МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

О.Н.КАЗАКОВА, О.Н. КОНЮЧЕНКО, Т.А. ФОМИНА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Рекомендовано к изданию Ученым советом государственного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет» в качестве учебно-
методического пособия для студентов инженерно-технических специальностей
и направлений очной формы обучения

Оренбург
2009

УДК 514.12 (075.8)
ББК 22.151.5 я 73
К 14

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко,
кандидат физико-математических наук, доцент Ю.В. Нефедов

Казакова, О.Н.

К 14 **Аналитическая геометрия. Типовые расчеты: учебно-методическое пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко, Т.А. Фомина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 97с.**

Данное учебно-методическое пособие предназначено студентам инженерно-технических специальностей и направлений очной формы обучения.

Пособие также может быть использовано для организации самостоятельной и индивидуальной работ студентов заочной, ускоренной и индивидуальной форм обучения различных специальностей. Оно содержит краткие теоретические сведения, вопросы для самоконтроля, примеры решения типовых задач, индивидуальные задания, методические рекомендации по выполнению и оформлению контрольной работы, списки используемой и рекомендуемой литературы, приложения.

ББК 22.151.5 я 73

$К\frac{1602050000}{\quad}$

Содержание

Введение

Математика и, в частности, аналитическая геометрия, играет важную роль в естественнонаучных и инженерно-технических исследованиях. Она является не только орудием количественного исчисления, но и методом точного исследования и средством четкой формулировки понятий и проблем.

Аналитическая геометрия, как правило, является частью учебного курса математики и не всегда на этот раздел выделяется учебного времени, достаточного для детальной проработки всех необходимых понятий и формул. В этой связи особую роль приобретает система типовых расчетов, которая позволяет более глубоко изучить данный раздел математики, активизировать самостоятельную работу студентов, приучить их планировать и рационально использовать личное время.

Знания, умения и навыки, приобретенные при изучении раздела «Аналитическая геометрия», используются в дальнейшем при изучении и других разделов математики, в частности, раздела «Криволинейные и поверхностные интегралы».

При решении задач аналитической геометрии используются сведения из раздела «Векторная алгебра», поэтому авторы включили ряд соответствующих задач и вопросов.

Данное пособие содержит задания, соответствующие государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ГОС ВПО). Набор задач достаточно многообразен и позволяет скомпоновать: индивидуальные задания для выполнения типовых расчетов студентами очной и очно-заочной форм обучения различных специальностей и направлений в зависимости от содержания ГОС ВПО, часов по учебному плану и содержания рабочей программы; аудиторные самостоятельные и контрольные работы; контрольные работы для студентов заочной формы обучения.

Список рекомендуемой основной и дополнительной литературы не является исчерпывающим. Он может быть дополнен любыми другими учебниками и учебными пособиями, как по аналитической геометрии, так и содержащими соответствующий раздел.

1 Содержание курса аналитической геометрии

Содержание курса/раздела аналитической геометрии отражается в рабочей программе по специальности/направлению в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Как правило, курс/раздел раскрывает следующие вопросы:

Векторная алгебра. Векторы, основные понятия и определения, координатное представление, линейные операции над векторами, базис, разложение по базису. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства, выражение через координаты сомножителей, геометрические и механические приложения.

Прямая линия и плоскость. Прямая как линия первого порядка, различные виды уравнения прямой на плоскости, угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Уравнение поверхности, плоскость как поверхность первого порядка, различные виды уравнения плоскости. Прямая линия в пространстве, различные виды ее уравнений, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей, прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Кривые и поверхности второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения, исследование формы этих кривых.

Сфера, цилиндрические поверхности, конус, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, их канонические уравнения, исследование формы этих поверхностей.

2 Краткие теоретические сведения

2.1 Определители

Определителем (детерминантом) n - го порядка называется число, записываемое в виде таблицы, состоящей из n строк и n столбцов.

Обозначается Δ_n *или* d .

$|a_{11}| = a_{11}$ – определитель первого порядка;

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$ – определитель второго порядка;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

– определитель третьего порядка.

При вычислении использовали правило треугольника (Рисунок 1).

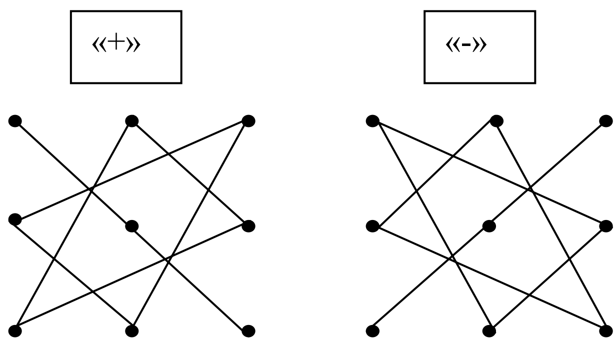


Рисунок 1 – Правило треугольника

Минором элемента a_{ij} определителя n–го порядка называется определитель (n-1) – го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки с номером i, столбца с номером j. Обозначается M_{ij} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема Лапласа: Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & {}_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Если в определителе поменять местами соответствующие строки и столбцы, то величина определителя не изменится.

При умножении столбца (или строки) определителя на некоторое число определитель умножается на это число.

Если определитель содержит нулевой столбец или нулевую строку, то он равен нулю.

Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Определитель равен нулю, если он содержит одинаковые (пропорциональные) строки (столбцы).

Формулы Крамера

Рассмотрим на примере системы 2 уравнений с 2 неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{22} = b_2 \end{cases}.$$

В случае если определитель, составленный из коэффициентов перед неизвестными системы не равен нулю, система имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

2.2 Элементы векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).

К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало.

Любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Произведение на число $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\vec{b}\right| = \alpha\left|\vec{a}\right|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства линейных операций:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$;
5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$;
6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Базисом в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор.

Векторы $\overrightarrow{a_1},...,\overrightarrow{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются *линейно независимыми*.

Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов представляет собой линейную комбинацию остальных векторов.

Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Любые 4 вектора линейно зависимы.

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2} + \gamma \overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ называются координатами вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Равные векторы имеют одинаковые координаты.

При умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число:

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \overrightarrow{e_1} + \beta \overrightarrow{e_2} + \gamma \overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\overrightarrow{e_3}.$$

При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты:

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}; \ \vec{b} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \beta_3 \overrightarrow{e_3};$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора.

Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то соответствующие координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

$(\vec{a}, \vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot Cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – скалярное произведение векторов

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$, или $\vec{b} = 0$;
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const.

Используя скалярное произведение векторов, можно найти *косинус угла между векторами*:

$$Cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Работа A силы F, произведенная этой силой при перемещении тела на пути $|s|$, определяемом вектором **s**, вычисляется по формуле:

$$A = F\cdot s = |F|\cdot|s|\cdot\cos(\widehat{F,s}).$$

$\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$ – векторное произведение векторов, если выполняются условия:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot Sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;
2) $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;
3) тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая, т.е. поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ из конца вектора $\vec{c}$ по кратчайшему пути виден против часовой стрелки (Рисунок 2).

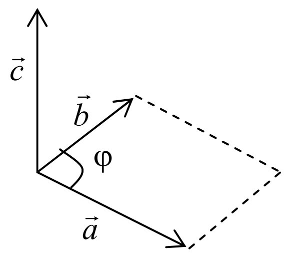


Рисунок 2 – Векторное произведение векторов

Свойства векторного произведения:

1) $[\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{a},\vec{b}]$;
2) $[\vec{a},\vec{b}] = 0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$, т.е. векторное произведение коллинеарных векторов дает нулевой вектор;
3) $[m\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},m\vec{b}] = m[\vec{a},\vec{b}]$;
4) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$;
5) модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Другое обозначение векторного произведения $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент M силы F*, приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A: $M = \left[\overrightarrow{AB}, F\right]$.

$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]$ смешанное произведение векторов, т.е. число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны;

2) $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

4) $(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + \mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$;

5) Смешанное произведение $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right)\right|.$$

Другое обозначение смешанного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Если известны координаты векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.3 Аналитическая геометрия на плоскости

Если заданы две точки на плоскости $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, то

$|AB| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ - *длина отрезка AB.*

Если заданы точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$, которые являются вершинами треугольника, то *площадь треугольника* находится по формуле:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}.$$

Если *точка M(x, y, z) делит отрезок AB в соотношении* $m_1 : m_2$, считая от *A*, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Обозначив $m_1 : m_2 = \lambda$, получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Координаты середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Уравнение линии на плоскости - соотношение *y=f(x*) или *F(x,y)=0* между координатами точек, при котором выполняются условия: координаты всякой точки линии удовлетворяют данному соотношению, координаты всякой точки, не лежащей на линии, не удовлетворяют данному соотношению.

Всякая прямая является алгебраической линией первого порядка.

$Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ - общее уравнение прямой на плоскости.

Возможны частные случаи:

$C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат.

$A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0\ \{ By + C = 0\}$- прямая параллельна оси *Ox.*

$B = 0,\ A \neq 0,\ C \neq 0\ \{ Ax + C = 0\}$ – прямая параллельна оси *Oy.*

$B = C = 0,\ A \neq 0$ – прямая совпадает с осью *Oy.*

$A = C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox.

$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$ - каноническое уравнение прямой на плоскости, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha, \beta)$.

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ - параметрическое уравнение прямой на плоскости, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha, \beta)$.

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой на плоскости, заданной двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$y = kx + b$ - уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом k - тангенсом угла между прямой и положительным направлением оси Ox и отрезком b, отсекаемом на оси Oy.

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то *острый угол между* этими *прямыми* будет определяться как

$$tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.
Угол между прямыми можно найти как угол между направляющими векторами этих прямых, используя скалярное произведение векторов:

$$\cos\varphi = \pm \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}.$$

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *параллельны*, когда пропорциональны коэффициенты $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Если еще и свободные члены пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые *совпадают*.

Прямые *перпендикулярны*, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - уравнение прямой в отрезках, отсекаемых на координатных осях.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - уравнение прямой на плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A,B)$.

Если задана точка *M(x₀,y₀)*, то *расстояние до прямой* $Ax+By+C=0$ определяется как

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Точка $M(x_0,y_0)$ принадлежит прямой $Ax+By+C=0$, если ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. $Ax_0+By_0+C=0$.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ - алгебраическая линия второго порядка при условии $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

К ним относятся: окружность, эллипс, гипербола, парабола, пара прямых (пересекающихся, параллельных или совпавших).

$x^2+y^2=R^2$ - окружность с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом R.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ - окружность с центром в точке (x_0,y_0) и радиусом R.

Эллипс это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (Рисунок 3).

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение эллипса.

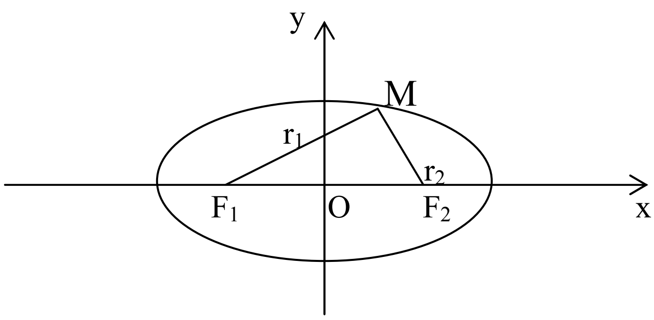


Рисунок 3 – Эллипс

F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c;\ 0)$; $F_2(-c;\ 0)$;
$2c$ – фокусное расстояние;

a – большая полуось (*c<a)*;
b – малая полуось.

Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ или } b^2 = a^2 - c^2 .$$

$\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет эллипса.

Окружность является частным случаем эллипса при *a=b, c=0* и совпавшими фокусами.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} > 1$, то точка находится вне эллипса.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ - мнимый эллипс.

$x = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$ - директрисы эллипса.

Гипербола есть геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами (Рисунок 4).

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

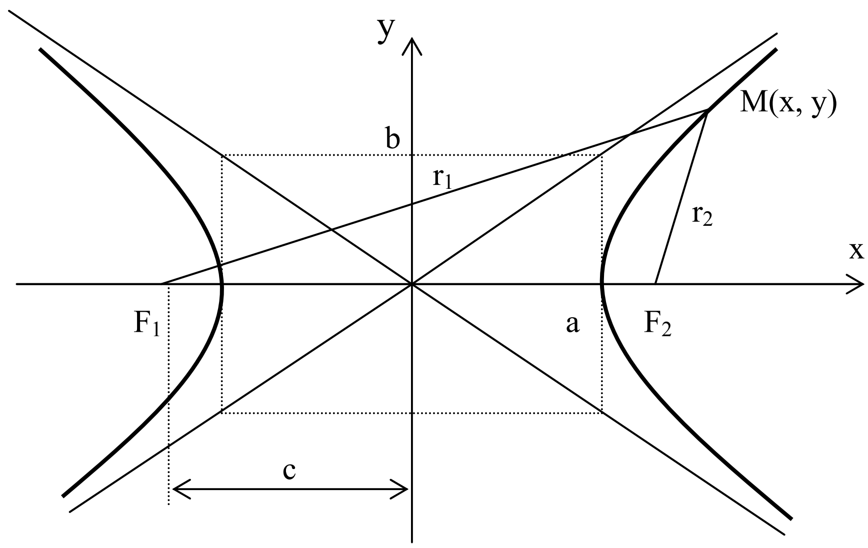


Рисунок 4 – Гипербола

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.

2c – фокусное расстояние;
a – действительная полуось (*c>a)*;
b – мнимая полуось.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ - эксцентриситет гиперболы.

$y = \pm \frac{b}{a} x$ - асимптоты гиперболы.

Фокусное расстояние и полуоси гиперболы связаны соотношением:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ или } b^2 = c^2 - a^2.$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ - сопряженная гипербола.

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ - директрисы гиперболы.

Парабола есть геометрическое место точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус (Рисунок 5).

$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение параболы, где p - параметр параболы.

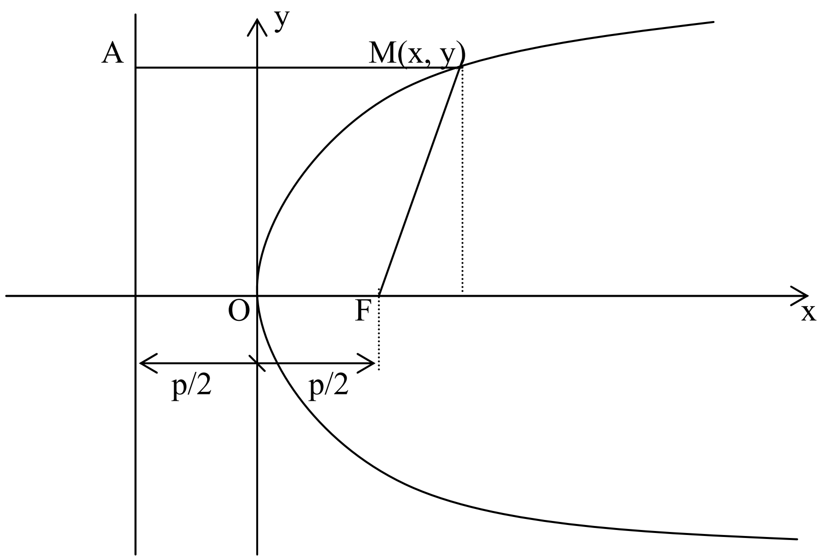


Рисунок 5 – Парабола

$x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы параболы.

$a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

$y^2 - a^2=0$ – уравнение двух параллельных прямых.
$y^2 + a^2= 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
$y^2=0$ – пара совпадающих прямых.

2.4 Аналитическая геометрия в пространстве

Если заданы две точки в пространстве $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ - *длина отрезка АВ.*

Если *точка M(x, y, z) делит отрезок AB в соотношении* $m_1 : m_2$, считая от *A*, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}; \quad z = \frac{m_2 z_1 + m_1 z_2}{m_1 + m_2}$$

Обозначив $m_1 : m_2 = \lambda$, получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Координаты середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Уравнение поверхности в пространстве - соотношение $z=f(x,y)$ или $F(x,y,z)=0$ между координатами точек, при котором выполняются условия: координаты всякой точки поверхности удовлетворяют данному соотношению, координаты всякой точки, не лежащей на поверхности, не удовлетворяют данному соотношению.

Пусть $F(x,y,z)=0$ и $\Phi(x, y, z)=0$ – уравнения поверхностей, пересекающихся по линии, тогда пара уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$ - *уравнение линии в пространстве.*

Всякая плоскость является алгебраической поверхностью первого порядка.

$Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C_2 \neq 0$ - общее уравнение плоскости в пространстве.

Возможны частные случаи:

A = 0 – плоскость параллельна оси *Ox*.
B = 0 – плоскость параллельна оси Оу.
C = 0 – плоскость параллельна оси *Oz*.
D = 0 – плоскость проходит через начало координат.
A = B = 0 – плоскость параллельна плоскости *xOy*.
A = C = 0 – плоскость параллельна плоскости *xOz*.
B = C = 0 – плоскость параллельна плоскости *yOz*.
A = D = 0 – плоскость проходит через ось *Ox*.
B = D = 0 – плоскость проходит через ось *Oy*.
C = D = 0 – плоскость проходит через ось *Oz*.
A = B = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью *xOy*.
A = C = D = 0 – плоскость совпадает с плоскостью *xOz*.
$Ax + By + C = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью *yOz*.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - уравнение плоскости в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}(A,B,C)$.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ - уравнение плоскости в отрезках, где числа *a, b, c* являются точками пересечения плоскости соответственно с осями *x, y, z*.

$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0$ - уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и двумя направляющими векторами $\vec{a}_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и $\vec{a}_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$.

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}=0$ - уравнение плоскости, заданной двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, и вектором $\vec{a}(\alpha,\beta,\gamma)$, коллинеарному плоскости.

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ - уравнение плоскости, заданной тремя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$, которые не лежат на одной прямой.

Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ - это угол между их нормальными векторами и находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Выбор знака косинуса зависит от того, какой угол между плоскостями следует найти – острый, или смежный с ним тупой.

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ - *условие перпендикулярности плоскостей.*

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ - *условие параллельности плоскостей.*

Если и свободные члены пропорциональны, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$, то плоскости *совпадают*.

Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, если ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

$\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$ - каноническое уравнение прямой в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$.

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$ - параметрическое уравнение прямой в пространстве, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma)$.

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - уравнение прямой в пространстве, заданной двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_1)$.

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - общее уравнение прямой в пространстве, где

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ - две пересекающиеся плоскости, задающие эту прямую.

При этом направляющий вектор прямой может быть найден как векторное произведение нормальных векторов к заданным плоскостям:

$$\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{p}.$$

Угол между двумя прямыми в пространстве находится по формуле:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}},$$

где $\vec{a}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\vec{a}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ - направляющие векторы этих прямых.

$\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ - *условие параллельности прямых в пространстве.*

$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$ - *условие перпендикулярности прямых в пространстве.*

Угол между прямой с направляющим вектором $\vec{a}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ *и плоскостью* $Ax + By + Cz + D = 0$ - это угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости и находится по формуле:

$$\sin\varphi = \pm\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Прямая в пространстве может принадлежать плоскости, быть параллельной ей, пересекаться в точке.

$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ - *условие параллельности прямой и плоскости.*

$\dfrac{\alpha}{A} = \dfrac{\beta}{B} = \dfrac{\gamma}{C}$ - *условие перпендикулярности прямой и плоскости.*

Две прямые в пространстве могут быть скрещивающимися или лежать в одной плоскости и в ней совпадать, быть параллельными или пересекаться.

Если прямые заданы уравнениями $\dfrac{x-x_1}{\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\gamma_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{\alpha_2}=\dfrac{y-y_2}{\beta_2}=\dfrac{z-z_2}{\gamma_2}$, то *условие их принадлежности одной плоскости*:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0.$$

$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0$ - *алгебраическая поверхность второго порядка* при условии $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0$ (Таблица 1).

Поверхность, порождаемая движением прямой линии (образующей), параллельной неподвижной прямой, называется *цилиндрической*. Всякая линия, которую образующая пересекает в любом своем положении, называется направляющей.

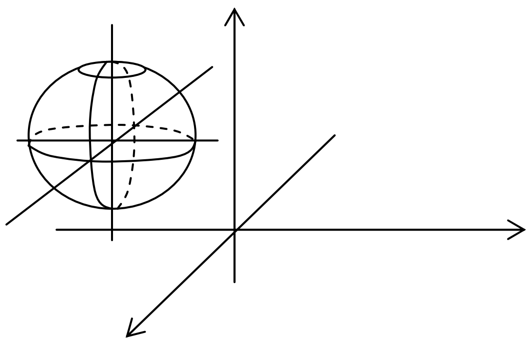
Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d, называется *поверхностью вращения* с осью вращения d.

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид:

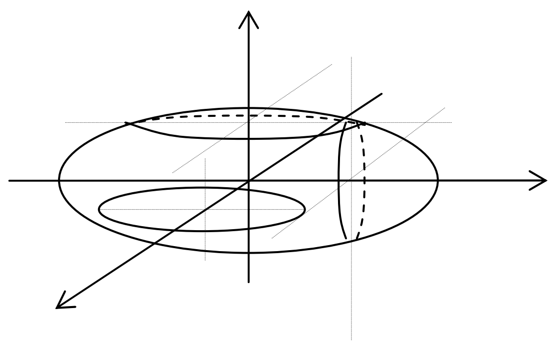
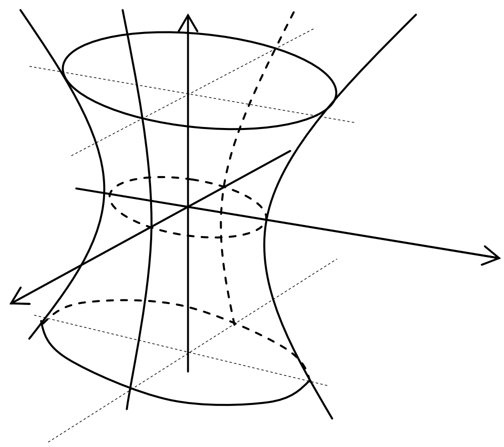
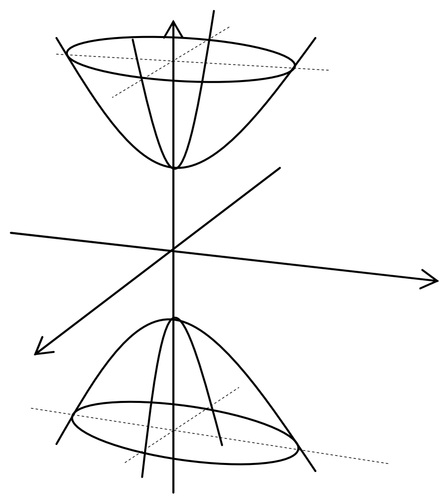
$$F(x^2+y^2,\ z)=0,$$

то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz. Аналогично:
$F(x^2+z^2,\ y)=0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy,
$F(z^2+y^2,\ x)=0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox.

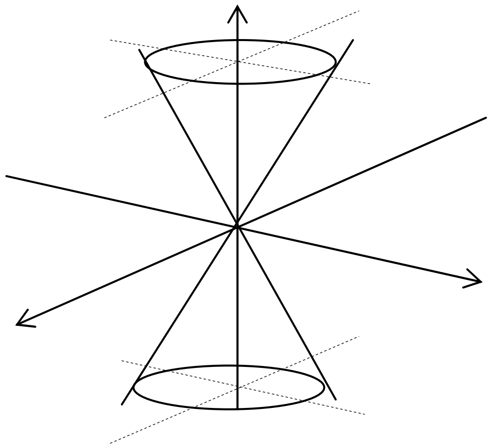
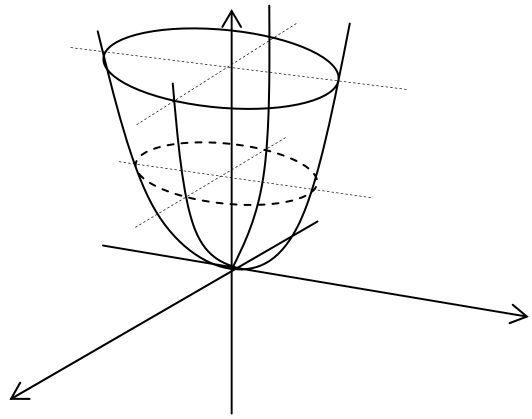
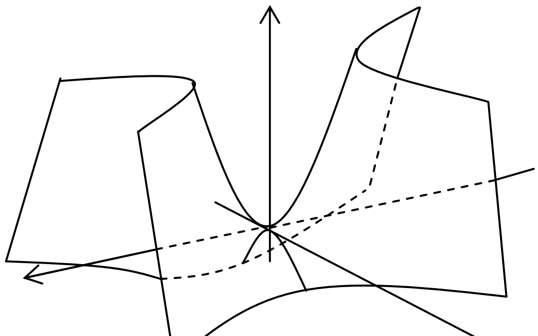
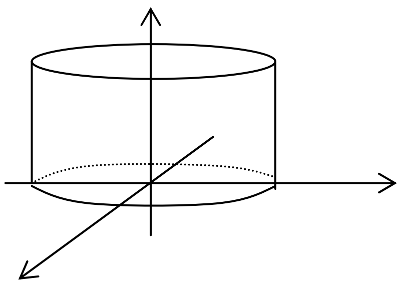
Таблица 1 – Алгебраические поверхности второго порядка

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ сфера с центром в точке (x_0, y_0, z_0) и радиусом R.	

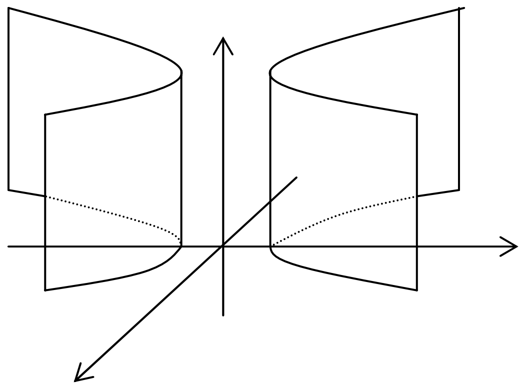
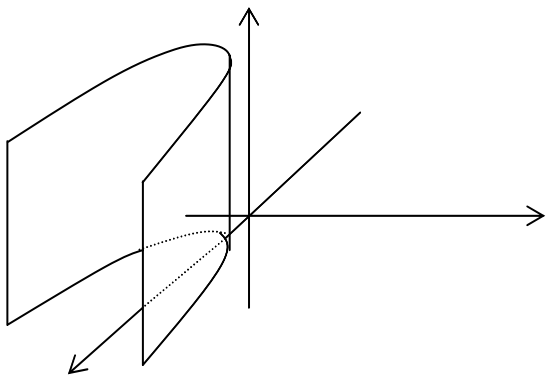
Продолжение таблицы 1 – Алгебраические поверхности второго порядка

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид (трехосный эллипсоид). В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы с различными осями. Сфера – частный случай эллипсоида при a=b=c.	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ однополостный гиперболоид. В сечении плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются эллипсы и гиперболы.	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ двуполостный гиперболоид. В сечении плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются гиперболы и эллипсы.	

Продолжение таблицы 1 – Алгебраические поверхности второго порядка

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ конус второго порядка. В сечении плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются гиперболы и эллипсы.	
$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z, \quad где\ p>0, q>0$ эллиптический параболоид. В сечении плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются параболы и эллипсы.	
$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z,\ где\ p>0, q>0$ гиперболический параболоид. В сечении плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получаются параболы и гиперболы.	
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллиптический цилиндр. Образующие параллельны оси *Oz*, а направляющей служит эллипс.	

Продолжение таблицы 1 – Алгебраические поверхности второго порядка

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболический цилиндр. Образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит гипербола.	
$x^2=2py$ параболический цилиндр. Направляющей является парабола, а образующие параллельны той оси, соответствующая которой координата отсутствует в уравнении.	

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся плоскостей.

$\frac{x^2}{a^2}=1$ - пара параллельных плоскостей.

$x^2=0$ - пара совпадающих плоскостей.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ - мнимый конус второго порядка с действительной вершиной.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара мнимых плоскостей, пресекающихся по действительной оси.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ - мнимый эллипсоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$ - мнимый эллиптический цилиндр.

$$\frac{x^2}{a^2}=-1$$ - пара мнимых параллельных плоскостей.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ - эллипсоид вращения.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ - однополостный гиперболоид вращения.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ - двуполостный гиперболоид вращения.

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z$$ - параболоид вращения.

2.5 Системы координат на плоскости и в пространстве

Положение любой точки на плоскости однозначно определяется парой чисел (x, y) в прямоугольной декартовой системе координат.

Выберем на плоскости точку *O,* называемую полюсом, и луч l – полярную ось. Выберем на полярной оси единичный отрезок. Зададим для любой точки пару чисел: расстояние точки от полюса (r - полярный радиус) и угол между полярной осью (φ - полярный угол) и радиус – вектором этой точки (Рисунок 6). Эта пара чисел (r, φ) называется *полярными координатами точки*, а соответствующая система координат - полярной. $0 \le r < +\infty$ определяется однозначно, φ с точностью до $2\pi k$. Как правило, $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$.

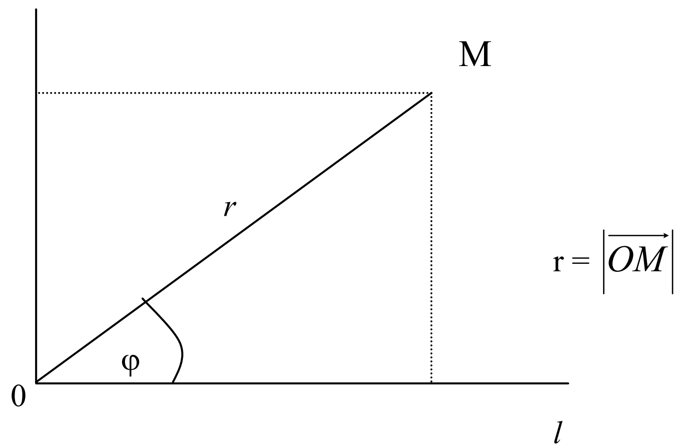


Рисунок 6 – Полярная система координат

Если поместить начало прямоугольной декартовой системы в полюс, а полярную ось направить вдоль положительного направления оси *Ox*, то координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

и обратно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Если к полярной системе координат добавить обычную ось *Oz*, дополняя до прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, то получим, что любая точка в пространстве может быть задана тройкой чисел (r,φ,z) - цилиндрическими координатами.

Связь между прямоугольными декартовыми и цилиндрическими координатами выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \text{ где } 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < z < +\infty\,.$$

Если задать для точки пространства следующие числа: r - расстояние от дочки до начала координат; θ - угол между радиус-вектором точки и положительным направлением оси *Oz*; φ - угол между радиус-вектором проекции точки на плоскость *xOy* и осью *Ox*, то получим тройку чисел (r,φ,θ) - сферические координаты.

Связь между прямоугольными декартовыми и сферическими координатами выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \text{ где } 0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le \theta \le \pi\,.$$

3 Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение вектора. Какой вектор называется нулевым?
2. Что называется длиной вектора? Чему равна длина нулевого вектора, единичного?
3. Что называется суммой векторов? Сформулируйте правило параллелограмма сложения векторов.
4. Что называется разностью векторов.
5. Сформулируйте свойства операций сложения векторов.
6. Что называется произведение вектора на действительное число? В каких случаях произведение $\alpha\vec{a} = \vec{0}$?
7. Какие векторы называются коллинеарными?
8. Какие векторы называются компланарными?
9. Что называется линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$?
10. Дайте определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
11. Сформулируйте свойства линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.
12. Что называется базисом векторного пространства? Что такое размерность векторного пространства?
13. Как вводится понятие координат вектора в данном базисе? Сформулируйте основные свойства координат векторов.
14. Какой базис называется ортонормированным.
15. Что называется скалярным произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Что означается равенство нулю скалярного произведения?
16. Перечислите основные свойства скалярного произведения.
17. Сформулируйте определение векторного произведения двух векторов.
18. Запишите основные свойства векторного произведения векторов. В чем состоят геометрический смысл векторного произведения?
19. Как можно вычислить векторное произведение векторов, если известны их координаты?
20. Сформулируйте определение смешанного произведения трех векторов. В чем состоят геометрический смысл векторного произведения?
21. Запишите основные свойства смешанного произведения векторов. Как можно вычислить векторное произведение векторов, если известны их координаты?
22. Как можно определить коллинеарность и компланарность векторов, используя векторное и смешанное произведения?
23. Что называется условием, определяющим фигуру F в данной системе координат.
24. Перечислите основные способы задания прямой линии на плоскости.
25. Как перейти от параметрического уравнения к общему уравнению и от общего уравнения к параметрическому?

26. Прямая задана в ПДСК общим уравнением. Запишите координаты направляющего и нормального векторов.
27. Как определяется угол между двумя прямыми на плоскости? Как найти угол между прямыми, если они заданы уравнениями
    а) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$;
    б) $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$.
28. Запишите формулы нахождения расстояния от точки до прямой.
29. Перечислите основные способы задания плоскости в пространстве.
30. Запишите условие того, что вектор $\vec{p}(\alpha, \beta, \gamma)$ является направляющим вектором плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$
31. Перечислить основные способы задания прямой линии в пространстве.
32. Как находится направляющий вектор прямой в пространстве, заданной общими уравнениями.
33. Перечислите все варианты взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве. Запишите соответствующие условия.
34. Как вычисляется расстояние от точки до плоскости в пространстве, запишите формулу.
35. Что называется эллипсом, фокусами эллипса, фокальными радиусами точки эллипса? Какой вид имеет каноническое уравнение?
36. Что называется эксцентриситетом эллипса, как зависит форма эллипса от эксцентриситета? Запишите основные соотношения для полуосей и эксцентриситета эллипса.
37. Что называется гиперболой, фокусами гиперболы, асимптотами гиперболы? Какой вид имеет каноническое уравнение.
38. Что называется эксцентриситетом гиперболы, как зависит форма гиперболы от эксцентриситета?
39. Запишите основные соотношения для полуосей и эксцентриситета гиперболы. Сформулируйте основные свойства гиперболы.
40. Дайте определение параболы, запишите каноническое уравнение и перечислите основные свойства.
41. Что называют директрисами эллипса (гиперболы)? Как формулируется директориальное свойство эллипса (гиперболы)?
42. Дайте определение цилиндрической поверхности, приведите примеры.
43. Сформулируйте определение поверхности вращения.
44. Даете определение конической поверхности. Привести уравнение конуса второго порядка.
45. Какие знаете гиперболоиды, параболоиды?

Содержание курса и вопросы для самоконтроля своей специальности/направления можно посмотреть в рабочей программе через компьютеры корпоративной сети Университета на сайте ОГУ [8]. Путь: Студенту – Рабочие программы учебных дисциплин.

4 Решение некоторых типовых задач

Задача 1

Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$, если A(-2,4,-6), B(0,2,-4), C(-6,8,-10).

Решение:

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}$ = (0,2,-4) - (-2,4,-6) = (2,-2,2),

$\overrightarrow{AC}$ = (-6,8,-10)-(-2,4,-6) = (-4,4,-4).

Косинус угла между векторами найдём, используя скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB}\ \hat{}\ \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB},\ \hat{}\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\cdot(-4)+(-2)\cdot 4+2\cdot(-4) = -8-8-8 = -24$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2+4^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Получаем: $\cos\left(\overrightarrow{AB}\ \hat{}\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{-24}{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}} = \dfrac{-24}{24} = -1.$

Ответ: -1.

Задача 2

Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1\,и\,\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}\,и\,\vec{в}$, если $\vec{a} = (-1,2,8)$; $\vec{в} = (3,7,-1)$; $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 3\vec{в}$; $\vec{c}_2 = 9\vec{в} - 12\vec{a}$.

Решение:

Найдём координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$:

$$\vec{c}_1 = 4(-1,2,8) - 3(3,7,-1) = (-4,8,32) + (-9,-21,3) = (-13,-13,35)$$

$$\vec{c}_2 = 9(3,7,-1) - 12(-1,2,8) = (27,63,-9) + (12,-24,-96) = (39,39,-105).$$

Найдём отношения соответствующих координат векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$:

$$\frac{-13}{39} = -\frac{13}{39} = -\frac{35}{105} = -\frac{1}{3}.$$

Так как координаты пропорциональны, то $\vec{c}_1 \parallel \vec{c}_2$.

Ответ: $\vec{c}_1 \parallel \vec{c}_2$.

Задача 3

Найти:

а) скалярное произведение векторов;

б) площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q},\ \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 4; |\vec{q}| = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{2}$.

Решение:

а) воспользуемся определение скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$ и свойствами скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 2\vec{q})(2\vec{p} - \vec{q}) = 3\vec{p}^{\,2} - 3\vec{p}\vec{q} + 4\vec{q}\vec{p} - 2\vec{q}^{\,2} = 3 \cdot 4^2 + \vec{p}\vec{q} - 2 \cdot 3^2 =$$

$$= 48 + 4 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} - 18 = 30.$$

б) Воспользуемся геометрическим смыслом модуля векторного произведения:

То есть $S_{ПАР} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$.

Найдём векторное произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, выраженных через вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, используя свойства векторного произведения:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[3\vec{p} + 2\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}\right] = \left[3\vec{p}, 2\vec{p}\right] + \left[2\vec{q}, 2\vec{p}\right] + \left[3\vec{p}; -\vec{q}\right] + \left[2\vec{q}, -\vec{q}\right] =$$

$$= \vec{0} + 4\left[\vec{q}, \vec{p}\right] - 3\left[\vec{p}, \vec{q}\right] + \vec{0} = 4\left[\vec{q}, \vec{p}\right] + 3\left[\vec{q}, \vec{p}\right] = 7\left[\vec{q}, \vec{p}\right],$$

тогда $S_{ПАР} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|7\left[\vec{q}, \vec{p}\right]\right| = 7 \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\vec{q}, \vec{p}) = 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 84(\textit{кв.ед.})$

Ответ: а) 30, б) S = 84 кв. ед.

Задача 4

Компланарны ли векторы $\vec{a} = (7,4,6)$, $\vec{в} = (2,1,1)$, $\vec{c} = (19,11,17)$.

Решение:

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Найдём смешанное произведение векторов:

$$(\vec{a}\ \vec{в}\ \vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 49 + 76 + 132 - 114 - 77 - 56 = 10 \neq 0.$$

Следовательно, вектора не компланарны.

Ответ: нет.

Задача 5

Найти координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении $1:3$, если *A(-5,1,6), B(1,4,3)*.

Решение:

Координаты точки, делящей отрезок в отношении $\lambda = \alpha : \beta$, находятся по формулам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}.$$

У нас $\lambda = 1/3$, тогда получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5 + 1/3 \cdot 1}{1 + 1/3} \\ y = \dfrac{1 + 1/3 \cdot 4}{1 + 1/3} \\ z = \dfrac{6 + 1/3 \cdot 3}{1 + 1/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{7}{4} \\ z = \dfrac{21}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{21}{4}\right).$$

Ответ: $M\left(-\frac{7}{2},\frac{7}{4},\frac{21}{4}\right)$.

Задача 6

На прямую $l; 3x+2y-12=0$, способную отражать лучи, падает луч, заданный уравнением $l_1; 3x+4y-18=0$. Составить уравнение отраженного луча.

Решение:

Известно, что угол падения равен углу отражения, т.е. $\angle\varphi_1=\angle\varphi_2$. Следовательно, $tg\varphi_1=tg\varphi_2$ (Рисунок 7).

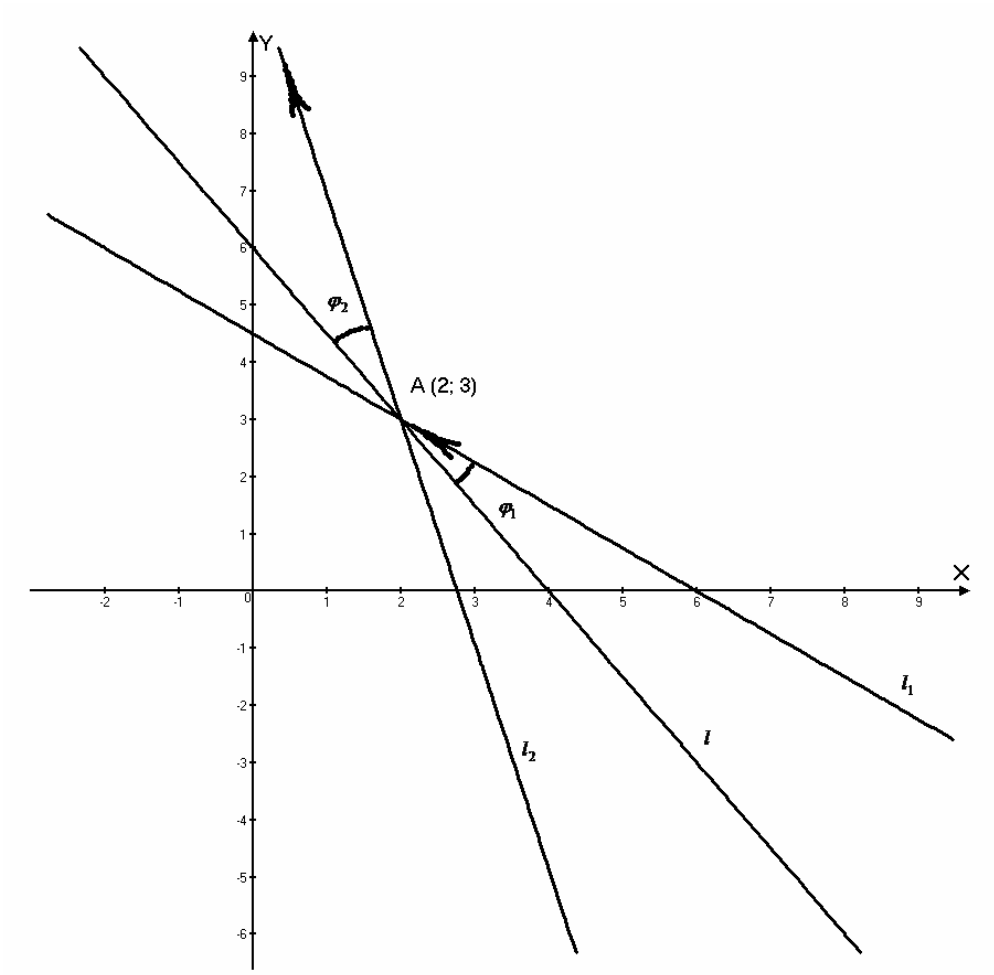


Рисунок 7– График падения луча

Обозначим:

A - точка падения луча – точка пересечения прямых;

l_2 - прямая, соответствующая отраженному лучу;

k - угловой коэффициент прямой l;

k_1 - угловой коэффициент прямой l_1;

k_2 - угловой коэффициент отраженного луча.

Уравнение прямой l_2 будем искать в виде: $y - y_A = k_2(x - x_A)$.
Найдем координаты точки A как точки пресечения прямых l и l_1:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0 \\ 3x + 4y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_A = 2,\ y_A = 3$$

Найдем угловые коэффициенты прямых:

$$l: 2y = -3x + 12, \quad y = -\frac{3}{2}x + 6, \quad k = -\frac{3}{2};$$
$$l_1: 4y = -3x + 18, \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}, \quad k_1 = -\frac{3}{4}.$$

Запишем тангенс угла между прямыми l и l_1:

$$tg\varphi_1 = \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \frac{-\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{6}{17}.$$

Для нахождения углового коэффициента прямой l_2 запишем тангенс угла между прямыми l и l_2 и учтем, что $tg\varphi_1 = tg\varphi_2$.

$$tg\varphi_2 = \frac{k - k_2}{1 + k_2 k} = \frac{-\frac{3}{2} - k_2}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)k_2} = \frac{6}{17} \Rightarrow$$

$$17\left(-\frac{3}{2} - k_2\right) = 6\left(1 - \frac{3}{2}k_2\right) \Rightarrow k_2 = -\frac{63}{16}.$$

Подставляя найденные значения x_A, y_A и k_2, получаем искомое уравнение отраженного луча: $y - 3 = -\frac{63}{16}(x - 2)$ или $63x + 16y - 174 = 0$.

Ответ: $63x + 16y - 174 = 0$

Задача 7

Дан треугольник ABC с вершинами $A(5;6),\ B(4;-5).C(-4;5)$. (Рисунок 8) Найти:

а) величину угла A;

б) координаты точки пересечения медиан;

в) координаты точки пересечения высот;

г) длину высоты, опущенной из вершины A;

д) площадь треугольника ABC;

е) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

ж)систему неравенств, задающих область внутри треугольника.

Решение:

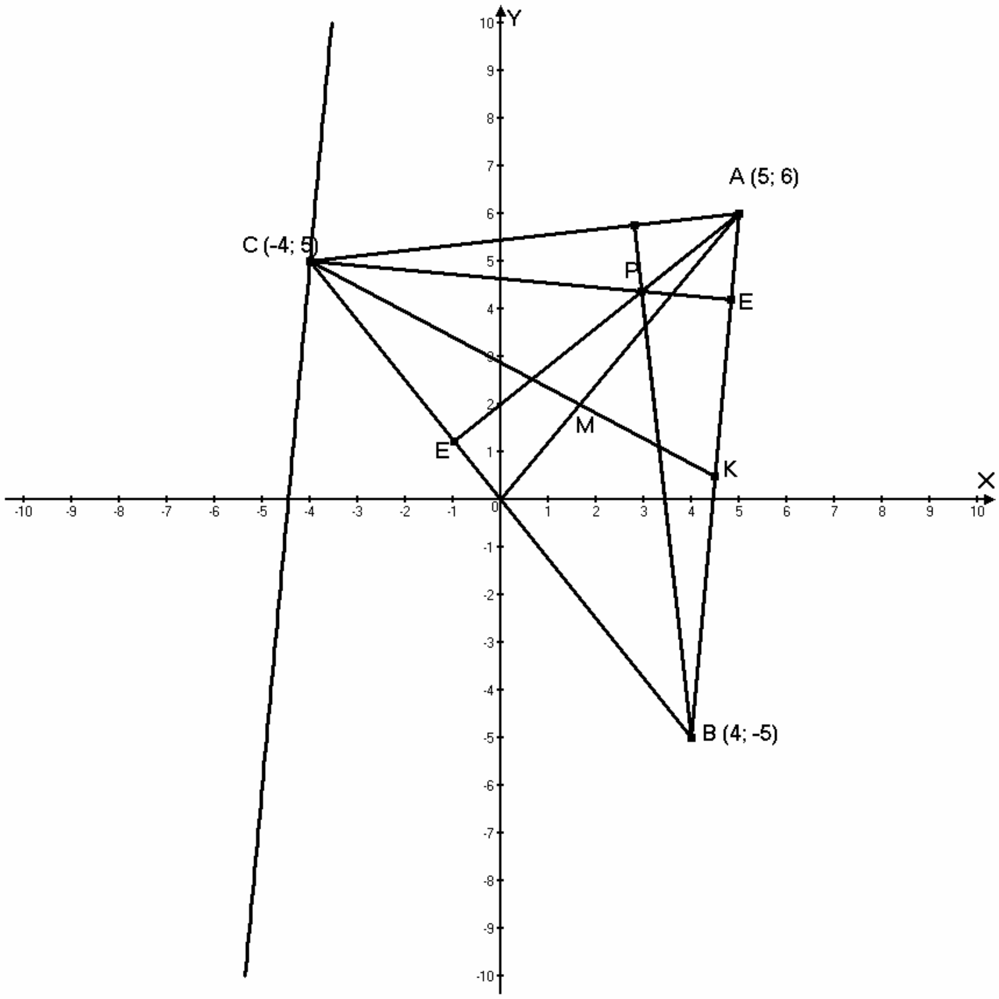


Рисунок 8– Треугольник ABC с вершинами $A(5;6),\ B(4;-5).C(-4;5)$.

Найдем уравнения сторон треугольника ABC и угловые коэффициенты, используя уравнение прямой, заданной двумя точками:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Уравнение прямой AB :

$$\frac{x-5}{4-5}=\frac{y-6}{-5-6}\Leftrightarrow\frac{x-5}{-1}=\frac{y-6}{-11}\text{, отсюда } 11x-y-49=0 \text{ или } y=11x-49.$$

Угловой коэффициент прямой AB равен $k_{AB}=11$.

Уравнение прямой AC:

$$\frac{x-5}{4-5}=\frac{y-6}{-5-6}\Leftrightarrow\frac{x-5}{-1}=\frac{y-6}{-11}\text{, отсюда } 11x-y-49=0 \text{ или } y=\frac{1}{9}x+\frac{49}{9}.$$

Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{AC}=\frac{1}{9}$.

Уравнение прямой BC:

$$\frac{x-4}{-4-4}=\frac{y+5}{5+5}\Leftrightarrow\frac{x-4}{-8}=\frac{y+5}{10}\text{, отсюда } 5x+4y=0 \text{ или } y=-\frac{5}{4}x.$$

Угловой коэффициент прямой BC равен $k_{BC}=-\frac{5}{4}$.

а) вычислим внутреннюю величину угла A треугольника ABC:

$tgA=\dfrac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}k_{AC}}=\dfrac{11-\frac{1}{9}}{1+11\cdot\frac{1}{9}}=\dfrac{98}{20}=4{,}9$, отсюда (по таблице Брадиса или с помощью инженерного калькулятора), $\angle A=1{,}37$ радиан.

б) Обозначим: M - точку пересечения медиан, K и O - середины отрезков AB и BC соответственно.

Найдем координаты середин сторон, используя формулы $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, и уравнения соответствующих медиан.

Точка K:

$$x=\frac{5+4}{2}=\frac{9}{2},\ y=\frac{6-5}{2}=\frac{1}{2},$$

тогда уравнение медианы CK : $\dfrac{x+4}{\frac{9}{2}+4}=\dfrac{y-5}{\frac{1}{2}-5}$, отсюда $9x+17y-49=0$.

Точка O:

$$x = \frac{4-4}{2} = 0,\ y = \frac{-5+5}{2} = 0,$$

тогда уравнение медианы AO: $\dfrac{x-0}{5-0} = \dfrac{y-0}{6-0}$, отсюда $6x - 5y = 0$.

Координаты точки пересечения медиан найдем, решая систему уравнений, задающих медианы:

$$\begin{cases} 9x + 17y - 49 = 0 \\ 6x - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{245}{147} \\ y = 2 \end{cases}, \text{ т.е } M\left(\frac{245}{147}, 2\right).$$

в) Обозначим через P - точку пересечения высот CD и AE.

Уравнение высоты CD будем искать в виде: $y - y_C = k_{CD}(x - x_C)$.

Так как прямые CD и AB перпендикулярны, то $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{1}{11}$. Тогда $y - 5 = -\dfrac{1}{11}(x+4)$ или $x + 11y - 51 = 0$.

Уравнение высоты AE будем искать в виде $y - y_A = k_{AE}(x - x_A)$.

Так как прямые AE и BC перпендикулярны, то $k_{AE} = -\dfrac{1}{k_{BC}} = -\dfrac{1}{-\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$. Тогда

$y - 6 = \dfrac{4}{5}(x - 5)$ или $4x - 5y + 10 = 0$.

Координаты точки пересечения высот найдем, решая систему уравнений, задающих высоты:

$$\begin{cases} x + 11y - 51 = 0 \\ 4x - 5y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{145}{49} \\ y = \dfrac{214}{49} \end{cases}, \text{ т.е } P\left(\frac{145}{49}, \frac{214}{49}\right).$$

г) длину высоты AE найдем по формуле расстояния от точки до прямой:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

У нас это точка $A(5,6)$ и прямая BC $5x + 4y = 0$:

$$d=\frac{|5\cdot 5+4\cdot 6+0|}{\sqrt{5^2+4^2}}=\frac{49}{\sqrt{41}}=\frac{49\sqrt{41}}{41}\text{ (ед.).}$$

д) площадь треугольника найдем по формуле: $S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{vmatrix}$.

Получаем

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5-(-4) & 6-5\\ 4-(-4) & -5-5\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}9 & 1\\ 8 & -10\end{vmatrix}=49\text{ (кв.ед.).}$$

е) так как искомая прямая параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны.

Используя уравнение $y-y_C=k_{AB}(x-x_C)$, получаем: $y-5=11(x+4)$ или $11x-y+49=0$.

ж) Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости.

Уравнение прямой AB: $11x-y-49=0$; уравнение прямой AC: $11x-y-49=0$; уравнение прямой BC: $5x+4y=0$.

Для определения нужной полуплоскости берем любую точку, лежащую внутри треугольника, например точку (1,1), и подставляем ее координаты в уравнения прямых.

Получаем: $11\cdot 1-1-49=-39<0$, $1-9\cdot 1+49=41>0$, $5\cdot 1+4\cdot 1=9>0$.

Следовательно, система неравенств имеет вид: $\begin{cases}11x-y-49\le 0\\ x-9y+49\ge 0\\ 5x+4y\ge 0\end{cases}$.

Ответ: а) $\angle A=1{,}37$ радиан; б) $M\left(\frac{245}{147},2\right)$; в) $P\left(\frac{145}{49},\frac{214}{49}\right)$; г) $\frac{49\sqrt{41}}{41}$ (ед.);

д) 49 (кв.ед.); е) $11x-y+49=0$; ж) $\begin{cases}11x-y-49\le 0\\ x-9y+49\ge 0\\ 5x+4y\ge 0\end{cases}$.

Задача 8

Привести уравнение кривой второго порядка $2x^2+4x+y^2-4=0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $2x+y+2=0$. Построить графики прямой и кривой.

Решение:

Разделим обе части равенства $2x^2 + 4x + y^2 - 4 = 0$ на 2 и выделим полный квадрат для переменной x:

$$x^2 + 2x + \frac{1}{2}y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 - 1 + \frac{1}{2}y^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 3 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$$ - эллипс с центром в точке (-1,0) .

Найдем точки пересечения эллипса и прямой: $\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 1 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{4(x+1)^2}{6} = 1 \\ y = -2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6(x+1)^2}{6} = 1 \\ y = -2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 1 \\ y = -2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 1 = \pm 1 \\ y = -2(x+1) \end{cases} \Rightarrow$$

Получаем две точки: $P_1(0,-2)$ и $P_2(-2,2)$ (Рисунок 9).

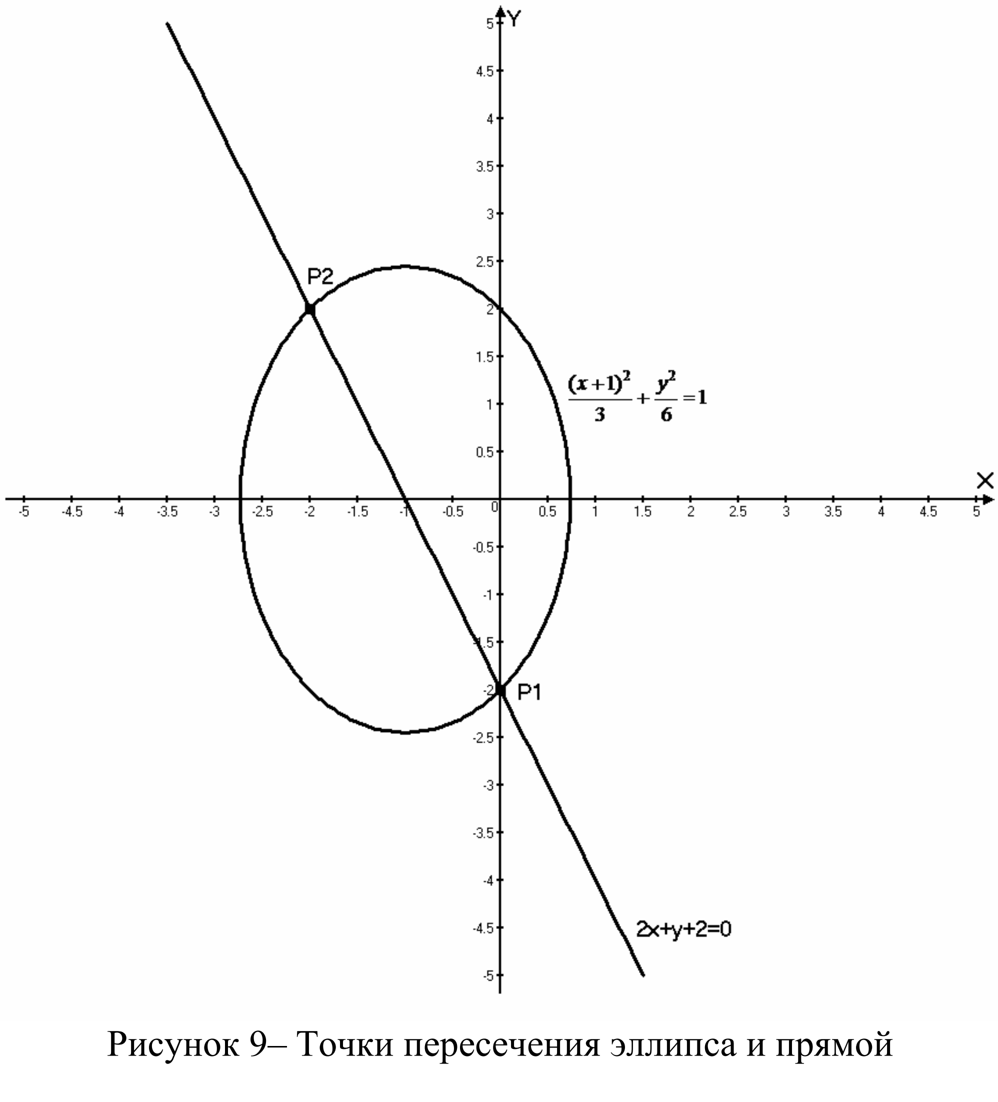


Рисунок 9– Точки пересечения эллипса и прямой

Ответ: $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ - эллипс; $P_1(0,-2)$ и $P_2(-2,2)$.

Задача 9

Составить уравнение кривой, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $F(2,4)$ к расстоянию до прямой $l: x=-4$ равно 2. Привести это уравнение к каноническому виду и определить тип кривой.

Решение:

Возьмем на линии текущую точку $M(x;y)$ и, исходя из условия задачи, найдем зависимость между координатами этой точки. Перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую $x=-4$, пересекает ее в точке $N(-4;y)$. По условию задачи $\frac{|MF|}{|MN|}=2$ или $|MF|=2|MN|$.

Используя формулу для нахождения расстояния между точками, получаем:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=2\sqrt{(x+4)^2+(y-y)^2}.$$

Возводя в квадрат, раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получаем:

$$3x^2+36x+60-(y-4)^2=0.$$

Разделим обе части равенства на 3 и выделим полный квадрат для переменной x:

$$x^2+12x+20-\frac{1}{3}(y-4)^2=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot 6+36-36+20-\frac{1}{3}(y-4)^2=0$$

$$3x^2+36x+60-(y-4)^2=0$$

$$\frac{(x+6)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{48}=1.$$

Следовательно – искомая линия – гипербола с центром в точке (-6,4) (Рисунок 10).

Ответ: гипербола $\frac{(x+6)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{48}=1$.

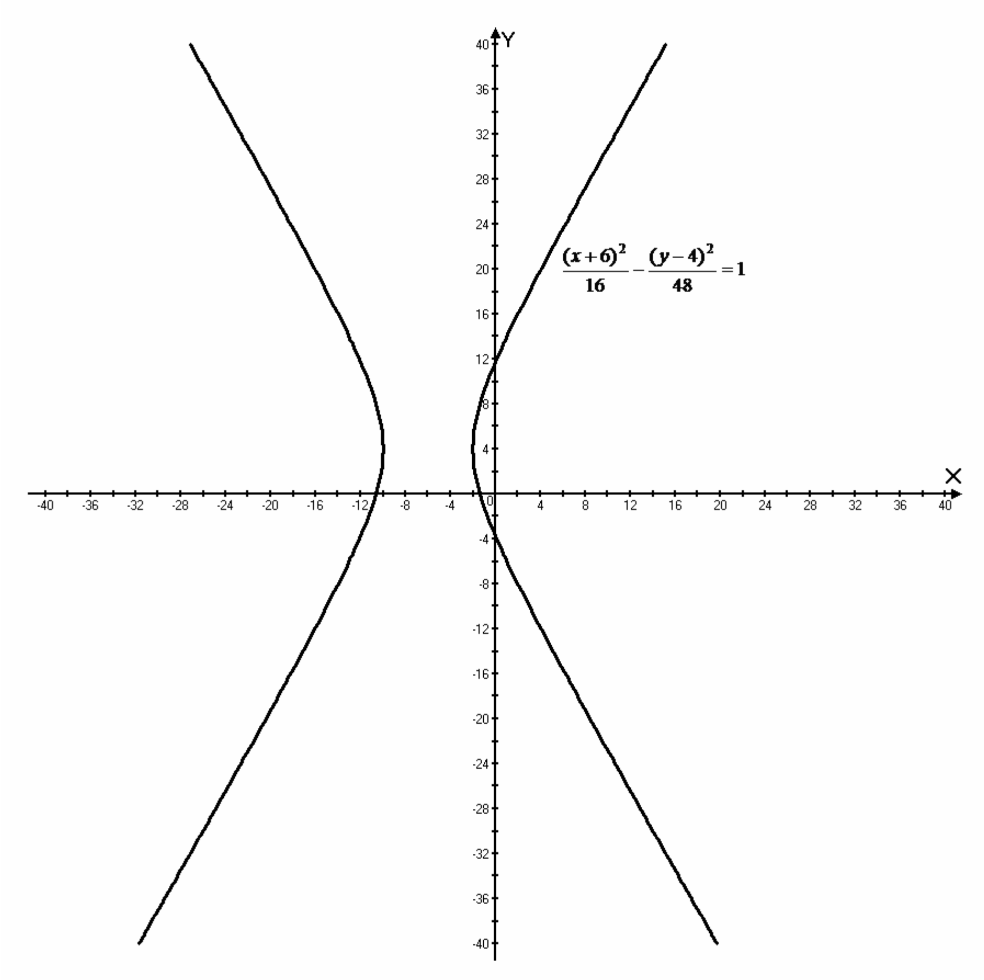


Рисунок 10 – Гипербола с центром в точке (-6,4)

Задача 10

Составить канонические уравнения:

а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5},0)$;

б) гиперболы с мнимой полуосью равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13},0)$;

в) параболы, имеющей директрису $x=-3$.

Решение:

а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

По условию задачи $a=3$, $c=\sqrt{5}$. Для эллипса справедливо равенство $b^2=a^2-c^2$.

Для нашей задачи получаем: $b^2=3^2-\sqrt{5}^2=9-5=4$.

Подставляя в каноническое уравнение эллипса, поучаем: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

По условию задачи $b = 2$, $c = \sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$.

Для нашей задачи получаем: $b^2 = \sqrt{13}^2 - 2^2 = 13 - 4 = 9$.

Подставляя в каноническое уравнение гиперболы, поучаем: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

в) Каноническое уравнение параболы в нашем случае имеет вид $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -p/2$.

По условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому $-p/2 = -3 \Rightarrow p = 6$.

Подставляя в каноническое уравнение параболы, поучаем $y^2 = 12x$.

Ответ: а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; в) $y^2 = 12x$.

Задача 11

Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющий центр в его верхней вершине.

Решение:

Каноническое уравнение данного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Отсюда получаем: верхняя вершина – точка $A(0,1)$, a=2, b=1, тогда $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-1} = 3$.

Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3}.0)$.

Найдем радиус окружности, используя формулу для нахождения расстояния между двумя точками:

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3-1} = 2.$$

Подставляя найденные значения в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, получаем: $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ или $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Ответ: $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

Задача 12

Построить кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 2 - 2\sin t \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

Решение:

Найдем координаты достаточного количества точек, принадлежащих линии, отметим их на координатной плоскости и соединим плавной линией. Результаты промежуточных вычислений запишем в таблицу (Таблица 2).

Таблица 2 – Результаты промежуточных вычислений

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$x = 1 + 3\cos t$	4	3,55	3,1	2,5	1	-1,1	-1,55	-2
$y = 2 - 2\sin t$	2	1	0,6	0,3	0	0,6	1	2

Продолжение таблицы 2 – Результаты промежуточных вычислений

t	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin t$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$x = 1 + 3\cos t$	-1,55	-1,1	1	2,5	3,1	3,55	4
$y = 2 - 2\sin t$	3	3,4	4	3,7	3,4	3	2

Можно предположить, что данная кривая – эллипс с полуосями a=3, b=2 и центром в точке *C(1,2)*.

Исключая из данных равенств параметр t и используя тождество $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, получаем:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 2 - 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3\cos t \\ y - 2 = -2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \cos t \\ \dfrac{y-2}{-2} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)}{4} = 1$$

– эллипс с полуосями a=3, b=2 и центром в точке *(1,2)* (Рисунок 11).

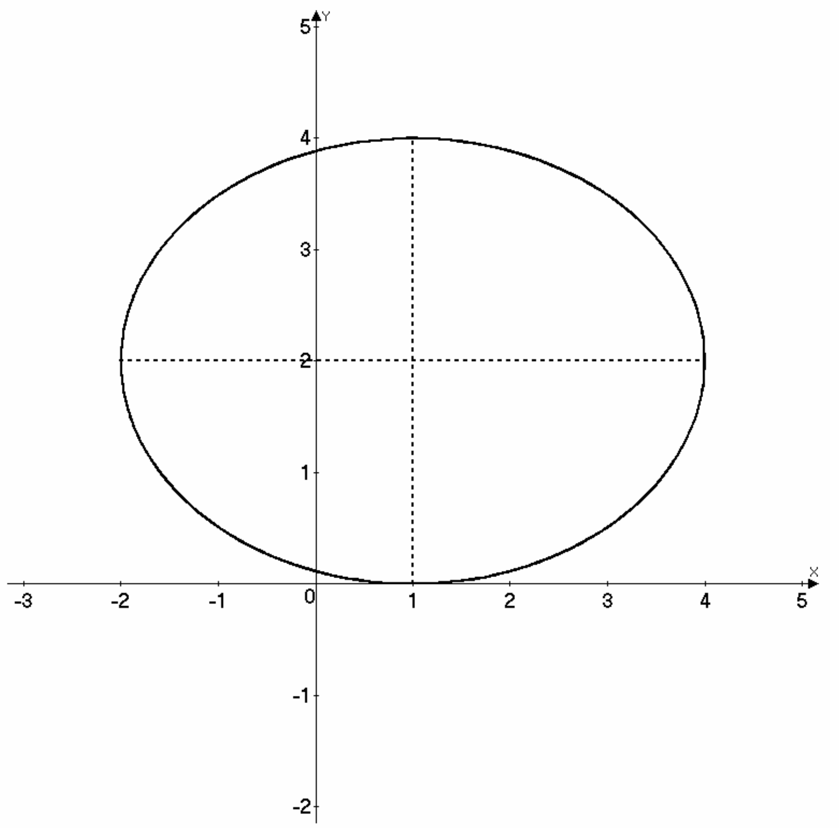


Рисунок 11 – Эллипс с полуосями *a*=3, *b*=2 и центром в точке *(1,2)*

Ответ: $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)}{4}=1$.

Задача 13

Построить по точкам график функции $r=2\sin\varphi$ в полярной системе координат. Значения функции вычислять в точках $\varphi_k=\dfrac{\pi k}{8}$. Найти уравнение кривой в прямоугольной системе координат и определить ее вид.

Решение:

Так как $r\geq 0$, то и $\sin\varphi\geq 0$, а значит $0\leq\varphi\leq\pi$ и вся кривая расположена в верхней полуплоскости.

Составим вспомогательную таблицу (Таблица 3):

Таблица 3 – Таблица вспомогательных вычислений

Номер точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\sin\varphi$	0	0,38	0,71	0,92	1	0,92	0,71	0,38	0
$r = 2\sin\varphi$	0	0,76	1,42	1,84	2	1,84	1,42	0,76	0

По результатам вычислений строим в полярной системе координат точки и соединяем их (Рисунок 12).

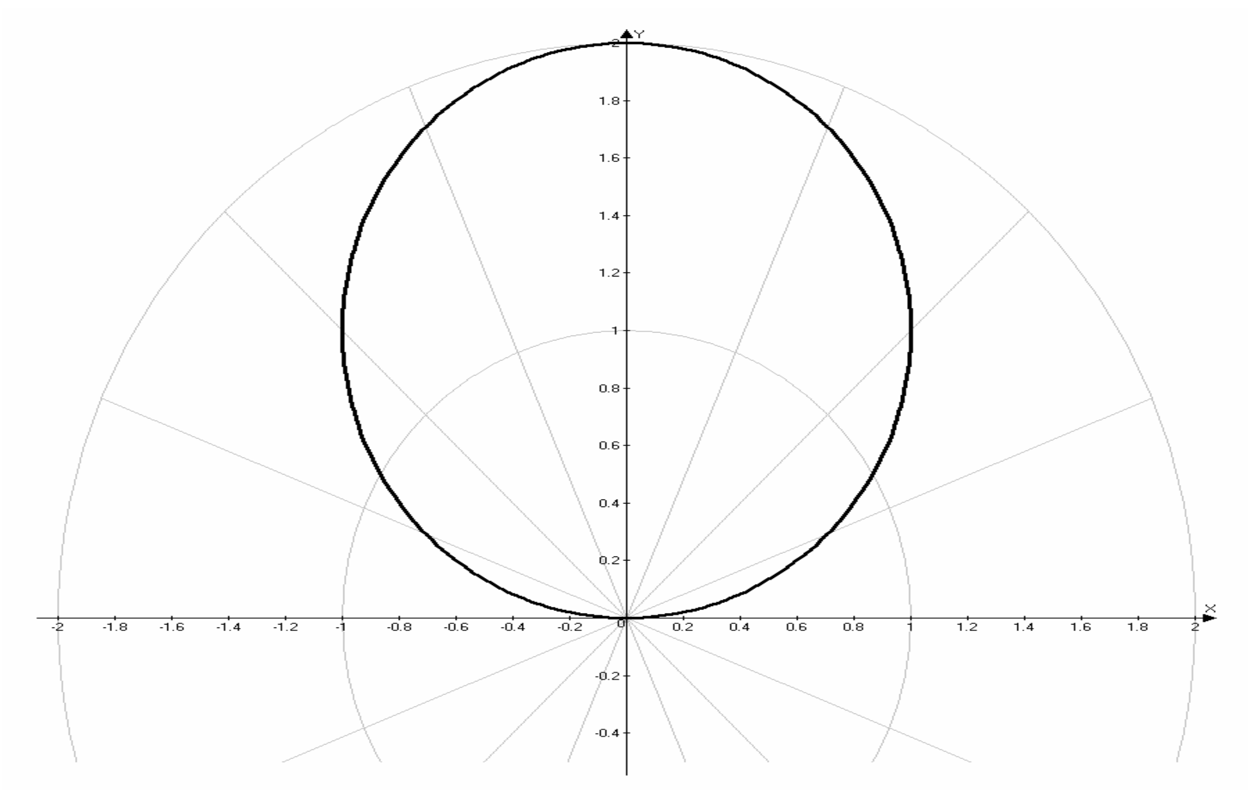


Рисунок 12 – График функции $r = 2\sin\varphi$

Найдем уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат, используя формулы $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

– окружность с центром в точке (0, 1) и радиусом 1.

Ответ: $x^2 + (y-1)^2 = 1$

Задача 14

Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A(2,5,-3) перпендикулярно вектору $\vec{BC}$, если B(7,8,-1), C(9,7,4).

Решение:

Найдём координаты вектора $\vec{BC}$:

$\vec{BC}$=(9,7,4) - (7,8,-1)= (2,-1,5).

Воспользуемся уравнением плоскости заданной точкой и нормальным вектором:

$a(x-x_0)+в(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

Получаем:

$$2(x-2)-1(y-5)+5(z+3)=0$$
$$2x-4-y+5+5z+15=0$$
$$2x-y+5z+16=0$$ - искомое уравнение.

Ответ: $2x-y+5z+16=0$.

Задача 15

Написать каноническое уравнение прямой, заданной двумя плоскостями:

$$\begin{cases} 2x-3y-2z+6=0 \\ x-3y+z+3=0 \end{cases}$$

Решение:

Каноническое уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}=\dfrac{z-z_0}{\gamma}$,

где $(x_0, y_{0,} z_0)$ - координаты данной точки M_0 прямой, (α,β,γ)- координаты направляющего вектора $\vec{a}$ прямой.

$\vec{a}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1(2,-3,-2)$ $и$ $\vec{n}_2(1,-3,1)$ - нормальные вектора плоскостей, задающих прямую.

$$\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-3i-2j-6k+3k-6i-2j=-9i-4i-3k.$$

То есть $\vec{a} = (-9,-4,-3)$.

Найдём координаты какой-либо точки прямой.

При z = 0 получает: $\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$

Решая систему любым способом, получаем $x = -3; y = 0$, то есть $M_0(-3,0,0)$, тогда искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{x+3}{-9} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-0}{-3} \Leftrightarrow \frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

Ответ: $\frac{x+3}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Задача 16

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}$ и плоскости $2x - 3y + z - 8 = 0$.

Решение:

Проверим, пресекаются ли данные прямая и плоскость. Это происходит тогда, когда направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости не ортогональны, то есть их скалярное произведение не равно нулю. Направляющий вектор прямой $\vec{a}(2,0,-1)$, нормальный вектор плоскости $\vec{n}(2,-3,1)$. Их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 = 3 \neq 0$, значит, прямая и плоскость пересекаются.

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}.$$

Подставим выражения для *x, y, z* в уравнение плоскости и найдем значение t_0, при котором прямая и плоскость пересекаются: $2(2t+1) - 3(-1) + (-t) - 8 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$. Найденное значение $t_0 = 1$ подставим в параметрическое уравнение прямой: $\begin{cases} x = 2 \cdot 1 + 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \\ z = -1 \end{cases}$.

Следовательно, прямая и плоскость пересекаются в точке (3,-1,-1).

Ответ: (3,-1,-1).

Задача 17

По координатам вершин A (3; – 2; 2), B (1; – 3; 1), C (2; 0; 4),
D (6; – 4; 6) пирамиды ABCD найти:
а) длины ребер AB и AC;
б) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
в) объем пирамиды ABCD;
г) высоту, опущенную из вершины D на грань ABC;
д) уравнение прямой AB;
е) уравнение плоскости *BCD*;
ж) синус угла между прямой *AB* и плоскостью *BCD*;
з) косинус угла между плоскостью *xOy* и плоскостью *BCD.*

Решение:
Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (1-3;\ -3-(-2);\ 1-2) = (-2;\ -1;\ -1);$$
$$\overline{AC} = (2-3;\ 0-(-2);\ 4-2) = (-1; 2; 2);$$
$$\overline{AD} = (6-3;\ -4-(-2);\ 6-2) = (3; -2; 4).$$

а) Длины ребер *AB* и *AC* найдем как длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}\,,\ \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3\,,$$

т.е. $AB = \sqrt{6}$ (ед.), $AC = 3$ (ед.).

б) Угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ найдём, используя скалярное произведение векторов: $\cos\left(\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{AC}\right) = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$, тогда

$$\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{6}\cdot 3 = 3\sqrt{6}, \quad \overline{AB}\cdot\overline{AC} = -2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 2 = -2;$$
$$\cos\left(\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{AC}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{6}}.$$

в) Объём пирамиды равен $1/6$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$, как на сторонах. Объём параллелепипеда найдём, используя смешанное произведение векторов:

$$\left(\overline{AB}\quad \overline{AC}\quad \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-30.$$

Объём параллелепипеда равен $V=|-30|=30$ (ед^3). Тогда объём пирамиды равен $V=\frac{1}{6}\cdot 30=5$ (ед^3).

г) Из школьного курса известна формула объёма пирамиды: $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$. Отсюда $h=\frac{3V}{S_{осн.}}$.

Площадь основания найдём, используя векторные произведения векторов:

$\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=5\bar{j}-5\bar{k}$, то есть вектор векторного произведения имеет координаты (0, 5, -5).

$$S_{осн}=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+5^2+\left(-5^2\right)}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ (\text{ед.}^2).$$

$$h=\frac{3\cdot 5}{\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\cdot 2}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\ (\text{ед.}).$$

д) Для нахождения уравнения прямой *AB* используем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Имеем: $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+2}{-3-(-2)}=\frac{z-2}{1-2}$,

$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ – каноническое уравнение искомой прямой.

$\begin{cases}\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-1}\\ \frac{x-3}{-2}=\frac{z-2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1(x-3)=-2(y+2)\\ -1(x-3)=-2(z-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-7=0\\ x-2z+1=0\end{cases}$ – общее уравнение искомой прямой.

е) Для нахождения уравнения плоскости BCD используем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Имеем: $\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 2-1 & 0+3 & 4-1 \\ 6-1 & -4+3 & 6-1 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0,$

т.е. $18\cdot(x-1)+10\cdot(y+3)-16\cdot(z-1)=0,\ 18x-18+10y+30-16z+16=0.$

$18x+10y-16z+28=0$ – искомое уравнение, или $9x+5y-8z+14=0$.

ж) синус угла между прямой AB и плоскостью BCD (это угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости) находится по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\lambda^2}}.$$

Получаем:

$$\sin\varphi=\frac{|9\cdot(-2)+5(-1)+8(-1)|}{\sqrt{9^2+5^2+8^2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{31}{\sqrt{170}\sqrt{6}}=\frac{31}{2\sqrt{255}}=\frac{31\sqrt{255}}{510}.$$

з) косинус угла между плоскостью xOy и плоскостью BCD найдем по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Получаем

$$\cos\varphi=\frac{|0\cdot 9+0\cdot 5+1\cdot 8|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{9^2+5^2+8^2}}=\frac{8}{\sqrt{170}}=\frac{8\sqrt{170}}{170}=\frac{4\sqrt{170}}{85}.$$

Ответ: а) $\sqrt{6}$; 3; б) $\dfrac{-2}{3\sqrt{6}}$; в) 5; г) $3\sqrt{2}$; д) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$;

е) $9x+5y-8z+14=0$; ж) $\dfrac{31\sqrt{255}}{510}$; з) $\dfrac{4\sqrt{170}}{85}$.

Задача 18

Построить схематично график функции и назвать полученную поверхность второго порядка.

а) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$,

б) $-\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2 = 0$,

в) $3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0$

Решение:

а) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ – эллиптический параболоид.

Строим схематично его график (Рисунок 13)

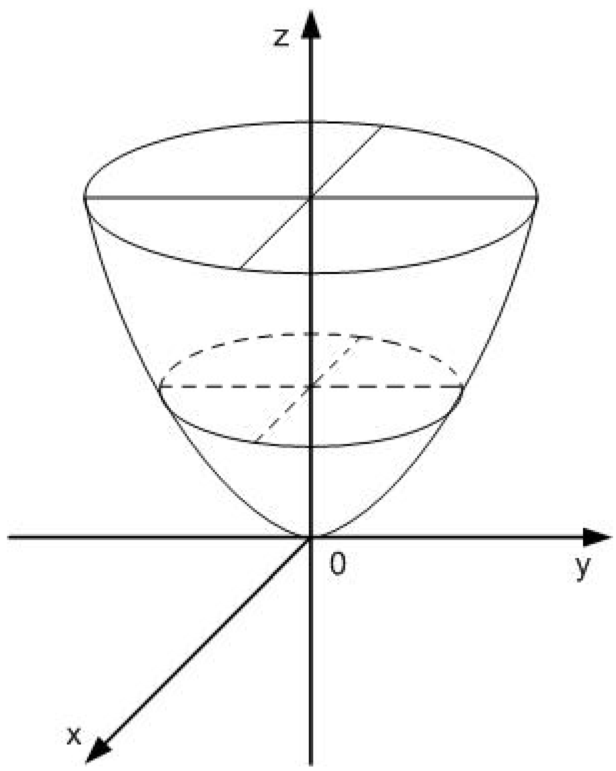


Рисунок 13 – Эллиптический параболоид

б) $-\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2 = 0$ - приведем уравнение к каноническому виду: $-\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1$ - гиперболоид, для которого $OB = \sqrt{2}/2, OC = 2$ полуоси его «горлового» эллипса (Рисунок 14).

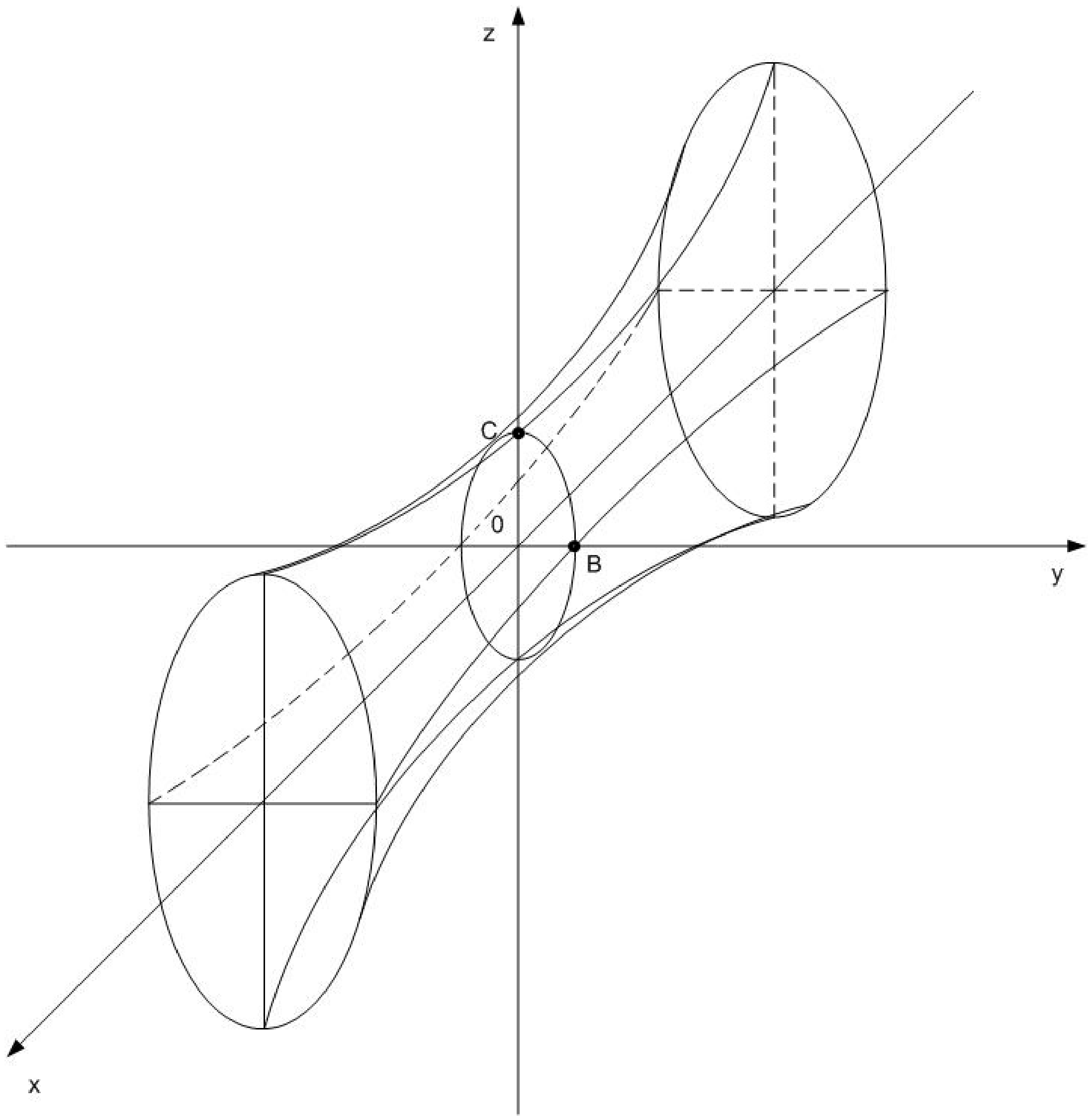


Рисунок 14– Эллиптический гиперболоид

в) $3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0$ - приведем уравнение к каноническому виду:

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0$ - конус второго порядка, для которого сечения плоскостями $z = const$ являются эллипсами (Рисунок 15).

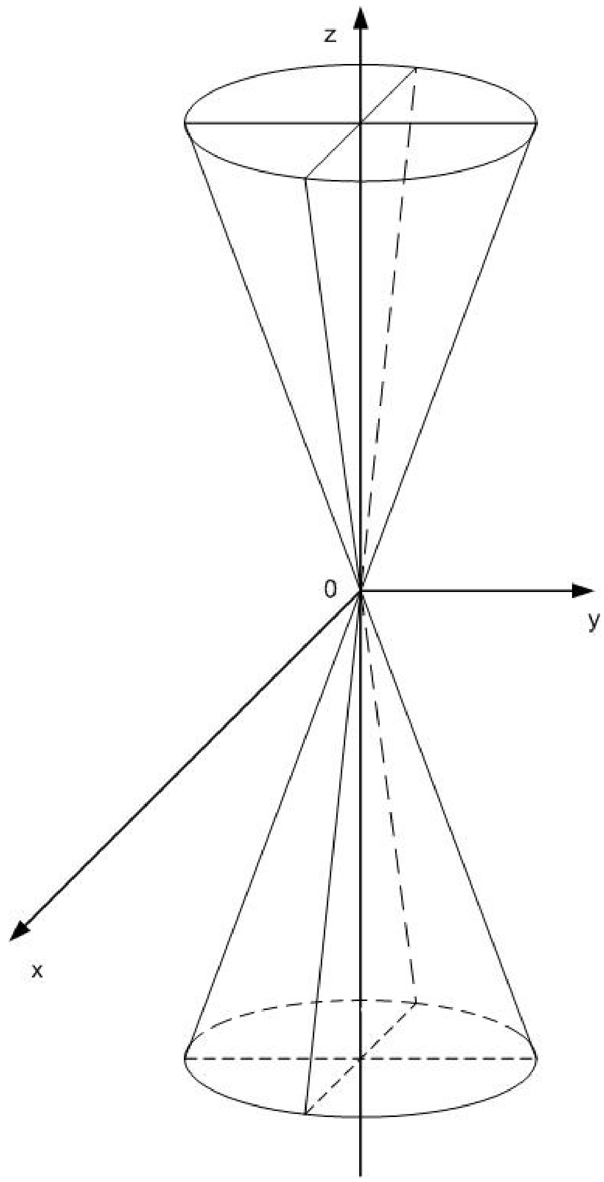


Рисунок 15 – Конус второго порядка

Задача 19

Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат:

а) параболы $z=-\frac{1}{2}y^2$ вокруг оси Oy;

б) параболы $z=-\frac{1}{2}y^2$ вокруг оси Oz;

в) эллипса $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ вокруг оси Oz;

г) эллипса $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ вокруг оси Oy.

Решение:

При решении будем пользоваться следующим правилом: если линия лежит в плоскости yOz и имеет уравнение $\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$, то при вращении ее вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$, заменяя y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$; при вращении вокруг оси Oy получаем другую поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$, заменяя z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

а) по условию $z=-\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow \pm\sqrt{x^2+z^2}=-\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow x^2+z^2=\frac{y^4}{4}$ $\Rightarrow 4x^2-y^4+4z^2=0$ – алгебраическая поверхность четвертого порядка (Рисунок 16).

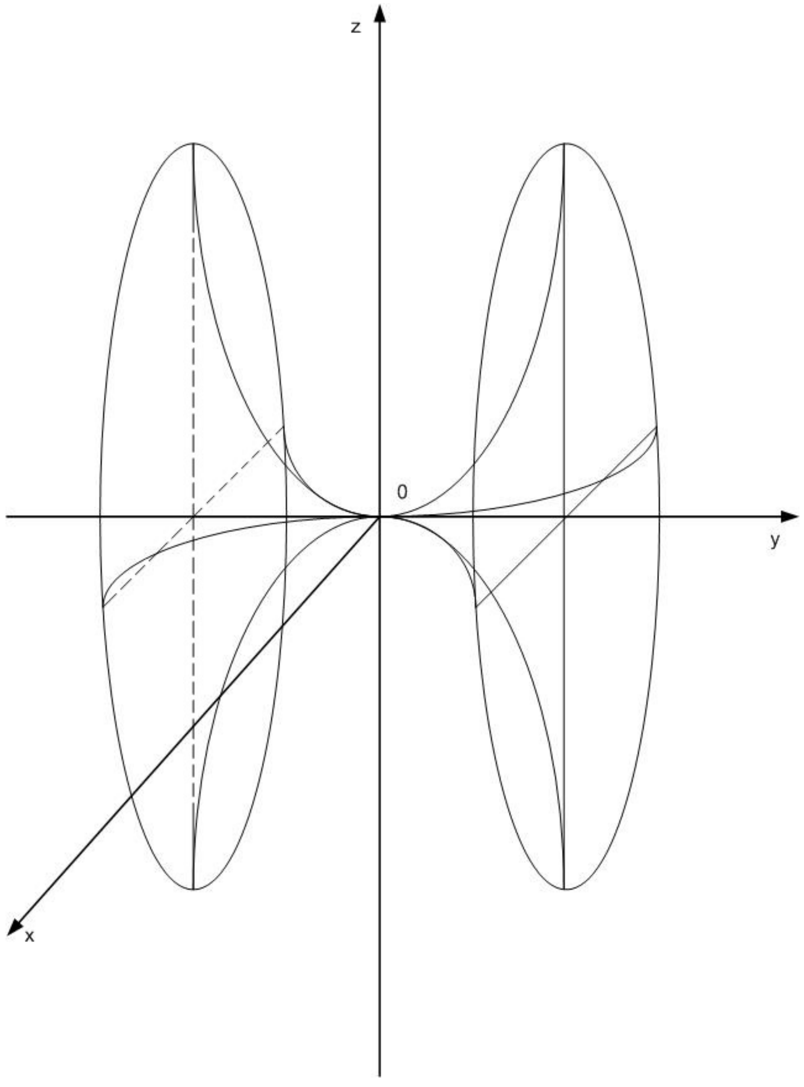


Рисунок 16 – Алгебраическая поверхность четвертого порядка б) по условию $z=-\frac{1}{2}y^2 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ - параболоид вращения (Рисунок 17).

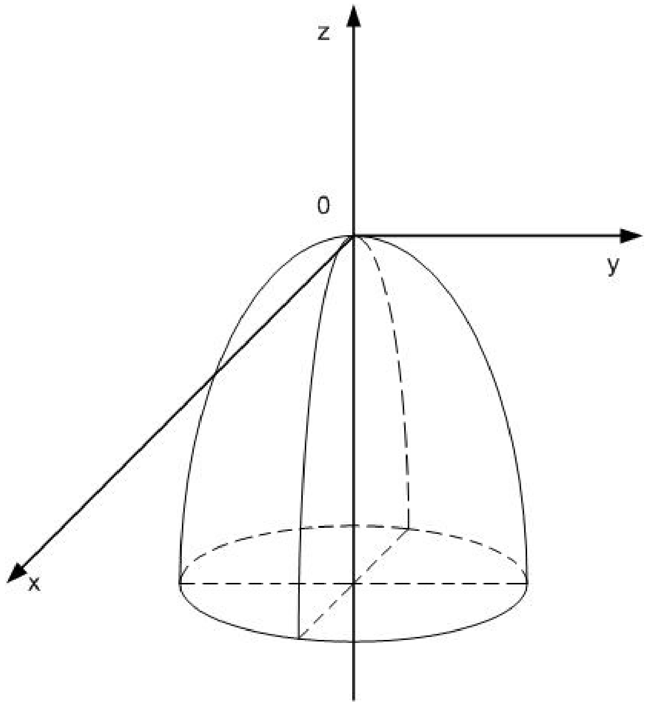


Рисунок 17 – Параболоид вращения

в) по условию $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ - эллипсоид вращения с полуосями главных сечений $OA=OB=8, OC=2$ (Рисунок 18).

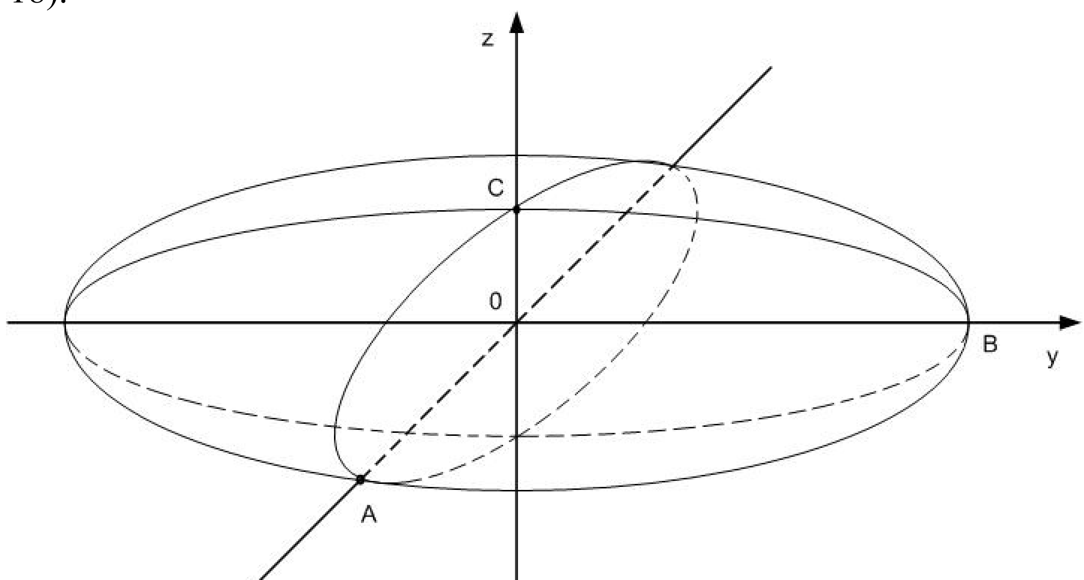


Рисунок 18 – Эллипсоид вращения с полуосями главных сечений $OA=OB=8, OC=2$

г) по условию $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{64}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ - эллипсоид вращения с полуосями главных сечений $OA=OC=2,\ OB=8$ (Рисунок 19).

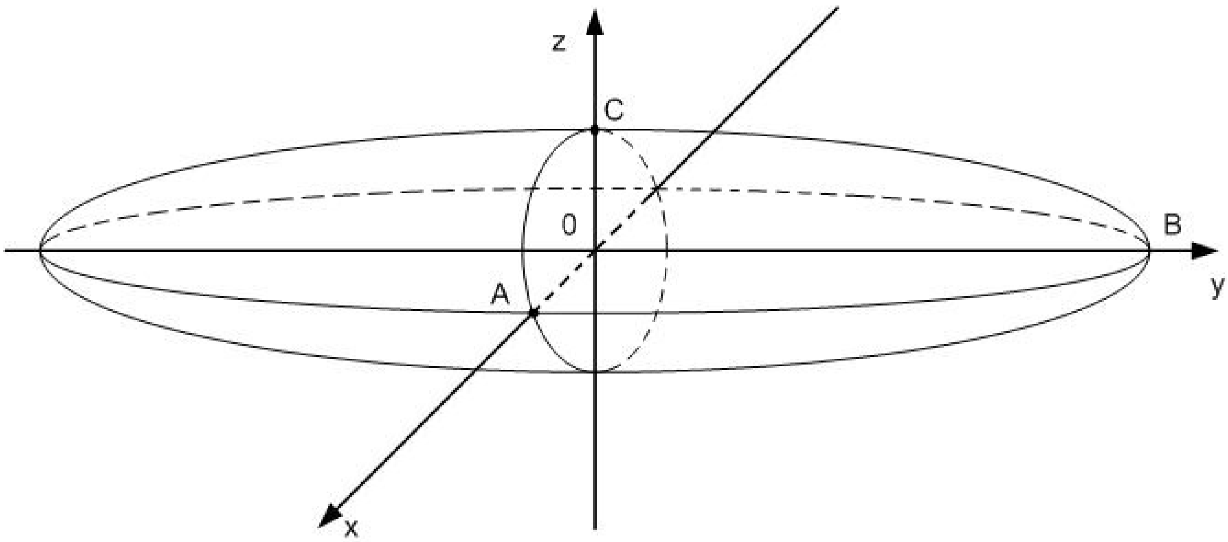


Рисунок 19 – Эллипсоид вращения с полуосями главных сечений $OA=OC=2,\ OB=8$

Ответ: а) $4x^2-y^4+4z^2=0$,

б) $z=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$,

в) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$,

г) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$.

Задача 20

Сила F(2,3,-5) приложена к точке A(1,-2,2).

Вычислить:

а) работу A силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение B(1,4,0);

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Решение:

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны: $\overrightarrow{AB}=(1-1,4+2,0-2)=(0,6,-2)$. Тогда $\overrightarrow{BA}=(0,-6,2)$.

а) Так как $A = F \cdot s$ (скалярное произведение векторов), где $s = \overrightarrow{AB}$, то $A = F \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-2) = 28$;

б) Так как момент силы $M = \left[\overrightarrow{BA}, F\right]$ (векторное произведение векторов), то $M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24i + 4j + 12k$.

Следовательно, $|M| = \sqrt{24^2 + 4^2 + 12^2} = 4\sqrt{46}$.

Ответ: а) A=28; б) $|M| = 4\sqrt{46}$.

5 Индивидуальные задания для выполнения контрольных работ

Задача 1

Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1. $A(1,\ -2,\ 3)$, $B(0,\ -1,\ 2)$, $C(3,\ -4,\ 5)$
2. $A(0,\ -3,\ 6)$, $B(-12,\ -3,\ -3)$, $C(-9,\ -3,\ -6)$
3. $A(3,\ 3,\ -1)$, $B(5,\ 5,\ -2)$, $C(4,\ 1,\ 1)$
4. $A(-1,\ 2,\ -3)$, $B(3,\ 4,\ -6)$, $C(1,\ 1,\ -1)$
5. $A(-4,\ -2,\ 0)$, $B(-1,\ -2,\ 4)$, $C(3,\ -2,\ 1)$
6. $A(5,\ 3,\ -1)$, $B(5,\ 2,\ 0)$, $C(6,\ 4,\ -1)$
7. $A(-3,\ -7,\ -5)$, $B(0,\ -1,\ -2)$, $C(2,\ 3,\ 0)$
8. $A(2,\ -4,\ 6)$, $B(0,\ -2,\ 4)$, $C(6,\ -8,\ 10)$
9. $A(0,\ 1,\ -2)$, $B(3,\ 1,\ 2)$, $C(4,\ 1,\ 1)$
10. $A(3,\ 3,\ -1)$, $B(1,\ 5,\ -2)$, $C(4,\ 1,\ 1)$
11. $A(2,\ 1,\ -1)$, $B(6,\ -1,\ -4)$, $C(4,\ 2,\ 1)$
12. $A(-1,\ -2,\ 1)$, $B(-4,\ -2,\ 5)$, $C(-8,\ -2,\ 2)$
13. $A(6,\ 2,\ -3)$, $B(6,\ 3,\ -2)$, $C(7,\ 3,\ -3)$
14. $A(0,\ 0,\ 4)$, $B(-3,\ -6,\ 1)$, $C(-5,\ -10,\ -1)$
15. $A(2,\ -8,\ -1)$, $B(4,\ -6,\ 0)$, $C(-2,\ -5,\ -1)$
16. $A(3,\ -6,\ 9)$, $B(0,\ -3,\ 6)$, $C(9,\ -12,\ 15)$
17. $A(0,\ 2,\ -4)$, $B(8,\ 2,\ 2)$, $C(6,\ 2,\ 4)$
18. $A(3,\ 3,\ -1)$, $B(5,\ 1,\ -2)$, $C(4,\ 1,\ 1)$
19. $A(-4,\ 3,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 3)$, $C(-2,\ 4,\ -2)$
20. $A(1,\ -1,\ 0)$, $B(-2,\ -1,\ 4)$, $C(8,\ -1,\ -1)$

Задача 2

Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{в}$?

1. $\vec{a}=(1,\ -2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ 0,\ -1)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$
2. $\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ 3,\ 5)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$
3. $\vec{a}=(-2,\ 4,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -2,\ 7)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$
4. $\vec{a}=(1,\ 2,\ -3)$, $\vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$
5. $\vec{a}=(3,\ 5,\ 4)$, $\vec{b}=(5,\ 9,\ 7)$, $\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$
6. $\vec{a}=(1,\ 4,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 1,\ -1)$, $\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}$
7. $\vec{a}=(1,\ -2,\ 5)$, $\vec{b}=(3,\ -1,\ 0)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$
8. $\vec{a}=(3,\ 4,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$
9. $\vec{a}=(-2,\ -3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 0,\ 5)$, $\vec{c}_1=3\vec{a}+9\vec{b}$, $\vec{c}_2=-\vec{a}-3\vec{b}$
10. $\vec{a}=(-1,\ 4,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ -2,\ 6)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$
11. $\vec{a}=(5,\ 0,\ -1)$, $\vec{b}=(7,\ 2,\ 3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$
12. $\vec{a}=(0,\ 3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$
13. $\vec{a}=(-2,\ 7,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 5,\ 2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$
14. $\vec{a}=(3,\ 7,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ -3,\ 4)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$
15. $\vec{a}=(-1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ -7,\ 1)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$
16. $\vec{a}=(7,\ 9,\ -2)$, $\vec{b}=(5,\ 4,\ 3)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}$
17. $\vec{a}=(5,\ 0,\ -2)$, $\vec{b}=(6,\ 4,\ 3)$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{b}-10\vec{a}$
18. $\vec{a}=(8,\ 3,\ -1)$, $\vec{b}=(4,\ 1,\ 3)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{b}-4\vec{a}$
19. $\vec{a}=(3,\ -1,\ 6)$, $\vec{b}=(5,\ 7,\ 10)$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$
20. $\vec{a}=(1,\ -2,\ 4)$, $\vec{b}=(7,\ 3,\ 5)$, $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$

Задача 3

Найти:

а) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) площадь параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/6$
2. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$
3. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1/5$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/2$
4. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1/2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = 5\pi/6$
5. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = 3\pi/4$
6. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$
7. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/2$
8. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$
9. $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/6$
10. $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$
11. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$; $|\vec{p}| = 10$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/2$
12. $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$
13. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 7$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$
14. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$
15. $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$
16. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/6$
17. $\vec{a} = 5\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/3$
18. $\vec{a} = 7\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$; $|\vec{p}| = 1/2$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/2$
19. $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$; $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/4$
20. $\vec{a} = 10\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$; $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \pi/6$

Задача 4

Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

1. $\vec{a}=(2,\ 3,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 0,\ -1)$, $\vec{c}=(2,\ 2,\ 2)$,
2. $\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ 3,\ 4)$, $\vec{c}=(3,\ 1,\ -1)$,
3. $\vec{a}=(1,\ 5,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ 1,\ -1)$, $\vec{c}=(1,\ 1,\ 1)$,
4. $\vec{a}=(1,\ -1,\ -3)$, $\vec{b}=(3,\ 2,\ 1)$, $\vec{c}=(2,\ 3,\ 4)$,
5. $\vec{a}=(3,\ 3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$, $\vec{c}=(1,\ 1,\ 1)$,
6. $\vec{a}=(3,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}=(-2,\ -1,\ 0)$, $\vec{c}=(5,\ 2,\ -1)$,
7. $\vec{a}=(4,\ 3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$, $\vec{c}=(2,\ 2,\ 2)$,
8. $\vec{a}=(4,\ 3,\ 1)$, $\vec{b}=(6,\ 7,\ 4)$, $\vec{c}=(2,\ 0,\ -1)$,
9. $\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ -3,\ -7)$, $\vec{c}=(1,\ 2,\ 3)$,
10. $\vec{a}=(3,\ 7,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 0,\ -1)$, $\vec{c}=(2,\ 2,\ 1)$,
11. $\vec{a}=(1,\ -2,\ 6)$, $\vec{b}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{c}=(2,\ -6,\ 17)$,
12. $\vec{a}=(6,\ 3,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ -2,\ -1)$, $\vec{c}=(2,\ 1,\ 2)$,
13. $\vec{a}=(7,\ 3,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ -2,\ -1)$, $\vec{c}=(4,\ 2,\ 4)$,
14. $\vec{a}=(2,\ 3,\ 2)$, $\vec{b}=(4,\ 7,\ 5)$, $\vec{c}=(2,\ 0,\ -1)$,
15. $\vec{a}=(5,\ 3,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 0,\ -1)$, $\vec{c}=(4,\ 2,\ 4)$,
16. $\vec{a}=(3,\ 10,\ 5)$, $\vec{b}=(-2,\ -2,\ -3)$, $\vec{c}=(2,\ 4,\ 3)$,
17. $\vec{a}=(-2,\ -4,\ -3)$, $\vec{b}=(4,\ 3,\ 1)$, $\vec{c}=(6,\ 7,\ 4)$,
18. $\vec{a}=(3,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 0,\ -1)$, $\vec{c}=(8,\ 3,\ -2)$,
19. $\vec{a}=(4,\ 2,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ -3,\ -3)$, $\vec{c}=(2,\ 1,\ 2)$,
20. $\vec{a}=(4,\ 1,\ 2)$, $\vec{b}=(9,\ 2,\ 5)$, $\vec{c}=(1,\ 1,\ -1)$.

Задача 5

Найти координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении $\alpha:\beta$.

1. $A(4,6,3), B(-5,2,6), \alpha=5, \beta=4$;
2. $A(-3,-1,4), B(2,2,1), \alpha=2, \beta=3$;
3. $A(1,3,-2), B(-2,-2,4), \alpha=2, \beta=1$;
4. $A(3,1,-4), B(2,4,3), \alpha=1, \beta=4$;
5. $A(2,4,5), B(1,-2,3), \alpha=2, \beta=3$;
6. $A(-1,-2,4), B(1,4,2), \alpha=1, \beta=7$;
7. $A(1,3,2), B(-2,4,-1), \alpha=2, \beta=4$;
8. $A(2,-4,3), B(0,0,-2), \alpha=2, \beta=1$;
9. $A(-2,1,2), B(3,4,-4), \alpha=2, \beta=5$;
10. $A(0,2,5), B(3,2,-5), \alpha=3, \beta=2$;
11. $A(-2,-3,-4), B(2,-4,0), \alpha=4, \beta=2$;
12. $A(-2,-3,-2), B(1,-3,3), \alpha=3, \beta=1$;
13. $A(-2,4,-1), B(3,-3,3), \alpha=3, \beta=2$;
14. $A(3,-4,-6), B(-2,4,5), \alpha=1, \beta=5$;
15. $A(3,2,4), B(2,-2,-1), \alpha=2, \beta=4$;
16. $A(-2,3,-4), B(3,-1,2), \alpha=2, \beta=5$;
17. $A(-4,2,3), B(5,-6,-2), \alpha=5, \beta=1$;
18. $A(-3,5,1), B(4,-5,-4), \alpha=1, \beta=3$;
19. $A(3,7,2), B(-4,-2,-5), \alpha=4, \beta=3$;
20. $A(-5,2,3), B(4,2,-5), \alpha=3, \beta=1$.

Задача 6

На прямую $mx+ny-m^2-n^2=0$, способную отражать лучи, падает луч $2nx+my-3mn=0$ (Таблица 4). Составить уравнение отраженного луча.

Таблица 4 – Таблица значений m, n

вариант	m	n	вариант	m	n	вариант	m	n	вариант	m	n
1	4	3	6	2	3	11	4	3	16	2	3
2	3	2	7	4	1	12	3	1	17	4	2
3	5	1	8	2	5	13	5	5	18	2	1
4	1	4	9	1	2	14	1	2	19	1	4
5	3	5	10	5	4	15	3	4	20	5	5

Задача 7

Дан треугольник ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Найти:

а) величину угла A;

б) координаты точки пересечения медиан;

в) координаты точки пересечения высот;

г) длину высоты, опущенной из вершины A;

д) площадь треугольника ABC;

е) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

ж)систему неравенств, задающих область внутри треугольника.

Сделать чертеж.

1. $A(-2;4)$, $B(3;1)$, $C(10;7)$
2. $A(-3;-2)$, $B(14;4)$, $C(6;8)$
3. $A(1;7)$, $B(-3;-1)$, $C(11;-3)$
4. $A(1;0)$, $B(-1;4)$, $C(9;5)$
5. $A(1;-2)$, $B(7;1)$, $C(3;7)$
6. $A(-2;-3)$, $B(1;6)$, $C(6;1)$
7. $A(-4;2)$, $B(-6;6)$, $C(6;2)$
8. $A(4;-3)$, $B(7;3)$, $C(1;10)$
9. $A(4;-4)$, $B(83;2)$, $C(3;8)$
10. $A(-3;-3)$, $B(5;-7)$, $C(7;7)$
11. $A(1;-6)$, $B(3;4)$, $C(-3;3)$
12. $A(-4;2)$, $B(8;-6)$, $C(2;6)$
13. $A(-5;2)$, $B(0;-4)$, $C(5;7)$
14. $A(4;-4)$, $B(6;2)$, $C(-1;8)$
15. $A(-3;8)$, $B(-6;2)$, $C(0;-5)$
16. $A(6;-9)$, $B(10;-1)$, $C(-4;1)$
17. $A(4;1)$, $B(-3;-1)$, $C(7;-3)$
18. $A(-4;2)$, $B(6;-4)$, $C(4;10)$
19. $A(1;-1)$, $B(11;3)$, $C(-6;2)$
20. $A(-7;-2)$, $B(-7;4)$, $C(5;-5)$

Задача 8

Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y) = 0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax + By + C = 0$. Построить графики прямой и кривой.

1. $2x^2 - 4x - y + 3 = 0,\ 2x - y - 1 = 0$
2. $x - 2y^2 + 4y - 3 = 0,\ x - 2y + 1 = 0$
3. $x^2 - 2x - y + 2 = 0,\ x - y = 0$
4. $x - y^2 + 2y - 2 = 0,\ x + y - 2 = 0$
5. $x^2 - 2x + y + 2 = 0,\ x - y - 2 = 0$
6. $x + y^2 - 2y + 3 = 0,\ x + y + 1 = 0$
7. $2x^2 + 8x + y + 7 = 0,\ 2x + y + 3 = 0$
8. $x + 2y^2 - 4y + 4 = 0,\ x - 2y + 4 = 0$
9. $x^2 + 4x + y + 3 = 0,\ x - y + 3 = 0$
10. $x + 2y^2 + 4y + 1 = 0,\ x + 2y + 1 = 0$
11. $x^2 - 2x + y - 3 = 0,\ 3x - y - 2 = 0$
12. $x + y^2 - 4y + 6 = 0,\ 3x + 10 = 0$
13. $2x^2 - 12x + y^2 + 10 = 0,\ x + y - 2 = 0$
14. $x^2 + 2x + y - 2 = 0,\ 2x - y + 4 = 0$
15. $2x^2 + 4x + y^2 - 2 = 0,\ 2x + y + 2 = 0$
16. $x^2 + 2y^2 - 12y + 10 = 0,\ x + y - 3 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0,\ 2x + y - 6 = 0$
18. $y^2 + x + 4y + 3 = 0,\ x + 2y + 2 = 0$
19. $x^2 + 2y^2 + 8y + 4 = 0,\ 5y + 4 = 0$
20. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0,\ 3x + y - 3 = 0$

Задача 9

Составить уравнение кривой, для каждой точки которой отношение расстояния до точки $F\,(n\,,m\,)$ к расстоянию до прямой $x = -m$ равно $\frac{m}{n}$. Привести это уравнение к каноническому виду и определить тип кривой.

Таблица 5 – Таблица значений m, n

вариант	m	n	вариант	m	n	вариант	m	n	вариант	m	n
1	4	3	6	2	3	11	4	3	16	2	3
2	3	2	7	4	1	12	3	1	17	4	2
3	5	1	8	2	5	13	5	5	18	2	1
4	1	4	9	1	2	14	1	2	19	1	4
5	3	5	10	5	4	15	3	4	20	5	5

Задача 10

Составить канонические уравнения:
а) эллипса;
б) гиперболы;
в) параболы,
для которых: A, B - точки, лежащие на кривой; F - фокус; a -большая (действительная), b – малая (мнимая) полуось; ε - эксцентриситет; $y = \pm kx$ - уравнения асимптот гиперболы; D - директриса кривой; $2c$ – фокусное расстояние.

1. а) $b = 15$, $F(-10{,}0)$;
   б) $a = 13$, $\varepsilon = 14/13$;
   с) $D: x = -4$;
2. а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2}{,}0)$;
   б) $a = 7$, $\varepsilon = \sqrt{85}/7$;
   с) $D: x = 5$;
3. а) $b = 7$, $F(5{,}0)$;
   б) $a = 11$, $\varepsilon = 12/11$;
   с) $D: x = 10$;
4. а) $b = 5$, $F(-10{,}0)$;
   б) $a = 9$, $\varepsilon = 4/3$;
   с) $D: x = 12$;
5. а) $b = 7$, $F(13{,}0)$;
   б) $b = 4$, $F(-11{,}0)$;
   с) $D: x = 13$;
6. а) $A(3{,}0)$, $B(2, \sqrt{5}/3)$;
   б) $k = 3/4$, $\varepsilon = 5/4$;
   с) $D: y = -2$;
7. а) $A(0, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3}{,}1)$;
   б) $k = \sqrt{21}/10$, $\varepsilon = 11/10$;
   с) $D: y = -4$;
8. а) $A(-\sqrt{17/3}{,}1/3)$, $B(\sqrt{21}/2{,}1/2)$;
   б) $k = 1/2$, $\varepsilon = \sqrt{5}/2$;
   с) $D: y = -1$;

9. а) $A(0,-2)$, $B(\sqrt{15}/2,1)$;
   б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$;
   с) $D: y=5$;
10. а) $A(-3,0)$, $B(1,\sqrt{40}/3)$;
   б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$;
   с) $D: y=4$;
11. а) $2a=22$, $\varepsilon=\sqrt{57}/11$;
   б) $k=2/3$, $2c=10\sqrt{13}$;
   с) ось симметрии Ox и $A(27,9)$;
12. а) $2a=24$, $\varepsilon=\sqrt{22}/6$;
   б) $k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$;
   с) ось симметрии Ox и $A(-7,-7)$;
13. а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$;
   б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$;
   с) ось симметрии Ox и $A(-7,5)$;
14. а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$;
   б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$;
   с) ось симметрии Oy и $A(4,1)$;
15. а) $2a=30$, $\varepsilon=17/15$;
   б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$;
   с) ось симметрии Oy и $A(4,-10)$;
16. а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/25$;
   б) $k=3/4$, $2a=16$;
   с) ось симметрии Ox и $A(4,-8)$;
17. а) $b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/\sqrt{29}$;
   б) $k=12/13$, $2a=26$;
   с) ось симметрии Ox и $A(-5,15)$;
18. а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$;
   б) $k=1/3$, $2a=6$;
   с) ось симметрии Oy и $A(-9,6)$;
19. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$;
   б) $k=5/6$, $2a=12$;
   с) ось симметрии Oy и $A(-2,3\sqrt{2})$;
20. а) $b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=7/9$;
   б) $k=\sqrt{2}/2$, $2a=12$;
   с) ось симметрии Oy и $A(-45,15)$.

Задача 11

Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A.

1. Вершины гиперболы $12x^2-13y^2=156$, $A(0,-2)$;
2. Вершины гиперболы $4x^2-9y^2=36$, $A(0,4)$;
3. Вершину гиперболы $x^2-16y^2=64$, $A(0,-2)$;
4. Вершину гиперболы $2x^2-9y^2=186$, $A(0,4)$;
5. Правую вершину гиперболы $40x^2-81y^2=3240$, $A(-2,5)$;
6. Фокусы гиперболы $24x^2-25y^2=600$, $A(0,-8)$;
7. Фокусы гиперболы $5x^2-11y^2=55$, $A(0,5)$;
8. Левый фокус гиперболы $7x^2-9y^2=63$, $A(-1,-2)$;
9. Правый фокус гиперболы $57x^2-64y^2=3648$, $A(2,8)$;
10. Левый фокус гиперболы $3x^2-5y^2=30$, $A(0,6)$;
11. Фокусы эллипса $9x^2+25y^2=1$, $A(0,6)$;
12. Фокусы эллипса $16x^2+41y^2=656$, A - его нижняя вершина;

13. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A - его нижняя вершина;

14. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A - его верхняя вершина;

15. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, $A(1,8)$;

16. $B(1,4)$, A – вершина параболы $y^2 = \dfrac{x-4}{3}$;

17. $B(3,4)$, A – вершина параболы $y^2 = \dfrac{x+7}{4}$;

18. $O(0,0)$, A – вершина параболы $y^2 = 3(x-4)$;

19. $O(0,0)$, A – вершина параболы $y^2 = \dfrac{-x-5}{2}$;

20. $B(2,-5)$, A – вершина параболы $x^2 = -2(y+1)$.

Задача 12

Построить кривую, заданную параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

1. $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3(2-\sin t) \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4(1-\sin t) \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x = 4\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$;

9. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 2\sin 2t \end{cases}$;

11. $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$;

12. $\begin{cases} x = 4\cos 2t \\ y = 1\sin 2t \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$;

14. $\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$;

15. $\begin{cases} x = 3(1-\cos t) \\ y = 2\sin t \end{cases}$;

16. $\begin{cases} x = 5\cos 3t \\ y = \sin 3t \end{cases}$;

17. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 1-\sin t \end{cases}$;

18. $\begin{cases} x = 4\cos 3t \\ y = 2\sin 3t \end{cases}$;

19. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2(1-\sin t) \end{cases}$;

20. $\begin{cases} y = 3(1-\cos t) \\ x = 2\sin t \end{cases}$.

Задача 13

Построить по точкам график функции $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Значения функции вычислять в точках $\varphi_k = \dfrac{\pi k}{8}$. Найти уравнение кривой в прямоугольной системе координат и определить ее вид.

1. $r = 6\cos\varphi$
2. $r = -2\sin\varphi$
3. $r = 2\cos\varphi$
4. $r = -4\sin\varphi$
5. $r = -4\cos\varphi$
6. $r = -6\sin\varphi$
7. $r = 4\cos\varphi$
8. $r = 2\sin\varphi$
9. $r = -2\cos\varphi$
10. $r = 4\sin\varphi$
11. $r^2 = 2\cos 2\varphi$
12. $r^2 = 2\sin 2\varphi$
13. $r^2 = 4\cos 2\varphi$
14. $r^2 = 4\sin 2\varphi$
15. $r^2 = 6\cos 2\varphi$
16. $r^2 = -2\cos 2\varphi$
17. $r^2 = -2\sin 2\varphi$
18. $r^2 = -4\cos 2\varphi$
19. $r^2 = -4\sin 2\varphi$
20. $r^2 = 6\sin 2\varphi$

Задача 14

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$.

1. $A(1,\ 0,\ -2)$, $B(2,\ -1,\ 3)$, $C(0,\ -3,\ 2)$
2. $A(-1,\ 3,\ 4)$, $B(-1,\ 5,\ 0)$, $C(2,\ 6,\ 1)$
3. $A(4,\ -2,\ 0)$, $B(1,\ -1,\ -5)$, $C(-2,\ 1,\ -3)$
4. $A(-8,\ 0,\ 7)$, $B(-3,\ 2,\ 4)$, $C(-1,\ 4,\ 5)$
5. $A(7,\ -5,\ 1)$, $B(5,\ -1,\ -3)$, $C(3,\ 0,\ -4)$
6. $A(-3,\ 5,\ -2)$, $B(-4,\ 0,\ 3)$, $C(-3,\ 2,\ 5)$
7. $A(1,\ -1,\ 8)$, $B(-4,\ -3,\ 10)$, $C(-1,\ -1,\ 7)$
8. $A(-2,\ 0,\ -5)$, $B(2,\ 7,\ -3)$, $C(1,\ 10,\ -1)$
9. $A(1,\ 9,\ -4)$, $B(5,\ 7,\ 1)$, $C(3,\ 5,\ 0)$
10. $A(-7,\ 0,\ 3)$, $B(1,\ -5,\ -4)$, $C(2,\ -3,\ 0)$
11. $A(0,\ -3,\ 5)$, $B(-7,\ 2,\ 6)$, $C(-3,\ 2,\ 4)$
12. $A(5,\ -1,\ 2)$, $B(2,\ -4,\ 3)$, $C(4,\ -1,\ 3)$
13. $A(-3,\ 7,\ 2)$, $B(3,\ 5,\ 1)$, $C(4,\ 5,\ 3)$
14. $A(0,\ -2,\ 8)$, $B(4,\ 3,\ 2)$, $C(1,\ 4,\ 3)$
15. $A(1,\ -1,\ 5)$, $B(0,\ 7,\ 8)$, $C(-1,\ 3,\ 8)$
16. $A(-10,\ 0,\ 9)$, $B(12,\ 4,\ 11)$, $C(8,\ 5,\ 15)$
17. $A(3,\ -3,\ -6)$, $B(1,\ 9,\ -5)$, $C(6,\ 6,\ -4)$
18. $A(2,\ 1,\ 7)$, $B(9,\ 0,\ 2)$, $C(9,\ 2,\ 3)$
19. $A(-7,\ 1,\ -4)$, $B(8,\ 11,\ -3)$, $C(9,\ 9,\ -1)$
20. $A(1,\ 0,\ -6)$, $B(-7,\ 2,\ 1)$, $C(-9,\ 6,\ 1)$

Задача 15

Написать каноническое уравнение прямой.

1. $2x + y + z - 2 = 0,\quad 2x - y - 3z + 6 = 0$
2. $x - 3y + 2z + 2 = 0,\quad x + 3y + z + 14 = 0$
3. $x - 2y + z - 4 = 0,\quad 2x + 2y - z - 8 = 0$
4. $x + y + z - 2 = 0,\quad x - y - 2z + 2 = 0$
5. $2x + 3y + z + 6 = 0,\quad x - 3y - 2z + 3 = 0$
6. $3x + y - z - 6 = 0,\quad 3x - y + 2z = 0$
7. $x + 5y + 2z + 11 = 0,\quad x - y - z - 1 = 0$
8. $3x + 4y - 2z + 1 = 0,\quad 2x - 4y + 3z + 4 = 0$
9. $5x + y - 3z + 4 = 0,\quad x - y + 2z + 2 = 0$
10. $x - y - z - 2 = 0,\quad x - 2y + z + 4 = 0$
11. $4x + y - 3z + 2 = 0,\quad 2x - y + z - 8 = 0$
12. $3x + 3y - 2z - 1 = 0,\quad 2x - 3y + z + 6 = 0$
13. $6x - 7y - 4z - 2 = 0,\quad x + 7y - z - 5 = 0$
14. $8x - y - 3z - 1 = 0,\quad x + y + z + 10 = 0$
15. $6x - 5y - 4z + 8 = 0,\quad 6x + 5y + 3z + 4 = 0$
16. $x + 5y - z - 5 = 0,\quad 2x - 5y + 2z + 5 = 0$
17. $2x - 3y + z + 6 = 0,\quad x - 3y - 2z + 3 = 0$
18. $5x + y + 2z + 4 = 0,\quad x - y - 3z + 2 = 0$
19. $4x + y + z + 2 = 0,\quad 2x - y - 3z - 8 = 0$
20. $2x + y - 3z - 2 = 0,\quad 2x - y + z + 6 = 0$

Задача 16

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

1. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-4}$, $x+y+2z-9=0$;
2. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$, $x+2y+3z-14=0$;
3. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$, $x+2y-z+5=0$;
4. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$, $x+2y-5z+20=0$;
5. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$, $x-3y+z-8=0$;
6. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$, $x-3y+7z-24=0$;
7. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$, $x-y+4z=0$;
8. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$;
9. $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{0}$, $3x+2y-2z=0$;
10. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$, $3x+y-5z-12=0$;
11. $\frac{x+1}{0}=\frac{y+23}{1}=\frac{z}{-2}$, $x+3y-z-3=0$;
12. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0$;
13. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{0}$, $x+2y+2z+3=0$;
14. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $x-2y+5z+17=0$;
15. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$, $x-y+4z-5=0$;
16. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$;
17. $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-1}$, $2x-y+z+4=0$;

18. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$, $2x-y+3z+23=0$;

19. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{0}$, $2x-4y-3z+7=0$;

20. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$, $2x-3y-5z-7=0$.

Задача 17

По координатам вершин пирамиды *ABCD* найти:
а) длины рёбер *AB* и *AC*;
б) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
в) объём пирамиды *ABCD*;
г) высоту, опущенную из вершины *D* на грань *ABC*;
д) уравнение прямой *AB*;
е) уравнение плоскости *BCD*;
ж) синус угла между прямой *AB* и плоскостью *BCD*;
з) косинус угла между поскостью *xOy* и плоскостью *BCD*.

1. $A(-1;2;1)$, $B(-2;2;5)$, $C(-3;3;1)$, $D(-1;4;3)$;
2. $A(2;0;3)$, $B(1;0;7)$, $C(0;1;3)$, $D(2;2;5)$;
3. $A(-2;1;-1)$, $B(-3;1;3)$, $C(-4;2;-1)$, $D(-2;3;1)$;
4. $A(2;-1;2)$, $B(1;-1;6)$, $C(0;0;2)$, $D(2;1;4)$;
5. $A(1;1;2)$, $B(0;1;6)$, $C(-1;2;2)$, $D(1;3;4)$;
6. $A(-1;0;2)$, $B(-2;0;6)$, $C(-3;1;2)$, $D(-1;2;4)$;
7. $A(2;3;2)$, $B(1;3;6)$, $C(0;4;2)$, $D(2;5;4)$;
8. $A(-1;-2;1)$, $B(-2;-2;5)$, $C(-3;-1;1)$, $D(-1;0;3)$;
9. $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(3;2;-6)$;
10. $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;5)$;
11. $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$;
12. $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(-4;3;5)$;
13. $A(-3;-5;6)$, $B(2;1;-4)$, $C(0;-3;1)$, $D(-5;2;-8)$;
14. $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(6;-3;8)$;
15. $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$;
16. $A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$;
17. $A(0;3;2)$, $B(-1;3;6)$, $C(-2;4;2)$, $D(0;5;4)$;
18. $A(-1;2;0)$, $B(-2;2;4)$, $C(-3;3;0)$, $D(-1;4;2)$;
19. $A(1;2;1)$, $B(0;2;5)$, $C(-1;3;1)$, $D(1;4;3)$;
20. $A(2;2;3)$, $B(1;2;7)$, $C(0;3;3)$, $D(2;4;5)$.

Задача 18

Построить схематично график функции и назвать полученную поверхность второго порядка.

1. а) $x^2+y^2+z^2=9$

   б) $4x^2-y^2-16z^2+16=0$

   в) $x^2+4z=0$

2. а) $x^2+y^2-z^2=0$

   б) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$

   в) $x^2+2y^2-2z=0$

3. а) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$

   б) $-5x^2+10y^2-z^2+20=0$

   в) $5x^2=y^2+4z^2$

4. а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$

   б) $z=8-x^2-4y^2$

   в) $4x^2+9y^2+36z^2=72$

5. а) $z=x^2+2y^2$

   б) $4x^2+6y^2-24z^2=96$

   в) $20x^2=y^2+8z^2$

6. а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$

   б) $4x^2-5y^2-5z^2+406=0$

   в) $y=5x^2+3z^2$

7. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$

   б) $10x=2y^2+5z^2$

   в) $-5x^2-3y^2+4z^2+60=0$

8. а) $z=4-x^2-y^2$

   б) $x^2=8(y^2+z^2)$

   в) $2x^2+3y^2-z^2-18=0$

9. а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{3}=-1$

   б) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$

   в) $2y=x^2+4z^2$

10. а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}=-1$

    б) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$

    в) $x^2+3z=0$

11. а) $x^2+y^2-z^2=0$

    б) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$

    в) $3x^2+y^2-3z=0$

12. а) $x^2+y^2+z^2=9$

    б) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$

    в) $x^2+4z^2=2y$

13. а) $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{3}=1$

    б) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$

    в) $x=8y^2+2z^2$

14. а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$

    б) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$

    в) $6x^2=y^2+2z^2$

15. а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$

    б) $14x^2-6y^2+3z^2=0$

    в) $4x^2-y^2-3z^2=12$

16. а) $z=x^2+2y^2$

    б) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$

    в) $x^2-2y=-z^2$

17. а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$

б) $z=4-x^2-y^2$

в) $3x^2+12y^2+4z^2=48$

18. а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{3}=-1$

б) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$

в) $15y=10x^2+6y^2$

19. а) $z=4-x^2-y^2$

б) $27x^2-63y^2+21z^2=0$

в) $3x^2-7y^2-2z^2=42$

20. а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{9}=-1$

б) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$

в) $3x=2y^2+6z^2$

Задача 19

Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать чертеж.

1. *а)* $y^2=2z,\ Oz$; *б)* $9y^2+4z^2=36,\ Oy$;
2. *а)* $z^2=2y,\ Oy$; *б)* $2x^2+3z^2=6,\ Oz$;
3. *а)* $x^2=-5y,\ Oy$; *б)* $2x^2+3z=6,\ Oz$;
4. *а)* $x^2-9y^2=9,\ Ox$; *б)* $3y^2=z,\ Oz$;
5. *а)* $2y^2-5z=10,\ Oz$; *б)* $4x^2+3z^2=12,\ Oz$;
6. *а)* $2x^2=z,\ Oz$; *б)* $x^2+4z^2=4,\ Ox$;
7. *а)* $y^2=-4z,\ Oz$; *б)* $3y^2+z^2=6,\ Oy$;
8. *а)* $z^2=2y,\ Oy$; *б)* $2x^2+3z^2=6,\ Oz$;
9. *а)* $5x^2-6z^2=30,\ Ox$; *б)* $x^2+2z=4,\ Oz$;
10. *а)* $x^2=-4z,\ Oz$; *б)* $y^2+4z^2=4,\ Oy$;
11. *а)* $y^2-5x^2=5,\ Oy$; *б)* $y^2=5z,\ Oz$;
12. *а)* $y^2=3z,\ Oz$; *б)* $2x^2+3z^2=6,\ Ox$;
13. *а)* $2x^2-6y^2=12,\ Ox$; *б)* $y^2=4z,\ Oz$;
14. *а)* $x^2=3y,\ Oy$; *б)* $3x^2+4z^2=24,\ Oz$;
15. *а)* $x^2=-3z,\ Oz$; *б)* $3x^2+5z^2=15,\ Ox$;
16. *а)* $3x^2=-2z,\ Oz$; *б)* $8x^2+11z^2=88,\ Ox$;
17. *а)* $3x^2-8y^2=288,\ Ox$; *б)* $y^2=4z,\ Oz$;
18. *а)* $5z=-x^2,\ Oz$; *б)* $3y^2+18z^2=1,\ Oy$;
19. *а)* $y^2=5z,\ Oz$; *б)* $3x^2+7y^2=21,\ Ox$;
20. *а)* $y^2=4z,\ Oz$; *б)* $x^2-9y^2=9,\ Ox$.

Задача 20

Сила F приложена к точке A.

Вычислить:
а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки A в точку B;
б) модуль момента силы F относительно точки B.

1. F=(5,-3,9), A(3,4,-6), B(2,6,5);
2. F=(-3,1,-9), A(6,-3,5), B(9,5,-7);
3. F=(2,19,-4), A(5,3,4), B(6,-4,-1);
4. F=(-4,5,-7), A(4,-2,3), B(7,0,-3);
5. F=(4,11,-6), A(3,5,1), B(4,-2,-3);
6. F=(5,4,11), A(6,1,-5), B(4,2,-6);
7. F=(5,-3,9), A(3,4,-6), B(2,6,5);
8. F=(-9,5,7), A(1,6,-3), B(4,-3,5);
9. F=(6,5,-7), A(7,-6,4), B(4,9,-6);
10. F=(-5,4,4), A(3,7,-5), B(2,-4,1);
11. F=(4,7,-3), A(5,-4,2), B(8,5,-4);
12. F=(2,2,9), A(4,2,-3), B(2,4,0);
13. F=(5,-3,9), A(3,4,-6), B(2,6,5);
14. F=(-3,1,-9), A(6,-3,5), B(9,5,-7);
15. F=(2,19,-4), A(5,3,4), B(6,-4,-1);
16. F=(-4,5,-7), A(4,-2,3), B(7,0,-3);
17. F=(4,11,-6), A(3,5,1), B(4,-2,-3);
18. F=(5,4,11), A(6,1,-5), B(4,2,-6);
19. F=(5,-3,9), A(3,4,-6), B(2,6,5);
20. F=(-9,5,7), A(1,6,-3), B(4,-3,5).

6 Примеры заданий по аналитической геометрии, предлагаемые при Федеральном Интернет-экзамене в сфере профессионального образования [9, 10]

А. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Основные задачи аналитической геометрии на плоскости

1.1 Даны точки $A(2;3)\,и\,B(-6;5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…

Варианты ответов:

1) (-2;4)	2) (-4;8)
3) (-4;1)	4) (-2;8)

1.2 Расстояние между точками $A(1;2)\,и\,B(k;-2)$ равно 5 при k равном…

Варианты ответов:

1) 10	2) 6
3) 1	4) 4

1.3 Даны вершины треугольника ABC: $A(3;4)$, $B(-3;4).C(0;-2)$, CD- его медиана. Тогда координаты точки D равны…

Варианты ответов:

1) (0;4)	2) (0;8)
3) (1,5;1)	4) (-3;0)

1.4 Расстояние между точками $A(-3;-4)\,и\,B(6;8)$ равно…

Варианты ответов:

1) 14	2) 13
3) 16	4) 15

1.5 Дана координатная ось. Правильными утверждениями являются…

Варианты ответов:

1) координаты двух точек координатной оси, лежащих по разные стороны от начала отсчета, всегда имеют разные знаки	2) начало координат может лежать на отрезке, соединяющем две точки координатной оси, имеющие отрицательные координаты
3) из двух различных точек, лежащих на координатной оси, имеющих отрицательные координаты, дальше от начала лежит точка, имеющая меньшую координату	4) координата точки на оси равна расстоянию от этой точки до начала отсчета

1.6 Если точка $A(2;3)$ - начало отрезка AB и $M(1;-2)$ - его середина, то сумма координат точки B равна…

Варианты ответов:

1) -7 2) 7

3) 3 4) 1

1.7 В прямоугольной системе координат на плоскости даны точки $M(a;b)\, и\, N(b;a)$, причем $a > b > 0$. Сравнивая расстояния от этих точек до начала координат O, получаем, что…

Варианты ответов:

1) $|MO| > |NO|$ 2) $a \cdot |MO| = b \cdot |NO|$

3) $|MO| < |NO|$ 4) $|MO| = |NO|$

1.8 Точка $C(-5;-2)$ - середина отрезка AB. Тогда координаты точек A и B могут быть равны…

Варианты ответов:

1) $A(-8;-2),\ B(-2;-2)$ 2) $A(-8;-3),\ B(-2;-1)$

3) $A(-8;2),\ B(-2;2)$ 4) $A(10;-5),\ B(-20;1)$

1.9 Даны точки $A(5;-8)\, и\, B(-3;4)$. Тогда ордината середины отрезка AB равна…

Варианты ответов:

1) 2 2) 1

3) -4 4) -2

1.10 Расположите по возрастанию длины сторон треугольника ΔABC, где $A(1;5), B(5;1), C(-5;-1)$:

1) $|AC|$ 2) $|AB|$

3) $|BC|$

1.11 Даны точки $A(0;1)\, и\, B(6;-3)$, где B - середина отрезка AC. Тогда координаты точки C…

Варианты ответов:

1) (12;-7) 2) (3;-1)

3) (12;-6) 4) (12;7)

1.12 Точка (2;-1) лежит на прямой с уравнением…

Варианты ответов:

1) $y = -2x + 3$ 2) $y = -3x - 1$

3) $3x - y - 7 = 0$ 4) $x + 2y - 3 = 0$

1.13 Площадь треугольника ABC, где $A(1;2), B(4;3), C(-1;2)$, равна…

Варианты ответов:

1) 8 — 2) 10

3) 1 — 4) -2

2. Прямая на плоскости

2.1 Среди прямых

$l_1 : x + 3y - 5 = 0,$

$l_2 : 2x + 6y - 3 = 0,$

$l_3 : 2x - 6y - 3 = 0,$

$l_4 : -2x + 6y - 5 = 0$

параллельными являются…

Варианты ответов:

1) l_1 *и* l_3 — 2) l_2 *и* l_3

3) l_1 *и* l_2 — 4) l_3 *и* l_4

2.2 Произведение угловых коэффициентов прямых $2x - 3y + 9 = 0$, $3x - y - 5 = 0$ равно…

Варианты ответов:

1) 2 — 2) -2

3) 15 — 4) 2/9

2.3 Градусная мера угла между прямой $y = \sqrt{3}x + 1$ и положительным направлением оси Ox равна…

Варианты ответов:

1) 60° — 2) 45°

3) 30° — 4) 120°

2.4 Прямая проходит через точки $O(0;0), B(-2;1)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2}$ — 2) $-\frac{1}{2}$

3) -2 — 4) 2

2.5 Расстояние от точки (-2;3) до оси Oy равно...

Варианты ответов:

1) 3 — 2) $\sqrt{13}$

3) 2 — 4) 1

2.6 Общим уравнением прямой на плоскости является…
Варианты ответов:

1) $y+2=-\frac{2}{3}(x-6)$ 2) $2x+3y-6=0$

3) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ 4) $y=-\frac{2}{3}x+2$

2.7 Уравнением прямой, перпендикулярной прямой $y=2x+3$, является…
Варианты ответов:

1) $y=-\frac{1}{2}x-2$ 2) $y=2x+1$

3) $y=-\frac{1}{3}x-4$ 4) $y=3x+5$

2.8 Длина отрезка, отсекаемого прямой $2x+3y-6=0$ на оси Oy, равна…
Варианты ответов:

1) 2 2) 3

3) 4 4) 5

2.9 Прямая, проходящая через две точки $A(1;1), B(3;4)$, параллельна прямым…
Варианты ответов:

1) $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

3) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ 4) $-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$

2.10 Укажите правильное соответствие между уравнениями и типами уравнений прямой на плоскости:

1. $2x-5y-9=0$
2. $y=-3x+7$
3. $x=6$

Варианты ответов:

A) уравнение прямой с угловым коэффициентом

B) уравнение прямой, параллельной оси ординат

C) уравнение прямой в отрезках на осях

D) уравнение прямой, параллельной оси абсцисс

E) общее уравнение прямой

2.11 Расстояние от точки $A(1;2)$ до прямой $3x=4y$ равно…
Варианты ответов:

1) $2\sqrt{2}$ 2) 1

3) $2\frac{1}{5}$ 4) $\frac{2}{5}$

2.12 Вектор $\overline{n}(p;6)$ перпендикулярен прямой $3x-2y+5=0$. Тогда значение p равно…

Варианты ответов:

1) -9 2) -4

3) 4 4) 9

2.13 Прямая на плоскости задана уравнением $y=kx+b$, причем $k>0, b>1$. Тогда эта прямая не проходит через…

Варианты ответов:

1) вторую четверть 2) первую четверть

3) третью четверть 4) четвертую четверть

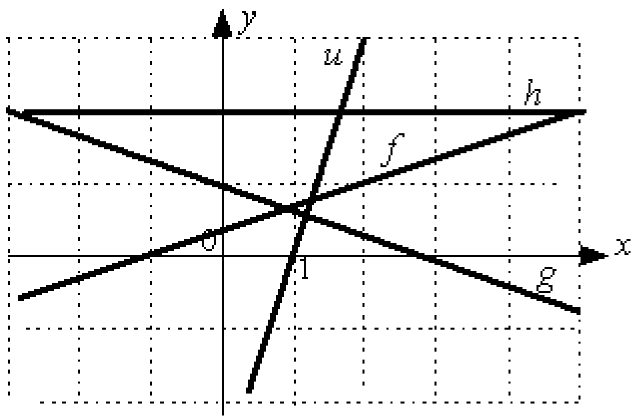
2.14 Уравнением прямой, параллельной прямой $y=2x-1$, является…

Варианты ответов:

1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}$ 2) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{5}$

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{7}$ 4) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}$

2.15 Даны графики прямых



Установите соответствие между прямыми

1) f 2) g

3) h 4) u

и значениями их угловых коэффициентов

Варианты ответов:

A) -3 B) $-\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{3}$ D) 0

E) 3

3. Кривые второго порядка

3.1 Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, то длина ее действительной полуоси равна…

Варианты ответов:

1) 9   2) 3

3) 4   4) 16

3.2 Радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-2y=0$, равен…

Варианты ответов:

1) 3   2) 1

3) 4   4) -1

3.3 Укажите соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями:

1. $(x+6)^2+(y-2)^2=64$
2. $x^2+4y=16$
3. $x^2+4y^2=4$
4. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$

Варианты ответов:

A) эллипс   B) гипербола

C) окружность   D) парабола

3.4 Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ равно…

Варианты ответов:

1) 10   2) 3

3) 8   4) 6

3.5 Среди уравнений кривых укажите уравнение окружностей:

Варианты ответов:

1) $(x+3)^2+(y-2)^2=16$ 2) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$

3) $4x^2+4y^2=49$ 4) $x^2+4y=4$

3.6 Установите соответствие между кривой второго порядка и ее уравнением:

1. Парабола
2. Эллипс
3. Гипербола

Варианты ответов:

A) $x^2 - 4y^2 = 0$

B) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

C) $x + 4y \ = 1$

D) $y^2 = 4x$

E) $x^2 + 4y^2 = 1$

3.7 Параболами являются…

Варианты ответов:

A) $x^2 + 4y^2 = 1$

B) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

C) $y^2 = 4x$

D) $x^2 = 4y$

3.8 Окружность задана уравнением: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Тогда правильными утверждениями являются…

Варианты ответов:

1) точка с координатами $(a - 0{,}6R; b + 0{,}8R)$ лежит на окружности

2) если $a = 0$, то центр окружности лежит на оси абсцисс

3) если $0 < a < R$, то окружность пересекается с осью абсцисс

4) если $0 > a > b$, то центр окружности лежит в третьей четверти

3.9 Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, равен…

Варианты ответов:

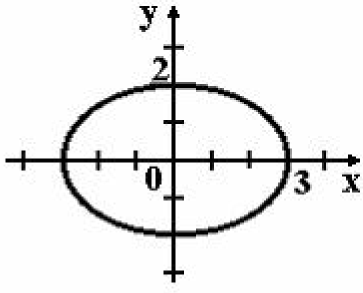
1) 5

2) 3

3) 2

4) 4

3.10 Уравнение кривой, изображенной на рисунке,



имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

4) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

4. Полярная система координат

4.1 Полярные координаты точки $A(3;4)$ имеют вид…

Варианты ответов:

1) $\left(25, arctg\frac{3}{4}\right)$ 2) $\left(25, arctg\frac{4}{3}\right)$

3) $\left(5, arctg\frac{3}{4}\right)$ 4) $\left(5, arctg\frac{4}{3}\right)$

4.2 На плоскости введены полярная и прямоугольна системы координат, причем положительная полуось совпадает с полярной осью. Пусть $(x_M; y_M)$- декартовы, а $(\rho_M;\varphi_M)$ - полярные координаты точки M. Правильными утверждениями являются…

Варианты ответов:

1) $\varphi_M \geq |x_M|$ 2) $\varphi_M \geq |y_M|$

3) $\rho_M \geq |x_M|$ 4) $\rho_M \geq |y_M|$

4.3 Уравнение $x^2 + y^2 = ax$ в полярных координатах имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\rho = a\cos\varphi$ 2) $\rho = a\sin\varphi$

3) $tg\varphi = a$ 4) $\rho^2 = a\cos\varphi$

4.4 Симметричными относительно полюса в полярной системе координат являются точки…

Варианты ответов:

1) $P_1\left(3;\frac{5\pi}{6}\right), P_2\left(3;-\frac{\pi}{6}\right)$ 2) $P_1\left(5;\frac{\pi}{4}\right), P_2\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$

3) $P_1\left(2;\frac{\pi}{3}\right), P_2\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$ 4) $P_1\left(4;\frac{\pi}{4}\right), P_2\left(4;-\frac{\pi}{4}\right)$

4.5 Уравнение линии $(x^2 + y^2)^3 = 3x$ в полярных координатах имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\rho^3 = 3\cos\varphi$ 2) $\rho^5 = 3\sin\varphi$

3) $\rho^5 = 3\cos\varphi$ 4) $\rho^2 = 3\cos\varphi$

5. Векторы на плоскости

5.1 Векторы $\overline{a}(4;2k;-1)$, $\overline{b}(-1;1;4)$ перпендикулярны, если k равно…

Варианты ответов:

1) -2 2) 4

3) 2 4) -4

5.2 Угол между векторами $\overline{a} = -\overline{i} + \overline{j}$ и $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$ равен…

1) 60° 2) 45°

3) 30° 4) 135°

Б) Аналитическая геометрия в пространстве

1. Основные задачи аналитической геометрии в пространстве

1.1 В пространстве имеется отрезок, соединяющий две точки с абсциссами разных знаков. Тогда этот отрезок обязательно пересекает…

Варианты ответов:

1) ось абсцисс 2) плоскость Oyz

3) плоскость Oxz 4) плоскость Oxy

1.2 Даны две смежные вершины куба $A(3;7;2)$, $B(-1;4;2)$. Тогда объем этого куба равен…

Варианты ответов:

1) 125 2) 5

3) 25 4) $5\sqrt{5}$

1.3 Дан отрезок BC, соединяющий точки $B(2;4;3), C(-3;-1;3)$. Тогда третья координата точки A, делящий отрезок BC в отношении $BA : AC = 2:3$, равна…

Варианты ответов:

1) 3 2) 1/5

3) 1/3 4) 5

1.4 Расстояние между точками A и B равно 3. Тогда эти точки могут иметь координаты…

Варианты ответов:

1) $A(1;3;1)$, $B(3;-6;-5)$ 2) $A(2;-1;0)$, $B(4;0;-2)$

3) $A(4;3;2)$, $B(4;5;2)$ 4) $A(8;-3;8)$, $B(6;-1;9)$

2. Плоскость в пространстве

2.1 Установите соответствие между уравнением плоскости и ее положением в пространстве

1. $2x + 3z + 5 = 0$
2. $4y - z - 3 = 0$
3. $5x + 2y - 9 = 0$
4. $x + 7y - 2z = 0$

Варианты ответов:

A) проходит через ось y B) параллельна оси z

C) проходит через начало координат D) параллельна оси x

E) параллельна оси y

2.2 Расстояние от точки $A(1;2;-1)$ до плоскости $2x+3y+6z=0$ равно…

Варианты ответов:

1) 7 2)2/7

3) 2/49 4) 2

2.3 Установите соответствие между уравнением плоскости и точками, которые лежат в этих плоскостях

1. $2x+y-3z+4=0$
2. $4y-z-3x=0$
3. $2x+2y-4=0$
4. $x+y+z-3=0$

Варианты ответов:

1) (-2;0;0) 2) (0;0;0)

3) (1;1;0) 4) (1;1;1)

5) (5;-1;7)

2.4 Координата $x_\circ$ точки $A(x_\circ;1;7)$, принадлежащей плоскости $5x+y+z+1=0$ равна…

Варианты ответов:

1) 3 2) 4

3) 1 4) 2

2.5 Нормальный вектор плоскости $x-4y-8z-3=0$ имеет координаты…

Варианты ответов:

1) (1;-4;-8) 2) (1;-4;-3)

3) (-4;-8;-3) 4) (1;-4;8)

2.6 Точкой пересечения плоскости $3x-2y+z-6=0$ с осью Ox является…

Варианты ответов:

1) (1;0;3) 2) (2;0;0)

3) (-2;0;0) 4) (3;0;0)

2.7 Если точка $P(-1;2;3)$ принадлежит плоскости $2x-4y+Cz-5=0$, то коэффициент С равен…

Варианты ответов:

1) 6 2) -5

3) 5 4) 2

2.8 Плоскости $4x - y + 3z + 1 = 0$ принадлежат точки…

Варианты ответов:

1) $C(0;4;1)$ 2) $E(4;-1;3)$

3) $D(-2;0;3)$ 4) $A(-1;6;3)$

5) $B(3;-2;-5)$

2.9 Укажите пару уравнений взаимно перпендикулярных плоскостей:

Варианты ответов:

1) $-x + 2y + z - 1 = 0$ 2) $3x + 6y - 9z - 5 = 0$

3) $2x + 4y + 6z - 7 = 0$ 4) $x - 2y + z - 7 = 0$

3. Прямая и плоскость в пространстве

3.1 Уравнение прямой, проходящей через точку $N(2;0;-1)$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$, имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ 2) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$

3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$ 4) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z+1}{1}$

3.2 Прямая $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ параллельна плоскости $x - 3y - 5z = 0$ при α равном…

Варианты ответов:

1) 3 2) -34

3) -1 4) 34

3.3 Вектор $\bar{s}(p;6;-3)$ параллелен прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}$. Тогда значение p равно…

Варианты ответов:

1) 9 2) 18

3) -5 4) 5

3.4 Прямая $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$ параллельна плоскостям…

Варианты ответов:

1) $-3x + 5y - z - 2 = 0$ 2) $-y - 3z + 5 = 0$

3) $-5x + 3y - z - 2 = 0$ 4) $-x - 3z + 5 = 0$

3.5 Уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;2;-1)$ с направляющим вектором $\bar{s}(2;1;1)$, имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$ 2) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$

3) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 4) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$

3.6 Прямая $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ пересекает плоскость $\alpha x+y-z+11=0$ только в том случае, когда α не равно…

Варианты ответов:

1) 2 2) -0,5

3) 4 4) 5

4. Поверхности второго порядка

4.1 Центр сферы, заданной уравнением $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=4$, имеет координаты…

Варианты ответов:

1) (-2;-1;-3) 2) (2;-1;3)

3) (-2;1;3) 4) (2;-1;-3)

4.2 Дано уравнение сферы $(x-6)^2+y^2+4y+z^2-6z-40=0$. Тогда ее центр имеет координаты…

Варианты ответов:

1) (6;-2;-3) 2) (-12;4;-6)

3) (12;-4;6) 4) (-6;2;-3)

4.3 Если $O(1;3;2)$ - центр сферы, то ее уравнение может иметь вид…

Варианты ответов:

1) $x^2-2x+y^2-6y+z^2-4z-2=0$ 2) $x^2-x+y^2-3y+z^2-2z+2=0$

3) $x^2+x+y^2+3y+z^2+2z+13=0$ 4) $x^2-2x+y^2-6y+z^2-4z+13=0$

4.4 Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$, является…

Варианты ответов:

1) однополостным гиперболоидом 2) сферой

3) конусом 4) эллипсоидом

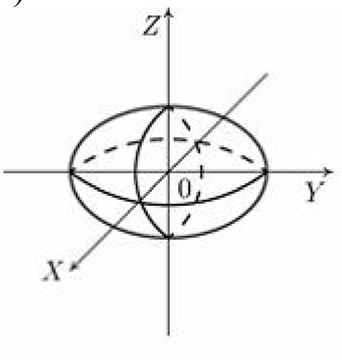
4.5 Сумма координат центра эллипсоида $4(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$ равна…

Варианты ответов:

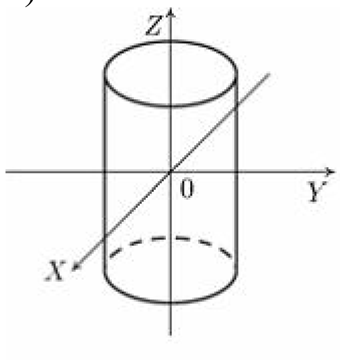
1) -1
2) 3
3) 1
4) -3

4.6 Установите соответствие между изображением поверхности и ее каноническим уравнением.

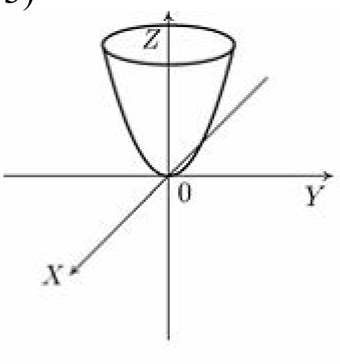
1)



2)



3)



Варианты ответов:

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

B) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$

C) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

D) $x^2+y^2+z^2=R^2$

7 **Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины**

7.1 Основная:

7.1.1 Ильин, В.А. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник / В.А. Ильин, Э.Г.Позняк. – 7-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2007. -224 с.

7.1.2 Канатников, А.Н. Аналитическая геометрия [Текст]: учеб. для втузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко; ред. В.С.Зарубин, А.П. Крищенко. - 4-е изд., испр. – М.: МГТУ им Н.Э.Баумана, 2005. – 392 с.

7.1.3 Сикорская, Г.А. Курс лекций по алгебре и геометрии [Текст]: учеб. Пособие для вузов / Г.А. Сикорская. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. 374 с.

7.1.4 Шипачев, В.С. Курс высшей математики [Текст]: учеб. / В.С. Шипачев. Изд.2-е. – М.: Изд-во Проспект, 2004. – 600 с.

7.2 Дополнительная:

7.2.1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: Студентам вузов /. Д.В. Беклемишев – М., Физматлит, 2001г.

7.2.2 Бортаковский, А.С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / А.С. Бортаковский, А.В.Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с.

7.2.3 Данко, П.Е Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. [Текст]: учебное пособие для втузов. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова - 6-е изд., - М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2003.

7.2.4 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии [Текст]./ Н.В. Ефимов – М., Наука, 2004.

7.2.5 Зимина, О.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: учеб. комплекс: учеб. пособие для вузов / О.В.Зимина; под ред. А.И.Кириллова. – М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 328 с.

7.2.6 Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Текст] / Д.В. Клетеник – М., Профессия. 2001.

7.2.7 Смирнов, В.И Курс высшей математики. [Текст] / В.И. Смирнов – М. Наука, 2001.

Список использованных источников

1. **Выгодский, М.Я**. Справочник по высшей математике / М.Я.Выгодский. М.: ООО «Издательство Астрель», 2002. – 992 с.
2. Высшая математика: Методические указания и контрольные задания для студентов инженерно-технических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 110 с.
3. **Зимина, О.В** Высшая математика / О.В. Зимина, А.И. Кириллов, Т.А. Сальникова Под ред. А.И.Кириллова. – 3-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2003. – 368 с.
4. **Кузнецов, Л.А.** Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты [Текст]: учеб. Пособие / Л.А. Кузнецов. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2006. – 240 с.
5. **Рябушко, А.П**. Сборник индивидуальных задач по высшей математике. Ч 1./ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть – Минск. Изд-во «Вышейшая школа», 1990. – 271 с.
6. **Старков, С.Н**. Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов./ С.Н. Старков – СПб.: Питер, 2008. – 235 с.
7. **Шапкин, А.С**. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию. [Текст]: учебное пособие./ А.С. Шапкин – 3-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 432 с.
8. Оренбургский государственный университет [Электронный ресурс]: 1999-2009, ОГУ, ЦИТ.– Режим доступа: http://www.osu.ru
9. Федеральный Интернет-экзамен в сфере профессионального образования [Электронный ресурс]: Росаккредагентство, 2005-2009. – Режим доступа: http://www.fepo.ru
10. Тестирование при государственной аккредитации [Электронный ресурс]: Росаккредагентство, 2005-2009. – Режим доступа: http://www.att.nica.ru
11. Образовательный математический сайт [Электронный ресурс]: 2000-2009, Компания AXOFT. – Режим доступа: http://www.exponenta.ru/educat/systemat/bolotsky/1.asp

Приложение А

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ

При подготовке к выполнению внеаудиторных письменных работ студент должен изучить лекции, соответствующие разделы по пособиям и учебникам (список литературы прилагается).

При выполнении работы и ее оформлении необходимо придерживаться следующих правил:

- работа должна быть выполнена в тетради в клетку, имеющей поля для замечаний рецензента;
- на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия, имя и отчество студента, название учебной группы, название дисциплины/раздела;
- перед решением каждой задачи нужно привести полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера;
- следует придерживаться той последовательности при решении задач, в какой они даны в задании, строго сохраняя при этом нумерацию заданий;
- в работу должны быть включены все задачи, указанные в задании по своему варианту. Письменные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не засчитываются;
- решения задач должны сопровождаться развернутыми пояснениями; нужно привести в общем виде все используемые формулы с объяснением употребляемых обозначений; объяснить и мотивировать все действия по ходу решения; сделать необходимые чертежи. Чертежи должны быть выполнены в прямоугольной системе координат в полном соответствии с данными условиями задач и теми результатами, которые получены. При необходимости, можно использовать миллиметровую бумагу;
- после получения работы, проверенной преподавателем (как не зачтенной, так и зачтенной), студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и выполнить работу над ошибками. Работу над ошибками надо выполнять в той же тетради (если есть место) или в новой тетради с надписью на обложке «Повторная», и вместе с не зачтенной работой направить ее на новую проверку. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.

Прорецензированную работу вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, студент представляет к защите.

Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается преподавателем в соответствии с распределением по семестрам материала и сообщается студентам каждой специальности/направления дополнительно.

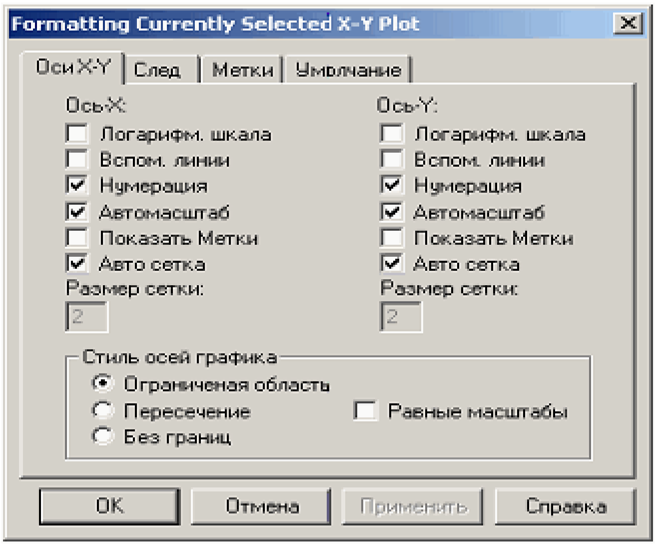
Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, то он может получить консультацию преподавателя.

При решении заданий контрольной работы можно использовать различные методы решений, различные компьютерные прикладные программы, которые необходимо уметь объяснить.

Приложение Б

Построение графиков в системе Mathcad
Форматирование двумерных графиков [11]

Для вывода окна форматирования двумерного графика достаточно поместить указатель мыши в область графика и дважды щелкнуть левой кнопкой мыши. В окне документа появится окно форматирования. Оно имеет ряд вкладок. Вкладка становится активной, если установить на ее имя указатель мыши и щелкнуть левой кнопкой.



Как видно на рисунке окно форматирования имеет четыре вкладки:

- оси Х-У- задание параметров форматирования осей;
- линии графика – задание параметров форматирования линий графика;
- надписи – задание параметров форматирования меток осей;
- по умолчанию – назначение установленных параметров форматирования параметрами по умолчанию.

1. Форматирование осей графика

На вкладке **Оси Х-У** содержатся следующие основные параметры, относящиеся к осям Х и У (Axis X и Axis У):

- Логарифмический масштаб – установление логарифмического масштаба;
- Линии сетки – установка линий масштабной сетки;
- Пронумеровать – установка цифровых данных по осям;
- Автомасштаб – автоматическое масштабирование графика;
- Нанести риски – установка делений по осям;
- Автосетка – автоматическая установка масштабных линий;

- Число интервалов – установка заданного числа масштабных линий.

Группа **Стиль** осей позволяет задать стиль отображения координатных осей:

- Рамка – оси в виде прямоугольника;
- Визир – оси в виде креста;
- Ничего – отсутствие осей;
- Равные деления – установка одинакового масштаба по осям графика.

2. Форматирование линий графиков

Эта вкладка служит для управления отображением линий, из которых строится график. На этой вкладке представлены следующие параметры:

- Метка легенды – выбор типа линии в легенде;
- Символ – выбор символа, который помещается на линию, для отметки базовых точек графика;
- Линия – установка типа линии;
- Цвет – установка цвета линии и базовых точек;
- Тип – установка типа графика;
- Толщина – установка толщины линии.

Узловые точки (точки, для которых вычисляются координаты) графиков часто требуется выделить какой-нибудь фигурой. Список столбца **Symbol** позволяет выбрать следующие отметки для базовых точек графика каждой из функций:

- ничего – без отметки;
- x’s – наклонный крестик;
- +’x – прямой крестик;
- квадрат – квадрат;
- ромб – ромб;
- o’s – окружность.

Список в столбце **Линия** позволяет выбрать типы линий: непрерывная, пунктирная, штрих-пунктирная.

Раскрывающейся список столбца **Type** позволяет выбрать следующие типы линий графика:

- линия – построение линиями;
- точки – построение точками;
- интервалы – построение вертикальными черточками с оценкой интервала погрешностей;
- столбец – построение в виде столбцов гистограммы;

- ступенька – построение ступенчатой линией;
- протяжка – построение протяжкой от точки до точки.

3. Задание надписей на графиках

Эта вкладка позволяет вводить в график дополнительные надписи. Для установки надписей служат поля ввода:

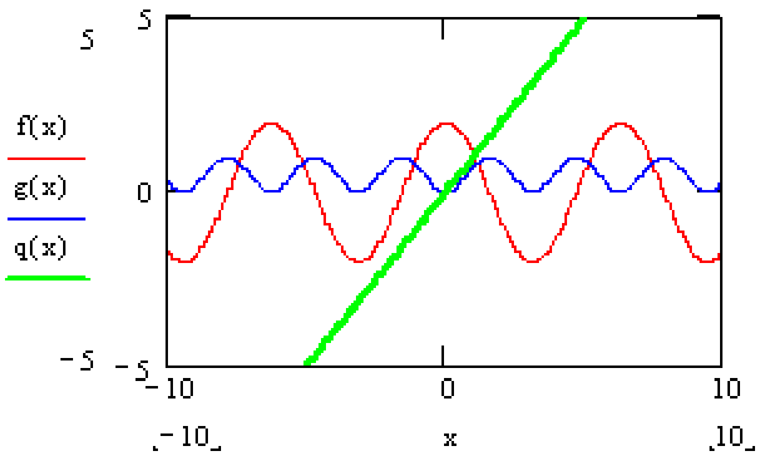
- Заголовок – установка титульной надписи к рисунку;
- Ось X – установка надписи по оси X;
- Ось Y – установка надписи по оси У.

В группе **Заголовок** имеются переключатели сверху и снизу для установки титульной надписи либо над графиком, либо под ним.

4. Параметры графиков по умолчанию

Вкладка "По умолчанию" позволяет назначить установленные на других вкладках параметры форматирования параметрами по умолчанию. Для этого служит флажок установки "использовать по умолчанию". Щелкнув на кнопке "вернуть значения по умолчанию" можно вернуть стандартные параметры графика.

Рассмотрим, как на одном рисунке отобразить несколько графиков, например y=2*cos(x), y=sin(x)^2 и y=x.



Алгоритм выглядит так:

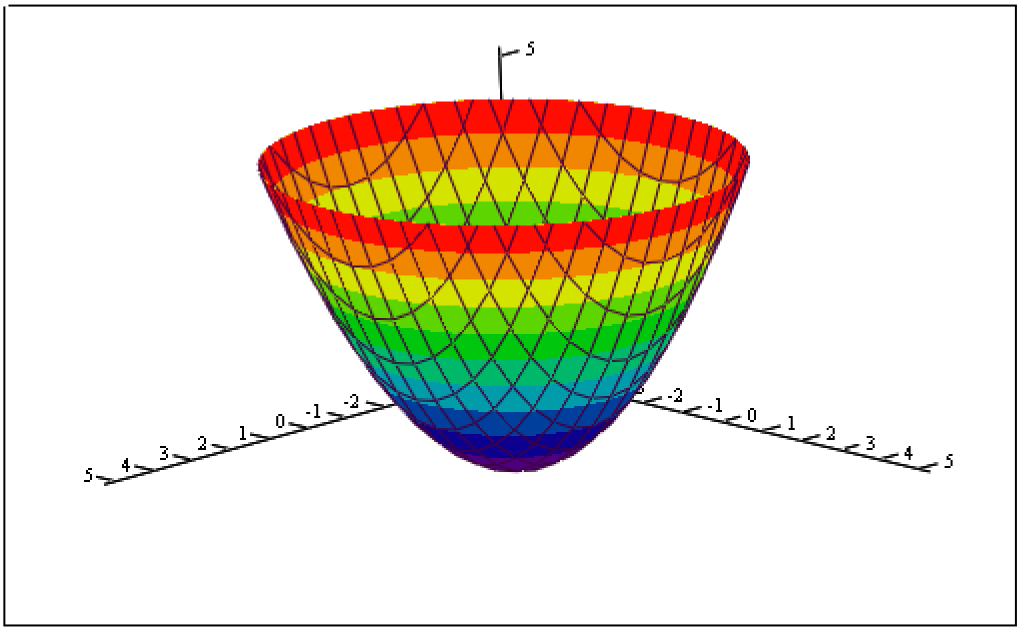
1) Зададим данные функции (обозначим их, например f(x), g(x), q(x)):

$$f(x) := 2 \cdot \cos(x) \qquad g(x) := \sin(x)^2 \qquad q(x) := x$$

2) Вызвав шаблон графика, введем по оси X имя независимой переменной (или переменных, если их несколько), по оси Y введем f(x), поставим запятую (при этом первое выражение уходит вверх, а под ним появляется место ввода), введем g(x), знак запятой и следующее выражение q(x).
3) Отведя указатель мыши за пределы графика, щелкнем левой кнопкой мыши – появится график с тремя кривыми.

Рассмотрим построение графиков поверхностей (трехмерные или 3D-графики). С помощью системы MathCad такие графики строятся даже проще, чем двумерные.
Построим график функции $z(x,y)=x^2 + y^2$, для этого:

- Зададим функцию двух переменных: $z(x, y) := x^2 + y^2$.
- Используя палитру графики, введем шаблон трехмерного графика.
- На единственное место ввода под шаблоном введем z.
- Выведем курсор мыши за пределы графика и щелкнем левой кнопкой мыши – будет построен график в виде "проволочного каркаса".



z

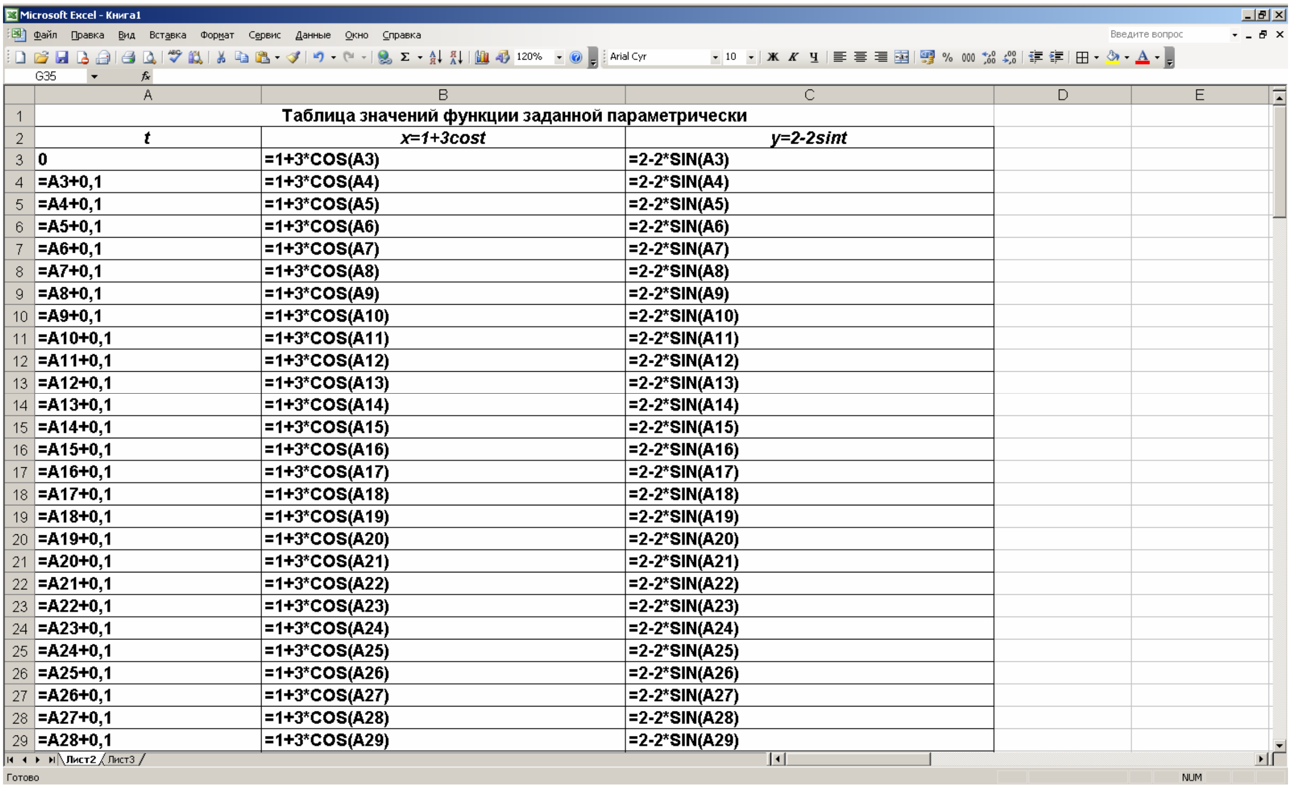
Приложение В

Построение графиков в среде Microsoft Excel

Пакет Microsoft Excel позволяет достаточно просто строить с заданной точностью графики кривых, если между ее аргументами установлено взаимно однозначное соответствие. В противном случае, целесообразно воспользоваться параметрическим заданием кривой.

Построим график функции заданной параметрически $\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = 2 - 2\sin t \end{cases}$

1. На свободном листе в ячейку **A1** введем заголовок таблицы «Таблица значений функции заданной параметрически», а в ячейки **A2, B2, C2** запишем заголовки столбцов t, x и y соответственно.
2. Зададим в ячейке **A3** формулу для в вода начального значения t или само начальное значение t, например 0.
3. В ячейке **A4** зададим формулу **=A3+0,1** для вычисления следующего значения t, изменяющегося с шагом, например 0,1. Протянем полученную формулу вниз на требуемый диапазон ячеек столбца **A**, например до ячейки **A100**
4. В ячейки **B3** и **C3** введем формулы расчета значения x и y. Выполним протягиванием автозаполнение ячеек столбцов **B** и **C.**

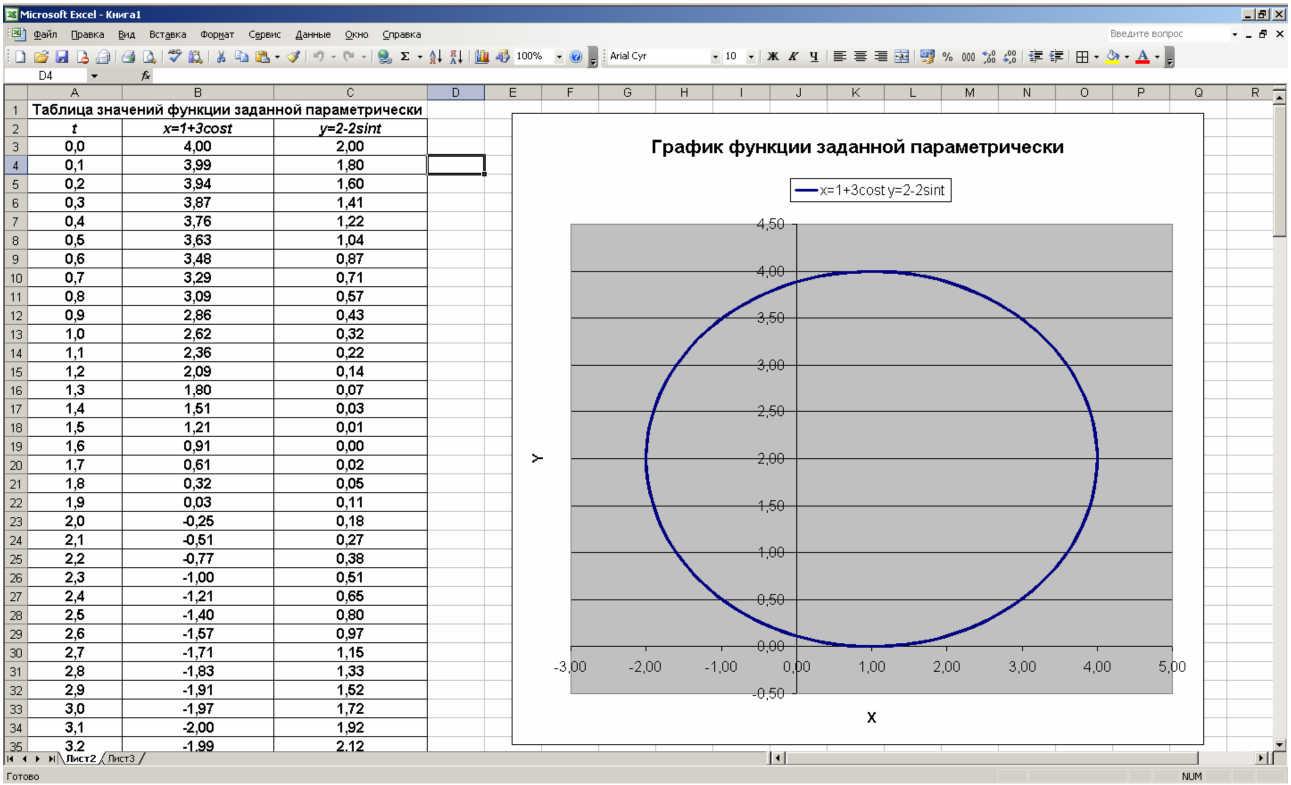


	A	B	C
1	Таблица значений функции заданной параметрически		
2	t	x=1+3cost	y=2-2sint
3	0	=1+3*COS(A3)	=2-2*SIN(A3)
4	=A3+0,1	=1+3*COS(A4)	=2-2*SIN(A4)
5	=A4+0,1	=1+3*COS(A5)	=2-2*SIN(A5)
6	=A5+0,1	=1+3*COS(A6)	=2-2*SIN(A6)
7	=A6+0,1	=1+3*COS(A7)	=2-2*SIN(A7)
8	=A7+0,1	=1+3*COS(A8)	=2-2*SIN(A8)
9	=A8+0,1	=1+3*COS(A9)	=2-2*SIN(A9)
10	=A9+0,1	=1+3*COS(A10)	=2-2*SIN(A10)
11	=A10+0,1	=1+3*COS(A11)	=2-2*SIN(A11)
12	=A11+0,1	=1+3*COS(A12)	=2-2*SIN(A12)
13	=A12+0,1	=1+3*COS(A13)	=2-2*SIN(A13)
14	=A13+0,1	=1+3*COS(A14)	=2-2*SIN(A14)
15	=A14+0,1	=1+3*COS(A15)	=2-2*SIN(A15)
16	=A15+0,1	=1+3*COS(A16)	=2-2*SIN(A16)
17	=A16+0,1	=1+3*COS(A17)	=2-2*SIN(A17)
18	=A17+0,1	=1+3*COS(A18)	=2-2*SIN(A18)
19	=A18+0,1	=1+3*COS(A19)	=2-2*SIN(A19)
20	=A19+0,1	=1+3*COS(A20)	=2-2*SIN(A20)
21	=A20+0,1	=1+3*COS(A21)	=2-2*SIN(A21)
22	=A21+0,1	=1+3*COS(A22)	=2-2*SIN(A22)
23	=A22+0,1	=1+3*COS(A23)	=2-2*SIN(A23)
24	=A23+0,1	=1+3*COS(A24)	=2-2*SIN(A24)
25	=A24+0,1	=1+3*COS(A25)	=2-2*SIN(A25)
26	=A25+0,1	=1+3*COS(A26)	=2-2*SIN(A26)
27	=A26+0,1	=1+3*COS(A27)	=2-2*SIN(A27)
28	=A27+0,1	=1+3*COS(A28)	=2-2*SIN(A28)
29	=A28+0,1	=1+3*COS(A29)	=2-2*SIN(A29)

5. Для построения графика выделим диапазон ячеек (B3:C100) и, щелкнув кнопку на панели инструментов **Стандартная**, вызовем

Мастер диаграмм. На первом шаге диалога с **Мастером диаграмм** выбираем тип диаграмм **График** и нажимаем кнопку **Далее**. На втором шаге определяем, что данные для построения диаграммы берутся из ряда в столбце и уточняем значение диапазона (B3:C100). Нажав кнопку **Далее**, определяем параметры диаграммы: заголовки, подписи данных, положение легенды, линии сетки и т.д.

6. На последнем шаге определим положение диаграммы на отдельном или имеющемся листе и щелкнем кнопку **Готово**.



t	x=1+3cost	y=2-2sint
0,0	4,00	2,00
0,1	3,99	1,80
0,2	3,94	1,60
0,3	3,87	1,41
0,4	3,76	1,22
0,5	3,63	1,04
0,6	3,48	0,87
0,7	3,29	0,71
0,8	3,09	0,57
0,9	2,86	0,43
1,0	2,62	0,32
1,1	2,36	0,22
1,2	2,09	0,14
1,3	1,80	0,07
1,4	1,51	0,03
1,5	1,21	0,01
1,6	0,91	0,00
1,7	0,61	0,02
1,8	0,32	0,05
1,9	0,03	0,11
2,0	-0,25	0,18
2,1	-0,51	0,27
2,2	-0,77	0,38
2,3	-1,00	0,51
2,4	-1,21	0,65
2,5	-1,40	0,80
2,6	-1,57	0,97
2,7	-1,71	1,15
2,8	-1,83	1,33
2,9	-1,91	1,52
3,0	-1,97	1,72
3,1	-2,00	1,92
3,2	-1,99	2,12