояние  $d$  играет **диаметра молеку-**



лы. Конечно, диаметр молекулы относится к числу не вполне чётко определённых величин.

Ещё менее определённым является понятие сферы молекулярного действия, которое иногда вводится. Оно определяется тем, что силы притяжения молекулы проявляются только внутри сферы молекулярного действия, а вне этой сферы считаются равными нулю. Ясно, что радиус сферы молекулярного действия не может быть указан совершенно точно, так как это зависит от степени точности, предъявляемой к расчёту. Ориентировочно он порядка  $10^{-9}$  м.

Уравнение Клапейрона-Менделеева оказывается справедливым только при достаточно малых давлениях и достаточно высоких температурах и выполняется тем точнее, чем меньше давление. При повышении же давления наблюдаются отклонения от таких газовых законов, как законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака, являющихся прямыми следствиями уравнения состояния Клапейрона-Менделеева. Во втором столбце таблицы 1 приведены полученные на опыте значения произведения  $PV$  для массы газа азота, занимающего при нормальных условиях объём, равный одному литру. Указанные значения даны для различных давлений и одной и той же температуре  $0^{\circ}\text{C}$ .

Таблица 1

$P$ , атм	$PV$ , атм·л	$P$ , атм	$PV$ , атм·л
1	1,000	700	1,661
100	1,071	900	1,951
300	1,138	1 000	2,058
500	1,437		

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева  $PV = RT$  произведение  $PV$  при неизменной температуре  $T$  должно оставаться постоянным. В действительности, как видно из таблицы, что уже при давлении в 100 атм значение  $PV$  отличается от теоретического (1,000) более чем на 7 %. При больших давлениях значение  $PV$  непрерывно растёт с увеличением давления, всё более отклоняясь от значения, требуемого уравнением Клапейрона-Менделеева. Эти отклонения очевидны, поскольку при увеличении плотности всё большую роль начинают играть объём молекул и взаимодействие между ними.

Приведённые в таблице данные показывают, что при достаточно больших давлениях реальный газ сжимается внешними силами значительно меньше, чем этого можно было ожидать на основании уравнения состояния идеального газа. Коэффициент сжимаемости газа уменьшается с увеличением давления быстрее, чем обратно пропорционально давлению, как должно быть для идеального газа, для которого

$$\chi = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{P}.$$

При меньших давлениях соотношение между объёмом  $V$  и давлением  $P$  газа при постоянной температуре сложнее. Оказывается, что при сравнительно малых давлениях кривая, выражающая зависимость произведения  $PV$  от давле-



ния  $P$  при заданной температуре (эта кривая, значит, является изотермой), имеет минимум. Таким образом, при малых давлениях величина  $PV$  падает с увеличением давления (сжимаемость больше, чем следует для идеального газа), при некотором давлении достигает минимума, после чего снова начинает возрастать (сжимаемость меньше, чем у идеального газа).

Давление, при котором величина  $PV$  проходит через минимум, зависит от температуры.

Существует температура, характерная для каждого газа (температура Бойля), при которой произведение  $PV$  в некотором интервале давлений не зависит от давления, т.е. при этой температуре газ подчиняется закону Бойля-Мариотта.

Опыт, таким образом, показывает, что реальные газы значительно отличаются по своим свойствам от идеальных газов. В этом нет ничего удивительного, если вспомнить те допущения, которые были сделаны при выводе уравнения состояния идеальных газов. В самом деле, идеальный газ мы определили как газ, состоящий из молекул, не взаимодействующих между собой, а сами молекулы при этом считали материальными точками, т.е. мы пренебрегали их размерами и объёмом.

Отсутствие взаимодействия между молекулами означает, что на молекулы в промежутках между столкновениями не действуют какие-либо силы, что они движутся свободно. Между тем при столкновениях молекул между собой они изменяют свою скорость, что, очевидно, невозможно без действия силы. Следовательно, межмолекулярные силы существуют, но они становятся заметными только при столкновениях, когда расстояния между молекулами очень малы.

Отсутствие объёма у молекул означает, что объём сосуда  $V$ , входящий в уравнение состояния, т.е. тот объём, в котором движутся молекулы, весь целиком доступен для движения каждой из них, так как все прочие молекулы, будучи точками, не занимают объёма. От этого предположения мы отказались при рассмотрении вопроса о столкновениях молекул, и мы знаем, что молекулы действительно имеют определённые размеры. Опыты с явлениями переноса дают для этих размеров значение порядка  $10^{-10}$  м.

Таким образом, оба допущения, положенные в основу теории идеального газа, являются приближёнными. При атмосферном давлении среднее расстояние между молекулами в 10 раз превосходит их собственные размеры, а их общий объём в 2 000 раз меньше объёма, занимаемого газом. При этих условиях (а тем более при ещё меньших давлениях) можно пренебречь как объёмом молекул, так и силами взаимодействия между ними, если силы взаимодействия быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами. Но уже при давлении в 100 атм молекулы газа в среднем удалены друг от друга на расстояние, которое только вдвое больше их собственных размеров, а собственный объём молекул лишь в 20 раз меньше объёма газа. В этих условиях объёмом молекул нельзя пренебречь, а силы взаимодействия должны уже сказываться не только в моменты столкновений.

## § 4.28 Сжижение газов (конденсация)

Указанное несоответствие данных опыта о зависимости объёма газа от давления уравнению состояния идеального газа носит как будто бы только количественный характер. Но с ним связаны важные качественные изменения, которые наблюдаются при достаточно высоких давлениях и соответствующих температурах.

Известно, что при определённых значениях давления и температуры газы конденсируются, т.е. переходят в жидкое состояние, существенно отличное от газообразного. Это явление ни в какой мере не следует из уравнения состояния идеального газа.

Рассмотрим более подробно этот процесс. Его можно исследовать экспериментально на установке, схематически представленной на рисунке 31. Пусть исследуемый газ помещён в сосуд, закрытый подвижным поршнем. Будем поддерживать его температуру постоянной, но ниже характерного для каждого газа значения. Перемещая поршень вверх, мы уменьшаем объём газа и увеличиваем его давление, которое измеряется манометром М. По мере подъёма поршня и, значит, уменьшения объёма газа его давление непрерывно растёт, сначала обратно пропорционально объёму, а затем всё медленнее. Наконец, давление достигает некоторой предельной величины и дальше уже не изменяется, несмотря на то, что подъём поршня продолжается. Как раз в это время можно заметить, что на поверхности поршня и на стенках сосуда появляются капельки жидкости.

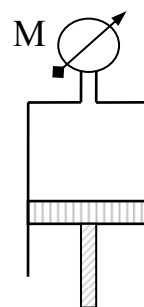


Рисунок 31

Дальнейшее продвижение поршня вверх сопровождается увеличением количества жидкости над поршнем и, соответственно, уменьшением количества газа (пара) над жидкостью, но манометр показывает неизменное давление. И оно остаётся постоянным до тех пор, пока весь объём между поршнем и стенками сосуда не окажется заполненным жидкостью. Если продолжать и после этого поднимать поршень, т.е. сжимать уже жидкость, то теперь даже самое незначительное уменьшение объёма вещества достигается ценой очень большого увеличения давления. Это значит, что сжимаемость жидкости очень мала.

Описанный процесс сжатия газа и превращения его в жидкость удобно графически изобразить изотермой. По оси ординат на графике (рисунок 32) отложено давление, измеряемое манометром, а по оси абсцисс – молярный объём, т.е. объём моля (с таким же успехом можно было бы откладывать и удельный объём, т.е. объём одного грамма газа). График рисунка 32 иллюстрирует сказанное выше. При сравнительно больших удельных

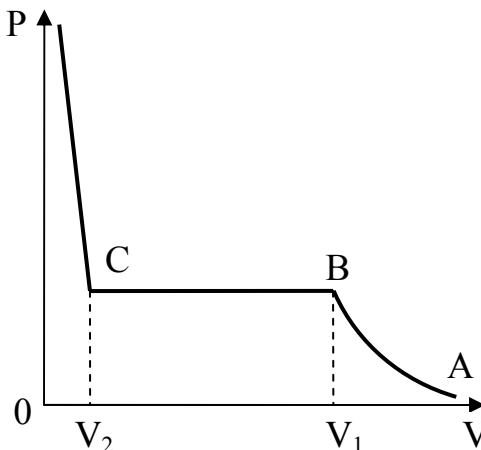


Рисунок 32

объёмах (малой плотности) газа уменьшение объёма сопровождается увеличением давления (участок АВ кривой). Так продолжается до тех пор, пока объём не уменьшится до значения  $V_1$ . Дальнейшее уменьшение объёма до значения  $V_2$  не вызывает изменения давления. Начиная с  $V_2$ , уменьшение объёма требует уже резкого повышения давления. В точке В, соответствующей объёму  $V_1$ , начинается процесс конденсации, и к тому моменту, когда объём достигает значения  $V_2$ , весь газ переходит в жидкое состояние. Наконец, резкое увеличение давления при уменьшении объёма ниже  $V_2$  свидетельствует о том, что происходит уже сжатие самой жидкости.

При давлениях и объёмах, соответствующих участку ВС, часть объёма сосуда занята жидкостью, другая часть – газом, который в этом случае называется **насыщенным паром**.<sup>1</sup> Ордината, соответствующая участку ВС, определяет давление насыщенного пара, или, как обычно говорят, **упругость** насыщенного пара при данной температуре.

Чтобы получить более ясное представление о величинах, характеризующих процесс конденсации, приведём некоторые численные данные, относящиеся к воде (водяному пару).

При 20 °С упругость насыщенного пара воды равна 17,5 мм рт. ст. Молярный объём водяного пара можно с достаточной точностью вычислить из уравнения состояния идеального газа:

$$PV = RT; \quad V = \frac{RT}{P} = \frac{8,31 \cdot 293}{17,5 \cdot 133} = 1,04 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Молярный же объём жидкости (воды) равен примерно  $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ . Значит, отношение молярных объёмов пара и жидкости  $V_1/V_2$  равно приблизительно 60 000. Поэтому представить на графике, подобном рисунку 32, 20-градусную изотерму для воды в правильном масштабе невозможно. При более высокой температуре отношение  $V_1/V_2$  уменьшается, но даже при 100 °С, когда молярный объём пара  $V_1$  равен уже 3,1 м<sup>3</sup>/моль, он всё же ещё в 1 700 раз больше, чем  $V_2$ .

При ещё более высоких температурах разница между  $V_1$  и  $V_2$  становится ещё меньше. Это значит, что плотность насыщенного пара  $\mu/V_1$  с повышением температуры растёт, а плотность жидкости  $\mu/V_2$  уменьшается.

В таблице 2 приведены значения плотностей воды и насыщенного пара при различных температурах. Из этой таблицы видно, что при температуре 647,3 К плотности воды и ее насыщенного пара становятся одинаковыми.

---

<sup>1</sup> Наряду с термином «газ» распространён также термин «пар». Эта двойственная терминология возникла в то время, когда считалось, что пар может быть превращён в жидкость, а газ нет. После того как все газы были сконденсированы, для такой двойственности не осталось оправдания. Газ и пар – это одно и то же. Когда говорят о паре какой либо жидкости, то этим желают подчеркнуть, что речь идёт о газе, получающемся испарением жидкости. Только по привычке мы говорим о водяном паре, а не о водяном газе, о насыщенном паре, а не о насыщенном газе и пр.

**Плотность воды и ее насыщенного пара при различных температурах и давлениях**

Температура, К	Давление, бар	Плотность пара, кг/м <sup>3</sup>	Плотность воды, кг/м <sup>3</sup>
273,15	0,006	0,004	999,9
323,15	0,122	0,083	988,0
373,15	1,013	0,6	958,0
423,15	4,750	2,5	917,0
473,15	15,54	8,0	863,0
523,15	39,76	19,9	799,0
573,15	85,88	46,2	712,0
623,15	165,34	113,6	575,0
647,25	217,72	329,0	329,0

При этой температуре, следовательно, стирается разница между жидкостью и ее насыщенным паром. При температурах выше 647,3 К вода ведёт себя как обычный газ, т.е. при повышении давления ее объём уменьшается. Вместо двух одновременно существующих состояний, жидкого и газообразного, теперь остаётся только одно состояние – газообразное, хотя при достаточно высоком давлении плотность такого газа может стать равной плотности жидкости и превзойти ее.

Всё это относится, разумеется, не только к воде, но и к любому веществу. Для каждого вещества существует некоторая температура, при которой исчезает различие между паром и жидкостью, и выше которой вещество может быть только однородным при любом сжатии. Эта температура называется **критической температурой**. При температуре выше критической образование жидкости уже ни при каких давлениях невозможно. Увеличение давления вызывает только уменьшение объёма (увеличение плотности). При температуре выше критической изотерма качественно выглядит так же, как изотермы идеального газа.

Разные вещества имеют различные значения критических температур. Для воды, как мы видели, равна 647,3 К, для азота критическая температура равна 126,0 К, для кислорода 154,3 К и т.д. Самой низкой в природе критической температурой обладает редкий изотоп гелия  $He^3$  – гелий с атомным весом 3. Она равна 3,35 К, или  $-269,80\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Ещё одной иллюстрацией сказанному может служить график другого типа. На рисунке 33

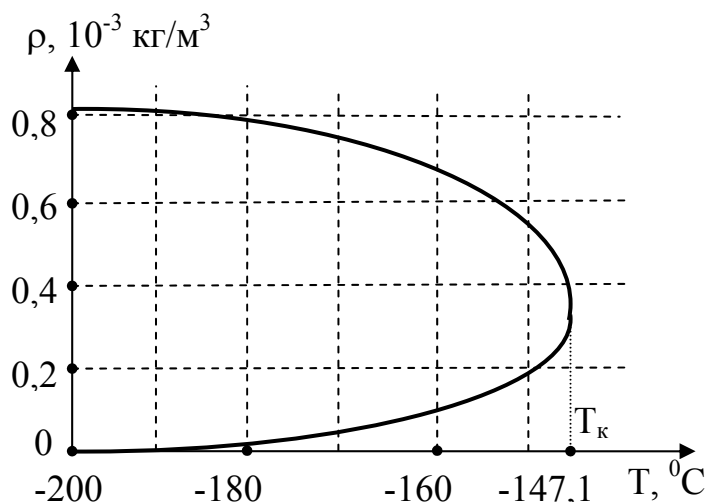


Рисунок 33

приведена полученная на опыте кривая зависимости плотности  $\rho$  жидкого азота

и его насыщенного пара от температуры  $T$ . Из кривой видно, как плотность жидкого азота с повышением температуры уменьшается (верхняя ветвь кривой), а плотность его паров растёт (нижняя ветвь), пока при **критической температуре** ( $-147,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) обе плотности не достигают одинакового значения. Соответствующий удельный (или молярный) объём называется **критическим объёмом** ( $V_k$ ). Давление насыщенного пара при критической температуре называется **критическим давлением** ( $P_k$ ). Эти три критических параметра –  $P_k$ ,  $V_k$  и  $T_k$  – определяют **критическое состояние** вещества.

В таблице 3 приведены критические параметры некоторых веществ.

Таблица 3

**Критические параметры некоторых веществ**

Вещество	$T_k$ , К	$P_k$ , бар	$V_k$ , $10^{-3}\text{ м}^3/\text{кг}$
Гелий ( $\text{He}^3$ )	3,35	1,18	
Гелий ( $\text{He}^4$ )	5,25	2,29	14,43
Водород	33,2	13,29	32,26
Неон	44,3	26,23	2,06
Азот	126,0	33,93	3,22
Аргон	151,1	48,62	1,88
Кислород	154,3	50,34	2,32
Метан	190,6	46,39	6,17
Углекислота	304,2	73,94	2,17
Аммиак	405,6	112,94	4,26
Хлор	417,1	77,08	1,75
Водяной пар	647,25	217,7	2,50

#### § 4.29 Фазовый переход (фазовое превращение)

На примере рассмотренного только что явления конденсации газов мы видели, что могут существовать два различных состояния одного и того же вещества, при одних и тех же температуре и давлении. Состояния эти отличаются своими свойствами, в данном случае – плотностью.

Вообще, если система разделяется на граничащие друг с другом однородные части, находящиеся в физически различных состояниях, то эти части называются **фазами системы**.

Если две или больше различных фаз вещества при данных температуре и давлении существуют одновременно, соприкасаясь друг с другом, и если при этом масса одной из фаз не растёт за счёт другой, то говорят о **фазовом равновесии**. Переход вещества из одного состояния (фазы) в другое называется **фазовым переходом** или **фазовым превращением**. Число фаз, могущих находиться в равновесии, может быть различным и зависит от состава вещества.

Конденсация газа, так же как и обратный процесс – переход жидкости в пар (испарение), являются примерами фазовых переходов. Как известно, вещество может находиться ещё и в третьем состоянии – твёрдом. Переход газа или жидкости в твёрдое состояние тоже является фазовым переходом. Но отличие

твёрдого состояния от жидкого или газообразного гораздо более глубокое, чем различие между жидким и газообразным состояниями. Вопрос о фазовом переходе в твёрдое состояние мы рассмотрим позже.

Вернёмся теперь к фазовому переходу жидкость – пар (или пар – жидкость).

Если построить ряд изотерм (см. рисунок 32) при температурах  $T_i$  и соединить точки перехода пара в жидкость и жидкости в пар, т.е. точки  $B_i$  и  $C_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ), то получится плавная кривая с максимумом, изображённая на рисунке 34. Точка  $P$  на рисунке 34 соответствует случаю, когда горизонтальный участок  $BC$  на рисунке 32 вырождается в точку перегиба  $P$ . Это связано с тем, что с повышением температуры горизонтальный участок  $BC$  становится всё короче:

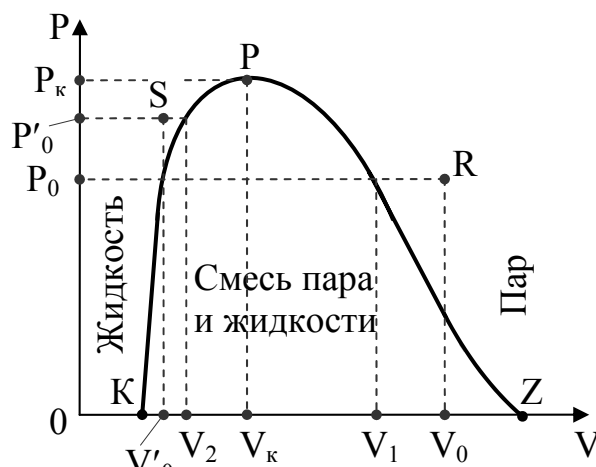


Рисунок 34

удельные объёмы жидкости и пара сближаются потому, что первый с повышением температуры растёт, а второй – падает. Наконец, при критической температуре  $T_k$ , в точке  $P$ , – удельные объёмы жидкости и пара (а значит, и их плотности) становятся одинаковыми. Сама изотерма, соответствующая этой температуре, называется **критической изотермой**.

Любая точка  $R$  с координатами  $P_0$  и  $V_0$ , находящаяся справа от ветви кривой  $PZ$ , соответствует, очевидно, газообразному состоянию, потому что удельный объём  $V_0$  больше того объёма, при котором начинается переход в жидкое состояние при том же давлении. Точно так же точка  $S$  с координатами  $P'_0$  и  $V'_0$ , как и любая другая точка, расположенная слева от ветви  $KP$ , соответствует жидкому состоянию – удельный объём  $V'_0$  меньше удельного объёма, при котором заканчивается процесс конденсации. Все же точки, лежащие под кривой  $KPZ$ , соответствуют двухфазным состояниям, т.е. состояниям, при которых одновременно существуют жидкость и насыщенный пар над ней. Точка же  $P$  соответствует критическому состоянию. Ее координаты на кривой рисунка 34 –  $P_k$  и  $V_k$  – критические давление и объём.

Как мы уже знаем, перевести вещество из газообразного в жидкое состояние можно, повышая его давление при данной температуре, если эта температура ниже критической. Если температура выше  $T_k$ , необходимо предварительное охлаждение. При таком превращении вещество должно пройти через промежуточную область двухфазного состояния, когда пар и жидкость сосуществуют и граничат друг с другом.

Можно, однако, осуществить этот переход и минуя эту область двухфазных состояний. Другими словами, можно превратить газ в жидкость (или, наоборот) без того, чтобы в какой-то момент существовали обе фазы. Например, для того, чтобы газ, характеризуемый объёмом  $V_0$ , давлением  $P_0$  и температурой  $T_0$  (см. рисунок 34), превратить в жидкость при той же температуре и дав-

лении, но, конечно, с другим объёмом  $V'_0$ , можно поступить следующим образом. Нужно нагреть газ до температуры выше критической, после чего сжать так, чтобы его объём стал равным  $V'_0$ . Наконец, сохраняя постоянным объём, нужно охладить газ до температуры  $T_0$ . Давление его при этом станет равным  $P_0$ . Таким образом, мы можем превратить газ в жидкость «в обход» области двухфазных состояний, так что не будет такого промежуточного состояния, при котором появится граница между жидкостью и паром (мениск).

Если, например, требуется превратить углекислый газ, находящийся при температуре  $21,5^\circ\text{C}$  и давлении 50 атм, в жидкую кислоту при той же температуре, то сначала нужно нагреть газ до температуры выше критической  $31,1^\circ\text{C}$ , например, до  $32^\circ\text{C}$ . При этой температуре газ нужно сжать так, чтобы его удельный объём стал равен  $1,5\text{ м}^3/\text{г}$ . Давление его при этом соответственно возрастает. После этого охлаждение до  $21,5^\circ\text{C}$  вызовет превращение всего газа в жидкое состояние (значения критических параметров углекислоты см. в таблице 3).

Возможность непрерывного перехода из газообразного в жидкое состояние, минуя стадию одновременного существования обеих фаз, показывает, что между ними нет принципиального качественного различия. Сам факт существования критического состояния свидетельствует о том, что при определённых условиях жидкое и газообразное состояния нельзя различить. Поэтому часто и говорят о непрерывном переходе между ними. Переход из твёрдого в жидкое или газообразное состояние нельзя осуществить аналогичным образом, т.е. так, чтобы при некоторой температуре и давлении не существовали одновременно две фазы вещества.

Как указывалось выше, равновесие жидкой и газообразной фаз, т.е. равновесие между жидкостью и ее насыщенным паром, имеет место при определённых давлениях и температуре (ниже критической). Изменение одной из этих величин, например температуры, вызывает изменение и того давления, при котором возможно фазовое равновесие, т.е. изменение упругости насыщенного пара, причём при повышении температуры упругость насыщенного пара возрастает.

На рисунке 35 представлена зависимость упругости насыщенного пара от температуры для воды. Для всех других веществ эта зависимость имеет такой же характер.



Рисунок 35

Любая точка слева от приведённой кривой соответствует жидкому состоянию, а точки, расположенные справа от нее, соответствуют газообразной фазе. Это значит, что пар, состояние которого характеризуется какой-либо точкой справа от кривой, сконденсируется, если, сохраняя неизменным давление<sup>2</sup>, по-

<sup>2</sup> Сохранить давление пара постоянным можно, например, дав возможность поршню свободно перемещаться над паром.



низить его температуру. Точно так же жидкость, состояние которой задано координатами любой точки, расположенной слева от кривой, перейдет в пар, если повысить ее температуру. И только точки, лежащие на самой кривой, соответствуют фазовому равновесию, т.е. одновременному существованию жидкости и пара над ней.

Кривая на рисунке 35, точки которой соответствуют равновесию фаз, называется **фазовой диаграммой**, или кривой равновесия фаз (в данном случае жидкости и пара). Она разделяет области, точки которых соответствуют однофазным состояниям вещества, и является одной из важных характеристик вещества. Такие диаграммы иногда называют **диаграммами состояния**. Характерной особенностью кривой на рисунке 35 является то, что она имеет конец, так как она не может быть продолжена выше критической температуры. Ведь выше этой температуры нет двух фаз, поэтому не может быть их равновесия. Как мы увидим ниже, кривая равновесия жидкость – пар имеет и начало.

### § 4.30 Методы определения критических параметров

Процесс перехода вещества через критическое состояние легко наблюдать, например, в следующем опыте. Исследуемую жидкость (например, эфир, с которым особенно удобно вести опыт) помещают в стеклянную трубку (ампулу), которая после удаления из нее воздуха запаивается (рисунок 36). Трубку затем помещают в печь, снабжённую слюдяным окошком для наблюдения. По мере повышения температуры, измеряемой помещённым рядом с трубкой термометром, наблюдают за мениском – поверхностью раздела между жидкостью и ее паром.



Рисунок 36

При определённой температуре мениск внезапно исчезает, и трубка представляется заполненной однородным веществом. Исчезновение видимой границы раздела показывает, что плотности вещества по обе стороны от прежней границы стали одинаковыми. Следовательно, та температура, при которой исчезает мениск, и есть критическая температура. Для эфира она равна 467,1 К. Если теперь охлаждать трубку, нагретую до температуры выше критической, то так же внезапно, при той же температуре 467,1 К, во всём объёме трубки появится туман, состоящий из капелек жидкости, снова отделённый от пара резкой границей – мениском.

Таким образом, критическую температуру жидкости легко определить, измерив температуру, при которой исчезает или появляется мениск в герметически закрытом сосуде с жидкостью.

Если трубка в описанном опыте содержит ровно столько жидкости, сколько нужно для того, чтобы ее пар, обладая критической плотностью, заполнил бы весь объём трубки, то при нагревании мениск не будет перемещаться вдоль трубки. Если же в трубку помещено большее количество жидкости, то при повышении температуры мениск будет перемещаться вверх, пока вся трубка не заполнится жидкостью. Наоборот, если в трубку налито недостаточное количе-



ство жидкости, то при нагревании жидкость будет испаряться, мениск будет перемещаться вниз, пока вся трубка не окажется заполненной паром.

Это ясно видно и из диаграммы на рисунке 34. Ведь в нашем опыте, в отличие от описанных выше, где объём сосуда изменяется при перемещении поршня, объём вещества остаётся всё время постоянным (сосуд герметически закрыт). Если объём сосуда меньше критического, т.е. количество жидкости велико, то мы всё время остаёмся на левой ветви диаграммы, которая, как мы знаем, соответствует жидкой фазе. При повышении температуры объём жидкой фазы возрастает за счёт конденсации пара, и жидкость заполнит весь объём ещё до достижения критической температуры, потому что критический объём больше объёма сосуда. В том же случае, когда объём сосуда больше критического объёма для помещённого в него количества вещества, состояние вещества будет отвечать правой части диаграммы (см. рисунок 34). Это значит, что при нагревании объём жидкости будет уменьшаться за счёт ее испарения.

Только в том случае, когда объём трубки как раз равен критическому объёму находящегося в ней количества вещества, повышение температуры не вызывает заметного изменения объёма ни жидкости, ни пара. Нагревание жидкости вызывает ее испарение, и за этот счёт растёт плотность пара. Но при этом объём жидкости увеличивается за счёт теплового расширения примерно настолько, чтобы скомпенсировать уменьшение ее объёма, вызванное испарением. Благодаря этому плотность жидкости уменьшается, пока при критической температуре она не сравняется с плотностью пара над ней, и всё вещество будет находиться в критическом состоянии, когда его нельзя считать ни жидкостью, ни паром.

Изложенные здесь суждения лежат в основе простого способа определения критической плотности, а значит, и критического объёма вещества. Он заключается в следующем.

В небольшие (обычно кварцевые) трубки помещают различные по весу количества исследуемой жидкости, но так, чтобы во всех трубках жидкость была в избыточном количестве по сравнению с тем, которое требуется для того, чтобы при критической температуре объём трубки был заполнен веществом с критической плотностью. После этого трубки запаивают. Затем их нагревают и измеряют температуру, при которой мениск достигает верхнего края. Зная массу жидкости в трубке и ее объём, определяют плотность жидкости при той температуре, при которой она оказалась целиком заполненной жидкостью. Выполнив такие измерения на всех трубках с различными количествами жидкости, можно построить кривую зависимости плотности жидкости от температуры. Экстраполируя эту кривую к критической температуре (она, конечно, должна быть известна), находят плотность исследуемой жидкости при критической температуре. Зная плотность, легко вычислить и критический объём.

Такие же опыты, но выполненные с трубками, содержащими различные по весу и недостаточные для получения критического состояния количества жидкости, позволяют получить плотность пара при критической температуре, а, следовательно, и критический объём вещества.

Обе описанные серии опытов должны дать один и тот же результат, так как при критической температуре плотности жидкости и пара равны друг другу.

### § 4.31 Уравнение Ван-дер-Ваальса

**Отклонение свойств газов от идеальных.** Экспериментальные исследования газов, проведённые в широком диапазоне давлений, показали, что  $PV$  не является постоянным при  $T = \text{const}$ , как это должно быть по уравнению состояния идеальных газов. Произведение  $PV$  изменяется с давлением так, как будто бы при малых давлениях газ сжимается более охотно, чем идеальный, а при больших давлениях он сопротивляется сильнее, чем идеальный. Другими словами, **при малых плотностях газа в нём действуют вспомогательные силы притяжения, а при больших плотностях – силы отталкивания.** Эти результаты экспериментальных исследований подтверждают общий характер потенциальной кривой межмолекулярного взаимодействия (см. рисунок 30).

**Сжимаемость.** Сжимаемостью  $\alpha$  называется коэффициент пропорциональности между относительным изменением объёма  $\Delta V/V$  и изменением давления  $\Delta P$ :

$$\Delta V/V = -\alpha \Delta P,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (31.1)$$

Для идеального газа  $(\partial V/\partial P)_T = -V/P$  и, следовательно,  $\alpha = 1/P$ . Эксперимент показывает, что при малом давлении сжимаемость реального газа больше, чем идеального, а при большом меньше.

У жидкостей сжимаемость очень мала, поскольку в ней молекулы упакованы достаточно плотно. Поэтому требуются очень большие давления, чтобы незначительно изменить объём жидкости. Например, сжимаемость воды  $0,47 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ ; бензина  $0,82 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ ; глицерина  $0,22 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ ; ацетона  $1,27 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ , т.е. сжимаемость жидкостей в тысячи раз меньше, чем газов.

Уравнение состояния зависит от закона взаимодействия между молекулами. Поэтому, строго говоря, каждый сорт молекул имеет своё уравнение состояния. **Никакого универсального уравнения состояния для газов с межмолекулярным взаимодействием и для жидкостей не существует.**

При изучении конкретных веществ было использовано очень большое число различных приближённых уравнений состояния. Наиболее широкую известность среди приближённых уравнений состояния получило уравнение Ван-дер-Ваальса. Оно в наиболее простой и компактной форме учитывает основные физические характеристики газа с взаимодействием (конечные размеры молекул и силы взаимодействия между ними) и представляет их учёт в очень наглядной форме.

Уравнение Ван-дер-Ваальса очень удачно, просто и наглядно учитывает основные особенности вещества в жидком и газообразном состояниях. Поэтому оно сыграло в течение нескольких десятилетий после своего появления (1873) очень большую роль в работах по сжижению газов, причём не только в том смысле, что позволило оценить значение температур и давлений, при которых сжижение возможно, но главное в том смысле, что создало твёрдую уверенность в возможности сжижения вообще.

**Учёт сил отталкивания между молекулами.** В уравнении состояния идеальных газов

$$PV = RT, \quad (31.2)$$

написанном для 1 моля, под  $V$  подразумевается объём сосуда, в котором заключён газ. В то же время это тот объём, который доступен для каждой из молекул газа, движущейся в этом объёме. Когда идёт речь об идеальном газе, состоящем из частиц-точек, нет разницы между понятиями «объём сосуда» и «объём, доступный для каждой молекулы», потому что молекулы-точки не мешают друг другу двигаться. В реальном же газе не весь объём сосуда находится в распоряжении молекул, так как каждая молекула занимает определённую часть объёма сосуда, и эта часть недоступна для всех других.

Чтобы учесть это обстоятельство, нужно из объёма сосуда вычесть ту его часть, которая недоступна для движения молекул. Обозначим ее через  $b$ . Тогда уравнение (31.2) примет вид:

$$P(V - b) = RT, \quad (31.3)$$

Введённая таким образом поправка  $b$  представляет собой тот предельный объём, который занял бы газ при бесконечно большом давлении. Действительно, переписав (31.3) в виде:

$$P = \frac{RT}{V - b}, \quad (31.4)$$

находим, что при  $P = \infty$  объём  $V = b$ .

**Вычисление постоянной  $b$ .** Введением в уравнение состояния постоянной  $b$  мы учли то обстоятельство, что молекулы газа не могут сблизиться друг с другом до расстояния, равного нулю (даже при бесконечно большом давлении). Фактически здесь принимается во внимание существование сил отталкивания между молекулами, которые и мешают молекулам приближаться друг к другу на расстояние, меньше некоторого минимального. Оно, это минимальное расстояние, и определяет то, что называется размером молекулы. Значит, учёт размеров молекул фактически означает в то же время учёт сил отталкивания между молекулами газа, а постоянная  $b$ , введённая в уравнение состояния, может рассматриваться как характеристика этих сил.

Если сделать определённые предположения о структуре молекул и о характере действующих между ними сил, то можно вычислить значение постоянной  $b$ , т.е. величину той части объёма сосуда, которая оказывается недоступной для любой молекулы, так как она занята всеми остальными. Проще всего это сделать, если предположить, что молекулы являются твёрдыми шариками.

Представим себе сосуд в форме куба, объём которого  $V$  равен объёму, занимаемому при данных давлении и температуре молекул газа (рисунок 37). Сторона куба равна, очевидно,  $\sqrt[3]{V}$ . Пусть диаметр молекулы равен  $d$ , а радиус  $r = d/2$ .

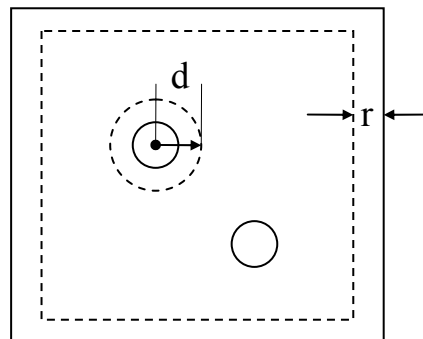


Рисунок 37

Допустим, что сначала в нашем сосуде содержится всего одна молекула. Для ее движения (точнее – для движения ее центра) доступен весь объём сосуда, за вычетом слоя толщиной  $r$ , прилегающего к стенкам, так как центр молекулы не может приблизиться к стенке на расстояние, меньшее, чем  $r$  (на рисунке 37 этот слой отделён пунктирной линией). Это значит, что наша молекула может двигаться в объёме куба со стороной на  $d$  меньшей, чем сторона действительного куба – сосуда. Объём этот равен:

$$(\sqrt[3]{V} - d)^3.$$

Введём теперь в сосуд вторую молекулу (именно этот момент и изображён на рисунке 37). Центр любой из имеющихся теперь в сосуде двух молекул для своего движения имеет в своём распоряжении тот же объём, что и раньше, но за вычетом дополнительного объёма, ставшего теперь недоступным из-за присутствия второй молекулы. На рисунке 37 пунктиром показан объём, окружающий каждую молекулу, в пределы которого не может попасть центр ее партнёра. Этот объём равен  $\frac{4}{3}\pi d^3$ . Следовательно, для любой из двух молекул оказывается доступным объём, равный

$$(\sqrt[3]{V} - d)^3 - \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Если ввести в сосуд ещё и третью молекулу, то для любой из трёх молекул, находящихся теперь в сосуде, свободным для движения будет объём

$$(\sqrt[3]{V} - d)^3 - 2 \cdot \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Наконец, когда в сосуде окажутся все  $N_A$  молекул ( $N_A$  – число Авогадро), составляющих один моль, каждая из них будет иметь возможность двигаться в объёме

$$(\sqrt[3]{V} - d)^3 - N_A \cdot \frac{4}{3} \pi d^3. \quad (31.5)$$

При этом расчёте мы, однако, не учли того обстоятельства, что в каждом акте сближения (столкновения) участвуют две молекулы. Для каждой из них существенна не вся запретная сфера, окружающая вторую участницу сближения, а только та ее половина (полусфера), которая обращена к ней. Если применить это соображение к любой паре из всех  $N_A$  молекул, то в выражение (31.5) мы должны будем вместо  $N_A$  написать  $N_A/2$ . Тогда свободным для движения любой молекулы окажется такой объём:

$$V' = (\sqrt[3]{V} - d)^3 - \frac{N_A}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi d^3.$$

Если, как это всегда, конечно, бывает,  $d \ll \sqrt[3]{V}$  (здесь  $\sqrt[3]{V}$  – сторона сосуда,  $d$  – диаметр молекулы), то, пренебрегая  $d$  по сравнению с  $\sqrt[3]{V}$ , получим:

$$V' = V - N_A \cdot \frac{2}{3} \pi d^3 = V - N_A \cdot \frac{16}{3} \pi r^3.$$

Это и есть та величина  $V - b$ , которую мы поставили вместо  $V$  в уравнение состояния (31.3). Следовательно,

$$b = \frac{16}{3} \pi r^3 N_A.$$

Значит, поправка на объём молекул равна не объёму самих молекул, а учетверённому значению этой величины.

Мы получили этот результат, считая молекулы твёрдыми шариками. Нужно отметить, что такое представление является грубым приближением. Это видно из того, что при стремлении давления к бесконечности объём газа должен стремиться к значению  $b$ , как мы это видели выше. Но при этом молекулы должны быть, очевидно, «упакованы» максимально плотно. При такой упаковке молекулы-шарики, в самом деле, занимают объём больший, чем сумма объёмов всех шариков (за счёт промежутков между ними). Но из геометрических соображений следует, что отношение объёма, занятого всей совокупностью шариков, к их «чистому» объёму равно  $\frac{6}{\pi\sqrt{2}}$ , т.е. меньше двух, тогда как наш расчёт показывает, что это отношение равно четырём. Тем не менее, при не слишком больших давлениях наш расчёт даёт приблизительно правильный результат.

**Учёт сил притяжения между молекулами.** Кроме сил отталкивания, которые уже учтены введением поправки  $b$ , существуют и силы притяжения между молекулами. Эти силы приводят к тому, что давление, оказываемое молеку-

лами газа на любую площадку, например на стенки сосуда, будет при прочих равных условиях меньше, чем в случае идеального газа.

Действительно, любая молекула, находящаяся вблизи стенки сосуда, где она с одной стороны имеет больше «соседей», чем с другой, испытывает результирующую силу со стороны остальных молекул, и сила эта направлена внутрь газа. Благодаря этому давление на стенку сосуда станет меньше на некоторую величину  $\Delta P$ , так что вместо выражения (31.4) мы получим для давления формулу:

$$P = \frac{RT}{V - b} - \Delta P, \quad \text{или } P + \Delta P = \frac{RT}{V - b}.$$

Силы притяжения между молекулами стремятся сблизить их между собой. Но точно таким же образом действует и внешнее давление  $P$ .

Нетрудно установить, от чего должно зависеть это добавочное давление (или, что то же, уменьшение давления на стенку).

Давление, которое испытывает пристенный слой со стороны молекул газа, равно силе, действующей на все молекулы на единице площади поверхности слоя. Очевидно, что эта сила пропорциональна плотности молекул  $n$ . С другой стороны, число молекул в пристенном слое, испытывающих силу притяжения, также пропорционально  $n$ . Следовательно,  $\Delta P \sim n^2$ . Так как  $n$  обратно пропорционально объёму, занимаемому молекулами газа, то  $\Delta P = a/V^2$ , где  $V$  – молярный объём газа и  $a$  – коэффициент пропорциональности, численное значение которого зависит от характера сил притяжения между молекулами. В настоящее время нет способа вычисления этого коэффициента.

Таким образом, выражение для давления газа с учётом сил притяжения между молекулами можно теперь написать в виде:

$$P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V - b},$$

отсюда

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT. \quad (31.6)$$

Это уравнение, связывающее давление, объём и температуру газа, является уравнением состояния реального газа. В нём учтены как силы притяжения (поправочный член  $a/V^2$ ), так и силы отталкивания (поправка  $b$ ) между молекулами. Оно называется **уравнением Ван-дер-Ваальса**. Как мы увидим, это уравнение довольно хорошо объясняет основные опытные факты, касающиеся реальных газов, изложенные в предыдущих параграфах.

Уравнение (31.6) относится к одному молю газа. Для произвольного количества газа оно принимает вид:

$$\left( P + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} RT, \quad (31.7)$$

где  $M$  – масса газа,  $\mu$  – его молярная масса,  $V$  – объём, занимаемый газом.

Коэффициент  $a$  в выражении для поправки к давлению и поправку  $b$  называют **постоянными Ван-дер-Ваальса**, численные значения которых различны для различных газов, так что уравнение (31.6) не является универсальным в такой мере, как уравнение Клапейрона-Менделеева.

Постоянная  $b$  измеряется, очевидно, в единицах объёма, т.е. в  $\text{м}^3$ . Размерность же константы  $a$  определяется тем, что величина  $a/V^2$  должна иметь размерность давления. Поэтому  $a$  измеряется в единицах  $(\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}) \cdot (\text{м}^6)$ , т.е. в  $\text{Н} \cdot \text{м}^4$ . Иногда  $a$  измеряют также в  $\text{атм} \cdot \text{м}^6$ .

Кроме уравнения Ван-дер-Ваальса, было предложено много эмпирических или полуэмпирических уравнений состояния реальных газов. За счёт увеличения числа эмпирических постоянных, входящих в эти уравнения, удаётся достигнуть лучшего согласия с опытом по сравнению с тем, что даёт уравнение Ван-дер-Ваальса. Однако уравнение Ван-дер-Ваальса благодаря своей простоте и ясному физическому смыслу входящих в него постоянных до сих пор является наиболее распространённым уравнением для анализа качественного поведения реальных газов и жидкостей. Приводим некоторые из наиболее известных уравнений состояния.

Уравнение Бертло:

$$\left( P + \frac{a}{TV^2} \right) (V - b) = RT. \quad (31.8)$$

Уравнение Клаузиуса:

$$\left( P + \frac{a}{T(V+c)^2} \right) (V - b) = RT. \quad (31.9)$$

Уравнение Камерлингга-Оннеса:

$$PV = RT \left( 1 + \frac{B_2}{V} + \frac{B_3}{V^2} + \dots \right), \quad (31.10)$$

где  $B_2, B_3, \dots$  называются вторым, третьим и последующими **вириальными коэффициентами**.

Они являются функциями температуры. Уравнение (31.10) получает конкретное содержание только после того, как будут найдены выражения для входящих в него вириальных коэффициентов, как функций температуры.

Уравнения Бертло и Клаузиуса отличаются от уравнения Ван-дер-Ваальса поправками, вводимыми чисто эмпирически. Уравнение Бертло вблизи критической точки (см. § 4.33) не имеет никаких преимуществ по сравнению с урав-

нением Ван-дер-Ваальса. Зато при умеренных давлениях оно лучше согласуется с опытом. Уравнение Клаузиуса точнее уравнения Ван-дер-Ваальса, поскольку оно содержит третью эмпирическую постоянную  $c$ . Благодаря этому с помощью уравнения Клаузиуса можно учесть отклонения от закона соответствующих состояний (см. § 4.33).

### § 4.32 Изотермы газа Ван-дер-Ваальса

Наиболее содержательные результаты получаются из уравнения Ван-дер-Ваальса путём анализа изотерм. Для исследования изотерм при любых значениях температуры  $T$  умножим уравнение (31.6) на  $V^2$ . После раскрытия скобок уравнение изотермы примет вид:

$$PV^3 - (bP + RT)V^2 + aV - ab = 0.$$

Разделив обе части этого равенства на  $P$ , получим:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0. \quad (32.1)$$

Это уравнение третьей степени относительно объёма  $V$  и оно поэтому имеет три корня. Это значит, что при данных значениях температуры и давления могут быть три значения молярного объёма или, что то же самое, три значения плотности газа.

Три корня уравнения третьей степени могут быть либо все вещественные, либо два из них мнимые и один вещественный. В частном случае, при соответствующих значениях коэффициентов уравнения, все три вещественных корня могут быть равны друг другу (кратные корни); В этом случае левая часть уравнения является точным кубом.

Мнимые корни уравнения Ван-дер-Ваальса не могут иметь физического смысла, и мы ими интересоваться не будем.

Чтобы выяснить смысл корней уравнения Ван-дер-Ваальса, проще всего рассмотреть изотермы уравнения (31.6), т.е. зависимость давления  $P$  от молярного (или удельного) объёма  $V$  при постоянной температуре, и сравнить их с изотермами, полученными опытным путём.

В отличие от изотермы идеального газа, представляющей собой гиперболу, изотерма, соответствующая уравнению (31.6), которую мы будем называть **изотермой Ван-дер-Ваальса**, имеет вид, представленный на рисунке 38. Эта кривая, являющаяся графическим изображением уравнения третьей степени, имеет максимум и минимум, так что данному значению давления, например  $P_1$ , соответствуют три значения молярного объёма  $V_1, V_2, V_3$ . Естественно считать, что минимальному из этих трёх значений объёма (максимальной плотности) соответствует **жидкое состояние**, а максимальному – **газообразное**. Остаётся выяснить смысл третьего состояния с объёмом  $V_2$ .



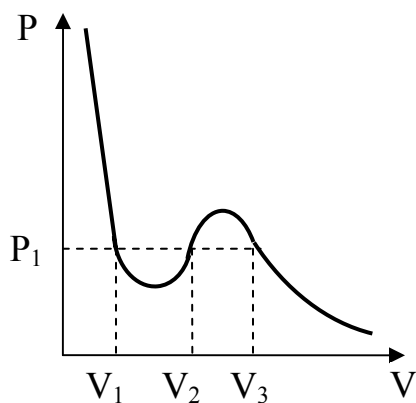


Рисунок 38

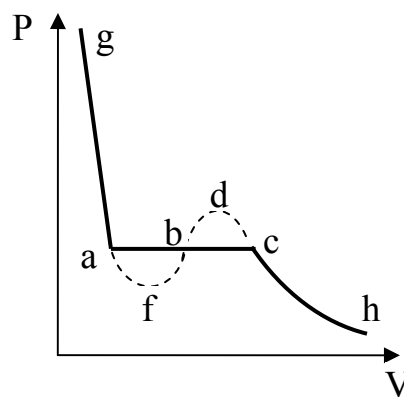


Рисунок 39

Между изотермой Ван-дер-Ваальса и опытной изотермой имеется существенное различие, как это видно из рисунка 39, на котором в произвольном масштабе изображены: сплошной линией – характерный вид опытной изотермы, пунктиром – изотерма Ван-дер-Ваальса. Сразу видно, что вместо прямолинейного горизонтального участка abc изотерма Ван-дер-Ваальса имеет в этой области характерный завиток с максимумом и минимумом.

Это важное различие легко, однако, объясняется при правильном анализе изотермы.

Прежде всего, отметим, что участки hc и ag изотермы Ван-дер-Ваальса совпадают (по крайней мере, качественно) с соответствующими участками опытной изотермы. Напомним, что участок hc соответствует газообразному состоянию, а участок ag – жидкости. Следовательно, из уравнения Ван-дер-Ваальса непосредственно следует существование двух фаз вещества. Почему же на опыте не наблюдается третья фаза, изображаемая, например, точкой b на изотерме Ван-дер-Ваальса?

Легко видеть, что состояния, отвечающие точкам на участке fbd, не могут существовать, так как этому участку соответствует необычная зависимость объема от давления: с увеличением давления объем не уменьшается, а растёт. Ясно, что в природе не существуют и не могут существовать такие вещества, которые при росте давления увеличивали бы свой объем, т.е. уменьшали бы свою плотность. Состояние вещества с такими странными свойствами неизбежно должно быть крайне неустойчивым.

Действительно, представим себе, что такое состояние каким-то образом реализовано, и пусть в какой-либо части такого вещества по случайным причинам сколь угодно мало увеличилось давление. Такие случайные небольшие изменения не только возможны, но и неизбежны. Тогда это увеличение давления должно вызвать увеличение объема, которое в свою очередь приведет к ещё большему росту давления, и т.д., пока вещество не перейдет в состояние, отвечающее точке d, начиная с которого зависимость объема от давления становится качественно нормальной.

По тем же причинам сколь угодно малое случайное уменьшение давления вызовет самопроизвольный переход вещества в состояние, соответствующее точке f.

Таким образом, нет ничего удивительного в том, что возможные по уравнению Ван-дер-Ваальса состояния, отвечающие участку  $fbd$ , в действительности не наблюдаются. Что касается состояний, соответствующих участкам изотермы  $cd$  и  $af$ , то, хотя они и не являются в такой степени неустойчивыми, но они, однако, менее устойчивы, чем состояния, отвечающие участку  $abc$ . Эти состояния могут быть осуществлены, но только при особых условиях.

Вещество, состояния которого соответствуют точкам участка кривой  $cd$  (см. рисунок 39), находится в газообразном состоянии потому, что участок  $cd$  является продолжением ветви изотермы  $hc$ . Но давление газа (пара) в любом из этих состояний выше упругости насыщенного пара при той же температуре, что противостоит естественности.

Это своеобразное состояние вещества действительно наблюдается, например, при быстром охлаждении закрытого сосуда с воздухом, содержащим водяные пары. Необходимо только тщательно очистить воздух от следов пыли и позаботиться о том, чтобы в нём не было электрических зарядов. При этих условиях, несмотря на охлаждение и, следовательно, уменьшение упругости насыщенных паров воды, последние в течение довольно длительного времени не конденсируются, оставаясь в газообразном состоянии. Это состояние и соответствует точкам на участке  $cd$ , когда пар находится в **пересыщенном** состоянии, т.е. когда количество его больше, чем необходимо для того, чтобы он был насыщенным. Такой пар поэтому и называется **пересыщенным** или **переохлаждённым**. В конце концов, через некоторое время на стенках сосуда всё-таки появятся капли воды, свидетельствующие о том, что пересыщенный пар распался на воду и насыщенный пар при данной, более низкой температуре. В дальнейшем будет объяснено, почему состояние пересыщенного пара менее устойчиво, чем состояние насыщенного пара в смеси с жидкостью.

Что касается состояний вещества, характеризуемых точками участка  $af$  изотермы Ван-дер-Ваальса, то эти состояния практически ещё труднее реализовать, опять-таки вследствие их малой устойчивости.

Точки на этом участке отвечают жидкому состоянию – участок  $af$  является продолжением ветви  $ag$ . Часто это состояние вещества называют **перегретой жидкостью**. Название это нельзя считать удачным, так как перегретой жидкостью принято называть жидкость в открытом сосуде, нагретую выше температуры кипения, но не кипящую. Но при этом жидкость свободно испаряется, т.е. меняется ее масса. Нас же здесь интересует поведение **определённой массы** (например, одного моля) жидкости или пара, находящейся в закрытом сосуде, когда о кипении говорить нельзя.

Состояния, соответствующие участкам  $cd$  и  $af$ , в отличие от нестабильных состояний участка  $fbd$ , называются **метастабильными**.

Таким образом, различие между изотермой Ван-дер-Ваальса и опытной изотермой находит своё объяснение: состояния, отвечающие корню  $V_2$  уравнения состояния, не наблюдаются на опыте из-за их нестабильности или метастабильности. При данной температуре (для данной изотермы) только при одном определённом значении давления, а именно, при давлении насыщенного пара,

этому корню соответствует устойчивое состояние – состояние пара, находящегося в равновесии с жидкостью, т.е. двухфазное состояние.

Из уравнения состояния Ван-дер-Ваальса нельзя определить положение горизонтального участка опытной кривой относительно максимума и минимума кривой Ван-дер-Ваальса. Это значит, что нельзя определить величину равновесного давления насыщенного пара при данной температуре. Это, однако, можно сделать из общих термодинамических соображений. Как было показано Максвеллом, если представить себе переход из состояния А в состояние В (рисунок 40), то независимо от того, будет ли он совершён по однофазной кривой АСdВ или по двухфазной прямой АВ, он должен сопровождаться одной и той же работой. Так как работа на диаграмме в координатах  $PV$  равна площади под соответствующими участками диаграммы, то площадь под кривой АСdВ должна быть равна площади под прямой АВ. Отсюда очевидно, что прямая АВ расположена так, чтобы площади заштрихованных косыми линиями областей были бы равны друг другу (см. рисунок 40).

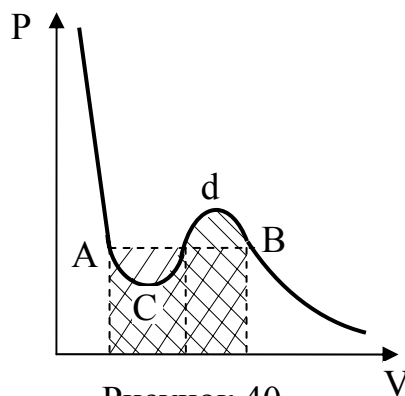


Рисунок 40

Значение уравнения Ван-дер-Ваальса не ограничивается тем, что оно описывает факт существования двух фаз вещества – жидкой и газообразной, в которых может находиться вещество. Как мы сейчас увидим, из уравнения Ван-дер-Ваальса непосредственно следует и такой важный факт, как существование критической температуры и критического состояния.

### § 4.33 Критическая температура и критическое состояние

В предыдущем параграфе мы рассмотрели изотерму Ван-дер-Ваальса при некоторой произвольной температуре. Посмотрим теперь, как изменяются эти изотермы с изменением температуры.

Общий характер изменения изотерм Ван-дер-Ваальса с температурой виден на рисунке 41, на котором представлен ряд изотерм.

Каждому корню уравнения (32.1) на плоскости  $(P, V)$  соответствует точка, в которой изобара  $P = \text{const}$  пересекает изотерму. Когда корень один, точка пересечения будет одна. Так будет при любых давлениях, если температура достаточно высока. Изотерма имеет вид монотонно опускающейся кривой АВ (ри-

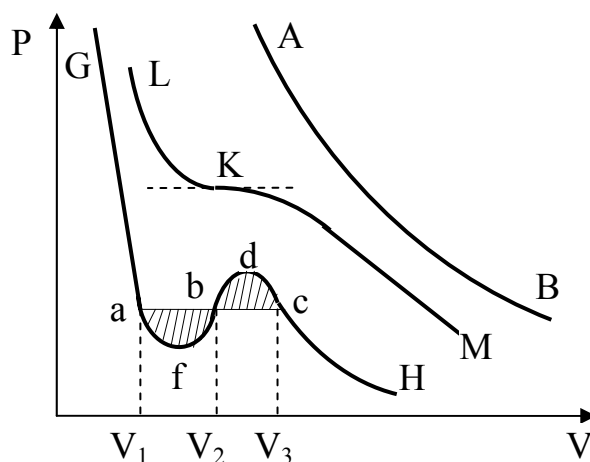


Рисунок 41

сунок 41). При более низких температурах и надлежащих значениях давления  $P$  уравнение (32.1) имеет три корня  $V_1, V_2, V_3$ . В таких случаях изобара  $P = \text{const}$  пересекает изотерму в трёх точках  $a, b, c$  (рисунок 41). Изотерма содержит волнообразный участок  $afbc$ . Она сначала монотонно опускается вниз (участок  $Gf$ ), затем на участке  $fb$  монотонно поднимается вверх, а за точкой  $b$  снова монотонно опускается. При некоторой промежуточной температуре  $T_k$  все три значения объёма сливаются (корни уравнения  $V_1, V_2, V_3$  становятся кратными). При этой температуре исчезает, следовательно, различие между различными состояниями вещества. Это, очевидно, и есть критическая температура, существование которой, как мы видели, является характерным свойством вещества. Такая температура и соответствующая ей изотерма называются **критическими**. Критическая изотерма LKM всюду монотонно опускается вниз, за исключением одной точки  $K$ , являющейся точкой перегиба изотермы. В ней касательная к изотерме горизонтальна. Точка  $K$  называется **критической точкой**. Соответствующие ей давление  $P_k$ , объём  $V_k$  и температура  $T_k$  называются также **критическими**. Говорят, что вещество находится в **критическом состоянии**, если его объём и давление (а, следовательно, и температура) равны критическим.

Критическая температура и критическое состояние никоим образом не являются понятиями, связанными исключительно с уравнением Ван-дер-Ваальса. Такие понятия можно было бы ввести для любого уравнения состояния, изотермы которого имеют волнообразный характер, а при повышении температуры переходят в монотонные. Для всего последующего изложения существенен только такой ход изотерм, а не конкретная форма уравнения состояния. Более того, возможность существования вещества в критическом состоянии не может быть обоснована с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса. Это видно уже из того, что уравнением Ван-дер-Ваальса приходится пользоваться вне области его применимости. К понятию критического состояния можно прийти путём анализа экспериментальных изотерм вещества без использования какого бы то ни было «теоретического» уравнения состояния, как это и было на самом деле. Однако мы, не вставая на путь чистого эмпиризма, постараемся показать, какая существует связь между критическими явлениями, уравнением состояния и общими условиями равновесия. Ради простоты проведём все рассуждения почти исключительно на основе уравнения Ван-дер-Ваальса. Но его следует рассматривать не как истинное, а как «модельное» уравнение состояния вещества.

Вычислим значение критической температуры  $T_k$  и соответствующие ей значения двух других критических параметров – критического объёма  $V_k$  и критического давления  $P_k$ .

Действительно, левая часть уравнения Ван-дер-Ваальса (32.1) при значениях  $T = T_k$  и  $P = P_k$ , т.е. выражение

$$V^3 - \left( b + \frac{RT_k}{P_k} \right) V^2 + \frac{a}{P_k} V - \frac{ab}{P_k},$$

должно быть точным кубом (поскольку в критической точке все три корня совпадают и равны  $V_k$ ), т.е. оно должно приводиться к виду

$$(V - V_k)^3 = 0.$$

Возводя в куб, приравняем оба выражения:

$$V^3 - \left( b + \frac{RT_k}{P_k} \right) V^2 + \frac{a}{P_k} V - \frac{ab}{P_k} = V^3 - 3V_k V^2 + 3V_k^2 V - V_k^3. \quad (33.1)$$

Это равенство тождественно выполняется, если коэффициенты при одинаковых степенях  $V$  в обеих его частях равны между собой:

$$b + \frac{RT_k}{P_k} = 3V_k, \quad \frac{a}{P_k} = 3V_k^2, \quad \frac{ab}{P_k} = V_k^3.$$

Решив эту систему уравнений, получаем значения критических параметров, выраженные через константы  $a$  и  $b$ :

$$P_k = \frac{a}{27b^2}, \quad V_k = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}. \quad (33.2)$$

Эти же результаты и некоторые выводы можно получить из более детального математического анализа уравнения Ван-дер-Ваальса. Для этого напишем его в виде:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}. \quad (33.3)$$

Найдем, прежде всего, значения объёма, соответствующие максимуму и минимуму на изотерме Ван-дер-Ваальса. В обеих этих точках первая производная от давления по объёму равна нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0.$$

Дифференцируя равенство (33.3) и приравнявая производную нулю, получаем:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{2a}{(V-b)^2} \left[ \frac{(V-b)^2}{V^3} - \frac{RT}{2a} \right]. \quad (33.4)$$

Отсюда ясно, что условие  $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$  выполняется при

$$\frac{(V-b)^2}{V^3} = \frac{RT}{2a}. \quad (33.5)$$

Это равенство представляет собой кубическое уравнение. Из этого следует, что при любом  $T$ , т.е. для всякой изотермы, существуют три значения  $V$ , при которых она проходит через максимум или минимум. Одно из этих значений соответствует, очевидно, минимуму, другое – максимуму на изотерме; в их существовании мы убедились при непосредственном построении изотерм. Что касается третьего значения, т.е. третьего экстремума, то он лежит в области  $V < b$  и поэтому не имеет физического смысла.

Покажем теперь, что при некотором значении температуры  $T = T_k$  максимум и минимум изотермы сливаются и в точке их слияния кривая имеет точку перегиба, т.е. что в этой точке и вторая производная обращается в нуль.

Для этого найдём значение второй производной  $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}$  в точках, где первая производная равна нулю. Вторая производная  $P$  по  $V$  равна:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}. \quad (33.6)$$

В точках, где  $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$ , выполняется условие (33.5). Подставим теперь в (33.6) значение из (33.5). Тогда получаем:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \frac{RT}{2a} = \frac{(V-b)^2}{V^3} = \frac{2a(3b-V)}{V^4(V-b)}. \quad (33.7)$$

Отсюда следует, что  $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0$  при  $V = 3b = V_k$ .

Если подставить это значение  $V$  в (33.5), то для  $T$  в точке перегиба получим:  $T = \frac{8a}{27Rb} = T_k$ .

Таким образом, при

$$T = T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad \text{и} \quad V = V_k = 3b$$

изотерма Ван-дер-Ваальса имеет точку перегиба, в которой

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0.$$

Очевидно, что  $T_k = \frac{8a}{27Rb}$  и является критической температурой.

Из уравнения (33.4) следует, что при  $T > T_k$  производная  $\frac{\partial P}{\partial V} < 0$  при всех условиях, потому что при  $T = T_k$  выражение в скобках в правой части (33.4) равно нулю. Это значит, что выше критической температуры  $T_k$  изотерма является монотонно убывающей кривой (производная всегда отрицательная).

Значение критического давления  $P_k$  получается из самого уравнения Ван-дер-Ваальса, если в него подставить найденные значения  $T_k$  и  $V_k$ :

$$P_k = \frac{a}{27b^2}.$$

Таким образом, мы получили другим путём формулы (33.2) для критических параметров.

Отметим, что в критической точке сжимаемость вещества равна бесконечности. Действительно, сжимаемость

$$\chi = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}.$$

Но так как в критической точке  $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$ , то  $\frac{\partial V}{\partial P} = \infty$ , значит  $\chi$  равна  $\infty$ .

**В качественном смысле уравнение Ван-дер-Ваальса очень хорошо описывает систему жидкость-газ, однако, в количественном отношении предсказания на его основе отклоняются от данных эксперимента.** Главные отклонения состоят в следующем:

1. Для данного вещества постоянные  $a$  и  $b$  в уравнении Ван-дер-Ваальса должны быть независимыми от температуры. В действительности же для изотерм, соответствующих различным температурам, приходится подбирать различные постоянные  $a$  и  $b$ , т.е. они зависят от температуры.

2. Из (33.2) следует, что величина

$$P_k V_k / (RT_k) = 3/8 = 0,375$$

должна быть универсальной постоянной для всех веществ. В действительности же она изменяется. Например, для воды она равна 0,23, а для гелия – 0,31. Вообще для лёгких газов согласие с предсказанием уравнения Ван-дер-Ваальса лучше, чем для тяжёлых. Этим объясняется успех предсказаний теории об условиях сжижения водорода и гелия, которыми руководствовались экспериментаторы в начале XX века.

3. Соотношение  $V_k = 3b$  не соблюдается. Более точным соотношением является  $V_k \approx 2b$ .

4. В области двухфазных состояний уравнение Ван-дер-Ваальса не обосновано теоретически и даёт расхождения с экспериментом.

Как уже отмечалось, универсального уравнения состояния вещества существовать не может, и уравнение Ван-дер-Ваальса не претендовало на эту роль. Однако даже для описания конкретного вещества уравнение Ван-дер-Ваальса является лишь приближённым уравнением состояния.

Примем теперь в качестве единиц объёма, давления и температуры критические значения этих величин. Объём, давление и температура, измеренные в таких единицах, называются **приведёнными**. Они определяются выражениями:

$$\varphi = \frac{V}{V_k}, \quad \pi = \frac{P}{P_k}, \quad \tau = \frac{T}{T_k}. \quad (33.8)$$

Уравнение состояния, записанное в этих безразмерных переменных, называется **приведённым уравнением состояния**. Для газов Ван-дер-Ваальса из (33.2) находим

$$V = 3b\varphi, \quad P = \frac{a\pi}{27b^2}, \quad T = \frac{8a\tau}{27Rb}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение Ван-дер-Ваальса оно принимает вид:

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi^2} \right) \left( \varphi - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau. \quad (33.9)$$

В этом виде уравнение состояния не содержит никаких индивидуальных констант вещества. **Приведённые уравнения состояния одинаковы для всех веществ**. Этот вывод обладает большей общностью, чем уравнение Ван-дер-Ваальса, из которого он был получен. Для справедливости вывода конкретный вид уравнения состояния не играет роли. Существенно только, что оно содержит **три** параметра:  $a$ ,  $b$  и  $R$ . Всякое уравнение состояния, обладающее этим свойством, записанное в безразмерных величинах  $\varphi$ ,  $\pi$ ,  $\tau$ , должно быть также одинаковым для всех веществ. Это положение называется **законом соответственных состояний**. Соответственными называются такие состояния разных веществ, которые имеют одинаковые значения приведённых параметров  $\varphi$ ,  $\pi$  и  $\tau$ . Из закона соответственных состояний следует, что если для различных веществ из трёх параметров  $\varphi$ ,  $\pi$ ,  $\tau$  совпадают значения каких-либо двух, то будут совпадать и значения третьего параметра, т.е. эти вещества находятся в соответственных состояниях.

С помощью закона соответственных состояний можно вычислить неизвестные изотермы различных газов, если известны их критические параметры и измерены изотермы других газов.



## Контрольные вопросы

- 1 Каков характер межмолекулярных сил взаимодействия и потенциальной энергии взаимодействия молекул?
- 2 Чем отличаются реальные газы от идеальных?
- 3 Опишите процесс сжатия газа и превращения его в жидкость графически, используя диаграмму в координатах P-V.
- 4 Чем различаются термины «газ» и «пар»?
- 5 Что такое критическое состояние вещества?
- 6 Что такое фаза системы? фазовый переход или фазовое превращение?
- 7 Возможен ли непрерывный переход вещества из газообразного в жидкое состояние, минуя стадию одновременного существования обеих фаз?
- 8 Что называют фазовой диаграммой или диаграммой состояния?
- 9 Как можно определить критическую температуру жидкости?
- 10 Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?
- 11 Кроме уравнения Ван-дер-Ваальса какие уравнения состояния реальных газов вам известны?
- 12 Каковы различия между изотермой Ван-дер-Ваальса и опытной изотермой?
- 13 Почему перегретая жидкость и пересыщенный пар являются метастабильными состояниями?
- 14 Каково значение уравнения Ван-дер-Ваальса?
- 15 Как выражаются постоянные Ван-дер-Ваальса через критические параметры вещества?
- 16 В чем проявляются расхождения уравнения Ван-дер-Ваальса с экспериментом?
- 17 Запишите приведённое уравнение состояния вещества. Что называют законом соответственных состояний?

## Тесты

1. Аргон массой 4 г занимает объём 0,1 л под давлением 2,5 МПа. Найти температуру газа, считая его реальным. Постоянные Ван-дер-Ваальса для аргона принять равными  $a = 0,132 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $b = 3\cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

- А) 325 К      В) 319 К      С) 313 К      **Д) 307 К**      Е) 301 К

2. Каково давление углекислого газа при температуре 3 °С, если его плотность при этой температуре 550 кг/м<sup>3</sup>? Постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа принять равными  $a = 0,364 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $b = 4,3\cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

- А) 4,9 МПа      **В) 5,2 МПа**      С) 5,5 МПа      Д) 5,8 МПа      Е) 6,1 МПа

3. Вычислить внутреннее давление воды, если известна постоянная Ван-дер-Ваальса  $a = 0,554 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$ .

А) 1,1 ГПа      В) 0,11 ГПа      С) 0,43 ГПа      Д) 0,17 ГПа      **Е) 1,7 ГПа**

4. Найти диаметр молекулы аргона, зная постоянную Ван-дер-Ваальса  $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

**А) 290 пм**      В) 390 пм      С) 490 пм      Д) 590 пм      Е) 690 пм

5. В баллоне вместимостью 22 л находится азот массой 0,7 кг при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Определить давление газа на стенки баллона. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота принять равными  $a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $b = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

**А) 2,5 МПа**      В) 2,2 МПа      С) 3,7 МПа      Д) 1,5 МПа      Е) 3,1 МПа

6. В баллоне вместимостью 22 л находится азот массой 0,7 кг при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Определить внутреннее давление газа. Постоянную Ван-дер-Ваальса для азота принять равной  $a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$ .

А) 0,12 МПа      В) 0,23 МПа      С) 0,1 МПа      **Д) 0,18 МПа**      Е) 0,21 МПа

7. В баллоне вместимостью 22 л находится азот массой 0,7 кг при температуре  $0^\circ\text{C}$ . Определить собственный объём молекул. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота принять равными  $a = 0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $b = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

А) 0,21 л      В) 0,23 л      **С) 0,25 л**      Д) 0,27 л      Е) 0,29 л

8. Найти значение постоянной  $a$  для бензола ( $\text{C}_6\text{H}_6$ ) в уравнении Ван-дер-Ваальса по известным для него значениям критических температуры  $T_k = 562 \text{ К}$  и давления  $P_k = 4,8 \text{ МПа}$ .

А)  $1,25 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$       В)  $1,38 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$       С)  $1,53 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$       **Д)  $1,92 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$**       Е)  $2,37 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$

9. Найти значение постоянной  $b$  для бензола ( $\text{C}_6\text{H}_6$ ) в уравнении Ван-дер-Ваальса по известным для него значениям критических температуры  $T_k = 562 \text{ К}$  и давления  $P_k = 4,8 \text{ МПа}$ .

А)  $4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$       В)  $9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$       **С)  $12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$**       Д)  $14 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$       Е)  $16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$

10. Определить плотность воды в критическом состоянии, зная постоянную Ван-дер-Ваальса  $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

А)  $350 \text{ кг}/\text{м}^3$       В)  $250 \text{ кг}/\text{м}^3$       С)  $400 \text{ кг}/\text{м}^3$       Д)  $300 \text{ кг}/\text{м}^3$       **Е)  $200 \text{ кг}/\text{м}^3$**

11. Найти плотность водорода в критическом состоянии по известным для него значениям критических температуры  $T_k = 33 \text{ К}$  и давления  $P_k = 1,3 \text{ МПа}$ .

- А) 25 кг/м<sup>3</sup>    В) 30 кг/м<sup>3</sup>    С) 35 кг/м<sup>3</sup>    Д) 40 кг/м<sup>3</sup>    Е) 45 кг/м<sup>3</sup>

12. Каково внутреннее давление углекислого газа в момент сжижения, если при этом его плотность 550 кг/м<sup>3</sup>, а также известны критические температура  $T_k = 304 \text{ К}$  и давление  $P_k = 7,4 \text{ МПа}$ .

- А) 54,2 МПа    В) 56,8 МПа    С) 59,3 МПа    Д) 62,4 МПа    Е) 67,5 МПа

13. Какова масса воды, налитой в сосуд вместимостью 30 см<sup>3</sup>, при которой ее можно привести в критическое состояние путём нагревания запаянного сосуда с водой? Постоянная Ван-дер-Ваальса для воды  $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

- А) 6,3 г    В) 2,5 г    С) 8,1 г    Д) 3,6 г    Е) 5,9 г

14. Найти критический объём 1 моля кислорода по известным для него значениям критических температуры  $T_k = 154 \text{ К}$  и давления  $P_k = 5,07 \text{ МПа}$ .

- А) 74,7 см<sup>3</sup>    В) 84,7 см<sup>3</sup>    С) 94,7 см<sup>3</sup>    Д) 78,1 см<sup>3</sup> К    Е) 88,1 см<sup>3</sup>

15. Определить диаметр молекулы кислорода по известным для него значениям критических температуры  $T_k = 154 \text{ К}$  и давления  $P_k = 5,07 \text{ МПа}$ .

- А) 281 пм    В) 293 пм    С) 273 пм    Д) 313 пм    Е) 190 пм

16. Давление газа в 12 раз больше его критического давления, объём равен половине критического объёма. Используя уравнение Ван-дер-Ваальса в приведённых величинах, определите, во сколько раз температура газа больше его критической температуры.

- А) 1,5    В) 1,7    С) 1,3    Д) 1,9    Е) 2,1

17. Моль азота охлаждён до температуры  $-100 \text{ }^\circ\text{С}$ . Определить давление  $P$ , оказываемое газом на стенки сосуда объёмом 1 л. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота принять равными  $a = 0,135 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $b = 3,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

- А) 1,06 МПа    В) 1,16 МПа    С) 1,26 МПа    Д) 1,36 МПа    Е) 1,46 МПа

18. Какую температуру  $T$  имеет азот массой  $m = 2 \text{ г}$  и объёмом  $V = 820 \text{ см}^3$  при давлении  $P = 0,2 \text{ МПа}$ ? Для азота считайте известными значения критических температуры  $T_k = 126 \text{ К}$  и давления  $P_k = 3,4 \text{ МПа}$ .

- А) 270 К    В) 280 К    С) 293 К    Д) 303 К    Е) 313 К

19. Найти температуру гелия массой  $m = 10$  г и объёмом  $V = 100$  см<sup>3</sup> при давлении  $P = 100$  МПа. Для гелия считайте известными значения критических температуры  $T_k = 5,2$  К и давления  $P_k = 0,23$  МПа.

- А) 184 К      В) 194 К      **С) 204 К**      Д) 214 К      Е) 224 К

20. Количество  $\nu = 1$  кмоль кислорода находится при температуре  $t = 27$  °С и давлении  $P = 10$  МПа. Найдите объём  $V$  газа. Для кислорода считайте известными значения критических температуры  $T_k = 154$  К и давления  $P_k = 5,07$  МПа.

- А) 312 л      В) 275 л      С) 185 л      Д) 131 л      **Е) 231 л**

### Упражнения для самоконтроля

4.1. Углекислый газ массой  $m = 1$  кг находится при температуре 290 К в сосуде вместимостью 20 л. Определить давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Объяснить различие в результатах. Постоянные Ван-дер-Ваальса принять равными  $a = 0,364$  Н·м<sup>4</sup>/моль<sup>2</sup> и  $b = 4,3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль.  
[1) 2,44 МПа; 2) 2,76 МПа]

4.2. Кислород, содержащий количество вещества  $\nu = 2$  моль, занимает объём  $V_1 = 1$  л. Определить изменение  $\Delta T$  кислорода, если он адиабатически расширяется в вакуум до объёма  $V_2 = 10$  л. Постоянную Ван-дер-Ваальса принять равной  $a = 0,136$  Н·м<sup>4</sup>/моль<sup>2</sup>. [- 11,8 К]

4.3. Получить для моля газа Ван-дер-Ваальса уравнение адиабаты в переменных  $T, V$ , если известна его молярная теплоёмкость  $C_V$ .

$$[T(V - b)^{R/C_V} = \text{const}]$$

4.4. Определить для газа Ван-дер-Ваальса разность молярных теплоёмкостей  $C_P - C_V$ .

$$\left[ C_P - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V - b)^2}{RTV^3}} \right]$$

4.5. В закрытом сосуде объёмом  $V = 0,5$  м<sup>3</sup> находится углекислый газ количеством  $\nu = 0,6$  кмоль при давлении  $P = 3$  МПа. Пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса, найти, во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое. Для углекислого газа считайте известными значения критических температуры  $T_k = 304$  К и давления  $P_k = 7,38$  МПа. [1,85 раза]

4.6. В сосуде объёмом  $V = 10$  л находится масса  $m = 0,25$  кг азота при температуре  $t = 27$  °С. Какая часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объёма сосуда составляет собственный объём молекул? Для азота считайте известными значения критических температуры  $T_k = 126$  К и давления  $P_k = 3,4$  МПа. [4,95 %; 0,86 %]

4.7. Найдите давление, обусловленное силами взаимодействия молекул, заключённых в количестве  $\nu = 1$  кмоль газа при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление этого газа равны  $T_k = 417$  К и  $P_k = 7,7$  МПа. [1,31 кПа]

## Глава 5 Элементы термодинамики

### § 5.34 Равновесные состояния

Кинетическая теория газов хорошо объясняет многие явления в идеальных газах, в которых движения молекул из-за малости сил взаимодействия между ними могут считаться свободными. В тех случаях, когда силами взаимодействия пренебречь нельзя, как, например, в реальных газах, теория значительно менее точно описывает происходящие в них явления. Это объясняется тем, что в большинстве случаев детальная картина молекулярных движений неизвестна, так как не удаётся учесть достаточно точно все силы, действующие на молекулы. Ведь любая молекулярная система состоит из огромного числа взаимодействующих между собой и непрерывно движущихся частиц. При таких условиях точное знание сил, действующих в любой момент времени на молекулы, а значит и их движений, невозможно. Нельзя поэтому теоретически определить и связь между молекулярными движениями и свойствами вещества.

Тем не менее, ряд свойств вещества, многие явления в нём, могут быть изучены и без детального знания механизма молекулярных движений, если пользоваться только макроскопическими величинами, характеризующими вещество в целом, но не имеющими смысла применительно к отдельным частицам. К таким величинам относятся, прежде всего, давление и температура. Как мы уже видели раньше, эти величины имеют смысл только по отношению к совокупности очень большого числа частиц. Нельзя говорить о давлении или температуре одной молекулы. Это следует уже из того, что обе величины определяются средней кинетической энергией частиц. Поэтому при изучении свойств вещества, связанных с тепловыми движениями частиц следует пользоваться общими законами, справедливыми всегда, независимо от характера движений молекул, взаимодействия между ними, структуры вещества. Эти общие законы относятся к энергии и к связанным с ней величинам.

Часть физики, занимающаяся изучением общих свойств вещества, связанных с тепловым движением в условиях равновесия, называется **термодинамикой**.

Особое положение термодинамики в физике связано с тем, что по причинам, о которых речь будет ниже, любая форма энергии при ее превращениях, в конце концов, переходит в энергию тепловых движений. Если, например, в процессе механического движения энергия тела или системы тел уменьшается из-за действия сил трения, то это происходит потому, что она переходит в тепло – трущиеся тела нагреваются. В тепло переходит и энергия электрического тока, энергия света, энергия химических реакций и т.д. Любой вид энергии в процессе превращений может пройти через многие формы энергии, но конеч-

ным результатом всех таких превращений непременно является тепловая энергия.

Наибольший практический интерес имеет превращение механической энергии в тепловую и обратный процесс получения механической работы за счёт тепловой энергии. Этот вопрос мы рассмотрим наиболее подробно.

Но прежде чем приступить к этому вопросу и к формулировке законов термодинамики, обсудим вопрос о **равновесии**. В механике равновесием называется такое состояние тела, при котором оно находится в покое относительно какой-то системы координат. В термодинамике понятие равновесия несколько более широкое.

**Система находится в термодинамическом равновесии, если макроскопические величины, определяющие ее состояние, остаются постоянными и равными своим средним значениям.** Равновесное состояние системы характеризуется значением макроскопических параметров  $P$ ,  $V$  и  $T$ . Но в первую очередь это относится к давлению и температуре. Поэтому в состоянии равновесия не могут происходить такие явления, как теплопроводность, диффузия, химические реакции, фазовые переходы.

Но термодинамическое равновесие (его иногда называют также **статистическим равновесием**) существенно отличается от механического тем, что хотя макроскопические величины, характеризующие систему, остаются постоянными, частицы, из которых система состоит (атомы, молекулы), не прекращают своих сложных движений. А то обстоятельство, что это не мешает системе оставаться в неизменном состоянии, обусловлено большим числом частиц системы.

Так, например, если два тела, обладающие одинаковыми температурами, привести в соприкосновение, то, как хорошо известно из повседневного опыта, тепло не будет переходить от одного тела к другому, и температуры соприкасающихся тел останутся неизменными, тела будут находиться в равновесии. Между тем не исключено, что в каких-нибудь отдельных точках соприкосновения этих тел частицы одного из них обладают большей кинетической энергией, чем частицы другого. В этих точках будет происходить переход тепла от одного тела к другому. Но он обязательно будет компенсироваться обратным переходом в других точках, где разность энергий имеет обратный знак.

В общей сложности в случае тел с одинаковой температурой тепловая энергия не переходит от одного тела к другому, и это связано с тем, что вдоль соприкосновения частицы, имея самые разнообразные «индивидуальные» энергии, обладают одинаковыми для обоих тел средними значениями энергий.

То же относится к хорошо известному факту, что в состоянии равновесия газ распределяется равномерно по всему объёму сосуда, так что его плотность во всех частях сосуда одинакова. Это обусловлено тем, что число молекул газа необычайно велико. Но даже при большом числе частиц некоторые отклонения от равномерного распределения их по объёму могут иметь место в отдельных частях сосуда. Одинакова и постоянна только средняя плотность газа во всём объёме.



С аналогичным положением мы встречаемся и при установлении равновесия между жидкостью и паром в закрытом сосуде. Пар над жидкостью образуется в результате испарения – процесса, который состоит в том, что молекулы жидкости, обладающие большой скоростью, покидают жидкость с ее поверхности. Но часть молекул, покинувших жидкость, при своём хаотическом движении может снова вернуться в нее, и это происходит тем чаще, чем больше образовалось пара. Равновесие между жидкостью и ее паром наступает тогда, когда число молекул, покидающих жидкость в единицу времени, становится равным числу молекул, возвращающихся в нее из пара. Пар станет насыщенным, и после этого никакие макроскопические изменения в системе уже не происходят – давление и температура остаются постоянными. Однако выход молекул из жидкости и возвращение их из пара продолжают и после установления равновесия. И в этом случае не исключено, что в состоянии равновесия в отдельных частях объёма пара его плотность может несколько отличаться от средней плотности, т.е. от плотности насыщенного пара.

Эти примеры указывают на две особенности равновесного состояния. Во-первых, понятие о термодинамическом равновесии является определённой идеализацией, потому что, строго говоря, параметры состояния при равновесии не остаются постоянными, а испытывают небольшие колебания вблизи своих равновесных (средних) значений. Такие колебания, как указывалось выше (§ 1.8), называются **флуктуациями**. Во-вторых, о термодинамическом равновесии можно говорить только в том случае, когда число частиц, составляющих систему, очень велико.

Заметим, что и законы термодинамики, о которых будет идти речь в этой главе, относятся только к системам, состоящим из большого числа частиц.

### § 5.35 Обратимые и необратимые процессы

Если система по каким-либо причинам не находится в состоянии равновесия или выведена из него и после этого предоставлена самой себе (это значит, что она не подвергается внешним воздействиям), то как показывает опыт, сам собой происходит переход к равновесному состоянию. Можно даже сказать, что состояние равновесия – это и есть такое состояние, в которое переходит всякая молекулярная система при отсутствии внешних на нее воздействий. Процесс перехода к равновесию называется **релаксацией**, а время, необходимое на это, называется **временем релаксации**.

Но когда равновесие уже установилось, то система не может, как показывает опыт, сама собой возвратиться к первоначальному неравновесному состоянию. Другими словами, изменения состояния, которые претерпела система, переходя в состояние равновесия, не могут происходить в обратном направлении без внешнего воздействия.

Так, например, если два соприкасающихся тела обладали вначале разностью температур и были предоставлены самим себе, то, в конце концов, температуры обоих тел выравниваются. Но обратный процесс – возникновение разности температур между ними – без внешнего воздействия не происходит.

Газ сам по себе всегда распределяется равномерно по всему объёму сосуда, и такое состояние соответствует равновесию. Но газ никогда не скапливается в одной части сосуда в большем количестве (с большей плотностью), чем в другой, без действия внешних сил.

Точно так же, если ввести в сосуд два разных газа, то вследствие взаимной диффузии они сами собой перемешаются, так что состав смеси станет всюду одинаковым. Это и будет равновесное состояние. Однако для того, чтобы вновь разделить эти газы, требуется затратить большие усилия извне.

**Процессом называется переход системы из одного равновесного состояния в другое**, т.е. от одних значений  $P_1, V_1, T_1$  к другим  $P_2, V_2, T_2$ . Существенным в этом определении является требование, чтобы конечное и начальное состояния были равновесными.

Пусть, например, надо перейти в состояние с другим объёмом. Ясно, что если это сделать не очень медленно, то постоянство давления по объёму нарушится и нарушится также постоянство температуры. Нельзя будет вообще говорить о каких-либо определённых давлении и температуре, поскольку они во всех точках будут различными. Более того, распределение давления и температуры по объёму зависит не только от начального и конечного объёмов, но и от способа, которым этот переход осуществляется. Таким образом, промежуточные состояния при таком процессе являются **неравновесными**. Такой процесс называется **неравновесным**.

Можно осуществить переход другим способом – бесконечно медленно. После каждого бесконечно малого изменения параметров следующее изменение не производится до тех пор, пока система не придёт в равновесное состояние, когда все макроскопические параметры примут по всей системе постоянные значения. После этого совершается следующий шаг и т.д. Таким образом, весь процесс состоит из последовательности равновесных состояний. Такой процесс называется **равновесным**. Его можно изображать на диаграммах в виде непрерывных кривых. В уравнении состояния идеальных газов (для одного моля)  $PV = RT$  любые из двух параметров могут считаться независимыми параметрами, характеризующими процесс. Например, некоторый равновесный процесс перехода от состояния  $P_1, V_1$  в состояние  $P_2, V_2$  показан на рисунке 42. Температура в каждой точке процесса однозначно определяется уравнением состояния.

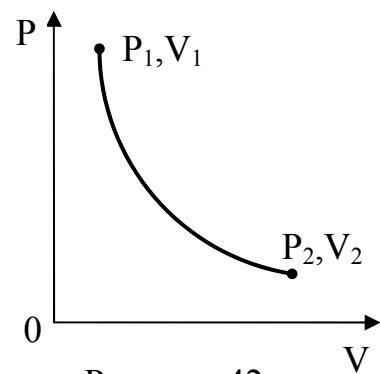


Рисунок 42

Изменение состояния системы всегда связано с переходом в неравновесные состояния. Удаление от равновесного состояния тем значительнее, чем быстрее изменение. Возвращение в равновесное состояние требует некоторого времени. Поэтому, производя изменения состояния системы достаточно медленно, мы с одной стороны, не будем уводить систему далеко от равновесного состояния, а с другой стороны, дадим системе в каждом промежуточном состоянии достаточно времени для возвращения к равновесному состоянию. В результате система проходит последовательность равновесных состояний. Непра-



вильно думать, что это утверждение приближённое, что система проходит последовательность лишь почти равновесных, но не точно равновесных состояний. Дело в том, что само равновесное состояние осуществляется посредством флуктуаций через неравновесные состояния. Поэтому если «почти равновесные состояния» при переходе отличаются от равновесных меньше, чем флуктуационные, их следует рассматривать как просто равновесные состояния. При достаточной медленности процесса этого всегда можно добиться.

**Обратимым процессом** называется такое изменение состояния системы (или одного отдельного тела), которое, будучи проведено в обратном направлении, возвращает ее в исходное состояние так, чтобы система прошла через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе, но в обратной последовательности, а состояние тел вне системы осталось неизменным.

**Обратимым процессом** называют процесс, достаточно медленный для того, чтобы состояние тела в каждый момент времени можно было считать равновесным. Равновесное состояние тела изображается точкой в пространстве его термодинамических параметров, так что обратимый процесс изображается некоторой кривой в этом пространстве.

**Обратимыми** являются все движения, рассматриваемые в механике, кроме тех, в которых участвуют силы трения (действие сил трения приводит к выделению тепла, и процесс перестаёт быть чисто механическим).

Процессы, не удовлетворяющие приведённому выше условию обратимости, называются **необратимыми**. При необратимом процессе обратный переход через те же промежуточные состояния невозможен.

Очевидно, что **неравновесный процесс в принципе не может быть обратимым; он всегда необратим**. С другой стороны, **равновесный процесс является всегда обратимым**.

Однако не следует думать, что понятие обратимого процесса равнозначно понятию бесконечно медленного процесса. Можно указать бесконечно медленные необратимые процессы, например пластическая деформация твёрдых тел может происходить бесконечно медленно и, тем не менее, не является обратимым процессом.

Приведём здесь пример, который позволит уточнить понятие обратимости и необратимости изменений или процессов.

Пусть пружина, один из концов которой закреплён, деформируется (растягивается) силой  $F$ , приложенной к другому ее концу (рисунок 43). Пружина растягивается, увеличивая свою потенциальную энергию за счёт работы силы  $F$ . Если после того, как пружина окажется растянутой на определённую длину, прекратить действие силы, то пружина вернётся в исходное состояние, соответственно уменьшив свою потенциальную энергию.

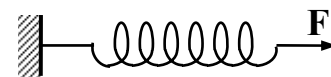


Рисунок 43

Можно ли считать описанный процесс растяжения пружины обратимым?

Легко видеть, что если пружину растянуть быстро (ниже будет видно, что значит «быстро») и сразу прекратить действие силы, то процесс не будет обратимым. В самом деле, когда сила  $F$  начинает растягивать пружину, то, прежде всего, деформируется та часть пружины, к которой непосредственно приложена

сила, т.е. часть, прилегающая к незакреплённому концу. Постепенно деформация передаётся остальным частям пружины, и последней деформацию испытает та ее часть, которая прилегает к закреплённому концу.

После прекращения действия силы пружина начнёт сжиматься. Но и теперь деформацию, на этот раз деформацию сжатия, первой испытает часть пружины, прилегающей к точке приложения силы, так как она, очевидно, первой «почувствует», что сила перестала действовать. От этой части деформация постепенно передастся вдоль пружины, пока не восстановится исходное состояние.

Таким образом, хотя процесс сжатия и идёт в обратном направлении, но пружина при этом не проходит промежуточные состояния в обратном порядке: в прямом процессе сначала деформировалась та часть пружины, которая прилегает к ее незакреплённому концу, и от нее деформация передавалась остальным частям пружины; в таком же, а не в обратном порядке пружина деформировалась и при сжатии, поэтому в описанном опыте процесс растяжения пружины нельзя считать обратимым. Необратимость скажется в том, что при быстром прекращении действия силы пружина придёт в колебательное движение, которое не является обратимым: сила трения приведёт к затуханию колебаний и их энергия перейдёт в тепло.

По той же причине быстрое сжатие или расширение газа – изотермическое или адиабатное – не являются обратимыми процессами. Как и в случае с пружиной, необратимость здесь состоит в том, что чередование промежуточных состояний при прямом и обратном процессах оказывается одинаковым.

К числу необратимых процессов относится и расширение газа в пустоту, не уравновешенное внешними силами. Необратимыми являются все явления переноса: теплопроводность, диффузия и внутреннее трение.

В связи с понятием обратимости и необратимости напомним, что говорилось в § 2.11 о квазистатических процессах.

В некоторых случаях процессы, которые при одних условиях протекают необратимо, могут оказаться обратимыми при других. Например, описанный выше процесс растяжения пружины может быть проведён и обратимым образом. Для этого нужно, чтобы внешняя сила, растягивающая пружину, по мере растяжения непрерывно увеличивалась, с тем, чтобы в каждый данный момент она была равна и противоположна упругой силе самой пружины. Другими словами нужно, чтобы в каждый данный момент пружина находилась в состоянии равновесия. Для этого растяжение должно вестись настолько медленно, чтобы деформация успевала передаваться по всей длине пружины и была всегда и во всех точках одинакова. Тогда пружина и будет в любой момент времени в равновесии. Принципиально процесс должен вестись бесконечно медленно. Практически время растяжения должно быть большим по сравнению со временем релаксации. Если же продолжительность процесса меньше времени релаксации, то равновесие установится не успеет, процесс оказывается слишком быстрым, чтобы быть обратимым.

Напомним, что процессы, в ходе которых система всё время остаётся в состоянии равновесия, называются квазистатическими. Понятно, что такие про-

цессы являются обратимыми, поскольку все промежуточные состояния равновесны.

В приведённых выше примерах сжатия и расширения пружины или газа время релаксации – это время распространения звука, поскольку звуковые волны представляют собой распространяющиеся в теле расширения и сжатия.

Расширение газа или его сжатие, производимое, например, при помощи поршня, будут квазистатическими, если скорость перемещения поршня мала по сравнению со скоростью звука в газе, так как при этом условии давление успевает выровняться по всему объёму газа. Как мы видели (§ 2.11), работа расширения газа в этом случае максимальна.

Напомним ещё раз, что квазистатические процессы могут быть изображены в виде кривой зависимости давления от объёма или, например, в виде кривой зависимости давления от температуры. Необратимый же процесс не может быть изображён такой кривой. Ведь если процесс неравновесный (не квазистатический), то нельзя говорить об определённом давлении или определённой температуре, соответствующих данному значению объёма. Все естественно идущие процессы, такие, как переход тепла от более нагретого тела к менее нагретому, выравнивание концентраций в газовых смесях и т.д., всегда являются необратимыми и, конечно, неквазистатическими процессами.

Таким образом, мы видим, что процессы, связанные с тепловыми движениями молекул, отличаются от механических движений тем, что они обычно бывают необратимыми. Между тем сами по себе движения молекул, по крайней мере, в первом приближении, подчиняются законам механики, и мы пользовались этими законами при выводе основных уравнений кинетической теории идеальных газов. Возникает естественный вопрос, каким образом совокупность частиц, каждая из которых подчиняется законам механики и движение которых, следовательно, обратимо, способна только к необратимым изменениям (если исключить квазистатические процессы, которые сами собой не происходят)? Причиной этого является грандиозность числа частиц и полная хаотичность их движений.

Этим обстоятельством объясняются многие процессы с участием большого числа частиц. Так, самопроизвольная концентрация молекул в малой части объёма сосуда столь же маловероятна, как и самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему или самопроизвольное разделение компонентов газовой смеси. Во всех подобных случаях сам собой происходит переход к равновесному состоянию, вероятность которого велика. Но обратный переход к неравновесному состоянию практически никогда не происходит, потому что вероятность такого состояния мала. Законы механики, которым подчиняются молекулы, разрешают оба направления процесса, но из-за большого числа частиц вероятность одного из них настолько мала, что его практически невозможно наблюдать.

Значит, необратимость процессов в молекулярных системах, состоящих из частиц, каждая из которых подчиняется законам механики, т.е. движется обратимо, объясняется исключительно тем, что очень велико число этих частиц. Будь их немного, система не знала бы никаких необратимых процессов.

Что касается квазистатических процессов, то, поскольку переход к равновесию в этих случаях совершается через равновесные же промежуточные состояния, они с равной вероятностью могут протекать в любом направлении.

### § 5.36 Взаимные превращения механической и тепловой энергии

Понятия о равновесии, об обратимости и необратимости процессов, являются общими и относятся ко всем процессам, происходящим в природе.

Одним из процессов, часто происходящих в природе при переходе какой-нибудь системы к равновесию, является превращение механической энергии в теплоту. Примером такого превращения является выделение тепла при трении. Напомним, что механической энергией мы здесь и в дальнейшем будем называть макроскопическую энергию, т.е. кинетическую энергию движения тел и их потенциальную энергию, обусловленную силами, действующими на эти тела. В противоположность этому кинетическая энергия тепловых движений молекул и потенциальная энергия их взаимодействия называется внутренней энергией. Значит, выделение тепла за счёт механической энергии – это процесс превращения макроскопической энергии в энергию микроскопических тепловых движений.

Обратный этому процесс – это превращение теплоты в механическую энергию или что то же, получение механической энергии за счёт теплоты. В своё время изобретение методов получения механической работы за счёт теплоты явилось началом новой эпохи в истории цивилизации. Наше время является эпохой использования ядерной энергии для получения работы. Но и ядерная энергия в настоящее время превращается в механическую работу не непосредственно, а через посредство опять-таки теплоты. Этим определяется важность изучения общих законов, управляющих процессами взаимного превращения механической и тепловой энергий.

Исторически термодинамика зародилась как раздел физики, изучающий связи между механической и тепловой энергиями. В дальнейшем своём развитии термодинамика стала наукой, исследующей связи между тепловой и всеми другими видами энергии – химической, электрической, энергии излучений и т.д. Далее мы ограничимся рассмотрением общих законов, связывающих тепловую и механическую энергии.

Первым законом, связывающим механическую и тепловую энергии, является закон сохранения энергии, который мы уже подробно рассмотрели применительно к идеальному газу (см. § 2.11). Этот закон и называют **первым началом термодинамики**. Напомним здесь содержание этого закона.

Если состояние системы изменяется вследствие подвода к ней некоторого количества тепла  $dQ$  и при этом изменении состояния система совершает работу  $dA$ , то закон сохранения энергии гласит: количество подведённого тепла равно сумме произведённой работы и изменения внутренней энергии системы. Математически закон сохранения энергии выражается в форме:

$$dQ = dU + dA. \quad (36.1)$$

Как мы видели,

$$dA = PdV.$$

Формулу (36.1) можно записать и так:

$$dU = dQ - dA.$$

Если речь идёт не о малом, а о макроскопическом изменении состояния, то нужно просуммировать все  $dQ$  и все  $dA$  и таким образом вычислить изменение внутренней энергии при переходе системы, например, из состояния 1 в состояние 2:

$$\int_1^2 dU = \int_1^2 dQ - \int_1^2 dA.$$

Здесь важно отметить, что количество подведённого тепла, так же как и совершённая системой (или над ней) работа, зависит от того, каким именно образом осуществлялся переход из состояния 1 в состояние 2. Изменение энергии  $dU$  не зависит от пути перехода, а только от начального и конечного состояний. Поэтому можно написать, что

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1 = \int_1^2 dQ - \int_1^2 dA,$$

но нельзя написать

$$\int_1^2 dQ = Q_2 - Q_1 \quad \text{или} \quad \int_1^2 dA = A_2 - A_1.$$

Это значит, что в каждом состоянии система обладает определённым значением внутренней энергии  $U$ , но о ней нельзя сказать, что она обладает определённым количеством теплоты или работы. Поэтому внутреннюю энергию называют функцией состояния. Но  $Q$  и  $A$  являются функциями не состояния, а процесса изменения состояния<sup>3</sup>.

Особое значение имеют так называемые циклические (или круговые) процессы, при которых система, пройдя ряд состояний, возвращается к исходному состоянию. В этом случае  $\oint dU = 0$ . Но это, конечно, не значит, что  $Q$  и  $A$  тоже равны нулю. При циклическом процессе тело может получить или отдать некоторое количество теплоты, оно может совершить работу, или работа может быть совершена над ним, но изменение внутренней энергии будет равно нулю.

---

<sup>3</sup> Математически это означает, что, в отличие от  $dU$ , величины  $dA$  и  $dQ$  не являются полными дифференциалами.

Первое начало термодинамики в таком случае записывается так:

$$\oint dQ = \oint dA,$$

где знак  $\oint$  означает интегрирование по замкнутому контуру.

Первое начало термодинамики в равной мере применимо к равновесным и неравновесным процессам. Хотя последние и не могут быть представлены в виде кривой, но начальное и конечное состояния системы и в этом случае вполне определены.

Напомним также основные соотношения, которые мы получили, применяя первое начало термодинамики к идеальному газу.

1. Работа, совершаемая одним молем идеального газа при его изотермическом расширении от объёма  $V_1$  до объёма  $V_2$ , равна:

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (36.2)$$

2. При адиабатном расширении, если температура газа падает от  $T_1$  до  $T_2$ , работа, совершённая одним молем газа, равна:

$$A = \frac{R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}, \quad (36.3)$$

где  $\gamma = C_p/C_v$  – отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме.

Напомним, что приведённые формулы относятся к случаю, когда изменение состояния газа происходит квазистатически, т.е. обратимым путём.

Важно отметить, что первое начало термодинамики не указывает, в каком направлении идут процессы изменения состояния. С точки зрения первого начала, например, тепло может переходить и от горячего тела к холодному, и от холодного к горячему. Лишь бы энергия, переданная одним телом, и энергия, полученная другим, были равны друг другу. Следовательно, необратимость процессов природы из первого начала термодинамики не вытекает.

Приведённые выше соотношения позволяют вычислить количество теплоты, выделяющейся в результате совершения механической работы. Как известно, результатом произведённой механической работы может явиться в определённых случаях возникновение равного ей количества теплоты. Это значит, что энергия макроскопического движения целиком переходит в энергию микроскопических движений молекул вещества.

Рассмотрим теперь обратный процесс преобразования теплоты в механическую работу.

## § 5.37 Преобразование теплоты в механическую работу

Теплотой, как известно, называется энергия, передаваемая от тела с более высокой температурой телу с меньшей температурой, например, при их контакте. Сама по себе такая передача энергии не сопровождается совершением работы, потому что при этом нет перемещения каких-либо тел. Она приводит лишь к увеличению внутренней энергии тела, которому теплота передаётся, и к выравниванию температур, после чего прекращается и сам процесс теплопередачи. Но если тепло передаётся телу, которое при этом может расширяться, то оно может совершить работу. Согласно закону сохранения энергии эта работа равна

$$dA = dQ - dU, \quad (37.1)$$

где  $dU$  – изменение внутренней энергии.

Наибольшая работа совершается при изотермическом процессе, когда внутренняя энергия не изменяется, так что

$$dA = dQ.$$

Большой работы, конечно, не может быть. Следовательно, для получения максимальной работы, равной подведённой теплоте, нужно передавать теплоту расширяющемуся телу так, чтобы между ним и источником теплоты не было разности температур, так как необратимый процесс теплопроводности бесполезен для превращения теплоты в работу, приводя лишь к увеличению внутренней энергии тела в ущерб работе. Правда, если между источником теплоты и телом, которому она передаётся, вовсе нет разности температур, то теплота и передаваться не будет. Но для того, чтобы теплота передавалась, достаточно и бесконечно малой разности температур, что практически не отличается от полной изотермичности. Процесс передачи теплоты при таких условиях идёт бесконечно медленно и поэтому обратим.

Всё это относится к **однократному** акту передачи теплоты телу, совершающему работу. В этом случае, повторяем, тело может совершить работу, равную полученной от источника теплоте. Например, если моль идеального газа, получив теплоту, изотермически расширится от объёма  $V_1$  до объёма  $V_2$ , то при этом будет совершена работа, равная  $RT \ln(V_2/V_1)$ .

Но для техники представляет интерес не такие единичные акты преобразования теплоты в механическую работу. Реально существующие устройства для превращения теплоты в работу (паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т.д.) – **двигатели** действуют, как известно, **циклически**, т.е. в них процессы передачи тепла и преобразования его в работу периодически повторяются. Для этого нужно, чтобы тело (рабочее вещество), совершающее работу, после получения теплоты от источника вернулось в исходное состояние, чтобы снова начать такой же процесс. Другими словами, оно должно совершать круговые процессы.



Совокупность изменений состояния, в результате которых состояние восстанавливается, называется **циклом**. **Циклическим** называется процесс, начало и конец которого совпадают. Цикл изображается на диаграмме процессов замкнутой кривой (рисунок 44). Цикл можно пройти как по часовой, так и против часовой стрелки. Поэтому в необходимых случаях надо указывать стрелками, в каком направлении проходит цикл. Можно также различные части замкнутой линии, составляющей цикл, обозначать буквами. Например,  $L_1$  и  $L_2$  указывают различные линии, соединяющие состояния 1 и 2. Работа, совершённая за цикл, равна площади, охватываемой этой замкнутой кривой  $1L_12L_21$  (ср. § 2.11, рисунок 15).

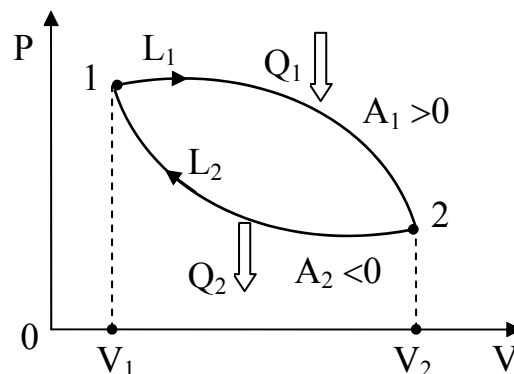


Рисунок 44

**Принцип Кельвина.** Возникает важный вопрос: можно ли и при циклическом процессе получить работу, равную теплоте, полученной от источника? На первый взгляд, кажется, что для этого никаких препятствий нет. Ведь в результате цикла тело, совершившее работу, возвращается в исходное состояние, его внутренняя энергия остаётся неизменной и работа должна быть равна поглощённой теплоте. В действительности, однако, совокупность опытных данных заставляет дать на поставленный вопрос отрицательный ответ. Он был сформулирован ещё в 1854 г. В. Томсоном (Кельвином) в виде следующего общего принципа (это одна из формулировок второго начала термодинамики):

**Невозможно осуществить циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение в механическую работу теплоты, отнятой у какого-нибудь тела, без того, чтобы произошли какие-либо изменения в другом теле или телах.**

Согласно этому принципу (основанному на многочисленных опытных данных, касающихся работы тепловых машин), теплота, заимствованная у источника, может быть превращена в работу в циклическом процессе при непрерывном условии, что кроме этого превращения должно изменяться состояние какого-то другого тела или тел. Значит, в процессе превращения теплоты в работу кроме источника теплоты, от которого теплота отнимается, и тела, совершающего работу, которому теплота непосредственно передаётся, должно участвовать ещё какое-то третье тело (или тела). Что это за тело и какова его роль в процессе преобразования теплоты в работу?

Как мы уже знаем, для преобразования теплоты в работу нужно «отнять» теплоту у источника и передать ее телу с более низкой температурой. Но сама по себе такая передача ни с какой работой не связана. Поэтому такая передача осуществляется не непосредственно, а через другое тело, которое, расширяясь, совершает попутно механическую работу и возвращается к исходному состоянию. Оно называется **рабочим телом**, в то время как источник теплоты называют **нагревателем**, а тело с более низкой температурой, которому теплота передаётся, – **холодильником**. Именно холодильник и есть то «другое тело», о кото-



ром говорится в принципе Кельвина. Само оно никакой работы не совершает, но оно необходимо, потому что рабочее тело должно передать ему теплоту.

Утверждение о том, что для совершения работы в циклической машине необходимо участие двух тел с различной температурой, называют **принципом Карно**.

Но почему же у нас не было нужды в этом дополнительном теле, получающем теплоту, но не совершающем работу, когда мы говорили о единичном акте преобразования теплоты в работу, и почему нельзя обойтись без него, когда речь идёт о циклическом процессе?

Дело, очевидно, в том, что при циклическом, круговом процессе рабочее тело, после того как оно, расширившись, совершит за счёт полученной от нагревателя теплоты работу, должно быть возвращено к исходному состоянию. Если, например, рабочее тело, расширяясь и совершая работу, проходит через ряд состояний вдоль кривой  $1L_12$  (рисунок 44), то для того, чтобы оно вернулось в первоначальное состояние, его нужно сжать. А для этого необходимо совершить работу над рабочим телом. Но работа эта должна быть меньше, чем работа, совершённая рабочим телом при расширении. Иначе цель нашего цикла не будет достигнута. А чтобы работа при сжатии была меньше, чем работа расширения, рабочее тело при сжатии должно пройти ряд состояний по кривой, лежащей ниже кривой расширения, например по кривой  $2L_21$  на рисунке 44. Но более низкая кривая на диаграмме  $PV$  соответствует более низкой температуре. Значит перед сжатием рабочее тело должно быть охлаждено, от него нужно отнять некоторое количество теплоты и передать его холодильнику. Вот почему никакая тепловая машина (циклическая) не может обойтись только источником тепла и рабочим телом.

Если бы можно было обойтись только рабочим телом и источником теплоты, то для получения работы можно было бы воспользоваться такими «источниками», как вода морей и океанов, земная кора, атмосфера Земли, от которых можно заимствовать практически неограниченное количество теплоты. Машина, работающая за счёт теплоты таких источников, не требующая никакого топлива, имела бы такое же значение, как «вечный двигатель» (такая воображаемая машина и называется вечным двигателем второго рода). Однако она не «запрещена» законом сохранения энергии – работа совершается за счёт теплоты. Но опыт показывает, что такая машина не может быть построена. Для работы циклической тепловой машины необходим холодильник – тело с температурой более низкой, чем источник теплоты. Именно атмосфера обычно и служит холодильником.

**Тепловая машина.** Первое начало термодинамики имеет разные формы записи, например, в дифференциальной форме (36.1), и различные формулировки, например, следующим образом: невозможен вечный двигатель первого рода, т.е. такой периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энергия.

Всякий двигатель представляет собой систему, совершающую многократно некий круговой процесс (цикл). Пусть в ходе цикла **рабочее тело** (например, **газ**) сначала расширяется до объёма  $V_2$ , а затем снова сжимается до первоначального объёма  $V_1$ .

чального объёма  $V_1$  (рисунок 44). Чтобы работа за цикл была больше нуля, давление (а, следовательно, и температура) в процессе расширения должно быть больше, чем при сжатии. Для этого рабочему телу нужно в ходе расширения сообщать теплоту, а в ходе сжатия отнимать от него теплоту. Совершив цикл, рабочее тело возвращается в исходное состояние. Поэтому изменение внутренней энергии за цикл равно нулю. Количество теплоты, сообщаемое рабочему телу за цикл, равно  $Q_1 - Q_2$ , где  $Q_1$  – теплота, получаемая рабочим телом при расширении, а  $Q_2$  – теплота, отдаваемая при сжатии. Работа  $A$ , совершаемая за цикл, равна площади цикла. Таким образом, выражение (11.7), написанное для цикла, имеет вид:

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (37.2)$$

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт получаемой извне теплоты, называется **тепловой машиной**. Как следует из (37.2), не вся получаемая от нагревателя теплота  $Q_1$  используется для получения работы, часть теплоты, равная  $Q_2$ , должна быть передана холодильнику. Очевидно, что чем полнее превращает тепловая машина получаемую от нагревателя теплоту  $Q_1$  в работу  $A$ , тем эта машина выгоднее. Поэтому тепловую машину принято характеризовать коэффициентом полезного действия (КПД)  $\eta$ , который определяется как отношение совершаемой за цикл работы  $A$  к получаемой за цикл теплоте  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (37.3)$$

Приняв во внимание соотношение (37.2), выражение для КПД можно записать в виде:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (37.4)$$

Из определения КПД следует, что он не может быть больше единицы.

### § 5.38 Цикл Карно

Рассмотрим теперь круговой процесс, при помощи которого тепло, отнятое от какого-нибудь тела, можно превратить в работу, и притом наилучшим образом, т.е. так, чтобы полученная работа была максимально возможной.

Чтобы осуществить этот процесс, нужно, как мы знаем, иметь три тела: источник тепла, от которого тепло отнимается (нагреватель), более холодное тело, которому тепло передаётся (холодильник), и рабочее тело, которое осуществляет передачу тепла и совершает работу. Положим ещё, для простоты рассуждений, что нагреватель и холодильник имеют настолько большую теплоёмкость, что их температуры не изменяются от того, что от первого отнимается, а второму передаётся некоторое количество тепла. Посмотрим, как при таких ус-

ловиях рабочее тело действительно совершит работу за счёт тепла, отданного нагревателем.

Начнём круговой процесс над рабочим телом с того, что оно, сжатое до некоторого давления, находится в контакте с нагревателем и, следовательно, имеет такую же, как он, температуру  $T_1$  (точка 1 на рисунке 45). Процесс теплопроводности при этом не происходит, так как нет разности температур. Не происходит, значит, и передачи тепла без совершения работы. Так как задачей является получение максимальной работы, мы не должны допускать в нашем цикле таких процессов.

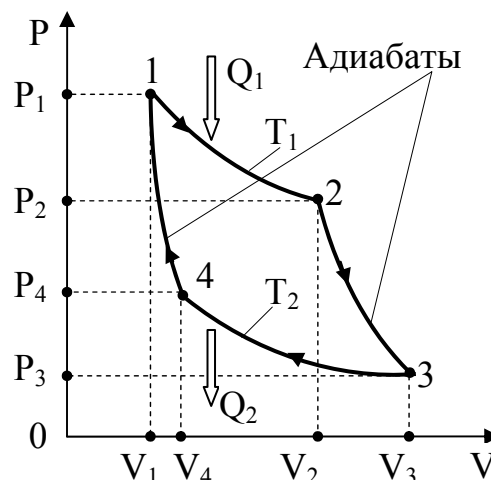


Рисунок 45

Предоставим теперь рабочему телу возможность расширяться и переместить какое-нибудь тело, например, поршень, не прерывая контакт с нагревателем. Расширение, следовательно, будет изотермическим (кривая 12 на рисунке 45). При этом будет совершена работа. Она совершается за счёт тепла, отнятого от нагревателя, который, однако, благодаря своей большой теплоёмкости не изменяет своей температуры.

Полученное рабочим телом тепло нужно теперь передать холодильнику. Эту передачу тоже не следует осуществлять прямым соприкосновением рабочего тела с холодильником, так как температура изотермически расширившегося рабочего тела выше температуры холодильника и передача тепла при контакте не будет сопровождаться совершением полезной работы. Поэтому рабочее тело надо сначала охладить до температуры холодильника и уже после этого их можно привести в соприкосновение. Для охлаждения же рабочего тела оно должно быть изолировано от нагревателя, а затем ему нужно дать возможность адиабатно расширяться (см. кривую 23 на рисунке 45) до тех пор, пока оно не примет температуру холодильника (при адиабатном расширении тела охлаждаются). На этом втором этапе тело, расширяясь и перемещая, например, поршень, дополнительно совершит механическую работу. После достигнутого таким образом охлаждения рабочего тела его приводят в контакт с холодильником. На этом этапе заканчивается первая половина цикла, во время которой тело совершило полезную работу за счёт тепла, полученного от нагревателя.

Теперь необходимо вернуть рабочее тело в исходное состояние, т.е. восстановить первоначальные давление и температуру. Это значит, что рабочее тело должно быть сжато и приведено снова в контакт с нагревателем. Этот контакт по-прежнему не следует осуществлять, пока температура рабочего тела ниже температуры нагревателя. Поэтому возвращение к первоначальному состоянию тоже проводится в два этапа. Сначала рабочее тело сжимают, не прерывая его контакта с холодильником, т.е. изотермически (см. кривую 34 на рисунке 45). Затем, изолировав рабочее тело от холодильника, его дополнительно сжимают адиабатно, так чтобы оно нагрелось до температуры нагревателя (см.

кривую 41 на рисунке 45). При адиабатном сжатии тело нагревается за счёт внешней работы, совершаемой над ним. После того как в процессе адиабатного сжатия температура рабочего тела станет равной температуре нагревателя, их приводят в контакт, и цикл на этом завершается: рабочее тело находится в исходном состоянии, и процесс может быть начат снова.

Описанный круговой процесс состоит, таким образом, из двух изотермических и двух адиабатных расширений и сжатий. При расширениях рабочее тело совершает полезную работу; сжатия, наоборот, происходят за счёт работы, совершаемой над рабочим телом внешними силами.

На всех стадиях рассмотренного кругового процесса нигде не допускается соприкосновение двух тел с различными температурами и, таким образом, исключается возникновение необратимого процесса теплопроводности. Весь цикл проводится, следовательно, обратимым путём (для полной обратимости расширения и сжатия нужно вести очень медленно, в принципе бесконечно медленно, так чтобы процессы эти были квазистатическими).

Описанный цикл, совершаемый рабочим телом, носит название **цикла Карно**, по имени французского учёного, впервые его рассмотревшего.

В результате кругового процесса Карно некоторое количество тепла оказывается переданным при посредстве рабочего тела от нагревателя к холодильнику. В ходе процесса рабочее тело совершает, кроме того, некоторую работу. В свою очередь над рабочим телом совершают работу внешние силы. Получается ли при этом полезная механическая работа, т.е. достигается ли цель всего процесса?

На первый взгляд кажется, что работа, произведённая рабочим телом при его расширении в первых двух стадиях цикла, полностью компенсируется работой, произведённой внешними силами в последующих двух стадиях, так что полезная работа, в конечном счёте, равна нулю. В действительности, однако, нетрудно убедиться, что положительная работа, совершаемая телом при его расширении, больше, чем отрицательная работа, совершаемая над ним при его сжатии, и что, следовательно, часть тепла, полученная от нагревателя, действительно преобразуется в механическую работу.

Как уже говорилось в § 5.37, работа, совершённая за цикл, равна площади, охватываемой замкнутой кривой 12341 (см. рисунок 45).

Проще всего в этом можно убедиться в случае, когда рабочим телом является идеальный газ, для которого можно точно вычислить работы расширения и сжатия. Как мы увидим, выводы, которые мы при этом получим, не зависят от природы рабочего тела, т.е. справедливы для любого тела.

Рассмотрим поэтому количественно весь цикл Карно, когда рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок 45).

Пусть рабочим телом служит 1 моль идеального газа и пусть исходное состояние характеризуется давлением  $P_1$  и объёмом  $V_1$ , т.е. точкой 1 на рисунке 45. Температура газа  $T_1 = P_1 V_1 / R$  по нашему условию равна температуре нагревателя. Температуру холодильника обозначим через  $T_2$ . Значит,  $T_1 > T_2$ .

В исходном состоянии рабочее тело контактирует с нагревателем. Первая стадия кругового процесса, который совершает газ, – это изотермическое рас-

ширение (сохраняется контакт с нагревателем) до объёма  $V_2$ . Соответственно давление падает по изотерме до значения  $P_2$  (точка 2 на рисунке 45).

Положительная работа, совершаемая газом при расширении, равна:

$$A_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1, \quad (38.1)$$

где  $Q_1$  – количество тепла, полученное газом от нагревателя. За счёт этого тепла и совершена работа  $A_1$ .

Вторая стадия состоит в том, что газ изолируется от нагревателя и дальнейшее его расширение происходит адиабатно, вследствие чего газ охлаждается. Это адиабатное расширение прекращают, когда температура газа станет равной температуре холодильника  $T_2$ . Значение объёма, до которого должен расшириться газ, можно определить, учитывая, что при адиабатном расширении справедливо равенство:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (38.2)$$

Объём  $V_2$  можно, следовательно, найти из равенства:

$$\left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (38.3)$$

Давление при этом изменяется по адиабате до значения  $P_3$  (точка 3 на рисунке 45). Работа, совершаемая газом на этой второй стадии процесса, равна (см. § 2.16):

$$A_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2). \quad (38.4)$$

На третьем этапе циклического процесса газ изотермически сжимается внешними силами при температуре  $T_2$  холодильника от объёма  $V_3$  до  $V_4$ . Совершённая при этом **над газом** работа равна:

$$A_3 = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = Q_2, \quad (38.5)$$

За счёт этой работы выделяется теплота  $Q_2$  и передаётся холодильнику, с которым газ контактирует.

Наконец, последнее изменение, которое претерпевает газ, чтобы вернуться в исходное состояние, – это адиабатное сжатие до исходного объёма  $V_1$  и давления  $P_1$ , при которых его температура станет равной  $T_1$ . Для этого нужно, что-

бы на предыдущем, третьем этапе газ был сжат до объёма  $V_4$ , определяемого равенством:

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}, \quad (38.6)$$

так как по-прежнему  $T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ .

Работа сжатия на последнем этапе цикла равна:

$$A_4 = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = -\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2). \quad (38.7)$$

Теперь газ снова находится в первоначальном состоянии, цикл Карно завершён и газ «готов» вновь начать процесс.

Каков же результат цикла? В какой мере достигнута его цель – преобразование теплоты в механическую работу?

Общая работа  $A$ , совершённая газом и над газом, равна, очевидно,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Из равенств (38.1), (38.4), (38.5) и (38.7) получаем:

$$\begin{aligned} A &= RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} - \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2) = \\ &= RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \end{aligned}$$

Из (38.3) и (38.6) следует, что  $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$ , или  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ . Обозначим это отношение через  $r$ . Тогда

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{V_3}{V_4} = \ln r. \quad (38.8)$$

Так как  $V_2 > V_1$  и  $V_3 > V_4$ , то  $\ln r > 0$ .

Следовательно, общая работа

$$A = R(T_1 - T_2) \ln r, \quad (38.9)$$

и так как  $T_1 > T_2$ , то  $A > 0$ . Значит, работа, совершённая газом при расширении, больше работы внешних сил, затраченной на его сжатие. За счёт теплоты, по-

лученной рабочим телом от нагревателя, совершена, таким образом, некоторая полезная работа. Эта работа, однако, не равна тому количеству теплоты  $Q_1$ , которое рабочее тело получило от нагревателя.

Из отданного нагревателем количества тепла

$$Q_1 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

часть, равная

$$Q_2 = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3},$$

была передана холодильнику при изотермическом сжатии газа от объёма  $V_3$  до объёма  $V_4$  (газ в это время находился в контакте с холодильником). В полезную работу удалось, таким образом, преобразовать лишь часть полученной теплоты, равную:

$$Q_1 - Q_2 = R(T_1 - T_2) \ln r = A. \quad (38.10)$$

Работа  $A$  графически определяется площадью, ограниченной кривой 12341 (см. рисунок 45).

Этим процесс преобразования теплоты в работу отличается от обратного процесса превращения работы в тепло. Механическая работа при определённых условиях может быть целиком превращена в тепло. Тепло лишь частично превращается в работу.

Заметим здесь, что из равенств (38.1), (38.5) и (38.8) следует весьма важное соотношение, которое нам понадобится в дальнейшем. Равенства (38.1) и (38.5) можно переписать в виде:

$$\frac{Q_1}{T_1} = R \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad - \frac{Q_2}{T_2} = R \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Сложив их и принимая во внимание (38.8), получаем  $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$ , откуда

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (38.11)$$

**Коэффициент полезного действия в цикле Карно.** Из приведённого анализа кругового процесса Карно следует, что при его посредстве нельзя полностью превратить заимствованную от нагревателя теплоту в механическую энергию. Часть этого тепла непременно должна быть передана холодильнику – телу с более низкой, чем у нагревателя, температурой.

Если количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, равно  $Q_1$ , а в работу преобразована часть  $Q_1 - Q_2$  этой теплоты, то отношение

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

представляет собой КПД кругового процесса (точнее – машины, работающей по этому процессу). Как видно из формулы (38.11), КПД  $\eta$  цикла Карно определяется равенством:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (38.12)$$

Коэффициент полезного действия (КПД)  $\eta$ , следовательно, всегда меньше единицы и зависит от соотношения между температурами нагревателя и холодильника.

Цикл Карно, рассмотренный нами, был на всех своих стадиях проведён так, чтобы нигде не было соприкосновения тел с различными температурами, что исключает возможность необратимых процессов теплопроводности. Изменения объёма рабочего тела также проводились обратимым путём, что, как мы знаем, обеспечивает максимум совершаемой при этом работы (см. § 2.11). Это значит, что были обеспечены наилучшие условия для использования тепловой энергии. Поэтому более высокий КПД, чем представленный формулой (38.12), получить принципиально нельзя.

Тепловая машина, работающая при данных значениях температур нагревателя и холодильника, не может иметь КПД больший, чем машина, работающая по обратимому циклу Карно при тех же значениях температур нагревателя и холодильника. (Это утверждение иногда называют **первой теоремой Карно**).

Из формулы (38.12) видно, что **коэффициент полезного действия цикла Карно не зависит от рода рабочего тела**, а только от температур нагревателя и холодильника. (Это утверждение составляет содержание **второй теоремы Карно**).

При расчёте мы выбрали в качестве рабочего тела идеальный газ потому, что для него точно известно уравнение состояния, что и позволило легко вычислить величину коэффициента полезного действия.

Тот факт, что КПД машины, работающей по циклу Карно, максимален, обусловлен, как мы видели, тем обстоятельством, что этот круговой процесс полностью обратим. Во-вторых, для достижения более высокого КПД тепловой машины нужно по возможности повысить температуру нагревателя и понизить температуру холодильника.

Что касается выбора рабочего тела, то он диктуется соображениями технической и экономической целесообразности. То обстоятельство, что в современных тепловых машинах используется главным образом водяной пар, обусловлено доступностью воды и простотой обращения с ней.



Прогресс в технике паросиловых установок достигается повышением температуры нагревателя (холодильником обычно является окружающий воздух). Однако с паросиловыми установками успешно конкурируют двигатели внутреннего сгорания, где рабочим телом служит смесь воздуха с соответствующим горючим. Достижимые в этом случае температуры значительно выше, а потому и КПД таких машин выше. К тому же в этих двигателях устранён необратимый процесс передачи тепла от топки, что тоже повышает КПД.

Необходимо, однако, иметь в виду, что обратимый процесс является процессом идеальным и на практике полная обратимость не может быть обеспечена. Поэтому то значение КПД, которое даётся формулой (38.12), фактически является недостижимым верхним пределом, к которому, однако, можно подойти принципиально сколь угодно близко.

### § 5.39 Холодильная машина

При проходе цикла, изображённого на рисунке 44, в обратном направлении машина не производит работы, а, наоборот, над машиной совершается работа. Эта работа превращается в теплоту, причём так, что некоторое количество теплоты берётся от тела с более низкой температурой, к этой теплоте добавляется за счёт работы эквивалентное количество теплоты и суммарное количество теплоты передаётся нагревателю. Таким образом, чистый результат цикла состоит в том, что тело с меньшей температурой, от которого отнимается теплота, охлаждается, а тело с большей температурой, которому отдаётся теплота, нагревается. Такая машина, работающая по обратному циклу, называется **холодильной машиной** или **нагревателем** в зависимости от назначения. Такая машина отбирает за цикл от более холодного тела («холодильника» – в терминах § 5.37, в котором рассматривали принцип работы тепловой машины) количество теплоты  $Q_2$  и отдаёт телу с более высокой температурой («нагревателю») количество тепла  $Q_1$ . **Эффективность холодильной машины** характеризуется ее холодильным коэффициентом  $\xi$ , который определяется как отношение отнятой от охлаждаемого тела теплоты  $Q_2$  к работе  $A$ , которая затрачивается на приведение машины в действие:

$$\xi_1 = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (39.1)$$

Если эффективность машины оценивается по способности повышения температуры тела с более высокой температурой, т.е. машина действует как нагреватель, то **эффективность нагревателя** характеризуется коэффициентом

$$\xi_2 = \frac{Q_1}{A}. \quad (39.2)$$

В формулах (39.1) и (39.2) использованы абсолютные значения количества теплоты и работы, а не их алгебраические значения, как в (37.4).

При применении обратного процесса к циклу Карно тепло также будет передаваться не от нагревателя к холодильнику, а, наоборот, – от холодильника к нагревателю. Результатом обратного цикла Карно будет не внешняя полезная работа, а перенос тепла от холодильника к нагревателю, т.е. от менее нагретого тела к более нагретому. **Эффективность холодильной машины**, работающей по циклу Карно, равна

$$\xi_1 = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (39.3)$$

Нужно отметить, что рабочее тело при обратном процессе Карно проходит через те же промежуточные состояния, что и при прямом, но в обратном порядке.

В принципе существует бесчисленное множество возможных циклов, поскольку каждой замкнутой кривой, например, на диаграмме  $PV$ , соответствует цикл. Различные циклы используются в технике для превращения теплоты в работу и работы в теплоту. Практически используется несколько десятков циклов. Они подробно изучаются в технической термодинамике и соответствующих разделах техники.

## § 5.40 Энтропия

**Энтропия** (от греческого глагола  $\epsilon\nu\tau\rho\epsilon\lambda\epsilon\iota$  – преобразовать, превратить) – понятие, впервые введённое в **термодинамике** одним из основоположников термодинамики Р. Клаузиусом в 1865 г. для определения меры необратимого рассеяния энергии. В **статистической физике** энтропия служит мерой вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния.

Для выяснения физического смысла понятия энтропии  $S$  рассматривают отношение теплоты  $dQ$ , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре  $T$  теплоотдающего тела, называемое **приведённым количеством теплоты**:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (40.1)$$

Следует обратить внимание на особенность этой формулы. Как мы знаем, в математическом отношении величина  $dQ$  не является полным дифференциалом, так как  $Q$  не является функцией состояния (см. примечание на стр. 156), становится, однако, полным дифференциалом после деления на  $T$ . В отличие от теплоты, энтропия такая же функция состояния как температура, внутренняя энергия или давление. Полученное системой тепло  $Q$  зависит от процесса перехода из начального состояния в конечное, приращение же энтропии  $\Delta S$  **совершенно не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний**.

В интегральной форме соотношение (40.1) имеет вид

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (40.2)$$

при этом не играет роли, какой именно процесс перевёл систему из состояния 1 в состояние 2. Процесс может быть даже необратимым. Важно лишь, чтобы состояния 1 и 2 были равновесными, расчёт же с помощью (40.2) может проводиться по любому обратимому процессу между состояниями 1 и 2.

Введение таким образом энтропии  $S$  означает, что мы можем вычислять только разность энтропий, но нельзя сказать, чему равна энтропия в каждом из состояний, т.е. энтропия этими формулами может быть определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Но как всегда в таких случаях делается, можно выбрать некоторое состояние, которому приписывается значение  $S$ , равное нулю, и сравнивать с ним все прочие состояния. Поэтому в дальнейшем будем считать, что функция  $S$  равна интегралу:

$$S = \int \frac{dQ}{T}. \quad (40.3)$$

Определённая таким образом величина  $S$  и называется **энтропией**.

На практике всегда требуется знать не саму величину  $S$ , а только ее изменение при изменении состояния системы. Поэтому безразлично, какому именно состоянию приписать нулевую энтропию. Принято, (и на это есть достаточные основания) считать, что энтропия равна нулю при абсолютном нуле температуры.

Значит, для нахождения энтропии системы в данном состоянии надо перевести систему (это можно сделать мысленно) из этого состояния в нулевое состояние каким-либо обратимым путём (безразлично, каким именно) и найти значение  $\int \frac{dQ}{T}$  вдоль этого пути. Разумеется, сама энтропия системы совершенно не зависит от того, будет ли в действительности совершён этот обратимый процесс или нет.

То же касается изменения энтропии. Согласно (40.2), чтобы определить разность значений энтропии системы в двух ее равновесных состояниях 1 и 2, нужно перевести систему каким-нибудь обратимым процессом из состояния 1 в состояние 2 и вычислить значение  $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$  для такого процесса.

Изменение энтропии системы определяется соотношением (40.1), из которого находим  $dQ = TdS$ . Воспользовавшись этим выражением и вспомнив, что  $dQ = dU + PdV$  (первое начало термодинамики), получаем:

$$TdS = dU + PdV. \quad (40.4)$$

Это уравнение носит название **термодинамического тождества**. Его часто называют вторым началом термодинамики для **обратимых процессов**. Собственно, второе начало термодинамики для обратимых процессов заключается в том, что система может быть охарактеризована функцией состояния - энтропией, определяемой уравнениями (40.1) или (40.4). Глубокий физический смысл этой функции выясним ниже.

Для **обратимых круговых** процессов, которые мы здесь рассматриваем,

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (40.5)$$

Это в свою очередь означает, что при всяком обратимом не круговом процессе значение  $\int \frac{dQ}{T}$  не зависит от пути, по которому происходит процесс.

Если круговой процесс, претерпеваемый системой, **необратим**, то

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0. \quad (40.6)$$

Это неравенство называется **неравенством Клаузиуса**.

Энтропия, будучи функцией состояния тела или системы тел, может служить таким же параметром состояния тела (например, газа), как уже известные нам величины: температура  $T$ , давление  $P$  и объём  $V$ .

Подобно тому, как любая из этих величин является функцией двух других, так и энтропия может быть выражена через любые из двух параметров  $P$ ,  $V$  и  $T$ . Покажем, как это можно сделать. Это тем более важно, что энтропия непосредственно не может быть измерена на опыте подобно, например, температуре, объёму или давлению.

Выразим из уравнения (40.4)

$$dS = \frac{dU + PdV}{T},$$

или

$$dU = TdS - PdV. \quad (40.7)$$

Любые две из четырёх величин  $T$ ,  $S$ ,  $P$  и  $V$ , входящих в это уравнение, можно выбрать в качестве независимых переменных, через которые выразятся остальные.

Из курса анализа известно, что если  $x$  и  $y$  являются независимыми переменными функции  $U(x, y)$  и  $dU$  – ее полный дифференциал, то

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Произведя двойное дифференцирование (40.7), получим:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x}; \quad (40.8)$$

Вместо  $x$  и  $y$  в это равенство можно подставить любые две из четырёх величин  $T$ ,  $S$ ,  $P$  и  $V$ . Пусть, например, состояние системы изменяется вследствие изменения объёма на  $dV$  и температуры на  $dT$ ; вычислим обусловленное этим изменение энтропии  $dS$ .

Это значит, что в равенстве (40.8) мы вместо  $x$  и  $y$  должны подставить соответственно  $x = V$  и  $y = T$ , т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial V} \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial T}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} - \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial V};$$

но если  $T$  и  $V$  – независимые переменные, то  $\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial V}{\partial T} = 0$  и, следовательно, имеем:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V. \quad (40.9)$$

Кроме того, учтём, что  $dS$  есть полный дифференциал:

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV. \quad (40.10)$$

Последнее равенство означает, что полное увеличение энтропии складывается из увеличений энтропии, вызванных отдельно увеличением температуры и увеличением объёма. Из (40.9) и (40.10) следует:

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV. \quad (40.11)$$

Первый член правой части (40.11) представляет собою изменение энтропии  $(dS)_V$ , вызванное только изменением температуры при неизменном объёме ( $dV = 0$ ). Согласно определению [см. (40.1)]

$$(dS)_V = \frac{(dQ)_V}{T},$$

где  $(dQ)_V$  – это количество теплоты, сообщённое телу для изменения его состояния при постоянном объёме, т.е.

$$(dQ)_V = C_V dT,$$

где  $C_V$  – теплоёмкость тела при постоянном объёме; следовательно,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT = \frac{C_V}{T} dT,$$

и окончательно

$$dS = \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV. \quad (40.12)$$

Таким образом, мы выразили  $dS$  через измеряемые на опыте величины  $P$ ,  $V$ ,  $T$  и  $C_V$ .

Точно таким же образом можно выразить изменение энтропии  $dS$  через изменение температуры  $dT$  и давления  $dP$ , т.е. выбрав независимыми переменными  $T$  и  $P$ . Для этого в уравнение (40.8) нужно вместо  $x$  и  $y$  подставить  $T$  и  $P$ . Получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial P}{\partial P} \frac{\partial V}{\partial T}.$$

Но  $\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial P}{\partial T} = 0$ , потому что  $T$  и  $P$  – независимые переменные. В результате получается уравнение, аналогичное (40.9):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \quad (40.13)$$

и соответственно по аналогии с (40.12)

$$dS = \frac{C_P}{T} dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP. \quad (40.14)$$

Интегрируя (40.12) и (40.14), можно вычислить энтропию  $S(V, T)$  данной массы (например, 1 моля) вещества при данных значениях объёма  $V$  и температуры  $T$ , или энтропию  $S(P, T)$  при данных значениях давления  $P$  и температуры  $T$ , если известны значения энтропии  $S(V_0, T_0)$  и  $S(P_0, T_0)$  при каких-нибудь других значениях параметров  $V_0$  и  $T_0$  или  $P_0$  и  $T_0$ . Очевидно, что

$$S(V, T) - S(V_0, T_0) = \int_{T_0, V_0}^{T, V_0} \frac{C_V dT}{T} + \int_{T, V_0}^{T, V} \left(\frac{dP}{dT}\right)_V dV$$

и

$$S(P, T) - S(P_0, T_0) = \int_{P_0, T_0}^{P, T} \frac{C_P dT}{T} - \int_{P_0, T}^{P, T} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P dP.$$

В частности для 1 моля идеального газа

$$\int_{T_0}^T \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \frac{T}{T_0},$$

$$\int_{V_0}^V \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = R \ln \frac{V}{V_0}, \quad \text{так как} \quad \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V};$$

получаем:

$$\Delta S = S(V, T) - S(V_0, T_0) = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}.$$

Из последнего выражения, в частности, видно, что энтропия возрастает как с увеличением объёма газа, так и с увеличением температуры. Так, если идеальный газ расширяется изотермически, т.е.  $T = T_0$ , то изменение энтропии

$$\Delta S = R \ln \frac{V}{V_0}. \quad (40.15)$$

**Зависимость внутренней энергии от объёма.** У неидеальных газов внутренняя энергия  $U$  зависит не только от температуры  $T$ , но и от объёма  $V$  (плотности) газа:  $U = U(T, V)$ . Изменение внутренней энергии, вызванное изменением объёма при постоянной температуре, определяется уравнением:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P.$$

Пользуясь полученными термодинамическими соотношениями, выведем это важное уравнение. Для этого используем снова термодинамическое тождество (40.4) в виде:

$$dS = \frac{dU + PdV}{T} = \frac{1}{T} dU + \frac{1}{T} PdV.$$

Из того, что  $dU$  есть полный дифференциал, следует, что

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT,$$



т.е. полное изменение внутренней энергии системы складывается из изменений, вызванных отдельно изменением объёма  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$  и изменением температуры  $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$ . Отсюда в свою очередь следует:

$$dS = \frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \right] dV + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT.$$

Сопоставим с этим полученное выше равенство (40.11):

$$dS = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT.$$

Из сравнения коэффициентов при  $dV$  в обоих равенствах становится очевидным, что

$$\frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \right] = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

откуда и получается интересующее нас выражение:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (40.16)$$

Полезно заметить, что выражение  $T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$  есть не что иное, как  $\frac{dQ}{dV}$ , т.е. количество теплоты, приходящееся на единицу изменения объёма, которое нужно сообщить телу для того, чтобы его объём возрос, но температура при этом осталась постоянной.

Для идеального газа

$$T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = P \quad \text{и поэтому} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0.$$

Применим (40.16) для вычисления внутренней энергии газа, состояние которого описывается уравнением Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

В этом случае, как легко видеть,

$$T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{RT}{V-b} \quad \text{и} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{a}{V^2}.$$

Отсюда

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV$$

и, следовательно,

$$U = \int C_V dT + \int \frac{a}{V^2} dV = C_V T - \frac{a}{V} + B,$$

где  $B$  – постоянная интегрирования.

Ее значение можно определить из условия, что при  $V \rightarrow \infty$ , т.е. когда газ становится бесконечно разреженным, он должен обладать свойствами идеального газа, для которого

$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия такого газа складывается из кинетической энергии молекул ( $C_V T$ ), которая определяется температурой, и потенциальной энергии  $\left(-\frac{a}{V}\right)$ , обусловленной силами взаимодействия молекул. Понятно, что потенциальная энергия по своему численному значению убывает с увеличением расстояния между молекулами (потому что при этом убывают силы взаимодействия), т.е. с увеличением объёма, занимаемого газом.

### § 5.41 Энтропия при обратимых процессах в замкнутой системе

Если в какой-нибудь системе происходит адиабатный процесс, то это значит, что система замкнутая. В общем случае **замкнутой системой** называется система, изолированная от какого-либо внешнего воздействия, такую систему всегда можно разбить на составляющие ее подсистемы, слабо взаимодействующие между собой. В данном случае система замкнута в том смысле, что она изолирована от внешних источников теплоты, как отдающих ей тепло, так и поглощающих теплоту. Очевидно, что если процесс изменения состояния в такой системе обратимый, то изменение энтропии равно нулю, так как в равенстве

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

равна нулю величина  $dQ$ . **При адиабатном изменении состояния замкнутой системы ее энтропия остаётся неизменной.**

Правда, над такой системой внешние по отношению к ней тела могут совершать работу, и сама система может совершать работу над внешними телами. В этом смысле система не замкнута. Но если мы включим эти тела в нашу систему, то изменение энтропии в такой, уже полностью замкнутой системе по-прежнему останется равным нулю, потому что изменения в состоянии тел, совершающих работу, или тел, над которыми совершается работа, не сопровождаются изменениями энтропии – это чисто механические части нашей системы.

Но можно показать, что при **любом обратимом** изменении состояния замкнутой системы энтропия не изменяется.

В самом деле, пусть некоторое тело, способное расширяться или сжиматься, обменивается теплом с источниками теплоты – получает теплоту от одних источников или передаёт теплоту другим. Пусть также над телом совершается работа или тело само совершает работу. Назовём те тела, которые совершают работу или над которыми совершается работа, источниками работы. Рассмотрим замкнутую систему, включающую и тело, и источники теплоты, и источники работы.

Пусть состояние тела **обратимо** изменяется из-за того, что оно обменивается теплотой с источниками теплоты, и из-за того, что оно совершает работу или над ним совершается работа. Совершение работы (любого знака), как мы только видели, не приводит к какому-либо изменению энтропии. Энтропия изменяется только при обмене теплотой между телом и источниками теплоты. Если тело, например, получило от источника теплоту, которую мы обозначим через

$dQ_{\text{тела}}$ , то его энтропия изменилась на величину  $\frac{dQ_{\text{тела}}}{T}$ , где  $T$  – температура тела. Но при этом источник потерял такое же количество теплоты. Если обозначить количество потерянной теплоты через  $dQ_{\text{ист}}$ , то очевидно, что  $dQ_{\text{тела}} = -dQ_{\text{ист}}$ . При этом энтропия источника теплоты изменится на величину  $-\frac{dQ_{\text{ист}}}{T}$ , где  $T$  – температура источника. Так как процесс обмена теплотой обратимый, то температура тела должна быть равна температуре источника. Иначе будет происходить необратимый процесс теплопроводности. Ясно поэтому, что

$$\frac{dQ_{\text{тела}}}{T} = -\frac{dQ_{\text{ист}}}{T}, \quad \text{или} \quad dS_{\text{тела}} = -dS_{\text{ист}}.$$

Общее же изменение  $dS$  энтропии всей замкнутой системы равно нулю:

$$dS = dS_{\text{тела}} + dS_{\text{ист}} = 0.$$

Следовательно, **энтропия замкнутой системы при любом обратимом процессе в ней остаётся неизменной**.

Нужно отметить, что **замкнутая система** по истечении достаточно большого промежутка времени всегда приходит в равновесное состояние. Равновесное состояние макроскопической системы однозначно определяется несколькими термодинамическими параметрами. Так, равновесное состояние жидкости или

газа с фиксированным числом частиц можно задать двумя параметрами, например, давлением  $P$  и объемом  $V$ . В более сложных системах число термодинамических параметров увеличивается. Например, в смеси газов или жидком растворе в их число необходимо включить концентрации отдельных компонентов, состояние твёрдого тела следует описывать тензором деформации.

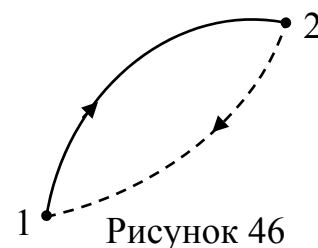
### § 5.42 Энтропия при необратимых процессах в замкнутой системе

Важной особенностью энтропии является ее поведение при необратимых процессах.

В § 5.40 мы видели, что для необратимого кругового процесса справедливо соотношение

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Рассмотрим процесс, при котором система необратимым образом переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 (на рисунке 46 он показан сплошной линией). Необратимость перехода означает, что промежуточные состояния неравновесны. Как при таком переходе изменяется энтропия системы? Чтобы



это выяснить, вернём систему в первоначальное состояние каким-нибудь **обратимым** путём, например путём, показанным на рисунке 46 пунктирной линией. Получившийся круговой процесс необратим, потому что одна его часть необратима. Поэтому для него справедливо уравнение

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Но

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T}.$$

Второй из двух интегралов, поскольку он относится к обратимому процессу, равен

$$\int_2^1 \frac{dQ}{T} = S_1 - S_2.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + S_1 - S_2 < 0, \quad \text{или} \quad S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Если система замкнута, т.е. изолирована от источников теплоты, то  $dQ = 0$   
и

$$S_2 - S_1 > 0, \quad \text{или} \quad S_2 > S_1.$$

Отсюда следует, что **энтропия замкнутой (т.е. адиабатно изолированной) системы при необратимом процессе возрастает.**

Имея в виду то, что было сказано в предыдущем параграфе, можно сказать, что энтропия замкнутой системы либо остаётся постоянной, либо возрастает.

Полученный нами **закон возрастания энтропии** при необратимых процессах – одна из важнейших особенностей величины энтропии. Он тем более важен, что, как уже указывалось, понятие об обратимом процессе является идеализацией. Ведь при обратимом процессе система на любой его стадии должна находиться в состоянии термодинамического равновесия. Для установления равновесия требуется время, и поэтому процесс, чтобы быть вполне обратимым, должен протекать бесконечно медленно, что, конечно, никогда не бывает.

Для необратимых же процессов в замкнутых системах энтропия, как показывает опыт и теория, всегда возрастает, и это свойство так же присуще энтропии, как энергии свойственно сохраняться при любых процессах в замкнутых системах.

Именно потому, что энергия обладает свойством сохраняться в замкнутой системе, она (энергия) не может служить функцией, показывающей, в каком направлении идут процессы в такой системе. Ведь при любом изменении состояния энергия в начале и в конце процесса одна и та же. И поэтому она не даёт возможности отличить друг от друга начальное и конечное состояния. Энтропия же, в естественно идущих процессах всегда возрастающая, позволяет судить, какое направление процесса возможно и какое нет, какое состояние является начальным и какое конечным.

Если, например, мы смешиваем две массы воды с разными температурами, то нетрудно убедиться, что сумма энтропий обеих масс до смешивания меньше энтропии смеси, имеющей промежуточную температуру. Ясно, что процесс смешения может идти сам собой, но обратный процесс разделения смешанных масс ни в коем случае идти не может, так как он сопровождался бы уменьшением энтропии.

Рост энтропии в любом процессе продолжается не беспредельно, а лишь до определённого максимального значения, характерного для данной системы. Это максимальное значение энтропии соответствует состоянию равновесия, и после того, как оно достигнуто, какие бы то ни было изменения состояния без внешнего воздействия прекращаются.

Таким образом, энтропия как функция состояния существенно отличается от энергии. В то время как энергия не может быть ни создана, ни уничтожена, энтропия может создаваться и она постоянно создаётся во всяком процессе перехода к равновесию. Но, однажды созданная, она уже не может быть уничтожена: обратный процесс с уменьшением энтропии не может идти.

Закон **возрастания энтропии** при необратимых процессах также часто называют **вторым началом термодинамики**.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие этот закон.

**Увеличение энтропии при теплопередаче.** Если привести в соприкосновение два тела 1 и 2, температуры которых соответственно равны  $T_1$  и  $T_2$ , то теплота будет переходить от более нагретого тела к менее нагретому, в результате чего температуры обоих тел будут выравниваться.

Пусть  $T_1 > T_2$ . Вычислим изменение энтропии, которым сопровождается этот необратимый процесс.

Состояние тела 1 изменяется при этом за счёт потери им некоторого количества теплоты  $-dQ$ ; соответственно тело 2 изменяет своё состояние за счёт получения такого же количества теплоты  $dQ$ .

Для определения изменения энтропии системы, состоящей из обоих тел, нужно вычислить значения  $\frac{dQ}{T} = dS$  для какого-нибудь обратимого процесса, приводящего к тому же изменению состояния системы (см. § 5.40). Таким процессом может служить, например, процесс передачи тепла от тела 1 телу 2 при помощи третьего **рабочего** тела, как это было сделано при рассмотрении процесса Карно, который, как известно, осуществляется обратимым путём на всех стадиях. Тогда для тела 1 и соответственно для тела 2

$$dS_1 = -\frac{dQ}{T_1}, \quad dS_2 = \frac{dQ}{T_2}.$$

Общее изменение энтропии обоих тел равно:

$$dS = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) dQ. \quad (42.1)$$

Поскольку  $T_1 > T_2$ , то  $dS > 0$ , т.е. **энтропия системы возрастает**.

Приведённое рассуждение не зависит от того, посредством какого процесса осуществлён переход теплоты от тела 1 к телу 2 – теплопроводностью или излучением. Существенно лишь, что температуры обоих тел различны.

**Рост энтропии при адиабатном расширении идеального газа в пустоту.** Мы уже отмечали, что расширение газа в пустоту – процесс необратимый. Покажем теперь, что этот процесс сопровождается возрастанием энтропии.

Представим себе сосуд с теплоизолирующими стенками, разделённый на две части перегородкой с отверстием, закрытым заслонкой (рисунок 47). Пусть одна из частей сосуда, объёмом  $V_1$ , заполнена 1 молем идеального газа, в то время как другая свободна от газа. Если открыть заслонку, то газ адиабатно расширится и заполнит весь объём  $V$  сосуда. Известно, что при этом температура газа не изменяется (опыт Джоуля).

На первый взгляд, кажется, что энтропия газа при таком расширении не должна измениться, поскольку от него не отводится и к нему не подводится теплота. Однако это не так. Процесс расширения в описанном опыте - необратимый, и к нему нельзя применять соотношение  $dS = \frac{dQ}{T}$ . При необратимом процессе величина  $\frac{dQ}{T}$  не является дифференциалом какой-либо функции состояния. В частности, интеграл  $\int \frac{dQ}{T}$  не равен изменению энтропии.

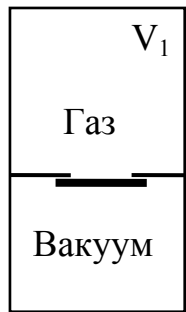


Рисунок 47

В действительности энтропия газа при адиабатном расширении в пустоту изменяется. Чтобы найти это изменение, нужно вычислить изменение энтропии при каком-нибудь обратимом процессе, приводящем к такому же изменению состояния. Таким процессом может быть, например, обратимое изотермическое расширение газа при той же температуре. В § 5.40 мы уже сделали такое вычисление, которое показало, что при изотермическом обратимом расширении 1 моля газа в пустоту изменение энтропии  $\Delta S$  равно (см. формулу (40.15)):

$$\Delta S = R \ln \frac{V}{V_1}. \quad (42.2)$$

Так как  $V > V_1$ , то  $\Delta S > 0$ , т.е. энтропия при расширении газа возрастает.

**Рост энтропии при взаимной диффузии газов.** Если привести в соприкосновение два различных газа, то они сами собой, без всякого внешнего воздействия, перемешаются благодаря взаимной диффузии. Обратный процесс, т.е. разделение газовой смеси на ее компоненты, сам собой не происходит и возможен только при определенном внешнем воздействии. Перемешивание газов – это необратимый процесс, и он должен поэтому сопровождаться ростом энтропии.

Действительно, представим себе, что в сосуде объемом  $V_1$  находится 1 моль некоторого идеального газа. В другом сосуде объемом  $V_2$  содержится 1 моль другого газа. Соединим вместе оба сосуда. Газы тогда смешаются, и образовавшаяся смесь займет объем  $V = V_1 + V_2$ . Этот процесс можно рассматривать как расширение каждого из газов: Первый расширился от объема  $V_1$  до объема  $V$ , второй – от объема  $V_2$  до объема  $V$ . При этом энтропия первого газа, как мы только что видели, изменяется на величину  $R \ln \frac{V}{V_1}$ , второго – на величину  $R \ln \frac{V}{V_2}$ . Общее же изменение энтропии  $\Delta S$  выразится равенством:

$$\Delta S = R \left( \ln \frac{V}{V_1} + \ln \frac{V}{V_2} \right). \quad (42.3)$$

Так как и  $V_1$  и  $V_2$  меньше, чем  $V$ , то  $\Delta S > 0$ , т.е. энтропия системы возросла.

**Энтропия и судьба Вселенной.** В середине XIX в. возникла проблема так называемой **тепловой смерти Вселенной**. Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, Клаузиус свел его содержание к утверждению, что энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что со временем все формы движения должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, т.е. наступит полное тепловое равновесие, и все процессы во Вселенной прекратятся, – наступит **тепловая смерть Вселенной**.

В связи с этой концепцией Больцманом была высказана так называемая **флуктуационная гипотеза**. Больцман не отрицал применимость принципа возрастания энтропии ко всей Вселенной в целом (а такие сомнения высказывались), но он обратил внимание на статистическую природу этого закона. Поэтому отступления от термодинамического равновесия Вселенной – флуктуации – не только возможны, но и неизбежны. Сейчас мы имеем дело с гигантской флуктуацией. Она должна исчезнуть. Тогда наступит тепловая смерть Вселенной. Однако через некоторое время снова возникнет гигантская флуктуация, и Вселенная выйдет из состояния тепловой смерти. Затем опять всё повторится, и так без конца.

В настоящее время установлено, что вывод о «тепловой смерти» Вселенной и первоначальные попытки его опровержения являются несостоятельными, поскольку в них не учитывалось влияние тяготения. Выяснилось, что из-за тяготения однородное изотермическое распределение вещества во Вселенной не соответствует максимуму энтропии, поскольку такое состояние не является наиболее вероятным. Вселенная нестационарна – она расширяется, образуя скопления галактик, сами галактики, звёзды и т.д. Эти процессы происходят с ростом энтропии – в соответствии со вторым началом термодинамики. И ниоткуда не следует, что эти процессы приведут к «тепловой смерти» Вселенной.

**Энтропия Вселенной** – величина, характеризующая степень неупорядоченности и тепловое состояние Вселенной. Количественно оценить полную энтропию Вселенной нельзя, поскольку Вселенная не является термодинамической системой. Кроме того, Вселенная расширяется, т.е. нестационарна. Оба эти факта означают, что Вселенная не удовлетворяет исходным аксиомам термодинамики об аддитивности энергии и существованию термодинамического равновесия. Поэтому Вселенная как целое не характеризуется и какой-либо одной температурой.

Выше были охарактеризованы некоторые свойства энтропии. Более глубокий смысл энтропии вскрывается в **статистической физике**, энтропия служит мерой термодинамической вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния системы. **Термодинамическая вероятность  $\Omega$**  состояния системы – это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществ-



ляющих данное макросостояние (по определению,  $\Omega \geq 1$ , т.е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле, последняя  $\leq 1$ ).

Согласно Больцману (1872), энтропия  $S$  определяется логарифмом числа микросостояний, посредством которых реализуется рассматриваемое макросостояние, т.е.

$$S = k \cdot \ln \Omega, \quad (42.4)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Это равенство называется **формулой Больцмана**.

Эта формула справедлива не только для идеального газа. Прежде всего, ясно, что число микросостояний, посредством которых осуществляется макросостояние, является важнейшей функцией состояния. Поскольку понятие числа микросостояний применимо не только к идеальному газу и равновесным состояниям, но и к произвольным статистическим системам, то естественно заключение, что формула Больцмана имеет общее значение.

Формула (42.4) позволяет дать энтропии очень наглядное толкование. **Чем более сильно упорядочена система, тем меньше число микросостояний, которыми осуществляется макросостояние.** Допустим, например, что все атомы закреплены в определенных местах. Тогда существует только одно микросостояние, а соответствующая ему энтропия равна нулю. Чем больше число микросостояний, тем больше разупорядочена система. Поэтому можно сказать, что энтропия является мерой упорядоченности системы. В состоянии равновесия энтропия достигает своего максимального значения, поскольку равновесие есть наиболее вероятное состояние, совместимое с фиксированными условиями и, следовательно, является макросостоянием, осуществляемым посредством максимального числа микросостояний. Очевидно, что **система, предоставленная самой себе, движется в направлении равновесного состояния, т.е. энтропия должна возрастать в предоставленной самой себе системе.** Это одна из формулировок второго начала термодинамики

Из необратимости реальных процессов следует, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии – **принцип возрастания энтропии**. При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор, пока вероятность состояния не станет максимальной.

Энтропия системы в каком-либо обратимом процессе изменяется под влиянием внешних условий, воздействующих на систему. Механизм воздействия внешних условий на энтропию состоит в следующем. Внешние условия определяют микросостояния, доступные системе, и их число. В пределах доступных для нее микросостояний система достигает равновесного состояния, а энтропия – соответствующего значения. В результате значение энтропии следует за изменением внешних условий, достигая максимального значения, совместимого с внешними условиями.

## § 5.43 Второе начало термодинамики и превращение теплоты в работу

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не осуществляются. Появление второго начала термодинамики – необходимость дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет, – определяет направление развития процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса (см. § 5.40), **второе начало термодинамики** можно сформулировать как **закон возрастания энтропии** замкнутой системы при необратимых процессах: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.

Можно дать более краткую формулировку **второго начала** термодинамики: в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает. Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрасти, оставаться постоянной). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

1) **по Кельвину**: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу. На первый взгляд может показаться, что такой формулировке противоречит, например, процесс изотермического расширения идеального газа. Действительно, вся полученная идеальным газом от какого-то тела теплота превращается полностью в работу. Однако получение теплоты и превращение ее в работу – не единственный конечный результат процесса; кроме того, в результате процесса происходит изменение объема газа. В тепловой машине превращение теплоты в работу обязательно сопровождается дополнительным процессом – передачей некоторого количества теплоты  $Q_2$  более холодному телу, вследствие чего получаемое от более нагретого тела количество теплоты  $Q_1$  не может быть превращено полностью в работу.

2) **по Клаузиусу**: невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Не следует представлять дело так, что второе начало вообще запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. В холодильной машине как раз совершается такой переход. Однако этот переход не является единственным результатом процесса. Он сопровождается изменениями в окружающих телах, связанных с совершением над системой работы  $A'$ .

Легко убедиться в том, что утверждение, содержащееся в формулировке Кельвина, логически вытекает из утверждения, заключающегося в формулировке Клаузиуса. В самом деле, работа может быть полностью превращена в теплоту, например, при посредстве трения. Поэтому, превратив с помощью процесса, запрещенного формулировкой Кельвина, теплоту, отнятую от какого-

нибудь тела, полностью в работу, а затем, превратив эту работу при посредстве трения в теплоту, сообщаемую другому телу с более высокой температурой, мы осуществили бы процесс, невозможный согласно формулировке Клаузиуса. Отсюда следует эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса. Кроме того, показано, что если в замкнутой системе провести воображаемый процесс, противоречащий второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса, то он сопровождается уменьшением энтропии. Это же доказывает эквивалентность формулировки Клаузиуса (а, следовательно, и Кельвина) и статистической формулировки, согласно которой энтропия замкнутой системы не может убывать.

Когда механическая энергия переходит в теплоту, то этот процесс идёт очень просто: вся механическая энергия целиком превращается в теплоту. Обратный процесс получения механической работы за счёт теплоты, производится в тепловой машине. Даже у наилучшей из мыслимых тепловых машин, т.е. работающей по циклу Карно, коэффициент полезного действия всегда меньше единицы (см. (38.12)):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Таким образом, возможности непрерывного (циклического) получения работы за счёт теплоты определённым образом ограничены в том смысле, что тепло, заимствованное у источника, не может быть целиком превращено в работу. Возможность получать работу за счёт тепла оплачивается в виде бесполезно теряемого тепла, отдаваемого холодильнику.

Легко убедиться в том, что именно **второе начало** термодинамики накладывает эти ограничения.

Пусть имеется сосуд с идеальным газом. Допустим сначала, что второе начало термодинамики не действует. Это значит, что молекулы газа могут распределиться по всему объёму сосуда, но могут и собраться в какой-нибудь малой его части (ни законы механики, ни первое начало термодинамики этому не препятствуют).

Уловив момент, когда газ сам соберётся в части объёма сосуда и окажется, таким образом, сжатым, мы можем отделить его от остальной части сосуда заслонкой в виде поршня. Затем, дав газу возможность расшириться, мы заставим его совершить работу по перемещению поршня. Чтобы газ при этом не охладился, мы обеспечим ему тепловой контакт с окружающей средой, из которой он будет черпать теплоту (расширение, следовательно, изотермическое).

После того как газ совершил первый раз работу, можно подождать, пока он снова соберётся в части сосуда (если, как мы предположили, второе начало термодинамики не действует, наше ожидание не должно быть напрасным), и снова дать ему возможность расшириться и совершить работу. Такие циклы можно повторять сколько угодно раз.

На этом принципе можно, значит, построить циклически действующую машину, единственным результатом действия которой является производство

работы и охлаждение теплового резервуара, т.е. по существу она является «вечным двигателем». Но этот двигатель не противоречит закону сохранения энергии. Ведь работа здесь совершается не «из ничего», а за счёт тепла, которое газ заимствует от окружающей среды. Поскольку запасы энергии в атмосфере, в водах морей и океанов, в земной коре можно считать неисчерпаемыми, такая машина практически не отличалась бы от вечного двигателя.

Описанная гипотетическая тепловая машина, действие которой заключается только в том, что в ней за счёт теплоты совершается механическая работа, называется **вечным двигателем второго рода**, в отличие от **вечного двигателя первого рода**, в котором, в нарушение закона сохранения энергии, создаётся больше работы, чем потрачено энергии. Коэффициент полезного действия этой машины был бы равен единице, так как при изотермическом процессе расширения идеального газа  $dA = dQ$ .

В действительности, однако, такая машина действовать не может, так как мы напрасно будем ожидать, чтобы молекулы газа сами собой собрались в части объёма сосуда: такая самопроизвольная концентрация молекул сопровождается уменьшением энтропии и поэтому невозможна. Заметим, что здесь идёт речь о невозможности циклической машины, всё время повторяющей превращения тепла в работу. Это очень важно потому, что однократное такое превращение вполне возможно – оно не противоречит ни первому, ни второму началам термодинамики.

Иногда второе начало термодинамики даже формулируют в виде утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода, подобно тому, как первое начало можно выразить в форме утверждения о невозможности вечного двигателя первого рода.

Второе начало термодинамики даёт ответ и на вопрос о том, что требуется для того, чтобы циклическая тепловая машина **могла** действовать.

Мы не можем просто отнимать с помощью рабочего тела тепло от источника (нагревателя) и превращать это тепло в работу, потому что такой процесс сопровождается уменьшением энтропии нагревателя (рабочее тело совершает круговой процесс и его энтропия остаётся неизменной). Значит, нужно иметь систему, состоящую не из двух тел – нагревателя и рабочего тела, а из трёх, причём роль третьего тела должна заключаться в том, чтобы его энтропия увеличивалась бы, по крайней мере, на такую величину, на какую уменьшается энтропия нагревателя в результате отнятия от него тепла ( $dS = dQ/T$ ). Для того, чтобы энтропия третьего тела увеличилась, ему надо передать часть теплоты, взятой у нагревателя. Этим третьим телом и является холодильник. Так как его температура ниже, то и теплоты ему нужно передать меньше, чем отнято у нагревателя, так что часть этой теплоты может быть превращена в работу. При этих условиях энтропия системы «нагреватель – рабочее тело – холодильник» остаётся постоянной, что уже допускается вторым началом термодинамики, запрещающим лишь процессы с уменьшением энтропии.

Отсюда и следует, что принципиально нельзя с помощью циклически действующей машины превратить в работу всю теплоту, полученную рабочим телом от нагревателя. Часть ее мы непременно должны передать холодильнику.

Это и есть та цена, которую нужно уплатить за то, чтобы другая часть тепла превращалась в работу.

Мы здесь рассмотрели случай, когда холодильнику передаётся такое количество теплоты, которое увеличивает его энтропию как раз на столько, чтобы скомпенсировать уменьшение энтропии нагревателя. Ясно, что это есть то минимальное количество теряемой теплоты, без которой машина вообще не может работать. Энтропия при этом остаётся постоянной, а в работу превращается максимальная доля полученной от нагревателя теплоты, так что коэффициент полезного действия машины будет максимальным. Мы уже знаем, что постоянство энтропии соответствует обратимому процессу. Вот почему идеальная машина с максимальным КПД должна быть обратимой. Именно поэтому при описании цикла Карно обращалось внимание на то, что при его проведении не происходят необратимые процессы теплопроводности, а расширения и сжатия производятся обратимым путём.

В действительности в реальной машине нельзя обеспечить вполне обратимые процессы на всех стадиях цикла. Поэтому энтропия не будет оставаться постоянной, а будет расти. Это, в свою очередь, означает, что в реальной машине холодильнику придётся передать больше тепла, чем то, которое определяется равенством  $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ .

Следовательно, в этом случае большая, чем в обратимой машине часть теплоты, полученной от нагревателя, станет недоступной для превращения в работу, и КПД машины будет меньше, чем КПД, рассчитанный для обратимого цикла Карно.

Увеличение энтропии вообще означает, что теплота становится **менее доступной для преобразования ее в механическую работу**. Рост энтропии приводит как бы к обесценению тепловой энергии, к сокращению возможности получать за ее счёт работу. С этой точки зрения второе начало термодинамики можно рассматривать как утверждение о том, что в любой замкнутой системе всякий процесс (необратимый!) протекает так, что количество энергии, способной к превращению в работу, уменьшается, стремясь к нулю при равновесии.

С энтропией связана и **свободная энергия**, представляющая собой ту часть энергии, которая при изотермическом процессе ( $dT = 0$ ) может быть превращена в механическую работу.

Напишем уравнение закона сохранения энергии:

$$dQ = dU + dA.$$

Так как  $dS = dQ/T$ , то  $dQ = TdS$ , и наше уравнение принимает вид:

$$dU = TdS - dA. \quad (43.1)$$

Из равенства (43.1) следует, что

$$-dA = dU - TdS = d(U - TS), \quad \text{или} \quad dA = -d(U - TS)$$



(так как  $T = \text{const}$ , то  $SdT = 0$ ).

Последнее равенство показывает, что работа  $dA$  при изотермическом процессе равна изменению некоторой функции  $U - TS$ , которая и представляет собой, очевидно, **свободную энергию** системы  $F$ :

$$F = U - TS. \quad (43.2)$$

Свободная энергия, т.е. энергия, способная дать механическую работу, равна, следовательно, внутренней энергии  $U$  за вычетом величины  $TS$ . Ясно, что  $TS$  представляет собой ту часть энергии, которая не может быть превращена в работу, и она тем больше, чем больше энтропия. Поэтому величину  $TS$  иногда называют **связанной энергией**.

Второе начало термодинамики устанавливает, что необратимые процессы (а такими являются практически все тепловые процессы и, во всяком случае, все естественно протекающие процессы) идут так, что энтропия системы тел, участвующих в процессе, растёт, стремясь к максимальному значению. Максимальное значение энтропии достигается тогда, когда система приходит в состояние равновесия.

Вместе с тем, сама необратимость тепловых процессов связана с тем, что переход к равновесному состоянию является подавляюще более вероятным по сравнению со всеми другими переходами. Поэтому и наблюдаются только те изменения состояния, при которых система переходит из менее вероятного в более вероятное состояние. Бросается в глаза сходство поведения обеих величин – энтропии и вероятности: обе они растут при переходе к равновесию.

С учётом сказанного можно несколько иначе трактовать второе начало термодинамики. Оно теперь означает, что всякий процесс в природе протекает так, что система переходит в состояние, вероятность которого больше. Вместе с тем утверждение, содержащееся во втором начале, теряет свою категоричность. Ведь тот факт, что всякий сам собой идущий процесс ведёт к состоянию с большей вероятностью, не означает, что другое направление процесса невозможно. Он только означает, что переход к равновесию лишь более вероятен, чем самопроизвольное удаление от равновесного состояния. Поэтому второе начало на самом деле надо понимать так, что если система находится в каком-то состоянии с данной энтропией, то с подавляющей вероятностью следует ожидать, что она перейдёт в состояние с большей энтропией, т.е. что **наиболее вероятным изменением энтропии является ее возрастание**. Принципиально же мыслимы и процессы, сопровождающиеся уменьшением энтропии.

Следует здесь напомнить, что флуктуации, о которых мы не раз упоминали, представляют собой такие изменения состояния, которые сопровождаются уменьшением энтропии (и, конечно, вероятности). Но эти малые отклонения от равновесного состояния не противоречат второму началу. Они являются неизбежным следствием именно вероятностного характера энтропии.

## § 5.44 Теплоёмкость неидеальных газов

Мы видели (§ 2.12, § 2.13), что для **идеальных** газов молярная (или удельная) теплоёмкость не зависит ни от температуры, ни от объёма, занимаемого газом. Это связано с тем, что внутренняя энергия  $U$  идеального газа не зависит от объёма, занимаемого молекул (или единицей массы) этого газа, т.е. от плотности, и определяется только температурой. Но это верно только для идеального газа. Для неидеального газа, как и вообще для любого тела, внутренняя энергия  $U$  может зависеть не только от температуры, но и от объёма, занимаемого данной массой газа (см. § 5.40). Это связано с тем, что в неидеальных газах внутренняя энергия складывается из **кинетической** энергии молекул, зависящей от температуры, и **потенциальной** энергии, которая, конечно, зависит от взаимного расстояния между молекулами, т.е. от плотности.

Следовательно, для неидеальных газов внутренняя энергия  $U$  одного моля является функцией температуры  $T$  и занимаемого им объёма  $V$ :

$$U = U(T, V).$$

В этом случае молярная теплоёмкость

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad (44.1)$$

уже не может быть выражена простыми формулами (13.3), (13.5) или (14.3), (14.4).

Вычислим теплоёмкость неидеального газа. Подставим в (44.1) вместо  $dQ$  выражение согласно первому началу термодинамики  $dQ = dU + PdV$ , тогда

$$C = \frac{dU + PdV}{dT}.$$

Но теперь изменение внутренней энергии  $dU$  складывается из двух частей: 1) части, зависящей только от изменения температуры при неизменном объёме, которую мы обозначим  $(dU)_V$ , и 2) части  $(dU)_T$ , зависящей только от изменения объёма при неизменной температуре. Очевидно, что

$$(dU)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT,$$

где  $\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  — это изменение внутренней энергии, приходящееся на единицу изменения температуры при постоянном объёме.

Точно так же

$$(dU)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Следовательно,

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV.$$

Соответственно, теплоёмкость  $C$

$$C = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{dV}{dT}. \quad (44.2)$$

Выражение (44.2) для теплоёмкости является общим, пригодным для всех изотропных тел. Оно отличается от полученного ранее выражения для теплоёмкости идеальных газов (13.3) тем, что в него входит слагаемым величина  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \frac{dV}{dT}$ , которая для идеального газа равна нулю, так как  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$ . Для теплоёмкости при постоянном объёме  $C_V$  из (41.2) получается известное уже выражение:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad (dV = 0).$$

Теплоёмкость же при постоянном давлении

$$C_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = C_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P. \quad (44.3)$$

Все величины, входящие в правую часть (44.3), могут быть измерены на опыте, кроме величины  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$ , которая на опыте не измеряется.

Однако, согласно (40.16)

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P.$$

Подставив это выражение в (44.3), получаем:



$$C_P = C_V + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad (44.4)$$

и соответственно

$$C_P - C_V = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Как и следовало ожидать, для идеального газа

$$T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = R.$$

что непосредственно следует из уравнения  $PV = RT$ . Для **неидеальных** газов разность  $C_P - C_V$  может существенно отличаться от  $R$ .

### § 5.45 Термодинамическая шкала температур

В гл. 1, рассматривая способы измерения температуры, мы отмечали, что при таких измерениях возникает серьёзное затруднение. Оно заключается в том, что температурные шкалы, устанавливаемые с помощью различных термометрических тел, не совпадают друг с другом.

Сейчас мы, однако, познакомимся с одним свойством, которое совершенно не зависит от рода вещества и которое поэтому может служить безупречным термометрическим свойством для установления температурной шкалы. Свойство это состоит в том, что любое вещество, если его использовать в качестве рабочего тела в обратимой тепловой машине, даёт один и тот же коэффициент полезного действия (разумеется, при одних и тех же температурах нагревателя и холодильника).

Если рабочее тело, каково бы оно ни было, поглощает при температуре  $T_1$  теплоту  $Q_1$  и отдаёт холодильнику при температуре  $T_2$  теплоту  $Q_2$ , то справедливо соотношение (см. (38.11)):

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (45.1)$$

Последнее соотношение, справедливое для любого вещества, позволяет использовать машину Карно в качестве своеобразного термометра. Правда, этот «термометр» позволяет определить лишь отношение двух температур  $T_1$  и  $T_2$ , а не сами температуры. Но если условиться о том, чтобы одной из этих температур приписать определённое численное значение или выбрать тем или иным образом размер градуса, то тем самым будет определён и искомая температу-

ра<sup>4</sup>. Таким образом, будет установлена температурная шкала, не зависящая от рода вещества, т.е. шкала, физически безупречная.

Поясним примером способ измерения температуры таким необычным «термометром». Пусть требуется измерить температуру  $T$  некоторого тела, причём никаких термометров, кроме машины Карно, в нашем распоряжении нет.

Возьмём в качестве нагревателя в машине Карно резервуар тепла при температуре кипения воды (измерять эту температуру мы, разумеется, не будем, так как у нас нет термометра для этой цели), а в качестве холодильника – резервуар тепла при температуре тающего льда (которую мы по той же причине также не станем измерять). Условимся ещё, что разность температур между нагревателем и холодильником мы разделим на 100 частей (градусов); мы могли бы выбрать и любое другое число, так же как и любые другие резервуары тепла. Кроме машины Карно нам потребуется ещё калориметр для измерения количеств теплоты  $Q_1$  и  $Q_2$ . Ведь в «термометре» Карно термометрическая задача превращается в калориметрическую!

Проведём теперь обратимый цикл Карно между выбранными нами нагревателем и холодильником, используя любое рабочее тело (ведь от него ничего не зависит), и измерим количество теплоты  $Q_{\text{нагр}}$ , полученное от нагревателя, и количество теплоты  $Q_{\text{хол}}$ , отданное холодильнику. Обозначим через  $T_{\text{нагр}}$ ,  $T_{\text{хол}}$  и  $T$  температуры (пока неизвестные) кипящей воды, тающего льда и исследуемого тела. Тогда мы можем написать:

$$\frac{Q_{\text{нагр}}}{Q_{\text{хол}}} = \frac{T_{\text{нагр}}}{T_{\text{хол}}}. \quad (45.2)$$

Затем проведём ещё раз цикл Карно, но с исследуемым телом в качестве холодильника и с прежним нагревателем, или, наоборот, с прежним холодильником, но с исследуемым телом в качестве нагревателя. Измерив опять теплоту, полученную от нагревателя  $Q_{\text{нагр}}$ , которая останется такой же, как и в первом опыте, и теплоту  $Q_{\text{хол}}$ , отданное холодильнику, мы опять сможем написать соотношение

$$\frac{Q_{\text{нагр}}}{Q_{\text{хол}}} = \frac{T_{\text{нагр}}}{T}. \quad (45.3)$$

Мы имеем, таким образом, два уравнения (45.2) и (45.3) для определения трёх величин  $T_{\text{нагр}}$ ,  $T_{\text{хол}}$  и  $T$ . Но мы можем, кроме того, написать третье уравнение, определяющее размер градуса:

$$T_{\text{нагр}} - T_{\text{хол}} = 100.$$

---

<sup>4</sup> По решению X Генеральной конференции по мерам и весам 1954 года температурой, которой приписывается определённое численное значение, является температура тройной точки воды. Она считается равной 273,16 К.

Этих трёх уравнений достаточно для определения искомой температуры  $T$  и величин  $T_{\text{нагр}}$  и  $T_{\text{хол}}$ .

Остаётся ещё добавить, что мы могли бы пустить нашу тепловую машину и в обратном направлении, так, чтобы она работала как холодильная машина. Тогда нам пришлось бы измерять количество тепла, переданное от холодильника к нагревателю, и величину внешней работы, потраченной на это.

Конечно, никто и никогда не измерял температуру таким необычным способом, к тому же и технически невыполнимым. Но в этом и нет нужды, потому что установленную с помощью машины Карно температурную шкалу можно воспроизвести, используя какое-нибудь конкретное вещество с хорошо известными свойствами. Таким веществом является, например, идеальный газ, для которого точно известно уравнение состояния. Как было показано, формула (45.1) получается, если использовать идеальный газ в качестве рабочего тела в машине Карно. Можно показать, что температуры, измеренные по шкале газового термометра, где температура получается из формулы

$$T = \frac{PV}{R},$$

в точности совпадает с температурой, которая была бы получена, если бы был проведён описанный выше опыт.

Заметим, что температурная шкала, основанная на свойствах обратимой машины Карно, называется **термодинамической шкалой температур**. Она была предложена Кельвином и поэтому выраженные в этой шкале температуры измеряются в кельвинах.

Что касается нуля термодинамической шкалы, то из формулы (38.12) видно, что нулём должна служить температура, при которой  $Q_2 = 0$ . В этом случае коэффициент полезного действия машины Карно равен единице, и, следовательно, более низкой температуры быть не может, так как КПД не может превышать единицу.

Поскольку термодинамическая шкала температур совпадает со шкалой идеального газа, то и нуль шкалы Кельвина совпадает с абсолютным нулём температуры, определённым нами ранее. Следует впрочем, заметить, что согласно второму началу термодинамики коэффициент полезного действия тепловой машины никогда не может быть равен единице: количество теплоты, полученной от нагревателя, не может быть целиком преобразовано в механическую работу. Поэтому и абсолютный нуль температуры не может быть достигнут.

## § 5.46 Третье начало термодинамики

Многочисленные опыты показывают, что с понижением температуры во всякой системе наблюдается тенденция ко всё большей степени упорядоченности. На это указывают исследования строения тел, магнитные их свойства и многие другие данные. Можно полагать, что упорядоченное состояние отвечает

меньшей энергии частиц, образующих тело, но что установлению порядка при высоких температурах препятствует тепловое движение. Если бы можно было охладить тело до абсолютного нуля, когда тепловые движения не могут мешать установлению порядка, то в системе установился бы максимальный мыслимый порядок, и этому состоянию соответствовала бы минимальная энтропия.

Возникает, однако, вопрос: как бы вело себя тело при абсолютном нуле, если бы над ним совершалась внешняя работа (например, было бы приложено давление)? Может ли изменяться энтропия тела, находящегося при абсолютном нуле?

На основании многих опытов, проводившихся при низких температурах, можно было сделать важный вывод, который формулируется в следующем виде (Нернст, 1906 г.): **при абсолютном нуле температуры любые изменения состояния происходят без изменения энтропии.**

Это утверждение обычно называют **теоремой Нернста**. Иногда его возводят в ранг **третьего начала термодинамики**.

Как мы видели выше, вероятностная трактовка понятия энтропии позволяет сделать вывод о том, что энтропия при абсолютном нуле температуры равна нулю, что, конечно, не противоречит формулировке Нернста.

Из того факта, что при  $T = 0$  и энтропия равна нулю, следует, что абсолютный нуль принципиально недостижим, так как нетрудно показать, что если бы существовало тело с температурой, равной нулю, то можно было бы построить вечный двигатель второго рода, что не противоречит второму началу термодинамики. Иногда третье начало термодинамики и формулируют как **принцип недостижимости абсолютного нуля**.

Из третьего начала термодинамики следуют важные выводы о поведении вещества при очень низких температурах. Так, например, из него вытекает, что с понижением температуры теплоёмкость тел должна стремиться к нулю вместе с температурой, а при абсолютном нуле она должна быть равна нулю. Опыт хорошо подтверждает эту тенденцию. Можно показать, что должны стремиться к нулю (а при  $T = 0$  стать равными нулю) коэффициент теплового расширения тел, коэффициент сжимаемости и т.д. Всё это, впрочем, относится к системам, находящимся в равновесном состоянии, энтропия при абсолютном нуле может и отличаться от нуля.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Объясните неэквивалентность понятий – бесконечно медленный и обратимый процессы?
- 2 Проанализируйте соотношение между равновесными и неравновесными, обратимыми и необратимыми процессами.
- 3 Что понимают под флуктуациями? релаксацией? квазистатическим процессом?
- 4 Какой процесс называют циклическим? Чему равна работа, совершённая за цикл?
- 5 Проанализируйте прямой и обратный циклы.

6 Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?

7 Что может служить мерой необратимости процессов, протекающих в системе?

8 Возможен ли процесс, при котором теплота, взятая от нагревателя, полностью преобразуется в работу?

9 Объясните принцип работы холодильной машины (или нагревателя).

10 Дайте понятие энтропии (определение, размерность и математическое выражение изменения энтропии для различных процессов) для идеального газа.

11 В каком направлении может изменяться энтропия замкнутой системы (незамкнутой системы) при любом обратимом процессе?

12 Чем обусловлено неубывание энтропии в изолированной системе?

13 Изобразите в системе координат T-S изотермический и адиабатный процессы.

14 Возможна ли «тепловая смерть Вселенной»?

15 Что понимают под свободной энергией? связанной энергией?

16 Как может изменяться энтропия в изолированных (неизолированных) системах в зависимости от характера процесса (на примере идеального газа)?

17 Сформулируйте принцип Карно; первую и вторую теорему Карно.

18 Представив цикл Карно на диаграмме в координатах P-V, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершённая над газом; 2) работа, совершённая самим расширяющимся газом.

19 Представьте графически цикл Карно в переменных T-S.

20 Чем обуславливается максимальность КПД обратимой машины, работающей по циклу Карно?

21 В каком случае КПД цикла Карно повышается больше – при увеличении температуры нагревателя на  $\Delta T$  или при уменьшении температуры холодильника на такую же величину?

22 Дайте различные формулировки второго начала термодинамики и докажите их эквивалентность.

23 Как можно рассчитывать теплоёмкость неидеальных газов?

24 Что представляет собой термодинамическая шкала температур?

25 Сформулируйте теорему Нернста (третье начало термодинамики).

## Тесты

1. В некоторой температурной области энтропия термодинамической системы изменяется с температурой по закону:  $S = a + bT$ , где  $a$  – константа,  $b = 5 \text{ Дж/К}^2$ . Какое количество теплоты  $Q$  получает система при обратимом нагревании в этой области от  $T_1 = 290 \text{ К}$  до  $T_2 = 310 \text{ К}$ ?

А) 60 кДж      В) 50 кДж      С) 40 кДж      **Д) 30 кДж**      Е) 20 кДж

2. В ходе обратимого изотермического процесса, протекающего при температуре  $T = 350 \text{ К}$ , тело совершает работу  $A = 80 \text{ Дж}$ , а внутренняя энергия те-

ла получает приращение  $\Delta U = 7,5$  Дж. Какое приращение получает энтропия тела?

- А) 0,25 Дж/К    В) 2,5 Дж/К    С) 25 Дж/К    Д) 0,10 Дж/К    Е) 0,20 Дж/К

3. В ограниченном интервале температур приращение энтропии некоторого вещества оказывается пропорциональным приращению температуры:  $\Delta S = \alpha \Delta T$ . Как зависит от температуры теплоёмкость  $C$  вещества в том же интервале?

- А)  $C = \alpha T^2$     В)  $C = \alpha/T^2$     С)  $C = \alpha^2 T$     Д)  $C = \alpha/T$     Е)  $C = \alpha T$

4. Теплоёмкость тел с простыми кристаллическими решётками изменяется вблизи абсолютного нуля по закону:  $C = \alpha T^3$ , где  $\alpha$  – константа. Определите энтропию  $S$  тела при этих условиях.

- А)  $S = C$     В)  $S = 3C$     С)  $S = C/3$     Д)  $S = C/4$     Е)  $S = 4C$

5. 1 г кислорода первоначально заключён в объёме  $V_1 = 0,2$  л под давлением  $P_1 = 500$  Па. Затем газ расширился, в результате чего объём газа стал равным  $V_2 = 0,5$  л, а давление стало равным  $P_2 = 200$  Па. Считая газ идеальным, определить приращение энтропии газа  $\Delta S$ .

- А) 0,36 Дж/К    В) 0,24 Дж/К    С) 0,12 Дж/К    Д) 0,48 Дж/К    Е) 0,72 Дж/К

6. 1 г кислорода первоначально заключён в объёме  $V_1 = 0,2$  л под давлением  $P_1 = 500$  Па. Затем газ расширился, в результате чего объём газа стал равным  $V_2 = 0,5$  л, а давление стало равным  $P_2 = 200$  Па. Считая газ идеальным, определить приращение внутренней энергии газа  $\Delta U$ .

- А) 0,1 Дж    В) 0,2 Дж    С) 0 Дж    Д) 1 Дж    Е) 2 Дж

7. Сосуд разделён на две равные части перегородкой с закрытым пробкой отверстием. В одной из половин сосуда содержится моль идеального газа, в другой половине сосуда – вакуум. Пробку удаляют, и газ распространяется на весь объём. Считая процесс адиабатическим, определить приращение энтропии газа  $\Delta S$ .

- А) 0    В)  $R \ln 2$     С)  $R$     Д)  $R/2$     Е)  $2R$

8. Некоторый идеальный газ совершает при температуре  $T = 300$  К обратимый изотермический процесс, в ходе которого над газом совершается работа  $A' = -900$  Дж. Найти приращение энтропии  $\Delta S$  газа.

- А) 3 Дж/К    В) - 3 Дж/К    С) 2 Дж/К    Д) - 2 Дж/К    Е) 9 Дж/К

9. Некоторый идеальный газ совершает при температуре  $T = 300 \text{ К}$  обратимый изотермический процесс, в ходе которого над газом совершается работа  $A' = -900 \text{ Дж}$ . Найти приращение свободной энергии  $\Delta F$  газа.

- А) 900 Дж      В) 600 Дж      С) - 300 Дж      **Д) - 900 Дж**      Е) - 600 Дж

10. В ходе цикла Карно рабочее тело получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1 = 300 \text{ кДж}$ . Температуры нагревателя и холодильника равны соответственно  $T_1 = 450 \text{ К}$  и  $T_2 = 280 \text{ К}$ . Определите работу  $A$ , совершаемую рабочим телом за цикл.

- А) 75 кДж      В) 78 кДж      С) 87 кДж      Д) 93 кДж      **Е) 113 кДж**

11. В результате кругового процесса газ совершил работу 2 кДж и передал холодильнику количество теплоты 8,4 кДж. Определите КПД цикла.

- А) 13 %      В) 15 %      С) 17 %      **Д) 19 %**      Е) 21 %

12. Тепловую машину, работающую по циклу Карно с КПД  $\eta = 20 \%$ , используют при тех же условиях как холодильную машину. Найдите ее холодильный коэффициент  $\xi_1$ .

- А) 6      В) 5      **С) 4**      Д) 3      Е) 2

13. Домашний холодильник потребляет ток средней мощностью 40 Вт. Какое количество теплоты выделится в комнате за сутки, если холодильный коэффициент  $\xi_1 = 9$ ?

- А) 35 МДж**      В) 30 МДж      С) 25 МДж      Д) 20 МДж      Е) 15 МДж

14. Газ, совершающий цикл Карно, КПД которого 25 %, при изотермическом расширении производит работу 240 Дж. Какова работа, совершаемая газом при изотермическом сжатии?

- А) - 150 Дж      **В) - 180 Дж**      С) - 120 Дж      Д) - 160 Дж      Е) - 140 Дж

15. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причём наибольшее давление в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объём в 5 раз больше наименьшего. Определите КПД цикла.

- А) 13 %      В) 15 %      **С) 17 %**      Д) 19 %      Е) 21 %

16. До какой температуры нужно довести кислород массой 4 кг, находящийся при температуре  $227 \text{ }^\circ\text{С}$ , не меняя его объёма, чтобы уменьшить энтропию кислорода на  $1,31 \text{ кДж/К}$ ?



А) 302 К      В) 302 К      С) 302 К      Д) 302 К      Е) 302 К

17. Гелий в количестве 1 моль, изобарно расширяясь, увеличил свой объём в 4 раза. Найдите приращение энтропии при этом расширении.

А) 59 Дж/К      В) 49 Дж/К      С) 39 Дж/К      Д) 29 Дж/К      Е) 19 Дж/К

18. Тепловой двигатель имеет полезную мощность 2 кВт. Какое количество теплоты получает двигатель за время 1 ч, если его КПД  $\eta = 12\%$ ?

А) 60 МДж      В) 60 МДж      С) 60 МДж      Д) 60 МДж      Е) 60 МДж

19. КПД цикла Карно  $\eta = 1/4$ . Во сколько раз нужно увеличить температуру нагревателя (оставляя неизменной температуру холодильника), чтобы КПД увеличился вдвое?

А) 3/2      В) 4/3      С) 5/4      Д) 5/3      Е) 5/2

20. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего тела работает по циклу Карно, т.е. имеет максимально возможный КПД. Температура нагревателя  $T_1 = 600$  К, температура холодильника  $T_2 = 300$  К. Работа, совершаемая газом при изотермическом расширении,  $A_1 = 200$  Дж. Найдите теплоту, которая отдаётся холодильнику за цикл.

А) 75 Дж      В) 80 Дж      С) 140 Дж      Д) 120 Дж      Е) 100 Дж

21. Три четверти теплоты, полученной от нагревателя при осуществлении цикла Карно, передаётся холодильнику. Температура нагревателя  $T_1 = 400$  К. Найдите температуру холодильника.

А) 150 К      В) 180 К      С) 200 К      Д) 250 К      Е) 300 К

22. Найдите работу на участке изотермического расширения рабочего тела теплового двигателя, работающего по циклу Карно, если коэффициент полезного действия равен  $\eta = 80\%$ , а количество теплоты, отдаваемое за цикл холодильнику,  $Q_2 = 2$  Дж.

А) 6 Дж      В) 5 Дж      С) 4 Дж      Д) 3 Дж      Е) 2 Дж

23. КПД идеальной тепловой машины  $\eta = 0,25$ . Машина работает по обратному циклу (как холодильная машина). Какое максимальное количество тепла можно забрать из холодильника, совершив работу  $A = 10$  Дж?

А) 15 Дж      В) 20 Дж      С) 25 Дж      Д) 30 Дж      Е) 40 Дж

24. КПД идеальной тепловой машины  $\eta = 0,25$ . Машина работает по обратному циклу (как холодильная машина). Чему равен холодильный коэффициент машины  $\xi_1$ ?

- А) 2                      В) 2,5                      **С) 3**                      Д) 4                      Е) 5

25. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу Карно, отнимает от охлаждаемого тела с температурой  $t_1 = -10^\circ\text{C}$  количество теплоты  $Q_2 = 28$  кДж и передаёт телу с температурой  $t_2 = 17^\circ\text{C}$ . Определите количество теплоты, переданное нагретому телу за цикл.

- А) 31 кДж**              В) 33 кДж              С) 35 кДж              Д) 37 кДж              Е) 39 кДж

### Упражнения для самоконтроля

5.1. Идеальный газ количеством вещества  $\nu = 2$  моль сначала изобарно нагрели так, что его объём увеличился в  $n = 2$  раза, а затем изохорно охладили так, что давление газа уменьшилось в  $n = 2$  раза. Определить приращение энтропии в ходе указанных процессов. [11,5 Дж/К]

5.2. Тепловая машина, совершая обратимый цикл Карно, за один цикл совершает работу 1 кДж. Температура нагревателя 400 К, а холодильника 300 К. Определить: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за цикл; 3) количество теплоты, отданное холодильнику за цикл. [1) 25 %; 2) 4 кДж; 3) 3 кДж]

5.3. Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,3. Определить работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 300 Дж. [-210 Дж]

5.4. Круговой процесс на диаграмме T-S изображается эллипсом, показанным на рисунке 48. Используя данные, приведённые на рисунке, определите работу  $A$ , совершаемую рабочим телом за цикл. [47 кДж]

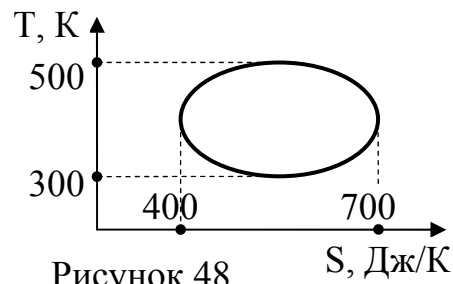


Рисунок 48

5.5. Найти приращение энтропии  $\Delta S$  при превращении массы  $m = 200$  г льда, находившегося при температуре  $t_1 = -10,7^\circ\text{C}$ , в воду при  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ . Теплоёмкость льда считать не зависящей от температуры. Температуру плавления принять равной 273 К. [ $\Delta S = m(\ln(T_2/T_1) + \lambda_{\text{плавл}}/T_2) = 261$  Дж/К]

5.6. Сосуд разделён на две равные части перегородкой с закрытым пробкой отверстием. В одной из половин сосуда содержится моль идеального газа, в другой половине сосуда – вакуум. Пробку удаляют, и газ распространяется на весь объём. Считая процесс адиабатическим, определить приращение внутренней энергии газа  $\Delta U$ . [ $\Delta U = 0$ ]

5.7. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу Карно, отнимает от охлаждаемого тела с температурой  $t_1 = -10^\circ\text{C}$  количество теплоты

$Q_2 = 28$  кДж и передаёт телу с температурой  $t_2 = 17$  °С. Чему равен холодильный коэффициент машины  $\xi_1$ ? [ $\xi_1 = 9,7$ ]

5.8. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передаёт тепло от холодильника с водой при температуре  $t_2 = 0$  °С кипятильнику с водой при температуре  $t_1 = 100$  °С. Какую массу воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар воду массой  $m_1 = 1$  кг в кипятильнике? Удельная теплота парообразования воды 2,25 МДж/кг, удельная теплота кристаллизации воды 333 кДж/кг. [ $m_2 = 4,94$  кг]

## Глава 6 Свойства жидкостей

### § 6.47 Строение жидкостей

Рассмотрение свойств газов при повышенных давлениях, когда их нельзя считать идеальными, привело нас к заключению о том, что и свойства жидкостей не должны от них существенно отличаться. Это следует уже из факта существования критической температуры, при которой исчезает различие между жидкостью и ее паром, и из существующей благодаря этому возможности непрерывного перехода из газообразного состояния в жидкое. Уравнение же состояния реальных газов по самому своему смыслу описывает как газообразное, так и жидкое состояния и переход между ними. Всё, следовательно, как будто бы указывает на то, что между жидкостью и газом существует лишь количественное различие в плотности.

В известной мере это верно. Однако количественное различие между жидкостью и газом столь велико (по плотности вдали от критической температуры они отличаются друг от друга почти в тысячу раз), что поведение и свойства жидкостей и газов оказываются и качественно различными.

Главными особенностями жидкости являются способность ее **сохранять объём** (в отличие от газов, объём жидкости не определяется объёмом сосуда) и существование у жидкости **свободной поверхности**.

Главное отличие в поведении газа и жидкости состоит в том, что газ легко сжимается, что приводит к изменению его плотности, в то время как большинство жидкостей почти несжимаемо. Плотность атмосферы больше у поверхности Земли, чем на уровне горных вершин. И наоборот, плотность воды в глубочайших впадинах океана не намного превосходит плотность воды у его поверхности.

Жидкости, занимая промежуточное положение между газами и кристаллами, сочетают в себе некоторые черты обоих состояний. В частности, для жидкостей, как и для кристаллических тел, характерно наличие определённого объёма, и вместе с тем жидкость, подобно газу, принимает форму того сосуда, в котором она находится. Далее, для кристаллического состояния характерно упорядоченное расположение частиц (атомов или молекул), в газах в этом смысле царит полный беспорядок. Согласно рентгенографическим исследованиям в отношении характера расположения частиц жидкости также занимают

промежуточное положение. В расположении частиц жидкости наблюдается так называемый **ближний порядок**.

Это означает, что по отношению к любой частице расположение ближайших к ней соседей является упорядоченным. Однако по мере удаления от данной частицы расположение по отношению к ней других частиц становится всё менее упорядоченным, и довольно быстро порядок в расположении частиц полностью исчезает. В кристаллах имеет место **дальний порядок**: упорядоченное расположение частиц по отношению к любой частице наблюдается в пределах значительного объёма.

Наличие в жидкостях ближнего порядка служит причиной того, что структуру жидкостей называют квазикристаллической (кристаллоподобной).

Из-за отсутствия дальнего порядка жидкости, за немногими исключениями, не обнаруживают анизотропии, характерной для кристаллов с их правильным расположением частиц. В жидкостях с удлинёнными молекулами наблюдается одинаковая ориентация молекул в пределах значительного объёма, чем обуславливается анизотропия оптических и некоторых других свойств. Такие жидкости получили название **жидких кристаллов**. У них упорядочена только ориентация молекул, взаимное же расположение молекул, как и в обычных жидкостях, дальнего порядка не обнаруживает.

Промежуточным положением жидкостей обусловлено то обстоятельство, что жидкое состояние оказывается особенно сложным по своим свойствам. Поэтому его теория гораздо менее развита, чем теория кристаллического и газообразного состояний. До сих пор нет вполне законченной и общепризнанной теории жидкостей.

Существуют твёрдые тела, которые во многих отношениях оказываются ближе к жидкостям, чем к кристаллам. Такие тела, называемые **аморфными**, не обнаруживают анизотропии. В расположении их частиц имеется, как и у жидкостей, только ближний порядок. Переход от аморфного твёрдого тела к жидкости при нагревании осуществляется непрерывно, в то время как переход от кристалла к жидкости при температуре плавления совершается скачком (подробнее об этом будет сказано в § 7.58). Всё это даёт основание рассматривать аморфные твёрдые тела как переохлаждённые жидкости, частицы которых вследствие сильно возросшей вязкости имеют ограниченную подвижность. Типичным примером аморфного твёрдого тела служит стекло. К аморфным телам относятся также смолы, битумы и т.п.

**Аномалия воды.** Большинство жидкостей, как и других тел, при повышении температуры увеличивает свой объём, уменьшая при этом свою плотность. Вода отличается известной аномалией, состоящей в том, что в области температур от 0 °С до 4 °С повышение температуры вызывает не повышение, а уменьшение объёма, так что при 4 °С вода обладает максимальной плотностью.

Эта аномалия объясняется тем, что молекулы воды частично ассоциируют, т.е. собираются в группы из нескольких молекул, образуя своеобразные большие молекулы. По-видимому, вода состоит из трёх видов молекул, соответствующих формулам  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $(\text{H}_2\text{O})_2$  и  $(\text{H}_2\text{O})_3$ , удельный объём которых

различен. При разных температурах соотношение концентраций этих групп молекул различное. Этим и объясняется, что при определённой температуре ( $4^{\circ}\text{C}$ ) удельный объём воды имеет минимальное значение.

Сходной по характеру аномалией обладает и жидкий гелий, плотность которого максимальна при  $2,186\text{ К}$ . Однако здесь аномалия объясняется тем, что при температуре максимума плотности жидкий гелий претерпевает фазовое превращение, так что выше и ниже этой температуры мы имеем две различные фазы жидкого гелия, которые называют He I и He II, свойства которых разительным образом отличаются друг от друга. Интересно отметить, что жидкий гелий – единственная в природе жидкость, в которой происходит фазовый переход.

### § 6.48 Поверхностное натяжение жидкостей

Поверхность жидкости, соприкасающейся с другой средой, например, с ее собственным паром или с каким-то газом, с какой-либо другой жидкостью или с твёрдым телом (например, со стенками сосуда), находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости.

Эти особые условия возникают потому, что молекулы пограничного слоя жидкости, в отличие от молекул в ее глубине, окружены молекулами той же жидкости не со всех сторон. Часть «соседей» поверхностных молекул – это частицы второй среды, с которой жидкость граничит. Вторая среда может отличаться от жидкости, как природой, так и концентрацией (плотностью) частиц. Имея же разных соседей, молекулы поверхностного слоя и взаимодействуют с ними различным образом. Поэтому силы, действующие на каждую молекулу в этом слое, оказываются неуравновешенными: существует некоторая равнодействующая сила, направленная либо в сторону объёма жидкости, либо в сторону объёма граничащей с ней среды. Вследствие этого перемещение молекулы из поверхностного слоя в глубь жидкости или в глубь среды, с которой она граничит, сопровождается совершением работы (внутри жидкости молекулы, со всех сторон окружённые точно такими же частицами, находятся в равновесии, и их перемещение не требует затраты работы). Величина и знак этой работы зависят от соотношения между силами взаимодействия молекул поверхностного слоя со «своими» же молекулами и с молекулами второй среды.

В случае, если жидкость граничит со своим собственным паром (насыщенным), т.е. в случае, когда мы имеем дело с **одним** веществом, результирующая сила **F**, испытываемая молекулами поверхностного слоя, направлена **внутрь** жидкости. Это объясняется тем, что плотность (концентрация) молекул в жидкости много больше, чем в насыщенном паре над жидкостью (вдали от критической температуры), и поэтому сила притяжения, испытываемая молекулой поверхностного слоя со стороны молекул жидкости, больше, чем со стороны молекул пара (газа). Под действием этой результирующей силы **F** молекулы стремятся перейти во внутренние слои, а жидкость стремится принять такую форму, площадь поверхности которой имела бы наименьшее значение. Поверхностный слой жидкости при этом сокращается и находится в состоянии натя-



жения. **Поверхностное натяжение** проявляет себя как сила, направленная по касательной к поверхности жидкости. Жидкость ведёт себя так, как будто по касательной к ее поверхности действуют силы, сокращающие (стягивающие) эту поверхность. Эти силы называют **силами поверхностного натяжения**. При увеличении поверхности внешние силы должны совершить работу против сил поверхностного натяжения, препятствующих растяжению поверхности жидкости.

Если при постоянной температуре обратимым путём изменить поверхность жидкости на бесконечно малую величину  $dS$ , то необходимая для этого работа

$$dA = - \sigma dS. \quad (48.1)$$

Знак минус указывает на то, что увеличение поверхности ( $dS > 0$ ) сопровождается отрицательной работой.

Коэффициент  $\sigma$  называют **коэффициентом поверхностного натяжения** ( $\sigma > 0$ ). Следовательно, коэффициент поверхностного натяжения измеряется работой, необходимой для увеличения площади поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу и имеет размерность  $[\sigma] = \text{Дж/м}^2$ . Коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  зависит от вида жидкости, от температуры и наличия примесей. С увеличением температуры  $\sigma$  уменьшается ( $\sigma = 0$  при критической температуре). Наличие примесей влияет на поверхностное натяжение жидкости. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называют **поверхностно-активными веществами**. Для воды поверхностно-активными веществами являются мыло, стиральные порошки, спирт, эфир и др. Также существуют вещества, увеличивающие поверхностное натяжение жидкости из-за того, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой (для воды такие вещества – сахар, соль).

Из сказанного выше следует, что молекулы поверхностного слоя жидкости обладают дополнительной потенциальной энергией  $U$  по сравнению с молекулами в объёме жидкости. Поверхностный слой в целом обладает дополнительной энергией, которая входит составной частью во внутреннюю энергию жидкости. Эта энергия  $U$  измеряется работой, которую могут совершить молекулы поверхностного слоя, перемещаясь внутрь жидкости под действием сил притяжения со стороны молекул в объёме жидкости, т.е.  $U$  должна быть пропорциональна площади  $S$  поверхности жидкости, так как эта энергия обусловлена наличием поверхности:

$$U = \sigma S. \quad (48.2)$$

Тогда изменение площади поверхности  $dS$  повлечёт за собой изменение потенциальной энергии

$$dU = \sigma dS,$$

которое сопровождается работой

$$dA = -dU = -\sigma dS$$

в полном соответствии с (48.1). Из формулы (48.2) следует, что коэффициент поверхностного натяжения численно равен изменению энергии поверхностного слоя жидкости, которое происходит при сокращении силами поверхностного натяжения площади поверхностного слоя жидкости на единицу.

Так как любая система в состоянии равновесия имеет наименьшую потенциальную энергию  $U$ , то это означает, что жидкость в равновесии должна иметь **минимально возможную поверхность**. Так, при заданном объёме минимальная поверхность у шара, поэтому мельчайшие капли воды, взвешенные в воздухе, имеют форму шариков, но несколько деформированную действием сил тяготения Земли. При увеличении размеров тела объём растёт как куб линейных размеров, а поверхность – только как квадрат. Поэтому пропорциональная объёму тела энергия в поле тяготения изменяется с размерами тела быстрее, чем поверхностная энергия. У малых капель жидкости преобладающую роль играет поверхностная энергия, вследствие чего такие капли имеют форму, близкую к сферической. Большие капли жидкости сплюсываются под действием сил тяготения, несмотря на то, что поверхностная энергия при этом возрастает. Большие массы жидкости принимают форму сосуда, в который они налиты, с горизонтальной свободной поверхностью.

Для разрыва или, как говорят, для раздела поверхности необходимо приложить внешние силы, параллельные к той линии, вдоль которой предполагается разрыв (раздел).

Некоторые жидкости, например, мыльная вода, обладают свойством образовывать тонкие плёнки. Если опустить проволочную рамку, одна из сторон которой (AB, см. рисунок 49а) подвижна, в мыльный раствор, то вся она затянется плёнкой жидкости. Под действием сил поверхностного натяжения площадь плёнки уменьшается, и перекладина AB поднимается вверх. Чтобы сохранить ее в равновесии, к перекладине нужно приложить силу  $F$  в виде веса груза (сюда входит и вес самой перекладины). Так как плёнка имеет две поверхности (ведь плёнка на самом деле представляет собой тонкий слой жидкости, см. рисунок 49б), то поверхностная сила  $2f$  при равновесии равна приложенной силе  $F$  (сюда входит и вес самой перекладины):

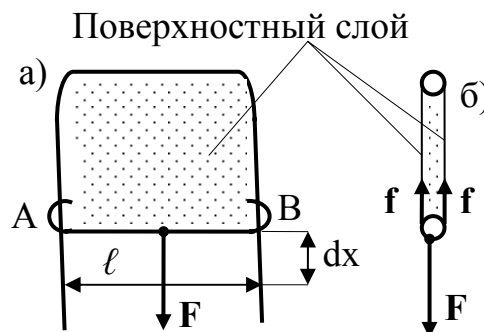


Рисунок 49

$$2f = F \quad \text{и} \quad f = \frac{F}{2}.$$

Если под действием этой силы перекладина переместилась вверх на  $dx$ , то работа, совершённая силой  $f$ , равна:



$$dA = f dx = \frac{F}{2} dx.$$

Эта работа равна уменьшению потенциальной энергии поверхностного слоя жидкости, которое, как мы знаем, равно  $dU = \sigma dS$ . В данном случае  $dS = \ell dx$ , где  $\ell = AB$  – длина перекладины. Отсюда находим:

$$dA = \sigma \ell dx = f dx = \frac{F}{2} dx,$$

и

$$\sigma = \frac{F}{2\ell}. \quad (48.3)$$

Из (48.3) следует, что **коэффициент поверхностного натяжения** может быть определён как величина, равная силе, действующей по касательной к поверхности жидкости, приходящейся на единицу длины линии раздела.

Определённый таким образом коэффициент поверхностного натяжения измеряется в единицах Н/м. Нужно иметь ввиду, что размерности  $\sigma$ , определённые ранее и теперь, эквивалентны, так как

$$[\sigma] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Не только в приведённом примере, но часто и в других случаях нужно учитывать, что плёнки жидкости имеют две поверхности, например, при выдувании мыльного пузыря радиуса  $R$ :

$$\Delta S = 2S = 2 \cdot 4\pi R^2,$$

где  $S$  – площадь поверхности сферы.

## § 6.49 Смачивание

В зависимости от характера взаимодействия между молекулами жидкости и твёрдого тела на границе их соприкосновения наблюдаются явления **смачивания** или **несмачивания**. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твёрдого тела больше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твёрдым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твёрдого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твёрдым телом. Характеристикой соотношения между двумя этими силами служит **краевой угол**  $\vartheta$ , т.е. угол, образованный касательной к поверхности жидкости у ее границы с твёрдым телом и поверхностью твёрдого тела.

Если жидкость граничит с плоской поверхностью, то картина для смачивающей (позиция а) и несмачивающей (позиция б) жидкости выглядит так, как изображено на рисунке 50. Наблюдения показывают, что при смачивании

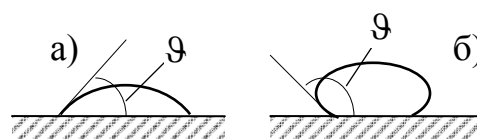


Рисунок 50

краевой угол  $\vartheta$  является острым, т.е.  $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$  (случай  $\vartheta = 0$  называют **полным смачиванием**), а при несмачивании краевой угол является тупым, т.е.  $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi$  (случай  $\vartheta = \pi$  называют **полным несмачиванием**). На практике большей частью наблюдаются случаи частичного смачивания, т.е.  $\vartheta < \frac{\pi}{2}$ , – позиция а) на рисунке 50, и частичного несмачивания, т.е.  $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ , – позиция б) на рисунке 50.

Если жидкость находится внутри сосуда, то у самых стенок поверхность жидкости искривлена, так что образуется **мениск**, вогнутый у смачивающей жидкости (см. рисунок 51а) и выпуклый у несмачивающей (см. рисунок 51б). Если

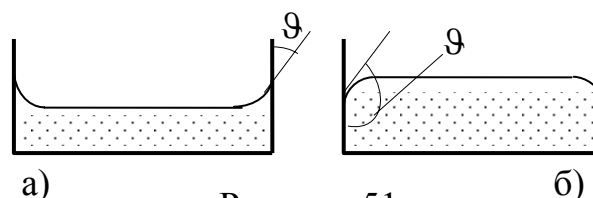


Рисунок 51

большое количество жидкости налито в широкий сосуд, то форма ее поверхности определяется силой тяжести, которая обеспечивает на удалении от края сосуда плоскую, горизонтальную, зеркальную поверхность.

Искривление поверхности жидкости, связанное со смачиванием, делает иногда возможным удерживание на поверхности жидкости тел, плотность которых больше плотности жидкости и которые поэтому должны в ней тонуть. Это своеобразное «плавание» объясняется тем, что вес тела уравнивается силами поверхностного натяжения ( $f$ ) и силой Архимеда. Если, например, прямоугольный брусок находится на поверхности жидкости, не смачивающей материал бруска, то поверхностная сила равна  $2f = 2\sigma l$ , где  $l$  - длина бруска (см. рисунок 52а). При достаточно малом весе бруска он будет удерживаться на поверхности. Этим объясняется любопытное явление: смазанная жиром иголка или бритвенное лезвие могут держаться на поверхности воды. Если материал бруска смачивается жидкостью, то силы поверхностного натяжения могут заставить брусок погрузиться в жидкость, даже если плотность вещества бруска меньше плотности жидкости (см. рисунок 52б).

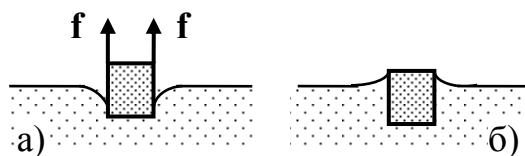


Рисунок 52

Следует отметить, что одна и та же жидкость одни твёрдые тела смачивает, а другие – не смачивает. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин, а ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

## § 6.50 Давление под искривлённой поверхностью жидкости

Мы видели, что во многих случаях поверхность жидкости оказывается искривлённой. Кривизна поверхности жидкости приводит к появлению сил, действующих на жидкость под этой поверхностью. В этом нетрудно убедиться из следующих простых соображений. Представим себе сферическую каплю жидкости с радиусом сферы  $r$  (рисунок 53). При увеличении радиуса сферы растёт площадь ее поверхности, а вместе с ней и поверхностная энергия. Ясно, что это может быть достигнуто только ценой затраты работы. Наоборот, при уменьшении радиуса капли поверхностная энергия уменьшается. Это значит, что работа производится силами, действующими в самой капле. Отсюда следует, что объём жидкости под сферической поверхностью всегда несколько сжат, т.е. испытывает дополнительное давление, направленное радиально, т.е. перпендикулярно к поверхности. Эти соображения позволяют вычислить и величину этого дополнительного давления, связанного с кривизной поверхности.

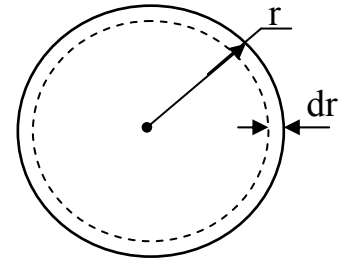


Рисунок 53

Действительно, пусть под действием этого давления жидкий шар уменьшит свой объём на  $dV$ , как это показано на рисунке 53. Работа сжатия жидкости произведена, очевидно, за счёт уменьшения поверхностной энергии<sup>5</sup>. Работа сжатия  $dA$  равна, как известно,  $PdV$ , где  $P$  – давление, т.е.

$$dA = PdV. \quad (50.1)$$

Уменьшение же поверхностной энергии равно

$$dF = \sigma dS, \quad (50.2)$$

где  $dS$  – уменьшение поверхности шара, соответствующее уменьшению радиуса на  $dr$ .

Из известных формул для поверхности  $S = 4\pi r^2$  и  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  получаем очевидные выражения:

$$dS = 8\pi r dr, \quad dV = 4\pi r^2 dr.$$

Подставляя эти значения для  $dS$  и  $dV$  в уравнения (50.1) и (50.2) и принимая во внимание, что  $|dA| = |dF|$ , получаем:

$$P \cdot 4\pi r^2 dr = \sigma \cdot 8\pi r dr,$$

откуда для давления, оказываемого на жидкость ее кривой поверхностью, получается выражение:

<sup>5</sup> При сжатии уменьшается и свободная энергия жидкости, зависящая от объёма, которая компенсируется увеличением свободной энергии насыщенного пара, находящегося над жидкостью.

$$P = \frac{2\sigma}{r}. \quad (50.3)$$

Если поверхность жидкости не сферическая, а цилиндрическая, то дополнительное давление, вызванное кривизной, определяется формулой:

$$P = \frac{\sigma}{r}. \quad (50.4)$$

Действительно, для цилиндра длиной  $\ell$  и радиусом  $r$  имеем:  $V = \pi r^2 \ell$ ,  $S = 2\pi r \ell$  и соответственно

$$dV = 2\pi r \ell dr, \quad S = 2\pi \ell dr,$$

откуда

$$dA = PdV = P \cdot 2\pi r \ell dr, \quad dF = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi \ell dr.$$

Из условия  $|dA| = |dF|$  непосредственно получается выражение (50.4).

В общем случае для поверхности произвольной формы (не сферической и не цилиндрической) давление, обусловленное кривизной поверхности жидкости, определяется **уравнением Лапласа**:

$$P = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (50.5)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы кривизны для любой пары взаимно перпендикулярных нормальных сечений (главные радиусы кривизны) в данной точке поверхности, или точнее, для данного элемента поверхности.

Легко видеть, что формулы (50.3) и (50.4) являются частными случаями уравнения (50.5). Для сферы оба главных радиуса кривизны совпадают и равны радиусу сферы, т.е.  $r_1 = r_2 = r$ , и (50.5) переходит в (50.3). У цилиндра один из главных радиусов кривизны равен  $\infty$ , а другой совпадает с радиусом цилиндра; подстановка в (50.5) приводит к (50.4). Для плоской поверхности радиусы кривизны  $r_1 = r_2 = \infty$ , и  $P = 0$ , – плоская поверхность не создаёт добавочное давление.

Дополнительное давление, создаваемое кривизной поверхности и определяемое уравнением Лапласа, нельзя отождествлять с поверхностными силами, которые, как мы знаем, направлены по касательной к поверхности, тогда как добавочное давление направлено перпендикулярно к ней, к центру кривизны поверхности. Оно возникает лишь в результате действия сил поверхностного натяжения, искривляющих поверхность жидкости. Дополнительное давление в случае выпуклой поверхности направлено внутрь жидкости и добавляется к нормальному давлению жидкости. В случае вогнутой поверхности жидкость будет находиться под давлением меньшим, чем та же жидкость под плоской

поверхностью. Математически это соответствует тому, что радиус кривизны для вогнутой поверхности, когда центр кривизны находится вне жидкости, считается отрицательным, а у выпуклой поверхности – положительным.

## § 6.51 Капиллярные явления

Поверхность жидкости, налитой в сосуд, имеет некоторую кривизну вблизи границы между жидкостью и твёрдой стенкой сосуда, т.е. там, где заметную роль играют силы взаимодействия между молекулами жидкости и твёрдого тела. В остальной части поверхность плоская, так как сила тяжести здесь подавляет молекулярные силы взаимодействия. В случае, когда жидкость находится в **узком сосуде**, влияние стенок простирается на всю поверхность жидкости, и она оказывается искривлённой на всей поверхности (сосуд можно считать узким, если его размеры сравнимы с радиусом кривизны поверхности жидкости, соприкасающейся со стенками сосуда). Такие изогнутые поверхности жидкости называют **менисками**, а сами узкие сосуды называют **капиллярными**. Явления, происходящие в таких сосудах, называют капиллярными явлениями.

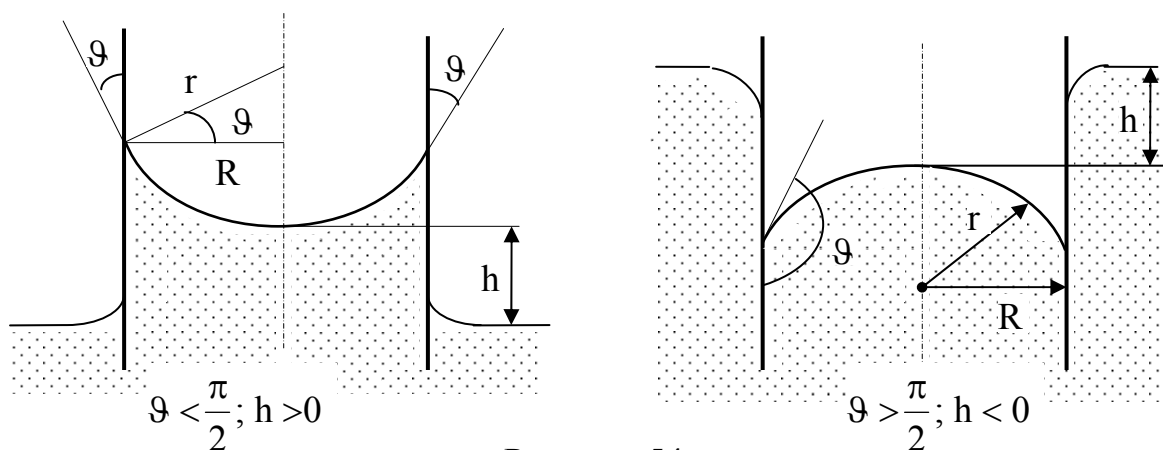


Рисунок 54

Если узкую трубку (**капилляр**) опустить в широкий сосуд с жидкостью, то под искривлённой поверхностью в капилляре давление будет отличаться от давления над плоской поверхностью в широком сосуде на величину  $P$ , определяемую уравнением Лапласа. В результате при смачивании капилляра уровень жидкости в нём будет выше, чем в сосуде, при несмачивании – ниже, так как добавочное давление  $P$  направлено к центру кривизны мениска (см. рисунок 54). Изменение высоты уровня жидкости называют **капиллярностью**.

Между жидкостью в капилляре и широком сосуде устанавливается такая разность уровней  $h$ , чтобы гидростатическое давление  $\rho gh$  уравновешивало капиллярное давление  $P$ :

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r},$$

откуда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}, \quad (51.1)$$

где  $r$  – радиус кривизны мениска,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения.

Радиус кривизны мениска  $r$  можно выразить через краевой угол  $\vartheta$  и радиус капиллярной трубки  $R$  (см. рисунок 54):

$$r = \frac{R}{\cos \vartheta}$$

и подставить в (51.1). Тогда выражение для  $h$  примет вид:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g R}. \quad (51.2)$$

Из формулы (51.2) видно, что высота поднятия тем больше, чем меньше радиус капилляра  $R$ . Поэтому поднятие смачивающей жидкости особенно заметно в очень узких трубках. При данном радиусе  $R$  капиллярной трубки поднятие тем больше, чем больше коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ , чем сильнее происходит смачивание (чем меньше краевой угол  $\vartheta$ ) и чем меньше плотность жидкости  $\rho$ .

При полном смачивании ( $\vartheta = 0$ ,  $\cos \vartheta = 1$ ) и полном несмачивании ( $\vartheta = \pi$ ,  $\cos \vartheta = -1$ ) разность уровней  $h$  в капилляре и широком сосуде равна:

$$|h| = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Так, влагообмен в почве и растениях происходит за счёт поднятия воды по тончайшим капиллярам (хотя исчерпывающее объяснение механизма подъёма воды – сока по волокнам растений является предметом спора). На капиллярности основан перенос керосина вдоль фитиля, впитывание влаги полотенцем или салфеткой и т.д. В технике на явлениях смачивания и несмачивания основана так называемая **флотация**. Схематически процесс флотации заключается в следующем: размельчённая смесь руды с горной породой, в которую она заключена, взбалтывается в жидкости. Жидкость подбирается так, чтобы она смачивала руду и не смачивала «пустую» породу. Через жидкость пропускаются пузырьки воздуха. Эти пузырьки, оседая на крупинках породы, не смачиваемой жидкостью, увлекают их на поверхность жидкости. Смачиваемые же жидкостью крупинки руды погружаются на дно. Таким образом, достигается отделение руды от «пустой» породы.

Если поверхность жидкости не сферическая, а цилиндрическая, например, в случае слоя жидкости между двумя плоскими пластинами, то дополнительное давление, вызванное кривизной, определяется формулой:

$$P = \frac{\sigma}{r},$$

где  $r$  – радиус кривизны мениска (см. рисунок 54).

В этом случае высота капиллярного подъёма  $h$  определяется формулой:

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g d},$$

где  $\vartheta$  – краевой угол,  $d$  – расстояние между пластинами  $\left( r = \frac{d}{2 \cos \vartheta} \right)$ .

При полном смачивании ( $\cos \vartheta = 1$ ) добавочное давление, сжимающее пластины при толщине  $d = 1$  мкм слоя воды ( $\sigma = 70$  мН/м) равно:

$$P = \frac{2\sigma}{d} = \frac{2 \cdot 70 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1,4 \text{ атм.}$$

В этом случае при площади пластин  $S = 10 \text{ см}^2$  сила притяжения между ними равна:

$$F = P \cdot S = 1,4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 140 \text{ Н.}$$

Такую достаточно большую силу, направленную перпендикулярно к плоскости пластин, нужно приложить, чтобы оторвать их друг от друга. Но под действием даже небольшой силы, приложенной параллельно пластинам, они легко соскальзывают, так как коэффициент вязкого трения воды незначителен.

## § 6.52 Испарение и кипение жидкостей

При рассмотрении уравнения Ван-дер-Ваальса мы видели, что жидкость может находиться в равновесии со своим паром. Это равновесие с паром, который в таком случае называется насыщенным паром, устанавливается само собой, если жидкость находится в закрытом сосуде. Рассмотрим процесс установления такого равновесия.

С поверхности жидкости вылетает часть молекул, образуя над жидкостью пар. Для выхода из жидкости испаряющиеся молекулы должны преодолеть силы притяжения со стороны оставшихся молекул, т.е. совершить работу против этих сил. Кроме того, должна быть совершена работа против внешнего давления  $P$  уже образовавшегося пара, равная  $P\Delta V$ , где  $\Delta V$  – изменение объёма, занимаемого данным количеством молекул при переходе из жидкости в пар (ясно, что при переходе в парообразное состояние молекулы занимают больший



объём). Очевидно, что вся эта работа может быть совершена только за счёт кинетической энергии теплового движения молекул.

Ясно, что не все молекулы способны совершить эту работу, а только те из них, которые обладают достаточной для этого кинетической энергией. Поэтому переход части молекул в пар приводит к обеднению жидкости быстрыми молекулами, т.е. к ее охлаждению. Если, однако, внешним источником тепла поддерживать температуру жидкости постоянной, то число молекул, покинувших жидкость, будет со временем непрерывно нарастать. Но одновременно с переходом молекул из объёма жидкости в газовую фазу происходит и обратный процесс: в силу хаотичности движения молекул пара часть молекул, покинувших жидкость, снова в нее возвращается.

Переход молекул из жидкости в пар называется **испарением**. Обратный переход молекул из пара в жидкость называется **конденсацией**. Ясно, что число конденсирующихся молекул пропорционально плотности молекул в паре. Поэтому, если сосуд закрыт, то непременно наступит момент, когда число частиц, покидающих в единицу времени жидкость, станет равным числу частиц, возвращающихся за это же время в жидкость. Наступает состояние динамического равновесия. Как мы уже знаем, пар в состоянии динамического равновесия с жидкостью называется **насыщенным**.

Из этой картины совершенно очевидно, что с повышением температуры плотность, а, следовательно, и давление насыщенного пара увеличиваются, как это и было показано при рассмотрении изотерм реального газа. Чем выше температура, тем большее число молекул жидкости обладают энергией, достаточной для испарения, и тем большей, следовательно, должна быть плотность насыщенного пара, чтобы конденсация могла сравняться с испарением, т.е. чтобы установилось равновесие. С увеличением плотности насыщенных паров поверхностное натяжение жидкости уменьшается, поскольку силы, направленные внутрь жидкости, уменьшаются ввиду роста противоположно направленных сил со стороны насыщенного пара. При критической температуре плотность насыщенных паров становится равной плотности жидкости, и различие между ними исчезает. Это означает, что и поверхность исчезает, и, следовательно, поверхностное натяжение при критической температуре обращается в нуль.

Пар не является газом в строгом смысле этого слова. Газ – это агрегатное состояние вещества при данных температуре и давлении. Пар же не является агрегатным состоянием вещества, потому что агрегатным состоянием вещества при данных температуре и давлении является жидкое состояние. В связи с этим поведение пара отличается от поведения газа. В частности у идеальных газов давление точно обратно пропорционально объёму, а у реальных газов – с достаточной большой точностью. У паров же, близких к насыщению, давление незначительно изменяется с объёмом, а у насыщенных паров совсем не изменяется. В грубом приближении газовые законы могут быть применены к ненасыщенным парам. Если же пары очень далеки от насыщения, то газовые законы для их описания являются хорошим приближением.

**Скрытая теплота испарения.** Процесс испарения жидкости, как уже указывалось, сопровождается ее охлаждением. Ощущение сильного охлаждения

кожи, смоченной быстро испаряющейся жидкостью, например, эфиром, является следствием этого эффекта. С другой стороны, при испарении, например, воды, налитой в стакан, мы не замечаем понижения ее температуры. В подобных случаях температура жидкости поддерживается постоянной за счёт тепла, заимствованного из окружающего воздуха. Значит, для того, чтобы было возможно испарение жидкости без изменения ее температуры, к ней необходимо подводить тепло.

Количество тепла, которое необходимо подвести для того, чтобы испарить определённое количество жидкости без изменения ее температуры (изотермически), при внешнем давлении, равном давлению ее насыщенных паров, является характеристикой жидкости и называется **скрытой теплотой испарения**. Обычно эту величину относят либо к килограмму, либо к одному молю жидкости. «Скрытой» она называется потому, что подвод этой теплоты не сопровождается таким «явным» эффектом, как повышение температуры. Количество теплоты, необходимое для изотермического испарения одного моля жидкости, называется **молярной скрытой теплотой испарения**. Соответственно **удельная скрытая теплота** испарения получается делением молярной теплоты испарения на молярную массу.

Обратный испарению процесс конденсации сопровождается выделением тепла. **Скрытая теплота конденсации**, разумеется, равна скрытой теплоте испарения.

Испарение жидкости является одним из видов фазовых переходов. Поэтому скрытая теплота испарения часто называется теплотой перехода. Скрытая теплота испарения является, очевидно, количественной характеристикой сил связи между молекулами жидкости. Чем больше эти силы, тем больше скрытая теплота испарения.

При критической температуре  $T_k$ , когда различие между паром и жидкостью исчезает, скрытая теплота испарения, очевидно, равна нулю. Отсюда следует, что с повышением температуры скрытая теплота испарения должна убывать.

### **§ 6.53 Давление насыщенных паров над искривлённой поверхностью жидкости**

Над искривлённой поверхностью жидкости давление насыщенных паров отличается от их давления над плоской поверхностью. Чтобы выяснить характер этой зависимости, необходимо рассмотреть условия динамического равновесия пара и жидкости. Условия динамического равновесия над искривлённой поверхностью по своему физическому содержанию одинаковы с условиями у плоской поверхности, т.е. состоят в том, что интенсивности перехода молекул из жидкости в газ и обратно одинаковы. Однако в случае искривлённой поверхности интенсивность обмена молекулами зависит от кривизны поверхности. Учёт этой зависимости позволяет определить давление насыщенных паров над искривлённой поверхностью.

Известно, что всякая система стремится перейти в состояние равновесия, при котором ее энергия минимальна (совершив соответствующую работу). Поэтому, если в одном замкнутом сосуде находится жидкость с плоской поверхностью и сферическая капля той же жидкости, то равновесие установится только после того, как капля целиком испарится и сконденсируется на плоской поверхности. Это означает, что давление насыщенных паров над сферической каплей больше, чем над плоской поверхностью остальной жидкости.

Это, разумеется, относится не только к сферической капле, но и вообще ко всякой жидкости с выпуклой поверхностью. Наоборот, над вогнутой поверхностью давление насыщенных паров всегда меньше, чем над плоской поверхностью.

Вычислим, насколько давление насыщенного пара над кривой и плоской поверхностями отличаются друг от друга. Представим себе закрытый сосуд (рисунок 55) с жидкостью, в которую частично погружена капиллярная трубка, полностью смачиваемая жидкостью. Под действием капиллярных сил жидкость в трубке поднимется на высоту  $h$ , определяемую формулой (51.1):

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r},$$

где  $\sigma$  и  $\rho$  – коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости,  $r$  – радиус кривизны вогнутого мениска в капилляре.

Так как сосуд закрытый, то после установления равновесия над вогнутой поверхностью жидкости в капилляре и над плоской поверхностью в сосуде находится **насыщенный** пар. Но давление насыщенного пара над вогнутой поверхностью жидкости в капилляре должно быть меньше, чем над плоской поверхностью. В самом деле, давление  $P$  насыщенного пара на высоте  $h$  (у точки В) согласно барометрической формуле равно

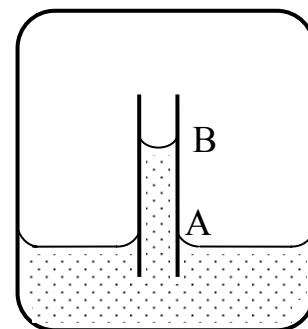


Рисунок 55

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}, \quad (53.1)$$

где  $P_0$  – давление у поверхности жидкости в сосуде (у точки А).

Если бы давление насыщенного пара над вогнутой поверхностью в капилляре было таким же, как над плоской, то оно было бы больше, чем давление пара в окружающем пространстве, и возник бы непрерывный поток пара из капилляра, что невозможно при равновесии и что сделало бы наше устройство вечным двигателем. Отсюда следует, что давление насыщенного пара над мениском в капилляре должно быть равно  $P$ , а не  $P_0$ .

Подставив в (53.1) значение  $h$  из (51.1), получаем:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu}{\rho RT} \frac{2\sigma}{r}},$$

или

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\mu}{\rho RT} \frac{2\sigma}{r}. \quad (53.2)$$

Соотношение между  $P$  и  $P_0$ , т.е. между значениями над вогнутой и плоской поверхностями жидкости (разумеется при одной и той же температуре), можно представить более удобной, хотя и приближённой формулой, справедливой лишь при малых значениях  $P - P_0$ , а именно, при  $|P - P_0| \ll P_0$ . Разность давлений пара у точек А и В приближённо можно считать равной давлению столба насыщенного пара высотой  $h$ :

$$P_A - P_B = P_0 - P = \rho_0 g h,$$

где  $\rho_0$  – плотность насыщенного пара.

Но  $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$ , так что

$$P = P_0 - \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (53.3)$$

Таким образом, мы видим, что давление насыщенного пара над **вогнутой** поверхностью меньше, чем над плоской, на величину:

$$\frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Очевидно, что таким же образом, поместив капилляр в несмачивающую жидкость, можно показать, что над **выпуклой** поверхностью жидкости давление ее насыщенного пара больше, чем над плоской, на ту же величину

$$\frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Различие в значениях давлений насыщенного пара над плоской и искривлённой поверхностями связано исключительно с кривизной поверхности. Ни сила тяжести, ни разность высот здесь не играют роли. Это видно уже из того, что в формулы (53.2) и (53.3) не входят величины  $g$  и  $h$ , но входит радиус кривизны поверхности  $r$ . Эти формулы, поэтому относятся не только к случаю, когда поверхность жидкости искривлена из-за того, что она находится в капилляре, но и к таким случаям, как капли жидкости (выпуклая поверхность) или газовые пузырьки в жидкости (вогнутая поверхность жидкости).

Оценочные расчёты для капли воды радиусом  $r = 10^{-5}$  м (капли тумана) при температуре окружающей среды  $27^{\circ}\text{C}$  ( $300\text{ K}$ ) приводят к таким результатам:  $P/P_0 = 1,01$ , т.е. давление насыщенных паров только на один процент отличается от нормального давления (для плоской поверхности). При меньших радиусах капли давление насыщенных паров  $P$  оказывается ещё выше нормального давления  $P_0$ .

Это обстоятельство играет существенную роль в таких явлениях, как образование дождевых капель, кипение жидкости и др.

Действительно, в атмосфере часто создаются такие условия, при которых парциальное давление паров воды превосходит давление насыщенного пара при той же температуре. Для того чтобы установилось равновесие, пары должны конденсироваться и образовывать капли жидкости. Это, однако, далеко не всегда происходит. Ведь в самом начале процесса конденсации капли, естественно, очень малы по размерам. А это значит, что давление паров над ними много больше нормального. Больше оно и парциального давления паров воды в атмосфере. Поэтому капельки испаряются ещё до того, как они достигнут достаточного для выпадения дождя размера. Рост образовавшихся капель возможен только в том случае, если парциальное давление паров воды в воздухе больше не только давления насыщенного пара при той же температуре, но и давления паров над поверхностью капли малого радиуса. В противном случае для роста капель необходимо, чтобы они с самого начала имели достаточно большие размеры.

Этим объясняется тот факт, что находящиеся в атмосфере маленькие пылинки (аэрозоли) существенно облегчают конденсацию паров и образование достаточно крупных капель, выпадающих затем в виде дождя. Пылинки, на которых начинается конденсация паров воды, обеспечивают с самого начала значительный радиус образующихся на них капель. Давление паров над ними лишь немного превышает давление пара над плоской поверхностью. В этих условиях достаточно даже небольшого пересыщения воздуха влагой, чтобы капли могли образовываться и беспрепятственно расти, пока они не выпадут в виде дождя.

Пылинки служат, таким образом, центрами конденсации пара. Ясно, что **пересыщенный пар**, т.е. пар, давление которого превосходит давление насыщенного пара, может существовать только в том случае, если отсутствуют центры конденсации. Существование таких зародышей (центров) является необходимым условием конденсации паров. Иногда удаётся даже вызвать дождь, если искусственно ввести в атмосферу пылинки, которые становятся центрами конденсации. Правда, запылённость воздуха чаще приводит к образованию густых туманов, чем дождей.

Центрами конденсации, могут, как показывает опыт, служить не только пылинки, но и электрически заряженные частицы, в частности ионизированные атомы, присутствующие в газе. На явлении образования капель на ионизированных атомах основано действие камеры Вильсона – замечательного прибора, используемого в ядерных исследованиях.



## § 6.54 Кипение жидкостей

Когда при нагревании жидкости достигается температура, при которой давление насыщенных паров равно внешнему давлению, устанавливается равновесие между жидкостью и ее насыщенным паром. При сообщении жидкости дополнительного количества теплоты происходит немедленное превращение соответствующей массы жидкости в пар. Наименьшее давление в жидкости теоретически приходится на ее верхние слои, и это превращение жидкости в пар должно в первую очередь происходить в верхних слоях. Но в действительности разность в давлениях между различными слоями жидкости незначительна по сравнению с самим давлением, поскольку  $10^5$  Па соответствуют давлению примерно 10-метрового слоя воды. Кроме того, жидкость обычно подогревается снизу. Оба эти обстоятельства приводят к тому, что интенсивное превращение жидкости в пар происходит по всему объёму жидкости. Этот процесс называют **кипением**. Кипение сопровождается быстрым образованием и ростом пузырьков пара, прорывающихся через поверхность жидкости наружу. **Температурой кипения** является та температура, при которой давление насыщенных паров становится равным внешнему давлению. При увеличении давления температура кипения увеличивается, а при уменьшении давления – уменьшается. Воду в герметически закрытом сосуде можно нагреть до температуры, значительно большей  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , без того, чтобы она закипела. Этот приём используется, например, в быденной жизни для ускорения варки продуктов в герметически закрытом сосуде. С другой стороны, понизив достаточно давление над поверхностью воды, например путём откачки воздуха из такого сосуда, в котором находится жидкость, можно вызвать кипение жидкости при комнатной температуре.

Таким образом, кипение на различных уровнях происходит, строго говоря, при различной температуре, и нет какой-то одной определённой температуры кипения жидкости. Определённую температуру имеет насыщенный пар над поверхностью кипящей жидкости. Его температура не зависит от того, как происходит кипение жидкости на различной глубине, и определяется только внешним давлением. Именно температура насыщенного пара над поверхностью кипящей жидкости имеется в виду, когда говорят о температуре кипения.

Рассмотрим, при каких условиях происходит процесс кипения.

Пузырёк пара в жидкости может образоваться в том случае, если в каком-то месте жидкости образуется область пониженной плотности. Принципиально такая область образоваться может, так как из-за хаотичности тепловых движений случайные отклонения от в среднем равномерного распределения частиц в объёме не только возможны, но и неизбежны. Такие отклонения от среднего, как уже указывалось, называются флуктуациями. Пузырьки в паре и образуются в порядке флуктуаций. Но при этом нужно иметь в виду следующее.

Плотность пара при температуре, далёкой от критической, в тысячи раз меньше плотности жидкости. Поэтому для того, чтобы образовался пузырёк, нужна весьма значительная флуктуация: случайно должна образоваться область, в которой плотность частиц в тысячи раз меньше, чем в остальном объё-

ме! Понятно, вероятность такой флуктуации очень мала. Тем более мала вероятность того, что она охватит сколько-нибудь значительный объём. В подавляющем большинстве случаев пузырьки, если они и образуются, очень малы по размерам. Но в таком случае они не имеют условий для роста. Ведь пузырёк – это сосуд с насыщенным паром (потому что сосуд замкнут), а стенками сосуда является вогнутая поверхность жидкости, окружающей пузырёк. Из-за кривизны же поверхности возникает сила, направленная к центру кривизны. Эта сила и раздавит пузырёк, потому что при малых размерах пузырька она очень велика.

Казалось бы, при таких условиях пузырьки пара в жидкости фактически вовсе не могут образоваться, а значит, невозможно и кипение. Однако положение существенно изменяется, если в самой жидкости или в стенках сосуда, в котором она заключена, имеется растворённый или поглощённый (адсорбированный) воздух (или какой-нибудь другой газ). В этом случае в жидкости при ее нагревании образуются пузырьки газа, и их образование не связано с флуктуациями плотности жидкости. Поэтому они с самого начала могут быть не слишком малых размеров и давление, связанное с кривизной поверхности, не обязательно должно их раздавливать.

Газовые пузырьки, следовательно, играют в явлении парообразования (кипения) такую же роль, какую в явлении конденсации играют пылинки или ионы, т.е. роль зародышей.

Итак, пусть по тем или иным причинам в жидкости образовался пузырёк. После своего образования он сразу же наполняется насыщенным паром окружающей жидкости и будет находиться в равновесии с ней. Давление пара внутри пузырька определяется, очевидно, температурой жидкости. Пока температура жидкости такова, что давление насыщенного пара внутри пузырька меньше внешнего давления над жидкостью, пузырёк не может расти, потому что и теперь нет недостатка в силах, стремящихся его раздавить. По-прежнему существует сила, связанная с кривизной поверхности жидкости в пузырьке. Кроме того, на пузырёк действует гидростатическое давление столба жидкости над ним. Наконец, на пузырёк действует внешнее давление, под которым находится вся жидкость, и именно оно играет главную роль. Остальные две силы лишь облегчают раздавливание пузырька внешним давлением.

Но когда температура жидкости достигает значения, при котором давление ее насыщенного пара станет равно внешнему давлению, давление пара внутри пузырька тоже будет равно внешнему (если мы пока не будем принимать во внимание гидростатическое давление и давление, вызванное кривизной поверхности). Тогда достаточно самого незначительного повышения температуры для того, чтобы давление пара внутри пузырька превысило внешнее: под действием этой разности давлений пузырёк начнёт быстро раздуваться и он, в конце концов, всплывёт и прорвётся наружу.

Значит, при кипении жидкость испаряется не только с поверхности жидкости, но и с поверхности пузырьков внутри жидкости. Для того чтобы жидкость кипела, необходимо довести ее температуру до значения, при котором давление



насыщенных паров этой жидкости равно внешнему давлению (точнее говоря – несколько больше).

Ясно, что чем ниже внешнее давление, тем ниже температура кипения жидкости. Этим объясняется хорошо известный факт, что на больших высотах, где атмосферное давление пониженное, жидкости кипят при температурах более низких, чем на уровне моря. Измеряя температуру кипения какой-нибудь жидкости, можно определить барометрическое давление, а значит, и высоту над уровнем моря. Соответствующий прибор называется гипсотермометром.

**Перегретая жидкость.** Из вышеизложенного ясно, что явление кипения может происходить только в том случае, если в жидкости могут образовываться газовые пузырьки, а для этого жидкость должна содержать растворённые в ней газы. Можно сказать, что подобно тому, как конденсация возможна лишь при наличии центров конденсации (пылинки, ионы), кипение, т.е. интенсивное парообразование, требует присутствия центров парообразования, которыми и являются газовые пузырьки. (Фазовые переходы, происходящие лишь при наличии зародышей, называются фазовыми переходами первого рода).

При отсутствии центров конденсации можно, как мы видели, получить пересыщенный пар. Точно так же при отсутствии в жидкости растворённых газов, могущих образовать пузырьки, можно получить **перегретую жидкость**, т.е. жидкость, температура которой выше температуры кипения при данном внешнем давлении, но которая, тем не менее, не кипит.

Возможность перегрева жидкости связана с дополнительным давлением, которое испытывает жидкость под кривой поверхностью. Действительно, сферическая поверхность жидкости, окружающей пузырёк, стремится сократиться. Возникающее благодаря этому давление

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

направлено к центру пузырька, т.е. добавляется к внешнему давлению, раздавливающему пузырёк. А при малых размерах пузырька  $P$  достигает весьма значительной величины. Поэтому, если нагреваемая жидкость и стенки сосуда, в котором она содержится, тщательно очищены от растворённых газов, то образование пузырьков в жидкости настолько затруднено, что ее можно нагреть без того, чтобы она закипела, до температуры, значительно более высокой, чем температура кипения. Точнее говоря, жидкость можно перегреть до такой температуры, при которой давление насыщенного пара в пузырьках не превышает внешнее давление плюс давление, вызванное кривизной поверхности самых малых пузырьков.

Как мы видели, образование пузырьков пара при низких температурах практически невозможно из-за того, что для этого требуются большие флуктуации плотности, вероятность которых очень мала. Но по мере повышения температуры различие в плотностях жидкости и пара уменьшается (при критической температуре оно вовсе исчезает). Поэтому флуктуации плотности, необходимые для образования пузырьков, становятся всё менее значительными. Со-

ответственно увеличивается их вероятность. При достаточно высокой температуре (высокая – значит близкая к критической температуре) пузырьки могут образоваться и расти даже при отсутствии зародышей в виде газовых пузырьков. И чем тщательнее очищена жидкость, тем сильнее ее можно перегреть.

Когда перегретая жидкость всё же, в конце концов, закипает, то кипение происходит очень бурно, напоминая взрыв. При этом жидкость быстро охлаждается до нормальной при данном давлении температуры кипения.

Перегрев жидкости и следующее за ним бурное вскипание представляют большую опасность для сосуда, в котором жидкость заключена. Поэтому принимают специальные меры для предотвращения перегрева. Для этого в жидкость помещают пористые тела, из которых при нагревании в избытке выделяется воздух. Такими телами служат керамические трубки (необожжённый фарфор, например) или обрезки капиллярных трубок.

Температура кипящей воды не является, как мы видим, вполне определённой величиной. Из-за причин, только что нами рассмотренных, она в небольших пределах колеблется. Вполне определённой температурой обладает не сама кипящая вода, а водяной пар над ней, так как, что бы ни происходило внутри жидкости, пар, выходящий из лопающихся на ее поверхности пузырьков, имеет вполне определённую температуру – температуру, при которой давление насыщенных паров равно внешнему давлению. Именно поэтому при градуировке термометров их помещают не в кипящую воду, а в пары над ней.

## § 6.55 Осмотическое давление

**Основные параметры состояния растворов.** Сравнительно редко приходится иметь дело с жидкостями чистыми, т.е. содержащими частицы одного единственного вида. В большинстве случаев встречаются жидкости, представляющие собой смеси различных веществ. Если одно из них содержится в такой смеси в количестве много большем, чем другие, то смесь называется **раствором**, а преобладающее вещество является **растворителем**. Далее мы ограничимся лишь случаем бинарных **жидких** растворов, состоящих только из двух веществ – **растворителя** и **растворённого вещества**.

Количественно растворы характеризуются **концентрацией**, определяющей содержание той или иной части раствора. Существует много способов выражать концентрацию. Мы приведём здесь только важнейшие.

1. **Весовая доля** – отношение веса данной составной части к весу всего раствора. Если выразить ее в процентах, то мы получим **весовую концентрацию**.

2. **Молярная доля** – отношение числа молей растворённого вещества к общему числу молей в растворе. Выраженная в процентах она называется **молярной концентрацией**. Такой способ задания концентрации особенно удобен, так как он в то же время определяет соотношение чисел молекул, составляющих раствор вещества.

3. **Моляльность** – число молей растворённого вещества в 1 000 граммах растворителя.

В некоторых особых случаях концентрацию раствора характеризуют величиной его плотности и выражают в особых условных единицах: в делениях прибора для измерения плотности – **ареометра**.

Теперь рассмотрим механизм возникновения, закономерности и проявления осмотического давления.

**Механизм возникновения.** Пусть раствор некоторого вещества и чистый растворитель разделены полупроницаемой перегородкой, которая пропускает молекулы растворителя, но не пропускает молекулы растворённого вещества (рисунок 56). К таким перегородкам относятся в большинстве случаев плёнки растительного и животного происхождения. Тогда через достаточно большой промежуток времени устанавливается равновесие, при котором молекулы растворителя

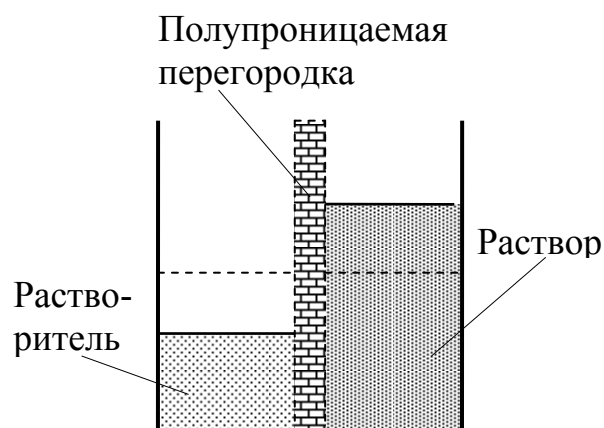


Рисунок 56

свободно взаимодействуют между собой через полупроницаемую перегородку. Характер этого взаимодействия в настоящее время ещё до конца не выяснен. Не следует представлять полупроницаемую перегородку чисто механически, считая, что в ней есть поры, через которые в чисто геометрическом смысле один сорт молекул проходит, а другой – нет. В действительности, по-видимому, речь идёт о более сложном взаимодействии молекул с полупроницаемой перегородкой, при котором происходит проникновение растворителя в вещество перегородки. Но независимо от деталей этого механизма давление на перегородку за счёт ударов по ней молекул растворителя с обеих сторон должно быть в состоянии равновесия одинаковым. Давление же растворённого вещества не передаётся растворителю с другой стороны перегородки. Таким образом, общее давление с одной стороны перегородки, равное сумме давлений растворённого вещества и растворителя, больше, чем давление с другой стороны перегородки, равное давлению растворителя. В результате уровень чистого растворителя установится ниже уровня раствора (рисунок 56). Если первоначально уровни чистого растворителя и раствора были одинаковы, то происходит проникновение чистого растворителя через полупроницаемую перегородку в область, занятую раствором, в результате чего в этой области повышаются давление и уровень раствора. Это явление проникновения растворителя через полупроницаемую перегородку называется **осмосом**. Разность давлений, которая возникает между областями, занятыми чистым растворителем и раствором, разделёнными полупроницаемой перегородкой, называется **осмотическим давлением**.

**Закономерности осмотического давления.** Для достаточно разбавленных растворов молекулы растворённого вещества ведут себя как в разрежённом газе, поскольку в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы их кинетическая энергия зависит только от температуры. Осмотическое давление равно давлению разрежённого газа этих молекул, т.е. может быть рассчитано по формуле для идеальных газов:

$$\pi = \frac{\nu RT}{V}, \quad (55.1)$$

где  $\pi$  – осмотическое давление,  $\nu$  – число молей молекул,  $V$  – объём раствора,  $R$  – универсальная газовая постоянная и  $T$  – температура.

Уравнение (55.1) выражает **закон Вант-Гоффа**. Осмотическое давление слабых растворов не зависит от природы растворителя и растворенного вещества, а зависит лишь от молярной концентрации растворенного вещества.

Для оценки порядка осмотического давления полезно заметить, что при наличии моля молекул в объеме 1 л осмотическое давление равно 2,39 МПа. Однако стенки сосуда не воспринимают это осмотическое давление, поскольку оно действует также и на свободную поверхность жидкости, благодаря чему в поверхностном слое жидкости возникают напряжения, компенсирующие осмотическое давление. На стенки сосуда действует лишь гидростатическое давление.

Следует отметить, что закон Вант-Гоффа оказывается несправедливым в тех случаях, когда растворённое вещество при растворении разлагается на ионы (диссоциирует). Это, следовательно, относится ко всем растворам кислот, солей и щелочей (электролитам).

**Проявление осмотического давления.** Демонстрации осмотического давления выглядят весьма эффектно. Например, если в 5 %- ный раствор медного купороса бросить кристаллик железистоцианистого калия, то кристаллик покрывается полупроницаемой оболочкой, осмотическое давление внутри которой увеличивает ее размеры, создавая подобие «искусственной клетки». «Клетка» растет и ветвится.

Если животный пузырь, наполненный спиртом и завязанный, опустить в воду, то вода проникает внутрь пузыря. Пузырь раздувается и может лопнуть. Явление осмоса играет громадную роль в животном и растительном мире. Большинство перегородок в живых и растительных организмах являются полупроницаемыми. Например, осмотическое давление в растительных клетках достигает нескольких атмосфер, благодаря чему жидкость из почвы может подниматься по стволу деревьев на большую высоту. Благодаря осмотическому давлению происходит переход воды из одних жидких сред в другие через соответствующие перегородки в организмах живых существ.

### Контрольные вопросы

- 1 Назовите и объясните особенности жидкостей.
- 2 В чём заключается аномалия воды?
- 3 Как проявляет себя поверхностное натяжение жидкостей?
- 4 Что представляют собой поверхностно-активные вещества?
- 5 Как можно определить коэффициент поверхностного натяжения?
- 6 В чём заключаются явления смачивания или несмачивания?
- 7 При каком условии жидкость смачивает твёрдое тело? не смачивает?

- 8 Что характеризует краевой угол?
- 9 Запишите уравнение Лапласа и объясните что оно выражает.
- 10 Какие явления называют капиллярными? От чего зависит высота поднятия смачивающей жидкости капилляре?
- 11 Что такое флотация?
- 12 От чего зависит дополнительное давление, вызванное кривизной поверхности?
- 13 Объясните явления испарения и конденсации жидкостей. Что представляет собой пересыщенный пар?
- 14 Чем связано различие в значениях давлений насыщенного пара над плоской и искривлённой поверхностями?
- 15 Как происходит кипение жидкостей? Как можно получить перегретую жидкость?
- 16 Назовите основные параметры состояния растворов.
- 17 Объясните механизм возникновения, закономерности и проявления осмотического давления.
- 18 Запишите уравнение Вант-Гоффа. Что оно выражает?
- 19 Назовите примеры проявления осмотического давления.
- 20 Почему у всех веществ поверхностное натяжение уменьшается с температурой?

### Тесты

1. Сферическая капля ртути была разделена на 10 одинаковых капель. Во сколько раз возросло при этом капиллярное давление внутри капель?

- А) в 10 раз      В) в 1,25 раз      С) в 100 раз      **Д) в 2,15 раз**      Е) в 4,64 раз

2. В стеклянную трубку с внутренним диаметром  $d_1 = 20$  мм вставлена коаксиально стеклянная палочка диаметра  $d_2 = 19$  мм. Считая смачивание полным, определите высоту  $h$  капиллярного поднятия воды в кольцевом зазоре между трубкой и палочкой. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м.

- А) 3 мм      В) 4 см      **С) 3 см**      Д) 2 мм      Е) 2 см

3. Капля ртути объёма  $V = 22,5$  мм<sup>3</sup> помещена между двумя расположенными горизонтально стеклянными пластинками. С какой силой  $F$  нужно прижимать друг к другу пластинки, чтобы установить между ними зазор  $d = 3$  мкм? Несмачивание ртутью пластин считать полным. Поверхностное натяжение ртути  $\sigma = 0,47$  Н/м.

- А) 2,4 кН**      В) 240 Н      С) 24 Н      Д) 940 Н      Е) 9,4 кН

4. Две вертикальные параллельные друг другу стеклянные пластины погружены частично в воду. Зазор между пластинами  $d = 0,5$  мм, размер пластин



по горизонтали  $\ell = 10$  см. Считая смачивание полным, определите высоту  $h$ , на которую поднимается вода в зазоре. Поверхностное натяжение воды равно  $\sigma = 73$  мН/м.

- А) 1 см      В) 2 см      **С) 3 см**      Д) 4 см      Е) 5 см

5. Две вертикальные параллельные друг другу стеклянные пластины погружены частично в воду. Зазор между пластинами  $d = 0,5$  мм, размер пластин по горизонтали  $\ell = 10$  см. Считая смачивание полным, определите силу  $F$ , с которой пластины притягиваются друг к другу. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м.

- А) 1,23 Н      В) 1,03 Н      С) 0,83 Н      Д) 0,63 Н      **Е) 0,43 Н**

6. После покрытия слоем парафина радиус отверстий решета стал равен  $r = 1,5$  мм. Приняв во внимание, что вода не смачивает парафин, определите высоту  $h$  слоя воды, который можно носить в решете так, чтобы вода не пролилась через отверстия. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м.

- А) 1 см**      В) 2 см      С) 3 см      Д) 4 см      Е) 5 см

7. U-образный сосуд состоит из сообщающихся широкой и узкой трубок (рисунок 57). При наливании в сосуд воды между уровнями ее в узкой и широкой трубках устанавливается разность высот  $h = 8$  см. Внутренний радиус широкой трубки  $r_1 = 5$  мм (диаметр  $d_1 = 2r_1$ ). Считая смачивание полным, найдите радиус узкой трубки  $r_2$ . Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м.

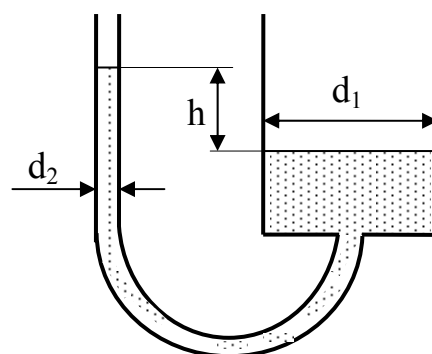


Рисунок 57

- А) 0,18 мм**      В) 0,12 мм      С) 0,24 мм      Д) 0,15 мм      Е) 0,21 мм

8. Разность уровней воды в U-образном капилляре с диаметрами каналов  $d_1 = 1$  мм и  $d_2 = 3$  мм равна  $h = 2$  см (рисунок 57). Определите поверхностное натяжение воды. Смачивание считайте полным.

- А) 78 мН/м      **В) 73 мН/м**      С) 68 мН/м      Д) 63 мН/м      Е) 58 мН/м

9. Определите, на какой глубине  $h$  образуются пузырьки газа в воде, если при всплытии пузырьков их радиус увеличивается в  $n = 1,1$  раза, достигая на поверхности значения  $r = 1$  мкм. Атмосферное давление  $P = 10^5$  Па. Считайте, что температура газа в пузырьке во время всплытия не изменяется. Поверхностное

стное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м. Плотность воды  $1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

- А) 5 м      В) 6 м      **С) 7 м**      Д) 8 м      Е) 9 м

10. Найти осмотическое давление, если в 10 л воды растворены 50 г метилового спирта  $\text{CH}_3\text{OH}$  ( $M_r = 32$ ). Температура раствора  $27^\circ\text{C}$ .

- А) 89,5 кПа      В) 189,5 кПа      С) 289,5 кПа      **Д) 389,5 кПа**      Е) 489,5 кПа

11. Каково осмотическое давление раствора, если в нём на одну молекулу растворённого вещества приходится 800 молекул воды? Температура раствора  $47^\circ\text{C}$ . Диссоциация отсутствует.

- А) 0,06 МПа      В) 0,09 МПа      С) 0,12 МПа      Д) 0,15 МПа      **Е) 0,18 МПа**

12. Для увеличения осмотического давления раствора нужно увеличить концентрацию раствора в 1,3 раза. На сколько градусов необходимо нагреть раствор, чтобы, не изменяя его концентрации, получить такое же увеличение осмотического давления? Начальная температура раствора  $0^\circ\text{C}$ .

- А) на 82 К**      В) на 72 К      С) на 62 К      Д) на 52 К      Е) на 42 К

13. Осмотическое давление раствора при температуре  $27^\circ\text{C}$  равно 0,2 МПа. Сколько частиц растворённого вещества находится в растворе объёмом  $1$  дм<sup>3</sup>?

- А)  $6 \cdot 10^{22}$  дм<sup>-3</sup>      **В)  $5 \cdot 10^{22}$  дм<sup>-3</sup>**      С)  $4 \cdot 10^{22}$  дм<sup>-3</sup>      Д)  $3 \cdot 10^{22}$  дм<sup>-3</sup>      Е)  $2 \cdot 10^{22}$  дм<sup>-3</sup>

14. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром 10 см? Процесс выдувания считайте изотермическим. Поверхностное натяжение мыльного раствора воды  $\sigma = 45$  мН/м.

- А) 7,7 мДж      В) 6,7 мДж      С) 5,7 мДж      **Д) 4,7 мДж**      Е) 3,7 мДж

15. Мыльный пузырь сферической формы выдувается так, что его радиус каждую секунду увеличивается на 1 см. Вычислите мощность, необходимую для выдувания пузыря радиусом 5 см. Поверхностное натяжение мыльного раствора воды  $\sigma = 45$  мН/м.

- А) 0,2 мВт      В) 0,4 мВт      С) 0,6 мВт      Д) 0,8 мВт      **Е) 1 мВт**

16. Определите плотность воздуха внутри мыльного пузыря диаметром 1 см при температуре  $20^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении 0,1 МПа. Поверхностное натяжение мыльного раствора воды  $\sigma = 45$  мН/м.



А) 1,15 кг/м<sup>3</sup>    В) 1,2 кг/м<sup>3</sup>    С) 1,25 кг/м<sup>3</sup>    Д) 1,3 кг/м<sup>3</sup>    Е) 1,35 кг/м<sup>3</sup>

17. В жидкость на незначительную глубину опущена капиллярная трубка диаметром канала  $d = 2$  мм. Какова масса вошедшей в трубку жидкости, если поверхностное натяжение ее  $\sigma = 43$  мН/м? Смачивание считайте полным.

А) 28 мг    В) 32 мг    С) 36 мг    Д) 40 мг    Е) 44 мг

### Упражнения для самоконтроля

6.1. Грамм ртути помещён между двумя плоскими стеклянными пластинками. Какую силу  $F$  надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть приняла форму круглой лепёшки однородной толщины и радиуса  $R = 5$  см? Поверхностное натяжение ртути  $\sigma = 0,487$  Н/м, краевой угол между ртутью и стеклом равен  $\vartheta = 40^\circ$ .  $[F = \frac{2\sigma\rho\cos\vartheta}{m}\pi^2R^4 = 630 \text{ Н}]$

6.2. Капля воды массы  $m = 0,1$  г введена между двумя плоскими и параллельными между собой стеклянными пластинками, смачиваемыми водой, причём краевой угол  $\vartheta = 0$ . Как велика сила притяжения  $F$  между пластинками, если они находятся друг от друга на расстоянии  $d = 10^{-4}$  см? Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м.  $[F = S \cdot P = 2m\sigma/\rho d^2 = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Н}]$

6.3. С какой силой  $F$  притягиваются две вертикальные и параллельные стеклянные пластинки, частично погружённые в воду так, что расстояние между ними равно  $d = 0,1$  мм? Ширина пластинок  $\ell = 10$  см,  $\sigma = 73$  мН/м,  $\vartheta = 0$ . Высота пластинок такова, что поднимающаяся вода не доходит до их верхних краёв.  $[F = \frac{2\sigma^2\ell}{\rho g d^2} \cos^2 \vartheta \approx 10 \text{ Н}]$

6.4. Определите силу  $F$ , необходимую для отрыва круглой невесомой пластинки радиуса  $r = 8$  см, положенной на поверхность воды. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  мН/м. Пластинка смачивается водой.  $[F \approx 2\pi r^2 \sqrt{\rho g \sigma} \approx 1,1 \text{ Н}]$

6.5. Найдите высоту поднятия  $h$  жидкости у вертикальной бесконечной пластинки, смачиваемой жидкостью. Краевой угол  $\vartheta$ .  $[h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} (1 - \sin\vartheta)]$

6.6. Определите глубину  $h$  ртутной лужицы на плоском горизонтальном стекле. Поперечные размеры лужицы велики по сравнению с ее глубиной. Поверхностное натяжение ртути на границе с воздухом  $\sigma = 0,49$  Н/м, краевой угол на стекле  $\vartheta = 140^\circ$ . Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.  $[h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\vartheta}{2} = 3,6 \text{ мм}]$

6.7. На какую величину  $\Delta T$  температура воздуха внутри мыльного пузыря должна превышать температуру  $T$  окружающего воздуха, чтобы пузырь стал подниматься? Радиус пузыря равен  $r$ , поверхностное натяжение мыльной плён-

ки  $\sigma$ . Массой плёнки можно пренебречь. Учтём, что давление воздуха внутри пузыря мало отличается от атмосферного  $P$ .  $[\Delta T > 4\sigma T/Pr]$

6.8. В дне стеклянного сосуда со ртутью имеется малое круглое отверстие радиуса  $r$ . При какой толщине слоя ртути она не будет вытекать через отверстие?  $[h \leq 2\sigma/\rho gr]$

6.9. В сосуде с воздухом при давлении  $P_0$  находится мыльный пузырёк диаметра  $d$ . Давление воздуха изотермически уменьшили в  $n$  раз, в результате чего диаметр пузырька увеличился в  $\eta$  раз. Найдите поверхностное натяжение

$\sigma$  мыльной воды. 
$$\left[ \sigma = \frac{P_0 d (1 - \eta^3 / n)}{8(\eta^2 - 1)} \right]$$

## Глава 7 Твёрдые тела

Наиболее характерной особенностью твёрдых тел, отличающих их, как агрегатное состояние вещества от других агрегатных состояний, является сохранение формы и объёма. Способность сохранять форму (упругость формы) является главным внешним отличием твёрдых тел от жидких и газообразных веществ. Наряду с этим твёрдые тела обладают многими другими свойствами, отличающими их от жидких тел. И отличия эти во многих отношениях более глубокие, чем те, что разделяют жидкости и газы.

Это, впрочем, относится не ко всем твёрдым телам. Существуют вещества, которые по признаку сохранения формы должны быть отнесены к твёрдым телам, но которые во всем остальном не отличаются от жидкостей. К числу таких веществ, называемых **аморфными** веществами, относятся стекло, различные смолы, пластмассы. Вещества этого типа ведут себя как жидкости с аномально большой вязкостью, благодаря которой они при обычных или низких температурах не могут течь. Однако при повышении температуры вязкость их уменьшается, они постепенно, как говорят, размягчаются и приобретают обычную для жидкостей способность течь.

В противоположность этому у «настоящих» твёрдых тел такое размягчение не происходит, хотя и они при повышении температуры переходят в жидкое состояние. Но происходит этот переход не при постепенном повышении температуры, а скачком, при вполне определённой для данного вещества температуре – **температуре плавления**. Это – одна из важных особенностей, отличающих «настоящие» твёрдые тела от аморфных. Эта и другие особенности твёрдого состояния указывают на какие-то внутренние особенности в строении твёрдых тел, которых нет в жидких и аморфных телах.

Мы начинаем изучение свойств твёрдого тела с рассмотрения тех особенностей, которые отличают его от жидкости и газа, и тех свойств, которые являются следствием этих особенностей.

Свойства твёрдых тел обусловлены главным образом тем, что атомы (или другие частицы) расположены в них не хаотически, как в жидких и газообразных веществах, а в определённом, характерном для каждого вещества порядке. Причем в твёрдом теле такое упорядоченное расположение атомов простирает-

ся на весь объём тела (так называемый **дальний порядок**). Такие тела с правильным расположением частиц называются **кристаллическими**. Только они и должны считаться твёрдыми телами. В аморфных и в жидких телах упорядоченное расположение частиц распространяется только на соседние атомы (так называемый **ближний порядок**).

Причиной перехода атомов к упорядоченному расположению при образовании твёрдого тела являются, разумеется, силы взаимодействия между ними. Поскольку образование кристалла при охлаждении происходит само по себе, атомы располагаются в кристалле так, чтобы их потенциальная энергия в поле сил взаимодействия была минимальна, а сама сила – равна нулю.

Природа сил взаимодействия между атомами хорошо известна. Это электрические силы притяжения и отталкивания положительно и отрицательно заряженных частиц (электронов и ядер), имеющих в каждом атоме. Силы эти очень сложны – уже потому, что здесь идёт речь о взаимодействиях всех электронов и ядер всех атомов тела. Но дело даже не в множественности сил, а в том, что, как оказывается, классическая физика их вообще описать не может. Даже такой простой случай, как взаимодействие всего двух атомов в молекуле водорода, нельзя описать и объяснить на основе классической физики.

Решение задачи даёт лишь квантовая механика, но это выходит за рамки нашего курса. Мы здесь заметим лишь, что зависимость силы взаимодействия  $F$

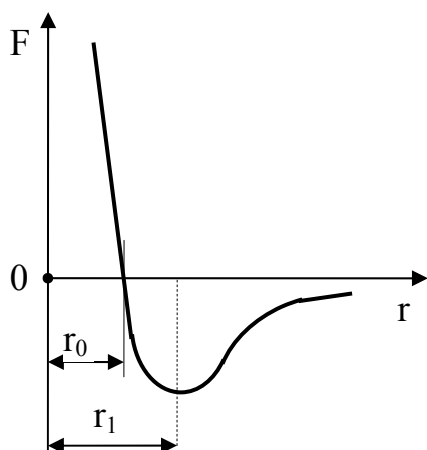


Рисунок 58

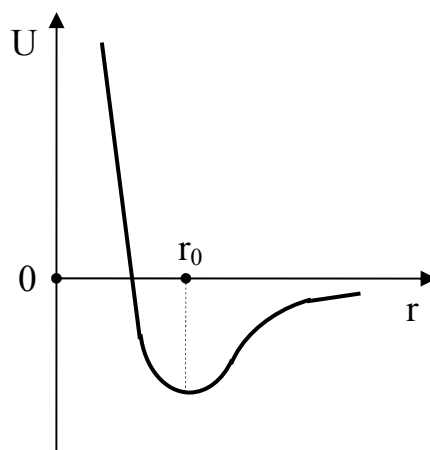


Рисунок 59

двух атомов от расстояния  $r$  между ними имеет вид, представленный на рисунке 58. На больших расстояниях атомы практически не взаимодействуют друг с другом, так что сила может считаться равной нулю. При уменьшении расстояния  $r$  возникает сила **притяжения** между атомами (отрицательный знак силы и означает, что она имеет характер силы притяжения). По абсолютному значению сила эта растёт с уменьшением  $r$  вплоть до некоторого расстояния  $r_1$ . Затем сила уменьшается и при расстоянии  $r_0$  между атомами она становится равной нулю. При дальнейшем уменьшении  $r$  сила вновь появляется, но уже как сила **отталкивания**, быстро растущая с уменьшением расстояния между атомами, стремясь к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ .

Этой кривой  $F(r)$  соответствует похожая на нее кривая зависимости потенциальной энергии  $U$  взаимодействия атомов от  $r$ , представленная на рисунке 59.

Сходство кривых не должно удивлять, так как  $F$  и  $U$  связаны, как известно, соотношением

$$F = - \frac{dU}{dr}.$$

При расстоянии между атомами, равном  $r_0$ , когда сила взаимодействия равна нулю, потенциальная энергия проходит через минимум. Об атоме в таком положении принято говорить, что он находится на дне «потенциальной ямы». Ясно, что это – положение равновесия. Ведь равновесие частицы как раз и характеризуется тем, что сумма сил, приложенных к ней, равна нулю, а потенциальная энергия минимальна.

### § 7.56 Симметрии твёрдых тел

Место, занимаемое материальным телом, и его форма абстрагируются в нашем понятии в виде самостоятельных геометрических пространственных образов. Благодаря этому приобретает смысл представление о сравнении твёрдых тел по их форме, размеру и т.д. Очень важным геометрическим свойством твёрдых тел является их симметрия. Например, найденный на дороге камень отличается от кирпича в первую очередь тем, что он имеет неправильную форму. Слова «правильная» и «неправильная» форма являются субъективным отражением объективных свойств форм материальных тел, а именно их симметрии.

Мы говорим, что прямой цилиндр более симметричен, чем прямоугольный параллелепипед, а шар более симметричен, чем цилиндр. Мы говорим также, что внешняя форма человеческого тела, а также тела большинства животных симметричны. Задача состоит в том, чтобы дать математическую формулировку понятию симметрии.

Под **симметрией** понимается способность твёрдого тела совмещаться с самим собой в результате его движений или воображаемых операций над его точками. Чем большим числом способов такое совмещение возможно, тем более симметричной является форма тела.

Например, прямой круглый цилиндр совмещается с самим собой при повороте вокруг своей оси на любой угол. Он также совмещается с самим собой при повороте на угол в  $180^\circ$  вокруг любой оси, перпендикулярной оси цилиндра, проведенной через точку оси на половине высоты цилиндра. Если же взять шар, то он может быть совмещен с самим собой при повороте его на любой угол вокруг любой оси, проходящей через центр шара. Ясно, что возможностей для совмещения шара с самим собой значительно больше, чем для цилиндра. Именно этот факт выражается в утверждении, что шар является телом более симметричным, чем прямой круглый цилиндр.

Однако к совмещениям тела с самим собой только с помощью пространственных движений симметрия не сводится. Например, левая половина человеческого тела никакими пространственными движениями не может быть совмеще-

на с правой. Другими словами, на левую руку нельзя надеть правую перчатку. Под симметрией левой и правой рук понимают не возможность совмещения левой руки с правой в результате их пространственного совмещения, а возможность совмещения правой руки с отражением левой руки в плоском зеркале.

Несмотря на кажущееся чрезвычайно большое многообразие возможностей симметрии твёрдых тел, все они складываются из четырёх элементов симметрии. Различные комбинации этих четырёх элементов симметрии и составляют всевозможные симметрии твёрдых тел.

**Ось симметрии n-го порядка.** Если тело совмещается с самим собой при повороте вокруг некоторой оси на угол  $2\pi/n$ , то эта ось называется **осью симметрии n-го порядка**. Например, квадратный цилиндр совмещается с самим собой при повороте на угол  $\pi/2$  вокруг оси, проходящей через точки пересечения диагоналей квадратов, образующих его основания. Следовательно, эта ось является осью 4-го порядка. Нет необходимости доказывать, что **любая ось тела является осью симметрии 1-го порядка**.

**Плоскость симметрии.** Если тело совмещается с самим собой в результате зеркального отражения его точек в некоторой плоскости, то эта плоскость называется **плоскостью симметрии тела**.

**Центр симметрии.** Если тело совмещается с самим собой при инверсии относительно некоторой точки, то эти точки называют **центром симметрии**.

**Зеркально-поворотная ось n-го порядка.** Если тело совмещается между собой при повороте на угол  $2\pi/n$  и отражении в плоскости, перпендикулярной этой оси, то ось называется **зеркально-поворотной осью n-го порядка**.

**Точечные группы симметрии.** Совокупность элементов симметрии тела называется его **группой симметрии**. Рассмотренные элементы симметрии характерны тем, что они оставляют неподвижной по крайней мере одну точку тела. Соответствующие им группы симметрии называются **точечными**.

Все перечисленные симметрии можно описать с помощью одних только отражений в плоскости. Поворот на угол  $\alpha$  можно представлять в виде двух последовательных отражений в плоскостях, пересекающихся на оси поворота под углом  $\alpha/2$  (рисунок 60). Инверсия относительно центра симметрии сводится к трем отражениям в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр симметрии.

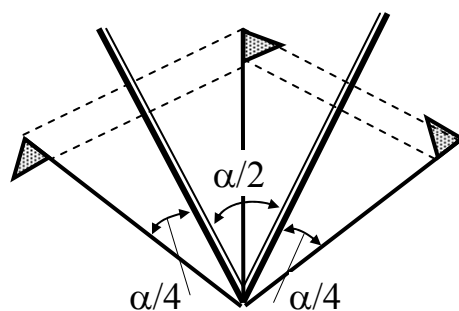


Рисунок 60

**Зеркальные изомеры.** Два тела могут быть похожими друг на друга и могут быть совмещены друг с другом с помощью отражения в плоскости, однако они не могут быть совмещены друг с другом никакими пространственными движениями. В качестве примера укажем на кисти человеческих рук. Такие тела называются **зеркальными изомерами**. Известны многие молекулы, являющиеся зеркальными изомерами. Они отличаются по своим свойствам в том же смысле, в каком правое отличается от левого. Например, они в разных направ-



лениях вращают плоскость поляризации света, проходящего через них, если только такое вращение вообще имеет место. Химические реакции между одноименными зеркальными изомерами проходят по-другому, чем между разноименными. Например, правый изомер одного вещества с правым изомером другого реагирует иначе, чем правый с левым.

## § 7.57 Кристаллические решётки

**Необходимость периодической структуры.** Твёрдое состояние возникает при столь сильном взаимодействии между молекулами (атомами или ионами), что тепловое движение молекул не играет в структуре столь значительную роль, которую оно играет в жидкостях и особенно в газах. В результате этого молекулы располагаются друг относительно друга в некоторых фиксированных с большой точностью положениях, осуществляя небольшие тепловые колебания около положений равновесия. Взаимное расположение точек равновесия определяется условиями равновесия. Ясно, что если эти условия равновесия выполнены в некоторой области пространства и обусловили взаимное расположение молекул в этой области пространства, то они должны быть выполнены в другой области и, следовательно, должны обусловить аналогичное расположение молекул в другой области пространства. А это означает, что взаимное расположение молекул повторяется при переходе из одних областей пространства в другие, т. е. **структура твёрдых тел периодическая**. Она реализуется в виде **кристаллической решётки**, а сами твёрдые тела являются кристаллами. Точки равновесия составляющих кристалл атомов, молекул или ионов называются **узлами кристаллической решётки**.

Однако при такой аргументации возникает вопрос о причинах существования аморфных твёрдых тел, таких, как стекло, пластик, и аналогичных веществ без периодической структуры. Ответ состоит в том, что они не находятся в равновесном состоянии и с течением времени изменяют свою структуру, приближаясь к кристаллическому состоянию. Например, стекло по истечении нескольких сотен лет кристаллизуется. Процесс его кристаллизации может быть значительно ускорен при высокой температуре, когда оно размягчается. В пластике процесс кристаллизации сильно затруднён перепутыванием между собой образующих их длинных молекул. Для повышения качества пластиков специальной обработкой добиваются того, чтобы практически все молекулы пластика стали различными (физические длины, боковые цепи и т. д.), и для обеспечения стабильности нет необходимости иметь периодическую структуру.

**Примитивная решётка.** В результате периодичности структуры кристаллической решётки должна существовать некоторая элементарная совокупность атомов, повторением которой во всех направлениях можно исчерпать всю неограниченную в пространстве решётку. Как элементарная совокупность атомов (для простоты выражений мы говорим об атомах, хотя это могут быть и молекулы и ионы), так и порождаемая ее повторением решётка являются, вообще говоря, очень сложными образованиями. Поэтому всю решётку целесообразно разбить на некоторые, более простые подрешётки, каждая из которых была бы

достаточно простой. Ясно, что эта подрешётка сама является решёткой. Наиболее простой решёткой является решётка, состоящая из параллелепипедов как элементарной совокупности атомов, повторением которой исчерпывается вся решётка (рисунок 61).

Выбрав начало координат в некотором узле такой решётки, можно радиус-вектор любого другого узла представить в виде

$$\mathbf{r} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \quad (57.1)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  – целые числа (включая нуль).

Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  называются **базисными**, а их совокупность – **базисом решетки**. Длины рёбер  $a_1, a_2, a_3$  называются **основными периодами решётки**. Параллелепипед с рёбрами  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  вместе с атомами в его вершинах называется **элементарной ячейкой кристаллической решётки**. Если в формуле (57.1) числа  $n_1, n_2, n_3$  пробегает всевозможные независимые целочисленные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то радиус-вектор  $\mathbf{r}$  проходит все узлы решётки и нет никаких узлов решётки, которые не охватывались бы формулой (57.1). Такая решётка называется **примитивной** или **решёткой Браве**, а ее элементарная ячейка – **примитивной ячейкой**.

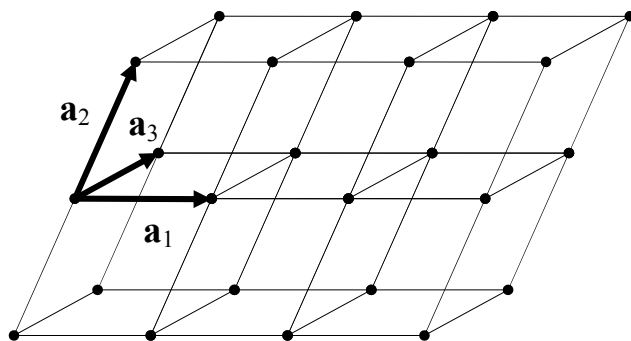


Рисунок 61

Конкретная кристаллическая решётка, вообще говоря, не может быть представлена в виде одной решётки Браве, а является **совокупностью** нескольких решёток Браве. Поэтому она называется **сложной**.

**Неоднозначность выбора базиса примитивной решётки.** Выбор базиса даже примитивной решётки не является однозначным. В этом легко убедиться по рисунку 62, где для двумерного случая параллельными пунктирными линиями показаны два возможных построения примитивной решётки с различными базисами. В первом случае базис составлен векторами  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , во втором – векторами  $\mathbf{a}_1'$  и  $\mathbf{a}_2$ . Элементарная ячейка в первом случае является прямоугольным параллелограммом, во втором – непрямоугольным. Около каждого атома в узле решётки в плоском случае располагается четыре элементарных ячейки. Следовательно, площадь, занимаемая одним атомом в решётке, равная общей площади, делённой на число атомов, равна площади элементарной ячейки  $|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|$  в первом случае и  $|\mathbf{a}_1' \times \mathbf{a}_2|$  – во втором.

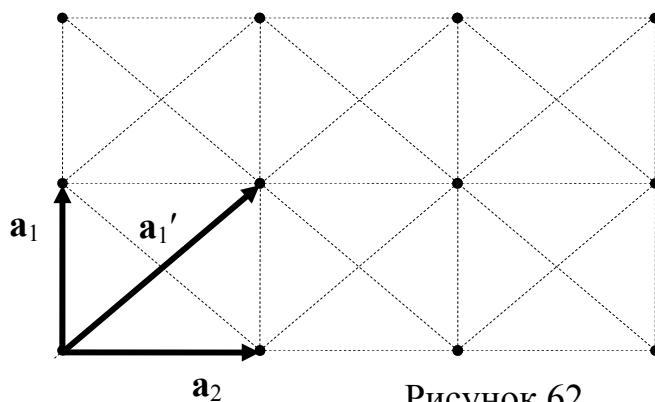


Рисунок 62



Как и следовало ожидать, площади элементарных ячеек в обоих случаях равны, хотя базисы различны. Все эти выводы без труда переносятся на трёхмерный случай, в котором выбор элементарной кристаллической ячейки также неоднозначен, однако объём элементарной ячейки при всевозможных выборах базиса является неизменным и по формуле для объёма параллелепипеда равным

$$\tau_0 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3. \quad (57.2)$$

Это есть объём, приходящийся в решётке на один атом.

Различные примитивные базисы отличаются друг от друга длиной базисных векторов или, что то же самое, основными периодами решётки. **Примитивная решётка с минимальными основными периодами называется приведённой.**

Определить, является некоторая заданная решётка примитивной или сложной, не всегда легко с первого взгляда. Лучше всего это делать, рассматривая всю решётку, а не ее небольшую часть, равную примерно элементарной ячейке. Задача сводится к возможности проведения трёх систем параллельных плоскостей таким образом, чтобы все атомы решётки оказались в точках пересечения плоскостей, и не было бы атомов, не попавших в эти точки пересечения плоскостей.

Рассмотрим в качестве примера плоскую решётку (рисунок 63). Если в качестве базисных взять векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , то решётка представляется сложной, поскольку атомы, находящиеся в центрах квадратов, не попадают в узлы примитивной решётки, построенной на этом базисе. На первый взгляд, кажется, что для учёта этих узлов необходима еще одна примитивная решётка и, следовательно, исходная решётка является сложной, а не примитивной. Однако такое заключение неправильно. Возьмём в качестве базисных векторы  $\mathbf{a}_1'$  и  $\mathbf{a}_2'$ . В этом базисе вся исходная решётка может быть представлена в виде одной примитивной решётки, т. е. исходная решётка тоже является примитивной. Это очевидно, если посмотреть на систему пунктирных линий (рисунок 63).

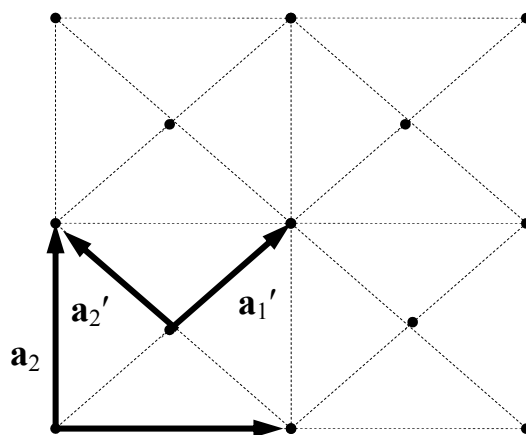


Рисунок 63

**Трансляционная система.** Ввиду бесконечной протяжённости **решётка обладает кроме симметрий, характерных для твёрдых тел, трансляционной симметрией**, т. е. способностью совмещаться с собой в результате поступательного перемещения. Например, если примитивную решётку переместить вдоль одного из рёбер элементарной ячейки на целое число основных периодов, то решётка совпадёт или совместится с собой. Если сместить решётку на вектор  $\mathbf{r}$ , определённый в (57.1), то решётка опять совпадает с собой. Поэтому вектор  $\mathbf{r}$  называется **вектором трансляции**. Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что вся примитивная решётка может быть получена из любого узла, если его подвергнуть всевозможным трансляциям параллельно базисным векторам.

**Пространственные группы.** Элементы симметрии твёрдого тела образуют точечные группы симметрии. Если к ним добавить трансляционную симметрию, характерную для периодических бесконечных структур, то совокупность этих симметрий образует пространственную группу. Поэтому можно сказать, что **кристаллические решётки характеризуются пространственными группами симметрий.**

**Элементы симметрии решётки.** Прежде всего, необходимо отметить, что симметрии решётки в целом отличаются от симметрий ее элементарной ячейки. Это очевидно из того, что элементарная ячейка выбирается неоднозначно, а различные элементарные ячейки могут иметь различную симметрию. Поэтому **под симметрией решётки понимается симметрия именно решётки, а не ее элементарной ячейки.**

Ясно, что всякая примитивная решётка имеет центр симметрии, которым может быть любой узел примитивного параллелепипеда, середины его рёбер и центры его граней. Плоскость симметрии также является элементом симметрии решёток. Что же касается осей и зеркально-поворотных осей симметрии, то они могут быть лишь осями 2, 3, 4 и 6-го порядков, а оси других порядков невозможны. Для доказательства заметим, что при вращении атомы решётки перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Рассмотрим атомы, лежащие в некоторой плоскости. Они создают плоскую кристаллическую решётку, узлы которой образуют систему правильных одинаковых многоугольников, переходящих при вращении друг в друга и, следовательно, плотно, без промежутков, покрывающих всю поверхность. Рассмотрим точку 0 (рисунок 64), в которой сходятся рёбра примыкающих в этой точке правильных многоугольников. Если  $p$  – число рёбер, сходящихся в этой точке, то угол между рёбрами равен  $2\pi/p$ . С другой стороны, угол между сторонами правильного  $n$ -угольника равен  $\pi(n - 2)/n$ .

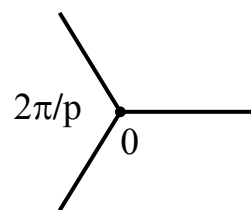


Рисунок 64

При заполнении плоскости правильными многоугольниками без промежутков эти углы равны:

$$2\pi/p = \pi(n - 2)/n. \quad (57.3)$$

Отсюда следует, что

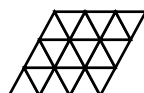
$$p = 2n/(n - 2), \quad (57.4)$$

причём числа  $p$  и  $n$  должны быть целыми. Решениями этого уравнения в целых числах  $p$  и  $n$  являются значения

$$n = 3, n = 4, n = 6. \quad (57.5)$$

Таким образом, поверхность без промежутков можно покрыть

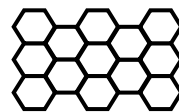
равносторонними треугольниками ( $n = 3$ ):



квадратами ( $n = 4$ ):



правильными шестиугольниками ( $n = 6$ )  
(структура пчелиных сот):



Других правильных многоугольников, способных без промежутков покрыть поверхность, не существует.

К ним добавляется, очевидно, возможная ось  $n = 2$ , соответствующая отражению в плоскости, проходящей через ось, а также тривиальная ось  $n = 1$ , соответствующая углу поворота на  $2\pi$ . Таким образом, у кристаллической решетки возможны оси вращения только 2, 3, 4 и 6-го порядков. Аналогично показывается, что и зеркально-поворотные оси могут быть только тех же порядков.

В результате получается, что **число элементов точечных групп симметрии у кристаллических решеток конечно, а, следовательно, конечно и число возможных симметрий.**

**Кристаллические классы.** Поскольку сложная кристаллическая решётка состоит из решёток Браве, то классифицировать кристаллы в первую очередь целесообразно по симметрии решёток Браве, причем под симметрией, как это было только что сказано, понимается точечная симметрия. Такая классификация была произведена Браве. Он показал, что хотя симметрия решётки не обязательно совпадает с симметрией любой примитивной ячейки, можно всегда найти такую примитивную ячейку, которая имеет те же элементы симметрии, что и решётка в целом. Это возможно для всех решёток, за исключением гексагональных, где примитивная ячейка не содержит всех элементов симметрии, которые имеются у решётки в целом. Наименьшая из примитивных ячеек, включающая в себя все элементы симметрии решётки, называется **ячейкой или параллелепипедом Браве.**

Имеется шесть типов примитивных параллелепипедов Браве и поэтому с учетом гексагональной решётки – всего семь типов решёток или семь типов кристаллических систем. Помещение в центрах граней или в центре объёма параллелепипедов Браве новых атомов не изменяет симметрии решётки, но добавляет новые типы решётки. Поэтому всего существует 14 типов решёток Браве, распределённых по семи кристаллическим системам. Подробное описание этих решёток является предметом кристаллографии, а мы здесь ограничимся лишь краткими замечаниями.

На рисунке 65 изображены решётки, принадлежащие к семи кристаллическим системам (Кристаллические классы и типы решёток. Системы: а – кубическая, б – тетрагональная, в – гексагональная, г – ромбоэдрическая, д – ромбическая, е – моноклинная, ж – триклинная). В каждой из систем, за исключением гексагональной, первым показан основной параллелепипед Браве, а затем указаны решётки, которые получаются центрированием объёма и граней основного параллелепипеда. Эта операция не изменяет симметрии решётки, но,

конечно, примитивные ячейки получаемой в результате этого решётки уже не совпадают с основным параллелепипедом Браве и имеют симметрии, отличные от симметрии решётки. Что касается гексагональной системы, то у нее элементарная ячейка, имеющая те же элементы симметрии, что и решётка, не является параллелепипедом. Элементарный параллелепипед в этом случае указан на рисунке вместе с элементарной ячейкой.

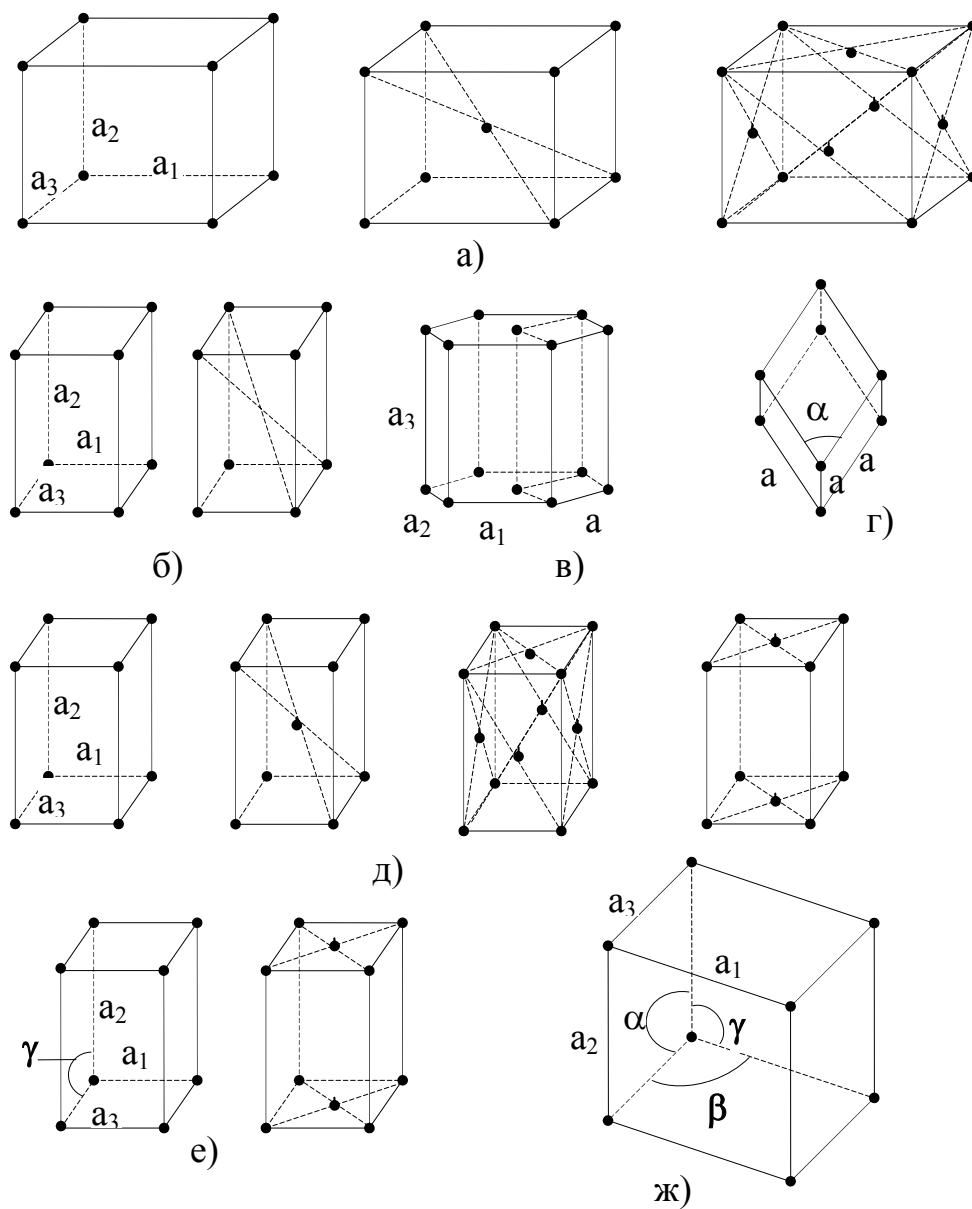


Рисунок 65

На рисунке 66 даны обозначения осей и углов основного параллелепипеда Браве. С использованием этих обозначений основные параллелепипеды Браве различных кристаллических систем могут быть охарактеризованы таблицей 4.

**Симметрии сложных решеток.** Поскольку сложная решётка складывается из примитивных, имеющих различные симметрии, то симметрия сложной решётки существенно отличается от симметрии слагающих ее примитивных решёток. Кроме того, для сложной решётки возможны дополнительные элементы симметрии, а именно: винтовая ось и плоскость зеркального скольжения.

**Винтовой осью n-го порядка** называется прямая, перемещение решётки вдоль которой с одновременным вращением на угол  $2\pi/n$  приводит к ее совпадению с собой. Винтовые оси одного и того же порядка могут отличаться друг от друга направлением вращения, т. е. быть «левыми» или «правыми».

**Плоскостью зеркального скольжения** называется такая плоскость, при отражении в которой с одновременным смещением на определённое расстояние параллельно плоскости решётка совмещается сама с собой.

Таким образом, наряду с элементами точечной симметрии и трансляционной симметрией решётка обладает другими элементами симметрии – винтовыми осями и плоскостями зеркального скольжения. Совокупность всех элементов симметрии решётки называется ее **пространственной группой**. Как было показано Е. С. Фёдоровым, всего может существовать 230 различных пространственных групп. Эти группы называются **группами Фёдорова** или Фёдоровскими группами. Не все они обнаружены у кристаллов, имеющих в природе. Найдены пока кристаллы для 177 Фёдоровских групп. Более подробно эти вопросы рассматриваются в курсе кристаллографии.

Таблица 4. Характеристики кристаллических систем

Кристаллическая система	Соотношение рёбер элементарной ячейки	Соотношение между углами в элементарной ячейке
Триклинная	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$
Моноклинная	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$
Ромбическая	$a_1 \neq a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Тетрагональная	$a_1 = a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Кубическая	$a_1 = a_2 = a_3$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Ромбоэдрическая	$a_1 = a_2 = a_3$	$\alpha = \beta = \gamma$ , но $< 120^\circ$ и $\neq 90^\circ$
Гексагональная	$a_1 = a_2 \neq a_3$	$\alpha = \beta = 90^\circ$ , $\gamma = 120^\circ$

**Кристаллографические системы координат.** В качестве систем координат, в которых задаётся положение атомов решётки, берут прямолинейные системы координат, оси которых совпадают с рёбрами параллелепипеда Браве, а начало находится в одном из узлов кристаллической решётки. В качестве единицы длины по каждой оси принимается длина соответствующего ребра параллелепипеда Браве. Поэтому координаты атомов выражаются целыми числами. Такие системы координат называются **кристаллографическими**. Выбор осей координат дается в таблице 4. **В кубических, тетрагональных и ромбических кристаллах системы координат являются прямоугольными, а в остальных – косоугольными.** В гексагональных кристаллах за оси  $Ox$  и  $Oy$  параллелепипеда Браве принимаются стороны основания правильного шестиугольника (см. рисунок 65), составляющие угол  $120^\circ$  друг с другом, а ось  $Oz$  направлена перпендикулярно основанию. Выбор параллелепипеда Браве для моноклинных и триклинных кристаллов не однозначен. Условились, что в моноклинных кристаллах за ось  $Oz$  берется та, которая образует прямой угол с двумя другими осями (см. таблицу 4).

**Обозначение атомных плоскостей.** В кристалле можно провести бесконечное число плоскостей, в каждой из которых лежит бесконечное число атомов. Для того чтобы характеризовать семейство параллельных плоскостей, достаточно определить одну из них, причём без потери общности можно ограничиться примитивными решётками.

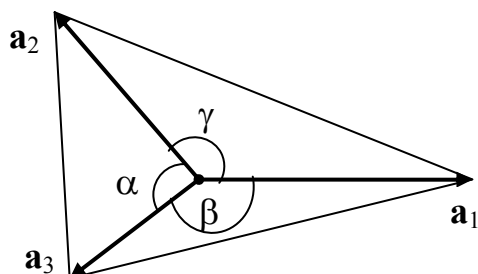


Рисунок 66

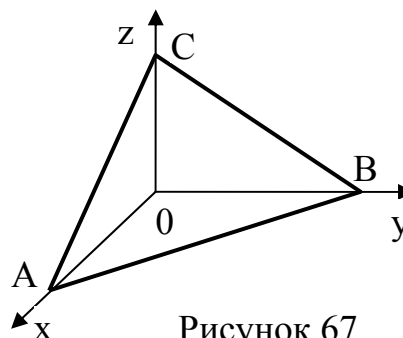


Рисунок 67

Уравнение любой плоскости в прямолинейных (но не обязательно прямоугольных!) координатах имеет вид:

$$\frac{x}{|OA|} + \frac{y}{|OB|} + \frac{z}{|OC|} = 1, \quad (57.6)$$

где  $|OA|$ ,  $|OB|$ ,  $|OC|$  — длины отрезков (в осевых единицах), отсекаемых плоскостью на осях координат (рисунок 67).

Если в точке пересечения оси с плоскостью находится атом, то соответствующая из величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  является целочисленной. Но, вообще говоря, атомная плоскость может пересекаться с осями координат также и в точках, в которых нет атома. В этом случае соответствующая из величин  $|OA|$ ,  $|OB|$ ,  $|OC|$  не будет целочисленной. Однако она всегда выражается рациональным числом (положительным или отрицательным). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что для атомов, находящихся в рассматриваемой плоскости, величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в уравнении (57.6) являются целочисленными. Поэтому, взяв какие-то три конкретных атома в плоскостях, не лежащих на одной прямой, мы из (57.6) получим три линейных уравнения с целочисленными коэффициентами для определения трех неизвестных ( $1/|OA|$ ,  $1/|OB|$ ,  $1/|OC|$ ). Ясно, что решение этих уравнений даётся рациональными числами, а, следовательно, и величины  $|OA|$ ,  $|OB|$ ,  $|OC|$  являются рациональными числами. Поэтому уравнение (57.6) может быть переписано в виде

$$hx + ky + lz = D, \quad (57.7)$$

где  $h$ ,  $k$ ,  $l$  — целые числа, причем можно считать, что они не имеют общего множителя, поскольку в противном случае на этот общий множитель можно было бы сократить все члены уравнения.

Целые числа  $h$ ,  $k$ ,  $l$  однозначно определяют положение плоскости. Они называются **миллеровскими индексами** и записываются в виде последовательности чисел, заключенной в скобки,  $(hkl)$ . Если индекс отрицательный, то знак минус ставится над соответствующим числом, например  $(h\bar{k}l)$ .

**Обозначение направлений.** Направление, перпендикулярное плоскости, характеризуемой миллеровскими индексами  $(hkl)$ , обозначается теми же числами, но заключенными в квадратные скобки  $[hkl]$ .

**Дефекты в кристаллах.** В реальных кристаллах нельзя наблюдать тот безупречный порядок и строгую периодичность в расположении атомов, о которых шла речь выше. Самые разнообразные эксперименты указывают на то, что в кристаллах обычно в той или иной мере нарушается правильность в расположении атомов.

Прежде всего, необходимо отметить, что хотя атомы в кристаллической решётке располагаются в таких местах, которые соответствуют их равновесию, это не значит, что они находятся в покое. Атомы в твёрдом теле, так же как в жидкости и газе, совершают непрерывные тепловые движения, энергия которых определяет температуру тела. Эти движения имеют характер малых колебаний около положения равновесия, которое и является узлом решётки. Даже если бы кристалл имел идеально правильное строение, тепловые движения атомов сами по себе нарушали бы строгую периодичность решётки. Ведь в каждый данный момент некоторая часть атомов находится в положении крайнего отклонения от положения равновесия, другая – в положении, близком к среднему, третья – в каком-то промежуточном положении, и т. д. А так как размах колебаний атомов даже при умеренных температурах может достигать нескольких процентов от межатомного расстояния, то это приводит к заметному нарушению периодичности решётки.

С изменением температуры изменяется и степень нарушения периодичности решётки.

Такие тепловые нарушения правильности строения решётки существуют всегда, и они являются как бы фоном, на котором разыгрываются все явления в кристаллах. Этим и объясняется, что практически все свойства кристаллов так или иначе зависят от температуры. Только при абсолютном нуле кристалл был бы свободен от таких нарушений периодичности и был бы вполне упорядочен. Только при абсолютном нуле возможно вполне равновесное состояние, но только в том случае, если в кристалле нет каких-либо других нарушений структуры или, как принято говорить, **дефектов**.

А такие дефекты, которые не сводятся к тепловым движениям, хотя обычно именно из-за них и появляются, тоже практически всегда существуют. Дефектами кристаллической решётки называются всякие отклонения от строгой периодичности, которой определяется решётка. **Дефекты бывают макроскопическими и микроскопическими.** К первым относятся всякого рода трещины, макроскопические пустоты и инородные макроскопические включения в кристаллическую решётку. Вторые обусловлены микроскопическими отклонениями от периодичности. Они бывают точечными и линейными, или **дислокация-**



**ми.** Характерной особенностью точечных дефектов является то, что они нарушают лишь ближний порядок в кристаллах, не затрагивая дальнего порядка. В противоположность точечным линейные дефекты нарушают дальний порядок. Дислокации нарушают правильное чередование атомных плоскостей. Дислокации имеют большое значение для механических свойств твердых тел.

### § 7.58 Переход в твёрдое состояние

Установлению идеального порядка в расположении атомов, т.е. образованию твёрдого тела, препятствуют тепловые движения, главной особенностью которых является, как мы знаем, хаотичность, беспорядочность. Поэтому для того, чтобы вещество могло находиться в твёрдом состоянии, его температура должна быть достаточно низкой – настолько низкой, чтобы энергия  $kT$  тепловых движений была меньше, чем потенциальная энергия взаимодействия атомов.

Вполне идеальным кристаллом, в котором все атомы находятся в равновесии и обладают минимальной энергией, тело может быть только при абсолютном нуле. В действительности все вещества становятся твёрдыми при значительно более высоких температурах. Исключение составляет только гелий, который остается жидким и при абсолютном нуле, но это связано с некоторыми квантовыми эффектами.

В твёрдое состояние вещество может перейти как из жидкого, так и из газообразного состояния. И в том и в другом случае такой переход есть переход из состояния, лишённого симметрии, в состояние, в котором симметрия существует (это, во всяком случае, относится к дальнему порядку, существующему в кристаллах, но не существующему ни в жидких, ни в газообразных веществах). Поэтому переход в твёрдое состояние должен происходить скачком, т.е. при определённой температуре, в отличие от перехода газ – жидкость, который, как мы знаем, может происходить и непрерывным образом.

Рассмотрим сначала превращение жидкость – твёрдое тело. Процесс образования твёрдого тела при охлаждении жидкости есть процесс образования кристалла (кристаллизация), и происходит он при определённой температуре – температуре кристаллизации или отвердевания. Так как при таком превращении энергия уменьшается, то оно сопровождается выделением энергии в виде скрытой теплоты кристаллизации. Обратное превращение – плавление – также происходит скачком при той же температуре и сопровождается поглощением энергии в виде скрытой теплоты плавления, равной по величине теплоте кристаллизации.

Это ясно видно из графика зависимости температуры охлаждающейся жидкости от времени, изображаемого на рисунке 68а. Кривая а) даёт ход монотонного понижения температуры жидкости вследствие отвода тепла от нее. Горизонтальный участок 2 показывает, что при определённом значении температуры ее понижение прекращается, несмотря на то, что отвод тепла продолжается. Через некоторое время температура снова начинает понижаться (участок 3).

Температура, соответствующая участку 2, это и есть температура кристаллизации. Выделяющееся при кристаллизации тепло компенсирует отвод тепла от вещества и поэтому понижение температуры временно прекращается. После окончания процесса кристаллизации температура, теперь уже твёрдого тела, вновь начинает понижаться.

Такой ход графика понижения температуры характерен для кристаллических тел. При охлаждении жидкостей, не кристаллизующихся (аморфных веществ), скрытая теплота не выделяется и график охлаждения представляет собой монотонную кривую без остановки охлаждения.

При обратном процессе перехода вещества из твёрдого состояния в жидкое (плавление) на кривой нагревания также наблюдается остановка в повышении температуры, вследствие поглощения скрытой теплоты плавления – теплоты, за счет которой происходит разрушение кристаллической решётки (кривая на рисунке 68б).

Для начала кристаллизации необходимо присутствие центра или центров кристаллизации. Такими центрами могли бы служить случайные скопления частиц жидкости, прилипших друг к другу, к которым могли бы присоединяться всё новые и новые частицы, пока вся жидкость не обратилась бы в твёрдое тело. Однако образование таких скоплений в самой жидкости затрудняется тепловыми движениями, которые их разрушают ещё до того, как они успевают приобрести сколько-нибудь заметные размеры. Кристаллизация существенно облегчается, если в жидкости с самого начала присутствуют достаточно большие твёрдые частицы в виде пылинок и тел, которые становятся центрами кристаллизации.

Образование центров кристаллизации в самой жидкости облегчается, конечно, с понижением температуры. Поэтому кристаллизация чистой жидкости, лишённой посторонних образований, начинается обычно при температуре несколько более низкой, чем истинная температура кристаллизации. В обычных условиях в кристаллизующейся жидкости имеется много центров кристаллизации, так что в жидкости образуется множество кристалликов, срастающихся вместе, и затвердевшее вещество оказывается **поликристаллическим**.

Только в особых условиях, которые обычно трудно обеспечить, можно получить одиночный кристалл – **монокристалл**, вырастающий из единственного центра кристаллизации. Если при этом для всех направлений обеспечены одинаковые условия накопления частиц, то кристалл получается правильно ограниченным соответственно его свойствам симметрии.

Переход жидкость – твёрдое тело, так же как и обратное превращение, является фазовым переходом, так как жидкое и твёрдое состояния можно рассматривать как две фазы вещества. Обе фазы при температуре кристаллизации (плавления) могут соприкасаться друг с другом, находясь в равновесии (лёд,

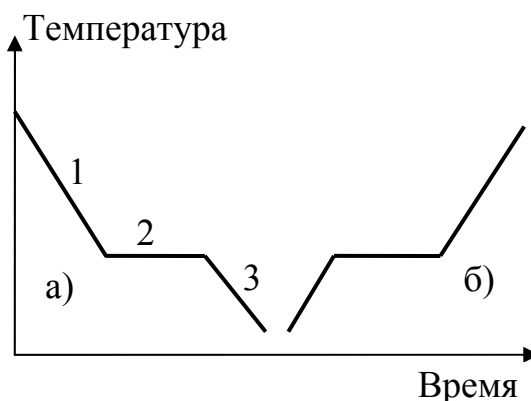


Рисунок 68

например, может плавать в воде, не плаваясь), так же как могут находиться в равновесии жидкость и ее насыщенный пар.

Подобно тому, как температура кипения зависит от давления, температура кристаллизации (и равная ей температура плавления) также зависит от давления, обычно возрастая с ростом давления. Растёт она потому, что внешнее давление сближает атомы между собой, а для разрушения кристаллической решётки при плавлении атомы нужно отдалить друг от друга: при большем давлении для этого требуется большая энергия тепловых движений, т.е. более высокая температура.

На рисунке 69 показана кривая зависимости температуры плавления (кристаллизации) от давления. Сплошная кривая делит всю область P-T на две части. Область влево от кривой соответствует твёрдому состоянию, а область справа от кривой – жидкому состоянию. Любая же точка, лежащая на самой кривой плавления, соответствует равновесию твёрдой и жидкой фаз: при этих давлениях и температурах вещество в жидком и твёрдом состояниях находится в равновесии, соприкасаясь друг с другом, и при этом жидкость не твердеет, а твёрдое тело не плавится.

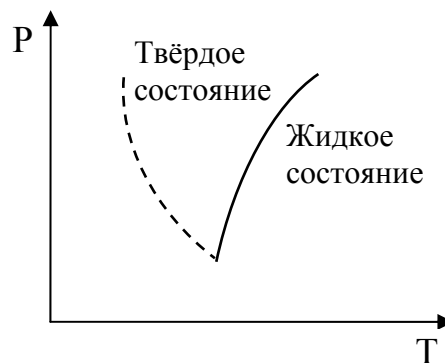


Рисунок 69

Пунктиром на рисунке 69 показана кривая плавления для тех немногих веществ (висмут, сурьма, лёд, германий), у которых при отвердевании объём не уменьшается, а увеличивается. У таких веществ, естественно, температура плавления с повышением давления понижается.

Изменение температуры плавления  $dT$  связано с изменением давления  $dP$  соотношением Клапейрона-Клаузиуса:

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T(V_2 - V_1)}{L},$$

где  $T$  – температура плавления (кристаллизации),  $V_1$  и  $V_2$  – соответственно молярные объёмы жидкой и твёрдой фаз,  $L$  – молярная теплота плавления.

Эта формула справедлива и для других фазовых переходов. В частности, для случая испарения и конденсации.

Из формулы Клапейрона-Клаузиуса видно, что знак изменения температуры плавления с изменением давления определяется тем, какая из двух величин,  $V_1$  или  $V_2$ , больше. Крутизна кривой зависит также от величины скрытой теплоты перехода  $L$ : чем меньше  $L$ , тем меньше изменяется температура плавления с давлением.

Уравнение Клапейрона-Клаузиуса может быть написано и в таком виде:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}.$$

Это уравнение показывает, как изменяется давление, под которым находятся обе равновесные фазы, при изменении температуры.

Твёрдое тело может образоваться не только путём кристаллизации жидкости, но и конденсацией газа (пара) в кристалл, минуя жидкую фазу. При этом также выделяется скрытая теплота перехода, которая, однако, всегда больше скрытой теплоты плавления. Ведь образование твёрдого тела при определённых температуре и давлении может произойти как непосредственно из газообразного состояния, так и путём предварительного ожидения. В обоих случаях начальное и конечное состояния одинаковы. Одинакова, значит, и разность энергий этих состояний. Между тем во втором случае выделяется, во-первых, скрытая теплота конденсации при переходе из газообразного в жидкое состояние и, во-вторых, скрытая теплота кристаллизации при переходе из жидкого в твёрдое состояние. Отсюда следует, что скрытая теплота при непосредственном образовании твёрдого тела из газообразной фазы должна быть равна сумме теплоты конденсации и кристаллизации из жидкости. Это относится только к теплотам, измеренным при температуре плавления. При более низких температурах теплота конденсации из газа возрастает.

Обратный процесс испарения твёрдого тела называется обычно **возгонкой** или **сублимацией**. Испаряющиеся частицы твёрдого тела образуют над ним пар совершенно так же, как это происходит при испарении жидкости. При определённых давлении и температуре пар и твёрдое тело могут находиться в равновесии. Пар, находящийся в равновесии с твёрдым телом, также называется **насыщенным** паром. Как и в случае жидкости, давление насыщенного пара над твёрдым телом зависит от температуры, быстро уменьшаясь с понижением температуры, так что у многих твёрдых тел при обычных температурах давление насыщенного пара ничтожно мала.

На рисунке 70 показан вид кривой зависимости давления насыщенного пара от температуры. Эта кривая является линией равновесия твёрдой и газообразной фаз. Область слева от кривой соответствует твёрдому состоянию, справа от нее – газообразному. Возгонка, так же как и плавление, связана с разрушением решётки и требует затраты необходимой для этого энергии. Эта энергия проявляется как скрытая теплота возгонки (сублимации), равная, разумеется, скрытой теплоте конденсации. Поэтому теплота возгонки равна сумме теплот плавления и парообразования.



Рисунок 70

### § 7.59 Диаграмма состояния. Тройная точка

Изобразим теперь на одном и том же графике в координатах  $P$  и  $T$  кривые плавления и сублимации. Как видно из рисунка 71, обе эти кривые, обладая различной крутизной (ввиду различия скрытой теплоты плавления и сублимации), пересекаются в некоторой точке, соответствующей определённому давлению  $P$  и температуре  $T$ . Кривая плавления 2 является, как известно, кривой равнове-

сия твёрдой и жидкой фаз. Точно так же кривая сублимации 1 представляет собой кривую равновесия твёрдой и газообразной фаз. Значит, слева от кривых 1 и 2 находится область давлений и температур, при которых устойчивым состоянием вещества является твёрдое состояние. Справа от этих кривых расположены области жидкого и газообразного состояний.

В свою очередь жидкая и газообразная фазы разделяются на диаграмме P-T кривой парообразования, т.е. кривой, вдоль которой жидкость и пар находятся в равновесии. Так как теплота парообразования непременно отличается от теплоты сублимации и плавления, то кривая парообразования должна пересечься кривыми плавления и возгонки. Если на рисунке 71 изобразить и кривую парообразования, то она пересечёт кривые плавления и сублимации в некоторой точке с координатами  $P_t$  и  $T_t$  (рисунок 72). Точка пересечения этих трёх кривых является точкой равновесия трёх фаз вещества – твёрдой, жидкой и газообразной. Значит, при температуре  $T_t$  и давлении  $P_t$  все три фазы вещества, соприкасаясь друг с другом, будут находиться в равновесии, т.е. жидкость при этом не испаряется и не кристаллизуется, твёрдое тело не плавится, газ (пар) не конденсируется. Ни при каких других давлении и температуре такое равновесие всех трёх фаз невозможно.

Точка на **диаграмме состояния**, соответствующая равновесию всех трёх фаз вещества, называется **тройной точкой**.



Рисунок 71

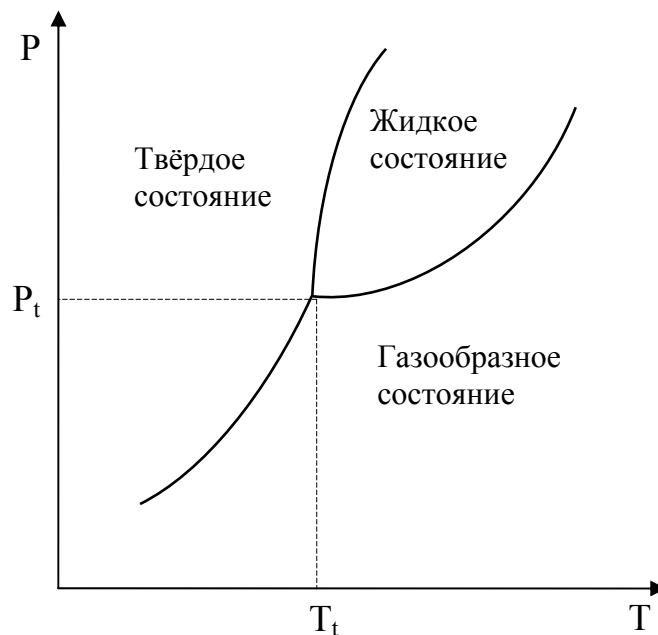


Рисунок 72

Для различных веществ давление  $P_t$  и температура  $T_t$  тройной точки различны. Так, например, для воды  $P_t = 4,6$  мм рт.ст. и  $T_t = 0,01$  °C.

Из диаграммы состояния (рисунок 72) видно, что твёрдое тело не всегда может быть нагреванием переведено в жидкое состояние. Если нагревать тело под давлением меньшим, чем  $P_t$ , то оно плавиться не будет, а непосредственно перейдет в газообразное состояние, минуя жидкую фазу, – вещество будет возгоняться, а не плавиться.

Плавление, т. е. переход в жидкое состояние, возможен лишь при нагревании под давлением, превышающим  $P_t$ .

Для многих веществ давление, соответствующее тройной точке, меньше 1 атм. Такие вещества при нагревании при атмосферном давлении плавятся. Существуют, однако, и такие вещества, у которых  $P_t$  превышает 1 атм. При нагревании при обычном давлении они не плавятся, а сублимируют. Так, для углекислоты ( $\text{CO}_2$ ) давление  $P_t = 5,1$  атм и температура  $T_t = -57$  °С. Поэтому при атмосферном давлении твёрдая углекислота может существовать лишь при низкой температуре. При этом в равновесии со своим паром при атмосферном давлении углекислота находится при  $-80$  °С. В таком виде твердая углекислота и используется. Это широко применяемый «сухой лёд», но «лёд» этот никогда не плавится, а только испаряется.

Из трёх равновесных линий две – кривая сублимации и кривая парообразования – имеют начало и конец. Именно, линия сублимации начинается при абсолютном нуле и кончается в тройной точке; кривая парообразования, начинаясь в тройной точке, кончается в критической точке. Что касается кривой плавления, то начинается она тоже в тройной точке, но конца не имеет. Во всяком случае, неизвестны такие опыты, которые показывали бы, что кривая плавления «естественно» заканчивается в какой-либо точке. Наоборот, опыты показывают, что с ростом давления температура плавления всё время возрастает. У веществ аномальных, т.е. таких, у которых с ростом давления температура плавления уменьшается, кривая плавления при экстраполяции пересекает ось давлений. Это соответствует тому, что при достаточно больших давлениях вещество должно плавиться при очень низких температурах и может даже оставаться жидким при абсолютном нуле.

Опыты показали, например, что увеличение давления до 180 000 атм приводит к понижению температуры плавления германия от 986 до 276 °С.

Заметим в заключение, что в веществе, состоящем из одного компонента, в равновесии не может находиться больше трёх фаз (правило фаз). Поэтому, если в такого рода веществе существует больше трёх различных фаз, то и тройных точек будет больше, чем одна, но в каждой из них сходятся только три кривые равновесия. С такой ситуацией мы встречаемся, например, когда одно и то же вещество может иметь несколько кристаллических модификаций, устойчивых при разных давлениях и температурах. Свойство кристаллов иметь различные модификации называется **полиморфизмом**; переход из одной такой модификации в другую называется **полиморфным переходом**.

Интересным и важным примером вещества, испытывающего полиморфное превращение, является углерод, который встречается в двух кристаллических модификациях – в виде графита и алмаза.

Полиморфное превращение тоже является фазовым переходом. Оно сопровождается выделением (или поглощением) скрытой теплоты перехода, так как при каждом таком переходе происходит перестройка кристаллической решётки, которая непременно связана с изменением энергии частиц в кристалле. При наличии полиморфных превращений кривая плавления может иметь начало и конец: начинаясь в одной тройной точке, она может окончиться в другой.



## § 7.60 Тепловые свойства твёрдых тел

**Тепловое движение в твёрдых телах.** Уже упоминалось, что тепловые движения частиц в твёрдом теле не таковы, как в жидкости и газе. Частицы твёрдого тела, связанные друг с другом силами взаимодействия, зависящими от межатомных расстояний, могут совершать только колебания около некоторого равновесного положения в узлах кристаллической решётки. Так как вещество может быть твёрдым только при достаточно низких температурах, когда энергия тепловых движений, т.е.  $kT$ , много меньше, чем потенциальная энергия взаимодействия частиц между собой, то колебания атомов около положений равновесия являются малыми колебаниями. Энергия этих колебаний и представляет собой внутреннюю энергию твёрдого тела, которая определяет его температуру.

При абсолютном нуле температуры всякие движения атомов замирают. Кристалл должен быть вполне упорядочен, так, чтобы его энтропия была равна нулю. Однако квантовая теория приводит к выводу, что и при абсолютном нуле частицы обладают некоторой энергией, тем большей, чем меньше масса частицы. Эта энергия ни при каких условиях не может быть отнята у частиц. Наличие такой **нулевой** энергии не мешает тому, чтобы энтропия твёрдого тела при абсолютном нуле была равна нулю, так как энтропия связана с беспорядочными тепловыми движениями, а нулевая энергия не является тепловой. И если кристалл лишён дефектов, то его энтропия стремится к нулю при приближении температуры к абсолютному нулю.

Нулевая энергия обычно значительно меньше энергии взаимодействия между частицами, так что она не мешает отвердеванию вещества. И только в одном-единственном случае, именно, в случае гелия, нулевая энергия играет настолько важную роль, что без действия внешнего давления отвердевание гелия становится невозможным. Все другие вещества отвердевают раньше, чем нулевая энергия сможет оказать существенное влияние на их свойства.

**Теплоёмкость твёрдых тел.** Итак, твёрдое тело представляет собой совокупность колеблющихся частиц, осцилляторов. При подводе тепла к телу оно расходуется на увеличение энергии колебаний осцилляторов, которая складывается из кинетической и потенциальной энергий. Если колебания гармонические, обе эти части полной энергии равны друг другу.

Каждое колебание можно разложить на три составляющие по осям координат, и энергия каждой составляющей также выражается суммой равных друг другу потенциальной и кинетической энергии.

Из кинетической теории газов мы знаем, что средняя кинетическая энергия атома вдоль одной из осей равна  $\frac{1}{2} \cdot kT$ . Это – кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы. Но поскольку потенциальная энергия осциллятора равна кинетической, то полная энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна  $2 \times \frac{1}{2} \cdot kT = kT$ .

Так как каждый атом (осциллятор) обладает тремя степенями свободы, и если принять, как это мы делали в теории идеальных газов, что на каждую сте-



пень свободы приходится одна и та же кинетическая энергия  $\frac{1}{2} \cdot kT$ , то полная энергия одного атома твёрдого тела равна  $3 \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot kT = 3kT$ .

Если тело содержит  $N$  атомов, то внутренняя энергия тела равна  $3NkT$ . Внутренняя энергия одного моля равна, таким образом,  $U = 3N_A kT = 3RT$ , где  $N_A$  – число Авогадро.

При подводе тепла в условиях постоянного объёма все тепло уходит на увеличение внутренней энергии. Поэтому атомная теплоёмкость при постоянном объёме определяется равенством:

$$C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V = 3R \approx 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}). \quad (60.1)$$

Это вдвое больше молярной теплоёмкости одноатомного идеального газа. Достаточно, значит, перевести вещество из газообразного состояния в твёрдое, чтобы его молярная теплоёмкость удвоилась. Из сказанного выше ясно, что удвоение теплоёмкости происходит потому, что при нагревании твёрдого тела подводимая теплота расходуется на увеличение не только кинетической, но и потенциальной энергии частиц.

Из формулы (60.1) следует, что атомная теплоёмкость (т.е. теплоёмкость грамм-атома) твёрдых тел есть величина постоянная, одинаковая для всех веществ и не зависящая от температуры. Это утверждение называется **законом Дюлонга и Пти**.

Опыт показывает, что при обычных температурах атомная теплоёмкость большинства твёрдых тел (химических элементов) в самом деле, близка к значению  $25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  и почти не зависит от температуры. Существуют, однако, исключения. У четырёх химических элементов – бериллия, бора, кремния и алмаза – теплоёмкость при обычных температурах значительно меньше, чем  $3R$ , и заметно зависит от температуры. С повышением температуры теплоёмкость этих веществ растёт, стремясь всё же к значению  $3R$ .

Это не единственное отклонение от закона Дюлонга и Пти. При низких (значительно ниже комнатной) температурах теплоёмкость всех веществ, в том числе и тех, которые при обычных температурах следуют закону Дюлонга и Пти, быстро падает, стремясь к нулю при абсолютном нуле температуры. На рисунке 73 приведена экспериментальная кривая зависимости теплоёмкости  $C_p$  (именно теплоёмкость при постоянном давлении определяется на опыте) от температуры для серебра.

Многочисленные опыты показали, что общей для всех твёрдых тел закономерностью является не закон Дюлонга и Пти, а отклонения от него. В действительности теплоёмкость твёрдых тел зависит от температуры и притом так, что с понижением температуры она уменьшается пропорционально кубу температуры и стремится к нулю при абсолютном нуле. Значит, элементы бериллий, бор, кремний и алмаз являются не исключением, а правилом, но для них комнатная температура является уже низкой температурой.

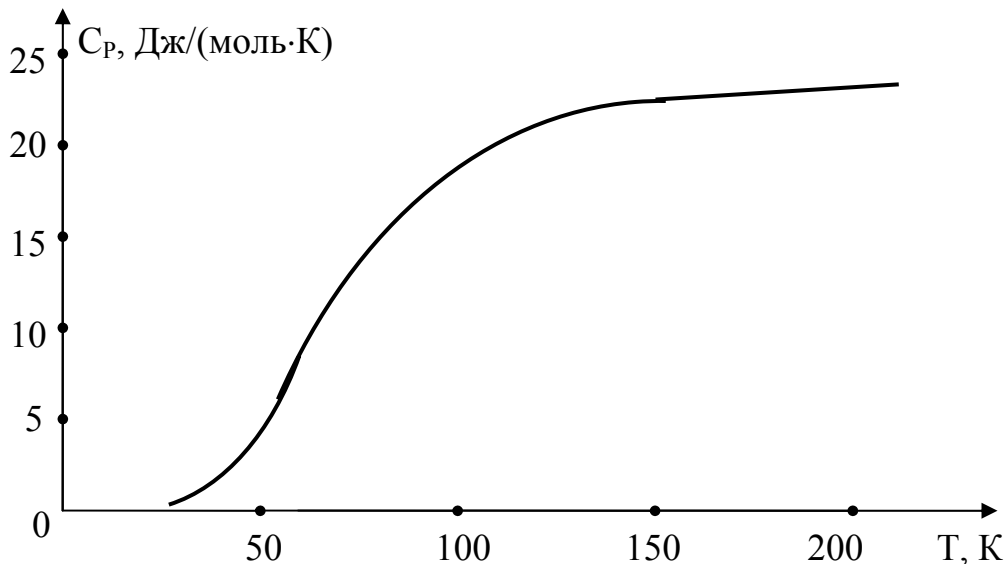


Рисунок 73

Закон Дюлонга и Пти является, как мы видели, следствием закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. Поэтому тот факт, что твёрдые тела в действительности не следуют закону Дюлонга и Пти при низких температурах, показывает, что гипотеза о равномерном распределении энергии по степеням свободы является приближением.

Наблюдаемая на опыте зависимость теплоёмкости от температуры может быть объяснена на основе квантовых представлений.

Измерения теплоёмкости и ее температурного хода играют большую роль в исследованиях твёрдых тел. Это связано с тем, что теплоёмкость непосредственно определяется колебаниями атомов в кристаллической решётке. Ясно, что характер этих колебаний должен зависеть от структуры решётки, от ее симметрии и т.д. Благодаря этому во многих случаях превращения, которые могут происходить в веществе, сопровождаются различными аномалиями теплоёмкости.

В частности, фазовые переходы второго рода, при которых скрытая теплота перехода не выделяется (и не поглощается), сопровождаются скачком теплоёмкости, разрывом в ее монотонном изменении с температурой. Исследуя температурный ход теплоёмкости, можно обнаружить такие превращения.

Отметим в заключение, что непосредственному измерению доступна только теплоёмкость при постоянном давлении, а не при постоянном объёме, так как из-за теплового расширения нельзя обеспечить постоянство объёма тела. Однако вследствие малости изменения объёма при нагревании различие между теплоёмкостями.  $C_V$  и  $C_P$  мало.

## § 7.61 Тепловое расширение твёрдых тел

Общеизвестно, что твёрдые тела при нагревании увеличивают свой объём. Это – **тепловое расширение**. Рассмотрим причины, приводящие к увеличению объёма тела при нагревании.

Очевидно, что объём кристалла растёт с увеличением среднего расстояния между атомами. Значит, повышение температуры влечёт за собой увеличение среднего расстояния между атомами кристалла. Чем же обусловлено увеличение расстояния между атомами при нагревании?

Повышение температуры кристалла означает увеличение энергии теплового движения, т.е. тепловых колебаний атомов в решётке (см. § 7.60), а, следовательно, и рост амплитуды этих колебаний.

Но увеличение амплитуды колебаний атомов не всегда приводит к увеличению среднего расстояния между ними.

Если бы колебания атомов были строго гармоническими, то каждый атом настолько же приближался бы к одному из своих соседей, насколько удалялся от другого, и увеличение амплитуды его колебаний не привело бы к изменению среднего межатомного расстояния, а значит, и к тепловому расширению.

В действительности атомы в кристаллической решётке совершают **ангармонические** (т.е. не гармонические) колебания. Это обусловлено характером зависимости сил взаимодействия между атомами от расстояния между ними. Как было указано в начале настоящей главы (см. рисунки 58 и 59), зависимость эта такова, что при больших расстояниях между атомами силы взаимодействия между атомами проявляются как силы притяжения, а при уменьшении этого расстояния меняют свой знак и становятся силами отталкивания, быстро возрастающими с уменьшением расстояния.

Это приводит к тому, что при возрастании «амплитуды» колебаний атомов вследствие нагревания кристалла рост сил отталкивания между атомами преобладает над ростом сил притяжения. Другими словами, атому «легче» удалиться от соседа, чем приблизиться к другому. Это, конечно, должно привести к увеличению среднего расстояния между атомами, т.е. к увеличению объёма тела при его нагревании.

Отсюда следует, что причиной теплового расширения твёрдых тел является ангармоничность колебаний атомов в кристаллической решётке.

Количественно тепловое расширение характеризуется коэффициентами линейного и объёмного расширения, которые определяются следующим образом. Пусть тело длиной  $\ell$  при изменении температуры на  $\Delta T$  градусов изменяет свою длину на  $\Delta \ell$ . Коэффициент линейного расширения определяется из соотношения:

$$\alpha = \frac{1}{\ell} \frac{\Delta \ell}{\Delta T},$$

т.е. коэффициент линейного расширения равен относительному изменению длины при изменении температуры на один градус. Точно так же коэффициент объёмного расширения  $\beta$  определяется формулой

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T},$$

т. е. коэффициент  $\beta$  равен относительному изменению объема  $\Delta V/V$ , отнесенному к одному градусу.

Из этих формул следует, что длина  $\ell_T$  и объем  $V_T$  при некоторой температуре, отличающейся от начальной на  $\Delta T$  градусов, выражаются формулами (при малом  $\Delta T$ ):

$$\ell_T = \ell_0(1 + \alpha\Delta T) \quad \text{и} \quad V_T = V_0(1 + \beta\Delta T),$$

где  $\ell_0$  и  $V_0$  – начальные длина и объём тела.

Вследствие анизотропии кристаллов коэффициент линейного расширения  $\alpha$  может быть различным в разных направлениях. Это означает, что если из данного кристалла выточить шар, то после его нагревания он потеряет свою сферическую форму. Можно показать, что в самом общем случае такой шар при нагревании превращается в **трёхосный эллипсоид**, оси которого связаны с кристаллографическими осями кристалла.

Коэффициенты теплового расширения по трём осям этого эллипсоида называются **главными коэффициентами расширения** кристалла.

Если их обозначить соответственно через  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , то коэффициент объёмного расширения кристалла

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Для кристаллов с кубической симметрией, так же как и для изотропных тел,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \quad \text{и} \quad \beta = 3\alpha.$$

Шар, выточенный из таких тел, остаётся шаром и после нагревания (разумеется, большего диаметра).

В некоторых кристаллах (например, гексагональных)

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{и} \quad \beta = 2\alpha_1 + \alpha_3.$$

Коэффициенты линейного и объёмного расширения практически остаются постоянными, если интервалы температур, в которых они измеряются, малы, а сами температуры высокие. Вообще же коэффициенты теплового расширения зависят от температуры и притом так же, как теплоёмкость, т.е. при низких температурах коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  уменьшаются с понижением температуры пропорционально кубу температуры, стремясь, как и теплоёмкость, к нулю при абсолютном нуле. Это неудивительно, так как и теплоёмкость, и тепловое расширение связаны с колебаниями решётки: теплоёмкость даёт количество теплоты, необходимое для увеличения средней энергии тепловых колебаний атомов, зависящей от амплитуды колебаний, коэффициент же теплового расширения непосредственно связан со средними расстояниями между атомами, которые тоже зависят от амплитуды атомных колебаний.

Отсюда следует важный **закон, открытый Грюнейzenом**: отношение коэффициента теплового расширения к атомной теплоёмкости твёрдого тела для данного вещества есть величина постоянная (т.е. не зависящая от температуры).

Коэффициенты теплового расширения твёрдых тел обычно очень малы, порядка  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

Некоторые вещества имеют особенно малый коэффициент теплового расширения. Таким свойством отличается, например, кварц ( $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ). Другим примером может служить сплав никеля и железа (36 % Ni), известный под названием инвар ( $\alpha = 1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ). Эти вещества получили широкое применение в точном приборостроении.

## § 7.62 Теплопроводность

Если в твёрдом теле существует разность температур между различными его частями, то подобно тому, как это происходит в газах и жидкостях, тепло переносится от более нагретой к менее нагретой части.

В отличие от жидкостей и газов, в твёрдом теле не может возникнуть конвекция, т.е. перемещения массы вещества вместе с теплом. Поэтому перенос тепла в твёрдом теле осуществляется только теплопроводностью.

Механизм переноса тепла в твёрдом теле вытекает из характера тепловых движений в нем. Твёрдое тело представляет собой совокупность атомов, совершающих колебания. Но колебания эти не независимы друг от друга. Колебания могут передаваться (со скоростью звука) от одних атомов к другим. При этом образуется волна, которая и переносит энергию колебаний. Таким распространением колебаний и осуществляется перенос тепла.

Количественно перенос тепла в твёрдом теле описывается так же, как и в газе. Если через единицу площади сечения перпендикулярно к его плоскости в единицу времени переносится количество тепла  $q$ , то оно связано с разностью температур, вызывающей перенос, соотношением [см. (23.1)]

$$q = - \alpha \frac{dT}{dx}.$$

где  $dT/dx$  – градиент температуры в направлении  $Ox$ .

Величина  $q$  называется потоком тепла. Величина коэффициента теплопроводности  $\alpha$  не может быть вычислена так, как это делается для газа – системы более простой, состоящей из невзаимодействующих частиц.

Приближенно коэффициент теплопроводности твердого тела можно вычислить с помощью квантовых представлений.

**Фононы.** Квантовая теория позволяет сопоставить распространяющимся в твёрдом теле со скоростью звука колебаниям некоторые фиктивные частицы – фононы. Каждая частица характеризуется энергией, равной известной уже нам постоянной Планка, умноженной на ту величину, которая в классической физике называется частотой колебания  $\nu$ . Энергия фонона равна, значит,  $h\nu$ .

Если пользоваться представлением о фононах, то можно сказать, что тепловые движения в твёрдом теле обусловлены именно ими, так что при абсолютном нуле фононы отсутствуют, а с повышением температуры их число воз-

растает, но не линейно, а по более сложному закону (при низких температурах пропорционально кубу температуры).

Твёрдое тело мы можем теперь рассматривать как сосуд, содержащий газ из фононов, газ, который при не очень высоких температурах может считаться идеальным газом. Как и в случае обычного газа, перенос тепла в фононном газе осуществляется столкновениями фононов с атомами решётки, и все рассуждения, которые были проведены при вычислении коэффициента теплопроводности идеальных газов (см. гл. 3), справедливы и здесь. Поэтому коэффициент теплопроводности твёрдого тела может быть выражен совершенно такой же формулой [см. (24.3)]:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho c_v \lambda c,$$

где  $\rho$  – плотность тела,  $c_v$  — его удельная теплоемкость,  $c$  – скорость звука в нём.

Несколько сложнее вычислить длину свободного пробега фононов  $\lambda$ . Оценка показывает, что эта величина обратно пропорциональна абсолютной температуре. Поэтому и коэффициент теплопроводности  $\kappa$  обратно пропорционален температуре:

$$\kappa = \frac{a}{T},$$

где  $a$  – некоторая константа, различная для различных веществ.

В металлах, помимо колебаний решётки, в переносе тепла участвуют и заряженные частицы – электроны, которые вместе с тем являются и носителями электрического тока в металле. При высоких температурах электронная часть теплопроводности много больше решёточной. Этим объясняется высокая теплопроводность металлов по сравнению с неметаллами, в которых фононы – единственные переносчики тепла.

Так, коэффициент теплопроводности алюминия равен 238 Вт/(м·К), в то время как у кварца он не превышает 5 Вт/(м·К). Напомним, что коэффициент теплопроводности газов при нормальных условиях  $\sim 10^{-3}$  Вт/(м·К). При более низких (но не самых низких) температурах начинает преобладать решёточная теплопроводность, так как она растёт с понижением температуры, а электронная от температуры не зависит. При самых низких температурах электронная часть теплопроводности вновь начинает преобладать.

Однако в сверхпроводниках, в которых электрический ток не встречает сопротивления, электронная теплопроводность практически отсутствует: электроны, без сопротивления переносящие электрический ток, в переносе тепла не участвуют, и теплопередача в сверхпроводниках – чисто решёточная.

## Контрольные вопросы

1 Какие тела называют кристаллическими? аморфными?

- 2 Как изменяется сила притяжения  $F$  между атомами (и потенциальная энергия  $U$  взаимодействия атомов) в зависимости от расстояния  $r$  между ними?
- 3 Что понимают под симметрией?
- 4 Перечислите четыре элемента симметрии и охарактеризуйте их.
- 5 Что такое узлы кристаллической решётки?
- 6 В чём заключается анизотропность монокристаллов?
- 7 Чем отличаются монокристаллы от поликристаллов?
- 8 Как можно классифицировать кристаллы?
- 9 Какие типы кристаллографических систем вам известны?
- 10 Как получить закон Дюлонга и Пти исходя из классической теории теплоёмкости?
- 11 Некоторое количество твёрдого вещества смешано с тем же веществом в жидком состоянии. Почему при нагревании этой смеси ее температура не поднимается?
- 12 В чем состоят главные отличия теплопроводности в твёрдых телах и жидкостях от механизма переноса в газах?
- 13 Чем объясняется очень большая величина теплопроводности твёрдых тел по сравнению с теплопроводностью газов, если воспользоваться представлением о фононах?
- 14 Почему наличие электронной теплоёмкости в металлах проявляется лишь при близких к 0 К температурах?
- 15 Что такое фонон? Какие другие элементарные возбуждения вы знаете?
- 16 К фазовым переходам какого рода относятся кристаллизация из газообразного состояния и возгонка? При каком давлении (выше или ниже давления тройной точки) они происходят?
- 17 Что такое тройная точка?
- 18 Как изменяется температура плавления у аномальных веществ при повышении давления?
- 19 Что такое примитивная решётка?
- 20 Сводится ли, вообще говоря, кристаллическая решётка к одной примитивной решётке?
- 21 Совпадает ли симметрия решётки в целом с симметрией ее элементарной ячейки? Откуда это видно?
- 22 Какие порядки осей вращения возможны у кристаллической решётки? Каким фигурам, покрывающим плоскость без промежутков, эти оси соответствуют?
- 23 Как обозначаются направления и плоскости в кристаллах?
- 24 Что такое фаза? фазовый переход?
- 25 Чем отличается фазовый переход I рода от фазового перехода II рода?

## Тесты

1. Каково отношение длин железного и медного стержней при температуре  $0^\circ\text{C}$ , если разность их длин при любой температуре одна и та же? Коэффициенты линейного расширения: железа  $\alpha_{\text{ж}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , меди  $\alpha_{\text{м}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .



A) 1,1      B) 1,2      C) 1,3      **Д) 1,4**      E) 1,5

2. Часы с металлическим маятником спешат на 8 с в сутки при температуре  $3^{\circ}\text{C}$  и отстают на 7 с в сутки при температуре  $23^{\circ}\text{C}$ . Найдите коэффициент линейного расширения материала маятника.

A)  $13 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$     B)  $15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$     **С)  $17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$**     D)  $19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$     E)  $21 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

3. Концы стального стержня сечением  $5 \text{ см}^2$  наглухо закреплены в двух стенах. Какова сила, действующая на стены при температуре  $20^{\circ}\text{C}$ , если при  $10^{\circ}\text{C}$  стержень находился в ненапряжённом состоянии? Для стали коэффициент линейного расширения  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , модуль упругости  $\sigma = 210 \text{ ГПа}$ .

A) 8,6 кН      B) 9,6 кН      C) 10,6 кН      D) 11,6 кН      **Е) 12,6 кН**

4. Латунная шкала ртутного барометра градуирована при температуре  $0^{\circ}\text{C}$ . Чему равно атмосферное давление, если при температуре  $30^{\circ}\text{C}$  барометр показывает давление 101,1 кПа? Расширением стекла пренебречь. Коэффициент линейного расширения латуни  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , коэффициент объёмного расширения ртути  $\beta = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

A) 100,1 кПа    **В) 100,7 кПа**    C) 101,7 кПа    D) 107,1 кПа    E) 103,3 кПа

5. Вычислите по классической теории теплоёмкости удельную теплоёмкость кристалла алюминия. Газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K})$ . Молярная масса алюминия  $\mu = 27 \text{ г}/\text{моль}$ .

A) 905                      **В) 925**                      C) 945                      D) 965                      E) 985  
Дж/(кг·К)                Дж/(кг·К)                Дж/(кг·К)                Дж/(кг·К)                Дж/(кг·К)

6. Толщина деревянной стены 10 см. Какой должна быть толщина кирпичной стены, чтобы она обладала такой же теплопроводностью, как деревянная? Коэффициенты теплопроводности для дерева и кирпича равны  $0,17 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$  и  $0,84 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$ .

A) 34 см      B) 32 см      C) 30 см      **Д) 28 см**      E) 26 см

7. Две пластины – медная и железная – одинаковой толщины вплотную прилегают друг к другу. Температура наружной поверхности медной пластинки  $100^{\circ}\text{C}$ , железной –  $0^{\circ}\text{C}$ . Найдите температуру в месте соприкосновения пластин. Коэффициенты теплопроводности для меди и железа равны  $390 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$  и  $62 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$ , соответственно.

A) 343 К      B) 347 К      C) 351 К      D) 355 К      **Е) 359 К**

8. Сколько нужно сжечь каменного угля в печи, КПД которой 70 %, чтобы восполнить потерю тепла за сутки через кирпичную стену площадью  $20 \text{ м}^2$  и толщиной 0,2 м, если температура внутренней поверхности стены  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , а внешней  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Теплота сгорания угля  $30 \text{ МДж/кг}$ . Коэффициент теплопроводности для кирпича равен  $0,84 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

- А) 4,9 кг      В) 5,9 кг      С) 6,9 кг      Д) 7,9 кг      Е) 8,9 кг

9. Электрическая печь мощностью 2 кВт, внутренняя поверхность которой площадью  $25 \text{ дм}^2$ , покрыта огнеупорным материалом толщиной 10 см. Коэффициент теплопроводности огнеупорного материала  $0,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Какова температура наружной поверхности печи, если температура на внутренней ее поверхности  $1200 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

- А) 513 К      В) 493 К      С) 473 К      Д) 453 К      Е) 433 К

10. Вычислите по классической теории теплоёмкости удельную теплоёмкость кристалла меди. Газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ . Молярная масса меди  $\mu = 63,5 \text{ г/моль}$ .

- А) 390 Дж/(кг·К)      В) 370 Дж/(кг·К)      С) 350 Дж/(кг·К)      Д) 330 Дж/(кг·К)      Е) 310 Дж/(кг·К)

11. Найдите количество теплоты, теряемой за время  $\tau=1 \text{ с}$  площадью  $S = 1 \text{ м}^2$  кирпичной стены толщиной  $\ell = 51 \text{ см}$ , если температура в помещении  $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , а температура наружного воздуха  $t_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи со стороны помещения  $\alpha_1 = 12 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , а с наружной стороны стены  $\alpha_2 = 6 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

- А) 70 Дж      В) 60 Дж      С) 50 Дж      Д) 40 Дж      Е) 30 Дж

12. Найдите температуру внутренней поверхности кирпичной стены площадью  $S = 1 \text{ м}^2$  толщиной  $\ell = 51 \text{ см}$ , если температура в помещении  $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , а температура наружного воздуха  $t_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи со стороны помещения  $\alpha_1 = 12 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , а с наружной стороны стены  $\alpha_2 = 6 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Коэффициент теплопроводности для кирпича равен  $0,84 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

- А)  $15 \text{ }^\circ\text{C}$       В)  $16 \text{ }^\circ\text{C}$       С)  $17 \text{ }^\circ\text{C}$       Д)  $18 \text{ }^\circ\text{C}$       Е)  $19 \text{ }^\circ\text{C}$

13. Найдите температуру внешней поверхности кирпичной стены площадью  $S = 1 \text{ м}^2$  толщиной  $\ell = 51 \text{ см}$ , если температура в помещении  $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , а температура наружного воздуха  $t_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи со стороны помещения  $\alpha_1 = 12 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , а с наружной стороны стены  $\alpha_2 = 6 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Коэффициент теплопроводности для кирпича равен  $0,84 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

А) - 14 °С      В) - 15 °С      С) - 16 °С      Д) - 17 °С      Е) - 18 °С

14. Вычислите по классической теории теплоёмкости удельную теплоёмкость кристалла платины. Газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль·К). Молярная масса платины  $\mu = 195$  г/моль.

А) 188      В) 168      С) 148      Д) 128      Е) 108  
Дж/(кг·К)      Дж/(кг·К)      Дж/(кг·К)      Дж/(кг·К)      Дж/(кг·К)

15. Температура газов в топке парового котла  $t_1 = 800$  °С, температура воды в котле  $t_2 = 150$  °С. Стальные стенки котла толщиной  $\ell_1 = 2,5$  см покрыты с внутренней стороны слоем накипи толщиной  $\ell_2 = 5$  мм. Какое количество теплоты передаётся за 1 с через поверхность котла площадью  $1$  м<sup>2</sup>? Коэффициент теплоотдачи со стороны газов  $\alpha_1 = 46$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), а со стороны воды  $\alpha_2 = 2,3$  кВт/(м<sup>2</sup>·К).

А) 21 кДж      В) 32 кДж      С) 18 кДж      Д) 47 кДж      Е) 26 кДж

16. Стальной брус вплотную помещен между каменными неподвижными стенами при  $0$  °С. Найти напряжение материала бруса при  $20$  °С. Для стали модуль упругости  $210$  ГПа и коэффициент линейного расширения  $11 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>.

А) 48,4 МПа      В) 44,4 МПа      С) 40,4 МПа      Д) 36,4 МПа      Е) 32,4 МПа

### Упражнения для самоконтроля

7.1. Часы с металлическим маятником спешат на 8 с в сутки при температуре  $3$  °С и отстают на 7 с в сутки при температуре  $23$  °С. Найдите температуру, при которой часы будут идти правильно. [14 °С]

7.2. Найдите зависимость периода свободных колебаний однородного твёрдого тела вокруг горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести, от температуры. [ $T = T_0 \sqrt{1 + \alpha t}$ ]

7.3. Алюминиевый чайник вместимостью 3 л наполнен водой при температуре  $5$  °С. Сколько воды вытечет из чайника при нагревании его до  $70$  °С? Задачу решить без учёта и с учётом расширения материала чайника. Коэффициент линейного расширения алюминия  $2,4 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>. Коэффициент объёмного расширения воды равен  $5,3 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> ( $5 - 10$  °С);  $15 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> ( $10 - 20$  °С);  $30,2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> ( $20 - 40$  °С);  $45,8 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> ( $40 - 60$  °С);  $58,7 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> ( $60 - 80$  °С). [68 см<sup>3</sup>; 54 см<sup>3</sup>]

7.4. Пользуясь классической теорией теплоёмкости, вычислите удельные теплоёмкости кристаллов KCl и CaCl<sub>2</sub>. [670 Дж/(кг·К); 675 Дж/(кг·К)]

7.5. Определите плотность кристалла NaCl, постоянная кристаллической решётки которого  $a = 0,563$  нм. [ $\rho = 4(\mu_{Na} + \mu_{Cl})/N_a a^3 = 2,18$  г/см<sup>3</sup>]

## Глава 8 Контрольная работа

### § 8.63 Общие методические указания к решению задач и выполнению контрольных работ

1. За время изучения курса физики студент должен представить контрольные работы после изучения каждого раздела дисциплины (всего 5 разделов).

2. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по **таблицам вариантов. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачетной книжки.** Критерии оценки контрольной работы следующие:

- |                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|
| “отлично”             | - 9-10 правильных ответов;    |
| “хорошо”              | - 8-9 правильных ответов;     |
| “удовлетворительно”   | - 6-7 правильных ответа;      |
| “неудовлетворительно” | - менее 6 правильных ответов. |

При получении положительной оценки контрольная работа считается зачитанной.

3. Контрольные работы нужно выполнять **письменно** на листах формата А4, **либо в электронном виде** (высылается на факультет дистанционных образовательных технологий). Титульный лист включает в себя следующие пункты, расположенные по высоте страницы в следующей последовательности (сверху вниз):

- Министерство образования и науки Российской Федерации;
- Оренбургский государственный университет;
- Контрольная работа по дисциплине «Физика»;
- Фамилию и инициалы студента, группа, номер зачетной книжки;
- Номер варианта.

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах оставлять поля. В конце контрольной работы необходимо оставить 1-2 чистые страницы, предназначенные для замечаний рецензента.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

При выполнении контрольных заданий студентам можно рекомендовать данное пособие, литературу, указанную в конце пособия, справочные материалы из приложений к данному пособию.

6. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с не зачтенной.

7. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

8. Решать задачу надо в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

9. После получения расчетной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

10. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

11. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти (т.е. в нормированном виде). Например, вместо 3520 надо записать  $3,52 \cdot 10^3$ , вместо 0,00129 записать  $1,29 \cdot 10^{-3}$  и т. п.

12. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач									
	301	311	321	331	341	351	361	371	381	391
1	302	312	322	332	342	352	362	372	382	392
2	303	313	323	333	343	353	363	373	383	393
3	304	314	324	334	344	354	364	374	384	394
4	305	315	325	335	345	355	365	375	385	395
5	306	316	326	336	346	356	366	376	386	396
6	307	317	327	337	347	357	367	377	387	397
7	308	318	328	338	348	358	368	378	388	398
8	309	319	328	339	349	359	369	379	389	399
9	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400

## § 8.64 Контрольные задачи

301. Газ находится в сосуде объемом  $V$  при давлении  $P_0$ . Его откачивают из сосуда с помощью поршневого насоса с рабочей камерой объемом  $v$ . Требуется найти число  $n$  ходов поршня, которое надо сделать, чтобы давление газа в сосуде понизилось до величины  $P_n$ .

302. Открытая с обеих сторон цилиндрическая трубка небольшого сечения длиной 100 см наполовину погружена в ртуть. Верхний конец ее закрывают и

вынимают из ртути. Определить длину столбика ртути, оставшейся в трубке. Атмосферное давление считать нормальным.

303. Найти массу одного моля смеси, состоящей из 25 г кислорода и 75 г азота.

304. В сосуд вместимостью 10 л, наполненный сухим воздухом при нормальных условиях, вводят 3 г воды и нагревают до  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Определить давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре. Зависимостью температуры кипения от давления пренебречь.

305. В начальный момент времени сжатый газ в закрытом цилиндре сечением  $100\text{ см}^2$  удерживается на расстоянии 10 см от дна цилиндра подвижным поршнем, на который действует внешняя сила  $10^3\text{ Н}$  и атмосферное давление  $10^5\text{ Па}$ . Затем внешняя сила убирается, и газ начинает изотермически расширяться. На каком расстоянии по отношению к первоначальному положению поршень будет иметь наибольшую скорость?

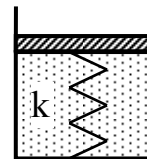
306. Сосуд, наполненный смесью водорода и гелия, отделён от равного ему по объёму пустого сосуда полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы гелия и не пропускающей молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде упало на 10 %. Определить отношение масс гелия и водорода. Все процессы считать изотермическими. Молярные массы водорода и гелия соответственно равны 2 г/моль и 4 г/моль.

307. Одинаковые по массе количества водорода и гелия находятся в сосуде объёмом  $V_1$ , который отделён от пустого сосуда объёмом  $V_2$  полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы водорода и не пропускающей гелий. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в 2 раза. Определите отношение  $V_2/V_1$ . Температура постоянна. Молярные массы водорода и гелия соответственно равны 2 г/моль и 4 г/моль.

308. Узкая вертикальная цилиндрическая трубка длиной  $L$ , закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути длиной  $h$ . Плотность ртути равна  $\rho$ . Трубка расположена открытым концом вверх. Какова была длина  $\ell$  столбика воздуха в трубке, если при перевёртывании трубки открытым концом вниз из трубки вылилась половина ртути? Атмосферное давление равно  $P_0$ .

309. В закрытом сосуде объёмом  $V=0,1\text{ м}^3$  находится вода объёмом  $V_{\text{в}}=10^{-3}\text{ м}^3$  при температуре  $t=30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Каким стало бы давление в сосуде, если бы силы притяжения между молекулами внезапно исчезли?

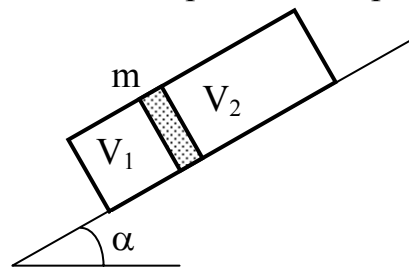
310. В вертикально расположенном цилиндре находится газ массой  $m$ . Газ отделён от атмосферы поршнем, соединённым с дном цилиндра пружиной жёсткости  $k$  (см. рисунок). При температуре  $T_1$  поршень расположен на расстоянии  $h$  от дна цилиндра. До какой температуры  $T_2$  надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты  $H$ ? Молярная масса газа равна  $\mu$ .



311. Кристаллик поваренной соли массой  $m=0,1\text{ г}$  бросили в пруд, глубина которого  $h=5\text{ м}$ , а площадь  $S=100\text{ м}^2$ . Какое число  $N$  ионов натрия окажется в ведре воды, зачерпнутом из пруда? Объем ведра  $V=10\text{ л}$ . Считать, что соль рав-

номерно распределилась в пруде. Молярная масса  $\text{NaCl}$   $\mu=58,5$  г/моль. Число Авогадро  $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ .

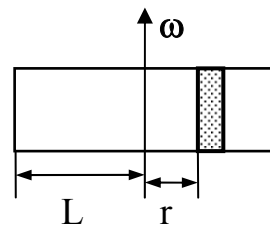
312. Внутри невесомой трубы, наполненной воздухом и закрытой с обоих торцов, может скользить без трения поршень массой  $m=4$  кг, герметично прилегающий к внутренним стенкам трубы. В горизонтально лежащей трубе поршень занимает среднее положение, а давление воздуха в трубе  $P=1,25$  кПа. Площадь поршня  $S=200$  см $^2$ . Определить отношение объёмов воздуха по обе стороны от поршня в трубе, соскальзывающей по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha=60^\circ$  с горизонтом (см. рисунок). Коэффициент трения между трубой и наклонной плоскостью равен  $\mu=0,25$ . Температура воздуха в трубе постоянна.



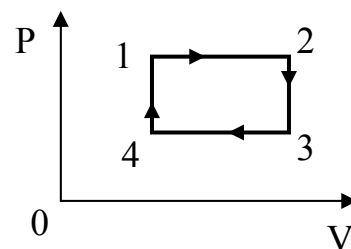
313. В узкой стеклянной трубке, запаянной с одного конца и расположенной горизонтально, находится столбик воздуха длиной 30,7 см, запёртый столбиком ртути длиной 21,6 см. Как изменится длина воздушного столбика, если трубку поставить отверстием вверх? Давление атмосферы 99,6 кПа.

314. Посередине узкой, запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной 10 см. В обеих половинах остальное пространство занимает воздух под давлением 100 кПа. На какое расстояние переместится столбик ртути, если трубку поставить вертикально? Длина трубки 1 м.

315. В закрытом с обоих торцов цилиндре объёмом  $V=1,2$  л находится воздух при давлении  $P_0=100$  кПа, который разделён на две одинаковые половины тонким поршнем массы  $m=0,1$  кг. Длина цилиндра  $2L=0,4$  м. Цилиндр привели во вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину (см. рисунок). Найти  $\omega$ , если поршень оказался на расстоянии  $r=0,1$  м от оси вращения. Трения нет. Температура постоянна.

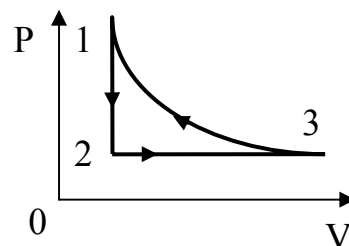


316. На рисунке дан график изменения состояния идеального газа в координатах  $P$ - $V$ . Представьте этот круговой процесс в координатах  $P$ - $T$  и  $V$ - $T$ . Обозначьте соответствующие точки.



317. На дне цилиндра, заполненного воздухом, лежит стальной шарик радиусом 2 см и массой 5 г. До какого давления надо сжать газ, чтобы шарик висел в сжатом воздухе? Газ считать идеальным.

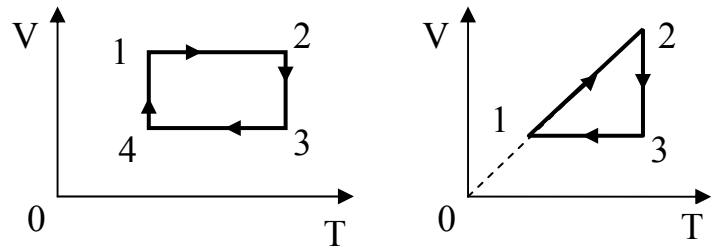
318. На рисунке дан график изменения состояния идеального газа в координатах  $P$ - $V$ . Представьте этот круговой процесс в координатах  $P$ - $T$  и  $V$ - $T$ . Обозначьте соответствующие точки.





319. Газ нагрели от  $27^{\circ}\text{C}$  до  $39^{\circ}\text{C}$ . На сколько процентов увеличился объём, если давление осталось неизменным?

320. На рисунках показано как изменяется объём  $V$  газа при изменении температуры  $T$ . Начертите диаграммы  $P$ - $V$ . Обозначьте соответствующие точки.

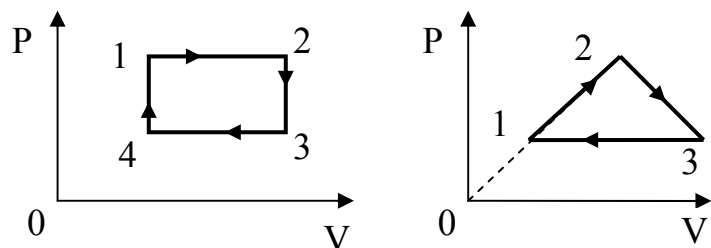


321. Газ, занимающий объём  $10^{-3}\text{ м}^3$  при нормальном атмосферном давлении, расширился изотермически до объёма 2 л. При этом же объёме его давление было уменьшено в 2 раза. Затем газ расширился при постоянном давлении до объёма 4 л. Начертите график зависимости  $P(V)$  и, используя его, установите, при каком из перечисленных процессов газ совершил наибольшую работу. Как изменилась температура?

322. Открытую пробирку с воздухом, находящимся при атмосферном давлении  $P_1$ , медленно нагрели до температуры  $T_1$ , затем герметически закрыли и охладили до  $283\text{ К}$ . Давление при этом упало до  $0,7 P_1$ . До какой температуры была нагрета пробирка? Расширение пробирки не учитывать.

323. Сколько молекул воздуха находится в комнате размерами  $12 \cdot 5 \cdot 4\text{ м}^3$  при температуре  $15^{\circ}\text{C}$  и давлении  $100\text{ кПа}$ ? Если бы каждую секунду из этой комнаты вылетал 1 млрд. молекул, сколько времени потребовалось бы для удаления всех их? Считать для воздуха молярную массу равной  $\mu=28,9\text{ г/моль}$ .

324. На рисунках показано как изменяется давление  $P$  газа при изменении объёма  $V$ . Начертите диаграммы  $P$ - $T$  и  $T$ - $V$ . Обозначьте соответствующие точки.



325. Газ, занимающий при температуре  $127^{\circ}\text{C}$  и давлении  $10^5\text{ Па}$  объём 2 л, изотермически сжимают до объёма  $V_2$  и давления  $P_2$ , затем изобарически охлаждают до температуры  $-73^{\circ}\text{C}$ , после чего изотермически изменяют объём до 1 л. Найдите конечное давление  $P_4$ . Решить задачу графически, построив графики в координатах  $P$ - $V$ ,  $P$ - $T$ ,  $V$ - $T$ .

326. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое число атомов гелия, соединены краном. В первом сосуде средняя скорость атомов равна  $1\text{ 000 м/с}$ , а во втором  $2\text{ 000 м/с}$ . Какой будет эта скорость, если открыть кран и сделать сосуды сообщающимися?

327. Сосуд с газом разделён подвижной перегородкой на две части, объёмы которых равны  $V_1$  и  $V_2$ , соответственно ( $V_1 < V_2$ ). Температура газа в меньшем объёме  $t_1 = -73^{\circ}\text{C}$ , в большем объёме  $t_2 = 527^{\circ}\text{C}$ . После выравнивания тем-

ператур перегородка переместилась так, что меньший объём стал равным  $\frac{2}{3}V$ ,

где  $V$  – объём сосуда. Найдите отношение объёмов  $V_1 / V_2$ .

328. Каково давление азота, если средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с, а его плотность 1,35 кг/м<sup>3</sup>?

329. Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло  $5,4^\circ$  при частоте вращения прибора 150 с<sup>-1</sup>? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно 2 см.

330. В баллоне вместимостью 10 л находится газ при температуре 27 °С. Вследствие утечки газа давление снизилось на 4,2 кПа. Какое число молекул вышло из баллона, если температура сохранилась неизменной?

331. Оцените размер атома золота  $L$ . Молярная масса  $\mu = 197$  г/моль, плотность  $\rho = 19,32$  г/см<sup>3</sup>.

332. При какой температуре показания по шкалам Фаренгейта и Цельсия одинаковы?

333. Почему из уравнения состояния идеального газа  $P = \rho RT/\mu$  следует завышенное значение давления?

334. Два газа, массы молекул которых равны  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), находятся в двух сосудах. Температуры газов соответственно равны  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 < T_2$ ). Затем сосуды соединяют. Найдите отношение среднеквадратичных скоростей молекул после установления состояния теплового равновесия.

335. Может ли жидкость быть идеально однородной?

336. Смесь газов содержит два идеальных газа:  $\nu_1$  молей газа молярной массой  $\mu_1$  и  $\nu_2$  молей газа молярной массой  $\mu_2$ . Найдите молярную массу смеси  $\mu$ .

337. Начальная температура воздуха в медицинской банке, прикладываемой к телу,  $t_1 = 80$  °С. Температура в комнате  $t_2 = 20$  °С. Атмосферное давление  $P_0 = 100$  кПа. Найдите величину силы, действующей на тело со стороны ободка банки радиусом  $R = 2$  см.

338. В воде на глубине  $h$  образовался пузырёк радиусом  $R$ , заполненный воздухом. С максимальной степенью точности всплывание пузырька представляет собой адиабатический процесс. Найдите радиус  $r$  пузырька на глубине  $x$ .

339. В баллоне объёмом  $V = 22,4$  л содержится водород при температуре  $t = 0$  °С и давлении  $P = 10^6$  Па. Найдите массу  $\Delta m$  водорода, выпущенного из баллона, если при сгорании оставшегося водорода образовалось  $m = 36$  г воды.

340. В сосуде находится кислород при давлении  $P_1$ . В результате электрического разряда половина молекул распалась на атомы, а температура возросла в два раза. Найдите давление газа  $P_2$ .

341. В сосуде, из которого быстро выкачивают воздух, находится небольшое количество воды при 0 °С. За счет интенсивного испарения происходит постепенное замораживание воды. Какая часть первоначального количества воды может быть обращена таким способом в лёд? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 0,335$  МДж/кг, удельная теплота парообразования воды  $r = 2,26$  МДж/кг.

342. Для получения 300 л воды при  $40^{\circ}\text{C}$  необходимо смешать воду, температура которой  $20^{\circ}\text{C}$ , с водой, имеющей температуру  $100^{\circ}\text{C}$ . Сколько литров той и другой воды нужно взять?

343. В сосуд, содержащий 2,35 л воды при  $20^{\circ}\text{C}$ , опускают кусок олова, нагретого до 507 К, и температура воды в сосуде при этом повышается на 15 К. Вычислите массу олова. Для олова температура плавления  $232^{\circ}\text{C}$ , удельная теплоемкость 280 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления 59 кДж/кг. Удельная теплоемкость воды 4,19 кДж/(кг·К). Плотность воды  $1\text{ г/см}^3$ .

344. Сколько керосина сгорает за 1 мин в примусе с КПД 40 %, если 2 л воды нагреваются на нём от  $15^{\circ}\text{C}$  до  $100^{\circ}\text{C}$  за 10 мин? Удельная теплота сгорания керосина  $q = 46\text{ МДж/кг}$ . Удельная теплоёмкость воды  $c = 4,2\text{ кДж/(кг·К)}$ .

345. Свинцовая пуля, летящая со скоростью 430 м/с, пробивает стену и летит дальше со скоростью 200 м/с. Какая часть массы пули расплавится? Начальная температура пули  $80^{\circ}\text{C}$ , на нагревание пули затрачивается 50 % ее кинетической энергии. Удельная теплоёмкость свинца  $c = 130\text{ Дж/(кг·К)}$ , удельная теплота плавления  $\lambda = 25\text{ кДж/кг}$ . Температура плавления свинца  $327^{\circ}\text{C}$ .

346. В латунном калориметре массой 100 г находится 5 г льда при температуре  $-10^{\circ}\text{C}$ . В калориметр вливают 30 г расплавленного свинца при температуре плавления. Что будет находиться в калориметре после установления равновесной температуры, и какова эта температура? Удельная теплоёмкость льда  $c = 2,1\text{ кДж/(кг·К)}$ , удельная теплота плавления  $\lambda = 330\text{ кДж/кг}$ . Удельная теплоёмкость свинца  $c = 130\text{ Дж/(кг·К)}$ , удельная теплота плавления  $\lambda = 25\text{ кДж/кг}$ . Температура плавления льда  $0^{\circ}\text{C}$ .

347. Железная деталь массой 500 г, нагретая до  $800^{\circ}\text{C}$ , опущена в 5 л воды при  $19^{\circ}\text{C}$ . При этом образовалось некоторое количество пара, и температура воды повысилась на 1 К. Сколько воды обратилось в пар? Удельная теплоёмкость железа  $c = 460\text{ Дж/(кг·К)}$ , удельная теплоёмкость воды  $c = 4,2\text{ кДж/(кг·К)}$ , удельная теплота парообразования воды  $r = 2,3\text{ МДж/кг}$ . Температура кипения воды  $100^{\circ}\text{C}$ .

348. Массу воды  $m = 4,5\text{ кг}$  охлаждают от  $t_1 = 30^{\circ}\text{C}$  до  $t_2 = 10^{\circ}\text{C}$ , бросая кусочки льда при температуре  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ . Найдите массу льда  $m_0$ , необходимую для охлаждения воды.

349. В сосуд теплоёмкостью  $C = 2\text{ кДж/К}$  при температуре  $t_1 = 20^{\circ}\text{C}$  положили  $m = 50\text{ г}$  льда, охлаждённого до температуры  $t_2 = -10^{\circ}\text{C}$ . Найдите температуру сосуда  $t$  после установления теплового равновесия.

350. На плите с полезной мощностью  $P = 1\text{ кВт}$  стоит чайник, содержащий  $m = 2\text{ кг}$  воды. Температура воды  $t = 100^{\circ}\text{C}$ . Найдите время выкипания всей воды  $\tau$ .

351. Маятник часов при температуре  $t_0$  имеет длину  $L_0$  и при этом часы идут точно. Коэффициент линейного расширения материала маятника равен  $\alpha = 1,85 \cdot 10^{-5}\text{ К}^{-1}$ . На сколько будут отставать или убежать за сутки часы, если температура в помещении будет на  $\Delta t = 10^{\circ}\text{C}$  выше  $t_0$ ? При выводе формулы учесть, что значение коэффициента линейного расширения материала маятника мало.

352. Стальной стержень, имеющий площадь поперечного сечения  $S = 10 \text{ см}^2$ , своими концами упирается в две жестко закрепленные массивные плиты. С какой силой стержень будет давить на каждую из плит, если его температура повысится на  $\Delta t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Модуль упругости стали  $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , коэффициент линейного расширения стали  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

353. При изготовлении некоторого физического прибора оказалось необходимым обеспечить постоянство разности длин железного и медного цилиндров при любых изменениях температуры. Какой длины должны быть эти цилиндры при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , чтобы разница их длин при всех температурах была равна  $\Delta L = 10 \text{ см}$ ? Коэффициент линейного расширения железа  $\alpha_1 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ . Коэффициент линейного расширения меди  $\alpha_2 = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

354. Железный бак вмещает 50 л керосина при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Сколько керосина выльется из бака, если его внести в комнату с температурой  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Коэффициент линейного расширения железа  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ . Коэффициент объемного расширения керосина  $\beta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ .

355. Стальной шарик массой 100 г опущен на нити в керосин. Как изменится сила натяжения нити, если всю систему нагреть от  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

356. В углублении льда, имеющего температуру  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , влито 60 г воды при температуре  $75 \text{ }^\circ\text{C}$ . Какой объем будет иметь углубление после остывания воды?

357. Какую силу надо приложить к стальному стержню сечением  $1 \text{ см}^2$ , чтобы растянуть его на столько же, на сколько он удлинится при нагревании на  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Модуль упругости стали  $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , коэффициент линейного расширения стали  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

358. Медный лист размером  $0,6 \cdot 0,5 \text{ м}^2$  при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  нагревается до  $600 \text{ }^\circ\text{C}$ . Как изменится его площадь? Коэффициент линейного расширения меди  $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ .

359. Медный шар массой 17,6 кг, взятый при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , при нагревании увеличил свой объем на  $10,2 \text{ см}^3$ . Сколько тепла затрачено на его нагревание? Удельная теплоёмкость меди  $390 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ .

360. Спирт массой 7,9 кг находится в некотором сосуде при  $10 \text{ }^\circ\text{C}$ . Какова будет масса спирта, взятого в том же объеме при  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Коэффициент объемного расширения спирта  $11 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$ , плотность спирта  $800 \text{ кг/м}^3$ .

361. Был предложен следующий проект вечного двигателя. Берется капилляр такого радиуса  $r$ , чтобы в нем вода могла подниматься на высоту  $h$ . На высоте  $h_1$ , меньшей, чем  $h$ , капилляр изгибается и верхний его конец разворачивается в широкую воронку. Действия сил поверхностного натяжения вполне достаточно, чтобы поднять жидкость на высоту  $h_1$  и ввести ее в воронку. В широкой части воронки жидкость отрывается от верхнего края воронки и, ничем уже не удерживаемая, скатывается вниз. На пути капле, падающих обратно в сосуд, можно поставить водяное колесо и осуществить его вечное движение. Будет ли действовать такой двигатель? В чем ошибка приведенного в условии рассуждения?

362. Когда делают бесполезную работу, то говорят, что это все равно, что воду в решетке носить. При каких условиях можно всё-таки действительно пе-

реносить воду в решете, не проливая ее по дороге? Какой максимальной высоты слой воды можно нести в решете, если диаметр отверстий сетки решета  $d=1$  мм? Можно ли будет воду, налитую в решето, вылить через край решета? Коэффициент поверхностного натяжения воды  $70$  мН/м.

363. Определить работу, необходимую для превращения воды массой  $1$  г в туман, т.е. для распыления ее в капельки диаметром  $0,2$  мкм.

364. Какое количество теплоты получает капля ртути, образовавшаяся при слиянии  $64$  капель радиусом  $2$  мм каждая? Коэффициент поверхностного натяжения ртути  $490$  мН/м.

365. Капиллярная трубка с внутренним диаметром  $0,4$  мм наполнена водой. Часть воды повисла внизу в виде капельки, которую можно принять за часть сферы радиусом  $2$  мм. Определить высоту столбика воды в трубке. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $72$  мН/м.

366. Капля ртути массой  $1,36$  г введена между параллельными стеклянными пластинками. Какую силу следует приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины  $0,1$  мм? Считать, что ртуть абсолютно не смачивает стекло. Коэффициент поверхностного натяжения ртути  $0,5$  Н/м.

367. На сколько градусов нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель диаметром  $1$  мм каждая? Коэффициент поверхностного натяжения ртути  $0,5$  Н/м, удельная теплоемкость  $c=138$  Дж/(кг·К), плотность  $\rho=13,6$  г/см<sup>3</sup>.

368. Деревянная палочка длиной  $4$  см плавает на поверхности воды. По одну сторону от палочки осторожно налили мыльный раствор. С каким ускорением начнет двигаться палочка, если ее масса  $1$  г? Сопротивление воды при движении палочки не учитывать. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $72$  мН/м. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора  $40$  мН/м.

369. В капиллярной трубке жидкость поднимается на  $80$  см. Определите высоту столбика жидкости, которая может удержаться в трубке, если ее полностью заполнить жидкостью в горизонтальном положении, а затем повернуть вертикально.

370. Капля воды массой  $0,2$  г находится между двумя стеклянными пластинами, расстояние между которыми  $0,1$  мм. Найти силу притяжения пластин друг к другу.

371. При расширении газа тепловая машина совершает работу, при этом его объем увеличивается от  $V_1=1$  л до  $V_2=2$  л, а давление линейно убывает от  $P_1=1$  МПа до  $P_2=0,4$  МПа. Определите изменение внутренней энергии газа при его расширении и КПД тепловой машины, если количество теплоты, получаемой за цикл тепловой машиной от нагревателя  $Q_1=100$  Дж, а отданной холодильнику  $Q_2=80$  Дж.

372. В идеальном тепловом двигателе газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику  $k=0,73$  часть количества теплоты, получаемого от нагревателя. Определите температуру нагревателя  $T_n$ , если температура холодильника равна  $T_x=272$  К.

373. Идеальный тепловой насос (идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу Карно) забирает тепло от воды, имеющей температуру  $t_0=$

$0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , и передает его кипятильнику с водой, имеющему температуру  $t_{\text{кип}}=100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Сколько воды превращается в пар при образовании льда массой  $m=1\text{ кг}$ ? Удельная теплота плавления льда  $\lambda=3,3\cdot 10^5\text{ Дж/кг}$ , удельная теплота парообразования воды  $L=2,26\cdot 10^6\text{ Дж/кг}$ .

374. Один моль идеального атомарного газа сначала изобарно расширяется, а затем изохорно нагревается, при этом количество теплоты, сообщенное газу на этих участках, одинаково  $Q_1=Q_2=Q=400\text{ Дж}$ . Начальная температура газа  $T=300\text{ К}$ . Определите конечную температуру газа и молярную теплоемкость этого процесса.

375. В вертикальном цилиндре с площадью основания  $S=10\text{ см}^2$  под поршнем массы  $M=1\text{ кг}$ , при температуре  $T=300\text{ К}$  находится идеальный газ объемом  $V=20\text{ л}$ . Для повышения температуры газа на  $\Delta T=50\text{ К}$  ему было сообщено количество теплоты  $Q=833\text{ Дж}$ . Определите изменение внутренней энергии газа, если атмосферное давление  $P_0=10^5\text{ Па}$ .

376. В закрытом с обоих торцов цилиндре находится идеальный газ при давлении  $P=10^5\text{ Па}$ , разделенный на два одинаковых объема тонким поршнем, который может свободно (без трения) перемещаться. Цилиндр начинает двигаться по горизонтальной плоскости с ускорением  $a=5\text{ м/с}^2$ , направленным по нормали к его торцам. Определите отношение объемов по обе стороны от поршня. Температура газа постоянна. Площадь сечения цилиндра  $S=10\text{ см}^2$ , масса поршня  $m=0,1\text{ кг}$ .

377. Два сосуда одинаковой емкости содержат аргон: один - при температуре  $T_1$  и давлении  $P_1$ , другой - при температуре  $T_2$  и давлении  $P_2$ . Сосуды соединяются, и после выравнивания давлений и температур газ оказывается нагретым до температуры  $T$ . Какое давление  $P$  устанавливается при этом в сосудах?

378. На дне вертикального герметически закрытого и откачанного цилиндра лежит тяжелый скользящий без трения поршень. Под поршень вводится такое количество идеального газа, имеющего температуру  $T=300\text{ К}$ , что поршень поднимается вверх и нижнее его основание оказывается на высоте  $h=30\text{ см}$  от дна цилиндра. Определить перемещение  $\Delta h$  поршня, если содержащийся под ним газ нагреть на  $\Delta T=10\text{ К}$ .

379. Открытую стеклянную трубку длиной  $L=1,0\text{ м}$  наполовину погружают в сосуд с ртутью. Затем трубку сверху закрывают и плавно вынимают из сосуда. После того как ртуть перестала вытекать, трубку осторожно переворачивают открытым концом вверх. На каком расстоянии  $h$  от ее дна расположится столбик ртути. Атмосферное давление  $P_0=750\text{ мм рт. ст.}$ . Плотность ртути  $\rho = 1,36\cdot 10^4\text{ кг/м}^3$ .

380. На какой глубине диаметр пузырьков воздуха, поднимающихся со дна водоема, вдвое меньше, чем у поверхности воды? Давление воздуха у поверхности воды  $P_0=10^5\text{ Па}$ . Плотность воды  $\rho=10^3\text{ кг/м}^3$ . Считать, что температура воздуха в пузырьке постоянна, то есть не зависит от глубины, на которой пузырек находится.

381. Воздушный шар с нерастяжимой оболочкой массой  $m=0,3$  кг наполнен гелием при температуре  $T_1=300$  К и давлении  $P_1=1,2 \cdot 10^5$  Па. Объем шара  $V=1$  м<sup>3</sup>. Определите высоту, на которой шар будет находиться во взвешенном состоянии (шар свободно плавает в воздухе), если при подъеме на каждые  $L=100$  м высоты атмосферное давление падает на  $\Delta P=1,33 \cdot 10^3$  Па, а температура понижается на  $\Delta T=0,54$  К. Атмосферное давление и температура воздуха у поверхности Земли равны соответственно  $P_0=1,01 \cdot 10^5$  Па и  $T_0=300$  К, молярные массы воздуха  $\mu_v=2,9 \cdot 10^{-2}$  кг/моль и гелия  $\mu_r=4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

382. Какое количество энергии  $E$  освобождается при слиянии мелких одинаковых капель радиусом  $r=2 \cdot 10^{-3}$  мм в одну каплю радиуса  $R=2$  мм? Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma=0,072$  Н/м. Изменением потенциальной энергии капель, связанной с силой тяжести, пренебречь.

383. Глицерин поднялся в капиллярной трубке на высоту  $h_1=20$  мм. Поверхностное натяжение глицерина равно  $\sigma_1=0,066$  Н/м, его плотность  $\rho_1=1,26 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. На какую высоту в этой трубке поднялась бы вода? Плотность воды  $\rho_2=10^3$  кг/м<sup>3</sup>, ее поверхностное натяжение  $\sigma_2=0,072$  Н/м. Считать, что глицерин и вода полностью смачивают стенки капиллярной трубки.

384. Определить максимальную длину ребра  $L$  алюминиевого кубика, способного плавать на поверхности воды при нанесении на его поверхность не смачиваемой водой пленки парафина. Плотность алюминия  $\rho=2,7$  г/см<sup>3</sup>. Поверхностное натяжение воды  $\sigma=0,072$  Н/м.

385. Какой минимальный радиус  $r$  должна иметь капля воды, отрывающаяся от выходного отверстия пипетки диаметром  $d=2$  мм? Поверхностное натяжение воды  $\sigma=0,072$  Н/м, ее плотность  $\rho=10^3$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

386. Какую силу  $F$  надо приложить к стальному стержню сечением  $S=1$  см<sup>2</sup>, чтобы растянуть его на столько же, на сколько он удлиняется при нагревании на  $\Delta t=1$  °С? Для стали коэффициент линейного расширения равен  $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>, а модуль упругости  $E=2,1 \cdot 10^{11}$  Па.

387. При температуре  $t_0=0$  °С длины алюминиевого и железного стержней  $L_{a0}=50$  см и  $L_{ж0}=50,05$  см. Сечения стержней одинаковы. При какой температуре  $t_1$  длины стержней одинаковы? При какой температуре  $t_2$  будут одинаковы их объемы? Коэффициенты линейного расширения алюминия и железа  $\alpha_a=2,4 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> и  $\alpha_{ж}=1,2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>.

388. Алюминиевый шарик массой  $m=108$  г опущен на нерастяжимой нити в воду. На сколько изменится натяжение нити, если всю систему нагреть от  $t_1=20$  °С до  $t_2=50$  °С? Плотности алюминия и воды при 20 °С равны соответственно  $\rho_a=2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_v=10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Температурные коэффициенты линейного расширения алюминия  $\alpha=2,4 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup> и объемного расширения воды  $\beta=1,8 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>.



389. Азот (химическая формула  $N_2$ ) занимает объем  $V_0=2,5$  л при давлении  $P_0=10^5$  Па. На сколько изменится внутренняя энергия газа при его сжатии до объема  $V=0,25$  л, если давление газа повысилось при этом в  $n=20$  раз?

390. В герметично закрытом теплоизолированном сосуде содержится  $\nu = 2$  моль идеального двухатомного газа. Какое количество теплоты  $Q$  следует подвести к газу для того, чтобы увеличить его температуру на  $\Delta T = 1$  К? Потерями тепла на нагрев стенок сосуда пренебречь.

391. В двух теплоизолированных цилиндрах с объемами  $V_1=3$  л и  $V_2=5$  л находятся одинаковые газы при давлениях  $P_1=4 \cdot 10^5$  Па и  $P_2=6 \cdot 10^5$  Па и температурах  $t_1=27$  °С и  $t_2=127$  °С. Цилиндры соединяются теплоизолированной трубкой. Какая температура  $T$  и какое давление  $P$  установятся в цилиндрах после смешивания газов?

392. В вертикальном открытом сверху цилиндре под тяжелым поршнем находится газ при температуре  $T_1=300$  К. Найти работу расширения газа при нагревании его на  $\Delta T=100$  К, если первоначально газ занимал объем  $V_1=180$  см<sup>3</sup>. Масса поршня  $M=100$  кг, его площадь сечения  $S=50$  см<sup>2</sup>. Атмосферное давление  $P_0=10^5$  Па.

393. В открытом сверху вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде на высоте  $h$  от его дна висит на нити поршень массы  $m$ . Под поршнем находится  $\nu=1$  моль идеального одноатомного газа, давление которого в начальный момент равно атмосферному  $P_0$ , а температура равна  $T_0$ . Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы занимаемый им объем увеличился вдвое? Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Теплообмен со стенками сосуда и поршнем не учитывать. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

394. В теплоизолированном цилиндре под легким подвижным поршнем находится идеальный газ, температуру которого повысили на одну и ту же величину  $\Delta T$  один раз при постоянном давлении, затратив количество теплоты  $Q_p = 2,1 \cdot 10^4$  Дж, а второй раз – при постоянном объеме, сообщив газу количество теплоты  $Q_v = 1,5 \cdot 10^4$  Дж. Определить отношение изменений температур  $(\Delta T)_v/(\Delta T)_p$  этого газа, если во время очередного цикла нагревания при постоянном объеме и постоянном давлении ему сообщают одинаковое количество теплоты. Трением поршня о стенки цилиндра и изменением объема цилиндра пренебречь.

395. Какое количество теплоты необходимо для нагревания на  $\Delta T=16$  К кислорода массой  $m=7 \cdot 10^{-3}$  кг, находящегося под тяжелым поршнем в вертикальном открытом сверху цилиндре. Молярная теплоемкость кислорода при нагревании его при постоянном объеме равна  $(C_{\mu})_v=20,9$  Дж/(моль·К), молярная масса  $\mu=32$  г/моль. Трение между поршнем и цилиндром не учитывать.

396. В открытом сосуде с теплоизолированными стенками находится некоторое количество воды при температуре  $t = 90$  °С. В воду бросают раскаленные платиновые опилки, масса которых равна массе воды. Найти начальную температуру опилок  $t_0$ , если известно, что после прекращения кипения уровень воды в сосуде остался равным первоначальному. Удельная теплоемкость воды

$c_1=4,19 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды  $r=2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг при температуре кипения  $t_{\text{кип}}=100$  °С, плотность воды  $\rho_1=10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность платины  $\rho_2=21,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоемкость платины  $c_2=128$  Дж/(кг·К). Изменением плотности воды при нагреве, теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

397. На электроплитке мощностью  $N=1$  кВт растопили  $m_{\text{л}}=800$  г льда с начальной температурой  $t_0=-20$  °С. Полученную воду довели до кипения, причем 25 % ее превратилось в пар. Найти КПД электроплитки, если нагревание длилось 40 мин. Удельная теплоемкость льда  $c_{\text{л}}=2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), воды  $c_{\text{в}}=4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда  $\lambda=3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота парообразования воды  $r=2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг.

398. В идеальном тепловом двигателе газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику  $k=0,73$  часть количества теплоты, получаемого от нагревателя. Определите температуру нагревателя  $T_{\text{н}}$ , если температура холодильника равна  $T_{\text{х}}=272$  К.

399. Идеальный тепловой насос (идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу Карно) забирает тепло от воды, имеющей температуру  $t_0=0$  °С, и передает его кипятильнику с водой, имеющему температуру  $t_{\text{кип}}=100$  °С. Сколько воды превращается в пар при образовании льда массой  $m=1$  кг? Удельная теплота плавления льда  $\lambda=3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота парообразования воды  $L=2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг.

400. Два одинаковых сосуда наполнены идеальным газом при температуре  $T_1$ , и соединены между собой трубкой, объемом которой можно пренебречь. Во сколько раз изменится давление газа в сосудах, если один из них нагреть до температуры  $T_2$ , а во втором поддерживать температуру  $T_1$ ? Изменением объема нагретого сосуда пренебречь.

## Глава 9 Экзамены

### § 9.65 Общие положения

За время изучения курса физики студент должен представить экзаменационные тестовые задания после изучения каждого раздела дисциплины (всего 5 разделов).

Номера тестовых заданий, которые студент должен включить в свою экзаменационную работу, определяются по **таблицам вариантов**. **Номер варианта определяется по последней цифре номера зачетной книжки**. Каждый вариант включает в себя 20 (двадцать) тестовых заданий, номера которых определяются номером варианта.

Оформление экзаменационного теста производится либо **в электронном виде**, либо **письменно**. При оформлении записываются номера тестовых заданий и отмечаются правильные ответы (Если, например, по мнению студента в 37 тестовом задании верный ответ **С**, то правильный ответ следует отмечать сле-

дующим образом: 37-С). Как и в контрольных работах непременно необходимо оформлять титульный лист.

Таблица вариантов

Вариант	Номера задач									
1	301, 305	311, 315	321, 325	331, 337	341, 347	351, 357	361, 369	371, 383	381, 393	391, 373
2	302, 306	312, 315	322, 324	332, 338	342, 348	352, 358	362, 370	372, 384	382, 394	392, 374
3	303, 307	313, 316	323, 325	333, 339	343, 349	353, 359	363, 361	373, 385	383, 395	393, 375
4	304, 308	314, 317	324, 326	334, 340	344, 350	354, 360	364, 362	374, 386	384, 396	394, 376
5	305, 309	315, 318	325, 327	335, 341	345, 351	355, 331	365, 363	375, 387	385, 397	395, 377
6	306, 310	316, 319	326, 328	336, 342	346, 352	356, 332	366, 364	376, 388	386, 398	396, 378
7	307, 311	317, 320	327, 329	337, 343	347, 353	357, 333	367, 365	377, 389	387, 399	397, 379
8	308, 312	318, 321	328, 330	338, 344	348, 354	358, 334	368, 366	378, 390	388, 400	398, 380
9	309, 313	319, 322	328, 301	339, 345	349, 355	359, 335	369, 367	379, 391	389, 371	399, 381
0	310, 314	320, 323	330, 302	340, 346	350, 356	360, 336	370, 368	380, 392	390, 372	400, 382

Критерии экзаменационной оценки следующие:

- “отлично” - более 18 правильных ответов;
- “хорошо” - 16-18 правильных ответов;
- “удовлетворительно” - 12-15 правильных ответа;
- “неудовлетворительно” - менее 12 правильных ответов.

### § 9.66 Экзаменационные тестовые задания

301. Средний квадрат скорости поступательного движения молекул некоторого газа, находящегося под давлением  $8 \cdot 10^4$  Па, равен  $6 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Чему равна плотность этого газа при данных условиях?

- А) 1 кг/м<sup>3</sup>      В) 0,5 кг/м<sup>3</sup>      С) 0,8 кг/м<sup>3</sup>      Д) 0,3 кг/м<sup>3</sup>      Е) 0,4 кг/м<sup>3</sup>

302. Если  $\mu$  – молярная масса,  $m_0$  – масса молекулы, а  $\overline{v^2}$  – средний квадрат скорости молекул идеального газа, имеющего температуру  $T$  и давление  $P$ , то концентрация молекул этого газа может быть вычислена по формуле (постоянная Больцмана  $k$ , газовая постоянная  $R$ ) ...

$$\text{A) } \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{B) } \frac{2kT}{3} \quad \text{C) } \frac{3RT}{2} \quad \text{D) } \frac{3P}{m_0 V^2} \quad \text{E) } \frac{3kP}{2}$$

303. Концентрация молекул одноатомного идеального газа, давление которого  $P$ , молярная масса  $\mu$ , средняя квадратичная скорость  $v$ , равна ( $N_A$  – число Авогадро,  $k$  – постоянная Больцмана):

$$\text{A) } \frac{Pk}{3\mu v^2} \quad \text{B) } \frac{2PN_A}{3\mu v^2} \quad \text{C) } \frac{3P\mu}{N_A v^2} \quad \text{D) } \frac{3Pk}{2\mu v^2} \quad \text{E) } \frac{3PN_A}{\mu v^2}$$

304. Какое давление на стенки сосуда производит кислород (молярная масса 32 г/моль), если средняя квадратичная скорость его молекул 400 м/с и число молекул в 1 см<sup>3</sup> равно  $2,7 \cdot 10^{19}$ ? Число Авогадро  $6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

$$\text{A) } 56,5 \text{ кПа} \quad \text{B) } 66,5 \text{ кПа} \quad \text{C) } 76,5 \text{ кПа} \quad \text{D) } 86,5 \text{ кПа} \quad \text{E) } 96,5 \text{ кПа}$$

305. При повышении температуры идеального газа на  $\Delta T_1 = 150$  К средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась с 400 до 500 м/с. На сколько  $\Delta T_2$  нужно нагреть этот газ, чтобы увеличить среднеквадратическую скорость его молекул от 500 до 600 м/с?

$$\text{A) } 127 \text{ К} \quad \text{B) } 141 \text{ К} \quad \text{C) } 150 \text{ К} \quad \text{D) } 183 \text{ К} \quad \text{E) } 192 \text{ К}$$

306. Баллон с воздухом объемом 1 м<sup>3</sup> за бортом космической станции получил пробоину сечением 1 мм<sup>2</sup>. Через сколько времени давление воздуха в нем уменьшится в 2 раза? Температура воздуха в баллоне 300 К. Молярная масса воздуха 29 г/моль. Газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К).

$$\text{A) } 1 \text{ 000 с} \quad \text{B) } 100 \text{ с} \quad \text{C) } 10 \text{ с} \quad \text{D) } 1 \text{ с} \quad \text{E) } 0,1 \text{ с}$$

307. Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если ее угловое смещение в опыте Штерна составляло  $5,4^\circ$  при частоте вращения прибора  $150 \text{ с}^{-1}$ ? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно 2 см.

$$\text{A) } 100 \text{ м/с} \quad \text{B) } 150 \text{ м/с} \quad \text{C) } 200 \text{ м/с} \quad \text{D) } 250 \text{ м/с} \quad \text{E) } 300 \text{ м/с}$$

308. При какой температуре  $T$  кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равна энергии фотона с длиной  $\lambda$ ?  $c$  – скорость света в вакууме,  $k$  – постоянная Больцмана,  $h$  – постоянная Планка.

$$\text{A) } \frac{2hc}{3k\lambda} \quad \text{B) } \frac{2hc}{5k\lambda} \quad \text{C) } \frac{3k\lambda}{2hc} \quad \text{D) } \frac{5k\lambda}{2hc} \quad \text{E) } \frac{2h\lambda}{3kc}$$

309. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при температуре  $T=296$  К равна  $V=480$  м/с. Сколько молекул содержится в 10 г этого газа? Число Авогадро  $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- А)  $1,88 \cdot 10^{22}$     В)  $1,88 \cdot 10^{23}$     С)  $1,88 \cdot 10^{24}$     Д)  $1,88 \cdot 10^{25}$     Е)  $1,88 \cdot 10^{26}$

310. Давление газа в межзвездном пространстве  $P = 1,7 \cdot 10^{-5}$  Па, а концентрация газовых молекул  $n = 1$  см<sup>-3</sup>. Определите среднюю кинетическую энергию молекул.

- А)  $1,6 \cdot 10^{-4}$  эВ    В)  $1,6 \cdot 10^{-3}$  эВ    С)  $1,6 \cdot 10^{-2}$  эВ    Д)  $1,6 \cdot 10^{-1}$  эВ    Е) 1,6 эВ

311. Определите плотность смеси газа массы  $m_1$  молярной массы  $\mu_1$  и газа массы  $m_2$  молярной массы  $\mu_2$  при температуре  $T$  и давлении  $P$ . Газовая постоянная равна  $R$ .

- А)  $\frac{p(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{RT(m_2\mu_1 - m_1\mu_2)}$     В)  $\frac{p(m_1\mu_2 - m_2\mu_1)}{RT(m_1 + m_2)}$   
 С)  $\frac{p(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)}{RT(m_1 + m_2)}$     Д)  $\frac{p(m_1 + m_2)}{RT(\mu_1 + \mu_2)}$     Е)  $\frac{p(m_1 + m_2)\mu_1\mu_2}{RT(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)}$

312. В комнате объемом  $V=100$  м<sup>3</sup> находится воздух с относительной влажностью  $B=70$  % при температуре  $t=22$  °С. Оцените число молекул водяного пара в комнате. Давление насыщенных паров воды при  $t=22$  °С равно  $P_n=2,64$  кПа. Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К). Число Авогадро  $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

- А)  $3,5 \cdot 10^{26}$     В)  $4,5 \cdot 10^{26}$     С)  $4,5 \cdot 10^{25}$     Д)  $3,5 \cdot 10^{25}$     Е)  $6,8 \cdot 10^{25}$

313. Газ занимает объем  $V_1=0,008$  м<sup>3</sup> при температуре  $T_1=300$  К. Определите массу газа, если после изобарического нагревания его до  $T_2=900$  К его плотность равна  $\rho_2=0,6$  кг/м<sup>3</sup>.

- А) 18 г    В) 21,6 г    С) 19,6 г    Д) 14,4 г    Е) 12 г

314. Баллон содержит  $V_1=40$  л сжатого воздуха под давлением  $P_1=15$  МПа. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом из этого баллона, если лодка находится на глубине  $h=20$  м? Атмосферное давление  $p_0=1 \cdot 10^5$  Па. Плотность воды  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение силы тяжести  $g=10$  м/с<sup>2</sup>.

- А)  $1,8$  м<sup>3</sup>    В)  $2,2$  м<sup>3</sup>    С)  $1,6$  м<sup>3</sup>    Д)  $2,4$  м<sup>3</sup>    Е)  $2$  м<sup>3</sup>

315. Если в сосуде находится смесь двух не взаимодействующих между собой газов соответственно с массами  $m_1$  и  $m_2$  и молярными массами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , то масса одного моля такой смеси равна:

$$\begin{array}{lll} \text{A)} \frac{\mu_1 \mu_2}{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2} & \text{B)} \frac{(m_1 + m_2) \mu_1 \mu_2}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1} & \text{C)} \frac{m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2}{m_1 + m_2} \\ \text{Д)} \frac{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1}{m_1 + m_2} & \text{E)} \frac{\mu_1 \mu_2}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1} & \end{array}$$

316. Если при увеличении абсолютной температуры идеального газа в 2 раза его давление увеличилось на 25 %, то объем этого газа заданной массы

- А) уменьшился в 1,6 раза    В) увеличился в 1,6 раза  
 С) уменьшился в 2,5 раза    Д) увеличился в 2,5 раза    Е) не изменился

317. Азот массой 7 г находится под давлением  $P=0,1$  МПа и температуре  $T_1=290$  К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем  $V_2=10$  л. Определите плотность газа  $\rho_1$  до расширения. Молярная масса азота  $\mu=28$  г/моль. Газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- А) 1,06 кг/м<sup>3</sup>    В) 1,16 кг/м<sup>3</sup>    С) 1,26 кг/м<sup>3</sup>    Д) 1,36 кг/м<sup>3</sup>    Е) 1,46 кг/м<sup>3</sup>

318. Определите плотность смеси  $m_1=8$  г водорода и  $m_2=16$  г кислорода при температуре  $T=290$  К и давлении  $P=10^5$  Па. Молярная масса водорода  $\mu_1=2$  г/моль, кислорода  $\mu_2=32$  г/моль. Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

$$\begin{array}{lll} \text{A)} 0,11 \text{ кг/м}^3 & \text{B)} 0,22 \text{ кг/м}^3 & \text{C)} 0,33 \text{ кг/м}^3 \\ \text{Д)} 0,44 \text{ кг/м}^3 & \text{E)} 0,55 \text{ кг/м}^3 & \end{array}$$

319. Чему равна масса газа в сосуде, если концентрация молекул кислорода в сосуде вместимостью 5 л равна  $9,41 \cdot 10^{23}$  м<sup>-3</sup>? Молярная масса кислорода  $\mu=32$  г/моль. Число Авогадро  $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

- А) 0,10 г    В) 0,25 г    С) 0,75 г    Д) 1,25 г    Е) 2,05 г

320. Как изменится температура идеального газа, если уменьшить его объем в два раза при осуществлении процесса, в котором давление и объем газа связаны соотношением  $PV^2=\text{const}$ ?

- А) не изменится    В) уменьшится в 2 раза    С) увеличится в 2 раза  
 Д) уменьшится в 4 раза    Е) увеличится в 4 раза

321. При температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$  идеальный газ, взятый количеством вещества 1 моль, занимает объем  $V_0$ . Чему равен объем газа, количество вещества которого равно 2 моль, при том же давлении  $P_0$  и температуре  $2T_0$ ?

- A)  $V_0$             B)  $2V_0$             C)  $4V_0$             D)  $8V_0$             E)  $\frac{1}{2}V_0$

322. Определите плотность смеси, состоящей из 4 г водорода и 32 г кислорода, при температуре  $7^\circ\text{C}$  и давлении 93 кПа. Молярная масса водорода 2 г/моль, кислорода 32 г/моль. Газовая постоянная равна 8,31 Дж/(моль·К).

- A) 0,36 кг/м<sup>3</sup>    B) 0,42 кг/м<sup>3</sup>    C) 0,48 кг/м<sup>3</sup>    D) 0,54 кг/м<sup>3</sup>    E) 0,60 кг/м<sup>3</sup>

323. Среднеквадратичная скорость молекул газа 400 м/с. Определите объем, который займет газ при среднем давлении 0,1 МПа и массе 1,0 кг.

- A) 0,93 м<sup>3</sup>        B) 0,83 м<sup>3</sup>        C) 0,73 м<sup>3</sup>        D) 0,63 м<sup>3</sup>        E) 0,53 м<sup>3</sup>

324. Температура комнаты была  $t_1=10^\circ\text{C}$ . После того, как печь натопили, температура в комнате поднялась до  $t_2=20^\circ\text{C}$ . Объем комнаты  $V=50\text{ м}^3$ , давление в ней  $P=97\text{ кПа}$ . Насколько изменилась масса воздуха, находившегося в комнате? Молярная масса воздуха  $\mu=29\text{ г/моль}$ . Универсальная газовая постоянная  $R=8,31\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

- A) 1,71 кг        B) 1,85 кг        C) 2,04 кг        D) 2,43 кг        E) 2,68 кг

325. Баллон содержит газ при  $t_1=27^\circ\text{C}$  и давлении  $P_1=4\text{ МПа}$ . Каково будет давление, если из баллона выпустить половину массы газа, а температуру понизить до  $t_2=12^\circ\text{C}$ ?

- A) 1,7 МПа        B) 1,8 МПа        C) 1,9 МПа        D) 2,0 МПа        E) 2,1 МПа

326. В дизеле в начале такта сжатия температура воздуха равна  $27^\circ\text{C}$ , а давление 70 кПа. Во время сжатия объем воздуха уменьшается в 15 раз, а давление возрастает до 3,5 МПа. При этих условиях температура воздуха в конце такта сжатия равна ...

- A)  $1\,000^\circ\text{C}$         B)  $727^\circ\text{C}$         C)  $427^\circ\text{C}$         D)  $517^\circ\text{C}$         E)  $600^\circ\text{C}$

327. Резиновую камеру накачали на берегу до нормального давления  $P_0=10^5\text{ Па}$ . На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воздуха на берегу  $t_1=27^\circ\text{C}$ , температура воды  $t_2=4^\circ\text{C}$ . Плотность воды  $\rho=10^3\text{ кг/м}^3$ . Ускорение силы тяжести  $g=10\text{ м/с}^2$ .



- А) 8 м      В) 8,5 м      С) 9 м      Д) 9,5 м      Е) 10 м

328. При некотором процессе, проведенном с идеальным газом, соотношение между давлением и объемом газа таково, что  $PV^3 = \text{const}$ . Как изменится температура  $T$  газа при увеличении его объема в 2 раза?

- А) не изменится      В) увеличится в 4 раза      С) уменьшится в 4 раза  
 Д) увеличится в 2 раза      Е) уменьшится в 2 раза

329. В баллоне находится газ массой  $m_1$  при температуре  $T_1$  и давлении  $P_1$ . После того, как из баллона выпустили некоторое количество газа температура стала равной  $T_2$ , давление –  $P_2$ . Какую массу газа выпустили из баллона?

- А)  $m_1 \left( 1 - \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} \right)$       В)  $m_1 \left( \frac{P_2}{P_1} - \frac{T_2}{T_1} \right)$       С)  $m_1 \left( 1 - \frac{P_1 T_1}{P_2 T_2} \right)$   
 Д)  $m_1 \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2}$       Е)  $m_1 \left( 1 - \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} \right)$

330. Какова примерно разница в массе воздуха, занимающего помещение объемом  $100 \text{ м}^3$ , летом при температуре  $30^\circ\text{C}$  и зимой при температуре  $5^\circ\text{C}$ ? Атмосферное давление в обоих случаях нормальное. Газовая постоянная  $R=8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{K})$ . Молярная масса воздуха  $\mu=29 \text{ г}/\text{моль}$ .

- А) 0,5 кг      В) 5 кг      С) 10 кг      Д) 1 кг      Е) 0

331. Удельная теплоемкость воды  $4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ , а ее удельная теплота парообразования  $2,3 \text{ МДж}/\text{кг}$ . В кастрюлю налили холодной воды при  $9^\circ\text{C}$  и поставили на плиту, не накрывая крышкой. Если вода закипела через 10 мин, то, через какое время после начала кипения она полностью испарится? Температура кипения  $100^\circ\text{C}$ .

- А) 40 мин      В) 45 мин      С) 50 мин      Д) 55 мин      Е) 60 мин

332. Сосуд, содержащий некоторую массу азота при нормальных условиях, движется со скоростью  $100 \text{ м}/\text{с}$ . Какова будет максимальная температура азота при внезапной остановке сосуда? Удельная теплоемкость азота при постоянном объеме равна  $745 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ .

- А) 273 К      В) 320 К      С) 300 К      Д) 400 К      Е) 280 К

333. Сколько времени потребуется для нагревания воды массой 2 кг от начальной температуры  $10^{\circ}\text{C}$  до кипения ( $100^{\circ}\text{C}$ ) в электрическом чайнике с электрическим нагревателем мощностью 1 кВт, если его КПД равен 90 %? Удельная теплоемкость воды  $4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ .

- А) 7 мин    В) 9 мин    С) 18 мин    Д) 15 мин    Е) 14 мин

334. Если бы удалось полностью использовать энергию, которая выделяется при остывании 250 г воды от температуры  $100^{\circ}\text{C}$  до  $20^{\circ}\text{C}$ , то на какую высоту можно было бы поднять груз массы 1 000 кг? Удельная теплоемкость воды  $4 200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ . Ускорение свободного падения  $9,8 \text{ м}/\text{с}^2$ .

- А) 8,2 м    В) 8,6 м    С) 6,5 м    Д) 7,8 м    Е) 7,2 м

335. Стакан с водой при температуре  $24^{\circ}\text{C}$  поставили в морозильную камеру. За 5 мин температура воды снизилась до  $16^{\circ}\text{C}$ . Сколько еще времени пройдет до полного замерзания всей воды, если скорость теплоотдачи будет такой же? Удельная теплоемкость воды  $4,18 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ , удельная теплота кристаллизации  $332,4 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

- А) 29 мин    В) 58 мин    С) 60 мин    Д) 63 мин    Е) 125 мин

336. Гелий из состояния с температурой  $T_1=200 \text{ К}$  расширяется в процессе  $PV^2=\text{const}$  ( $P$  – давление,  $V$  – объем газа) с постоянной теплоемкостью  $C$ . От газа отвели количество теплоты 400 Дж, и конечный объем газа стал вдвое больше начального. Определите теплоемкость  $C$ .

- А) 16 Дж/К    В) 2 Дж/К    С) 8 Дж/К    Д) 32 Дж/К    Е) 4 Дж/К

337. В калориметр, содержащий  $m_1=2 \text{ кг}$  льда при температуре  $t_1=-5^{\circ}\text{C}$ , добавили  $m_2=200 \text{ г}$  воды при температуре  $t_2=+5^{\circ}\text{C}$ . Сколько воды будет в калориметре после установления равновесия? Удельная теплоемкость льда  $C_1=2,1 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$ , воды  $C_2=4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda=334 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ . Температура плавления льда  $t_0=0^{\circ}\text{C}$ .

- А) 150 г    В) 180 г    С) 120 г    Д) 160 г    Е) 100 г

338. Гелий из состояния с температурой  $T_1=100 \text{ К}$  расширяется в процессе  $P^2V=\text{const}$  ( $P$  – давление,  $V$  – объем газа) с постоянной теплоемкостью  $C$ . К газу подвели количество теплоты 3 000 Дж. Конечное давление газа вдвое меньше начального. Определите теплоемкость  $C$ .

А) 10 Дж/К    В) 20 Дж/К    С) 25 Дж/К    Д) 30 Дж/К    Е) 40 Дж/К

339. Удельная теплоемкость воды  $4,21 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , а удельная теплота плавления  $335 \text{ кДж}/\text{кг}$ . Если в переохлажденную до температуры  $-4 \text{ }^\circ\text{C}$  воду бросить маленький кусочек льда, то, вызвав кристаллизацию, он заморозит часть воды, по массе равную...

А) 6%    В) 5%    С) 4%    Д) 3%    Е) 2%

340. В сосуд с водой, объем которого  $V_1=0,25 \text{ л}$ , а температура  $t_1=20 \text{ }^\circ\text{C}$ , поместили  $m_2=50 \text{ г}$  расплавленного свинца при температуре  $t_2=400 \text{ }^\circ\text{C}$ . Какая температура установится в результате теплообмена? Плотность воды  $\rho_1=10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ , ее удельная теплоемкость равна  $C_1=4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ . Температура плавления свинца  $t_{\text{пл}}=327 \text{ }^\circ\text{C}$ , его удельная теплота плавления  $\lambda=22,6 \text{ кДж}/\text{кг}$ , удельные теплоемкости расплавленного и твердого свинца одинаковы и равны  $C_2=130 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ . Потерями тепла пренебрегайте.

А)  $38,4 \text{ }^\circ\text{C}$     В)  $33,4 \text{ }^\circ\text{C}$     С)  $43,4 \text{ }^\circ\text{C}$     Д)  $23,4 \text{ }^\circ\text{C}$     Е)  $28,4 \text{ }^\circ\text{C}$

341. Сколько времени потребуется для того, чтобы  $1 \text{ л}$  воды с начальной температурой  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  довести до кипения электрическим кипятивником, сопротивление нагревательного элемента которого  $25 \text{ Ом}$  и КПД  $85 \text{ \%}$ ? Подводимое к кипятивнику напряжение  $120 \text{ В}$ . Плотность воды  $1 \text{ г}/\text{см}^3$ . Удельная теплоемкость воды  $4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ .

А)  $529 \text{ с}$     В)  $729 \text{ с}$     С)  $429 \text{ с}$     Д)  $829 \text{ с}$     Е)  $629 \text{ с}$

342. Гелий в количестве  $\nu=4$  моль сжимают в процессе с постоянной теплоемкостью  $C$ . В результате от газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на  $100 \text{ К}$ . Определить теплоемкость  $C$ . Универсальная газовая постоянная  $R=8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ .

А)  $-50 \text{ Дж}/\text{К}$     В)  $-10 \text{ Дж}/\text{К}$     С)  $-75 \text{ Дж}/\text{К}$     Д)  $-25 \text{ Дж}/\text{К}$     Е)  $0$

343. В сосуде, из которого быстро выкачивают воздух, находится небольшое количество воды при  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ . За счет интенсивного испарения происходит постепенное замораживание воды. Какая часть первоначального количества воды может быть обращена таким способом в лед? Удельная теплота плавления льда  $\lambda_1=0,335 \text{ МДж}/\text{кг}$ , удельная теплота парообразования воды  $\lambda_2=2,26 \text{ МДж}/\text{кг}$ .

А)  $0,87$     В)  $0,68$     С)  $0,42$     Д)  $0,17$     Е)  $0,13$

344. Суточное потребление кислорода человеком примерно равно  $1 \text{ кг}$ . В комнате какого объема в воздухе при нормальных условиях содержится такое

количество кислорода? Парциальное давление кислорода 21 кПа. Молярная масса кислорода 32 г/моль. Газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К).

- А) 2,6 м<sup>3</sup>    В) 3,0 м<sup>3</sup>    С) 3,4 м<sup>3</sup>    Д) 3,8 м<sup>3</sup>    Е) 4,2 м<sup>3</sup>

345. Для испарения воды массой 1 кг при постоянной температуре 40 °С необходимо передать ей энергию, равную 2,4 МДж. Чему равна энергия взаимодействия каждой молекулы воды со своими “соседками” в жидкости? Относительная молекулярная масса воды равна 18. Число Авогадро  $6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

- А)  $8 \cdot 10^{-20}$  Дж    В)  $8 \cdot 10^{-19}$  Дж    С)  $7,2 \cdot 10^{-20}$  Дж  
 Д)  $7,2 \cdot 10^{-19}$  Дж    Е)  $1,8 \cdot 10^{-20}$  Дж

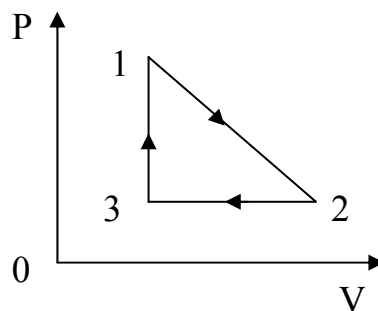
346. Один моль газа, имевший начальную температуру  $T = 300$  К, изобарно расширился, совершив работу  $A = 12,5$  кДж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа? Газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль·К).

- А) 2    В) 3    С) 4    Д) 5    Е) 6

347. При изотермическом сжатии газа его объем уменьшился на 1 л, а давление возросло на 20 %. Чему равен первоначальный объем?

- А) 4 л    В) 12 л    С) 16 л    Д) 10 л    Е) 6 л

348. Идеальный газ расширяется из состояния 1 в состояние 2 (см. рисунок), увеличивая свой объем в 2 раза. При этом давление изменяется по линейному закону, а температура в состоянии 2 оказывается равной температуре в состоянии 1. Затем газ изобарически сжимается до исходного объема, переходя в состояние 3. Из состояния 3 газ изохорически переводится в исходное состояние 1. Какую работу совершает 1 моль газа за рассмотренный цикл, если его температура в состоянии 1 равна  $T$ ? Универсальная газовая постоянная  $R$ .



- А)  $4RT$     В)  $2RT$     С)  $RT$     Д)  $\frac{1}{2}RT$     Е)  $\frac{1}{4}RT$

349. Трубка длиной  $\ell = 1,1$  м, герметично закрытая с одного конца, опускается в воду открытым концом и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Трубку притопили, опустив ее закрытый конец до поверхности воды снаружи, и удерживают в новом вертикальном положении. Найдите высоту слоя воды, находящейся в трубке. Атмосферное давление примите равным давлению, создаваемому слоем

воды высотой  $h_0=10$  м. Давлением насыщенного пара воды при температуре опыта пренебрегайте.

- А) 0,05 м    В) 0,15 м    С) 0,1 м    Д) 0,25 м    Е) 0,2 м

350. При некотором процессе, проведенном с идеальным газом, соотношение между давлением и объемом газа  $PV^2=\text{const}$ . Как изменится температура  $T$  газа, если увеличить его объем в 2 раза?

- А) не изменится    В) увеличится в 4 раза    С) уменьшится в 4 раза  
Д) увеличится в 2 раза    Е) уменьшится в 2 раза

351. Идеальный газ находится под давлением 0,7 МПа при температуре  $35^\circ\text{C}$ . Определите молярную массу газа, если его плотность  $12,2 \text{ кг/м}^3$ . Газовая постоянная  $R=8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

- А) 28,2 г/моль    В) 32,1 г/моль  
С) 38,2 г/моль    Д) 44,6 г/моль    Е) 56,8 г/моль

352. Электрический чайник вместимостью 1,5 л имеет сопротивление нагревательного элемента 80 Ом, КПД 80 % и работает при напряжении 220 В. Начальная температура воды  $20^\circ\text{C}$ . Определите время, в течение которого вода в чайнике закипит. Температура кипения воды  $100^\circ\text{C}$ , ее удельная теплоемкость  $4190 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$  и удельная плотность  $1 \text{ г/см}^3$ .

- А) 17,3 мин    В) 18,3 мин    С) 19,3 мин    Д) 20,3 мин    Е) 21,3 мин

353. Некоторую массу  $m$  идеального газа с молярной массой  $\mu$  нагревают под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления от первоначального значения  $T_1$  до  $T_2$ . Определите работу, совершенную газом. Газовая постоянная  $R$ .

- А)  $2 \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$     В)  $\frac{1}{2} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$   
С)  $4 \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$     Д)  $\frac{1}{4} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$     Е)  $\frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$

354. Моль идеального газа, первоначально находившийся при нормальных условиях, переводят в состояние с вдвое большими объемом и давлением. Процесс перевода складывается из двух участков – изобары и изохоры. Какое количество теплоты подведено к газу? Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_v=21 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ . Газовая постоянная  $R=8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ .

- А) 18,5 кДж    В) 19,5 кДж    С) 20,5 кДж    Д) 21,5 кДж    Е) 22,5 кДж

355. Представьте себе, что с идеальной тепловой машиной проделали два опыта. В первом опыте понижена температура нагревателя на  $10^{\circ}\text{C}$ , во втором была повышена температура холодильника на  $10^{\circ}\text{C}$ . Как изменился КПД машины в этих опытах?

- А) в первом и втором опыте понизился одинаково
- В) понизился в первом и втором опытах, но в первом больше, чем во втором
- С) понизился в первом и втором опытах, но в первом меньше, чем во втором
- Д) повысился в первом и втором опытах, но в первом больше, чем во втором
- Е) повысился в первом и втором опытах, но в первом меньше, чем во втором

356. В облаке водяной пар превращается в кристаллы-снежинки. Нагревается или охлаждается в результате этого процесса окружающий воздух?

- А) Нагревается
- В) Охлаждается
- С) Не нагревается и не охлаждается
- Д) При подъеме вверх нагревается, при опускании охлаждается
- Е) При подъеме вверх охлаждается, при опускании нагревается

357. Изменяется ли скорость беспорядочного движения молекул при повышении температуры вещества?

- А) Изменяется только у газов
- В) Изменяется только у газов и жидкостей
- С) Не изменяется
- Д) Уменьшается с повышением температуры вещества в любом состоянии
- Е) Увеличивается с повышением температуры вещества в любом состоянии.

358. Какие силы действуют между нейтральными атомами?

- А) Притяжения и отталкивания, силы отталкивания больше на малых расстояниях, чем силы притяжения.
- В) Притяжения и отталкивания, силы отталкивания меньше на малых расстояниях, чем силы притяжения.
- С) Между нейтральными атомами силы взаимодействия равны нулю.
- Д) Только силы притяжения
- Е) Только силы отталкивания.

359. При изобарном расширении 80 г кислорода с температурой 300 К его объем увеличился в 1,5 раза. Определите работу, совершенную для расширения кислорода. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ ; молярная масса кислорода  $\mu = 32 \text{ г/моль}$ .

- А) 2,28 кДж
- В) 2,56 кДж
- С) 2,81 кДж
- Д) 3,12 кДж
- Е) 3,48 кДж

360. Из сосуда объемом  $1 \text{ дм}^3$  выкачивается воздух. Рабочий объем цилиндра насоса 0,1 л. Через сколько циклов работы насоса давление в сосуде уменьшится в 2 раза?

- A) 10                      B) 7                      C) 5                      D) 4                      E) 3

361. Процесс в идеальном газе сначала идет так, что давление и объем связаны равенством  $P\sqrt{V}=B$ . Когда температура газа достигает значения  $T$ , процесс продолжается при другом характере зависимости давления от объема:  $P=DV^{-2}$ . Найдите температуру  $T$ , считая константы  $B$  и  $D$ , газовую постоянную  $R$ , а так же количество молей газа  $\nu$  известными.

- A)  $\frac{D^2 B^3}{\nu R}$                       B)  $\frac{D^3 B^3}{\nu R}$                       C)  $\frac{D^3 B^2}{\nu R}$                       D)  $\frac{D^3 B^2}{\nu R}$                       E)  $\frac{D^2 B^2}{\nu R}$

362. 1 моль газа, имевший начальную температуру  $T_1=300$  К, изобарно расширился, совершив работу  $A=12,5$  кДж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа? Газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- A) 7                      B) 5                      C) 8                      D) 4                      E) 6

363. Трубку длиной  $\ell$  опускают вертикально в воду на глубину  $H$  ( $H < \ell$ ), затем, закрыв верхний конец трубки, вынимают ее из воды. При этом в трубке остается столб воды высотой  $h$ . Считая температуру постоянной, найдите атмосферное давление  $P_0$ . Плотность воды равна  $\rho$ , ускорение силы тяжести равно  $g$ .

- A)  $\rho gh \frac{\ell - h}{\ell - H}$                       B)  $\rho gH \frac{\ell - H}{H - h}$                       C)  $\rho gh \frac{\ell - H}{H - h}$                       D)  $\rho gH \frac{\ell - h}{H - h}$                       E)  $\rho gh \frac{\ell - h}{H - h}$

364. Определите температуру газа, находящегося в закрытом сосуде, если давление газа увеличивается на 0,4% первоначального давления при нагреве на 1 °С.

- A) 225 К                      B) 250 К                      C) 275 К                      D) 300 К                      E) 325 К

365. Найдите объем  $V_0$  засасывающей камеры поршневого насоса, если при откачивании этим насосом воздуха из баллона объема  $V=4$  л давление уменьшается при каждом цикле в  $n=1,2$  раза.

- A) 1,25 л                      B) 0,6 л                      C) 1,2 л                      D) 1 л                      E) 0,8 л

366. Двухатомный идеальный газ в количестве  $\nu=2$  моль нагревают при постоянном объеме. Определите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в  $n=3$  раза. Начальная температура  $T_1=289$  К. Газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- A) 16 кДж                      B) 20 кДж                      C) 24 кДж                      D) 28 кДж                      E) 32 кДж



367. Найдите формулу некоторого соединения углерода с водородом, если известно, что это вещество массой  $m=0,64$  г в газообразном состоянии создает в объеме  $V=1$  дм<sup>3</sup> при температуре  $t=27$  °С давление  $P=1 \cdot 10^5$  Па. Газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- А)  $C_2H_2$       В)  $C_2H_3$       С)  $CH_2$       Д)  $CH_3$       Е)  $CH_4$

368. При изобарном расширении азота газ совершил работу, равную 157,1 Дж. Какое количество теплоты было сообщено азоту? Молярная масса азота равна 28 г/моль, его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна 745 Дж/(кг·К).

- А) 1 400 Дж      В) 740 Дж      С) 680 Дж      Д) 550 Дж      Е) 325 Дж

369. Масса  $m$  идеального газа, находящегося при температуре  $T$ , охлаждается изохорно так, что давление падает в  $n$  раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определите совершенную газом работу. Молярная масса газа  $\mu$ . Универсальная газовая постоянная  $R$ .

- А)  $\frac{n+1}{n} \frac{m}{\mu} RT$       В)  $\frac{n-1}{n} \frac{m}{\mu} RT$       С)  $n \frac{m}{\mu} RT$       Д)  $\frac{1}{n} \frac{m}{\mu} RT$       Е)  $\frac{n}{n+1} \frac{m}{\mu} RT$

370. В теплоизолированном герметичном сосуде находится  $\nu=2$  моль одноатомного идеального газа при температуре  $T=300$  К и нормальном атмосферном давлении  $P_0$ . Найдите давление газа после включения на время  $t=3$  мин небольшого электронагревателя мощностью  $N=16,6$  Вт, помещенного в сосуд. Универсальная газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- А)  $1,5 P_0$       В)  $1,4 P_0$       С)  $1,3 P_0$       Д)  $1,2 P_0$       Е)  $1,1 P_0$

371. Какое количество теплоты нужно подвести к идеальному одноатомному газу, количество вещества которого равно 1 моль, чтобы изобарно увеличить его объем в 3 раза? Начальная температура газа равна  $T_0$ . Газовая постоянная  $R$ .

- А)  $3RT_0$       В)  $5RT_0$       С)  $\frac{5}{2} RT_0$       Д)  $\frac{7}{2} RT_0$       Е)  $\frac{15}{2} RT_0$

372. Гелий в количестве  $\nu=4$  моль сжимают в процессе с постоянной теплоемкостью  $C$ . В результате, от газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на 100 К. Чему равна работа, совершаемая газом? Газовая постоянная  $R=8,31$  Дж/(моль·К).

- А)  $-2 \cdot 10^4$  Дж      В)  $-2 \cdot 10^5$  Дж      С) 0      Д)  $-1 \cdot 10^5$  Дж      Е)  $-1 \cdot 10^4$  Дж

373. Газ объемом 2 л при температуре  $27^{\circ}\text{C}$  под давлением 1 атм сжат до объема 1 л и подогрет до  $127^{\circ}\text{C}$ . Каково конечное давление этого газа?

- А)  $\frac{254}{27}$  атм      В)  $\frac{8}{3}$  атм      С)  $\frac{3}{2}$  атм      Д)  $\frac{5}{3}$  атм      Е)  $\frac{127}{54}$  атм

374. Какими выражениями определяется внутренняя энергия идеального двухатомного газа и средняя квадратичная скорость при температуре  $T$ ? Масса газа  $m$ , молярная масса  $\mu$ , газовая постоянная  $R$ .

- А)  $\frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT; \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$       В)  $\frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT; \sqrt{\frac{5RT}{\mu}}$       С)  $\frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT; \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$   
Д)  $\frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT; \sqrt{\frac{5RT}{\mu}}$       Е) Среди приведенных ответов нет правильного

375. Теплоизолированный сосуд объемом  $V = 2 \text{ м}^3$  разделен теплоизолирующей перегородкой на две равные части. В одной части сосуда находится 2 моль He, а в другой – такое же количество моль Ar. Температура гелия  $T_1 = 300 \text{ К}$ , а температура аргона  $T_2 = 600 \text{ К}$ . Определите парциальное давление аргона в сосуде после удаления перегородки. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ .

- А) 2 490 Па      В) 4 830 Па      С) 5 610 Па      Д) 3 220 Па      Е) 3 740 Па

376. Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно, а затем – изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 4,5 кДж. Чему равна работа газа за весь процесс?

- А) 7,0 кДж      В) 9,0 кДж      С) 8,5 кДж      Д) 8,0 кДж      Е) 7,5 кДж

377. Идеальный одноатомный газ находится в сосуде с жесткими стенками объемом  $0,6 \text{ м}^3$ . При нагревании его давление возросло на 3 кПа. Насколько увеличилась внутренняя энергия газа?

- А) 2,7 кДж      В) 3,6 кДж      С) 1,8 кДж      Д) 2,4 кДж      Е) 4,5 кДж

378. Кислород массой 32 г находится в закрытом сосуде под давлением  $P_1=0,1 \text{ МПа}$  при температуре  $T_1=290 \text{ К}$ . После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определите количество теплоты, сообщенное газу. Газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ . Молярная масса кислорода  $\mu=32 \text{ г}/\text{моль}$ .

- А) 18,1 кДж      В) 16,6 кДж      С) 10,8 кДж      Д) 8,3 кДж      Е) 3,6 кДж

379. При сообщении одноатомному газу, находящемуся в баллоне постоянного объема  $V_0$  при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ , количество теплоты  $Q$  температура газа установится равной:

А)  $T_0 \frac{Q}{P_0 V_0}$       В)  $T_0(1 + \frac{2}{3} \frac{Q}{P_0 V_0})$       С)  $T_0(1 + \frac{Q}{P_0 V_0})$   
 Д)  $T_0 \frac{P_0 V_0}{2Q}$       Е)  $T_0(2 + \frac{P_0 V_0}{3Q})$

380. В теплоизолированном цилиндре под теплонепроницаемым поршнем находится идеальный газ с начальными давлением  $P=10^5$  Па, объемом  $V=3$  л, температурой  $T=300$  К. При сжатии газа над ним совершили работу  $A=90$  Дж. Найдите температуру газа после сжатия.

А) 300 К      В) 360 К      С) 390 К      Д) 320 К      Е) 350 К

381. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса водорода при температуре 300 К, занимающая при давлении 0,1 МПа объем 6 л. На сколько градусов изменится температура водорода, если при неизменном давлении совершена работа по его сжатию, равная 50 Дж?

А) 25 К      В) 20 К      С) 15 К      Д) 10 К      Е) 5 К

382. В сосуде вместимостью  $V = 1$  л находится кислород массой  $m = 1$  г. Определите концентрацию молекул кислорода в сосуде. Молярная масса кислорода  $\mu = 32$  г/моль. Число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

А)  $1,58 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>      В)  $1,68 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>      С)  $1,78 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>  
 Д)  $1,88 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>      Е)  $1,98 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>

383. Каково изменение  $\Delta U$  внутренней энергии идеального газа: 1) изотермического расширения 2) адиабатического расширения идеального газа?

А) в 1  $\Delta U > 0$ , во 2  $\Delta U = 0$       В) в 1  $\Delta U < 0$ , во 2  $\Delta U = 0$       С) в 1  $\Delta U > 0$ , во 2  $\Delta U < 0$   
 Д) в 1  $\Delta U = 0$ , во 2  $\Delta U < 0$       Е) в 1  $\Delta U = 0$ , во 2  $\Delta U > 0$

384. Каково давление азота, если средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с, а его плотность  $1,35$  кг/м<sup>3</sup>? Молярная масса азота 28 г/моль.

А) 107,3 кПа      В) 112,5 кПа      С) 120,1 кПа      Д) 125,7 кПа      Е) 130,8 кПа

385. Для измерения влажности атмосферы в сосуд, содержащий воздух, капнули несколько капель воды, закрыли его пробкой и соединили с водяным

манометром. Через несколько минут манометр показал повышение давления в сосуде на 10 см водного столба. Какова относительная влажность атмосферного воздуха? Температура воздуха  $20^{\circ}\text{C}$ ; давление насыщенных водяных паров при  $20^{\circ}\text{C}$  равно 2,33 кПа.

- А) 57 %    В) 36 %    С) 63 %    Д) 42 %    Е) 76 %

386. Идеальный газ в тепловой машине за один цикл работы получил от нагревателя количество теплоты  $Q_1$ , отдал холодильнику количество теплоты  $Q_2$  и совершил работу  $A$ . Как изменилась при этом внутренняя энергия газа?

- А)  $\Delta U = Q_1 - Q_2$     В)  $\Delta U = Q_1 - Q_2 + A$     С)  $\Delta U = Q_1 + Q_2 - A$   
Д)  $\Delta U = 0$     Е)  $\Delta U = Q_1$

387. Тепловая машина периодического действия имеет коэффициент полезного действия 40 %. В результате ее усовершенствования количество теплоты, получаемое от нагревателя за один цикл, увеличилось на 20 %, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшилось на 20 %. Каким стал КПД этой тепловой машины?

- А) 30 %    В) 33 %    С) 40 %    Д) 60 %    Е) 66 %

388. Если в идеальной тепловой машине, абсолютная температура нагревателя которой вдвое больше температуры холодильника, не изменяя температуру нагревателя температуру холодильника уменьшить вдвое, то КПД этой машины:

- А) возрастет на 20 %    В) возрастет на 25 %    С) возрастет на 50 %  
Д) возрастет вдвое    Е) возрастет на 40 %

389. В идеальном тепловом двигателе абсолютная температура нагревателя втрое больше абсолютной температуры холодильника. Если, не меняя температуры холодильника, повысить температуру нагревателя на 25%, то КПД этого двигателя станет равным:

- А) 0,7    В) 0,6    С) 0,5    Д) 0,4    Е) 0,3

390. Температура плавления железа 1 800 К, его удельная теплоемкость 460 Дж/(кг·К), а удельная теплота плавления  $3 \cdot 10^5$  Дж/кг. Железный метеорит влетает в атмосферу Земли со скоростью 1,5 км/с, имея температуру 300 К. Если 80 % кинетической энергии метеорита при движении в атмосфере переходит в его внутреннюю энергию, то какая доля массы метеорита расплавится?

- А) 30 %    В) 100 %    С) 70 %    Д) 10 %    Е) 50 %

391. Латунный сосуд при нагревании увеличился в объеме на 0,6 %. Найдите увеличение температуры  $\Delta t$  сосуда, если коэффициент линейного расширения латуни  $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

- А)  $50 \text{ }^\circ\text{C}$     В)  $100 \text{ }^\circ\text{C}$     С)  $150 \text{ }^\circ\text{C}$     Д)  $200 \text{ }^\circ\text{C}$     Е)  $300 \text{ }^\circ\text{C}$

392. На нагревание стального бруска израсходовано 1,68 МДж теплоты. Насколько изменился объем бруска? Коэффициент линейного расширения стали  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Удельная теплоемкость стали  $460 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ . Плотность стали  $7,8 \text{ г}/\text{см}^3$ .

- А)  $16,5 \text{ см}^3$     В)  $16,9 \text{ см}^3$     С)  $17,3 \text{ см}^3$     Д)  $17,6 \text{ см}^3$     Е)  $17,9 \text{ см}^3$

393. Два свинцовых шара одинаковой массы движутся навстречу друг другу со скоростями  $v$  и  $2v$ . На сколько ( $\Delta t$ ) увеличится температура шаров в результате неупругого удара? Удельная теплоемкость свинца равна  $C$ .

- А)  $\frac{3 v^2}{5 C}$     В)  $\frac{4 v^2}{5 C}$     С)  $\frac{7 v^2}{8 C}$     Д)  $\frac{9 v^2}{8 C}$     Е)  $\frac{3 v^2}{4 C}$

394. При температуре  $t_0=0 \text{ }^\circ\text{C}$  длины алюминиевого и железного стержней  $l_{0A}=50 \text{ см}$  и  $l_{0Ж}=50,05 \text{ см}$ , соответственно. При какой температуре  $t$  длины стержней будут одинаковы? Коэффициенты расширения алюминия и железа  $\beta_A=2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  и  $\beta_Ж=1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .

- А)  $83,4 \text{ }^\circ\text{C}$     В)  $85,4 \text{ }^\circ\text{C}$     С)  $87,4 \text{ }^\circ\text{C}$     Д)  $89,4 \text{ }^\circ\text{C}$     Е)  $91,4 \text{ }^\circ\text{C}$

395. На весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, другой – влажным (насыщенный водяными парами) при одинаковых давлениях и температурах. Какой из сосудов тяжелее?

- А) с влажным    В) с сухим    С) одинаковы  
Д) ответ зависит от внешних условий    Е) нет правильного ответа

396. В сосуде находится ненасыщенный пар. В процессе его изотермического сжатия объем, занимаемый паром, уменьшается в 4 раза, а давление возрастает в 3 раза. Найдите долю пара, которая сконденсировалась в этом процессе.

- А) 0,75    В) 0,25    С) 0,5    Д) 0,4    Е) 0,2

397. стакан с водой при температуре  $24 \text{ }^\circ\text{C}$  поставили в морозильную камеру. За 5 мин температура воды снизилась до  $16 \text{ }^\circ\text{C}$ . Сколько еще минут пройдет до полного замерзания всей воды, если скорость теплоподдачи будет такой

же? Удельная теплоемкость воды 4,18 кДж/(кг·К), удельная теплота кристаллизации равна 332,4 кДж/кг.

- А) 29 мин    В) 58 мин    С) 60 мин    Д) 63 мин    Е) 125 мин

398. Воздушный пузырек диаметром  $d=0,02$  мм находится на глубине  $h=25$  см под поверхностью воды. Определите давление  $P$  воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принимайте нормальным. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma=73$  мН/м, а ее плотность  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>. Ускорение силы тяжести  $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>.

- А) 14,6 кПа    В) 125 кПа    С) 116 кПа    Д) 104 кПа    Е) 118 кПа

399. Колба объемом 100 см<sup>3</sup> заполнена воздухом с относительной влажностью 40 % при температуре 100 °С. На сколько надо увеличить объем колбы, чтобы при понижении температуры до 20 °С пар не конденсировался? Плотность насыщенных паров при 100 °С – 598 г/м<sup>3</sup>, при 20 °С – 17 г/м<sup>3</sup>.

- А) 1 107 см<sup>3</sup>    В) 1 157 см<sup>3</sup>    С) 1 207 см<sup>3</sup>    Д) 1 257 см<sup>3</sup>    Е) 1 307 см<sup>3</sup>

400. В сосуде находятся жидкость и ее насыщенный пар. В процессе изотермического расширения объем, занимаемый паром, увеличивается в  $\beta=3$  раза, а давление пара уменьшается в  $\alpha=2$  раза. Найдите отношение массы  $m_2$  жидкости к массе  $m_1$  пара, которые первоначально содержались в сосуде.

- А) 6                    В) 3                    С) 1,5                    Д) 0,5                    Е) 2

## Глава 10 Примеры решения задач

1. В стакан налито  $V=200$  мл воды. Найдите число молей воды, количество и концентрацию молекул, массу молекулы. Молярная масса воды  $\mu = 18$  г/моль, ее плотность  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Число Авогадро  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.

Дано:  $V=200 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>;  $\mu=18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль;  $\rho=10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $N_A=6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>.  
 $v$  –?             $N$  –?             $n$  –?             $m_1$  –?

**Решение.** Число молей  $v$  (количество вещества) равно отношению массы воды  $m$  к ее молярной массе  $\mu$ . Учитывая, что масса равна  $m = \rho V$ , имеем:

$$v = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-3}} = 11,1 \text{ моль.}$$

Число молекул воды  $N$  найдем, исходя из того, что в одном моле содержится число молекул, равное числу Авогадро  $N_A$ , согласно выражению:

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{\rho V}{\mu} N_A = \frac{10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 6,7 \cdot 10^{24}.$$

Концентрация молекул  $n$  равна числу молекул, содержащихся в единице объема:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{m N_A}{\mu V} = \frac{\rho N_A}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Массу молекулы воды  $m_1$  можно определить, разделив массу воды на число содержащихся в ней молекул, используя одно из приведенных ниже соотношений:

$$m_1 = \frac{m}{N} = \frac{\rho}{n} = \frac{\mu}{N_A}. \quad m_1 = \frac{\mu}{N_A} = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3,0 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

**Ответ:**  $\nu = 11,1$  моль;  $N = 6,7 \cdot 10^{24}$ ;  $n = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ ;  $m_1 = 3,0 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ .

2. Со дна водоема поднимается пузырек воздуха. У поверхности его диаметр оказывается в 1,3 раза большим, чем у дна. Найдите глубину водоема, если атмосферное давление равно 750 мм рт. ст., а температура воды на поверхности водоема на 5 градусов выше температуры на дне, равной  $t_1 = 4^\circ \text{C}$ . Плотности воды  $\rho_v = 1 \text{ г/см}^3$ , ртути  $\rho_p = 13,6 \text{ г/см}^3$ . Ускорение силы тяжести  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

Дано:  $d_2 = 1,3 d_1$ ;  $\rho_v = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_p = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $T_1 = 277 \text{ К}$ ;  $T_2 = 282 \text{ К}$ ;  
 $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ;  $P_0 = 0,75 \text{ м рт. ст.}$   
 $H = ?$

**Решение.** Давление  $P$  воздуха в пузырьке на дне водоема равно давлению, оказываемому на пузырек со стороны окружающей среды и определяемому как сумма атмосферного  $P_0$  и гидростатического  $P_r$  давлений:

$$P = P_0 + P_r.$$

Гидростатическое давление (давление столба жидкости) зависит от глубины погружения  $H$  и рассчитывается по формуле  $P_r = \rho_v g H$ . Следовательно, давление воздуха в пузырьке на дне водоема

$$P_1 = P_0 + \rho_v g H,$$

где  $H$  – глубина водоема.

А давление воздуха в пузырьке на поверхности равно  $P_2 = P_0$ , так как на поверхности водоема  $H = 0$ . Атмосферное давление равно

$$P_0 = \rho_p g h,$$



где  $h$  – высота столбика ртути.

При подъеме пузырька со дна водоема термодинамические параметры воздуха в нем удовлетворяют объединенному газовому закону:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}.$$

Учитывая, что

$$V_1 = \frac{1}{6} \pi d_1^3 \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{1}{6} \pi d_2^3,$$

где  $d_1$  и  $d_2$  – диаметры пузырька воздуха на дне и у поверхности, получаем:

$$\frac{(P_0 + \rho_{\text{в}} g H) \pi d_1^3}{6 T_1} = \frac{P_0 \pi (1,3 d_1)^3}{6 T_2}.$$

Решая это уравнение относительно  $H$ , находим:

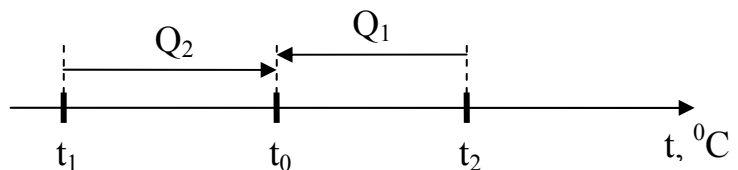
$$\begin{aligned} H &= \left( (1,3)^3 \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \frac{P_0}{\rho_{\text{в}} g} = \left( (1,3)^3 \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \frac{\rho_{\text{п}} g h}{\rho_{\text{в}} g} = \left( (1,3)^3 \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \frac{\rho_{\text{п}} h}{\rho_{\text{в}}} = \\ &= \left( (1,3)^3 \frac{277}{282} - 1 \right) \frac{13,6 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{10^3} = 11,8 \text{ м.} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $H = 11,8 \text{ м.}$

3. Для измерения температуры воды, имеющей массу  $m_{\text{в}} = 7,3 \text{ г}$  в нее погрузили термометр, который показал  $t_0 = 32,4 \text{ }^\circ\text{C}$ . Какова действительная температура  $t_2$  воды, если теплоемкость термометра  $C = 1,9 \text{ Дж/К}$  и перед погружением в воду он показывал  $t_1 = 17,8 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Удельная теплоемкость воды  $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Потерями тепла во время измерения пренебрегайте.

Дано:  $m_{\text{в}} = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ ;  $t_0 = 32,4 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $t_1 = 17,8 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $C = 1,9 \text{ Дж/К}$ ;  $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ .  
 $t_2$  –?

**Решение.** При составлении уравнения теплового баланса часто бывает полезным рисунок, на котором изображена



температурная ось  $t$  с обозначениями точек (температур) согласно условию задачи. Для данной задачи на температурной оси всего три точки  $t_1$ ,  $t_0$ ,  $t_2$ . Согласно уравнению теплового баланса (закону сохранению энергии при тепловых

процессах) количество теплоты  $Q_1$ , теряемое водой при остывании от  $t_2$  до  $t_0$  равно количеству теплоты, необходимому для нагрева термометра от  $t_1$  до  $t_0$ :

$$Q_1 = Q_2, \quad \text{т.е.} \quad C(t_0 - t_1) = c_B m_B (t_2 - t_0).$$

Из этого уравнения находим искомую исходную температуру воды до погружения в нее термометра:

$$t_2 = t_0 + \frac{C(t_0 - t_1)}{c_B m_B} = 32,4 + \frac{1,9(32,4 - 17,8)}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 7,3 \cdot 10^{-3}} = 33,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Примечание. Если в процессе теплообмена участвуют более двух тел и процесс идет с фазовыми превращениями – плавлением или парообразованием, то число точек на температурной оси будет более трех, а число слагаемых в уравнении теплового баланса будет более двух.

**Ответ:**  $t_2 = 33,3 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

4. Какое количество бензина потребуется автомобилю, чтобы проехать со скоростью  $v = 72 \text{ км/ч}$  в течение  $t = 2$  часов, если масса машины  $m_a = 10 \text{ т}$ , КПД двигателя  $\eta = 28 \%$ , а сопротивление движению составляет  $\mu = 0,04$  силы тяжести автомобиля? Найдите силу тяги, мощность двигателя и расход горючего на  $1 \text{ кВт}\cdot\text{ч}$  работы. Ускорение силы тяжести  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Удельная теплота сгорания бензина  $q = 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$ , а его плотность  $\rho = 0,7 \text{ г/см}^3$ .

Дано:  $v=20 \text{ м/с}; t=7\ 200 \text{ с}; m_a=10^4 \text{ кг}; \eta=0,28; \mu=0,04;$   
 $q=4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}; \rho=0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; 1 \text{ кВт}\cdot\text{ч}=3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$   
 $m_B - ? \quad V_B - ? \quad F_T - ? \quad P_{\text{пол}} - ? \quad \alpha - ?$

**Решение.** При равномерном движении ( $v = \text{const}$ , ускорение  $a = 0$ ) по горизонтальной дороге сила тяги  $F_T$ , развиваемая двигателем, равна силе сопротивления движению  $F_c$ , равной согласно условию задачи  $\mu = 0,04$  от силы тяжести  $m_a g$  автомобиля:

$$F_T = F_c = \mu m_a g = 0,04 \cdot 10^4 \cdot 9,8 = 3,92 \cdot 10^3 \text{ Н} = 3,92 \text{ кН}.$$

Работа силы тяги двигателя  $A_{\text{пол}}$  (полезная работа), выполняемая при движении автомобиля, равна произведению силы тяги  $F_T$  на путь  $S = vt$ , проходимый автомобилем:

$$A_{\text{пол}} = F_T \cdot S = F_c \cdot vt = \mu m_a g \cdot vt = 0,04 \cdot 10^4 \cdot 9,8 \cdot 20 \cdot 7\ 200 =$$

$$= 5,64 \cdot 10^8 \text{ Дж} = \frac{5,64 \cdot 10^8}{3,6 \cdot 10^6} \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 157 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Мощность  $P_{\text{пол}}$ , развиваемая двигателем, рассчитывается как отношение выполненной работы  $A_{\text{пол}}$  ко времени  $t$ , в течение которого она выполнялась:

$$P_{\text{пол}} = \frac{A_{\text{пол}}}{t} = \frac{F_T \cdot S}{t} = F_T \cdot v = 3,92 \cdot 10^3 \cdot 20 = 7,84 \cdot 10^4 \text{ Вт} = \frac{7,84 \cdot 10^4}{735} \text{ л.с.} = 106,7 \text{ л.с.}$$

(здесь учтено, что 1 л.с. = 1 лошадиная сила = 735 Вт).

Коэффициент полезного действия равен отношению полезной работы  $A_{\text{пол}}$ , выполненной для перемещения автомобиля, к количеству теплоты  $Q_{\text{зат}}$ , выделенной при сгорании бензина в двигателе автомобиля:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{Q_{\text{зат}}} = \frac{A_{\text{пол}}}{m_{\text{б}} \cdot q},$$

где  $m_{\text{б}}$  – масса бензина.

Из последнего уравнения находим:

$$m_{\text{б}} = \frac{A_{\text{пол}}}{\eta \cdot q} = \frac{5,64 \cdot 10^8}{0,28 \cdot 4,6 \cdot 10^7} = 43,8 \text{ кг}.$$

Объем израсходованного бензина  $V_{\text{б}}$  найдем как отношение массы  $m_{\text{б}}$  к плотности  $\rho$  бензина:

$$V_{\text{б}} = \frac{m_{\text{б}}}{\rho} = \frac{43,8}{0,7 \cdot 10^3} = 62,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 62,6 \text{ л}.$$

Расход горючего (бензина) на 1 кВт·ч работы равен отношению массы  $m_{\text{б}}$  израсходованного бензина к совершенной полезной работе  $A_{\text{пол}}$ , выраженной в киловатт-часах:

$$\alpha = \frac{m_{\text{б}}}{A_{\text{пол}}} = \frac{43,8}{157} = 0,28 \frac{\text{кг}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}} = 280 \frac{\text{г}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}}.$$

**Ответ:**  $F_T=3,92 \text{ кН}$ ;  $P_{\text{пол}}=106,7 \text{ л.с.}$ ;  $m_{\text{б}}=43,8 \text{ кг}$ ;  $V_{\text{б}}=62,6 \text{ л}$ ;  $\alpha=280 \frac{\text{г}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}}$ .

5. В сосуд с ртутью опустили стеклянную капиллярную трубку. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре равна  $h=7,5 \text{ мм}$ . Считая несмачивание полным (краевой угол  $\varphi = 180^\circ$ ), определите радиус  $R$  кривизны ртутного мениска

в капилляре. Плотность ртути  $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$ , ее коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 0,5 \text{ Н/м}$ . Ускорение силы тяжести  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

$$\text{Дано: } \underline{h = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м; } \rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \sigma = 0,5 \text{ Н/м; } g = 9,8 \text{ м/с}^2.}$$
$$R - ?$$

**Решение.** Давление Лапласа, вызванное кривизной мениска ртути, равно:

$$P = \frac{2\sigma}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны мениска в капилляре.

Так как ртуть не смачивает стекло, то она в трубке опускается на такую высоту  $h$ , когда гидростатическое давление, равное  $\rho gh$ , будет уравновешено давлением Лапласа:

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh,$$

откуда находим

$$R = \frac{2\sigma}{\rho gh} = \frac{2 \cdot 0,5}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = 10^{-3} \text{ м} = 1 \text{ мм}.$$

При полном несмачивании радиус  $R$  кривизны мениска совпадает с радиусом капиллярной трубки. Значит, радиус капилляра 1 мм.

Примечание. Используя прием решения этой задачи, можно выяснить условия, при которых можно носить воду в решете. Допустим, решето имеет систему отверстий диаметром (размером)  $d = 1 \text{ мм}$ . Если вода ( $\sigma = 0,07 \text{ Н/м}$ ) не смачивает материал решета, то вода в решете будет удерживаться на уровне  $h$ , определяемом условием:

$$\frac{2\sigma}{R} = \frac{4\sigma}{d} = \rho gh,$$

откуда

$$h = \frac{4\sigma}{\rho gd} = \frac{4 \cdot 0,07}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 10^{-3}} = 0,03 \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

Таким образом, если в такое решето налить воду, то вода может удерживаться на максимальном уровне  $h = 3 \text{ см}$  от дна. Причем эту воду из решета не удастся вылить через край решета, так как при наклоне решета уровень превысит  $h = 3 \text{ см}$ , и вода будет выливаться сквозь отверстия.

**Ответ:**  $R = 1 \text{ мм}$ .

6. Тонкостенный стакан плавает в воде, погрузившись наполовину. На сколько изменится глубина погружения, если стакан поставить в воду вверх дном. Температура воздуха в стакане постоянна. Высота стакана  $H$ . Атмосферное давление  $P_0$ . Плотность воды  $\rho$ . Ускорение силы тяжести  $g$ .

Дано:  $H; P_0; \rho; g$ .  
 $\Delta h - ?$

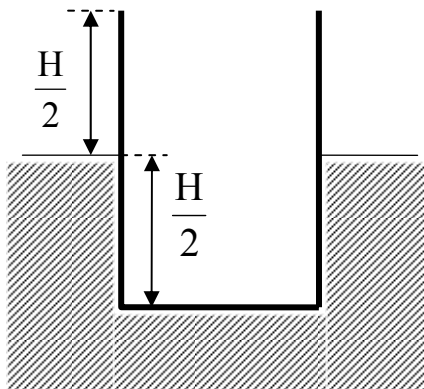
**Решение.** Сделаем рисунок, на котором изобразим положение стакана в обоих случаях. В позиции (а) стакан плавает, погрузившись на  $\frac{H}{2}$ , и на  $\frac{H}{2}$  край стакана выступает над уровнем воды. В позиции (в) для перевернутого стакана: на  $h_1$  дно стакана выступает над уровнем воды,  $h_2$  – разница уровней воды в стакане и вне стакана.

1) Для изотермического процесса для воздуха в стакане применяем закон Бойля – Мариотта:

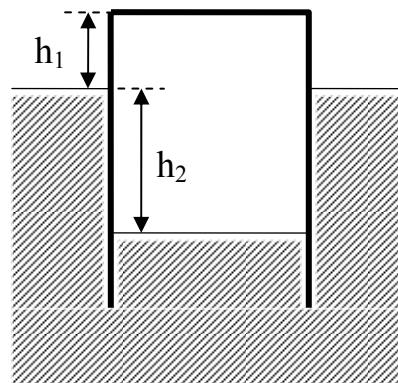
$$P_1 V_1 = P_2 V_2, \quad \text{или} \quad P_0 H S = (P_0 + \rho g h_2)(h_1 + h_2) S,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения стакана.

2) Если записывать условия плавания стакана, то в обоих случаях сила тяжести стакана  $mg$  ( $m$  – масса стакана) уравновешивается выталкивающими силами (Архимеда). Поэтому в качестве второго уравнения записываем:



(а)



(в)

$$mg = F_{\text{Арх1}} = F_{\text{Арх2}}, \quad \text{т.е.}$$

$$F_{\text{Арх1}} = F_{\text{Арх2}},$$

или

$$\rho g \frac{H}{2} S = \rho g h_2 S,$$

откуда находим

$$h_2 = \frac{H}{2}.$$

Подставляем это значение  $h_2 = \frac{H}{2}$  в первое уравнение

$$P_0HS = (P_0 + \rho g \frac{H}{2}) \cdot (h_1 + \frac{H}{2})S,$$

откуда находим

$$h_1 = \frac{H}{2} \cdot \frac{2P_0 - \rho gH}{2P_0 + \rho gH}.$$

А приращение глубины погружения стакана равно (см. рисунок):

$$\Delta h = \frac{H}{2} - h_1 = \frac{H}{2} - \frac{H}{2} \cdot \frac{2P_0 - \rho gH}{2P_0 + \rho gH} = H \left( 1 + \frac{2P_0}{\rho gH} \right)^{-1}.$$

**Ответ:**  $\Delta h = H \left( 1 + \frac{2P_0}{\rho gH} \right)^{-1}.$

7. Найдите значение избыточного давления внутри мыльного пузыря радиусом  $R = 0,5$  см. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора  $\sigma = 0,04$  Н/м.

Дано:  $R = 0,5 \cdot 10^{-2}$  м;  $\sigma = 0,04$  Н/м.  
 $P_{\text{избыт}} - ?$

**Решение.** Давление  $P$  внутри мыльного пузыря равно:

$$P = P_0 + P_{\text{избыт}},$$

где  $P_0$  – атмосферное давление,  $P_{\text{избыт}}$  – избыточное давление, создаваемое искривленным поверхностным слоем мыльной воды.

Избыточное давление  $P_{\text{избыт}}$  равно удвоенному давлению Лапласа:

$$P_{\text{избыт}} = 2 \cdot \frac{2\sigma}{R},$$

множитель 2 перед дробью (давлением Лапласа) поставлен потому, что мыльный пузырь имеет две поверхности – внешнюю и внутреннюю.

Итак,

$$P_{\text{избыт}} = 2 \cdot \frac{2\sigma}{R} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 0,04}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 32 \text{ Па.}$$

Значение  $P_{\text{избыт}}$  обратно пропорционально радиусу  $R$  пузырька. При закипании воды при малых  $R$ , например, в пузырьках воздуха в воде давление  $P_{\text{избыт}}$  может быть сравнимо с атмосферным давлением. Правда в этом случае поверхность пузырька одинарная, и  $P_{\text{избыт}} = \frac{2\sigma}{R}$ .

**Ответ:**  $P_{\text{избыт}} = 32 \text{ Па.}$

8. Гелий из состояния с температурой  $T_1 = 200 \text{ К}$  расширяется в процессе  $PV^2 = \text{const}$  ( $P$  – давление,  $V$  – объем газа) с постоянной теплоемкостью  $C$ . От газа отвели количество теплоты  $Q = 400 \text{ Дж}$ , и конечный объем газа стал вдвое больше начального. Определите теплоемкость  $C$ .

$$\text{Дано: } \underline{T_1 = 200 \text{ К; } PV^2 = \text{const; } Q = 400 \text{ Дж; } V_2/V_1 = 2.}$$

$C - ?$

**Решение.** Запишем уравнение процесса и уравнение Клапейрона для гелия:

$$PV^2 = \text{const}, \quad \frac{PV}{T} = \text{const.}$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, имеем:

$$VT = \text{const.}$$

Последнее уравнение для перехода гелия из состояния 1 в состояние 2 записывается так:

$$V_1 T_1 = V_2 T_2,$$

из которого находим температуру гелия в конечном состоянии

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2} \cdot T_1 = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100 \text{ К.}$$

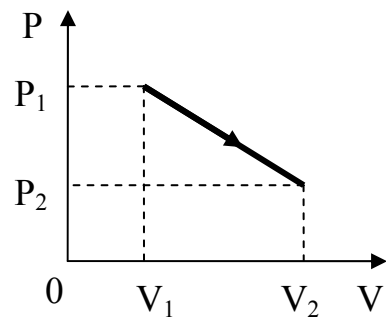
Теплоемкость  $C$  по определению равна количеству теплоты, необходимому для изменения температуры системы (газа) на 1 К:

$$C = \frac{|Q|}{|T_2 - T_1|} = \frac{400}{200 - 100} = 4 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Ответ:**  $C = 4 \text{ Дж/К.}$



9. С азотом произошел процесс, изображенный на рисунке в координатах P-V. Определите температуру газа T в этом процессе, когда его объем равен V=1,1 л, если масса азота равна m=0,56 г; P<sub>1</sub>=100 кПа; V<sub>1</sub>=0,5 л; P<sub>2</sub>=40 кПа; V<sub>2</sub>=1,5 л. Молярная масса азота μ=28 г/моль. Универсальная газовая постоянная R=8,31 Дж/(моль·К).



Дано:  $\underline{P_1 = 100 \cdot 10^3 \text{ Па}; V_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3; P_2 = 40 \cdot 10^3 \text{ Па}; V_2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;}$   
 $\underline{\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; V = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3; R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К).}$   
 T –?

**Решение.** Процесс, происходящий с газом (см. рисунок), можно выразить уравнением:

$$P = P_0 - \alpha V,$$

где P<sub>0</sub> – значение давления при нулевом объеме, α – угловой коэффициент в зависимости P(V).

Запишем это уравнение процесса для состояний 1 и 2:

$$P_1 = P_0 - \alpha V_1,$$

$$P_2 = P_0 - \alpha V_2.$$

Из этих уравнений выразим постоянные α и P<sub>0</sub>:

$$\alpha = \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1}; \quad P_0 = P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V_1.$$

Для промежуточного состояния запишем уравнение процесса и уравнение Клапейрона-Менделеева:

$$P = P_0 - \alpha V, \quad PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Из этих уравнений с учетом выражений для α и P<sub>0</sub> найдем искомую температуру T:

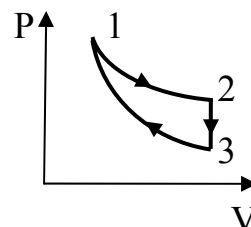
$$\begin{aligned} T &= \frac{PV\mu}{mR} = \frac{V\mu}{mR} \cdot P = \frac{V\mu}{mR} \cdot (P_0 - \alpha V) = \frac{V\mu}{mR} \cdot \left( P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V_1 - \alpha V \right) = \\ &= \frac{V\mu}{mR} \cdot \left( P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V_1 - \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot V \right) = \frac{V\mu}{mR} \cdot \left( P_1 + \frac{P_1 - P_2}{V_2 - V_1} \cdot (V_1 - V) \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1,1 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{0,56 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31} \cdot \left( 100 \cdot 10^3 + \frac{100 \cdot 10^3 - 40 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 10^{-3}} \cdot (0,5 \cdot 10^{-3} - 1,1 \cdot 10^{-3}) \right) =$$

$$= 424 \text{ К.}$$

**Ответ:**  $T = 424 \text{ К.}$

10. Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу (см. рисунок), состоящему из изотермы 1-2, изохоры 2-3 и адиабаты 3-1, равен  $\eta$ . Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна  $\Delta T$ . Найдите работу, совершенную  $\nu$  молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.



Дано:  $\eta; T_1 - T_3 = \Delta T; T_1 = T_2; i = 3; \nu; R.$   
 $A_{12} - ?$

**Решение.** К каждому из трех процессов на участках 1-2, 2-3, 3-1 рассматриваемого цикла будем применять первый закон термодинамики – количество теплоты  $\Delta Q$ , переданное системе, идет на изменение внутренней энергии  $\Delta U$  системы и на совершение системой работы  $\Delta A$  против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{i}{2} \nu R \Delta T + P \Delta V,$$

где  $i$  – число степеней свободы молекул газа;  $\nu$  – количество вещества;  $R$  – газовая постоянная;  $P$  – давление;  $\Delta T$  и  $\Delta V$  – изменения температуры и объема в рассматриваемом элементарном процессе.

Участок 1-2 – изотерма, температуры в состояниях 1 и 2 одинаковы, т.е.  $T_1 = T_2$ . Поэтому на этом участке внутренняя энергия не меняется, т.е.  $\Delta U_{12} = 0$ . И работа  $A_{12}$  совершается за счет теплоты  $Q_{12} = Q_1$ , получаемой тепловой машиной от нагревателя:

$$A_{12} = Q_1.$$

Участок 2-3 – изохора, объемы в состояниях 2 и 3 одинаковы, т.е.  $V_2 = V_3$ . Поэтому на этом участке работа не совершается, т.е.  $A_{23} = 0$ . На участке 2-3 температура понижается, и убыль внутренней энергии  $\Delta U_{23} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T$  производится за счет передачи теплоты  $Q_{23} = Q_2$  холодильнику:

$$Q_2 = \frac{i}{2} \nu R \Delta T.$$

Участок 3-1 – адиабата, на этом участке процесс происходит без теплообмена с окружающей средой:

$$Q_3 = 0.$$

Коэффициент полезного действия  $\eta$  тепловой машины по определению равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

В полученное уравнение для  $\eta$  вместо  $Q_1$  и  $Q_2$  подставим их выражения, записанные выше:

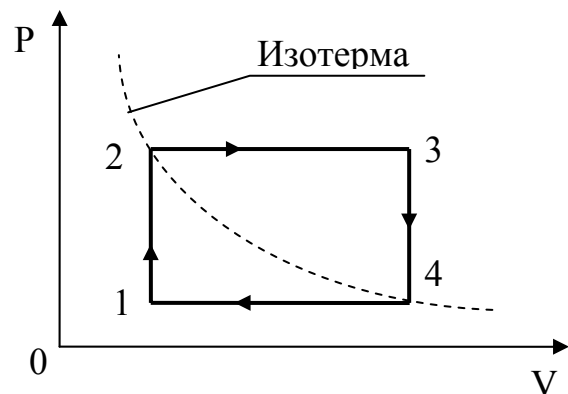
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{3}{2}vR\Delta T}{A_{12}},$$

откуда найдем искомую работу:

$$A_{12} = \frac{3vR\Delta T}{2(1 - \eta)}.$$

**Ответ:**  $A_{12} = \frac{3vR\Delta T}{2(1 - \eta)}.$

11. Один моль идеального газа совершает замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (см. Рисунок). Температура в точке 1 равна  $T_1$ , а в точке 3 равна  $T_3$ . Точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. Чему равна работа газа за цикл? Универсальная газовая постоянная равна  $R$ .



Дано:  $R; T_1; T_3; T_4 = T_2; P_3 = P_2; P_4 = P_1; V_2 = V_1; V_3 = V_4; v = 1$  моль.  
 $A - ?$

**Решение.** В каждой точке параметры состояния будем обозначать с соответствующими индексами. Например, в точке 4 с учетом условия задачи будем использовать следующие параметры для давления, объема, температуры:  $4(P_4, V_4, T_4) = 4(P_1, V_4, T_2)$ .

Используя уравнение Клапейрона

$$\frac{PV}{T} = \text{const},$$

запишем уравнения изопроцессов 1-2, 2-3, 3-4, 4-1.

Из уравнений изохор 1-2 и 3-4

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \quad \frac{P_2}{T_3} = \frac{P_1}{T_2}$$

получаем выражение:

$$P_1 = P_2 \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}. \quad (*)$$

Из уравнений изобар 2-3 и 4-1

$$\frac{V_1}{T_2} = \frac{V_4}{T_3}, \quad \frac{V_4}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

получаем соотношения:

$$V_4 = V_1 \cdot \frac{T_3}{T_2}, \quad T_2 = \sqrt{T_1 \cdot T_3}. \quad (**)$$

Работа газа за цикл равна площади фигуры (в данном случае площади прямоугольника) на диаграмме в координатах P-V:

$$A = (P_2 - P_1) \cdot (V_4 - V_1).$$

Преобразуем записанное выражение для работы с учетом соотношений (\*) и (\*\*):

$$\begin{aligned} A &= (P_2 - P_1) \cdot (V_4 - V_1) = P_2 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) \cdot V_1 \cdot \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) = \\ &= P_2 V_2 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) \cdot \left(\frac{T_3}{\sqrt{T_1 T_3}} - 1\right). \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение для работы с учетом уравнения состояния в точке 2:

$$P_2 V_2 = \nu R T_2, \quad (\nu = 1 \text{ моль}).$$

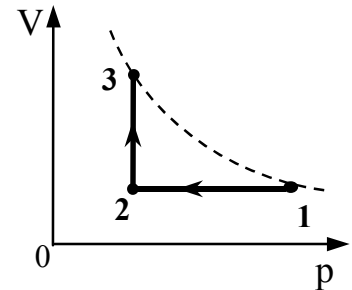
Итак, имеем:

$$A = P_2 V_2 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) \cdot \left(\frac{T_3}{\sqrt{T_1 T_3}} - 1\right) = R T_2 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right) =$$

$$= R\sqrt{T_1 \cdot T_3} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right) = R \cdot \left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2.$$

**Ответ:**  $A = R \cdot \left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2.$

12. 10 моль идеального одноатомного газа охладили, уменьшив давление в 3 раза. Затем газ нагрели до первоначальной температуры 300 К (см. рисунок). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 2-3?



Дано:  $\nu = 10$  моль;  $R = 8,31$  Дж/(моль·К);  
 $T_1 = T_3 = 300$  К;  $i = 3$ ;  $P_1/P_2 = 3$ ;  
 $Q_{23} = ?$

**Решение:** Будем полагать, что каждому состоянию (1, 2, 3) соответствует значение параметра состояния (P, V, T) с соответствующим индексом.

Так как процесс 1-2 изохорический ( $V = \text{const}$ ), то

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{P_2}{P_1} = 300/3 = 100 \text{ К.}$$

На участке 2-3 согласно первому началу термодинамики

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{i}{2} \nu R(T_3 - T_2) + P_2(V_3 - V_2) = \\ &= \frac{i}{2} \nu R(T_3 - T_2) + \nu R(T_3 - T_2) = \frac{i+2}{2} \nu R(T_3 - T_2), \end{aligned}$$

где  $i$  – степеней свободы молекул,  $R$  – газовая постоянная.

После подстановки данных получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \frac{i+2}{2} \nu R(T_3 - T_2) = \frac{3+2}{2} \cdot 10 \cdot 8,31 \cdot (300 - 100) = \\ &= 41,55 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 41,55 \text{ кДж.} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $Q_{23} = 41,55$  кДж.

13. Некоторое количество гелия расширяется: сначала адиабатно, а затем – изобарно. Конечная температура газа равна начальной. При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 4,5 кДж. Чему равна работа газа за весь процесс?

Дано:  $A_{12} = 4,5 \text{ кДж}; i = 3; T_1 = T_2;$   
 $A_{123} = ?$

**Решение:** На рисунке 1-2 – адиабатический процесс, 2-3 – изобарический процесс, 1-3 – изотерма ( $T_1 = T_3$ ). Согласно условию задачи работа адиабатического расширения равна  $A_{12}$ . Как известно, работа адиабатического расширения равна:

$$A_{12} = \nu C_V(T_1 - T_2),$$

где  $C_V = \frac{i}{2} R$  – молярная теплоемкость

при постоянном объеме,  $\nu$  – количество вещества;  $T_1$  и  $T_2$  – температуры в точках 1 и 2,  $i$  – число степеней свободы молекул,  $R$  – газовая постоянная.

Итак,

$$A_{12} = \frac{i}{2} \nu R(T_1 - T_2),$$

откуда выражаем

$$\nu R(T_1 - T_2) = \frac{2}{i} A_{12}.$$

Работа изобарического расширения на участке 2-3 равна

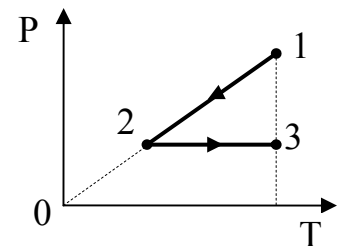
$$A_{23} = P_2(V_3 - V_2) = P_2V_3 - P_2V_2 = \nu RT_1 - \nu RT_2 = \nu R(T_1 - T_2) = \frac{2}{i} A_{12}.$$

Так как работа аддитивная величина, то работа газа за весь процесс равна алгебраической сумме работ на отдельных участках:

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} = A_{12} + \frac{2}{i} A_{12} = A_{12} \left( 1 + \frac{2}{i} \right) = 4,5 \left( 1 + \frac{2}{3} \right) = 7,5 \text{ кДж}.$$

**Ответ:**  $A_{123} = 7,5 \text{ кДж}.$

14. 1 моль идеального одноатомного газа сначала охладил, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 К, увеличив объем газа в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 1-2?



Дано:  $\nu = 1 \text{ моль}; R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}); T_1 = T_3 = 300 \text{ К}; i = 3; V_3/V_2 = 3;$   
 $Q_{12} = ?$

**Решение:** Будем полагать, что каждому состоянию (1, 2, 3) соответствует значение параметра состояния (P, V, T) с соответствующим индексом.

Так как процесс 2-3 изобарический ( $P = \text{const}$ ), то

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_3 \cdot \frac{V_2}{V_3} = 300 \cdot \frac{1}{3} = 100 \text{ К.}$$

На участке 1-2 согласно первому началу термодинамики

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \Delta U_{12},$$

так как на этом участке процесс изохорный, и поэтому  $A_{12} = 0$ . Запишем известное соотношение для изменения внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1),$$

где  $i$  – степеней свободы молекул,  $R$  – газовая постоянная.

После подстановки данных получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} Q_{12} = \Delta U_{12} &= \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 1,8,31 \cdot (100 - 300) = - 2,5 \cdot 10^3 \text{ Дж} = - 2,5 \text{ кДж.} \end{aligned}$$

Знак "–" указывает на то, что на участке 1-2 газ отдает такое количество теплоты (что требуется найти согласно условию задачи).

**Ответ:**  $Q_{12} = - 2,5 \text{ кДж.}$

15. Найдите среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекул гелия при давлении  $P = 101,3 \text{ кПа}$  и температуре  $t = 0^\circ \text{C}$ , если вязкость гелия  $\eta = 13 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$ .

Дано:  $P = 101,3 \cdot 10^3 \text{ Па}$ ;  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$ ;  $\eta = 13 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  
 $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ ;  $T = 273 \text{ К}$ .  
 $\lambda = ?$

**Решение:** Запишем выражение для коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda,$$

где  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега молекул,  $\rho$  – плотность газа, а

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$



– средняя арифметическая скорость молекул.

Из уравнения Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

выразим плотность

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Записанные выражения для средней арифметической скорости и плотности подставим в формулу для коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{p\mu}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \lambda.$$

Отсюда выразим среднюю длину свободного пробега молекул:

$$\lambda = \frac{3}{p} \eta \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}} = \frac{3}{101,3 \cdot 10^3} 13 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{3,14 \cdot 8,31 \cdot 273}{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} = 182 \cdot 10^{-9} = 182 \text{ нм.}$$

**Ответ:**  $\lambda = 182 \text{ нм.}$

16. Найдите изменение  $\Delta S$  энтропии при превращении массы  $m = 1 \text{ г}$  воды при температуре  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  в пар при температуре  $t_n = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Дано:  $m = 10^{-3} \text{ кг}$ ;  $T = 273 \text{ К}$ ;  $T_n = 373 \text{ К}$ ;  $c = 4190 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ .  
 $\Delta S = ?$

**Решение:** Общее изменение энтропии  $\Delta S$  складывается из изменения энтропии  $\Delta S_1$  при нагревании массы  $m$  воды от температуры  $T$  до  $T_n$  и изменения энтропии  $\Delta S_2$  при испарении массы  $m$  воды при температуре  $T_n$ . Известны выражения изменений энтропии

$$\Delta S_1 = mc \cdot \ln \frac{T_n}{T} \quad \text{и} \quad \Delta S_2 = \frac{mr}{T_n},$$

где  $c$  – удельная теплоёмкость воды,  $r$  – удельная теплота парообразования.

Тогда

$$\Delta S = m \left( c \ln \frac{T_{\pi}}{T} + \frac{r}{T_{\pi}} \right) = 10^{-3} \left( 4190 \ln \frac{373}{273} + \frac{2,26 \cdot 10^6}{373} \right) = 7,4 \text{ Дж/К.}$$

**Ответ:**  $\Delta S = 7,4 \text{ Дж/К.}$

17. При растворении массы  $m = 10 \text{ г}$  сахара ( $C_{12}H_{22}O_{11}$ ) в объёме  $V = 0,5 \text{ л}$  воды осмотическое давление раствора  $\pi = 152 \text{ кПа}$ . При какой температуре  $T$  находится раствор? Диссоциация молекул сахара отсутствует.

**Дано:**  $m = 10^{-2} \text{ кг}; V = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; \pi = 1,52 \cdot 10^5 \text{ Па}; \mu = 0,342 \text{ кг/моль.}$   
 $T = ?$

**Решение:** Осмотическое давление раствора связано с термодинамической температурой формулой Вант-Гоффа

$$\pi = \frac{\nu RT}{V},$$

где  $\pi$  – осмотическое давление,  $\nu = m/\mu$  – число молей молекул,  $V$  – объём раствора,  $R$  – универсальная газовая постоянная и  $T$  – температура.

Из формулы Вант-Гоффа находим

$$T = \frac{\mu VP}{mR} = \frac{0,342 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1,52 \cdot 10^5}{10^{-2} \cdot 8,31} = 313 \text{ К.}$$

**Ответ:**  $T = 313 \text{ К.}$

17. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найдите, из какого материала сделан металлический шарик массой  $m=25 \text{ г}$ , если известно, что для его нагревания от  $t_1=10 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $t_2=30 \text{ }^\circ\text{C}$  потребовалось затратить количество теплоты  $Q=117 \text{ Дж}$ .

**Дано:**  $m = 0,025 \text{ кг}; Q = 117 \text{ Дж}; R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}; T_1 = 283 \text{ К}; T_2 = 303 \text{ К.}$   
 $\mu = ?$

**Решение:** Затраченное количество теплоты можно найти по формуле:

$$Q = cm(T_2 - T_1).$$

Согласно закону Дюлонга и Пти молярная теплоёмкость  $C \approx 3R$ . Молярная и удельная теплоёмкости связаны соотношением

$$C = \mu c,$$

откуда

$$c = \frac{C}{\mu} = \frac{3R}{\mu}.$$

Тогда

$$Q = \frac{3R}{\mu}m(T_2 - T_1),$$

откуда

$$\mu = \frac{3mR(T_2 - T_1)}{Q} = \frac{3 \cdot 0,025 \cdot 8,31 \cdot (303 - 283)}{117} = 0,107 \text{ кг/моль}.$$

Следовательно, шарик сделан из серебра.

**Ответ: Серебро ( $\mu = 0,107$  кг/моль).**

## Литература, рекомендуемая для изучения физики

- 1 **Трофимова, Т.И.** Курс физики / Т.И. Трофимова.–М.: Высшая школа, 2004.–544 с.
- 2 **Савельев, И.В.** Курс физики / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1989.  
Т.1: Механика. Молекулярная физика.–350 с.
- 3 **Детлаф, А.А.** Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский.–М.: Высшая школа, 2000.–718 с.
- 4 **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие для вузов в 5 кн. / И.В. Савельев.–М.: Астрель, АСТ, 2002.  
Кн.3: Молекулярная физика и термодинамика.–208 с.
- 5 **Яворский, Б.М.** Справочное руководство по физике / Б.М. Яворский, Ю.А. Селезнев.–М.: Наука, 1989.–576 с.
- 6 **Савельев, И.В.** Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1988.–288 с.
- 7 **Трофимова, Т.И.** Сборник задач по курсу физики с решениями / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова.–М.: Высшая школа, 2003.–591 с.

## Список использованных источников

- 1 **Трофимова, Т.И.** Курс физики / Т.И. Трофимова.–М.: Высшая школа, 2004.–544 с.
- 2 **Савельев, И.В.** Курс общей физики: учебное пособие для вузов в 5 кн. / И.В. Савельев.–М.: Астрель, АСТ, 2002.  
Кн.3: Молекулярная физика и термодинамика.–208 с.
- 3 **Иродов, И.Е.** Физика макросистем. Основные законы / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001.–208 с.
- 4 **Савельев, И.В.** Курс общей физики / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1987.  
Т.1: Механика. Молекулярная физика.–432 с.
- 5 **Сивухин, Д.В.** Общий курс физики: учебное пособие для вузов в 5 т. / Д.В. Сивухин.–М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ, 2003.  
Т.2: Термодинамика и молекулярная физика.–576 с.
- 6 **Кикоин, А.К.** Молекулярная физика / А.К. Кикоин, И.К.Кикоин.–М.: Наука, 1976.–480 с.
- 7 **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Советская энциклопедия, 1988.  
Т.1: Ааронова – Бома эффект – Длинные линии.–704 с.
- 8 **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Советская энциклопедия, 1990.  
Т.2: Добротность – Магнитооптика.–703 с.
- 9 **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 1992.  
Т.3: Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема.–672 с.
- 10 **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 1994.  
Т.4: Пойнтинга – Робертсона – Стримеры.–704 с.
- 11 **Физическая энциклопедия** / Гл. ред. А.М. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.  
Т.5: Стробоскопические приборы – Яркость.–760 с.
- 12 **Савельев, И.В.** Сборник вопросов и задач по общей физике / И.В. Савельев.–М.: Наука, 1988.–288 с.
- 13 **Иродов, И.Е.** Задачи по общей физике / И.Е. Иродов.–М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001.–432 с.
- 14 **Матвеев, А. Н.** Молекулярная физика / А. Н. Матвеев.–М.: «Академия», 1981.–400 с.
- 15 **Математика.** Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров.–М.: Большая Российская энциклопедия, 2000.–848 с.

**Приложение А**  
**(справочное)**  
**Основные физические константы**

Скорость света в вакууме	$c=2,9979 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G=6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_{\mu}=22,414 \frac{\text{л}}{\text{моль}}$
Универсальная газовая постоянная	$R=8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Постоянная Фарадея	$F=96\,500 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$
Число Авогадро	$N_A=6,022 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Постоянная Больцмана	$k=1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}=8,625 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эВ}}{\text{К}}$
Элементарный заряд	$e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	$\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ $k=(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)^{-1}=9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$
Магнитная постоянная	$\mu_0=4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}=12,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Постоянная Планка	$h=6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с= $4,136 \cdot 10^{-15}$ эВ·с $\hbar=\frac{h}{2\pi}=1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R=3,29 \cdot 10^{15}$ с <sup>-1</sup> $R=1,10 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>
Масса покоя электрона	$m_e=9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p=1,672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n=1,675 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	1 а.е.м.= $1,6606 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрон-вольт	1 эВ= $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
Нормальное атмосферное давление	760 мм рт. ст. = 101 325 Па
Первый Боровский радиус	$r_1=0,528 \cdot 10^{-10}$ м
Масса изотопа ${}_1\text{H}^1$	$m_H=1,6736 \cdot 10^{-27}$ кг

**Приложение Б**  
**(справочное)**  
**Соотношения между единицами некоторых**  
**физических величин**

Длина	<p>1 Å (Ангстрем) = <math>1 \cdot 10^{-10}</math> м</p> <p>1 дюйм = 2,54 см</p> <p>1 пк (парсек) <math>\approx 3,1 \cdot 10^{16}</math> м</p> <p>1 св. год (световой год) <math>\approx 0,95 \cdot 10^{16}</math> м</p> <p>1 ферми = <math>10^{-15}</math> м</p> <p>1 фут = 30,48 см</p> <p>1 ярд = 91,44 см</p>
Масса	<p>1 тонна = <math>10^3</math> кг</p> <p>1 а.е.м. = <math>1,6606 \cdot 10^{-27}</math> кг</p> <p>1 кар (карат) = 0,2 г</p>
Время	<p>1 сутки = 86 400 с</p> <p>1 мин = 60 с</p> <p>1 час = 60 мин</p> <p>1 сутки = 24 часа</p> <p>1 год <math>\approx 3,16 \cdot 10^7</math> с</p>
Объем	<p>1 л = <math>1 \cdot 10^{-3}</math> м<sup>3</sup></p>
Сила	<p>1 кГ = 1 кгс (килограмм-сила) = 9,81 Н</p>
Давление	<p>1 бар = <math>1 \cdot 10^5</math> Па</p> <p>1 атм = 760 мм рт. ст. = <math>1,01325 \cdot 10^5</math> Па</p> <p>1 ат = 1 кгс/см<sup>2</sup> = <math>0,98 \cdot 10^5</math> Па</p> <p>1 торр = 1 мм рт. ст. = 133,3 Па</p>
Энергия	<p>1 эВ = <math>1,6 \cdot 10^{-19}</math> Дж</p> <p>1 квт·ч = <math>3,6 \cdot 10^6</math> Дж</p> <p>1 кал = 4,1868 Дж</p>
Мощность	<p>1 л.с. (лошадиная сила) = 735 Вт</p>

## Приложение В (справочное) Основные формулы по математике

### Алгебра

$$a : b = \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}; \quad a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}; \quad \frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot m};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow a \cdot n = b \cdot m \Leftrightarrow \frac{n}{b} = \frac{m}{a}; \quad \frac{a}{b} \pm \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n \pm b \cdot m}{b \cdot n};$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}; \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \text{ при } a > 0, b > 0.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad \frac{a+b}{2} = \sqrt{a \cdot b} \text{ при } a=b.$$

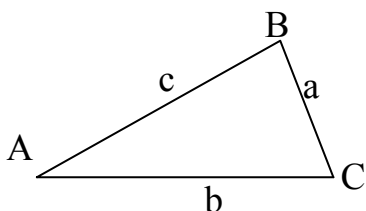
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (a \neq 0); \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};$$

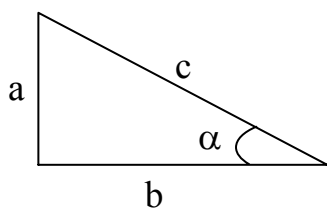
$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad (x \ll 1);$$

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx, \quad (x \ll 1; n \neq 0);$$

### Тригонометрия



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b}{a};$$

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

$x$	$\pm \alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3}{2} \pi \pm \alpha$
$\sin x$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$



$\alpha$	$0^0(0)$	$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^0\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^0(\pi)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad \overline{\sin^2\alpha} = \overline{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha); \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\frac{\beta - \alpha}{2}; \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; \quad \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]; \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin x \approx \operatorname{tg}x \approx x, \quad (x \ll 1); \quad x = \frac{x^0 \cdot \pi}{180^0}, \quad [x] = \text{рад}, \quad [x^0] = \text{град};$$

## Геометрия

$$L_{\text{окружн}} = 2\pi r = \pi d; \quad S_{\text{круг}} = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2; \quad S_{\text{сфер}} = 4\pi r^2 = \pi d^2; \quad (d = 2r);$$

$$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3; \quad (d = 2r); \quad S_{\text{эллипс}} = \pi \cdot a \cdot b, \quad a, b - \text{полуоси эллипса};$$

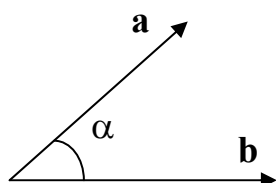
## Векторы

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad \overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\};$$

$$\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) = \{a_x, a_y, a_z\}; \quad \mathbf{b}(b_x, b_y, b_z) = \{b_x, b_y, b_z\};$$

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}; \quad \lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\};$$

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{b} \cdot [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}]; \quad [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$



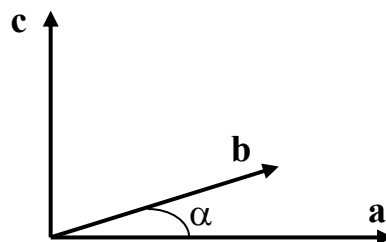
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\alpha = a \cdot b \cdot \cos\alpha;$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

$\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  - правая тройка векторов.

$\mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b}; \mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}, c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2};$

$|\mathbf{c}| = c = ab \sin \alpha,$



$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}; c_x = a_y b_z - a_z b_y; c_y = a_z b_x - a_x b_z; c_z = a_x b_y - a_y b_x;$

**Логарифмы**

$\lg(x^n) = n \lg x; \lg(xy) = \lg x + \lg y; \lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y; \ln x = \frac{\lg x}{\lg e}; \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10};$   
 ( $x > 0, y > 0$ ).

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718...; a^x = e^{x \ln a}; a^x = 10^{x \lg a};$

**Элементы анализа**

$(x^n)' = nx^{n-1}; (x^{-n})' = -nx^{-(n+1)}; (Cx^n)' = Cnx^{n-1}; (C/x^n)' = -Cn/x^{n+1};$

$(\cos x)' = -\sin x; (\sin x)' = \cos x; (\cos kx)' = -k \sin kx; (\sin kx)' = k \cos kx;$

$(U \pm V)' = U' \pm V'; (U \cdot V)' = U'V + UV'; (U/V)' = (U'V - UV')/V^2;$

$(C \cdot e^x)' = C \cdot e^x; (a^{Cx})' = C \cdot a^{Cx} \cdot \ln a; (\ln x)' = \frac{1}{x}; y'_x = [f(z(x))]'_x = f'_z \cdot z'_x;$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1); \int Ax^n dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1); \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C; \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C; \int \frac{A}{x^2} dx = -\frac{A}{x} + C; \int \cos x \cdot dx = \sin x + C;$

$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C; \int \cos kx \cdot dx = \frac{1}{k} \sin kx + C; \int \sin kx \cdot dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C;$

(A,C,k,a - const).

**Десятичные приставки к названиям единиц**

Э – экса – $10^{18}$	к – кило – $10^3$	мк – микро – $10^{-6}$
П – пета – $10^{15}$	г – гекто – $10^2$	н – нано – $10^{-9}$
Т – тера – $10^{12}$	д – деци – $10^{-1}$	п – пико – $10^{-12}$
Г – гига – $10^9$	с – санти – $10^{-2}$	ф – фемто – $10^{-15}$
М – мега – $10^6$	м – милли – $10^{-3}$	а – атто – $10^{-18}$

# Приложение Г

## (справочное)

### Некоторые сведения из математики

#### 1. Элементы векторной алгебры

Скаляром называется физическая величина, характеризуемая только числовым значением. Вектором называют направленный отрезок в пространстве.

Вектор обозначают символом  $\overline{AB}$ , где точки A и B обозначают начало и конец данного направленного отрезка, либо одной латинской буквой  $\vec{a}$  или  $\mathbf{a}$  (см. рисунок 74).

Начало вектора называют точкой его приложения. Для обозначения длины вектора используют символ модуля (абсолютной величины) или символ вектора без стрелки над ним. Так  $|\overline{AB}| = AB$  и  $|\mathbf{a}| = a$  обозначают длины векторов  $\overline{AB}$  и  $\mathbf{a}$ .

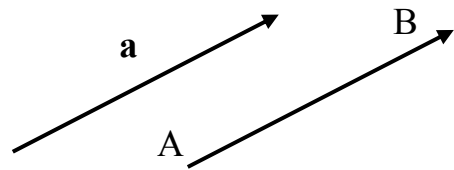


Рисунок 74

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной, или на параллельных прямых.

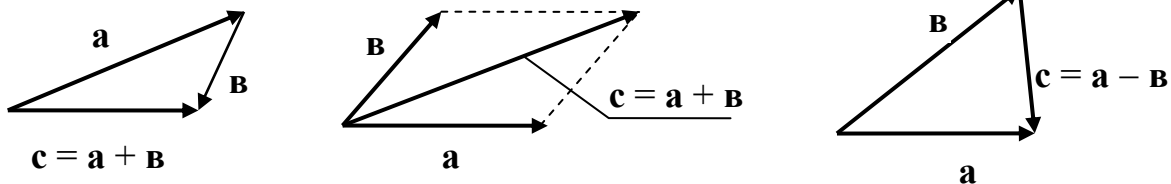


Рисунок 75

Векторы складываются по правилу треугольника или по правилу параллелограмма, вычитаются по правилу треугольника (см. рисунок 75).

Если число векторов больше двух, то их сумма может быть найдена по правилу замыкания ломаной до многоугольника: если приложить вектор  $\mathbf{a}_2$  к концу вектора  $\mathbf{a}_1$ , вектор  $\mathbf{a}_3$  к концу вектора  $\mathbf{a}_2, \dots$ , вектор  $\mathbf{a}_n$  к концу вектора  $\mathbf{a}_{n-1}$ , то сумма

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n = \mathbf{c}$$

будет представлять вектор  $\mathbf{c}$ , идущий из начала вектора  $\mathbf{a}_1$  к концу вектора  $\mathbf{a}_n$  (см. рисунок 76).

Произведением  $\lambda \mathbf{a}$  вектора  $\mathbf{a}$  на вещественное число  $\lambda$  называют вектор  $\mathbf{c}$ , имеющий длину, равную  $|\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$  и имеющий направление, совпадающее с

направлением вектора  $\mathbf{a}$  при  $\lambda > 0$ , и противоположное направлению вектору  $\mathbf{a}$  при  $\lambda < 0$ .

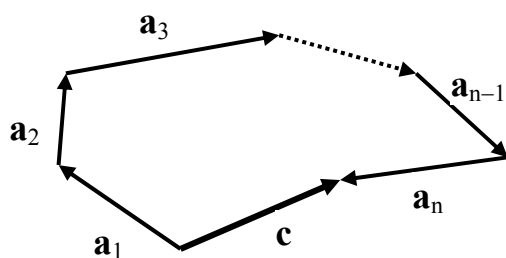


Рисунок 76

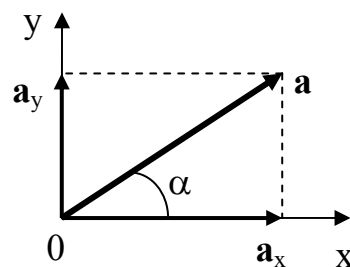


Рисунок 77

Для вектора  $\mathbf{a}$ , расположенного на плоскости  $xOy$ , проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  прямоугольной системы координат равны  $a_x = a \cdot \cos\alpha$ ,  $a_y = a \cdot \sin\alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором  $\mathbf{a}$  и осью  $Ox$  (см. рисунок 77). Зная проекции вектора, можно найти его модуль и угол между вектором и осью  $Ox$ :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}; \quad \alpha = \arctg(a_y/a_x).$$

Краткое обозначение вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_x, a_y) = \{a_x, a_y\}$ . Если заданы координаты двух точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , то вектор  $\overline{AB}$  (см. рисунок 78) может быть записан в виде  $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ .

Используя краткие обозначения векторов, можно записать действия над векторами:

сумма:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y\}$

разность:  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y\}$

умножение на скаляр:  $\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y\}$ .

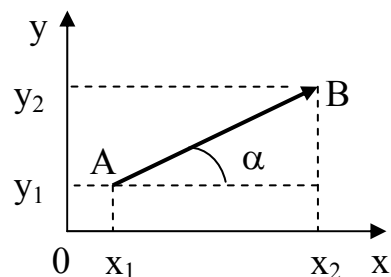


Рисунок 78

Скалярным произведением двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называют число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\alpha$  между ними (см. рисунок 79):

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\alpha = ab \cdot \cos\alpha.$$

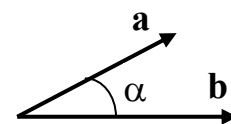


Рисунок 79

Если два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определены своими проекциями на оси координат, т.е.  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ ;  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ , то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих проекций на соответствующие оси координат:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторным произведением вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c}$ , обозначаемый символом

$$\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b};$$

и численно равный произведению длин векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на синус угла  $\alpha$  между ними:

$$|\mathbf{c}| = c = ab \cdot \sin \alpha.$$

Вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , причём его направление связано с направлением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  правилом правого винта, т.е. если правый винт вращаем от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  в направлении кратчайшего поворота, то поступательное движение винта определяет направление вектора  $\mathbf{c}$  (см. рисунок 80). Поэтому  $\mathbf{c} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$

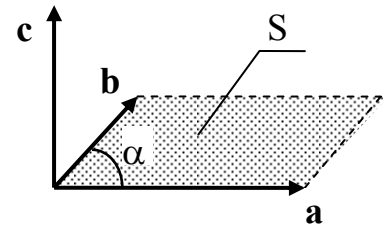


Рисунок 80

Длина (или модуль) векторного произведения  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  равна площади  $S$  параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Если  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{c_x, c_y, c_z\}$ , то составляющие (проекции) вектора  $\mathbf{c}$  выражаются через составляющие (проекции) векторов  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$  по правилу:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y;$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z;$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

## 2. Элементы дифференциального исчисления

Если некоторая непрерывная функция  $y = f(x)$  определена на некотором интервале, то в этом случае выражение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = y' = \frac{dy}{dx}$$

называется **первой производной** функции  $y = f(x)$  по аргументу  $x$ . В данном случае для производной кроме  $y'$  можно использовать и другие обозначения:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y'_x = f'_x.$$

### Физический смысл производной. Производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

характеризует быстроту (скорость) изменения функции  $f(x)$  при изменении аргумента  $x$ . В частности, если  $y = f(x)$  представляет зависимость пути  $y$  от вре-

мени  $x$ , то в этом случае производная  $y'$  определяет мгновенную скорость в момент времени  $x$ . Если же, скажем,  $y = f(x)$  определяет величину заряда  $y$ , протекающего через поперечное сечение проводника в зависимости от времени  $x$ , то в этом случае производная  $y' = f'(x)$  определяет силу тока в момент времени  $x$ .

**Геометрический (графический) смысл производной.** Из рисунка 81 видно, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Отношение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{dy}{dx}$$

называют **угловым коэффициентом**. Таким образом, производную  $f'(x)$  можно найти геометрически как тангенс угла наклона  $\alpha_0$  наклона касательной к оси  $Ox$  в точке  $x$  (см. рисунок 82).

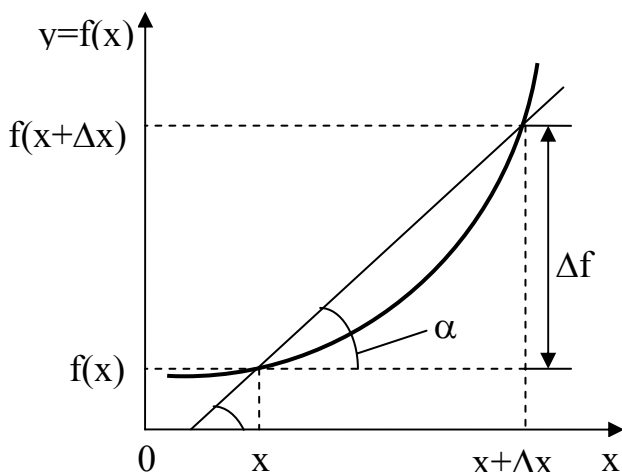


Рисунок 81

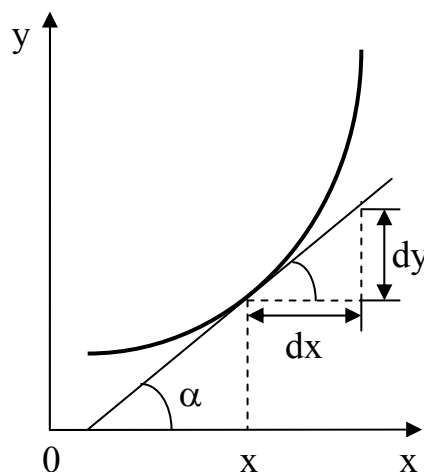


Рисунок 82

Для сложной функции  $f(x) = f(z(x))$  производная по аргументу  $x$  равна

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Так, например, для  $f(x) = \sin z$ , при  $z=kx$ ,  $f(x) = \sin kx$ , и

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}(\sin z) \cdot \frac{d}{dx}(kx) = \cos z \cdot k = \cos kx \cdot k = k \cdot \cos kx.$$

Производные некоторых функций ( $C, A, k = \text{const}$ ):

$$C' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (A \sin kx)' = Ak \cos kx \quad (U \pm V)' = U' \pm V'$$

$$\begin{aligned} (Ce^x)' &= Ce^x & (Cx^n)' &= Cnx^{n-1} & (A \cos kx)' &= -Aksinkx & (U \cdot V)' &= U'V + UV' \\ (\cos x)' &= -\sin x & (\sin x)' &= \cos x & (x^{-n})' &= -nx^{-(n+1)} & \left(\frac{U}{V}\right)' &= \frac{U'V - UV'}{V^2} \end{aligned}$$

Производная от первой производной называют **второй производной** и обозначают

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} = y''_{xx} = f''_{xx}.$$

В частности, если  $y = f(x)$  представляет зависимость пути  $y$  от времени  $x$ , то в этом случае вторая производная  $y'' = f''(x)$  представляет собой ускорение точки в момент времени  $x$ .

### 3. Элементы интегрального исчисления

**Интегрированием** называют математическую операцию, "обратную" дифференцированию (взятию производной). При интегрировании находят первообразную функцию.

Функция  $F(x)$  называется первообразной функцией для данной функции  $f(x)$ , если функция  $F(x)$  дифференцируема и  $F'(x) = f(x)$ .

Совокупность всех первообразных функций для данной функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от этой функции  $f(x)$  и обозначается символом

$$\int f(x)dx.$$

Здесь  $\int$  - называется знаком интеграла,  $f(x)$  – подынтегральной функцией,  $f(x)dx$  – подынтегральным выражением.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где  $C = \text{const}$ .

Неопределенные интегралы некоторых функций:

$$\begin{aligned} \int 0 dx &= C & \int (U + V) dx &= \int U dx + \int V dx & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int 1 dx &= x + C & \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos kx dx &= \frac{1}{k} \sin kx + C \\ \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C & \int \sin kx dx &= -\frac{1}{k} \cos kx + C & \int AU dx &= A \int U dx + C \end{aligned}$$

Пусть в интервале  $(a, b)$  изменения аргумента  $x$  определена непрерывная функция  $f(x)$ . Разобьем интервал  $(a, b)$  на элементарные отрезки  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$ . Составим сумму:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

где каждое слагаемое  $f(x_i) \cdot \Delta x_i$  представляет собой площадь прямоугольника со сторонами  $f(x_i)$  и  $\Delta x_i$  (см. рисунок 83).

Выражение

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

называется определенным интегралом от этой функции  $f(x)$ .

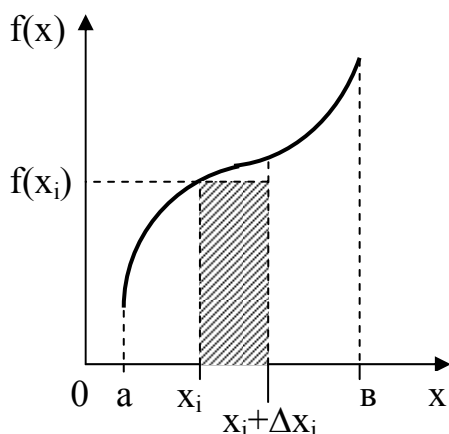


Рисунок 83

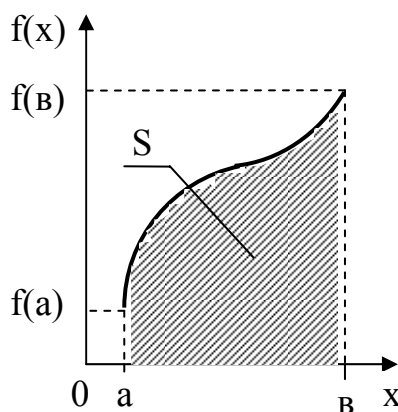


Рисунок 84

**Геометрический смысл определенного интеграла** (см. рисунок 84):

$\int_a^b f(x) dx$  – определенный интеграл равен площади  $S$  криволинейной трапеции (площади фигуры под графиком функции  $f(x)$  при изменении аргумента  $x$  в интервале  $(a, b)$ ).

Нужно отметить, что

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

т.е. значение определенного интеграла от подынтегральной функции  $f(x)$  равно разности значений первообразной функции  $F(x)$  при значениях  $x = b$  и  $x = a$ , соответственно.

Например,

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$



## Приложение Д (справочное) Основные формулы по физике

$v = \frac{S}{t}$  при равномерном движении скорость  $v$  равна отношению пути  $S$  ко времени  $t$ .

$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$   $v_{\text{ср.}}$  – средняя скорость равна отношению пути  $\Delta S$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого этот путь был пройден.

$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$   $\mathbf{v}_{\text{ср}}$  – вектор средней скорости перемещения за время  $\Delta t$ ,  $\Delta \mathbf{r}$  – вектор перемещения.

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'_t$   $\mathbf{v}$  – вектор мгновенной скорости равен производной от перемещения по времени.

$v = \frac{dS}{dt} = S'_t$   $v$  – модуль мгновенной скорости равен производной от пути по времени.

$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$   $\mathbf{a}_{\text{ср}}$  – вектор среднего ускорения равен отношению изменения скорости  $\Delta \mathbf{v}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за которое это изменение произошло.

$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}'_t$  мгновенное ускорение равно производной от скорости по времени

$a_\tau = \frac{dv}{dt} = v'_t$  тангенциальное (касательное) ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории в данной точке.

$a_n = \frac{v^2}{R}$  нормальное (центростремительное) ускорение  $a_n$  характеризует быстроту изменения скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории.  $R$  – радиус кривизны траектории,  $v$  – скорость. (при равномерном вращении по окружности  $a_n$  – центростремительное ускорение,  $R$  – радиус окружности).

$R = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}$   $R$  – радиус кривизны в данной точке кривой,  $\Delta\varphi$  – угол между касательными к кривой в точках, отстоящих друг от друга на элементе участка траектории  $\Delta S$ .

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$   $\mathbf{a}$  – полное ускорение при криволинейном движении;  
 $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$   $a_n, a_\tau$  – нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.

$\text{tg}\alpha = a_n/a_\tau$   $\alpha$  – угол между векторами полного ускорения и скорости.

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$  кинематическое уравнение равномерного движения со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x$ ,  $x_0$  - начальная координата,  $t$  - время.

$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$  кинематическое уравнение равнопеременного движения ( $a = \text{const}$ ) вдоль оси  $x$ ,  $v_0$  - начальная скорость. Значения  $v_0$  и  $a$  - положительны, если векторы  $v_0$  и  $a$  направлены в сторону положительной полуоси  $x$ , и отрицательны в противном случае.

$S = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$   $S$  - путь и  $v$  - мгновенная скорость при равнопеременном движении,  $v_0$  - начальная скорость,  $a$  - ускорение,  $t$  - время.  
 $v = v_0 + a \cdot t$

$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$  кинематическое уравнение, связывающее путь  $S$ , пройденный телом за некоторое время, с начальной -  $v_0$  и конечной -  $v$  скоростями на этом отрезке пути, с ускорением  $a$ .

$H = \frac{gt^2}{2}$ ;  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ; свободное падение ( $v_0 = 0$ ) тела с высоты  $H$ :  $t$  - время падения;  $g$  - ускорение свободного падения;  $v$  - скорость тела в момент достижения поверхности (Земли),  $h(t)$  - высота в момент времени  $t$ .  
 $h(t) = H - \frac{gt^2}{2}$ ;  
 $v = gt = \sqrt{2gH}$

$x(t) = v_0 \cdot t$ ;  
 $y(t) = H - \frac{gt^2}{2}$ ;  
 $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ ;  $L = v_0 t_0$ ;  
 $v_x = v_0$ ;  $v_y = gt$ ;

движение тела, брошенного горизонтально со скоростью  $v_0$  с высоты  $H$ :  $x_0 = 0$  и  $y_0 = H$  - начальное положение тела (в момент броска);  $x(t)$  и  $y(t)$  - уравнения движения по осям;  $t_0$  - время полета;  $L$  - дальность полета;  $v_x$  и  $v_y$  - составляющие скорости  $v$  тела по осям координат для любого момента времени  $t$  во время полета (до удара о поверхность).

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ ;  $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$ ;  
 $x(t) = v_{0x} \cdot t$ ;  $y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ ;  
 $v_x(t) = v_{0x}$ ;  $v_y(t) = v_{0y} - g t$ ;  
 $H = \frac{v_{0y}^2}{2g}$ ;  $t_0 = \frac{2v_{0y}}{g}$ ;  
 $L = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$

движение тела, брошенного со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту:  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$  - начальное положение тела (в момент броска);  $v_{0x}$  и  $v_{0y}$  - проекции скорости  $v_0$  по осям;  $x(t)$  и  $y(t)$  - уравнения движения по осям;  $v_x(t)$  и  $v_y(t)$  - зависимость составляющих скорости по осям от времени  $t$ ;  $H$  - высота подъема,  $t_0$  - время полета;  $L$  - дальность полета.

$$v = \frac{N}{t}; T = \frac{t}{N}; \quad \text{при равномерном вращательном движении: } v - \text{ частота вращения, } T - \text{ период вращения, } N - \text{ число оборотов за время } t.$$

$$v = T^{-1}; T = v^{-1}$$

$$\omega = \frac{\varphi}{t}; N = \frac{\varphi}{2\pi}; \quad \omega - \text{ угловая скорость при равномерном вращении: } \varphi - \text{ угол поворота, } N - \text{ число оборотов за время } t; v - \text{ частота вращения, } T - \text{ период вращения.}$$

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'_t \quad \omega - \text{ угловая скорость равна производной угла поворота по времени.}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega'_t \quad \varepsilon - \text{ угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени.}$$

$$S = R \cdot \varphi \quad S - \text{ путь, пройденный материальной точкой при повороте на угол } \varphi \text{ по дуге окружности радиуса } R.$$

$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R v \quad \text{связь между линейной и угловой скоростями при равномерном вращательном движении}$$

$$a_t = \varepsilon \cdot R, a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R} = v \cdot \omega \quad a_n \text{ и } a_t - \text{ нормальное (центростремительное) и тангенциальное (касательное) ускорения, соответственно.}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \quad \text{кинематическое уравнение равномерного вращения, } \varphi_0 - \text{ начальное угловое положение.}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \quad \text{кинематическое уравнение равнопеременного вращения } (\varepsilon = \text{const}), \omega_0 - \text{ начальная угловая скорость.}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \quad \omega - \text{ мгновенная угловая скорость при равнопеременном вращении в момент времени } t, \omega_0 - \text{ начальная угловая скорость, } \varepsilon - \text{ угловое ускорение.}$$

$$e = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} \quad \text{кинематическое уравнение, связывающее угол поворота } \varphi \text{ с начальной } \omega_0 \text{ и конечной } \omega \text{ угловыми скоростями и с угловым ускорением } \varepsilon.$$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \rho - \text{ плотность тела, } m - \text{ масса, } V - \text{ объем тела.}$$

$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$   $\mathbf{p}$  – импульс тела – векторная величина, равная произведению массы  $m$  тела на его скорость  $\mathbf{v}$ .

$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ;  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p}'_t$  второй закон Ньютона:  $m$  – масса тела,  $\mathbf{F}$  – равнодействующая всех приложенных к телу сил,  $\mathbf{a}$  – ускорение,  $\mathbf{p}$  – импульс тела.

$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ . принцип суперпозиции для силы – если на рассматриваемое тело действует несколько сил, то его движение будет таким же, как если бы на тело действовала результирующая сила, равная векторной сумме отдельных сил.

$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  третий закон Ньютона: силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и противоположно направлены.

$F_{\text{упр.}} = -k \cdot \Delta l$ ; закон Гука: сила упругости  $F_{\text{упр}}$  пропорциональна удлинению тела (пружины)  $\Delta l$  и направлена в сторону, противоположную направлению перемещений частиц тела при деформации;  $k$  – коэффициент пропорциональности (жесткость пружины);  $\sigma$  – механическое напряжение;  $S$  – площадь поперечного сечения образца, к которому приложена сила  $F$ ;  $E$  – модуль Юнга (упругости);  $\varepsilon$  – относительное удлинение;  $l_0$  – начальная длина.  
 $\sigma = \varepsilon \cdot E$ ;  
 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ ;  $\sigma = \frac{F}{S}$ ;  
 $\Delta l = l - l_0$

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$  закон всемирного тяготения: два тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $R$  между их центрами масс;  $G$  – гравитационная постоянная. В такой форме записи закон справедлив для взаимодействия материальных точек и однородных тел сферической формы.

$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$   $g(h)$  – ускорение свободного падения на высоте  $h$  над поверхностью планеты,  $M$  и  $R$  – масса и радиус планеты;  
 $g(h) = g \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$   $g$  – ускорение свободного падения у поверхности планеты (без учета вращения планеты), т.е.  $g = G \frac{M}{R^2}$ .

$F_{\text{тр.}} = \mu \cdot N$  сила трения скольжения равна максимальной силе трения покоя  $F_{\text{тр.}}$ , пропорциональной силе нормального давления  $N$  (реакции опоры);  $\mu$  – коэффициент трения.

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$   $\mathbf{P}$  – сила тяжести,  $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение свободного падения.

$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{gR}$   $v_1$  – первая космическая скорость:  $M$  и  $R$  – масса и радиус планеты,  $G$  – гравитационная постоянная,  $g$  – ускорение свободного падения на поверхности планеты.

$$v = v_1 \sqrt{\frac{R}{r}} \quad \text{местная первая космическая скорость движения по окружности радиусом } r. \text{ Так как } r > R, \text{ то } v < v_1.$$

$$T = 2\pi \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} \quad \text{период обращения спутника по орбите радиусом } r; \\ R - \text{ радиус планеты; } r > R.$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \quad \text{или} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM} \quad \text{частная форма третьего закона Кеплера – отношение квадратов периодов вращения двух спутников равно кубу отношения радиусов круговых орбит.}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r} = - \frac{mv^2}{2} = - \frac{mgR^2}{2r} \quad \text{полная энергия } E \text{ спутника на круговой орбите радиусом } r \text{ равна сумме кинетической и потенциальной энергий.}$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{2} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2G \frac{M}{R}} \quad v_2 - \text{ вторая космическая (или параболическая) скорость, } v_1 - \text{ первая космическая скорость.}$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - u \frac{dm}{dt} \quad \text{уравнение Мещерского (уравнение движения тела с переменной массой). } F - \text{ геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету, } u - \text{ скорость истечения газов относительно ракеты, } dm/dt - \text{ масса сгоревшего топлива, которое выбрасывается из ракеты за единицу времени.}$$

$$v = v_0 - u \cdot \ln \frac{m}{m_0} \quad \text{формула Циолковского. } m_0 - \text{ начальная масса ракеты, } m - \text{ масса в конце ускорения, скорость газовой струи } u. \text{ Скорость ракеты в начале и в конце ускорения – } v_0 \text{ и } v, \text{ соответственно.}$$

$$\Delta A = F \cdot \Delta r = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha \quad \Delta A - \text{ элементарная работа равна скалярному произведению силы } F \text{ на перемещение } \Delta r, \alpha - \text{ угол между } F \text{ и } \Delta r.$$

$$P_{\text{ср.}} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \text{мощность равна работе, совершаемой в единицу времени: } P_{\text{ср.}} - \text{ средняя мощность за время } \Delta t.$$

$$P = F \cdot v = F \cdot v \cdot \cos \alpha \quad \text{мгновенная мощность } P \text{ равна скалярному произведению силы } F \text{ на скорость } v, \text{ с которой движется точка приложения силы, } \alpha - \text{ угол между } F \text{ и } v.$$

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad E_K - \text{ кинетическая энергия тела массой } m, \text{ движущегося со скоростью } v, p - \text{ импульс тела.}$$

$$A = E_{K2} - E_{K1} \quad \text{работа равнодействующей силы равна изменению кинетической энергии тела (при условии постоянства потенциальной энергии).}$$

$$A = -\Delta E_{\text{п}} \quad \text{работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной}$$

ной энергии (при условии постоянства кинетической энергии).

$E_{\text{П}} = m \cdot g \cdot h$  потенциальная энергия тела в однородном поле тяготения:  $h$  - высота над поверхностью Земли (высота от нулевого уровня),  $g$  - ускорение свободного падения,  $m$  - масса тела.

$E_{\text{П}} = \frac{k \cdot (\Delta l)^2}{2}$  потенциальная энергия упруго деформированного тела (пружины).

$E_{\text{П}} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R}$  потенциальная энергия взаимодействия двух тел массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящихся на расстоянии  $R$  друг от друга;  $G$  - гравитационная постоянная.

$\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{v}_i = \text{const}$  закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным (по величине и направлению) при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F} \cdot \Delta t$ ; изменение импульса тела  $\Delta \mathbf{p}$  за время  $\Delta t$  равно импульсу равнодействующей силы  $\mathbf{F} \cdot \Delta t$ .  
 $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F} \cdot \Delta t$

$E = E_{\text{к}} + E_{\text{П}}$  полная механическая энергия материальной точки (тела) равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

$E = E_{\text{к}} + E_{\text{П}} = \text{const}$  закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел остается постоянной при любых движениях тел системы, если в системе не действуют диссипативные силы.

$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2$ ; законы сохранения импульса и энергии  
 $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$  при центральном абсолютно упругом ударе двух тел (шаров).

$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{u}$  закон сохранения импульса при центральном абсолютно неупругом ударе двух тел.

$\Delta E_{\text{к}} = Q = \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$  изменение кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе (часть ее переходит в «тепловую» форму энергии).

$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}}$ ; коэффициент полезного действия механизмов равен отношению полезной работы  $A_{\text{пол}}$  (полезной мощности  $P_{\text{пол}}$ ) к затраченной  $A_{\text{затр}}$  (затра-

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}} \cdot 100\% = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}} \cdot 100\% \quad (\text{ценной} - P_{\text{затр}}).$$

$$\frac{dE_n}{dx} = (E_n)'_x = 0 \quad \text{условие равновесия - экстремальное значение потенциальной энергии (для случая одномерной задачи, когда } E_n \text{ зависит только от координаты } x, \text{ т.е. когда } E_n = E_n(x)).$$

$$\frac{d^2E_n}{dx^2} = (E_n)''_{xx} > 0 \quad \text{условие устойчивого равновесия}$$

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  момент силы  $\mathbf{M}$  относительно неподвижной точки – физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из этой точки в точку приложения силы, на эту силу  $\mathbf{F}$ .

$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d$   $M$  – модуль момента силы,  $\alpha$  – угол между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$ ,  
 $d = r \cdot \sin \alpha$  – плечо силы равно кратчайшему расстоянию от оси вращения до линии действия силы.

$\sum \mathbf{F}_i = 0$  (первое) условие равновесия тела при отсутствии вращения: векторная сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю.

$\sum \mathbf{M}_i = 0$  (второе) условие равновесия твердого тела с неподвижной осью вращения: алгебраическая сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю, причем моменты сил, вращающих в одну сторону, считают положительными, а в другую – отрицательными.

$\sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{g}] = 0$  центр тяжести тела: сумма моментов сил тяжести всех частиц тела по отношению к оси, проходящей через центр тяжести, равна нулю.

$\mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{g} \mathbf{r}_i}{\sum m_i \mathbf{g}}$ ; центр тяжести тела:  $\mathbf{r}_c(x_c, y_c, z_c)$  – радиус-вектор, проведенный из начала координат в центр тяжести тела;  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра тяжести;  $x_i, y_i, z_i$  – координаты частиц тела, причем  $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ ; суммирование производится по всем частицам тела.

$$x_c = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g};$$

$$y_c = \frac{\sum m_i g y_i}{\sum m_i g};$$

$$z_c = \frac{\sum m_i g z_i}{\sum m_i g}$$

$\mathbf{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$ ;  $\mathbf{r}_{\text{цм}}(x_{\text{цм}}, y_{\text{цм}}, z_{\text{цм}})$  – радиус-вектор центра масс системы материальных точек;  $m_i$  и  $\mathbf{r}_i$  – масса и радиус-вектор  $i$ -ой материальной точки (если твердое тело, то суммирование производится по всем частицам тела).

$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_{\text{цм}}$  координаты центра масс и центра тяжести тела совпадают в

случае, если размерами тела можно пренебречь в сравнении с размерами Земли (планеты).

$$m \frac{dv_{\text{цм}}}{dt} = F_{\text{внеш}}$$

теорема о движении центра масс: центр масс любой системы частиц, в том числе твердого тела, движется так, как двигалась бы материальная точка с массой равной массе системы, под действием всех приложенных к системе внешних сил.

$$M = F \cdot d$$

момент пары сил:  $d$  – плечо пары сил ( $F_1=F_2=F$ ) – кратчайшее расстояние между линиями действия сил.

$$\frac{F}{mg} = \frac{l_1}{l_2}$$

правило рычага: во сколько раз плечо  $l_2$  силы  $F$  больше плеча  $l_1$  груза весом  $mg$ , тем меньше усилие  $F$  требуется, чтобы сдвинуть груз.

$$L = [r, p] = [r, mv]$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot d$$

$L$  – момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки  $O$ :  $r$  – радиус-вектор от точки  $O$  до материальной точки;  $p = mv$  – импульс материальной точки;  $\alpha$  – угол между  $r$  и  $p$ ;  $d$  – плечо вектора  $p$  относительно неподвижной точки  $O$ .

$$\frac{dL}{dt} = M_{\text{внеш}}$$

производная по времени от момента импульса системы частиц (материальных точек) относительно произвольной точки выбранной системы отсчета равна векторной сумме моментов всех внешних сил относительно той же точки (полюса).

$$L = \sum L_i = \text{const, если } M_{\text{внеш}} = 0.$$

законом сохранения момента импульса: если момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, то момент импульса системы относительно той же точки остается постоянным во времени.

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

момент инерции  $J$  системы (тела) относительно оси вращения равен сумме произведений масс материальных точек (частиц) системы (тела) на квадраты их расстояний до оси вращения.

$$J = mR^2, \quad J = \frac{1}{2} mR^2$$

моменты инерции полого тонкостенного цилиндра и сплошного цилиндра (или диска) радиуса  $R$  относительно оси симметрии.

$$J = \frac{1}{4} mR^2$$

момент инерции бесконечно тонкого диска радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через диаметр.

$$J = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2)$$

момент инерции однородного эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  относительно оси, перпендикулярной к плоскости эллипса.

$$J = \frac{2}{5} mR^2$$

момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара.

$$J = \frac{1}{12} mL^2$$

момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.



$J = \frac{1}{3} mL^2$  момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.

$J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$  момент инерции тонкой прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$  относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через его середину.

$J = \frac{2}{3} mR^2$  момент инерции полого шара с тонкими стенками относительно оси, проходящей через центр шара.

$J = J_0 + ma^2$ . теорема Штейнера: момент инерции  $J$  относительно произвольной оси равен моменту инерции  $J_0$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями.

$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} m v_{\text{цм}}^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ . кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движения.

$\omega_{\text{пр}} = \frac{M}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{mg\ell}{J\omega}$ .  $\omega_{\text{пр}}$  – угловая скорость прецессии волчка вокруг вертикальной оси,  $\ell$  – расстояние от центра масс волчка до точки опоры,  $\omega$  – угловая скорость вращения волчка,  $m$  и  $J$  – масса и момент инерции волчка.

$\frac{d}{dt}(J\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_{\text{внеш}}$ . основное уравнение динамики вращательного движения,  $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$  – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения.

$J\varepsilon = M_{\text{внеш}}$ ,  
 $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ . при вращении симметричного твердого тела вокруг неподвижной оси симметрии момент инерции  $J = \text{const}$ ,  $\varepsilon$  – угловое ускорение.

$F_{\text{цб}} = m\omega^2 R$ . центробежная сила инерции, вектор  $\mathbf{R}$  направлен от оси вращения до места расположения тела.

$F_{\text{К}} = 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega}]$ . сила Кориолиса или кориолисовой силой инерции:  $\mathbf{v}'$  – скорость частицы относительно вращающейся системы отсчета,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращающейся системы.

$P = \frac{F}{S}$  давление равно отношению силы, перпендикулярной к поверхности тела, к величине площади поверхности  $S$ , на которую действует эта сила.

$P = \rho \cdot g \cdot h$   $P$  – гидростатическое давление:  $\rho$  – плотность жидкости,  $h$  – высота столба жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения.

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1}$  гидравлический пресс дает выигрыш в силе во столько раз, во сколько раз площадь ее большого поршня превосходит площадь маленького поршня,  $S_1$  и  $S_2$  – площади поперечного сечения

поршней,  $l_1$  и  $l_2$  – перемещения поршней,  $F_1$  и  $F_2$  – силы, приложенные к поршням.

$F_A = \rho g V_{\text{п}}$  закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости или газа:  $\rho$  – плотность жидкости (газа),  $V_{\text{п}}$  – объем погруженной в жидкость (газ) части тела,  $g$  – ускорение свободного падения.

$\rho v S = \text{const}$  закон постоянства потока массы:  $\rho$  – плотность жидкости.

$S \cdot v = \text{const}$  уравнение неразрывности (непрерывности) для несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ) жидкости: произведение скорости течения  $v$  на поперечное сечение  $S$  трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

$V = S \cdot v \cdot t$  объем жидкости (газа)  $V$ , проходящий через сечение  $S$  струи (трубы) за время  $t$ .

$V = \frac{1}{\eta} \frac{\pi R^4}{8 \ell} \Delta P t$  формула Пуазейля:  $V$  – объем жидкости, протекающей через трубу длиной  $\ell$  и радиусом  $R$  при ламинарном движении за время  $t$ .

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$  в сообщающихся сосудах высота столбиков жидкостей над уровнем раздела обратно пропорциональна плотностям жидкостей.

$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const}$  уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости:  $P$  – статическое давление,  $\frac{1}{2} \rho v^2$  – динамическое давление,  $\rho g h$  – гидростатическое давление,  $v$  – скорость течения жидкости в данном сечении.

$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$  формула Торричелли:  $v$  – скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде,  $h$  – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости.

$F = \eta \cdot S \cdot \left| \frac{dv}{dz} \right|$   $F$  – модуль силы внутреннего трения между двумя слоями площадью  $S$ , движущимися с различными скоростями:  $\eta$  – динамическая вязкость,  $\left| \frac{dv}{dz} \right|$  – модуль градиента скорости течения газа (жидкости) в направлении, перпендикулярном к площадке  $S$ .

$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$   $Re$  – числом Рейнольдса:  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости,  $\rho$  – плотность жидкости,  $l$  – характерный для поперечного сече-

	ния размер, например, диаметр трубы.
$v = \eta/\rho$	$v$ – кинематическая вязкость.
$F = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$	формула Стокса: $v$ – скорость шарика радиуса $R$ в вязкой жидкости.
$v = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$	$v$ – количество вещества: $\mu$ – молярная масса, $N_A$ – число Авогадро, $N$ – число молекул в веществе (газе) массой $m$ .
$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{\mu}{N_A}$	$m_0$ – масса одной молекулы.
$T = t + 273$	$T$ – температура по абсолютной шкале температур (шкале Кельвина), $t$ – температура по шкале Цельсия.
$t = \frac{5}{9}(T_F - 32)$	$t$ – температура по шкале Цельсия, $T_F$ – температура по шкале Фаренгейта.
$P \cdot V = \text{const}$	закон Бойля-Мариотта: для данной массы газа ( $m = \text{const}$ ) при неизменности состава газа (молярная масса $\mu = \text{const}$ ) при постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ) произведение давления газа $P$ на его объем $V$ есть величина постоянная.
$\chi = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_T = -\frac{1}{P}$	$\chi$ – изотермический коэффициент сжимаемости определяется как относительное изменение объема, вызывающее изменение давления на единицу.
$V = V_0 \cdot (1 + \alpha t)$ $V = V_0 \cdot \alpha \cdot T$ $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	закон Гей-Люссака: объем данной массы газа ( $m = \text{const}$ ) при неизменности состава газа (молярная масса $\mu = \text{const}$ ) при постоянном давлении ( $P = \text{const}$ ) изменяется линейно с температурой, $\alpha = 273^{-1} \text{ K}^{-1}$ – термический коэффициент расширения, $V_0$ – объем при $0^\circ \text{C}$ .
$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dT} \right)_P = \frac{1}{T}$	$\alpha$ – коэффициент объемного расширения газа при постоянном давлении.
$P = P_0 \cdot (1 + \beta t)$ $P = P_0 \cdot \beta \cdot T$ $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$	закон Шарля: давление данной массы газа ( $m = \text{const}$ ) при неизменности состава газа (молярная масса $\mu = \text{const}$ ) при постоянном объеме ( $V = \text{const}$ ) изменяется линейно с температурой, $\beta = 273^{-1} \text{ K}^{-1}$ – термический коэффициент давления, $P_0$ – давление при $0^\circ \text{C}$ .
$V_\mu = \frac{V}{\nu} = 22,4 \frac{\text{л}}{\text{моль}}$	закон Авогадро: моли любых идеальных газов при одинаковых условиях (одинаковых температуре и давлении) занимают одинаковые объемы, в частности, при нормальных условиях, – 22,4 л.

$P = 760 \text{ мм рт. ст.}$  значения давления и температуры при нормальных условиях.

$$T = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$P = \sum P_i$  закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений ее компонентов;  $P_i$  – парциальное давление  $i$ -ой компоненты равно давлению, которое создавала бы  $i$ -ая компонента смеси газов, если бы она одна занимала объем, равный объему смеси при той же температуре.

$\frac{P \cdot V}{T} = \text{const}$  уравнение Клапейрона справедливо при неизменности состава и массы газа:  $P$  – давление,  $V$  – объем,  $T$  – абсолютная температура.

$P \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T$  уравнение Клапейрона-Менделеева (уравнение состояния идеального газа):  $m$  – масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\mu$  – молярная масса газа.

$R = k \cdot N_A$   $R$  – универсальная газовая постоянная,  $k$  – постоянная Больцмана,  $N_A$  – число Авогадро.

$n = \frac{N}{V}$ ;  $n$  – концентрация молекул – число молекул в единице объема.

$\rho = \frac{m}{V}$ ;  $\rho = m_0 \cdot n$   $\rho$  – плотность газа,  $m_0$  – масса одной молекулы

$P = n \cdot k \cdot T$  зависимость давления  $P$  от концентрации молекул  $n$  и абсолютной температуры  $T$ ;  $k$  – постоянная Больцмана.

$P = \frac{2}{3} n \cdot E_0$ ; основное уравнение кинетической теории идеальных газов: давление  $P$  идеального газа равно  $\frac{2}{3}$  среднеквадратической кинетической энергии молекул, содержащихся в единице объема,  $m_0$  – масса одной молекулы,  $n$  – концентрация молекул.

$E_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{3}{2} kT$   $E_0$  – среднеквадратическая кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа,  $m_0$  – масса молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $v$  – среднеквадратическая скорость.

$F(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$  закон Максвелла распределения молекул по скоростям.

$$\bar{v} = v_{\text{KB}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}} \quad \bar{v} (v_{\text{KB}}) - \text{среднеквадратическая скорость молекул идеального газа.}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \quad R - \text{универсальная газовая постоянная, } \mu - \text{молярная масса, } T - \text{абсолютная температура, } P - \text{давление, } \rho - \text{плотность газа, } k - \text{постоянная Больцмана, } m_0 - \text{масса молекулы, } \bar{v} - \text{среднеквадратическая скорость.}$$

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} \quad \bar{v} - \text{средняя (среднеарифметическая) скорость.}$$

$$\bar{v} = v_{\text{cp}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8P}{\pi \rho}} \quad \bar{v} - \text{средняя арифметическая скорость молекул газа.}$$

$$v_{\text{H}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \quad v_{\text{H}} - \text{наиболее вероятная скорость молекул газа.}$$

$$v = 2\sqrt{2} \pi r^2 \bar{v} n^2 \quad v - \text{число столкновений, происходящих за секунду в единице объёма газа, } r - \text{радиус молекулы.}$$

$$\lambda = \frac{v_{\text{cp}}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad \lambda - \text{средняя длина свободного пробега молекул газа равна среднему расстоянию между двумя последовательными столкновениями молекулы, } Z - \text{среднее число соударений молекулы за 1 с, } d - \text{эффективный диаметр молекулы, } n - \text{концентрация молекул, } v_{\text{cp}} - \text{относительная средняя арифметическая скорость молекул.}$$

$$I = -D \frac{dn}{dx} \quad \text{закон диффузии Фика, } I - \text{диффузионный поток интересующего нас компонента в направлении оси } Ox, D - \text{коэффициент диффузии численно равен диффузионному потоку при градиенте концентрации, равном единице.}$$

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} \quad D - \text{коэффициент диффузии при стационарной диффузии.}$$

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho_2}{\rho} \lambda_1 \bar{v}_1 + \frac{\rho_1}{\rho} \lambda_2 \bar{v}_2 \right) \quad D_{12} - \text{коэффициент взаимной диффузии (диффузии одного газа в другой), } \rho - \text{плотность смеси.}$$

$$Q = -\alpha \frac{dT}{dx} \quad \text{закон Фурье: поток тепла (количество теплоты, протекающей через единицу площади в единицу времени) } Q \text{ пропорционален}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda c_v$$

градиенту температуры,  $\alpha$  – коэффициент теплопроводности.  
 $\alpha$  – коэффициент теплопроводности при стационарной теплопроводности.

$$F = -\eta \frac{dv}{dx}$$

закон Ньютона для силы внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости),  $F$  – сила, действующая на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа.

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda$$

$\eta$  – коэффициент внутреннего трения,  $\rho$  – плотность газа.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$\nu$  – кинематическая вязкость определяется как динамическая вязкость  $\eta$ , отнесённая к плотности  $\rho$ .

$$\alpha = \eta c_v; \quad D = \frac{\chi}{\rho c_v}$$

соотношения между коэффициентами переноса.

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} x}$$

барометрическая формула устанавливает закон убывания давления с высотой.

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$$

формула Больцмана.

$$E_{cp} = \frac{i}{2} kT$$

$E_{cp}$  – средняя энергия молекулы,  $i$  – число степеней свободы молекул газа,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура.

$$U = \frac{i}{2} \nu RT$$

$U$  – внутренняя энергия идеального газа,  $\nu$  – количество вещества,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура.

$$Q = \Delta U + A$$

первое начало термодинамики: количество теплоты  $Q$ , переданное системе, идет на изменение внутренней энергии  $\Delta U$  системы и на совершение работы  $A$  против внешних сил.

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} P \Delta V$$

$\Delta U$  – изменение внутренней энергии при изменении абсолютной температуры на  $\Delta T$ ;  $\Delta V$  – изменение объема при давлении  $P$ .

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

$C$  – теплоемкость численно равна количеству теплоты, необходимому для изменения температуры тела на 1 К.

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}$$

$c$  – удельная теплоемкость равна теплоемкости единицы массы тела,  $m$  – масса тела.

$$C_v = \frac{i}{2} R$$

$C_v$  – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $i$  – число степеней свободы молекул газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

ная.

$$C_p = \frac{i+2}{2} R \quad C_p - \text{молярная теплоемкость газа при постоянном давлении.}$$

$R = C_p - C_v$  уравнение Майера: универсальная газовая постоянная численно равна работе, которую 1 моль идеального газа совершает, изобарически расширяясь при нагревании на 1 К.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v} \quad \gamma - \text{постоянная (показатель) адиабаты.}$$

$$C = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \frac{dV}{dT} \quad C - \text{молярная теплоёмкость: выражение общее, пригодное для всех изотропных тел.}$$

$A = P \Delta V$   $A$  – работа, совершаемая газом при изменении его объема,  $P$  – давление газа,  $\Delta V$  – изменение его объема.

$I = U + PV$   $I$  – тепловая функция или энтальпия (теплосодержание).

$$A = P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) \quad A - \text{работа газа при изобарическом процессе.}$$

$$A = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} \quad A - \text{работа газа при изотермическом процессе.}$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2) \quad A - \text{работа газа при адиабатическом процессе, } \gamma - \text{показатель адиабаты.}$$

$PV^\gamma = \text{const}$ ; уравнения адиабатического процесса (уравнение Пуассона),  
 $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ ;  $\gamma$  – показатель адиабаты.  
 $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \quad \gamma - \text{показатель адиабаты, } C_p \text{ и } C_v - \text{молярные теплоемкости при постоянных давлении и объеме, соответственно; } i - \text{число степеней свободы молекул газа.}$$

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad v_{\text{зв}} - \text{скорость звука в газе.}$$

$L = L_0(1 + \alpha t)$  линейное расширение твердых тел:  $L_0$  – длина при температуре  $0^\circ\text{C}$ ,  $L$  – длина при температуре  $t^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – линейный коэффициент расширения равен относительному изменению длины при нагре-

$$\Delta L = L - L_0 \quad \text{на } 1^\circ\text{C (1 K)}.$$

$$V = V_0(1 + \beta t) \quad \text{объемное расширение твердых тел и жидкостей: } V_0 - \text{объем при } 0^\circ\text{C, } V - \text{объем при температуре } t^\circ\text{C, } \beta - \text{объемный коэффициент расширения равен отношению изменения объема при нагреве на } 1^\circ\text{C (1 K)}.$$

$$\beta = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\Delta V = V - V_0$$

$$\beta = 3\alpha \quad \text{соотношение между коэффициентами линейного } (\alpha) \text{ и объемного } (\beta) \text{ расширения твердых тел.}$$

$$q = \frac{Q}{m} \quad \text{удельная теплота сгорания равна количеству теплоты, выделяющемуся при сгорании единицы массы топлива.}$$

$$\lambda = \frac{Q}{m} \quad \text{количество теплоты, необходимое для превращения единицы массы из твердого (жидкого) состояния в жидкое (твердое) при температуре плавления (кристаллизации), называют удельной теплотой плавления (кристаллизации) } \lambda. \text{ Удельная теплота плавления равна удельной теплоте кристаллизации. Температура плавления равна температуре кристаллизации.}$$

$$r = \frac{Q}{m} \quad \text{количество теплоты, которое необходимо сообщить жидкости для испарения единицы ее массы при постоянной температуре (в частности, при температуре кипения), называют удельной теплотой парообразования } r. \text{ С ростом температуры величина удельной теплоты парообразования уменьшается.}$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \eta - \text{коэффициент полезного действия теплового двигателя: } A - \text{работа, совершенная за цикл, } Q_1 - \text{количество теплоты, полученное системой (от нагревателя), } Q_2 - \text{количество теплоты, отданное системой (холодильнику; окружающей среде).}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \eta - \text{коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя (цикла Карно): } T_1 \text{ и } T_2 - \text{температуры нагревателя и холодильника, соответственно; } Q_1 - \text{количество теплоты, полученное газом от нагревателя при изотермическом расширении; } Q_2 - \text{количество теплоты, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии.}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\xi_1 = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad \xi_1 - \text{эффективность холодильной машины, работающей по циклу Карно.}$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad dS - \text{приведённое количество теплоты равно отношению теплоты } dQ, \text{ полученной телом в изотермическом процессе, к температуре } T$$



теплоотдающего тела.

$$S = \int \frac{dQ}{T}$$

энтропия  $S$  равна интегралу от приведённого количества теплоты.

$$\Delta S = S(V, T) - S(V_0, T_0) = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}$$

приращение энтропии при переходе системы из одного состояния в другое (энтропия возрастает как с увеличением объёма газа, так и с увеличением температуры).

$$dS = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) dQ$$

увеличение энтропии при теплопередаче: так как  $T_1 > T_2$ , то  $dS > 0$ .

$$\Delta S = R \ln \frac{V}{V_1}$$

рост энтропии при адиабатном расширении идеального газа в пустоту: так как  $V > V_1$ , то  $\Delta S > 0$ .

$$\Delta S = R \left( \ln \frac{V}{V_1} + \ln \frac{V}{V_2} \right)$$

рост энтропии при взаимной диффузии газов: так как и  $V_1$  и  $V_2$  меньше, чем  $V$ , то  $\Delta S > 0$ .

$$S = k \cdot \ln \Omega$$

формула Больцмана:  $S$  – энтропия,  $\Omega$  – термодинамическая вероятность (статистический вес),  $k$  – постоянная Больцмана.

$$F = U - TS$$

$F$  – свободная энергия системы равна внутренней энергии  $U$  за вычетом величины  $TS$ .  $TS$  – связанная энергия.

$$\left( P + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} RT$$

уравнение Ван-дер-Ваальса:  $M$  – масса газа,  $\mu$  – его молярная масса,  $V$  – объём, занимаемый газом,  $a$  и  $b$  – постоянные Ван-дер-Ваальса.

$$P_k = \frac{a}{27b^2}, V_k = 3b, T_k = \frac{8a}{27Rb}$$

значения критических параметров, выраженные через константы  $a$  и  $b$ .

$$\varphi = \frac{V}{V_k}, \pi = \frac{P}{P_k}, \tau = \frac{T}{T_k}$$

приведённые параметры состояния – объём, давление и температура, измеренные в единицах критических параметров.

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi^2} \right) \left( \varphi - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau$$

приведённое уравнение состояния – уравнение состояния, записанное в безразмерных переменных.

$$V = 3b\varphi, P = \frac{a\pi}{27b^2}, T = \frac{8a\tau}{27Rb}$$

для газа Ван-дер-Ваальса: выражения для объёма, давления и температуры через приведённые параметры состояния.

$\rho = \frac{m}{V}$  абсолютной влажностью  $\rho$  называют количество водяного пара в граммах, содержащегося в  $1 \text{ м}^3$  воздуха при данной температуре.

$\varphi = \frac{\rho}{\rho_H}$  относительной влажностью  $\varphi$  называют отношение абсолютной влажности к тому количеству водяного пара, которое необходимо для насыщения  $1 \text{ м}^3$  воздуха при той же температуре.

$\varphi = \frac{P}{P_H}$  относительной влажностью  $\varphi$  называют отношение парциального давления  $P$  водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению  $P_H$  насыщенного пара при той же температуре.

$\delta = \frac{F}{L}$   $\delta$  – коэффициент поверхностного натяжения равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины границы свободной поверхности жидкости.

$\delta = \frac{A}{\Delta S}$   $\delta$  – коэффициент поверхностного натяжения равен работе, необходимой для увеличения свободной поверхности жидкости при постоянной температуре на единицу.

$\Delta P = \delta \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  уравнение (формула) Лапласа:  $\Delta P$  – избыточное давление, обусловленное кривизной поверхности жидкости;  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости для данного элемента поверхности;  $\delta$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

$\Delta P = \frac{2\sigma}{r}$  избыточное давление в случае сферы:  $r$  – радиус сферы,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g r_0}$   $h$  – высота подъема жидкости в капиллярной трубке:  $\vartheta$  – краевой угол,  $r_0$  – радиус капилляра,  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

$P = P_0 \pm \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_0}{\rho}$   $P$  – давление насыщенного пара над выпуклой (знак «+») (вогнутой, «-») поверхностью:  $\rho_0$  – плотность насыщенного пара,  $\sigma$  и  $\rho$  – коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости,  $r$  – радиус кривизны вогнутого мениска в капилляре,  $P_0$  – давление у поверхности жидкости в сосуде.

$\frac{dT}{dP} = \frac{T(V_2 - V_1)}{L}$  уравнение Клапейрона-Клаузиуса:  $dT$  и  $dP$  – изменения температуры плавления и давления,  $T$  – температура плавления

(кристаллизации),  $V_1$  и  $V_2$  – молярные объемы жидкой и твердой фаз,  $L$  – молярная теплота плавления. Формула справедлива и для других фазовых переходов, например, для испарения и конденсации.

$\pi = \frac{\nu RT}{V}$  уравнение (закон) Вант-Гоффа:  $\pi$  – осмотическое давление,  $\nu$  – количество вещества,  $V$  – объем раствора,  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – температура.

$C_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V = 3R$  закон Дюлонга и Пти: атомная теплоёмкость (т.е. теплоёмкость грамм-атома) твёрдых тел есть величина постоянная, одинаковая для всех веществ и не зависящая от температуры.

$\sum q_i = \text{const}$  закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма зарядов в замкнутой системе (т.е. в системе, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной при любых процессах внутри этой системы.

$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$  закон Кулона: сила взаимодействия  $F$  между двумя неподвижными точечными зарядами прямо пропорциональна абсолютным значениям зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость изотропной непрерывной среды нахождения зарядов,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ .

$E = \frac{F}{q}$   $E$  – напряженность электростатического поля равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$   $E$  – напряженность электростатического поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него:  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды.

$E = \sum E_i$  принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей: напряженность  $E$  результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

$p = ql$   $p$  – электрический момент диполя так же, как и плечо диполя  $l$ , направлен от отрицательного заряда к положительному.

$M = pE \cdot \sin\alpha$ . момент пары сил, действующей на диполь,  $\alpha$  – угол между  $p$  и  $E$ .

$M = p \times E$ .

$W = -p \cdot E = -pE \cdot \cos\alpha$ . Потенциальная энергия диполя в электрическом поле

(без учета энергии взаимодействия зарядов, образующих диполь),  $\alpha$  – угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}$ .

$\sigma = \frac{Q}{S}$   $\sigma$  – поверхностная плотность заряда равна заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности несущего заряд тела.

$\rho = \frac{Q}{V}$   $\rho$  – объемная плотность заряда равна заряду, приходящемуся на единицу объема заряженного по объему тела.

$d\Phi = \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} = E \cdot dS \cdot \cos\alpha$   $d\Phi$  – поток вектора напряженности через площадку  $dS$ .  
 $\mathbf{E}_n$  – проекция вектора  $\mathbf{E}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$ ,  $\alpha$  – угол между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{n}$ .

$\Phi = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS$   $\Phi$  – поток вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую поверхность  $S$ .

$\oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$  теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

$E = \frac{\sigma y}{2\epsilon_0 \epsilon}$   $E$  – напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью:  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды нахождения плоскости.

$E = \frac{\sigma y}{\epsilon_0 \epsilon}$   $E$  – напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями, в пространстве между этими плоскостями.

$\oint_L \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

$W_{\Pi} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}$   $W_{\Pi}$  – потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга.

$\phi = \frac{W_{\Pi}}{q_0}$   $\phi$  – потенциал электростатического поля равен потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку.

$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2} = q(\phi_1 - \phi_2)$ .  $A_{12}$  – работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда  $q$  из точки 1 в точку 2

$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}$   $\varphi$  – потенциал поля равен работе перемещения единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$   $\varphi$  – потенциал поля точечного заряда на расстоянии  $r$  от него.

$\varphi = \sum \varphi_i$  принцип суперпозиции для потенциала: потенциал поля, создаваемого системой неподвижных точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности в данной точке.

$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}$   $\varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между двумя точками равна работе поля по перемещению единичного положительного заряда из начальной точки в конечную;  $U$  – напряжение.  
 $U = \varphi_1 - \varphi_2$

$E_1 = -\frac{d\varphi}{dl}$  связь между напряженностью электростатического поля (являющейся его силовой характеристикой) и потенциалом – энергетической характеристикой поля.  
 $E = -\text{grad}\varphi$

$P = \frac{1}{\Delta V} P_V = \frac{1}{\Delta V} \sum p_i$  поляризованность определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика.

$P = \epsilon\epsilon_0 E$  связь между векторами напряженности поля  $E$  и поляризованности  $P$  (в изотропных диэлектриках),  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость.

$\epsilon = 1 + \epsilon$  связь между диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и диэлектрической восприимчивостью  $\epsilon$

$\epsilon = \frac{E_0}{E}$  диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  показывает во сколько раз электрическое поле ослабляется диэлектриком;  $E_0$  – напряженность поля в вакууме,  $E$  – напряженность поля в диэлектрике.

$D = \epsilon\epsilon_0 E$  связь между векторами электрического смещения  $D$  и напряженностью электростатического поля  $E$  для электрически изотропной среды.

$\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$  закон преломления линий вектора электрического смещения  $D$  на границе раздела двух диэлектриков.

$\oint_S D \cdot dS = \oint_S D_n \cdot dS = \sum q_i$  теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектрике: поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

$$E = - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$$

$$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}$$

связь между напряженностью  $E$  и разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  для однородного электростатического поля:  $d$  – расстояние между точками поля, отсчитанное вдоль силовой линии (знак минус “–” в первом уравнении указывает на то, что вектор напряженности поля направлен в сторону убывания потенциала).

$$E = \frac{U}{d}$$

$E$  – напряженность однородного электрического поля в пространстве между обкладками плоского конденсатора;  $U$  – напряжение и  $d$  – расстояние между обкладками.

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$C$  – емкость уединенного проводника равна заряду, сообщенного которому проводнику изменяет его потенциал на единицу.

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}$$

$C$  – емкость конденсатора равна отношению заряда  $q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов (напряжению) между его обкладками.

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

$C$  – емкость плоского конденсатора:  $S$  – площадь каждой из обкладок,  $d$  – расстояние между обкладками,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор между пластинами конденсатора.

$$C = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R$$

$C$  – емкость шара радиуса  $R$ .

$$C = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \frac{Rr}{R - r}$$

$C$  – емкость сферического конденсатора,  $R$  и  $r$  радиусы внешней и внутренней обкладок.

$$C = \frac{2\pi \varepsilon \varepsilon_0 L}{\ln(R/r)}$$

$C$  – емкость цилиндрического конденсатора: радиусы двух коаксиальных цилиндров –  $R$  (внешнего) и  $r$  (внутреннего),  $L$  – длина цилиндров.

$$C = \frac{\pi \varepsilon \varepsilon_0 L}{\ln(d/r)}$$

$C$  – емкость двухпроводной линии (двух параллельных цилиндрических проводов с радиусами  $r$  и расстоянием между осями проводов  $d$  ( $d \gg r$ )),  $L$  – длина двухпроводной линии.

$$C = \sum C_i$$

$C$  – емкость батареи конденсаторов при их параллельном соединении,  $C_i$  – емкость отдельного конденсатора.

$$U = U_i$$

напряжения на конденсаторах при их параллельном соединении одинаковы.

$$q = \sum q_i$$

$q$  – общий заряд на батарее конденсаторов при их параллельном соединении,  $q_i$  – заряд на отдельном конденсаторе.

$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$   $C$  – емкость батареи конденсаторов при их последовательном соединении,  $C_i$  – емкость отдельного конденсатора.

$U = \sum U_i$   $U$  – общее напряжение на батарее конденсаторов при их последовательном соединении,  $U_i$  – напряжение на отдельном конденсаторе.

$q = q_i$  заряды на конденсаторах при их последовательном соединении одинаковы.

$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$   $W$  – энергия заряженного конденсатора:  $q$  – заряд,  $U$  – напряжение (разность потенциалов),  $C$  – емкость конденсатора.

$w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}$   $w$  – объемная плотность энергии электростатического поля (энергия единицы объема).

$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{y^2 S}{2\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2 S}{2}$   $F$  – сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками плоского конденсатора.

$\frac{mv_1^2}{2} + q\phi_1 = \frac{mv_2^2}{2} + q\phi_2$  закон сохранения энергии при движении заряженной частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$ :  $v_1$  и  $v_2$  – скорости частицы в точках 1 и 2,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – потенциалы в точках 1 и 2, соответственно.

$I = \frac{q}{t}$ ; сила тока  $I$  равна заряду, протекающему через поперечное сечение проводника в единицу времени.

$$I = \frac{dq}{dt} = q'_t$$

$j = \frac{I}{S}$  плотность тока  $j$  равна силе тока, протекающего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока.

$\mathbf{j} = en\mathbf{v}_{cp}$  направление вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов,  $n$  – концентрация носителей тока,  $\mathbf{v}_{cp}$  – скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике (скорость дрейфа),  $e$  – заряд носителей тока.

$I = \frac{U}{R}$  закон Ома для (однородного) участка цепи:  $I$  – сила тока,  $U$  – напряжение на участке цепи равно разности потенциалов, т.е.  $U = \phi_1 - \phi_2$ ,  $R$  – сопротивление участка цепи.

$R = \frac{\rho l}{S}$   $R$  – сопротивление однородного линейного проводника длиной  $l$  с постоянной площадью поперечного сечения  $S$ ,  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление проводника.

$\sigma = \frac{1}{\rho}$   $\sigma$  – удельная электрическая проводимость вещества,  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление.

$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$  зависимость удельного сопротивления  $\rho$  от температуры:  $\rho_0$  – удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления равен относительному изменению сопротивления при нагреве на  $1^\circ\text{C}$  ( $1\text{ K}$ ).

$\alpha = \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t}$

$R = \Sigma R_i$   $R$  – общее сопротивление цепи при последовательном соединении проводников,  $R_i$  – сопротивление  $i$ -го проводника.

$U = \Sigma U_i$   $U$  – общее напряжение в цепи последовательно соединенных проводников;  $U_i$  – напряжение на сопротивлении  $R_i$ .

$I = I_i$  сила тока в цепи последовательно соединенных сопротивлений одинакова на всех проводниках.

$\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_i}$   $R$  – общее сопротивление цепи при параллельном соединении проводников,  $R_i$  – сопротивление  $i$ -го проводника.

$U = U_i$  напряжение при параллельном соединении проводников одинаково на всех сопротивлениях

$I = \Sigma I_i$   $I$  – общая сила тока при параллельном соединении проводников;  $I_i$  – сила тока на сопротивлении  $R_i$ .

$U = \frac{A}{q}$  напряжение  $U$  равно работе электрического поля по перемещению единичного электрического заряда на данном участке цепи.

$E = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$   $E$  – электродвижущая сила (ЭДС), действующая в цепи, равна работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда.

$I = \frac{E}{R + r}$  закон Ома для замкнутой (полной) цепи: сила тока  $I$  в замкнутой цепи прямо пропорциональна ЭДС источника и обратно пропорциональна сумме внешнего  $R$  и внутреннего  $r$  сопротивлений.

$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}}{R}$  закон Ома для неоднородного участка цепи (участка цепи с источником тока):  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  – разность потенциалов на концах участка цепи,  $E_{12}$  – ЭДС источника (источников) тока, входящего в участок с сопротивлением  $R$ .  $U$  – напряжение на неоднородном участке цепи не равно разности потенциалов, т.е.  $U \neq (\varphi_1 - \varphi_2)$ .

$U = IR =$   
 $= \varphi_1 - \varphi_2 + E_{12}$



$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho}$  закон Ома в дифференциальной форме:  $\mathbf{j}$  – плотность тока,  $\sigma$  – удельная электропроводность,  $\rho$  – удельное сопротивление,  $E$  – напряженность электростатического поля.

$\sum I_k = 0$  первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$\sum I_k R_k = \sum E_i$  второе правило Кирхгофа: для любого замкнутого контура разветвленной электрической цепи алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_k$  на сопротивления  $R_k$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $E_i$  в этом контуре.

$I = \frac{nE}{nr + R}$  закон Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении  $n$  одинаковых источников тока:  $n$  – число источников тока,  $r$  – внутреннее сопротивление каждого из источников,  $E$  – ЭДС отдельного источника,  $R$  – внешнее сопротивление цепи.

$I = \frac{E}{\frac{r}{n} + R}$  закон Ома для замкнутой цепи при параллельном соединении  $n$  одинаковых источников тока.

$R_{ш} = \frac{R_A}{n-1}$  расчет сопротивления шунта  $R_{ш}$  для расширения верхнего предела измерения амперметра в  $n = \frac{I}{I_0}$  раз,  $R_A$  – сопротивление амперметра.

$R_{доб} = R_V \cdot (n-1)$  расчет добавочного сопротивления  $R_{доб}$  для расширения верхнего предела измерения вольтметра в  $n = \frac{U}{U_0}$  раз,  $R_V$  – сопротивление вольтметра.

$A = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$   $A$  – работа постоянного тока:  $I$  – сила тока и  $U$  – напряжение на участке цепи с сопротивлением  $R$ ,  $t$  – время.

$P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}$   $P$  – мощность тока.

$Q = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$  закон Джоуля-Ленца:  $Q$  – количество теплоты, выделяющейся на участке цепи с сопротивлением  $R$  за время  $t$ .

$w = \mathbf{jE} = \sigma \mathbf{E}^2$  закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:  $w$  – удельная тепловая мощность тока (количество теплоты, выделяющейся в единицу объема за единицу времени).

ницу времени в единице объема),  $\sigma$  – удельная электропроводность,  $j$  – плотность тока,  $E$  – напряженность электростатического поля.

$m = kq$ ; первый закон Фарадея для электролиза: масса вещества  $m$ , выделившаяся на электроде, пропорциональна заряду  $q$ , прошедшему через электролит,  $I$  – сила постоянного тока, протекавшего за время  $t$ ,  $k$  – электрохимический эквивалент вещества.  
 $m = kIt$

$k = \frac{1}{F} \frac{A}{n}$  второй закон Фарадея: электрохимический эквивалент  $k$  пропорционален химическому эквиваленту  $\frac{A}{n}$ ,  $A$  – атомная (молярная) масса данного химического элемента,  $n$  – его валентность,  $F$  – постоянная Фарадея.

$v = b_{\pm}E$   $v$  – скорость установившегося направленного движения ионов,  $E$  – напряженность поля,  $b_{\pm}$  – подвижность ионов.

$j = nq\alpha(b_+ + b_-)$  закон Ома для электролитов:  $j$  – плотность тока,  $q$  – заряд ионов,  $n$  – концентрация молекул растворенного вещества в электролите,  $\alpha$  – коэффициент диссоциации.

$j_H = Nqd$   $j_H$  – плотность тока насыщения в газе:  $N$  – число пар ионов, возникающих в единице объема в единицу времени,  $d$  – расстояние между электродами,  $q$  – заряд ионов (в частном случае  $q = e =$  элементарному заряду).

$\eta = \frac{U}{E} = \frac{R}{R + r}$   $\eta$  – коэффициент полезного действия (КПД) источника тока:  $R$  – внешнее сопротивление,  $r$  – внутреннее сопротивление,  $E$  – ЭДС источника,  $U$  – напряжение на  $R$ .

$P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$   $P_{\max}$  – максимальная полезная мощность источника тока:  $E$  – ЭДС источника,  $r$  – внутреннее сопротивление источника. При этом внешнее сопротивление  $R = r$ .

$r^2 = R_1 \cdot R_2$  соотношение между внутренним сопротивлением  $r$  источника и внешними сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , когда мощности, выделяемые на  $R_1$  и  $R_2$ , одинаковы ( $R_1$  и  $R_2$  подключаются поочередно).

$\eta = 1 - \frac{P \cdot R}{U^2}$   $\eta$  – КПД линии электропередачи:  $P$  – мощность, развиваемая источником при напряжении  $U$  на зажимах источника,  $R$  – сопротивление линии передачи (сопротивление проводов).

$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{4 \cdot \pi \cdot r^3}$  закон Био-Савара-Лапласа:  $d\mathbf{B}$  – магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины  $d\mathbf{l}$  проводника с током  $I$

$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d\mathbf{l} \cdot \sin \alpha}{4 \cdot \rho \cdot r^2}$  в вакууме,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор от  $d\mathbf{l}$  в точку наблюдения,  $\alpha$  – угол между  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ ,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3}$   $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля свободно движущегося в вакууме заряда  $q$  с нерелятивистской скоростью  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения;

$B = \frac{\mu_0 q v \cdot \sin \alpha}{4\pi r^2}$   $\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ .

$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$   $B$  – индукция магнитного поля в центре кругового проводника, находящегося в вакууме:  $R$  – радиус витка,  $I$  – сила тока в проводнике.

$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi b}$   $B$  – индукция магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током  $I$  в вакууме,  $b$  – расстояние от оси проводника до точки наблюдения.

$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$   $B$  – индукция магнитного поля внутри (длинного) соленоида, находящегося в вакууме:  $l$  – длина соленоида,  $N$  – число витков.

$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$   $B$  – индукция магнитного поля внутри тороида, находящегося в вакууме,  $N$  – число витков,  $r$  – расстояние от оси до средней линии тороида,  $I$  – сила тока,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i$  принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей:  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция результирующего поля;  $\mathbf{B}_i$  – магнитные индукции складываемых полей.

$F_A = I[\Delta\mathbf{l}, \mathbf{B}]$  закон Ампера:  $F_A$  – сила Ампера, действующая на участок проводника длины  $\Delta l$  с током  $I$ , помещенный в магнитное поле с индукцией  $B$ ,  $\alpha$  – угол между направлением отрезка  $\Delta l$  проводника с током и  $\mathbf{B}$ , направление  $\Delta l$  совпадает с направлением тока.

$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{R}$  сила взаимодействия двух прямых прямолинейных бесконечных параллельных проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$ :  $R$  – расстояние между проводниками;  $l$  – длина одного из проводников, на которую действует сила  $F$ ;  $\mu$  – магнитная проницаемость окружающей среды;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

$\mathbf{P}_m = NIS\mathbf{n}$   $\mathbf{P}_m$  – магнитный момент плоского контура с током  $I$  и площадью  $S$ :  
 $P_m = NIS$   $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности рамки,  $N$  – число витков рамки.

$\mathbf{M} = [\mathbf{P}_m, \mathbf{B}]$   
 $M = P_m \cdot B \cdot \sin\alpha$   $\mathbf{M}$  – механический момент сил, действующий на плоский контур с током, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{P}_m$  – магнитный момент рамки с током,  $\alpha$  – угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к плоскости контура и вектором  $\mathbf{B}$ .

$\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$   
 $F_L = qvB \cdot \sin\alpha$  сила Лоренца (ее магнитная составляющая):  $\mathbf{F}_L$  – сила, действующая на электрический заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  со скоростью  $\mathbf{v}$ ,  $\alpha$  – угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .

$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ ;  
 $\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_{эл} + \mathbf{F}_{магн}$  общее выражение для силы Лоренца  $\mathbf{F}_L$  при наличии в пространстве электрического (с напряженностью  $\mathbf{E}$ ) и магнитного (с индукцией  $\mathbf{B}$ ) полей.  $\mathbf{F}_L$  – складывается из электрической  $\mathbf{F}_{эл}$  и магнитной  $\mathbf{F}_{магн}$  составляющих (слагаемых).

$R = \frac{mv}{qB}$ ;  
 $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$   $R$  – радиус окружности и  $T$  – период обращения заряженной частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$ , влетевшей со скоростью  $v$  в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  нормально к линиям индукции.

$R = \frac{mv \sin\alpha}{qB}$   
 $T = \frac{2\pi R}{v \sin\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}$   
 $h = vT \cos\alpha = \frac{2\pi m}{qB} v \cos\alpha$   $R$  – радиус окружности,  $T$  – период обращения и  $h$  – шаг спирали, по которой движется заряженная частица с зарядом  $q$  и массой  $m$ , влетевшая в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  со скоростью  $v$ , составляющей угол  $\alpha$  с линиями индукции, т.е. с вектором  $\mathbf{B}$ .

$v = \frac{qB}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$   $v = v(R, h)$  – выражение скорости  $v$  заряженной частицы через радиус окружности  $R$  и шаг спирали  $h$ .

$\Phi = BS \cdot \cos\alpha$   
 $\Phi = B_n \cdot S$   $\Phi$  – магнитный поток (поток магнитной индукции) через площадку  $S$ :  $\alpha$  – угол между вектором  $\mathbf{B}$  и нормалью  $\mathbf{n}$  к площадке,  $B_n = B \cdot \cos\alpha$  – проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление  $\mathbf{n}$ .

$A = I \cdot \Delta\Phi$   
 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$  работа по перемещению проводника с током в магнитном поле теорема Гаусса для магнитного поля: поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю.

$A_{12} = I \int_1^2 d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1)$   $A_{12}$  – работа по перемещению проводника с током (при  $I = \text{const}$ ) в магнитном поле;  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – магнитные потоки в начальном и конечном положениях сквозь контур, прочерченный проводником.

$\mathbf{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  закон Фарадея (основной закон электромагнитной индукции): ЭДС индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi'_t \quad \text{сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.}$$

$$E = -N\frac{d\Phi}{dt} = E - \text{ЭДС индукции в рамке с числом витков } N.$$

$$-N\Phi'_t$$

$$E = Blv = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{разность потенциалов (ЭДС индукции), возникающая на концах прямолинейного отрезка проводника длиной } l \text{ при его движении в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной линиям индукции } \mathbf{B}, \text{ со скоростью } v, \text{ перпендикулярной проводнику.}$$

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} \quad q - \text{величина заряда, протекающего в замкнутом контуре с сопротивлением } R \text{ при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром, на } \Delta\Phi.$$

$$\Phi = L \cdot I \quad \Phi - \text{магнитный поток, создаваемый током } I \text{ в контуре с индуктивностью (коэффициентом самоиндукции) } L.$$

$$I = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad \text{мгновенное значение силы тока в цепи, содержащей ЭДС } E, \text{ сопротивление } R \text{ и индуктивность } L, \text{ через время } t \text{ после замыкания.}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{мгновенное значение силы тока в цепи, содержащей ЭДС } E, \text{ сопротивление } R \text{ и индуктивность } L, \text{ через время } t \text{ после размыкания: } I_0 - \text{сила тока в цепи при } t = 0, t - \text{время с момента размыкания цепи.}$$

$$E_c = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad E_c - \text{ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения силы тока в контуре, } L - \text{индуктивность контура.}$$

$$E_c = -L \frac{dI}{dt} =$$

$$-LI'_t$$

$$\mu = \frac{B}{B_0} \quad \mu - \text{магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз индукция результирующего поля в магнетике больше индукции внешнего поля } B_0 \text{ (поля, создаваемого намагничивающим током в вакууме); для вакуума } \mu = 1.$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{B} - \text{магнитная индукция в случае однородной изотропной среды, } \mathbf{H} - \text{напряженность магнитного поля, } \mu_0 - \text{магнитная постоянная, } \mu - \text{магнитная проницаемость среды.}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{p}_a \quad \mathbf{J} - \text{намагниченность равна магнитному моменту молекул единицы объема магнетика.}$$

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} \quad \text{намагниченность } \mathbf{J} \text{ прямо пропорциональна напряженности } \mathbf{H}$$

поля, вызывающего намагничивание,  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества.

$\mu = 1 + \chi$  связь между магнитной проницаемостью  $\mu$  и магнитной восприимчивостью  $\chi$ .

$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$  закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ ): циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$  закон преломления линий вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  на границе раздела двух магнетиков.

$L = \mu \mu_0 N^2 \frac{S}{l}$   $L$  – индуктивность длинного соленоида,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $N$  – число витков и  $l$  – длина соленоида,  $S$  – его площадь поперечного сечения,  $n=N/l$  – число витков на единицу длины,  $V=S \cdot l$  – объем соленоида.  
 $L = \mu_0 n^2 V$

$W = \frac{1}{2} LI^2$   $W$  – энергия магнитного поля, создаваемого током  $I$  в замкнутом контуре с индуктивностью  $L$ .

$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2}$   $\omega$  – объемная плотность энергии однородного магнитного поля (энергия магнитного поля в единице объема).

$k = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}$   $k$  – коэффициент трансформации трансформатора,  $N_2$  и  $N_1$  – число витков во вторичной и первичной обмотках,  $U_2$  и  $U_1$  – напряжения на обмотках в режиме холостого хода.

$\mathbf{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$   $\mathbf{J}_{\text{см}}$  – плотность тока смещения

$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ ;  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \cdot dV$ ; полная система уравнений Максвелла в интегральной форме. Для изотропных сред, не содержащих сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, в случае достаточно слабых электромагнитных полей, сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени уравнения Максвелла дополняются уравнениями:  $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$ ;  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .

$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$ ;  $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме (характеризующих поле в каждой точке пространства).

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  кинематическое уравнение гармонических колебаний:  $x$  – смещение колеблющейся точки из положения равновесия,  $A$  – амплитуда,  $\omega_0$  – круговая (циклическая) частота,  $\alpha$  – начальная фаза,  $t$  – время,  $(\omega_0 t + \alpha)$  – фаза колебаний.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0;$$

дифференциальное уравнение гармонических колебаний;  $\omega_0$  – циклическая частота.

$$x''_{tt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$T = \frac{t}{N} = \nu^{-1}; \nu = \frac{N}{t}$$

$T$  – период колебаний равен времени совершения одного колебания;  $\nu$  – частота колебаний;  $N$  – число полных колебаний за время  $t$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}; \nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$T$  и  $\nu$  – период и частота гармонических колебаний,  $\omega_0$  – циклическая частота.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x'_t = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$v$  – скорость колеблющейся точки.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'_t = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$$

$a$  – ускорение колеблющейся точки.

$$F = -m\omega_0^2 x$$

$F$  – упругая (квазиупругая) сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой  $m$ ,  $x$  – смещение колеблющейся точки из положения равновесия.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$T$  – период колебаний математического маятника,  $l$  – длина маятника,  $g$  – ускорение силы тяжести.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$T$  – период колебаний пружинного маятника:  $m$  – масса груза, подвешенного на пружине жесткостью  $k$ .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL_\phi}}$$

период колебаний физического маятника:  $m$  и  $J$  – масса и момент инерции маятника,  $L_\phi$  – расстояние от точки подвеса до центра масс.

$$T = 2\ell \sqrt{\frac{m}{F}}$$

$T$  – период колебаний однородной струны;  $\ell$  – длина струны.  
 $F$  – сила натяжения струны,  $m$  – масса единицы длины струны.

$$F = ma = mx'', \quad F = -kx;$$

$$mx'' = -kx; \quad x'' + \frac{k}{m}x = 0;$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

второй закон Ньютона для гармонических колебаний пружинного маятника:  $m$  – масса груза, подвешенного на пружине с жесткостью  $k$ ;  $F = -k \cdot x$  – сила упругости;  $\omega_0$  – циклическая частота.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

амплитуда и фаза сложного колебания при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одной и той же частоты:  $x = x_1 + x_2$ ;

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

частота биений при сложении гармонических колебаний с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ .

$$v = |v_1 - v_2|$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Амплитуда вынужденных колебаний при действии вынуждающей силы  $F = F_0 \cos \omega t$ :  $f_0 = F_0/m$ ,  $\omega_0$  – частота собственных колебаний при отсутствии затухания и вынуждающей силы.

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0,$$

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение.  $\omega_0$  – собственная частота колебаний в отсутствии потерь энергии в системе,  $\beta$  – коэффициент затухания,  $T$  – условный период затухающих колебаний.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\beta T};$$

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\Phi} = \frac{1}{N_e};$$

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

$$Q = \frac{p}{l} = \pi N_e.$$

$\lambda$  – логарифмический декремент затухания равен натуральному логарифму от декремента затухания,  $N_e$  – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

При слабом затухании добротность  $Q$  пропорциональна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии  $\Delta E$  за один период колебаний  $T$ .

$$W_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания.



$W_{\Pi} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$  потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы  $F$ .

$W = W_K + W_{\Pi} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$  полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания.

$v = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda}{T}$  связь между скоростью волны  $v$ , длиной волны  $\lambda$ , частотой  $\nu$ , периодом  $T$ ;

$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$   $V$  – скорость распространения звуковых (акустических) волн в упругой среде,  $E$  – модуль Юнга среды и  $\rho$  – ее плотность.

$\nu' = \frac{c \pm v}{c \mp v} \nu$  эффект Доплера:  $\nu'$  – частота, воспринимаемая наблюдателем,  $c$  – скорость распространения звука,  $v$  – скорость источника звука,  $\nu$  – частота звука, посылаемого источником. Верхние знаки берутся при сближении источника и наблюдателя, нижние – при удалении.

$x(r,t) = A \cos \omega_0 \left( t - \frac{r}{V} \right) = A \cos(\omega_0 t - kr)$ ; уравнение плоской прямой (бегущей) волны, распространяющейся в среде без поглощения в сторону положительной полуоси  $r$ ,  $k$  – волновое число.  
 $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi \omega_0}{v}$

$q'' + \frac{1}{LC} q = 0$ ; дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда  $q$  в контуре;  $L$  – индуктивность и  $C$  – емкость контура.  
 $q'' + \omega_0^2 q = 0$

$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ ;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ; уравнения колебаний заряда  $q(t)$  и тока  $I(t)$  в  $LC$  – контуре;  $\omega_0$  – циклическая частота;  $q_0, I_0, U_0$  – амплитудные значения заряда, силы тока и напряжения.  
 $I = \frac{dq}{dt} = q'_t = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$

$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$ ;  $I_0 = q_0 \omega_0$ ;

$q_0 = CU_0$ ;  $\frac{1}{2} CU_0^2 = \frac{1}{2} LI_0^2$ ; связь между амплитудными значениями силы тока и напряжения в контуре.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad T - \text{период колебаний электрического контура (формула Томсона)}.$$

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = 0, \quad \text{дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в RLC-контуре: } \beta - \text{коэффициент затухания, } \omega_0 - \text{собственная частота контура.}$$

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{уравнение свободных затухающих колебаний (при } \beta < \omega_0), q_0 \text{ и } \alpha - \text{постоянные, определяемые из начальных условий, } A = q_0 e^{-\beta t} - \text{амплитуда затухающих колебаний, } T - \text{условный период затухающих колебаний.}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\lambda = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad \lambda - \text{логарифмический декремент затухания, } N_e - \text{число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в } e \text{ раз, } \tau - \text{время релаксации.}$$

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{p}{\Delta W} = \pi N_e \quad Q - \text{добротность пропорциональна отношению энергии, запасенной в контуре, к ее изменению } \Delta W \text{ за период } T.$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{выражения для добротности } Q \text{ и логарифмического декремента затухания } \lambda \text{ при малом затухании } (\beta \ll \omega_0).$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \quad \text{полная электромагнитная энергия LC - контура равна сумме энергий электрического и магнитного полей. Она также равна максимальной энергии электрического или магнитного полей.}$$

$$= \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

$$\lambda_0 = cT = \frac{c}{\nu_0}; \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}; \quad \text{связь между скоростью распространения электромагнитной волны в вакууме } c \text{ (скоростью света в вакууме), длиной волны } \lambda_0, \text{ частотой } \nu_0, \text{ периодом } T.$$

$$\Phi = NBS \cos \alpha = \quad \Phi - \text{магнитный поток через контур площадью } S \text{ и числом витков } N: \omega - \text{циклическая частота вращения рамки; } \alpha - \text{угол поворота рамки (угол между индукцией } \mathbf{B} \text{ и нормалью } \mathbf{n}) \text{ в момент времени } t; N - \text{число витков.}$$

$$= NBS \cos \omega t$$

$$E_i = -\Phi'_t = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t \quad E_i - \text{ЭДС индукции, возникающая при вращении рамки.}$$

$E_{\max} = NBS\omega$  значение максимальной (амплитудной) ЭДС во вращающейся рамке (при  $\sin\omega t = 1$ ).

$X_L = \omega L$   $X_L$  – (реактивное) индуктивное сопротивление.

$X_C = \frac{1}{\omega C}$   $X_C$  – (реактивное) емкостное сопротивление.

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$   $Z$  – полное сопротивление (импеданс) цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением  $R$ , катушку индуктивностью  $L$ , конденсатор емкостью  $C$ . На концы цепи подается переменное напряжение  $U = U_0 \cos\omega t$ .

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$  закон Ома для цепи переменного тока:  $I_0$  и  $U_0$  – амплитудные значения силы тока и напряжения в цепи переменного тока,  $Z$  – импеданс.

$U_{0R} = I_0 R$   $U_{0R}, U_{0L}, U_{0C}$  – амплитудные значения напряжений на активном сопротивлении, катушке индуктивности и конденсаторе, соответственно, в цепи переменного тока.

$U_R = I_0 R \cdot \sin\omega t$  фазовые соотношения между напряжениями на активном сопротивлении  $U_R$ , катушке индуктивности  $U_L$  и конденсаторе  $U_C$ , соответственно, в цепи переменного тока.

$$U_C = I_0 X_C \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_L = I_0 X_L \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$   $\varphi$  – сдвиг фаз между напряжением и силой тока в цепи, содержащей последовательно включенные  $R, L, C$ .

$(U_L)_{\text{рез}} = (U_C)_{\text{рез}} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = U_0 Q$ , в случае резонанса напряжения на конденсаторе  $U_C$  и катушке индуктивности  $U_L$  противоположны по фазе и равны по амплитуде,  $Q$  – добротность колебательного контура.

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$P = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot \cos\varphi = U_3 \cdot I_3 \cdot \cos\varphi$ ;  $P$  – средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока:  $\cos\varphi$  – коэффициент мощности, ( $\varphi$  – сдвиг фаз между  $U$  и  $I$ ),  $U_0$  и  $I_0$  – амплитудные значения,  $U_3$  и  $I_3$  – действующие (эффективные) значения напряжения и силы переменного тока.

$$U_3 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}; I_3 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \cos\varphi = \frac{R}{Z};$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \quad c - \text{скорость света в вакууме (электродинамическая постоянная),}$$

$\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \quad v - \text{скорость распространения света (электромагнитной волны) в среде: } \varepsilon \text{ и } \mu - \text{диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} \quad \text{закон преломления света: отношение синуса угла падения } \alpha \text{ к синусу угла преломления } \beta \text{ есть величина постоянная для данных сред.}$$

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad n_{21} - \text{относительный показатель преломления второй среды относительно первой равен отношению их абсолютных показателей преломления.}$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = n; \quad n = \frac{c}{v} \quad \text{соотношение между длинами волн света (электромагнитной волны) в вакууме - } \lambda_0 \text{ и в среде - } \lambda; n - \text{абсолютный показатель преломления среды; } c \text{ и } v - \text{скорости света в вакууме и среде.}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{формула, связывающая показатель преломления } n \text{ с диэлектрической проницаемостью } \varepsilon.$$

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad \alpha_{\text{пр}} - \text{предельный угол полного внутреннего отражения, угол преломления } \beta = 90^\circ (\sin \beta = 1), \quad n_2 < n_1.$$

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad \text{формула сферического зеркала: } d \text{ и } f - \text{расстояния от (полюса) зеркала до предмета и изображения, соответственно; } F - \text{фокусное расстояние зеркала; } R - \text{радиус кривизны зеркала.}$$

$$\Gamma = \frac{y'}{y} = \left| \frac{f}{d} \right| \quad \Gamma - \text{линейное увеличение, даваемое сферическим зеркалом; } y' \text{ и } y - \text{линейные размеры изображения и предмета}$$

$$D = \frac{1}{F} = (n_{21} - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{формула двояковыпуклой линзы: } n_{21} - \text{относительный показатель преломления линзы по отношению к окружающей среде, } R_1 \text{ и } R_2 - \text{радиусы кривизны поверхностей линзы, } D - \text{оптическая сила и } F - \text{фокусное расстояние линзы.}$$

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad \text{формула тонкой линзы: } d \text{ и } f - \text{расстояния от линзы до предмета и изображения, соответственно.}$$

$\Gamma = \frac{y'}{y} = \frac{f}{d}$   $\Gamma$  – увеличение, даваемое линзой:  $y'$  и  $y$  – размеры изображения и предмета,  $d$  и  $f$  – расстояния от линзы до предмета и изображения.

$\Gamma = \frac{d_0}{F}$   $\Gamma$  – увеличение лупы:  $d_0=25$  см – расстояние наилучшего зрения для нормального глаза,  $F$  – фокусное расстояние лупы.

$L=n \cdot l$   $L$  – оптическая длина пути:  $l$  – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления  $n$ .

$k(l_2 - l_1) = 2\pi m$ ; условие интерференционных максимумов:  $(l_2 - l_1)$  – разность хода двух когерентных волн, возбуждающих колебания в данной точке;  $\lambda$  – длина волны;  $k$  – волновое число;  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$   
 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$k(l_2 - l_1) = 2\pi \left( m + \frac{1}{2} \right)$  условие интерференционных минимумов:  $k$  – волновое число;  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$  опыт (метод) Юнга:  $\Delta x$  – ширина интерференционной полосы – расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами);  $d$  – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии  $L$  от экрана, параллельного линии, соединяющей источники;  $L \gg d$ .

$r_m = \sqrt{m\lambda R}$   $r_m$  – радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых – в проходящем свете);  $m=1,2,3\dots$  – номера колец,  $R$  – радиус кривизны линзы,  $\lambda$  – длина волны света.

$r_m = \sqrt{\left( m - \frac{1}{2} \right) \lambda R}$   $r_m$  – радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных – в проходящем свете),  $m = 1,2,3\dots$

$n \cdot d = \frac{\lambda}{4}$  просветление оптики (условия гашения интерферирующих лучей в отраженном свете):  $d$  – толщина пленки, при которой в результате интерференции наблюдается гашение отраженных лучей;  $n$  – показатель преломления пленки;  $\lambda$  – длина волны света, для которой выполняется условие гашения;  $n_c$  – показатель преломления стекла (материала линзы);  $m=0, 1, 2, \dots$   
 $n \cdot d = \left( m + \frac{1}{4} \right) \lambda$

$d \sin \varphi = m \lambda$  условие главных максимумов дифракционной решетки:  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – порядок максимума;  $d$  – период решетки;  $\lambda$  – длина волны света;  $\varphi$  – угол дифракции.

$d = \frac{l}{N}$   $d$  – период дифракционной решетки:  $N$  – число щелей (штрихов), проходящих на единицу длины решетки (длиной  $l$ ).

$m_{\max} = \frac{d}{\lambda}$   $m_{\max}$  – максимальный порядок дифракционных максимумов дифракционной решетки (берется целая часть от полученного значения).

$n_{\max} = 2m_{\max} + 1$   $n_{\max}$  – общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой.

$I = I_0 \cos^2 \alpha$  закон Малюса:  $I_0$  и  $I$  – интенсивности света, падающего на второй поляризатор (анализатор) и вышедшего из него;  $\alpha$  – угол между главными плоскостями двух скрещенных поляризаторов (поляризатора и анализатора).

$\operatorname{tg} \varphi_{\text{Бр}} = n_{21}$  закон Брюстера: тангенс угла (Брюстера) падения равен относительному показателю преломления  $n_{21}$  второй среды относительно первой; при этом отраженный луч является плоскополяризованным (линейнополяризованным), а отраженный и преломленный лучи будут взаимно перпендикулярными.

$\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda_0}$   $\varepsilon$  – энергия фотона:  $\nu$  – частота и  $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме,  $h$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света в вакууме.

$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_0}$   $p$  – импульс фотона.

$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$   $m$  – масса фотона,  $c$  – скорость света в вакууме.

$\varepsilon = p \cdot c$  соотношение между энергией  $\varepsilon$  и импульсом  $p$  фотона.

$h\nu = A + \frac{1}{2} m v_{\max}^2$  уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:  $h\nu$  – энергия падающего фотона расходуется на совершение электронном работы выхода  $A$  из металла и на сообщение ему кинетической энергии  $\frac{1}{2} m v_{\max}^2$ ,  $m$  – масса электрона,  $\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = eU_3$ ,

$eU_3 = h(\nu - \nu_0)$   $U_3$  – задерживающее напряжение,  $e$  – элементарный заряд,  $\lambda_0$  – граничная длина волны (красная граница фотоэффекта),  $h$  – постоянная Планка.

$A = h\nu_0$

$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$

$P = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = \omega (1 + \rho)$   $P$  – давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность:  $E_e = N h \nu$  – облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени);  $\rho$  – коэффициент отражения;  $\omega$  – объемная плотность энергии излучения.

$\Delta \lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$  эффект Комптона – изменение длины волны электромагнитного излучения при рассеянии фотонов на свободных электронах с массой покоя  $m_0$ ;  $\vartheta$  – угол рассеяния фотона,  $\Delta \lambda$  – изменение длины волны рассеянного фотона,  $\lambda_c$  – комптоновская длина волны;  $c$  – скорость света в вакууме,  $h$  – постоянная Планка.

$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,426 \text{ пм}$

$x = x' + vt$ ; преобразования координат и времени Галилея для случая, когда  
 $y = y'$ ; система координат  $K'$  движется со скоростью  $v$  вдоль положительного направления оси  $x$  инерциальной системы  $K$  (в начальный момент времени начала координат совпадают).  
 $z = z'$ ;  
 $t = t'$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$  правило сложения скоростей в классической механике:  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  скорости материальной точки относительно систем координат  $K$  и  $K'$ ,  $\mathbf{u}$  – скорость системы  $K'$  относительно  $K$ .

$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$  ускорения точки в системах координат  $K$  и  $K'$ , движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, одинаковы.

$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ,  $y' = y$ , преобразования Лоренца для случая, когда система отсчета  $K'$  движется относительно системы  $K$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $Ox$ .

$$z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$ ,  $u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$  релятивистский закон сложения скоростей:  $v$  – скорость системы координат  $K'$  относительно  $K$ ;  $u$  и  $u'$  – скорость точки относительно систем  $K$  и  $K'$ , соответственно;  $c$  – скорость света в вакууме.

$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  длина тела в различных системах отсчета:  $l_0$  – длина тела, покоящегося относительно системы  $K$ ,  $l$  – длина тела, движущегося относительно  $K'$ ,  $v$  – скорость движения тела относительно  $K'$ .

Линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

длительность событий в различных системах отсчета:  $\tau_0 < \tau$ , т. е. длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна. Событие длительностью  $\tau_0$  происходит в некоторой точке, покоящейся относительно системы  $K$ , а  $K'$  движется со скоростью  $v$  относительно  $K$ ;  $\tau$  – длительность события в  $K'$ ;  $c$  – скорость света в вакууме.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$m$  – релятивистская масса,  $m_0$  – масса покоя частицы,  $v$  – скорость частицы,  $c$  – скорость света в вакууме.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E \cdot \mathbf{v}}{c^2}$$

$\mathbf{p}$  – релятивистский импульс:  $m$  – релятивистская масса,  $m_0$  – масса покоя частицы,  $\mathbf{v}$  – скорость частицы,  $E$  – полная энергия частицы.

$$E_0 = m_0c^2 \quad E_0 \text{ – энергия покоя частицы.}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad E \text{ – полная энергия частицы.}$$

$$E_{\text{кин}} = E - E_0 = c^2 \cdot (m - m_0) \quad E_{\text{кин}} \text{ – кинетическая энергия релятивистской частицы.}$$

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2c^4 = && \text{релятивистское соотношение между полной энергией } E \text{ и} \\ &= E_0^2 + p^2c^2 = && \text{импульсом } p \text{ частицы.} \\ &= m_0^2c^4 + p^2c^2 \end{aligned}$$

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad \text{закон взаимосвязи массы и энергии: } \Delta E \text{ – изменение полной энергии тела, } \Delta m \text{ – изменение массы, } c \text{ – скорость света в вакууме.}$$

$$\begin{aligned} L_n &= m_e v_n r_n = && \text{первый постулат Бора: в стационарном состоянии атома электрон,} \\ &= n \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar && \text{двигаясь по круговой орбите, имеет дискретные значения} \\ &&& \text{момента импульса } L_n; m_e \text{ – масса электрона; } v_n \text{ – его скорость на} \\ &&& \text{n-ой орбите радиуса } r_n; h \text{ – постоянная Планка; } n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$



$h\nu_{mn}=E_n - E_m$  второй постулат Бора: при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) фотон с энергией  $h\nu_{mn}$ , равной разности энергий соответствующих стационарных состояний  $E_n$  и  $E_m$ .

$\nu_{mn} = \frac{c}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  частота света, излучаемого атомом водорода при переходе с  $m$ -ой орбиты на  $n$ -ую;  $R$  – постоянная Ридберга;  $\lambda$  – длина волны линии спектра;

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$  уравнение движения электрона в атоме водорода (классическая теория атома водорода по Бору).

$E_n = -13,6 \frac{1}{n^2}$  (эВ) энергия электрона на  $n$ -ой стационарной орбите в атоме водорода ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

$r_n = r_1 \cdot n^2$  радиус орбиты атома водорода на  $n$ -ой стационарной орбите; первый Боровский радиус  $r_1 = 0,528 \cdot 10^{-10}$  м.

$\lambda = \frac{h}{p}$   $\lambda$  – дебройлевская длина волны частицы импульсом  $p$ ,  $h$  – постоянная Планка. Соотношение де-Бройля.

$\Delta m = [Z m_p + (A - Z) m_n] - m_{\text{я}}$   $\Delta m$  – дефект массы ядра:  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  – соответственно массы протона, нейтрона и ядра;  $m_{\text{H}} = m_p + m_e$  – масса атома водорода  ${}^1_1\text{H}^1$ ;  $m_e$  – масса электрона;  $m$  – масса атома;  $A$  – массовое число (число нуклонов) равно сумме числа протонов  $Z$  и числа нейтронов  $N$ .

$\Delta m = [Z m_{\text{H}} + (A - Z) m_n] - m$

$A = Z + N$

$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$   $E_{\text{св}}$  – энергия связи нуклонов в ядре,  $\Delta m$  – дефект массы,  $c$  – скорость света в вакууме.

$\epsilon_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}$   $\epsilon_{\text{св}}$  – удельная энергия связи – энергия связи, приходящаяся на один нуклон.

$Q = c^2 (\sum m_i - \sum m_j)$  изменение энергии при ядерной реакции;  $\sum m_i$  – сумма масс частиц до реакции;  $\sum m_j$  – сумма масс частиц после реакции; при  $\sum m_i > \sum m_j$  – реакция идет с выделением энергии, а при  $\sum m_i < \sum m_j$  – реакция идет с поглощением энергии,  $c$  – скорость света в вакууме.

$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$   $dN$  – число ядер, распавшихся за промежуток времени от  $t$  до

$(\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t)$   $t + dt$ ,  $N$  – число нераспавшихся ядер к моменту времени  $t$ ,  $\lambda$  – постоянная распада.

$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$   $T$  – период полураспада – время, за которое исходное число радиоактивных ядер уменьшается в 2 раза.

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  закон радиоактивного распада:  $N_0$  – начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени  $t = 0$ );  $N$  – число нераспавшихся ядер к моменту времени  $t$ ;  $T$  – период полураспада;  $\lambda$  – постоянная распада – равна доле ядер, распадающихся в единицу времени, и имеет смысл вероятности распада ядра за 1 с.  
 $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$

$\Delta N = N_0 - N$   $\Delta N$  – число ядер, распавшихся за время  $t$ .

$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} = \frac{T}{0,693}$   $\tau$  – среднее время жизни радиоактивного ядра:  $\lambda$  – постоянная распада,  $T$  – период полураспада.

$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = |N'_t| = \lambda \cdot N$   $A$  – активность ядра (нуклида) равна числу распадов, происходящих за единицу времени.

${}^A X_Z \rightarrow {}^{A-4} Y_{Z-2} + {}^4 \text{He}_2$  правило смещения для  $\alpha$  – распада

${}^A X_Z \rightarrow {}^A Y_{Z+1} + {}^0 e_{-1}$  правило смещения для  $\beta^-$  – распада

${}^A X_Z \rightarrow {}^A Y_{Z-1} + {}^0 e_{+1}$  правило смещения для  $\beta^+$  – распада

$X + a \rightarrow Y + b$  символическая запись ядерной реакции

$X(a,b)Y$

## Приложение Е (справочное)

**Таблица Е.1 - Астрономические величины**

Физические параметры	Солнце	Земля	Луна
Масса, кг	$1,97 \cdot 10^{30}$	$5,96 \cdot 10^{24}$	$7,33 \cdot 10^{22}$
Радиус, м	$6,95 \cdot 10^8$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,74 \cdot 10^6$
Средняя плотность, кг/м <sup>3</sup>	1 400	5 518	3 350
Среднее расстояние от Земли, км	$1,496 \cdot 10^8$	-	384 440
Период обращения вокруг оси, сутки	25,4	1,00	27,3

Планета Солнечной системы	Среднее расстояние от Солнца, 10 <sup>6</sup> км	Период обращения вокруг Солнца, в годах	Масса в единицах массы Земли
Меркурий	57,87	0,241	0,056
Венера	108,14	0,615	0,817
Земля	149,50	1,000	1,000
Марс	227,79	1,881	0,108
Юпитер	777,8	11,862	318,35
Сатурн	1426,1	29,458	95,22
Уран	2867,7	84,013	14,58
Нептун	4494	164,79	17,26

**Таблица Е.2 - Плотность вещества (кг/м<sup>3</sup>)**

Твердое вещество			
Алмаз	3 500	Медь	8 900
Алюминий	2 700	Молибден	10 200
Барий	3500	Натрий	970
Бериллий	1 840	Никель	8 900
Ванадий	6 020	Олово	7 400
Висмут	9 800	Пробка	200
Вольфрам	19 100	Платина	21 500
Графит	1 600	Свинец	11 300
Золото	19 300	Серебро	10 500
Кадмий	8 650	Сталь (железо)	7 800
Калий	870	Стекло	2 400
Кобальт	8 900	Титан	4 500
Каменная соль	2 200	Уран	19 000
Латунь	8 500	Фарфор	2 300
Лёд	900	Цезий	1 900

Литий	530	Цинк	7 000
Жидкости			
Бензол	880	Нефть	900
Бензин	700	Ртуть	13 600
Вода	1 000	Спирт	790
Глицерин	1 260	Соленая вода	1 030
Керосин	800	Тяжелая вода	1 100
Касторовое масло	900	Эфир	720
Сероуглерод	1 260		
Газы (при нормальных условиях)			
Азот	1,25	Кислород	1,43
Аммиак	0,77	Метан	0,72
Водород	0,09	Углекислый газ	1,98
Воздух	1,293	Хлор	3,21
Гелий	0,18		

**Таблица Е.3 - Плотность воды при различных температурах**

Температура, °С	20	30	40	50	60	70	80
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	998	996	992	988	983	978	972

**Таблица Е.4 - Упругие постоянные. Предел прочности**

Материал	Модуль Юнга Е, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона $\mu$	Предел прочности на разрыв $\sigma_{пч}$ , ГПа	Сжимаемость $\beta$ , ГПа <sup>-1</sup>
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	-	-	-	-	0,49

**Таблица Е.5 - Коэффициенты теплового расширения (К<sup>-1</sup>)**

Линейное расширение			
Алюминий	$2,4 \cdot 10^{-5}$	Медь	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Сталь (железо)	$1,2 \cdot 10^{-5}$	Стекло	$1 \cdot 10^{-5}$
Латунь	$1,9 \cdot 10^{-5}$	Цинк	$2,9 \cdot 10^{-5}$
Бронза	$2,0 \cdot 10^{-5}$	Платина	$0,85 \cdot 10^{-5}$
Объёмное расширение			

Вода (5 °С – 10 °С)	$5,3 \cdot 10^{-5}$	Глицерин	$50 \cdot 10^{-5}$
Вода (10 °С – 20 °С)	$15 \cdot 10^{-5}$	Керосин (бензин)	$100 \cdot 10^{-5}$
Вода (20 °С – 40 °С)	$30,2 \cdot 10^{-5}$	Нефть	$100 \cdot 10^{-5}$
Вода (40 °С – 60 °С)	$45,8 \cdot 10^{-5}$	Спирт этиловый	$110 \cdot 10^{-5}$
Вода (60 °С – 80 °С)	$58,7 \cdot 10^{-5}$	Ртуть	$19 \cdot 10^{-5}$
Масло	$72 \cdot 10^{-5}$	Эфир	$170 \cdot 10^{-5}$

**Таблица Е.6 - Скорость звука (м/с)**

Алюминий	5 100	Сталь (железо)	5 300
Вода	1 450	Кирпич	3650
Воздух (°С)	332		

**Таблица Е.7 - Тепловые свойства веществ**

Твердые тела			
Вещество	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления, кДж/кг
Алюминий	896	660	387
Висмут	130	271	54
Вольфрам	195	3 420	192
Латунь	386	900	330
Лёд	2 100	0	334
Медь	395	1 083	174
Никель	460	1 453	300
Олово	280	232	60
Ртуть	-	-38,9	11,7
Свинец	131	327	25
Серебро	230	960	80
Сталь (железо)	460	1 535	272
Цинк	385	420	118
Жидкости			
Вещество	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Температура кипения, °С	Удельная теплота парообразования, МДж/кг
Бензин (50 °С)	2 095	-	-
Вода (20 °С)	4 190	100	2,25
Глицерин	2 420	290	-
Масло трансформаторное (20 °С)	1 800	-	-
Ртуть	138	357	0,284
Спирт	2 510	78	0,853
Газы			

Вещество	Удельная теплоемкость <sup>6</sup> , кДж/(кг·К)	Температура конденсации <sup>7</sup> , °С
Азот	1,05	-196
Водород	14,3	-253
Воздух	1,01	-
Гелий	5,29	-269
Кислород	0,913	-183

**Таблица Е.8 - Диаметры молекул и атомов (нм)**

Азот (N <sub>2</sub> )	0,31	Гелий (He)	0,19
Аргон (Ar)	0,29	Кислород (O <sub>2</sub> )	0,29
Водород (H <sub>2</sub> )	0,23	Оксид углерода (CO)	0,32
Водяной пар (H <sub>2</sub> O)	0,26	Углекислый газ (CO <sub>2</sub> )	0,33
Воздух	0,55	Хлор (Cl <sub>2</sub> )	0,37

**Таблица Е.9 - Постоянные газов (при нормальных условиях)**

Газ	Коэффициент самодиффузии D, 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup> /с	Вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность α, Вт/(м·К)
Аргон	0,16	21,0	0,017
Гелий	1,62	20,7	0,143
Водород	1,28	8,6	0,168
Азот	0,17	16,7	0,024
Кислород	0,18	19,9	0,025
Воздух	-	17,2	0,024

**Таблица Е.10 - Постоянные Ван-дер-Ваальса**

Вещество	a, Па·м <sup>6</sup> /моль <sup>2</sup>	b, 10 <sup>-5</sup> м <sup>3</sup> /моль
Азот	0,135	3,9
Аргон	0,132	3
Вода	0,554	3
Водород	0,024	2,7
Кислород	0,136	3,2
Углекислый газ	0,364	4,3

**Таблица Е.11 - Критические значения температуры и давления**

Вещество	T <sub>кр</sub> , К	P <sub>кр</sub> , МПа	Вещество	T <sub>кр</sub> , К	P <sub>кр</sub> , МПа
Азот	126	3,4	Водяной пар	647	21,77
Аргон	151	4,87	Гелий	5,2	0,23

<sup>6</sup> При постоянном давлении

<sup>7</sup> При нормальном давлении

Бензол	562	4,8	Кислород	154	5,07
Водород	33	1,3	Углекислый газ	304	7,4

**Таблица Е.12 - Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей при 20 °С, мН/м**

Вещество	Коэффициент	Вещество	Коэффициент
Анилин	43	Керосин	30
Бензол	30	Молоко	46
Вода	73	Мыльный раствор	45
Вода (70 °С)	64	Ртуть	500
Глицерин	64	Серебро (распл. 960 °С)	780
Золото (распл. 1 070 °С)	610	Спирт	22
Касторовое масло	33		

**Таблица Е.13 - Удельная теплота сгорания топлива, МДж/кг**

Авиационный бензин	48	Нефть	46
Бензин	46	Порох	3,8
Дерево	10	Природный газ	34
Каменный уголь	30	Спирт	29
Керосин	46	Торф	14
Метан	55		

**Таблица Е.14 - Теплопроводность веществ  $\alpha$ , Вт/(м·К)**

Вещество	$\alpha$	Вещество	$\alpha$
Алюминий	205	Медь	390
Асбест	0,14	Накипь котельная	2,3
Висмут	10	Пробка	0,035
Вода	0,58	Сажа	0,25
Дерево	0,17	Свинец	34,8
Железо	62	Смола	0,52
Кирпич	0,84	Стекло	0,74
		Эбонит	0,16

**Таблица Е.15 - Давление Р и плотность  $\rho$  насыщенного водяного пара**

$t, ^\circ\text{C}$	Р, Па	$\rho, \text{г/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	Р, Па	$\rho, \text{г/м}^3$
-30	37,3	0,33	12	1 402,3	10,7
-29	41,3	0,37	13	1 519,6	11,4
-28	46,7	0,41	14	1 598,3	12,1
-27	50,7	0,46	15	1 704,9	12,8
-26	57,3	0,51	16	1 816,9	13,6
-25	62,7	0,55	17	1 936,8	14,5

-24	69,3	0,66	18	2 063,5	15,4
-23	77,3	0,68	19	2 196,8	16,3
-22	85,3	0,73	20	2 338,1	17,3
-21	93,3	0,80	21	2 486,0	18,3
-20	102,6	0,85	22	2 643,3	19,4
-19	113,3	0,96	23	2 808,6	20,6
-18	125,3	1,05	24	2 983,3	21,8
-17	137,3	1,15	25	3 167,2	23,0
-16	150,6	1,27	26	3 360,5	24,4
-15	165,3	1,38	27	3 567,1	25,8
-14	181,3	1,51	28	3 779,1	27,2
-13	198,6	1,65	29	4 004,3	28,7
-12	217,3	1,80	30	4 241,6	30,3
-11	237,3	1,96	31	4 603,2	31,9
-10	259,9	2,14	32	4 753,6	33,9
-9	283,9	2,33	33	5 029,4	35,7
-8	337,2	2,54	34	5 316,7	37,6
-7	351,9	2,76	35	5 622,6	39,6
-6	367,9	2,99	36	5 939,8	41,8
-5	401,2	3,24	37	6 274,4	44,0
-4	437,2	3,51	38	6 623,6	46,3
-3	475,9	3,81	39	6 990,3	48,7
-2	517,2	4,13	40	7 374,2	51,2
-1	562,5	4,47	45	9 581,6	65,4
0	610,5	4,84	50	12 330,3	83,0
1	656,1	5,22	55	15 729,4	104,3
2	758,4	5,60	60	19 915,0	130
3	797,3	5,98	65	24 993,8	161
4	812,1	6,40	70	31 152,2	198
5	871,1	6,84	75	38 577,0	242
6	934,4	7,3	80	47 334,8	293
7	1 001,1	7,8	85	57 798,9	354
8	1 073,1	8,3	90	70 089,1	424
9	1 147,7	8,8	95	84 498,9	505
10	1 227,7	9,4	100	101 303,0	598
11	1 300,7	10,0			

**Таблица Е.16 - Психрометрическая таблица**

Показания сухого термометра в °С	Относительная влажность в % при разности показаний сухого и влажного термометров в °С											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	100	81	63	45	28	11						
1	100	83	65	48	32	16						



2	100	84	68	51	35	20						
3	100	84	69	54	39	24	10					
4	100	85	70	56	42	28	14					
5	100	86	72	58	45	32	19	6				
6	100	86	73	60	47	35	23	10				
7	100	87	74	61	49	37	26	14				
8	100	87	75	63	51	40	29	18	7			
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11			
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5		
11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8		
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11		
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14	6	
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17	9	
15	100	90	80	71	61	52	44	36	27	20	12	5
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22	15	8
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24	17	10
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20	13
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29	22	15
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24	18
21	100	91	83	75	67	60	52	45	39	32	26	20
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28	22
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36	30	24
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31	26
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38	33	27
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	34	29
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41	36	30
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37	32
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43	38	33
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39	34

**Таблица Е.17 - Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  веществ**

Вещество	$\epsilon$	Вещество	$\epsilon$
Воздух	1,00058	Стекло	7
Вода	81	Масло трансформаторное	2,2
Воск	7,8	Парафинированная бумага	3,7
Керосин	2	Титанат бария	1200
Парафин	2	Текстолит	7
Плексиглас	3,5	Фарфор	6
Полиэтилен	2,3	Эбонит	3
Спирт	26	Янтарь	2,8
Слюда	6		

**Таблица Е.18 - Энергия ионизации**

Вещество	$E_i$ , Дж	$E_i$ , эВ
Водород	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1,21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4

**Таблица Е.19 - Удельное сопротивление  $\rho$  и температурный коэффициент сопротивления  $\alpha$  проводников**

Проводник	$\rho$ , нОм·м	$\alpha$ , К <sup>-1</sup>	Проводник	$\rho$ , нОм·м	$\alpha$ , К <sup>-1</sup>
Алюминий	28	0,0038	Медь	17	0,0043
Вольфрам	55	0,0051	Никелин	420	0,000017
Графит	8 000	-	Нихром	1100	0,00026
Железо	98	0,0062	Ртуть	958	0,0009
Золото	20	0,0040	Свинец	190	0,0042
Константан	480	0,00002	Серебро	15	0,004
Латунь	71	0,001	Уголь	40	-0,0008
Манганин	450	0,00003	Фехраль	1200	0,0002
			Цинк	60	0,004

**Таблица Е.20 - Удельное сопротивление  $\rho$  изоляторов**

Изолятор	$\rho$	Изолятор	$\rho$
Бумага	$10^{10}$	Фарфор	$10^{13}$
Парафин	$10^{15}$	Шеллак	$10^{14}$
Слюда	$10^{13}$	Эбонит	$10^{14}$
		Янтарь	$10^{17}$

**Таблица Е.21 - Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков**

Парамагнетик	$\mu$ , $10^{-6}$	Диамагнетик	$\mu - 1$ , $10^{-6}$
Азот	0,013	Водород	- 0,063
Воздух	0,38	Бензол	- 7,5
Кислород	1,9	Вода	- 9,0
Эбонит	14	Медь	- 10,3
Алюминий	23	Стекло	- 12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	- 12,6
Платина	360	Кварц	- 15,1
Жидкий кислород	3 400	Висмут	- 176

**Таблица Е.22 - Подвижность ионов в газах, м<sup>2</sup>/(В·с)**

Водные растворы			
H <sup>+</sup>	0,326·10 <sup>-6</sup>	ОН <sup>-</sup>	0,18·10 <sup>-6</sup>
Na <sup>+</sup>	0,045·10 <sup>-6</sup>	F <sup>-</sup>	0,049·10 <sup>-6</sup>
K <sup>+</sup>	0,067·10 <sup>-6</sup>	Cl <sup>-</sup>	0,068·10 <sup>-6</sup>
Ag <sup>+</sup>	0,056·10 <sup>-6</sup>	Br <sup>-</sup>	0,07·10 <sup>-6</sup>
NH <sup>+</sup>	0,067·10 <sup>-6</sup>	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	0,064·10 <sup>-6</sup>
Газы (при нормальных условиях)			
Газ	Положительные ионы	Отрицательные ионы	
Азот	1,27·10 <sup>-4</sup>		1,81·10 <sup>-4</sup>
Водород	5,4·10 <sup>-4</sup>		7,4·10 <sup>-4</sup>
Воздух	1,4·10 <sup>-4</sup>		1,9·10 <sup>-4</sup>
Кислород	1,3·10 <sup>-4</sup>		1,8·10 <sup>-4</sup>
Оксид углерода	1,0·10 <sup>-4</sup>		1,1·10 <sup>-4</sup>
Хлор	0,6·10 <sup>-4</sup>		0,5·10 <sup>-4</sup>

**Таблица Е.23 - Электрохимические эквиваленты (мг/Кл)**

Алюминий (Al <sup>3+</sup> )	0,093	Медь (Cu <sup>2+</sup> )	0,329
Висмут (Bi <sup>3+</sup> )	0,719	Натрий (Na <sup>+</sup> )	0,238
Водород (H <sup>+</sup> )	0,0104	Никель (Ni <sup>2+</sup> )	0,304
Железо (Fe <sup>2+</sup> )	0,29	Никель (Ni <sup>3+</sup> )	0,203
Железо (Fe <sup>3+</sup> )	0,193	Свинец (Pb <sup>2+</sup> )	1,074
Золото (Au <sup>+</sup> )	2,043	Серебро (Ag <sup>+</sup> )	1,118
Золото (Au <sup>2+</sup> )	0,681	Хром (Cr <sup>3+</sup> )	0,180
Кислород (O <sup>2+</sup> )	0,083	Хлор (Cl <sup>+</sup> )	0,367
Медь (Cu <sup>+</sup> )	0,660	Цинк (Zn <sup>2+</sup> )	0,338

**Таблица Е.24 - Показатели преломления (средние для видимых лучей)**

Алмаз	2,42	Азот	1,00030
Каменная соль	1,54	Воздух	1,00029
Кварц	1,54	Сероуглерод	1,630
Лёд	1,31	Бензол	1,50
Плексиглас	1,50	Вода	1,33
Скипидар	1,47	Глицерин	1,47
Стекло	1,5	Масло кедровое	1,52
Кислород	1,00027	Скипидар	1,47
		Спирт этиловый	1,36

**Таблица Е.25 - Интервалы длин волн, соответствующие различным цветам спектра**

Цвет спектра	Интервал длин волн, нм	Цвет спектра	Интервал длин волн, нм
Фиолетовый	400 – 450	Жёлтый	560 – 590

Синий	450 – 480	Оранжевый	590 – 620
Голубой	480 – 500	Красный	620 – 760
Зелёный	500 – 560		

**Таблица Е.26 - Работа выхода электрона из металлов (эВ)**

Алюминий	3,74	Натрий	2,3
Барий	2,29	Никель	4,84
Висмут	4,62	Платина	5,29
Вольфрам	4,5	Ртуть	4,52
Железо	4,74	Рубидий	2,13
Золото	4,68	Серебро	4,74
Калий	2,0	Тантал	4,07
Кобальт	4,25	Титан	3,92
Литий	2,4	Цезий	1,97
Магний	3,46	Цинк	4,0
Медь	4,47	Оксид бария	0,99
Молибден	4,2		

**Таблица Е.27 - Периоды полураспада некоторых радиоактивных изотопов**

Актиний ${}_{89}\text{Ac}^{225}$	10 сут	Радий ${}_{88}\text{Ra}^{226}$	1 600 лет
Висмут ${}_{83}\text{Bi}^{210}$	5,02 сут	Радон ${}_{86}\text{Rn}^{222}$	3,82 сут
Иридий ${}_{77}\text{Ir}^{192}$	75 сут	Стронций ${}_{38}\text{Sr}^{90}$	28 лет
Йод ${}_{53}\text{I}^{131}$	8 сут	Торий ${}_{90}\text{Th}^{232}$	$1,39 \cdot 10^{11}$ лет
Кальций ${}_{20}\text{Ca}^{45}$	164 сут	Углерод ${}_{6}\text{C}^{14}$	5 730 лет
Кобальт ${}_{27}\text{Co}^{60}$	5,3 года	Уран ${}_{92}\text{U}^{235}$	$7,1 \cdot 10^8$ лет
Магний ${}_{12}\text{Mg}^{27}$	10 мин	Уран ${}_{92}\text{U}^{238}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Натрий ${}_{11}\text{Na}^{24}$	15,3 час	Фосфор ${}_{15}\text{P}^{32}$	14,3 сут
Полоний ${}_{84}\text{Po}^{210}$	138 сут	Церий ${}_{58}\text{Ce}^{144}$	285 сут

**Таблица Е.28- Масса и энергия покоя некоторых частиц**

Частица	$m_0$		$E_0$	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,0005485	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,0072765	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,0086650	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1 876
$\alpha$ -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3 733

Нейтральный π-мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135
------------------------	-----------------------	---------	-----------------------	-----

**Таблица Е.29- Массы некоторых изотопов (а.е.м.)**

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
${}^1_1\text{H}^1$	1,007825	${}^{23}_{11}\text{Na}$	22,989770
${}^2_1\text{D}$	2,014102	${}^{24}_{11}\text{Na}$	23,990967
${}^3_1\text{T}$	3,016049	${}^{23}_{12}\text{Mg}$	22,994135
${}^3_2\text{He}$	3,016029	${}^{24}_{12}\text{Mg}$	23,985045
${}^4_2\text{He}$	4,002603	${}^{27}_{13}\text{Al}$	26,981541
${}^6_3\text{Li}$	6,015123	${}^{28}_{13}\text{Al}$	27,9769
${}^7_3\text{Li}$	7,016004	${}^{28}_{14}\text{Si}$	27,9769
${}^7_4\text{Be}$	7,016931	${}^{30}_{14}\text{Si}$	29,97377
${}^8_4\text{Be}$	8,005308	${}^{31}_{14}\text{Si}$	30,975349
${}^9_4\text{Be}$	9,012182	${}^{30}_{15}\text{P}$	29,978320
${}^{10}_5\text{B}$	10,012938	${}^{31}_{15}\text{P}$	30,97376
${}^{11}_5\text{B}$	11,009305	${}^{40}_{19}\text{K}$	39,962382
${}^{11}_6\text{C}$	11,011431	${}^{41}_{19}\text{K}$	40,961825
${}^{12}_6\text{C}$	12,000000	${}^{40}_{20}\text{Ca}$	39,962591
${}^{13}_6\text{C}$	13,003355	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	55,934939
${}^{14}_6\text{C}$	14,003242	${}^{59}_{27}\text{Co}$	58,93320
${}^{13}_7\text{N}$	13,005739	${}^{60}_{29}\text{Ni}$	59,9308
${}^{14}_7\text{N}$	14,003074	${}^{94}_{40}\text{Zr}$	93,906320
${}^{15}_7\text{N}$	15,000109	${}^{131}_{54}\text{Xe}$	130,9051
${}^{15}_8\text{O}$	15,003072	${}^{140}_{58}\text{Ce}$	139,90544
${}^{16}_8\text{O}$	15,994915	${}^{206}_{82}\text{Pb}$	205,97445
${}^{17}_8\text{O}$	16,999131	${}^{210}_{84}\text{Po}$	209,98286
${}^{19}_9\text{F}$	18,998403	${}^{235}_{92}\text{U}$	235,04393
${}^{20}_{10}\text{Ne}$	19,99244	${}^{238}_{92}\text{U}$	238,05353

**Таблица Е.30 - Греческий алфавит**

Α, α - альфа	Ι, ι - йота	Ρ, ρ - ро
Β, β - бета	Κ, κ, ϰ - каппа	Σ, σ - сигма
Γ, γ - гамма	Λ, λ - лямбда	Τ, τ - тау
Δ, δ - дельта	Μ, μ - мю	Υ, υ - ипсилон
Ε, ε - эпсилон	Ν, ν - ню	Φ, φ - фи
Ζ, ζ - дзета	Ξ, ξ - кси	Χ, χ - хи

Н, η - эта Θ, θ, ϑ - тэта	О, о - омикрон Π, π - пи	Ψ, ψ - пси Ω, ω - омега
------------------------------	-----------------------------	----------------------------

Таблица Е.31– Таблица элементарных частиц

Частица	Символ	Лептоны				Мезоны				Барионы												
		Фотон	Нейтрино	Электрон	Мюон	Таон	Пи-мезон	Ка-мезон	Эта-мезон	Фи-мезон	Протон	Нейтрон	Ламбда-гиперон	Сигма-гиперон			Кси-гиперон		Омега-гиперон			
Масса	МэВ	γ	ν̄ <sub>e</sub>	e <sup>-</sup>	μ <sup>-</sup>	τ <sup>-</sup>	π <sup>+</sup>	π <sup>0</sup>	K <sup>+</sup>	K <sup>0</sup>	η	φ	p	n	Λ <sup>0</sup>	Σ <sup>+</sup>	Σ <sup>0</sup>	Σ <sup>-</sup>	Ξ <sup>0</sup>	Ξ <sup>-</sup>	Ω <sup>-</sup>	Ω <sup>+</sup>
Время жизни, τ, с	∞	∞	∞	∞	2,2·10 <sup>-6</sup>	3,5·10 <sup>-12</sup>	2,55·10 <sup>-8</sup>	2·10 <sup>-16</sup>	1,23·10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-10</sup> –10 <sup>-8</sup>	2,4·10 <sup>-19</sup>	~10 <sup>-19</sup>	∞	1·10 <sup>3</sup>	2,6·10 <sup>-10</sup>	0,8·10 <sup>-10</sup>	1,6·10 <sup>-10</sup>	<10 <sup>-14</sup>	1,7·10 <sup>-10</sup>	3·10 <sup>-10</sup>	~10 <sup>-10</sup>	
Спин, ħ	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	0	0	0	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	3/2	
Заряды	Q	0	0	-1	-1	-1	+1	0	+1	0	0	0	+1	0	0	+1	-1	0	-1	0	-1	
	L	0	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
Изотоп-спин	T						1	1	½	½	0	0	½	½	0	1	1	1	½	½	0	
	T <sub>2</sub>						+1	0	+½	-½	0	0	+½	-½	0	+1	-1	0	-½	+½	0	
Странность, S						0	0	+1	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-3	
Преобладающая схема распада					μ <sup>-</sup> → e <sup>-</sup> + ν <sub>μ</sub> <sup>+</sup> + ν̄ <sub>e</sub>	τ <sup>-</sup> → μ <sup>-</sup> + ν <sub>τ</sub> <sup>+</sup> + ν̄ <sub>μ</sub>	π <sup>+</sup> → μ <sup>+</sup> + ν̄ <sub>μ</sub>	π <sup>0</sup> → 2γ	K <sup>+</sup> → μ <sup>+</sup> + ν̄ <sub>μ</sub>	K <sup>0</sup> → 2π, πeν	η → 2γ, 3π	φ → π <sup>+</sup> + π <sup>-</sup>		n → p + e <sup>-</sup> + ν̄ <sub>e</sub>	Λ <sup>0</sup> → p + π <sup>-</sup>	Σ <sup>+</sup> → n + π <sup>+</sup>	Σ <sup>0</sup> → n + π <sup>0</sup>	Σ <sup>-</sup> → n + π <sup>-</sup>	Σ <sup>0</sup> → Λ <sup>0</sup> + γ	Ξ <sup>-</sup> → Λ <sup>0</sup> + π <sup>-</sup>	Ξ <sup>0</sup> → Λ <sup>0</sup> + π <sup>0</sup>	Ω → Ξ + π, Λ <sup>0</sup> + K <sup>-</sup>

