МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Л.В.СОЛДАТЕНКО

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению «Строительство и архитектура», специализация «Производство строительных материалов, изделий и конструкций»

Оренбург 2009

УДК 691:519(075.8)
ББК 38.3я73
С 30

Рецензенты
доктор технических наук, профессор В.И.Чепасов,
кандидат технических наук, доцент А.И.Кравцов

Солдатенко Л.В.
С 30 **Введение в математическое моделирование строительно-технологических задач [Текст]: учебное пособие / Л.В.Солдатенко. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009.- 161 с.**

ISBN

В пособии рассмотрены особенности применения и методики численных методов решения задач по анализу и оптимизации структуры и свойств строительных материалов и изделий, а также технологических режимов их производства.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 270106 (бывшая 290600 «Производство строительных материалов, изделий и конструкций»), всех форм обучения. Представленный в пособии материал может быть использован при выполнении учебных научно-исследовательских работ.

Д $\frac{160411000}{6Л9-01}$ ББК 38.3я73

ISBN

Содержание

Предисловие

Наличие в производственной, проектной или научной системе вычислительной техники само по себе не решает проблемы компьютеризации. Для функционирования автоматизированных систем управления технологическими процессами, систем автоматизированного проектирования или автоматизированных систем научных исследований необходимо их методическое и программное обеспечение, ориентированное на решение отраслевых инженерных задач строительного материаловедения и технологии. При этом определяющую роль в формировании надежных и полезных для научно-технической практики результатов играет этап математического моделирования объектов управления, проектирования, исследования и др. Эти математические модели могут быть разработаны только при непосредственном участии инженеров-технологов по производству строительных материалов и конструкций.

Ввиду того, что пособие ориентировано на специалистов по строительному материаловедению и технологии, в нем представлены именно те математические методы, которые доказали свою эффективность в решении отраслевых задач.

Курс «Численные методы решения строительно-технологических задач» завершает вузовскую математическую подготовку, ставит своей целью формирование знаний, позволяющих сформулировать материаловедческие и технологические задачи в математических терминах, выбрать пути решения математической задачи и получить из результатов математического моделирования полезную инженерную информацию. Основная цель курса - научить инженеров-технологов решать типовые задачи анализа и оптимизации рецептурно-технологических ситуаций, а также познакомить с методами и моделями, способствующими прогрессу проектирования, организации и управления строительством и нашедшими широкое применение в повседневной практике.

Введение

Курс "Численные методы решения строительно-технологических задач" завершает вузовскую математическую подготовку, ставит своей целью формирование у специалистов знаний, позволяющих сформулировать материаловедческие и технологические задачи в математических терминах, выбрать те или иные пути решения математической задачи и получить из результатов математического моделирования полезную инженерную информацию.

Современное строительство - это очень сложная система, в деятельности которой принимает большое количество участников, и для того, чтобы построить объект, необходимо организовать их согласованную работу. Строительство протекает в непрерывно меняющихся условиях. Элементы такого процесса связаны между собой и взаимно влияют друг на друга, что усложняет анализ и поиск оптимальных решений.

В производстве строительных материалов и конструкций в связи с ускорением научно-технического прогресса как в народном хозяйстве в целом, так и непосредственно в этой отрасли, происходит процесс усложнения программных технических задач, научно-технических условий их решений, научно-технических подходов к созданию и исследованию новых материалов и технологий, средств реализации оптимальных инженерных решений, обеспечивающих производительность труда, ресурсосбережение, гарантированное качество продукции и др. (большое количество критериев, которым должен отвечать материал).

Усложнение основных объектов (материалов как конечной продукции, собственно технологических процессов и реализующих их аппаратов, технологических линий и комплексов, процессов создания новой техники и т.п.) приводит к прогрессирующему росту потерь от ошибочных или ненадежных решений по развитию и функционированию этих объектов. Для уменьшения вероятности таких ошибок необходимо, с одной стороны, основывать решения на рекомендациях фундаментальных и прикладных наук при системном подходе к объектам, с другой – использовать возможности вычислительной техники для всестороннего анализа объекта и выбора путей оптимизации его структуры, свойств, поведения и пр. Диалектическая связь между этими сторонами процесса принятия инженерных решений обеспечивается математическими моделями объекта и программным обеспечением ЭВМ.

В ходе поиска и анализа возможных решений по созданию оптимальной структуры предприятия, организации строительного производства и т.д. всегда появляется желание (требуется) отобрать лучший (оптимальный) вариант. Для этой цели приходится использовать математические расчеты, логические схемы (представления) процесса строительства объекта, выраженные в виде цифр, графиков, таблиц и т.д. - другими словами, представлять строительство в виде модели, используя для этого методологию теории моделирования. Решения могут быть удачными или неудачными, обоснованными и неразумными. Практику, как правило, интересуют решения оптимальные, т.е. такие, которые являются по тем или иным причинам предпочтительнее, лучше, чем другие.

Выбор оптимальных решений особенно в сложных вероятностных динамических системах, к которым относятся строительные системы, немыслим без широкого применения математических методов решения экстремальных задач и средств вычислительной техники. Сооружение любого строительного объекта происходит путем выполнения в определенной последовательности большого количества разноплановых работ. Распределяя правильно (или, как принято говорить, "оптимально") ресурсы, можно влиять на качество, сроки, стоимость строительства, производительность труда [7].

Математические методы не заменяют собой традиционные в технологии материалов физические, химические и другие методы познания, а дополняют и развивают их, обеспечивая качественно новый уровень технологических и материаловедческих знаний. Математизация данной области науки представляет собой объективную закономерность развития и вызвана как потребностями практики (необходимость оптимального управления качеством в условиях непрерывного усложнения технологических ситуаций), так и внутренней логикой развития науки (стремлению к углубленному познанию и количественному описанию явлений).

Наличие в производственной, проектной или научной системе ЭВМ само по себе не решает проблемы компьютеризации. Для функционирования автоматизированных систем управления технологическими процессами, систем автоматизированного проектирования или автоматизированных систем научных исследований, необходимо их методическое и программное обеспечение, ориентированное на решение отраслевых инженерных задач строительного материаловедения и технологии. При этом определяющую роль в формировании надежных и полезных для научно-технической практики результатов играет этап математического моделирования объектов управления, проектирования, исследования и др. Эти математические модели могут быть разработаны только при непосредственном участии инженеров-технологов по производству строительных материалов и конструкций.

Из всего разнообразия математических методов, применяемых для получения математических моделей, далеко не все эффективны для решения материаловедческих задач. Можно выделить три группы математических методов, которые наиболее используют при рассмотрении задач анализа и оптимизации качества материалов и технологии:

I группа – вероятностно-статистические методы, включающие общую теорию вероятностей, выборочный метод, теорию распределения, проверку статистических гипотез, дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализы, статистическое планирование экспериментов;

II группа – методы исследования операций, включающие линейное, нелинейное и динамическое программирование, теорию игр, теорию массового обслуживания, метод Монте-Карло;

III группа – дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, вариационное исчисление и некоторые другие разделы высшей математики, используемые для детерминированного моделирования технологических процессов.

1 Исторический обзор применения моделирования

В практической деятельности человека математика используется очень давно. На протяжении многих веков применялись геометрия и алгебра для разнообразных хозяйственных вычислений и измерений. Хотя развитие математики долгое время определялось в основном потребностями естественных наук и внутренней логикой самой математики, применение математических методов в экономике имеет также богатое прошлое.

Родоначальник классической политической экономии В.Петти (1623 - 1687) писал в предисловии к своей "Политической арифметике": вместо того, чтобы употреблять слова только в сравнительной степени и прибегать к умозрительным аргументам, я вступил на путь выражения своих мнений на языке чисел, весов и мер...".

Первая в мире модель народного хозяйства была создана французским ученым Ф.Кенэ (1694-1774). В 1758 г. он опубликовал первый вариант знаменитой "Экономической таблицы", получившей название "зиг-заг"; второй вариант - "арифметическая формула" - был опубликован в 1766 году. "Эта попытка, - писал К.Маркс о таблице Ф.Кенэ, - сделанная во второй трети XVIII века, в период детства политической экономии, была в высшей степени гениальной идеей, бесспорно самой гениальной из всех, которые выдвинула до сего времени политическая экономия".

"Экономическая таблица" Ф.Кенэ представляет собой схему (графико-числовую модель) процесса общественного воспроизводства, из которой он делает вывод, что нормальный ход общественного воспроизводства может осуществляться только при соблюдении определенных оптимальных материально-вещественных пропорций [20].

Значительное влияние на развитие методологии экономико-математических исследований оказали труды К.Маркса. Его "Капитал", содержащий немало примеров использования математических методов: обстоятельный параметрический анализ формулы средней прибыли; уравнения, связывающие абсолютную, дифференциальную и суммарную ренту; математическая формулировка соотношения стоимости и производительности труда (стоимость прямопропорциональна производительной силе труда), массы прибавочной стоимости и денежного обращения, условия формирования цены производства и т.д.

В рамках буржуазной экономической науки XIX-XX веков можно выделить три основных этапа развития экономико-математических исследований: математическая школа в политэкономии, статистическое направление, эконометрика.

Представители математической школы считали, что обосновать положения экономической теории можно только математически, а все выводы, полученные иными способами, могут приниматься в лучшем случае в качестве научных гипотез. Родоначальником математической школы является французский ученый, выдающийся математик, философ, историк и экономист О.Курно (1801-1877), выпустивший в 1838г. книгу "Исследование математических принципов теории богатства". Виднейшими представителями математической школы были: Г.Госсен (1810-1858), Л.Вальрас (1834-1910), У.Джевонс (1835-1882), Ф.Эджворт (1845-1926), В.Парето (1848-1923), В.Дмитриев (1868-1913). Эта математическая школа показала большие возможности применения математического моделирования [1].

Представители математической школы выдвинули и пытались развить ряд важных теоретических подходов и принципов: понятие экономического оптимума; применение показателей затрат и предельных эффектов в рациональном хозяйствовании; взаимосвязанность проблем ценообразования и общей пропорциональности народного хозяйства. В современную экономическую науку вошли и широко в ней используются понятия кривых безразличия и ядра экономической системы Ф.Эджворта, понятие многоцелевого оптимума В.Парето, модель общего экономического равновесия Л.Вальраса, формула исчисления полных затрат труда и других ресурсов В.Дмитриева.

Статистическое направление (статистическая экономика), возникшее на пороге XX века, представляли собой, с точки зрения методологии исследования, прямую противоположность математической школе.

Стремление использовать эмпирический материал, конкретные экономические факты было, несомненно, прогрессивным явлением. Идеологи статистической экономики, провозгласив тезис: "наука есть измерение", впадали в другую крайность, пренебрегая теоретическим анализом. В рамках статистического направления было разработано большое количество "математико-статистических моделей" экономических явлений, используемых в основном для краткосрочного прогнозирования. Типичным примером может служить "Гарвардский барометр" - модель прогнозирования хозяйственной конъюнктуры (предсказания "экономической погоды"), разработанная учеными Гарвардского университета (США) под руководством Т.Парсона (1902-1979).

Гарвардская и другие подобные модели, построенные в многих странах, носили экстраполяционный характер и не вскрывали глубинных факторов экономики. Поэтому на протяжении ряда лет после первой мировой войны, в период экономической стабилизации, они хотя и хорошо и предсказывали "экономическую погоду", но "не заметили" приближения крупнейшего экономического кризиса 1929-1932 гг. Крах на Нью-Йоркской бирже осенью 1929 г. означал одновременно и закат статистического направления в экономико-математических исследованиях.

Заслугой статистического направления является разработка методических вопросов обработки экономических данных, статистических обобщений и статистического анализа (выравнивание динамических рядов и их экстраполяция, выделение сезонных и циклических колебаний, факторный анализ, корреляционный и регрессионный анализ, проверка статистических гипотез и т.д.).

На смену статистического направления пришла эконометрика, которая пытается соединить достоинства математической школы и статистической экономики. Термин эконометрика (или эконометрия) для обозначения нового направления в экономической науке ввел норвежский ученый Р. Фриш (1895-1973г.), провозгласивший, что экономика есть синтез экономической теории, математики и статистики. Эконометрика является наиболее быстро развивающейся областью экономической науки. Трудно указать такие теоретические и практические проблемы экономики, в решении которых в настоящее время не применялись бы математические методы и модели. Математическое моделирование стало наиболее престижным направлением в экономической науке. Не случайно с момента учреждения Нобелевских премий по экономике они присуждаются, как правило, за экономико-математические исследования. Среди Нобелевских лауреатов виднейшие эконометрики: Р.Фриш, Я.Тинберген, П.С'амуэльсон, Д.Хис, В.Леонтьев, Т.Купманс, К.Эрроу.

Значителен вклад ученых России в развитие экономико-математических исследований. В 1867 году в журнале "Отечественные записки" была опубликована заметка об эффективности применения математических методов при изучении экономических явлений. С конца XIX века появляются оригинальные экономико-математические исследования русских ученых: В.К.Дмитриева, В.И.Борткевича, В.С.Войтинского, М.Оржнецкого, В.В.Самсонова, Н.А.Столярова, Н.Н.Шапошникова.

Интересные работы по применению методов математической статистики, в частности по корреляционному анализу экономических явлений, выполнял А.А.Чупров (1874-1926) [4].

Наиболее крупным экономистом-математиком дореволюционной России был В.К.Дмитриев (1868-1913). Его первая известная работа "Теория ценности Д.Рикардо. Опыт органического синтеза трудовой ценности и теории предельной полезности" была опубликована в 1898 г. Основной труд В.К.Дмитриева "Экономические очерки" вышел в 1904 году и состоял в разработке модели полных затрат труда и сбалансированных цен в виде системы линейных уравнений с технологическими коэффициентами. "Формула В.К.Дмитриева" спустя несколько десятков лет нашла широкое применение в моделировании межотраслевых связей в России.

Широко известен своими работами по теории вероятности и математической статистике Е.Е.Слуцкий (1880-1948). В 1915 г. он опубликовал статью "К теории сбалансированности бюджета потребителя", оказавшую большое влияние на экономико-математическую теорию. Спустя 20 лет, эта статья получила мировое признание.

Лауреат Нобелевской премии Д.Хикс в книге "Стоимость и капитал" (1939) писал, что Е.Е.Слуцкий был первым экономистом, сделавшим значительный шаг вперед по сравнению с классиками математической школы. Д.Хикс оценивал свою книгу как первое систематическое исследование той теории, которую открыл Е.Е.Слуцкий". Английский экономист-математик

Р.Аллен, автор известной книги "Математическая экономия", отмечал в журнале "Эконометрика", что работы Слуцкого оказали "великое и прочное влияние на развитие эконометрики". Е.Е.Слуцкий является одним из родоначальников праксеологии (науки о принципах рациональной деятельности людей) и первым, кто ввел праксеологию в экономическую науку.

Экономико-математические исследования в России проводились в основном по двум направлениям: моделирование процесса расширенного воспроизводства и применение методов математической статистики в изучении хозяйственной конъюнктуры и в прогнозировании.

Одним из первых специалистов в области экономико-математических исследований являлся А.А.Конюс, опубликовавший в 1924 году по данной теме статью "Проблема истинного индекса стоимости жизни".

Значительной вехой в истории экономико-математических исследований явилась разработка Г.А.Фельдманом (1884-1958) математических моделей экономического роста. Статьи Г.А.Фельдмана намного опередили работы западных экономистов по макроэкономическим динамическим моделям и в еще большей степени по двухсекторным моделям экономического роста.

В 1938-1939 гг. ленинградский математик и экономист Л.В.Канторович в результате анализа ряда проблем организации и планирования производства сформулировал новый класс условно-экстремальных задач с ограничениями в виде неравенств и предложил методы их решения. Эта новая область прикладной математики позже получила название "линейное программирование". Л.В.Канторович (1912-1986) является одним из создателей теории оптимального планирования и управления народным хозяйством, теории оптимального использования сырьевых ресурсов. В 1975 году Л.В.Канторовичу совместно с американским ученым Т.Купмансом была присуждена Нобелевская премия за исследования по оптимальному использованию ресурсов.

Большой вклад в использование экономико-математических методов внесли: экономист Новожилов В.В. (1892-1970) - в области соизмерения затрат и результатов в народном хозяйстве; экономист и статистик Немчинов В.С. (1894-1964) - в вопросах экономико-математического моделирования планирования; экономист Федоренко Н.П. - при решении проблем оптимального функционирования экономики страны, применении математических методов и ЭВМ в планировании и управлении [3].

2 Основы системного анализа и моделирования

2.1 Этапы системного анализа

Современный подход к решению технологических задач основан на принципах системного анализа. Согласно этим принципам технологический процесс рассматривается как сложная система, состоящая из элементов различных уровней детализации, начиная от молекулярного и кончая отдельным процессом.

Сущность системы невозможно понять, рассматривая только свойства отдельных элементов; для нее еще существенен, как способ взаимодействия элементов между собой, так и взаимодействие элементов или системы в целом с окружающей средой. Анализ элементарных процессов, производимый порознь, не дает еще возможности судить о какой-либо стадии технологического процесса в целом, точно так же, как и анализ отдельных стадий процесса без выявления взаимосвязи между ними и с окружающей средой, не дает возможности судить обо всем технологическом процессе.

При анализе технологического производства (цеха, завода, комбината) принято выделять несколько уровней иерархии, между которыми существуют отношения соподчиненности. На первом уровне находятся элементарные процессы технологии (химические, массообменные, тепловые, механические, гидромеханические) и на более высоких - элементы, которые могут быть выделены в таковые по какому-либо признаку, например по административно-хозяйственному или производственному (цеха, производства, предприятия и т.д.). При анализе отдельного процесса в качестве элементов или ступеней иерархии могут выступать явления на макро- и микроуровнях, в совокупности определяющие целевую функцию процесса, например, химическое превращение, теплообмен и т. д. Основная идея системного анализа как раз и состоит в применении общих принципов разделения (декомпозиции) системы на отдельные элементы и установление связей между ними, в определении цели исследования и определения этапов для достижения этой цели.

Предметом изучения данного курса являются следующие системы: элементарные процессы; основные стадии технологического процесса, как правило, представляющие собой совокупность нескольких элементарных процессов; технологический процесс производства материалов в целом, а также сам результат производства - строительный материал как система.

Системный подход к исследованию технологических процессов имеет цель получения оценок функционирования процесса на любом уровне декомпозиции и осуществляется в несколько этапов. Отдельный элемент системы в зависимости от поставленной цели может рассматриваться как отдельная система с более детализованными уровнями декомпозиции.

Академик В. В. Кафаров выделяет четыре основных этапа системного исследования процесса.

1 этап - Смысловой и качественный анализы объекта производятся для выявления уровней декомпозиции, отдельных элементов и связей между ними. Установление уровней иерархии, выбор элементов осуществляются исходя из общей цели исследования и степени изученности процесса.

2этап - Формализация имеющихся знаний об элементах и их взаимодействии и представление этих знаний делается в виде математических моделей. Источником знаний обычно служат фундаментальные законы и экспериментальные данные. Создавая математическую модель, исследователь формализует рассматриваемый процесс, представляя его в виде математической связи между входными и выходными параметрами. Точность воспроизведения сущности рассматриваемого процесса на модели будет зависеть от степени изученности его.

3 этап - Математическое моделирование как метод исследования (классификация моделей и общие принципы моделирования изложены ниже) в настоящее время получил широкое распространение. Его применение непосредственно связано с ЭВМ. Сочетая достоинства теоретических и экспериментальных методов исследования, математическое моделирование позволяет не только исследовать явления, недоступные этим методам (в силу сложности математического описания или невозможности технической реализации), но и обобщать результаты на основе многократного использования модели и делать прогнозы о возможном поведении процесса при изменении определяющих параметров. Математическое моделирование - это воспроизведение реально протекающих явлений на модели. Адекватность, т. е. соответствие результатов моделирования экспериментальным данным, полученным на реальном объекте, определяется уровнем знаний о процессе и обоснованностью принятых допущений. Математическая модель представляет собой совокупность математического описания и алгоритма решения. Алгоритм должен быть доведен до конкретной реализации, т. е. до получения количественной связи между параметрами в результате выполнения программы на ЭВМ.

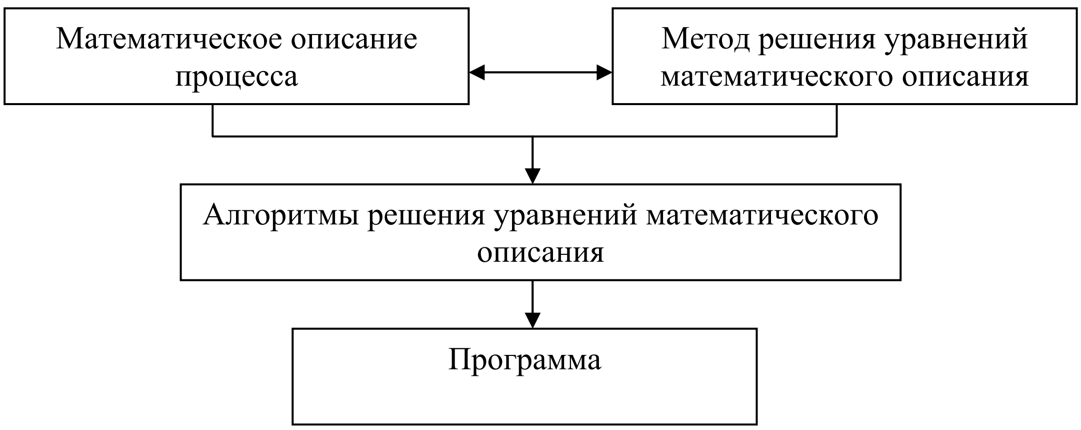


Рисунок 1 – Структура математической модели

4 этап - Идентификация математических моделей элементов состоит в определении неизвестных параметров и оценке параметров состояния объекта.

Явления, определяющие процессы химического превращения, диффузионного, конвективного и турбулентного переноса вещества, распределения материальных и тепловых потоков по своей природе, являются вероятностными. Детерминированные фундаментальные законы отражают лишь общий характер явления при совокупности ограничений и допущений.

И в то же время, являясь основным аппаратом при построении математических моделей процесса, для решения конкретной задачи они нуждаются в количественных оценках вероятности свершения акта взаимодействия на микро- и макроуровнях.

Получить более реальные характеристики процесса можно лишь после проведения коррекции параметров модели исходя из заданного критерия, по экспериментальным данным. Идентификация математической модели является одной из основных задач моделирования технологических процессов, и ее решение, особенно для нелинейных систем, практически невозможно без применения ЭВМ [8].

Итак, рассматривая технологический процесс как сложную систему, необходимо учитывать взаимодействие ее с внешней средой и внутренние взаимодействия отдельных элементов системы. Управляемую систему можно изобразить схемой, представленной на рисунке 2.

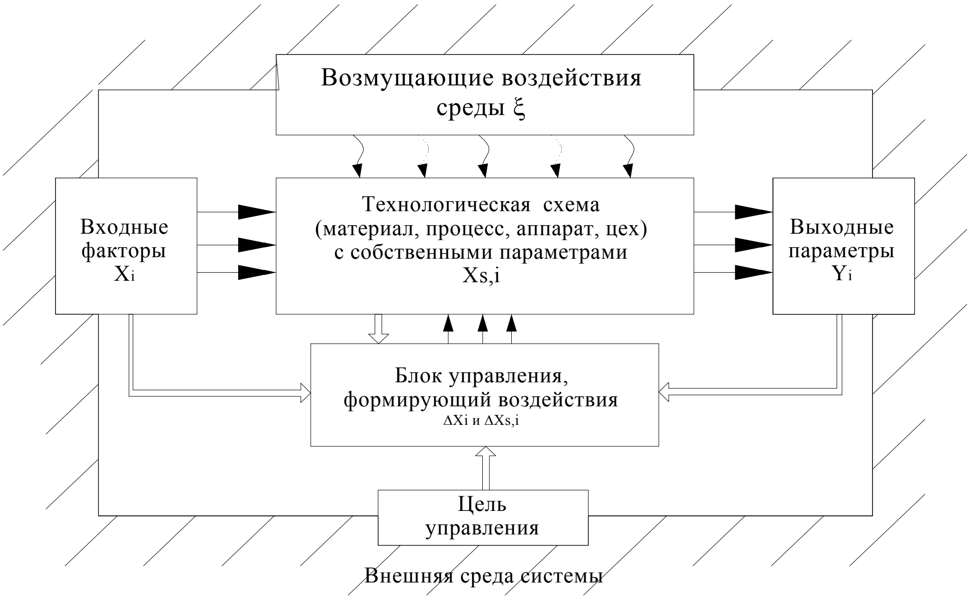


Рисунок 2 – Возмущающие воздействия среды

Это схема внешних связей системы. Всякая система имеет входы (обычно называются факторами и обозначаются X_i) и выходы (часто называются "параметры оптимизации" и обозначаются Y_j). Система с собственными параметрами (X_{is} – геометрия аппарата, температура кипения рабочей жидкости и т.п.) со стороны внешней среды подвержена возмущениям ξ, имеющим случайный характер; для целенаправленного изменения значений выходов Y_j и компенсации возмущений ξ и используя управляющие воздействия ΔX_i или ΔX_{is}, формируемые на основе информации о числовых значениях Y_j, X_i и X_{is}. Под информацией понимают фактические данные о структуре системы, происходящих в ней явлениях, возможных состояниях, поведении при изменении входных факторов или под воздействием случайных возмущений и т.п.

Количество информации определяется целями исследования. Она может быть собрана двумя разными способами: наблюдением и экспериментом. *Наблюдение* – это целенаправленное восприятие объекта без вмешательства в его поведение. *Эксперимент* – активное воздействие на объект с планомерным изменением, комбинированием различных условий с целью получения необходимого эффекта. Это более высокая ступень эмпирического уровня познания.

Воздействующие факторы различают: контролируемые, но нерегулируемые: известные (измеренные), но неизменяемые произвольно. Нерегулируемость связана с трудоемкостью регулирования. Например, практически невозможно изменить соотношение высоты и диаметра сушильного барабана в процессе его работы.

Контролируемые и регулируемые входы - это те воздействия, которые изменяют, чтобы управлять системой. Поэтому их обычно называют управляющими факторами или управлениями.

Неконтролируемые факторы - воздействия на систему, которые находятся вне нашего контроля. Причины неконтролируемости факторов могут быть различны:

1) неизученность объекта - неизвестно влияет ли данный фактор существенно на функционирование системы;

2) невозможность контролировать – например, индивидуальность человека;

3) каждое воздействие из этого множества слишком слабо, чтобы его стоило контролировать.

С другой стороны, воздействий так много, что все их контролировать практически невозможно, а совокупность воздействий может оказаться весьма ощутимой. Это влияние носит случайный характер. Обычно влияние неконтролируемых факторов называют *шумом.* Влияние шума на производстве проявляется в случайных возмущениях режима, в экспериментальных исследованиях - в случайных ошибках опытов [5].

Классификацию внешних связей системы можно представить в виде схемы, изображенной на рисунке 3.

Рисунок 3 – Классификация внешних связей системы

2.2 Существующие подходы анализа системы

Математическое описание функционирования системы в общем виде представляют системой уравнений типа:

$$\varphi(X_i;\ X_{is};\ Y_j;\ \xi;\ \tau)=0 \qquad (2.1)$$

где $X_i;\ X_{is};\ Y_j;\ \xi;\ \tau$ – факторы, влияющие на систему.

Исходя из обобщенной технологической схемы производства строительного материала, можно представить схему внешних связей технологического процесса как систему с детализацией по основным технологическим переделам. Эта схема представляет соединение как бы отдельных блоков, расположенных в технологической последовательности отдельных переделов, при этом отклики предыдущего блока представляют входы последующего. Выход предыдущего блока может быть как управляемым, так и неуправляемым входом последующего блока. Обычно система упрощается исключением вектора Z, т. е. математическая модель представляется системой уравнений типа (2.1).

Вид этой функции можно получить из двух разных подходов.

1 Структурный подход. Для создания математической модели системы исследуют составляющие систему элементы и характер их взаимодействия. Применительно к технологическому процессу это означает расшифровку его механизма не только на стадии блоков по рисунку 4, но и на более низком уровне — не выше элементарных процессов. Например, для процесса производства сборного железо бетона такая модель на физическом языке содержит, прежде всего, представления о механизмах реакции гидратации, характера движения потоков, процессах переноса теплоты и вещества и об их взаимном влиянии. Записав эту схему на языке математики, получают в общем виде систему уравнений (описывающих процесс), в которую входят некоторые пока еще не известные коэффициенты (тепло- и массопереноса, константы скорости реакций и т. д.), которые называют параметрами модели. Их устанавливают экспериментально. К сожалению, в технологии строительных материалов таких уравнений в полном объеме пока еще нет.

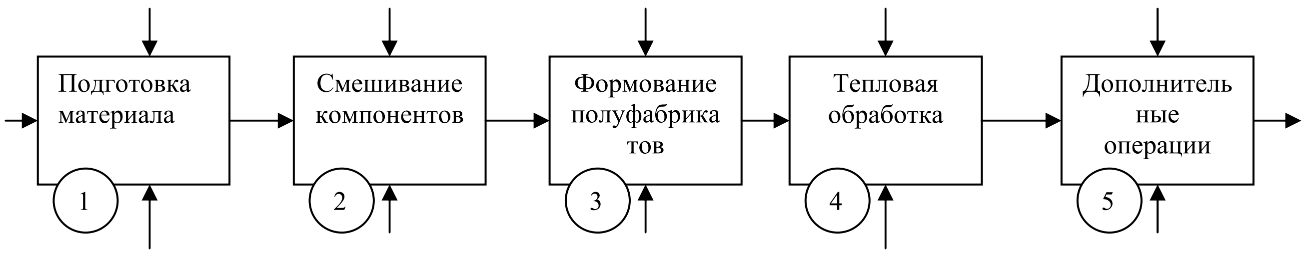


Рисунок 4 – Структура технологического процесса

2 Эмпирический подход (или метод черного ящика) заключается в следующем. Допустим, что внутренние взаимосвязи рассматривают системы, скрытые от нас (они как бы заключены в черный ящик). Но это вовсе не значит, что о системе ничего невозможно узнать и главное что ею нельзя управлять. У такой системы есть важные контакты - входы и выходы, которыми можно воспользоваться для анализа и управления ею. Для этого нужно изменить значения входов и установить, как при этом будут изменяться выходные параметры. Установление каждой такой зависимости есть не что иное, как эксперимент. Проведя определенное количество экспериментов, результаты их можно описать эмпирическим уравнением (или системой уравнений), которое и будет математической моделью системы.

Долгое время в науке господствовало убеждение, что истинно научным является лишь структурный подход, а подход эмпирический - это нечто неполноценное, второстепенное вспомогательное, нечто такое, что пригодно лишь в практических задачах, а также на начальном этапе научного исследования; истинная же наука начинается с установления механизма, с расшифровки структуры. Одним из плодотворных положений кибернетики является утверждение того, что во многих задачах метод черного ящика может оказаться основным способом исследования, что это полноправный научный метод и что в каждом конкретном случае надо оценить преимущества и недостатки обоих подходов. Необходимо подчеркнуть, что в любом реальном случае имеются элементы того или иного подхода [10].

2.3 Понятие о моделировании. Классификация моделей

Как бы хорошо не был изучен объект исследования, в достаточно трудных случаях его реальное описание нельзя построить на чисто теоретической основе. Какие-то параметры всегда придется определять опытным путем. Мало того, опытом же придется, и проверять соответствие между построенной моделью и оригиналом, т. е. адекватность модели. В то же время любое эмпирическое описание обязательно отражает механизм исследуемого процесса. Поэтому в практических задачах при рассмотрении системы применяются как фундаментальные уравнения (структурный подход), так и экспериментально выведенные зависимости (эмпирический подход).

Основным достоинством эмпирического метода является простота. Особенно существенно она сказывается при изучении сложных процессов. Например, рассмотрим бетон как систему. Внешние связи этой (как и всякой другой) системы состоят из контролируемых и регулируемых входов - состав, ряд технологических параметров (время перемешивания и вибрирования смеси, температура и длительность тепловлажностной обработки и т. д.), контролируемых, но не регулируемых входов - активность цемента, зерновой состав заполнителей (что поступило на завод, то практически и надо использовать), некоторые технологические параметры (например, амплитуда колебаний бетонной смеси), ряд эксплуатационных воздействий (например, температурные условия службы бетона), случайные входы - химическая загрязненность сырья, большинство эксплуатационных воздействий и т. п.

Откликами этой системы, как правило, являются прочностные, деформативные, теплофизические характеристики материала и его долговечность. В настоящее время мы многое знаем о влиянии входов на выходные факторы, например, влияние активности цемента - $R_ц$, водоцементного отношения - *В/Ц*, времени твердения – *t*, температуры твердения - t^o – на свойства бетона: $R_б=\varphi(R_ц;\ В/Ц);\ R_б=f(t,\ t^o),\ R_{мрз}=\varphi(R_б;\ В/Ц;\ c)$.

Все эти зависимости получены в результате эксперимента. Общий механизм процесса создания материала и обобщенные зависимости его свойств от основных факторов, по существу, находятся на стадии качественного описания. Возможности количественной оценки на основе фундаментальных уравнений физики, химии, термодинамики в настоящее время лишь намечаются на базе характеристик, связывающих состав - структуру - свойства.

Главная слабость экспериментального подхода - малая надежность экстраполяции. В пределах изменения переменных, изученных в опытах, предсказание поведения процесса (интерполяция) обычно может проводиться достаточно точно. Но закон изменения функций отклика за изученными пределами нам не известен, и можно допустить серьезную ошибку, полагая, что процесс по-прежнему обязательно будет подчиняться выведенным нами эмпирическим уравнениям. Например, при производстве фенолоформальдегидного пенопласта скорость поликонденсации зависит от температуры, Если эксперимент проводят в интервале температур 120...170 °С, то экстраполяция этих результатов за температурные пределы 180...200 °С приведет к абсурдным результатам, поскольку при этих температурах реакция поликонденсации не только не ускорится, а, наоборот, произойдет деструкция полимера. Разумеется, ситуация упрощена: в столь явных случаях эмпирический подход вряд ли стоит применять. Но пример не столь уж бессмыслен. Именно температурные зависимости очень часто плохо поддаются экстраполяции.

В практике экспериментальных исследований одним из важнейших случаев экстраполяции является масштабирование: предсказание того, как изменятся параметры процесса при переходе от малой модели к большому оригиналу. На основе эмпирических зависимостей эта задача, как правило, решается гораздо хуже, чем при структурном подходе.

Главное достоинство данных, полученных на основе структурного подхода, - это их большая вероятность правильного прогнозирования. Зная механизм какого-либо процесса, мы можем с большой степенью достоверности предсказывать его поведение в самых разнообразных условиях. Слабое место подхода - трудность создания хорошей теории сложных процессов.

В основе любой модели лежат законы сохранения. Они связывают между собой изменение фазовых состояний системы и внешние силы, действующие на нее.

Любое описание системы, объекта (строительного предприятия, процесса возведения здания и т.д.) начинается с представления об их состоянии в данный момент, называемом фазовым. Успех исследования, анализа, прогнозирования поведения строительной системы в будущем, т.е. появления желаемых результатов её функционирования, во многом зависит от того, насколько точно исследователь "угадает" те фазовые переменные, которые определяют поведение системы. Заложив эти переменные в некоторое математическое описание (модель) этой системы для анализа и прогнозирования ее поведения в будущем, можно использовать достаточно обширный и хорошо разработанный арсенал математических методов, электронно-вычислительную технику.

Понятия «модель» и «априорная информация» играют значительную роль в планировании эксперимента. Под априорной информацией обычно понимают все, что известно экспериментатору до проведения эксперимента об изучаемом в процессе эксперимента явлении. Это обычно физические представления (если эксперимент физический) и анализ данных предшествующих экспериментов или близких по характеру экспериментов. Для применения математической теории требуется формализация этой информации.

Описание системы на языке математики называется математической моделью, а описание экономической системы - экономико-математической моделью. Многочисленные виды моделей нашли широкое применение для предварительного анализа, планирования и поиска эффективных форм организации, планирования и управления строительством.

Моделирование - метод исследования, при котором вместо непосредственно интересующего нас процесса (или явления), протекающего в каком-нибудь объекте (оригинале), изучается соответствующий процесс на другом объекте (модели). Другими словами – это схема, с той или иной степенью точности отражающая наиболее существенные стороны изучаемого процесса.

2.4 Основные этапы и принципы моделирования

На первом этапе создания модели должны быть определены: конечные цели моделирования, набор факторов и показателей, взаимосвязи между которыми нас интересуют; какие из этих факторов, в рамках исследуемой системы, можно считать "входными" (т.е. полностью или частично регулируемыми или хотя бы легко поддающимися регистрации и прогнозу; подобные факторы несут смысловую нагрузку "объясняющих"), а какие "выходными" (главный объект исследования). Эти факторы обычно трудно, поддаются непосредственной регистрации или прогнозу и несут смысловую нагрузку "объясняемых".

Если исходная статистическая информация еще не собрана, то сбор необходимых статистических данных тоже является содержанием первого этапа.

На втором этапе занимаются математической формализацией, если возможно, экспериментальной проверкой исходных положений, относящихся к природе и качественному характеру исследуемого явления (этап формирования априорной информации). Нахождение количественного отражения качественному содержанию того или иного процесса является наиболее трудным делом.

Если принимаемые допущения (положения) не могут быть подтверждены экспериментальной проверкой, то их следует подкрепить теоретическими обоснованиями или ссылками на мнения авторитетных экспертов и специалистов.

Третий этап является этапом создания модели, так как он включает в себя непосредственный вывод общего вида модельных соотношений, связывающих между собой интересующие нас входные и выходные показатели, создание электронной модели (ввод числовых данных в ЭВМ) на основании этих количественных показателей и ее алгоритма.

Общий вид модели на данном этапе определяет лишь структуру модели, ее символическую запись, в которой наряду с известными числовыми значениями присутствуют величины, физический смысл которых определен, а числовые значения пока неизвестны - они подлежат определению в четвертом этапе.

Четвертый этап - этап статистического анализа параметров исследуемого процесса (объекта), подсчета и сопоставления полученных оценок анализа их свойств и соответствия желаемому результату. Решение задач четвертого этапа решается полностью методами статистической обработки данных.

На пятом этапе осуществляется оценка адекватности модели с использованием различных процедур сопоставления модельных заключений, оценок, следствий и выводов с реально наблюдаемой действительностью.

Шестой этап - планируются, при необходимости, и проводятся исследования, направленные на уточнение модели, дальнейшее развитие и углублению положений второго этапа.

Взаимосвязь этапов. Уже на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи противоречива или приводит к слишком сложной математической модели и, следовательно, необходимо возвратиться к первому этапу и произвести корректировку исходной постановки.

Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает на четвертом этапе - при подготовке исходной информации, в случае, если затраты на ее подготовку слишком велики или она вообще отсутствует. В случае если известные алгоритмы и программы для ЭВМ, не позволяют решить задачу в первоначально поставленном виде, а времени на разработку новых алгоритмов и программ не хватает, то в этом случае упрощают исходную постановку задачи и модель - снимают и объединяют условия, уменьшают число факторов, нелинейные соотношения заменяют линейными, усиливают детерминизм модели и т.д. Недостатки, которые не удается исправить на промежуточных этапах моделирования, устраняются в последующих циклах.

В заключение можно заметить, что трудности создания эффективных моделей объясняются сложностью сбора и обработки информации о системе, отсутствием нормативной базы и соответствующей системы процедур для выработки целей и критериев.

Полезную информацию можно получить при исследовании не только самой системы, но и некоторой ее имитации, причем последняя может быть как мысленно представляемая, так и реально реализуемая.

Если две системы абсолютно одинаковы, то можно говорить об их тождественности: они взаимозаменяемы для любых целей. Если системы подобны, то одна из них может в определенном смысле заменить другую.

Система *М*, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе - прототипе *О*, называется моделью. Информация, собранная при исследовании модели М или моделирования, может быть в определенных границах по аналогии перенесена на прототип *О*. Критерием истинности знаний, полученных при моделировании, является результат их практической проверки в системе прототипе *О*.

Понятие модель имеет общенаучный смысл. В технических науках оно конкретизируется, отражая особенности, присущие предмету данной науки. Под *моделью* понимают строго упорядоченную теоретическую и эмпирическую информацию, которая включает: абстрагирование, упрощение и укрупнение или агрегирование; логическую и математическую формализацию. Из данного определения, очевидно, что моделирование не заменяет теоретического анализа, а является переводом конкретного содержания задачи на язык математики

Среди множества моделей, используемых для формализации различных процессов, можно выделить несколько видов, которые связаны с различными формами их реализации. Таких форм можно назвать три. Это наглядное, физическое и информационное моделирование.

Наглядное моделирование осуществляется на макетах или объемных моделях, которые передают внешний вид объекта, помогают правильно установить сложные технологические связи и дают наглядное представление об объекте еще до его реализации. Эта форма моделирования широко используется в сфере проектирования строительных объектов.

Физическое моделирование связано с отображением изучаемого объекта с помощью физических процессов. Оно основано на том, что характер изменения параметра модели может отражать характер динамического процесса в изучаемом явлении.

Информационное моделирование основано на использовании различных графических и математических методов для выражения определенной информации и процессов ее преобразования. В связи с этим в составе информационного моделирования различают графические модели, которые реализуются средствами логического аппарата с использованием различного рода графиков, таблиц, схем, чертежей, и экономико-математические модели, которые реализуются средствами математического аппарата с использованием формул, уравнений неравенств.

Графические модели. Простейшей формой графической модели является таблица, которая представляет собой свод или перечень каких-либо числовых данных, расположенных в определенном порядке, по графам.

Второй формой графической модели являются графики, которые дают геометрическое изображение функциональной зависимости. Графики могут быть выполнены в виде линейной модели, циклограммы или сетевой модели. *Линейные графики*, или графики Ганга выполняют в виде отрезков прямых линий, которые характеризуют их продолжительность в выбранном масштабе времени. *Циклограммы* представляют собой графики, у которых по оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат - единица измерения. Их используют для графического изображения процесса, изменяющегося во времени и пространстве. *Сетевая модель* представляет собой стрелочную диаграмму, которая схематически отображает технологическую и организационную последовательность выполнения различных работ. Графически такая модель изображается в виде стрелок и кружков [2].

Третьей формой графической модели являются схемы. *Схемой* называется изображение, описание, изложение или чертеж, с помощью которого воспроизводится связь или зависимость отдельных частей. Более усовершенствованной разновидностью схемы являются блок-схемы, в которых отдельные элементы схемы объединяются в блоки. Блок-схемы, как правило, используют для построения логических моделей, которые выражают через логические законы мышления объективное содержание исследуемых предметов и тем самым способствуют познанию различных форм действительности. Логическая модель может быть представлена оперативной блок-схемой. В такой модели отдельные элементы схемы объединены в блоки по принципу выполнения одних и тех же действий. Логические модели, используемые для увязки потоков входной и выходной информации в автоматизированных системах управления, называются *логико-информационными* и также выражаются в виде блок-схем.

Классификация моделей:

а) по неопределенности состояния объекта:

- модели *детерминированных систем*, в которых все элементы взаимодействуют точно предвиденным способом, а случайные факторы *(Z)* практически не влияют на течение процесса (изменение X_i на величину ΔX_i всегда вызывает изменение Y_j на ΔY_j).

в) по содержательным характеристикам объекта и модели:

- модели *стохастических систем,* подчиняющиеся вероятностным законам, на поведение отдельных элементов которых существенно влияют случайные входы (изменение X_i на величину ΔX_i вызывает изменение Y_j на $\Delta Y+\xi$, где ξ – случайная составляющая).

- *субстанциональные модели,* построенные таким образом, чтобы их материал по своим свойствам был подобен материалу объекта (оба имеют одинаковую природу материи и её движения);

- *структурные модели* имитируют структуру или способ взаимодействия элементов объекта между собой (как в статике, так и в динамике);

- *функциональные модели,* имитирующие одну или несколько основных (определяющих) функций объекта, как некоторый стабильный, характерный для данной системы способ поведения, являющийся одной из важнейших сторон сущности системы;

с) по принципу отображения объекта:

- *предметно-физические* модели, выполняемые как установки, сохраняющие в основном природу явления (или функцию объекта);

- *абстрактно-знаковые* модели, отражающие взаимосвязь элементов в системе в виде специальных символов и операторов перехода между ними; важнейшими среди них являются математические модели - формальные описания систем (в виде набора чисел, графиков, уравнений, алгоритмов и т.п.), позволяющие выводить определения в некоторых чертах поведения этой системы с помощью формальных процедур над ее описанием [7].

Рассмотрим три простейших примера моделей и проведем их классификацию:

1) из тела бетонного блока вырезан и испытан образец, имеющий форму цилиндра. Это модель A_2-B_1-C_1, т.е. стохастической системы (прочность реальных композитов подчиняется вероятностным законам); субстанциональная, предметно-физическая;

2) для оптимизации движения цементовозов составлена система взаимосвязи расположенного в Киеве ДСК с заводом, вырабатывающим цемент; для каждого завода на схеме указано расстояние до ДСК по дорогам и возможный ежемесячный тоннаж поставки. Это модель A_2-B_2-C_2, т.е. стохастической системы, структурная, абстрактно-знаковая;

3) известно, что зависимость прочности бетона от водо-цементного отношения - В/Ц – приближенно описывается эмпирической формулой $R_б=A*R_ц(Ц/В-в)$. Это модель A_2-B_3-C_2, т.е. стохастической системы, функциональная, математическая.

3 Элементы математической статистики

3.1 Понятие о математической статистике

В энциклопедии дано следующее определение математической статистики: - это раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. Статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-либо большей или меньшей обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками. Предметом математической статистики является формальная математическая сторона статистических методов исследования, безразличная к специфической природе изучаемых объектов.

В теории вероятностей имеют дело с вероятностями случайных событий, случайными величинами, их математическими ожиданиями, дисперсиями, законами распределения, функциями распределения и плотностями вероятностей. При этом считалось, что все эти функции известны. В практических задачах положение иное. Единственное, что можно сделать при изучении случайных явлений – это ставить опыты. И все характеристики, перечисленные выше, мы должны получить из этих опытов. Всякий эксперимент связан с ошибками наблюдений и измерений, поэтому характеристики из опыта получаются приближенные. Следовательно, надо уметь оценить ошибку полученного приближенного значения для найденной характеристики. В вероятностных задачах еще надо учитывать надежность полученных результатов (т.е. вероятность того, что проведенные по результатам опыта вычисления дают заданную точность).

Задача состоит в том, чтобы по результатам поставленных экспериментов (наблюдений, измерений и т.д.) составить представление о той вероятностной ситуации, с которой мы столкнулись. При этом надо не только сделать выводы из поставленных экспериментов, но и организовать их наиболее рациональным образом.

Задача сводится к тому, чтобы на основании выборочных данных сделать выводы о свойствах генеральной совокупности. Исследование проводится в несколько этапов:

первый – построение ряда распределений для выборочных значений случайной величины, группировка их по интервалам, определение частот и частостей в каждом интервале, построение графика распределения (гистограммы, полигона и т.д.);

второй – определение точечных числовых оценок распределения среднего x; дисперсии $S^2\{x\}$, коэффициентов вариации $f\{x\}$; асимметрии A^*, эксцесса E^* и т.д.;

третий – определение интервальных оценок, которые дают уверенность (с определенным риском α) в том, что параметр генеральной совокупности лежит внутри интервала, связанного с точечной оценкой;

четвертый – аппроксимация выборочного распределения теоретическим законом распределения или подходящей эмпирической кривой (с проверкой адекватности принятого решения).

До последнего времени большинство технологических работ ограничивалось двумя первыми этапами, при этом использовались лишь элементарные алгебраические операции при вычислении X и $S^2\{x\}$, а не вероятностно-статистический метод познания, который начинается на третьем этапе [5].

3.2 Задачи математической статистики

3.2.1 Первый этап – сбор и первичная обработка данных

Для того чтобы сделать вывод о поведении некоторой совокупности объектов, необходимо провести обследование каждого из этих объектов. В теории статистики различают два вида статистического наблюдения по степени полноты охвата: сплошное и несплошное. *Сплошным* называется такое наблюдение, при котором обследуется вся статистическая совокупность. Такая совокупность получила название *генеральной*. Статистическая практика показала, что идеально сплошных наблюдений почти не удается получить, так как определенная часть совокупности по различным причинам ускользает от наблюдения. Тем не менее, если степень охвата наблюдением очень велика, то наблюдение считается сплошным.

Несплошным называется такое наблюдение, при котором обследуется определенная часть единиц совокупности. Результатом такого наблюдения является *выборочная* совокупность. Выборочной совокупностью или просто выборкой называется совокупность случайно отобранных объектов. *Объемом совокупности* (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности, например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности N=1000, а объем выборки n=100.

Несплошное наблюдение может выполняться различными методами: выборочным, направленного отбора, методом основного массива.

Среди названных методов наиболее распространен выборочный метод наблюдения, сущность которого заключается в случайном отборе некоторого числа единиц статистической совокупности при строго объективном подходе к их отбору. Выборочный метод наблюдения позволяет по отобранной совокупности судить о характеристиках генеральной совокупности. Наиболее важным принципом этого метода является равновозможность отбора, сущность которого заключается в том, что каждой единице обеспечена равная возможность быть отобранной, т. е. ни одна единица при отборе не обладает преимуществом перед другой.

Выборочный метод наблюдения дает возможность получать случайную выборку, для статистической обработки которой используется теория вероятностей.

Одна из важнейших теорем теории вероятностей, сформулированная П. Л. Чебышевым, составляет теоретическую основу выборочного метода наблюдения. Применительно к данному методу она может быть записана в следующем виде:

$$P\left[(\bar{x}-\tilde{x}) \leq t\alpha / \sqrt{n}\right] \geq 1-1/t^2 \tag{3.1}$$

где P - символ вероятности;

$\tilde{x}$ - средняя для выборочной совокупности;

$\bar{x}$ - средняя для генеральной совокупности;

t - множитель, указывающий на вероятность ошибки;

α - среднее квадратическое отклонение в генеральной совокупности;

n - объем случайной выборки.

При практическом использовании теоремы П. Л. Чебышева дисперсию для генеральной совокупности α^2 заменяют выборочной дисперсией α^2, так как первую подсчитать невозможно.

Множитель t, связанный с вероятностью P, называется также нормированным отклонением, или стандартизованной разностью. Отношение $\alpha/\sqrt{n})$ часто обозначается через μ и выражает среднюю ошибку выборки.

Теорема П. Л. Чебышева формулируется так: с вероятностью, сколь угодно близкой к единице (достоверности), можно утверждать, что при достаточно большом объеме выборки n и ограниченной дисперсии генеральной совокупности α^2 разность между выборочной средней $\tilde{x}$ и генеральной средней $\bar{x}$ будет сколь угодно мала.

Генеральная и выборочная совокупности характеризуются рядом статистических показателей. В их числе можно назвать генеральную и выборочную средние, генеральное и выборочное среднее квадратическое отклонения и т. д.

При использовании выборочного метода наблюдения производят отбор единиц из генеральной совокупности. Систему организации отбора называют способом отбора. В зависимости от того, сколько раз отобранная единица участвует в дальнейшей выборке, различают два вида отбора: повторный и бесповторный.

Повторным называется такой вид отбора, при котором отобранная в первый раз единица возвращается обратно в генеральную совокупность и вновь участвует в выборке. Здесь мы наблюдаем постоянную вероятность попадания в выборку всех единиц совокупности.

Бесповторным называется такой вид отбора, при котором отобранная в первый раз единица в генеральную совокупность обратно не возвращается. Здесь мы наблюдаем переменную вероятность попадания в выборку каждой новой единицы.

Повторный и бесповторный отборы могут производиться разными способами. При выполнении статистических исследований различают пять способов отбора: собственно случайный, механический, типический, серийный и комбинированный.

Собственно случайный отбор ориентирован на выборку единиц из генеральной совокупности без какого-либо расчленения ее на части или группы и осуществляется наудачу. Он не зависит от изучаемых признаков и сохраняет принцип равновозможности отбора. Случайный отбор осуществляется при помощи жеребьевки или на основе таблиц случайных чисел и позволяет получать объективную оценку генеральной совокупности. Этот способ дает собственно случайную выборку. При большом объеме генеральной совокупности описанный процесс оказывается очень трудоемким.

При *механическом отборе* генеральная совокупность делится на число групп, соответствующих объему выборки и из каждой группы в выборку отбирается одна единица. Отбор производится в каком-либо механическом порядке. Например, в выборку попадают каждая пятая, каждая десятая и т. д. единицы при определенном их положении в генеральной совокупности.

При *типическом отборе* генеральная совокупность делится по некоторому признаку на типические группы и из каждой группы производится случайный отбор единиц. При этом, если отбирают некоторое число единиц, непропорциональное численности типической группы, то такой выбор называют непропорциональным типическим отбором, а в противном случае - пропорциональным. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности.

При *серийном* отборе производится выборка не единиц совокупности, а некоторых групп или серий. Внутри отобранных серий осуществляется сплошное наблюдение. При этом серии могут быть равновеликими и неравновеликими. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

При *комбинированном отборе* предполагается использовать одновременно несколько способов, например, серийный и случайный. В этом случае сначала генеральная совокупность разбивается на серии, а затем по отобранным сериям производится случайный отбор единиц [15].

Выборочный метод наблюдения, как и другие статистические методы, должен учитывать неточности наблюдений, которые называются ошибками наблюдения. Они состоят из ошибок регистрации и ошибок репрезентативности.

Ошибки, возникшие из-за неправильных и неточных сведений, называются *ошибками регистрации*. Они появляются в результате недостаточного понимания существа вопроса, ошибок регистраторов, пропуска или повторного счета некоторых единиц совокупности. Ошибки регистрации бывают двух видов: преднамеренные и непреднамеренные. Ошибки первого вида сознательно направлены на искажение действительности. К ним можно отнести приписки, скрытие резервов и т. д. В составе непреднамеренных ошибок различают систематические и случайные ошибки. Систематические ошибки обусловлены причинами, действующими в каком-либо одном направлении, которое приводит к искажению статистической информации, например округление цифр, пропуски единиц наблюдения, а также ошибки субъективных впечатлений. Случайные ошибки уравновешивают друг друга и не оказывают заметного влияния на проведение наблюдения.

Ошибки репрезентативности характеризуют разность между размером изучаемых признаков в генеральной и выборочной совокупности. Ошибки репрезентативности присущи только несплошному наблюдению. Они также делятся на два вида: систематические и случайные ошибки репрезентативности. Ошибки первого вида возникают из-за неправильного, тенденциозного отбора единиц наблюдения и приводят к нарушению основного принципа построения научно обоснованной выборки, т. е. нарушается принцип равновозможного отбора единиц. Ошибки второго вида, как правило, зависят от степени однородности статистической совокупности.

Среди задач, которые решаются на основе выборочного метода наблюдений, необходимо выделить изучение и измерение случайных ошибок репрезентативности. Эта задача заключается в определении средней или стандартной ошибки выборки, которая представляет собой среднеквадратическое отклонение возможных значений выборочной средней от генеральной средней, взвешенных по вероятностям их возникновения. Аналитические формулы для расчета средней ошибки выборки μ подбирают исходя из способа отбора:

для случайного повторного отбора

$$\mu = \sqrt{\sigma^2 / n} \qquad (3.2)$$

где σ - среднее квадратичное отклонение выборки;

n - численность выборки.

для случайной бесповторной выборки

$$\mu = \sqrt{(\sigma^2 / n)(1 - n / N)} \qquad (3.3)$$

где N - численность большой совокупности, из которой производится отбор.

для механической выборки - формулы (3.2), (3.3);

для непропорционального типического отбора:

при повторной выборке

$$\mu = (1 / N)\sqrt{\sum (\sigma^2{}_i / n_i) N^2{}_i} \qquad (3.4)$$

где $\sigma^2{}_\text{i}$ - выборочная дисперсия i-й типической группы;

N - численность *i-й* типической группы;

n - численность выборки из *i-й* типической группы.

при бесповторной выборке

$$\mu = (1 / N)\sqrt{(\sigma_i^2 / n_i) N_i^2 (1 - n_i / N_i)} \qquad (3.5)$$

для пропорционального типического отбора, который является случаем типической выборки с любыми пропорциями отбора:

$$\mu = \sqrt{\overline{\sigma}_i^2 / n} \qquad (3.6)$$

где $\overline{\sigma}_i^2$ - средняя из выборочных дисперсий i-х типических групп.

для аналогичной бесповторной выборки

$$\mu = \sqrt{(\overline{\sigma}_i^2 / N)(1 - n / N)} \qquad (3.7)$$

Разбивка на типические группы позволяет избежать влияния межгрупповой вариации на точность выборки, так как в типическую выборку обязательно входят представители всех групп. Поэтому в формулах (3.6) и (3.7), в отличие от формул (3.1) и (3.2), ошибка выборки находится в зависимости не от общей дисперсии σ^2, а от средней дисперсии типических групп $\overline{\sigma^2}$.

При выполнении статистических исследований возможны случаи, когда типический отбор производится пропорционально не численности единиц в типических группах, а пропорционально колеблемости признака. Такой отбор носит название типического отбора, пропорционального дифференциации признака и средняя ошибка выборки для него находится по формулам:

при повторном отборе

$$\mu = \frac{1}{N}\frac{\sum \sigma_i N_i}{\sqrt{n_i}} \tag{3.8}$$

при бесповторном отборе

$$\mu = \frac{1}{N}\frac{\sum \sigma_i N_i}{\sqrt{n_i}}\sqrt{1 - n/N} \tag{3.9}$$

где σ_i - среднее квадратическре отклонение в выборке из *i-й* типической группы.

Типический отбор с учетом дифференциации признака дает наиболее благоприятные результаты. При серийном отборе его точность уже зависит не от величины общей дисперсии, которую мы наблюдаем при случайном отборе, а от межсерийной дисперсии, или дисперсии групповых средних [24].

Средние ошибки выборки при серийном методе отбора с равновеликими сериями получают по формулам:

при повторном отборе

$$\mu = \sqrt{\bar{\delta}^2/r} \tag{3.10}$$

при бесповторном отборе

$$\mu = \sqrt{\left(\bar{\delta}^2/r\right)\left(1 - r/R\right)} \tag{3.11}$$

где $\bar{\sigma}^2$ - межсерийная или межгрупповая дисперсия средних значений;

r - число отобранных серий;

R - число серий в генеральной совокупности.

В свою очередь межсерийная или межгрупповая дисперсия определяется по формуле

$$\delta^2 = \frac{\sum\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2}{r} \tag{3.12}$$

где $\tilde{x}$ - средняя величина в *i-й* серии;

$\bar{x}$ - общая средняя величина во всех сериях.

Средняя ошибка выборки при различных комбинациях способов отбора исчисляется по-разному. Например, при комбинировании серийного отбора с равными сериями со случайным отбором средняя ошибка выборки определяется по формулам:

при повторном отборе

$$\mu = \sqrt{\left(\bar{\sigma}_i / n\right) + \left(\bar{\delta}^2 / r\right)} \qquad (3.13)$$

при бесповторном отборе

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_i^2}{n}\left(1 - \frac{n}{n_r}\right) + \frac{\bar{\delta}^2}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \qquad (3.14)$$

где n_r - общее число единиц, попавших в выборку при отборе серий;

n - число единиц, попавших в выборку из серий.

При этом

$$n_r = rN/R \qquad (3.15)$$

где r - число отобранных серий;

N - численность совокупности, из которой производится отбор;

R - число серий в генеральной совокупности.

Комбинированный отбор может быть многоступенчатым, если выборка осуществляется в несколько этапов. Когда же число ступеней отбора больше двух, то среднюю ошибку выборки при равной численности групп можно определить из выражения

$$\mu = \sqrt{\mu_1^2 + \frac{\mu_2^2}{n_1} + \frac{\mu_3^2}{n_1 n_2} + \ldots + \frac{\mu_k^2}{n_1 n_2 \ldots n_k}} \qquad (3.16)$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_k$. - средние ошибки выборки при отдельных ступенях;

$n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ - численности выборок на соответствующих ступенях.

При использовании выборочного метода наблюдений возникает вопрос о *необходимой численности выборки*, которая может быть получена исходя из допустимой ошибки для определенного способа отбора. Кроме того, необходимая численность выборки устанавливается по разным методикам для выборочного наблюдения, в котором находится средний размер признака в совокупности для доли единиц, обладающих данным признаком. Разные методики основываются на разных методах вычисления меры колеблемости для варьирующего и альтернативного признака. Меру колеблемости для варьирующего признака приблизительно можно определить через размах колебаний R либо более точно - на основании результатов предыдущих опытов. В этих условиях среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формуле

$$\sigma = R / 6 \qquad (3.17)$$

Следовательно, с вероятностью $F(t)$ = 0,997 можно утверждать, что размах вариации R при нормальном распределении признака соответствует $6^* \sigma$.

Если необходимая численность выборки определяется для альтернативного признака и неизвестна, хотя бы приблизительно, доля выборки, то необходимая численность соответствует дисперсии $\sigma^2 = 0{,}25$, т. е.

$$n = 0{,}25\ t^2 / \Delta^2 \qquad (3.18)$$

где n - необходимая численность выборки;
t - параметр, связанный с вероятностью Р;
Δ - предельная ошибка выборки.

Рассмотрим определение необходимой численности выборки при собственно случайном способе отбора:
для повторной выборки

$$n = \sigma^2\ t^2 / \Delta^2 \qquad (3.19)$$

для бесповторной выборки

$$n = \sigma^2\ t^2\ N / (\Delta^2\ N + \sigma^2\ t^2\ ) \qquad (3.20)$$

где N — объем генеральной совокупности.

Для механического способа отбора необходимая численность выборки определяется по формуле (3.20).

При типическом отборе различают три способа расчета необходимой численности выборки. Первый способ относится к типическому отбору, который непропорционален объему групп. В этом случае общее число отбираемых единиц делят на число типических групп, и полученное частное характеризует численность отбора из каждой типической группы. Второй способ относится к типическому отбору, который пропорционален объему групп. Необходимая численность выборки в этом случае находится по формуле:

$$n_i = n\ (N_i / N) \tag{3.21}$$

где n_i - необходимая численность выборки для i-й типической группы;

n - общий объем выборки;

N_i - объем 1-й типической группы;

N - объем генеральной совокупности.

Третий способ относится к типическому отбору, который пропорционален дифференциации признака. В этих условиях необходимая численность выборки находится из выражения:

$$n_i = n\ N_i\ \sigma_i / (\sum N_i\ \sigma_i) \tag{3.22}$$

где σ_i – среднеквадратическое отклонение в *i-й* типической группе.

При серийном способе отбора с равновеликими сериями необходимая численность выборки определяется по формулам случайного отбора:

для повторной выборки

$$r = б^2\ t^2 / \Delta^2 \tag{3.23}$$

где r - число отобранных серий;

t - параметр, связанный с вероятностью Р;

$б^2$ - межгрупповая или межсерийная дисперсия;

Δ - предельная ошибка выборки;

для бесповторной выборки

$$r = б^2\ t^2\ R / (\Delta^2 R + б^2\ t^2) \tag{3.24}$$

где R - число серий в генеральной совокупности.

Анализируя различные способы определения необходимой численности выборки, можно сделать вывод, что все они основываются на формуле предельной ошибки выборки для разных способов отбора. Выборочный метод наблюдения находит широкое применение в статистической практике. На его основе проводятся обследования бюджетов семей рабочих, занятых в строительстве, состава их семей, учет посевных площадей и поголовья скота в личных хозяйствах населения, выборочная разработка данных для переписей населения.

Применительно к строительству выборочный метод наблюдения используется для обследования затрат на производство строительно-монтажных работ; заработной платы рабочих по профессиям и тарифным разрядам, инженерно-технических работников и служащих по должностям.

Кроме того, широкое распространение получили статистические методы контроля качества строительной продукции и продукции предприятий материально-технической базы строительства, основанные на выборочном методе наблюдения.

При изучении процессов или явлений методами математической статистики необходимо выделять качественную и количественную стороны процесса или явления. Если качественная сторона характеризует их существенные особенности и основные закономерности, то количественная устанавливает тесноту связи между явлениями, выявляет количественные закономерности и тенденции развития. При этом математико-статистические методы опираются на качественную сторону явления.

Для выявления количественной стороны явления или процесса необходимо располагать статистическими данными. Первым этапом статистического исследования является сбор этих данных, который называют статистическим наблюдением. Результатом такого наблюдения является получение статистической совокупности.

Статистическая совокупность представляет собой множество элементов или единиц одного и того же вида. Применительно к строительству это могут быть совокупности строительных управлений с однородной спецификой работ или осуществляющих строительно-монтажные работы по одному виду строительства; совокупности рабочих одной и той же специальности; совокупности материалов, деталей, конструкций и полуфабрикатов, используемых для получения строительной продукции; совокупности основных производственных/фондов строительного назначения и т. д. Таким образом, статистическая совокупность состоит из отдельных элементов. Каждый элемент характеризуется рядом свойств или признаков, которые изменяются под влиянием различных причин или условий, образуя их изменчивость, колеблемость, вариацию.

Статистический материал, полученный в результате статистического наблюдения, подвергается соответствующей обработке или систематизации. Для этого используется метод группировок, который позволяет выявить наиболее типичные черты изучаемого процесса или явления.

Метод группировок предполагает не простое распределение элементов статистической совокупности по отдельным группам, а такое, при котором группы образуются из качественно однородных элементов. Метод группировок позволяет подсчитать количество единиц или элементов статистической совокупности, обладающих конкретным значением определенного признака.

Исходная, или статистическая информация первоначально представляет собой неупорядоченный ряд результатов отдельных наблюдений. Если эти наблюдения расположить в порядке возрастания или убывания значений признака, то получим ранжированный, или упорядоченный ряд. Подразумевается, что указанный ряд наблюдений образован из элементов генеральной совокупности, отобранных случайным образом и независимо друг от друга.

По ранжированному ряду определяют, сколько раз каждый вариант признака встречается в данной статистической совокупности. В этом случае получается ряд распределения, или вариационный ряд. Отдельные значения признака принято называть вариантами ряда распределения. Элементы статистической совокупности группируются по вариантам признака, при этом для каждой группы определяется число элементов или частота повторения признака. Следовательно, ряд распределения представляет собой таблицу, в которой записаны в определенном порядке варианты того или иного признака и указаны частоты их повторения. Ряды распределения используются для изучения различий между единицами однородной группы по величине какого-либо количественного или качественного признака. Если ряды распределения строятся по количественному признаку, то различают дискретную и непрерывную вариации.

Дискретной вариацией признака называют такую вариацию, у которой отдельные значения признака отличаются друг от друга на некоторую конечную величину или целое число.

Непрерывной вариацией признака называют такую вариацию, при которой отдельные значения признака отличаются друг от друга на сколь угодно малую величину. Примером непрерывной вариации признака может служить процент выполнения плана, производительность труда, время и т. д. Если ряд распределения формируется на основе непрерывного признака, то распределение признака задается по интервалам. В этом случае частоты подсчитываются не по отношению к отдельному значению признака, а по отношению к принятому интервалу. Полученные таким путем ряды распределения называются интервальными вариационными рядами. Однако интервальные ряды распределения могут быть получены и на основе дискретной статистической информации.

Если ряды распределения строятся по качественному признаку (профессия рабочих, вид строительства, вид строительно-монтажных работ и т. д.), то различают атрибутивную вариацию.

Для характеристики вариации признака используют не только абсолютные значения частот, но и относительные величины. В этом случае определяется отношение абсолютной частоты к объему статистической совокупности. Такие величины называются частостью. Они могут выражаться и в процентах.

Интервальные ряды распределения могут иметь равные и неравные интервалы.

Интервальными рядами с равными интервалами называются ряды, в которых все интервалы имеют одну и ту же величину. Интервальные ряды с неравными интервалами имеют различную величину интервала.

Рассмотрим основные правила построения интервальных рядов распределения с равными интервалами, которые получили наибольшее распространение при статистической обработке данных, характеризующих результаты производственно-хозяйственной деятельности строительных организаций.

При построении таких рядов распределения используют метод группировок, суть которого заключается в том, что в результате объединения близких значений признака ряд разбивается на отдельные группы. Первоначально выбирают число интервалов. Оно определяется требованиями наглядности и закономерностями наблюдения: при небольшом количестве наблюдений число интервалов в основном зависит от объема совокупности или числа единиц в ней. При выборе числа интервалов необходимо соблюдать следующие правила: количество интервалов не должно быть очень большим, так как тогда в каждом из них может оказаться недостаточное количество единиц совокупности для выражения отчетливой закономерности; оно не должно быть и очень малым, чтобы сохранить основные качественные признаки ряда распределения. Эмпирическим путем установлено. При малом числе наблюдений ($n \leq 10$) вариационный ряд непосредственно используется для дальнейших расчетов.

При большом количестве данных простой вариационный ряд преобразуется в сгруппированный. Данные разбиваются на ряд групп или классов, общее число интервалов k должно быть в пределах 8-25, так как при увеличении k резко возрастает трудоемкость статистических расчетов, а точность результатов не повышается. После выбора числа интервалов приступают к определению его величины. Необходимо стремиться подобрать оптимальную величину интервала, т. е. такую, при которой вариационный ряд не будет слишком громоздким, и будут сохранены особенности данного явления или исследуемого процесса. Для расчета величины интервала используют формулу:

$$i = R / l \qquad (3.25)$$

где K - размах колебаний признака;
l - число интервалов.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму. Для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариаций, попавших в *i-ый* интервал.

При графическом изображении интервального ряда распределения по одной из осей координат, а именно по оси абсцисс x, откладывают интервалы значений данного признака, по оси ординат y - абсолютные частоты. Построенная таким образом фигура на осях координат имеет форму прямоугольника и называется *гистограммой* распределения интервального ряда. Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты). Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h. Площадь *i-го* частичного прямоугольника равна $(hn_i/h=n_i)$ сумме частот вариаций *i-го* интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки.

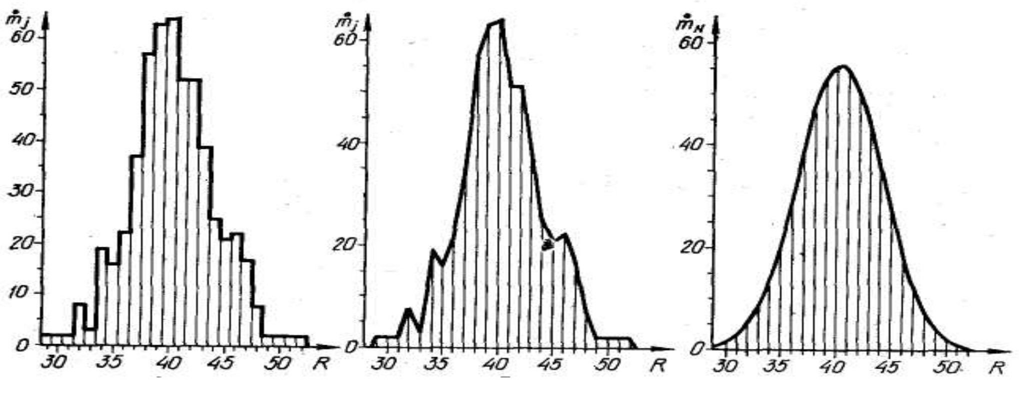
Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною *h,* а высоты равны отношению W_i/h (плотность относительной частоты). Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Ордината такого графика есть отношение площади прямоугольника к длине основания, и выражает собой частоту, которая приходится на единицу измерения данного признака. Указанная частота носит название плотности частоты. При наличии интервального ряда с равными интервалами плотность количественно совпадает со значениями абсолютных частот.

Графическое изображение интервального ряда распределения в виде гистограммы показано на рисунке 5 б. На нем наглядно представлена выявленная закономерность изменения вариантов данного признака: нарастание частот в левой части графика и постепенное уменьшение их в крайних точках, т. е. данный ряд распределения имеет незначительную правостороннюю асимметрию.

Для систематизации статистического материала в аналитической форме интервальный ряд распределения необходимо представить в виде дискретного ряда распределения, в котором вместо интервалов принимаются их центральные значения.

При построении дискретного ряда распределения абсолютные и относительные частоты остаются без изменения. Дискретные ряды распределения, так же как и интервальные, можно представить в виде графиков. Для графического изображения дискретного ряда распределения по одной из осей координат - оси абсцисс x откладывают центральные значения интервалов, а по оси ординат y - абсолютные частоты. В результате построения получается многоугольник, который носит название полигона распределения. Графическое изображение дискретного ряда распределения дано на рисунке 5 а.



а б в

Рисунок 5 – Полигон частот (а), гистограмма частот (б), кривая нормального распределения (в)

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки

$(X_i;\ n_1);\ (X_2;\ n_2)\ldots.(X_k;\ n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты X_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $(X_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(X_i;\ W_1);\ (X_2;\ W_2);\ (X_k;\ W_k)$. Полигон частот дает понятие о том, насколько часто встречается каждое значение [7,9].

3.2.2 Второй этап – определение точечных оценок распределения

В вероятностных (стохастических системах) наряду с необходимостью действует случайность. Под случайным событием понимается факт, который в результате испытания (осуществления правил) может произойти или не произойти. Мерой объективной возможности случайного события A является вероятность:

$$P\{A\}(0\leq P\{A\}\leq 1) \qquad (3.26)$$

Случайной величиной Y называется величина, значения которой подвержены некоторому неконтролируемому разбросу при повторении данного процесса (наблюдения, эксперимента). Поведение случайной величины полностью описывается функцией распределения вероятностей $F\{Y\}$, которая показывает вероятность того, что случайная величина Y примет значения меньше Y_a:

$$F\{Y\}=P\{Y\leq Y_a\};\ (-\infty\leq Y\leq Y_a) \qquad (3.27)$$

Исчерпывающими вероятностными характеристиками случайной величины являются дифференциальная и интегральная функции распределения. Однако некоторые основные свойства случайных величин могут быть описаны более просто с помощью определенных числовых параметров. Наибольшую роль среди них на практике играют два параметра, характеризующие центр рассеяния (центр распределения) случайной величины и степень ее рассеяния вокруг этого центра. Наиболее распространенной характеристикой центра распределения является математическое ожидание M_x случайной величины X (часто называемое также генеральным средним значением). Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения $X_1, X_2,\ldots X_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1,\ p_2,\ldots p_n$. Тогда математическое ожидание $M(x)$ случайной величины X определяется равенством:

$$M(x) = X_1p_1 + X_2p_2 + \ldots + X_np_n. \qquad (3.28)$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то $M(x)=\sum X_i p_i$, (p - вероятность появления значений X_i). Вероятностный смысл полученного результата таков: математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Степень рассеяния случайной величины X относительно M_X может быть охарактеризована с помощью генеральной дисперсии S^2:

$$S^2 = (\sum_{i=1}^{\infty}(Xi - \overline{X})^2)/N \tag{3.29}$$

где X_i – выборочная совокупность;

X – среднее значение выборочной совокупности;

N – объем выборочной совокупности.

Если же значения признака $X_1, X_2, \ldots X_к$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots N_k$, причем $N_1+N_2+\ldots+N_k=N_i$, то

$$S^2 = (\sum_{i=1}^{k} Ni(Xi - \overline{X})^2)/N \tag{3.30}$$

где N_i – частоты выборочной совокупности.

то есть генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений и весами, равными соответствующим частотам.

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением. Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2} \tag{3.31}$$

где S^2 – генеральная дисперсия;

S – среднее квадратическое отклонение.

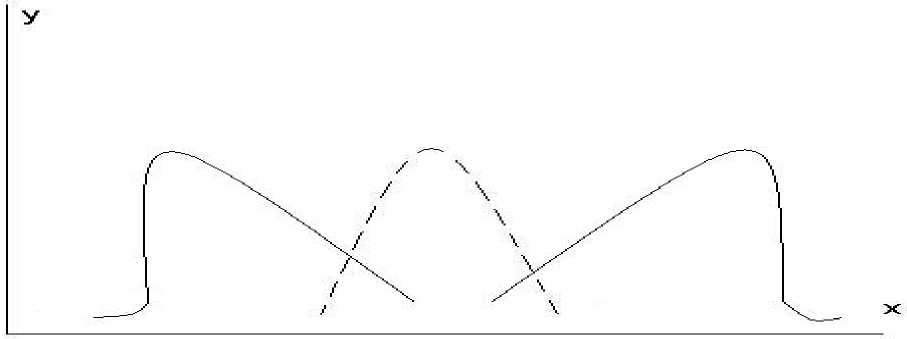
Кроме того, безразмерная характеристика – υ – коэффициент вариации

$$\upsilon = S/\overline{X} \tag{3.32}$$

Форма кривой распределения характеризуется коэффициентами асимметрии A и коэффициентом островершинности (эксцесс) – E.

$$A = \frac{\sum(Xi - \overline{X})Nm}{\sum Nm \cdot S} \tag{3.33}$$

Существует левосторонняя и правосторонняя ассиметрия (рисунок 6).



а б в

Рисунок 6 – Ассиметрия: левосторонняя (а) и правосторонняя (в), б - кривая нормального рапределения

Эксцесс или коэффициент крутости:

$$E = \left[\frac{\sum (Xi - \overline{X})^4 Nm}{\sum Nm} / S^4 \right] - 3 \qquad (3.34)$$

Стандартное значение Е = 0; Е < 0 – плосковершинные; Е > 0 – островершинные (рисунок 7).

Две случайные величины называются независимыми, если $f(x,y)=f(x)f(y)$. Как и в одномерном случае, основные свойства двумерной совокупности величин x, y могут быть охарактеризованы с помощью ряда числовых параметров. При этом в качестве наиболее употребительных параметров, описывающих поведение каждой из случайных величин в отдельности, как и выше, применяют математическое ожидание и дисперсия соответствующей случайной величины:

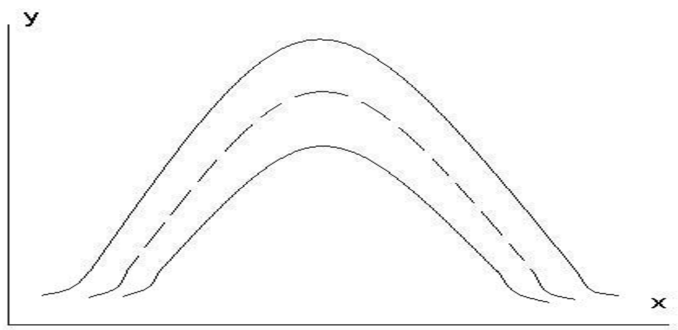


Рисунок 7 – Эксцесс: а – островершинная кривая, б- кривая нормального рапределения, в – плосковершинная кривая

$\overline{X}, \overline{Y}, S^2_x$ S^2_y, S_x S_y. Кроме подобного рода параметров для двумерной совокупности могут быть построены параметры, характеризующие степень взаимозависимости переменных X и Y. Простейшими из них являются

ковариация двух случайных величин (называемая также корреляционным моментом) - *cov (x,y),*
а также нормированный показатель связи – коэффициент корреляции:

$$\rho_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{S_x S_y} \tag{3.35}$$

По своему физическому смыслу коэффициент корреляции является далеко не исчерпывающей характеристикой статистической связи, характеризуя лишь степень линейной зависимости между X и Y. Коэффициент корреляции меняется в пределах $-1 \le \rho_{xy} \le 1$. Если $\rho_{xy}=1$, то случайные величины полностью положительно коррелированны, то есть $y=a_0+a_1x_1$, где a_0 и a_1 – постоянные, причем $a_1>0$. Если же $\rho_{xy}=0$, то случайные величины некоррелированны $a_1=0$. В этом случае, когда X и Y независимые величины, для них $\rho_{xy}=0$, следовательно, они и некоррелированны. Этот коэффициент характеризует наличие или отсутствие линейной функциональной связи. Вычисляется на основе ковариации.

Некоррелированность не следует смешивать с независимостью. Независимые случайные величины всегда некоррелированы. Однако, обратное утверждение неверно: некоррелированные величины могут быть зависимы и даже функционально. Таким образом, коэффициент корреляции характеризует степень приближения зависимости между случайными величинами к линейной функциональной зависимости. Значение коэффициента корреляции определяет насколько зависимость между случайными переменными величинами близка к линейной функциональной зависимости. Коэффициент корреляции часто применяют при определении существования линейной связи между величинами. Если предварительный графический анализ указывает на какую-либо тесноту связи, то полезно вычислить коэффициент корреляции. В том случае, если величина коэффициента корреляции находится в пределах |1….0,75|, то можно с уверенностью считать, что независимо от вида этой связи, она достаточно тесна для того, чтобы исследовать её форму.

Смысл статистических методов заключается в том, чтобы по выборке ограниченного объема N, то есть по некоторой части генеральной совокупности высказать суждение о ее свойствах в целом. Подобное суждение может быть получено путем оценивания параметров генеральной совокупности с помощью некоторых подходящих функций от результатов наблюдений – оценок.

При многократном извлечении выборок одного и того же объема и последующем нахождении множества оценок одного и того же параметра получатся различные числовые значения этих оценок, изменяющиеся от одной выборки к другой случайным образом. Иными словами, любая оценка произвольного параметра θ есть случайная величина. Сам оцениваемый параметр является неслучайной величиной. Для оценивания одного и того же параметра можно использовать в принципе различные оценки. Чтобы выбрать наилучшую из них, необходимо сформулировать некоторые требования к свойствам оценок, желательные с точки зрения практики.

Основными свойствами оценок являются свойства несмещенности, эффективности и состоятельности. Оценка θ_n параметра θ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру θ, то есть

$$M(\overline{\theta n}) = \theta \qquad (3.36)$$

Если это равенство не выполняется, то оценка $\overline{\theta n}$ может либо завышать значение θ, (то есть $M(\overline{\theta}n)>\theta)$, либо занижать его (то есть $M(\overline{\theta}n)<\theta)$. В обоих случаях это приводит к систематическим (одного знака) ошибкам в оценке параметра θ. Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценке параметров.

Несмещенная оценка $\overline{\theta}n$, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема, называется *эффективной оценкой*.

Оценка $\overline{\theta}n$ параметра θ называется с*остоятельной*, если она подчиняется закону больших чисел, то есть выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\{P\left|\overline{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\} = 1 \qquad (3.37)$$

Состоятельность оценки означает, что чем больше объем выборки, тем больше вероятность того, что ошибка оценки не превысит сколь угодно малого положительного числа ε.

Точечные оценки – это оценки некоторых неизвестных числовых параметров распределения. Они представляют собой числа, полученные путем подстановки выборочных значений $X_1, X_2,\ldots X_N$ в формулу для оценивания искомого параметра. Математическое ожидание и дисперсию S^2 обычно оценивают с помощью следующих соотношений:

$$M_x=\overline{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Xi \qquad (3.38)$$

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Xi-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}Xi^2-N\overline{X}^2\right] \qquad (3.39)$$

Указанные оценки являются состоятельными и несмещенными. Для выборки из нормальной совокупности оценка X, кроме того, является эффективной.

Если объем выборки не ограничен $(N \to \infty)$, то дисперсия параметра S^2_x стремится к эффективной или, как говорят, она асимптотически эффективна. Несмещенность оценки S^2 достигается использованием в знаменателе формулы величины $v = N\text{-}1$, вместо очевидного на взгляд значения N. Величину v называют числом степеней свободы. Она равна разности между числом имеющихся экспериментальных значений N, по которым вычисляют оценку дисперсии, и количеством дополнительных параметров, входящих в формулу для оценки этой дисперсии и вычисляемых в виде линейных комбинаций тех же самых наблюдений.

Недостаток точечной оценки, – неизвестно с какой точностью они дают оцениваемый параметр, если для большого числа наблюдений точность обычно бывает достаточной, для практических выводов, то для выборок небольшого объема вопрос о точности оценок очень существенен. Поэтому более информативный способ оценивания неизвестных параметров состоит не в определении единичного точечного значения, а в построении интервала, в котором с заданной степенью достоверности окажется оцениваемый параметр θ.

3.2.3 Третий этап – определение интервальных оценок, понятие о статической гипотезе

На этом этапе определяют точечные оценки и доверительные интервалы. В математической статистике рассматриваются не все значения случайной величины x, а только некоторая выборка из этих значений, поэтому среднее значение величины называется не математическим ожиданием, а выборочным средним $\bar{x}_B$. Соответственно вместо дисперсии и среднеквадратического отклонения рассматривают выборочную дисперсию $D_в$ и выборочное среднеквадратическое отклонение. Естественно встает вопрос о точности нахождения $\bar{x}_B$, $D_в$, σ_B, так как она зависит от объема выборки n.

При малых n точность мала, а при $n \to \infty$ $P_i \to P$, $\bar{x}_B \to M_{(x)}$, $D_в \to D_{(x)}$. Это стремление по вероятности, то есть с достаточно большой вероятностью.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки x по найденному x^* называют вероятность $\overline{P}$, с которой осуществляется неравенство

$$\left|x - x^*\right| < \delta \qquad (3.40)$$

т. е. это вероятность того, что x отличается от x^* меньше чем на δ

$$P\left(\left|x - x^*\right| < \delta\right) = \overline{P} \qquad (3.41)$$

Отсюда получаем так называемый доверительный интервал ($x^* - \delta$, $x^* + \delta$), который показывает что этот интервал заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр x с вероятностью, равной $\overline{P}$.

Интервальной оценкой параметра θ называется интервал (границы l_1 и l_2), который с заданной вероятностью p накрывает оцениваемый параметр θ:

$$P\{l_1 < \theta \le l_2\} = p \qquad (3.42)$$

Этот интервал называется доверительным, его границы l_1 и l_2, являющиеся случайными величинами – соответственно нижним и верхним доверительным пределами; вероятность – p – доверительной вероятностью.

Вычисления обычно начинают с того, что задается их надежность γ, которую принято выбирать равной 0,95; 0,99; 0,999. Тогда вероятность того, что интересующий нас параметр θ не попал в доверительный интервал (θ_1; θ_2) не превосходит соответственно 0,05; 0,01 или 0,001. если мы считаем, что все события вероятность которых меньше 0,05 (0,01 или 0,001) , и практически невозможны, то, следовательно, практически достоверно попадание параметра θ в доверительный интервал (θ_1; θ_2). Поэтому число ($\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$) (середина доверительного интервала) будет давать нам значение параметра θ с точностью $\frac{\theta_2-\theta_1}{2}$ и практически достоверно.

Обычно берут $\overline{P}$ = 0,95 – 0,97. На основе того, чтобы доверительный интервал покрывал неизвестный параметр *x*, определяют по таблицам *n* – объем выборки.

Вероятность осуществления неравенства $|x-a|<\delta$ для нормально распределенной случайной величины *X* находится так $(a = M_{(x)})$:

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (3.43)$$

где $\Phi(t)$ - функция Лапласа;

$\sigma=\sqrt{D(x)}$.

Пусть σ известно. Оценим математическое ожидание *a* по выборочной средней $\overline{x}$ при *n* значениях (объем выборки). Для этого существует оценка

$$P\left(\overline{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\overline{P} \qquad (3.44)$$

Если задано $\overline{P}$, то *t* находится из равенства $2\Phi(t)=\overline{P}$ по таблице функций Лапласа.

Пусть σ=3, n=36, $\overline{P}$=0,95. Из соотношения $2\Phi(t)$ = 0,95 по таблице находим *t* = 1,96. Следовательно,

$$\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0{,}98 \qquad (3.45)$$

Итак, доверительный интервал будет

$$(\overline{x}-0{,}98;\overline{x}+0{,}98) \qquad (3.46)$$

Он оказался малым по сравнению с интервалом (a - 3σ, a +3σ), так как 3σ= 9.

Если же задано δ, а *n* нужно определить, то это можно сделать из условия

$$t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\delta \qquad (3.47)$$

Перенос наших знаний от выборочной совокупности к генеральной может быть осуществлен лишь с некоторой вероятностью $P\{\theta\}$, т.е суждение о свойствах генеральной совокупности носит вероятностный характер и содержит элемент риска $\alpha=1-P\{\theta\}$. Любые суждения о свойствах генеральной совокупности называются статистическими гипотезами *(H)*. Их проверка осуществляется с помощью статистических критериев *(Cr),* назначаемых в зависимости от формулировки гипотезы. Все эти критерии отрицательны по своей природе. Если значение изучаемого параметра θ попадает в область “принятия” гипотезы, то это значит лишь, что гипотеза не противоречит экспериментальным (выборочным) данным и её с риском $(\alpha=1-P\{\theta\})$ можно признать правомерной(говорят “гипотеза допущена”) по крайней мере до тех пор, пока исследования по расширенной информации или с помощью более мощных критериев не приведут к противоположному результату. Кроме того, неотрицательный результат проверки гипотезы не означает, что эта она лучшая или единственная (свойством непротиворечивости могут обладать и другие гипотезы), - её следует рассматривать лишь как одно из правдоподобных (а не абсолютно достоверных) утверждений.

Основная выдвинутая гипотеза называется нуль-гипотезой (H_0). Противоречащие ей гипотезы (H_i) называют альтернативными или конкурирующими. Поскольку проверка гипотез ведется при ограниченной информации (по выборке), то могут возникнуть ошибки двух родов. Если будет отвергнута правильная гипотеза, то совершается ошибка первого рода; если будет допущена не правильная гипотеза, то совершена ошибка второго рода. Все четыре возможные при этом ситуации представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Варианты принятия гипотезы

Варианты гипотез	Критерий рекомендует допустить нуль-гипотезу	Критерий рекомендует отклонить нуль-гипотезу (то есть допустить альтернативную гипотезу H_1).
Фактически истинна нуль-гипотеза	Решение правомерно: допущена гипотеза H_o.	Решение ложно: совершена ошибка первого рода, так как отклонена верная гипотеза H_o.
Фактически истинна альтернативная гипотеза H_1	Решение ложно: совершена ошибка второго рода, так как допущена ложная гипотеза H_o вместо истинной H_1	Решение истинно, так как допущена гипотеза H_1.

Вероятность допустить ошибку первого рода называется уровнем значимости и обозначается α. Область, отвечающая вероятности α, называется критической, а дополняющая ее область, вероятность попадания в которую $P\{\theta\}=1-\alpha$, называется областью естественных (правдоподобных) значений критерия.

Вероятность ошибки второго рода обозначается β, а величина $P\{\theta\}=1-\beta$ называется мощностью критерия. Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода (однако при этом может возрастать риск α, особенно при малых фиксированных выборках). В работах по контролю качества величина α называется риском производителя (отвергая правильную гипотезу, он бракует годную продукцию), а величина β – риском потребителя (допуская ложную гипотезу, он принимает и использует фактически непригодную продукцию). Выбор значений α и β в таких условиях производится по взаимной договоренности между производителем и потребителем и зависит от технико-экономической тяжести последствий, возникающих от совершения ошибок первого и второго рода.

Если объем выборки n велик ($n>1000$), то имеется принципиальная возможность добиваться минимизации ошибок α и β. Если объем фиксированной выборки мал, то обычно задаются уровнем значимости, (α), а статистический критерий выбирают так, чтобы минимизировать β.

Чем существеннее потери от ошибочного отклонения гипотезы H_o, тем меньшей выбирается величина α. Практика исследований в области технологии показывает, что можно ориентироваться на следующие значения α:

- для поисковых рецептурно-технологических задач

$$\alpha = 5 \div 10\ \%$$

- для окончательных решений в таких задачах

$$\alpha = 2 \div 5\ \%$$

- для задач контроля качества неконструкционных материалов (отделочных, изоляционных и др.)

$$\alpha = 1 \div 5\ \%$$

- для задач контроля качества конструкционных материалов и несущих конструкций

$$\alpha = 0{,}1 \div 1\ \%.$$

(меньший предел для случаев, когда нарушение нормальных условий эксплуатации связано с риском для жизни людей).

Чтобы осуществить проверку согласованности теоретических и полученных в эксперименте параметров распределения случайной величины и ее закона распределения, применяют критерии согласия.

Итак, на основании данного статистического материала нам предстоит проверить гипотезу H, состоящую в том, что случайная величина x подчиняется некоторому определенному закону распределения. Для того, чтобы принять или опровергнуть гипотезу H, рассматривается некоторая величина $И$, характеризующая степень расхождения теоретического и статистического распределения. Эта величина будет случайной величиной. Закон распределения этой случайной величины зависит от закона распределения случайной величины x, над которой производились опыты, и от числа опытов n. Если гипотеза *H* верна, то закон распределения величины *И* определится законом распределения величины *x* и числом *n*. Допустим, что этот закон распределения известен, и в результате данной серии опытов найдено конкретное значение меры расхождения *И*, т. е. $\overline{И}$. для ответа на вопрос о верности гипотезы *H* вычислим вероятность того, что за счет случайных причин мера расхождения *И* окажется не меньше $\overline{И}$. Если эта вероятность мала, то гипотезу *H* следует отвергнуть как мало вероятную. Если эта вероятность значительна, следует признать, что экспериментальные данные не противоречат гипотезе *H*.

Оказывается, что при некоторых способах выбора меры *И* закон распределения величины *И* обладает весьма простыми свойствами и при достаточно больших *n* практически не зависит от закона распределения величины *x*. Именно такими мерами расхождения и пользуются в математической статистике в качестве критериев согласия.

Наиболее часто применяемые критерии согласия: критерий χ^2 Пирсона, критерий Кохрена, критерий Фишера и др. для этих критериев составлены таблицы значений вероятности $P(И \le \overline{И})$. В зависимости от $\overline{И}$ числа степеней свободы *k*, которое характеризуется числом опытов *n* и числом наложенных связей s $(k = n - s)$.

В качестве практического использования критериев согласия рассмотрим задачу сравнения нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема по критерию Кохрена.

Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, \dots, X_l$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечено *l* выборок одинакового объема *n* и по ним найдены исправленные выборочные дисперсии $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_l^2$, все с одинаковым числом степеней свободы $k = n - 1$ (выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от их среднего значения)

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2}{n} \qquad (3.48)$$

Исправленная выборочная дисперсия (ближе к генеральным дисперсиям) вычисляется по формуле

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_B^2 \qquad (3.49)$$

Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости α (при рассмотрении доверительного интервала доверительная вероятность бралась $\overline{p}$ = 0,95, а уровень значимости $\alpha = 1 - \overline{p} = 0{,}05$) проверить нулевую гипотезу (основную гипотезу), состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой

$$H_0 : D\left(X_1\right) = D\left(X_2\right) = \dots = D\left(X_l\right) \qquad (3.50)$$

Другими словами, требуется проверить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии.

Можно применить для этого критерий Фишера, критерий Бартлета, но предпочтительнее использование критерия Кохрена, распределение которого найдено точно.

Критерий Кохрена - это отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий

$$G_p = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \tag{3.51}$$

Распределение этой случайной величины зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$ и количества выборок l.

Находят критическую точку $G\ (\alpha,\ k,\ l)$ по таблице. Если $G_p < G$, нет основания отвергать нулевую гипотезу, если $G_p > G$, то нулевую гипотезу отвергают.

Рассмотрим на конкретном примере. По четырем независимым выборкам одинакового объема n = 17, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные дисперсии: 0,26; 0,36; 0,40; 0,42. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности генеральной дисперсии и оценить генеральную дисперсию.

Найдем значение критерия Кохрена

$$G_p = \frac{0{,}42}{0{,}26 + 0{,}36 + 0{,}40 + 0{,}42} = 0{,}2917\ .$$

Найдем по таблице по уровню значимости α = 0,05, числу степеней свободы $k = 17 - 1 = 16$ и числу выборок $l = 4$ критическую точку

$$G\ (0{,}05;\ 16;\ 4) = 0{,}4366.$$

Так как $G_p < G$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу об однородности дисперсий, т. е. использованные выборочные дисперсии различаются незначимо.

Поскольку нулевая гипотеза справедлива, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую исправленных дисперсий

$$\sigma^2 = \frac{0{,}26 + 0{,}36 + 0{,}40 + 0{,}42}{4} = 0{,}36\ .$$

Рассмотрим проверку гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. Пусть двумерная генеральная совокупность ($X,\ Y$) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объемом n, и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_в$, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности $r_г$ также отличен от нуля. Так как нас интересует именно этот коэффициент, то возникает необходимость при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_o : r_г = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_г \neq 0$.

Если нулевая гипотеза будет отвергнута, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличен от нуля, а X и Y - коррелированны.

Если нулевая гипотеза будет принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а X и Y - некоррелированы.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T = \frac{r_в \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}} \tag{3.52}$$

Эта величина имеет распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы.

По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости и числу степеней свободы $k = n - 2$ найдем критическую точку $T_{кр} (\alpha, к)$.

Если $|T| < T_{кр}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Если $|T| > T_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают.

Рассмотрим пример. По выборке объема $n = 122$, извлеченной из нормальной двумерной совокупности (X, Y), найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0,4$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции.

Найдем значение критерия T

$$T = \frac{0,4\sqrt{122-2}}{\sqrt{1-(0,4)^2}} = 4,78$$

По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = 122 - 2 = 120$, находим по таблице критическую точку $T_{кр}$ (0,05; 120) = 198.

Поскольку $T > T_{кр}$, нулевую гипотезу отвергаем, т. е, выборочный коэффициент корреляции значимо отличен от нуля. Значит, X и Y коррелированны.

Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности применяют критерий Пирсона. Если закон распределения генеральной совокупности неизвестен, но есть основание предположить, что он имеет определенный вид (например, нормальный), то проверяют нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена по такому-то закону (например, по нормальному). Эта проверка проводится с помощью специально подбираемой случайной величины - критерия согласия.

Для этого имеются несколько критериев. Будем рассматривать один из них - критерий *К* Пирсона, или критерий χ^2 ('хи квадрат').

Будем сравнивать наблюдаемые и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты. Обычно эти частоты различаются. Нужно выяснить, случайно ли расхождение этих частот. Возможно, что расхождение этих частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверной гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий Пирсона отвечает на этот вопрос.

Итак, пусть по выборке объема *n* получено эмпирическое распределение:

варианты $x_i : x_1, \dots, x_s$,

эмпирические частоты $n_i : n_1, n_2, \dots, n_s \left(\sum_{i=1}^{s} n_i = n \right)$

Допустим, что в предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислены теоретические частоты n_i' (для этого есть несколько способов). При уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распределена нормально.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$\Pi = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'} \qquad (3.53)$$

Закон распределения случайной величины Π при $n \to \infty$ стремится к закону распределения χ^2 с k степенями свободы. Число степеней свободы

$$k = s - 1 - r \qquad (3.54)$$

где s - число групп (частичных интервалов) выборки;

r – число параметров предполагаемого распределения (для нормального распределения $r = 2$, так как в этом распределении два параметра - математическое ожидание и дисперсия). Следовательно, $k = s - 3$.

По таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ находят критическую точку $\Pi_{кр}(\alpha, k)$.

Если $\Pi < \Pi_{кр}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу.

Если $\Pi > \Pi_{кр}$, нулевую гипотезу отвергают.

Следует заметить, что объем выборки должен быть велик $n \geq 50$. Каждая группа должна содержать не менее 5 - 8 вариантов $n_i \geq 5$.

Рассмотрим пример. По уровню значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

эмпирические частоты: 6 13 38 74 106 85 30 14

теоретические частоты: 3 14 42 82 99 76 37 13

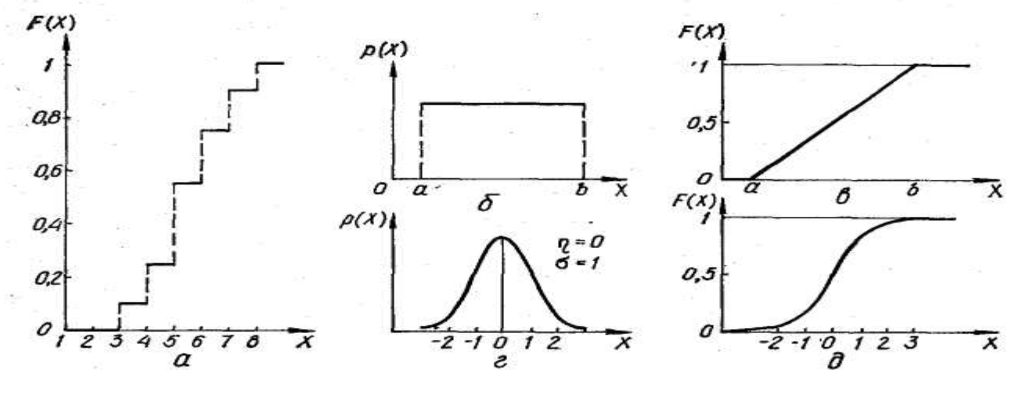
Вычислим

$$\Pi = \frac{3^2}{3} + \frac{1^2}{14} + \frac{4^2}{42} + \frac{8^2}{82} + \frac{7^2}{99} + \frac{9^2}{76} + \frac{7^2}{37} + \frac{1^2}{13} = 7{,}19$$

Так как $s = 8$, то $k = 8 - 3 = 5$. По таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 5$ находим $\Pi_{кр}\ (0{,}05;\ 5) = 11{,}1$. Так как $\Pi < \Pi_{кр}$, нет оснований отвергать нулевую гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности [29].

3.2.4 Четвертый этап – аппроксимация выборочного распределения теоретическим законом

Выбор типа закона распределения – задача не простая. Наиболее популярен в практике нормальный закон, физическая модель которого основана на предположении, что случайная величина представляет собой результат “малых” воздействий (примерно одинаковых по величине и равновероятных по знаку) большого числа взаимонезависимых факторов. Однако многие явления не могут быть описаны таким законом по своей физической сущности: размеры зерен при дроблении, число дефектов в образце и другое. В этом случае следует применять иные распределения: непрерывные (экспоненциальные, Вейбулла и другие) или дискретные (биномиальные, Паскаля и другие). Целесообразно анализировать соответствие выбранного распределения физической модели



явления,

Рисунок 8 – Законы распределения вероятностей:

а – функция распределения для дискретных случайных величин; *б* и *г* –дифференциальный; *в* и *д* – интергральный; *б* и *в* – равномерный; *г* и *д* – нормальные законы распределения однако во многих технологических задачах механизм явления известен неполно, и технолог вынужден ограничиться подбором распределений по эмпирическим данным.

Информация о закономерностях распределения случайных величин в виде функций или числовых характеристик необходима технологу при решении всех задач анализа и оптимизации качества бетона и других строительных материалов. Этот этап предшествует применению любых статистических методов в технологии. Если в некоторых задачах технолог не проводит специальных исследований кривых распределения для входов X и выходов Y системы, то на основании анализа механизма явления он выбирает тот или иной закон распределения. Если он не принимает закона распределения, то это определяет применение методов непараметрической статистики.

Для выбора кривой распределения по известным числовым оценкам асимметрии A и эксцесса E определяют коэффициенты формы кривой β_1 и β_2:

$$\beta_1=A^2 \qquad \beta_2=3+E \qquad \beta_1=0 \qquad \beta_2=3 \tag{3.55}$$

Распределения бывают нормальные (логарифмические и дифференциальные); γ – распределение, β – распределение, экспоненциальное. Некоторые наиболее часто встречающиеся законы распределения вероятностей, представлены на рисунке 8.

3.3 Области применения статистических методов обработки данных

3.3.1 Статистический контроль прочности бетона

Прочность бетона – это случайная величина. Прочностные свойства носят вероятностный характер. Применение методов математической статистики позволяет повысить технико-экономическую эффективность производства, оценить однородность бетона и определить пути направления, улучшения качества изделия.

Статистический метод контроля прочности бетона начал внедряться в 70 –е годы, но был не обязательным к применению, а лишь рекомендуемым. В связи с переходом с 1986 года от марок к классам бетона по прочности при проектировании бетонных и железобетонных конструкций. Статистический контроль и приемка бетона по прочности с учетом его однородности регламентирована стандартом ГОСТ 18105-86 как обязательная с 1987 года.

Оценка однородности производится по коэффициенту вариации и по коэффициенту превышения прочности. Коэффициент вариации характеризует рассеяние, если коэффициент вариации $V>$ 10 %, то делают вывод о неоднородности наблюдений. При превышении коэффициента превышения прочности допускаемых значений выявляется необходимость принятия мер по снижению прочности бетона и сокращения расхода цемента.

3.3.2 Метод множественной корреляции

В практической работе часто возникает необходимость определить количественное влияние множества факторов, действующих одновременно или в отдельности. В таких случаях используют методы множественной корреляции, которые позволяют исследовать статистические зависимости результативного признака от нескольких факториальных.

При использовании методов множественной корреляции составляют многофакторные статистические модели, сущность которых состоит в получении уравнений множественной регрессии. Однако прежде чем рассчитывать уравнение множественной регрессии и определять его коэффициенты, необходимо установить вид этого уравнения. Ту или иную форму многофакторной связи необходимо выбирать с учетом некоторых условий:

1. Выбранная функция должна отражать закономерности, существующие между признаками, принятыми для многофакторного исследования.
2. Аналитическое уравнение многофакторной связи, используемое в качестве аппроксимирующей функции, должно иметь по возможности простой вид.
3. Число факторов, включаемых в модели, должно быть ограничено, чтобы модели были удобны в практической работе.

Взаимосвязь между признаками, состоящая в изменении средней величины одного из них в зависимости от значения другого, называется *корреляцией*. Слово «корреляция» происходит от английского relation и означает соотношение или соответствие между факторами и признаками. Термин корреляция применяется в различных областях науки и техники для обозначения взаимозависимости, взаимного соответствия. Посредством корреляции можно определить числовое значение влияния каждого из множества анализируемых факторов, действующих совместно на одну из сторон процесса и взаимосвязанных между собой.

Статистические методы и теория корреляции позволяют понять происхождение конкретного явления, вскрыть составляющие его факторы, изучить процесс формирования явления не только в качественной, но и в количественной форме и выразить его статистической моделью.

Методы теории корреляции позволяют устанавливать взаимосвязь изучаемых факторов без учета влияния случайных. При решении конкретных задач этими методами говорят о наличии коррелированных величин, т. е. таких, которые связаны друг с другом корреляционной связью.

При выполнении корреляционных расчетов необходимо различать факториальный и результативный признаки. Факториальным называется такой признак, от которого зависит другой признак, а он сам является независимым. В отличие от него зависимый признак называется результативным. В процессе формализации статистической модели факториальный признак обозначается через x, а результативный - через y, т. е. условно можно сказать, что факториальный признак выражает аргумент, а результативный - функцию. В статистических исследованиях, выполняемых с помощью методов корреляционного анализа, возможны случаи, когда один и тот же признак в различных статистических совокупностях выступает в качестве результативного и факториального. Это значит, что определение результативного и факториального признаков не является раз и навсегда законченным процессом, напротив, он зависит от конкретных условий изучения взаимосвязей различных факторов.

В процессе корреляционного анализа осуществляется исследование связей, которое состоит из совокупности методов и приемов по выявлению, изучению и количественной оценке взаимосвязей между результативными и факториальными признаками. Среди них наиболее простым является метод группировок, основанный на выявлении различий между групповыми средними.

Связь между показателями и факторами часто выражается корреляционной зависимостью, сущность которой состоит в том, что на величину результативного признака оказывают влияние не только факториальный, а множество случайных признаков, изолировать которые не представляется возможным. Если при исследовании явлений или их признаков наблюдаются изменения характеристик распределения одного из них под воздействием другого, то говорят о наличии статистической связи. Эти-связи характеризуются тем, что в них результативный признак определяется влиянием не только факториального признака. В отличие от функциональных корреляционные связи не являются причинно-следственными, а бывают вероятностными или стохастическими. Стохастические связи проявляются между случайными величинами и наблюдаются обычно тогда, когда наряду с общими случайными факторами, влияющими как на одну, так и на другую величину, имеются еще и другие случайные факторы, не одинаковые для обеих величин.

В зависимости от постановки задачи и статистических методов, используемых для ее решения, различают парную и множественную корреляцию. Парная корреляция устанавливает количественную взаимосвязь между парой признаков, один из которых является факториальным, а другой — результативным. Множественная корреляция определяет взаимосвязь между множеством признаков и поэтому в отличие от парной характеризуется множеством факториальных признаков.

Для того чтобы проанализировать статистический материал и сделать соответствующие выводы, необходимо привести в определенный порядок или систематизировать исходные данные. Первоначально статистический материал систематизируется по одному качественному признаку путем построения ряда распределения и расчета его статистических характеристик.

Если необходимо одновременно проанализировать статистический материал, характеризующий те или иные экономические явления по двум или большему числу признаков, то используют методы корреляции, которые позволяют установить корреляционную зависимость между факторами. С увеличением числа единиц статистической совокупности появляется возможность выявить определенные закономерности, присущие анализируемым процессам и явлениям, которые трудно установить при изучении незначительного числа наблюдений. В этом проявляется действие закона больших чисел. Таким образом, если отдельные единицы статистической совокупности находятся в некоторых общих условиях, то на их основе можно установить закономерность из совокупного действия большого числа, случайных факторов.

Проведение научных исследований, решений технических, организационных, экономических и других задач неразрывно связано с опытами или массовыми процессами и явлениями, которые многократно повторяются при наличии некоторых весьма общих условий. Однако как бы тщательно ни готовились опыты, их результаты в той или иной степени отличаются друг от друга. Это связано с тем, что условия проведения опытов изменяются под влиянием многочисленных случайных факторов, которые не поддаются контролю и колеблются от одного измерения к другому. Если эти колебания невелики и отражаются лишь на точности расчетов, то ими можно пренебречь и с некоторым приближением рассматривать как функциональную зависимость. При исследовании функциональной зависимости, как правило, удается изолировать влияние случайных факторов. В некоторых же исследованиях практически невозможно устранить влияние побочных факторов, так как сама постановка эксперимента обычно невозможна. В этих условиях определяются корреляционные связи. При корреляционной зависимости, в отличие от функциональной, каждому значению аргумента соответствует ряд распределения функции, и с изменением аргумента эти ряды изменяются.

Первая и основная задача, которую решает теория корреляции, - это измерение связи. Сущность ее заключается в том, чтобы на основе наблюдения над большим статистическим материалом выяснить, как изменяется функция при изменении одного аргумента и неизменности остальных. В действительности влияние побочных факторов устранить не удается.

Изучение статистических зависимостей основывается на исследовании таких связей между случайными переменными, при которых значения принимает другая случайная переменная. Зная статистическую зависимость между случайными переменными, можно прогнозировать значение зависимой случайной переменной в предположении, что независимая переменная примет определенное значение.

Метод, позволяющий по выборке, которая содержит отдельные наблюдавшиеся значения неизвестных параметров a_0, a_1... a_n называется множественной регрессией, а полученное выражение – уравнением множественной регрессии.

Зависимость между одной случайной переменной и условным средним значением другой случайной переменной называется корреляционной зависимостью. Она характеризуется формой и теснотой связи. Форма связи – это вид математической связи между случайными величинами, характеризуется функцией регрессии (линейная, квадратная, показательная и т.д.).

Для характеристики формы связи пользуются понятием кривой регрессии – это условное среднее значение случайной переменной Y, рассматриваемой как функция от X, то есть $\overline{y}(x) = f^{'}(x)$.

Графической формой систематизации статистического материала по двум качественным признакам является поле корреляции. Для его построения необходимо определить, какой из признаков является факториальным, а какой — результативным. По нему можно в первом приближении сделать вывод о форме и тесноте связи. Такая линия называется эмпирической линией регрессии. Теснота связи между случайными величинами оценивается по коэффициенту корреляции.

На основе выявленной формы между признаками рассчитывают параметры уравнения множественной регрессии. Для их получения можно использовать два способа: способ парных коэффициентов корреляции и способ наименьших квадратов. Однако такое выделение двух способов несколько условно, так как в обоих случаях используется метод наименьших квадратов. В первом случае коэффициенты уравнения множественной регрессии рассчитываются по методу наименьших квадратов через парные коэффициенты корреляции $r_{y/x}$ и находятся стандартизованные коэффициенты регрессии β_j, во втором случае - по способу наименьших квадратов через переменные y и x находятся коэффициенты регрессии в натуральных единицах наблюдения в виде a_j.. Первый способ является наиболее трудоемким, но он дает полный материал для анализа изучаемых зависимостей. Второй способ менее трудоемок, однако на его основе можно получить лишь коэффициенты уравнения регрессии a_j и совокупный коэффициент корреляции R. Коэффициенты же парной корреляции $r_{y/x}$ здесь получить не удается.

В области технологии строительного производства и технологии изготовления строительных материалов на заводах стройиндустрии методы корреляционного анализа используются для решения задач, связанных с изучением массовых закономерностей производственного процесса в целях его оптимизации, повышения качества и надежности продукции.

Статистические методы контроля качества продукции нашли широкое применение в практике работы промышленных предприятии, производящих строительные материалы, детали, конструкции и полуфабрикаты. Использование методов парной и множественной корреляции при изучении технологических процессов позволяет определять оптимальные характеристики этих процессов. Например, исследуя влияние различных факторов технологического процесса приготовления бетона на его качество и прочность, можно установить статистическими методами оптимальное соотношение между процентным содержанием воды, песка и цемента в замесе с учетом температуры смеси и средней температурой среды хранения бетона. Эти же методы позволяют осуществлять статистический анализ различных способов бетонирования в зимних условиях: методом «термоса»; с применением добавок - ускорителей твердения бетона; с предварительным электро- или пароразогревом бетонной смеси; с использованием быстротвердеющих цементов с повышенным тепловыделением; укладкой бетонов с противоморозными добавками, твердеющими при отрицательных температурах; с искусственным прогревом и обогревом бетона с помощью электрической энергии, пара или теплого воздуха (кратковременный нагрев, периферийный электропрогрев, греющие опалубки, электропрогрев нашивными электродами, индукционный метод обогрева, инфракрасный обогрев) и т. д.

Методы регрессионного анализа дают возможность выполнить комплексное исследование влияния различных способов зимнего бетонирования на стоимость бетонных работ исходя из модуля поверхности конструкций наружной температуры воздуха, марки применяемого цемента и других технологических параметров и таким путем определить величину зимних удорожаний в зависимости от методов производства бетонных работ.

Применительно к деятельности заводов строительной индустрии особенно пригодны статистические методы контроля качества продукции. Здесь применимы выборочные методы контроля. Для этого проводится выборка изделий из всей совокупности с целью исследовать качество продукции в отобранной части и сделать вывод о качестве продукции всей партии. Наряду с этим выборка используется для контроля за ходом самого производственного процесса и недопущения выпуска бракованных изделий. В этом случае выборочное наблюдение имеет целью профилактику брака, т. е. недопущение в дальнейшем процессе производства брака при его обнаружении или возможности его появления.

Таким образом, технологическая статистика, изучающая технический прогресс и статистические закономерности, наблюдаемые в технологических процессах, широко использует метод корреляции [11].

4 Статистическое планирование эксперимента

4.1 Понятие о планировании эксперимента. Основные задачи эксперимента

Во многих областях науки и техники, в том числе и в строительстве, исследования того или иного явления или процесса возможно только эмпирически, то есть с помощью опыта или эксперимента.

Одной из наиболее часто встречающихся проблем, встающих перед учеными различных специальностей, является проблема нахождения зависимости между некоторым набором величин. Эта зависимость может быть выведена из теории и (или) может быть получена на основании экспериментальных исследований. Если зависимость выведена из теоретических соображений, то довольно часто она может быть приближенно представлена в аналитическом виде, заданном с точностью до нескольких неизвестных параметров. Если же в основе построения зависимости лежат экспериментальные исследования, то параметрическая зависимость постулируется. В обоих случаях при построении математической модели должны использоваться сведения об исследуемом объекте, на основании которых мог бы быть сделан вывод о достаточной точности описания объекта моделью и, следовательно, о том, что приведенные для модели статистические выводы в определенной мере справедливы и по отношению к самому объекту.

Результаты в области планирования эксперимента имеют очевидное прикладное значение. Дорогостоящие эксперименты, а также эксперименты, которые невозможно воспроизвести повторно, требуют предварительного квалифицированного планирования. С развитием ЭВМ практически любые затраты на численное построение планов могут оказаться оправданными. Различные разделы теории планирования эксперимента в настоящее время развиты существенно в разной степени, но практические потребности требуют активной разработки всех разделов.

Результатом эксперимента является получение числовых значений выходного параметра y в зависимости от конкретных значений входных параметров (факторов) $x_1, x_2, \ldots, x_k$. При этом изначально внутренняя структура функционирования процесса неизвестна. Известны лишь входы x_i и выход y. Каждый эксперимент требует обработки.

Входные и выходные параметры по своей природе являются случайными величинами. Следовательно, при обработке экспериментальных данных нужно пользоваться методами математической статистики. Многие эксперименты являются сложными и дорогостоящими, поэтому необходимо применение методов, которые давали бы не только способ обработки экспериментальных данных, но и позволяли бы оптимальным образом организовать эксперимент.

В результате проведения эксперимента возникают следующие основные задачи:

1. Первичная статистическая обработка результатов эксперимента. Если результат эксперимента зависит от случая, то эксперимент называют *статистическим.* При описании такого эксперимента применяются средства и термины теории вероятностей и математической статистики. Для этого определяют средние значения выходного параметра при многократном повторении одного и того же набора входных параметров и разброс вокруг этого среднего значения, т. е. дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

2. Обоснование точности полученных экспериментально данных, в том числе средних значений выходного параметра и среднеквадратических отклонений, а так же числа повторений наборов входных параметров. Для этого используются доверительный интервал и критерии согласия.

3. Определение аналитической зависимости выходного параметра y от входных параметров $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_k) \qquad (4.1)$$

т. е. математической модели изучаемого процесса. Эта аналитическая зависимость называется функцией отклика. Для её получения применяют метод наименьших квадратов.

4. Планирование эксперимента, т. е. выбор наилучшего эксперимента с позиции затрат материальных ресурсов и точности описания процесса.

Кроме того, может оказаться, что некоторые входные параметры мало влияют на выходной параметр и их можно исключить из рассмотрения. Выяснить, зависимы ли случайные величины x_i и y можно, если определить корреляционную зависимость между этими случайными величинами, найдя, например, коэффициент корреляции между случайными величинами x_i и y.

Существует два основных метода эмпирического исследования: наблюдение и эксперимент. *Наблюдение* – целенаправленное восприятие объекта без активного вмешательства в его поведение. Исследователь вынужден пассивно ожидать естественного проявления необходимых эффектов в поведении объекта, что значительно удлиняет ожидаемое время сбора информации. Например, фиксация температуры, давления, реакции химических продуктов в агрегате при нормальном режиме работы. Однако, как бы удачно не было бы организовано наблюдение, оно как опыт не может преодолеть своей ограниченности, вытекающей из пассивности наблюдателя по отношению к объекту исследования. Намного более по качеству и по объему информацию можно получить из эксперимента. Под *экспериментом* понимают вид деятельности, предпринимаемой в целях научного познания, открытия объективных закономерностей и состоящей в воздействии на изучаемый объект (процесс) посредством специальных инструментов и приборов, благодаря чему удается:

- устранить, изолировать изучаемое явление от побочных, несущественных и затемняющих его сущность явлений и изучать его в чистом виде;
- многократно воспроизводить ход процесса в строго фиксированных, поддающихся контролю условиях;
- планомерно изменять, варьировать, комбинировать различные условия в целях получения искомого результата.

Эксперимент всегда должен планироваться исследователем. Некоторые из этапов исследования могут быть достаточно формализованы и даже стандартизированы на основе математической теории эксперимента, которая различает два принципа постановки экспериментов: пассивный и активный. При пассивном эксперименте расположение опытных точек в факторном пространстве ведется на интуитивном уровне без предварительного учета методов дальнейшей математической обработки информации. Интуитивный план эксперимента в той или иной степени отражает предшествующий опыт, однако по мере роста числа факторов *(x_i)* задача интуитивного планирования настолько усложняется, что экспериментальные точки располагаются лишь по некоторым сечениям пространства, выбранным весьма бессистемно. Эта особенность интуитивного планирования экспериментов (и наблюдений) резко усложняет вычислительные процедуры, а также затрудняет практическое использование моделей и их технико-экономическую интерпретацию. Информация, собранная при активном эксперименте по математически обоснованному плану, учитывающему цели эксперимента и методы обработки его результатов, имеет большую информационную ценность. При этом практически всегда меньше и затраты ресурсов (материальных и временных), чем на пассивный эксперимент. Интуитивное расположение точек в факторном пространстве заменяется алгоритмизированным, которое в некотором смысле оптимально. Оптимальность планирования обеспечивается предшествующим проведению эксперимента исследованием свойств матрицы входных факторов [x]. Особенно важно то, что число «активных» экспериментов сокращается по сравнению с традиционными методиками в 2-10 раз, причем достоверность информации не ухудшается, а в ряде случаев и увеличивается, кроме того, преимущество активных экспериментов заключается в следующем:

- оптимальное использование факторного пространства;
- введение четкой логики для всех процедур, последовательно совершаемых экспериментатором;
- рандомизация условий опытов, когда многочисленные мешающие факторы превращаются в случайные величины;
- выполнение исходных предпосылок регрессионного анализа, а это зачастую исключено при пассивном эксперименте (в результате числовые оценки коэффициентов в моделях оказываются смещенными);
- оценку элемента неопределенности, связанного с экспериментом, что дает возможность сопоставить результаты, полученные разными исследованиями;
- экспериментатор дает количественные оценки, абстрагируясь от сложных и плохо изученных явлений, происходящих в системе;
- для математического описания исследуемого процесса планируется минимальное количество опытов, из которых информация извлекается с максимальной полнотой, что позволяет значительно уменьшить трудоемкость опытных работ;
- опыты ставятся небольшими сериями по некоторому оптимальному плану, что исключает слепой хаотический поиск;
- упрощаются вычисления.

В связи с планированием принято выделять следующие типы эксперимента. Классификация экспериментов довольно разнообразна. Для нас далее будут представлять интерес эксперименты, которые можно планировать.

Экстремальный эксперимент, задача которого состоит в определении экстремальных значений функции регрессии (или комбинации факторов, при которых функция отклика принимает экстремальные значения). Методы его планирования тесно связаны с методами планирования регрессионного и факторного экспериментов, с одной стороны, и методами стохастического программирования, с другой.

Эксперимент по *проверке конкретной статистической гипотезы* (дискриминирующий эксперимент). Это сравнительно изученный раздел, который также связан с планированием в регрессионных и факторных моделях.

Отсеивающий эксперимент, задача которого состоит в выделении значимых факторов. Теория его планирования активно развивается в последнем десятилетии.

Имитированный эксперимент, который, как правило, связан с имитацией изучаемого явления на ЭВМ или другом устройстве, позволяющем воспроизводить это явление с приемлемой точностью. Имитационный эксперимент направлен не на изучение природы, а на изучение достаточно сложной (имитационной) модели. Ряд результатов по его планированию получен в связи с использованием метода Монте-Карло, а также исследованием сложных систем (типа моделей ядерного реактора) [16].

Перечисленные типы не исчерпывают всего многообразия экспериментальных ситуаций, но для них имеются математические модели и методы. Развитие методов анализа этих моделей позволяет, как правило, формулировать и исследовать задачи планирования эксперимента в более сложных ситуациях.

Не всякий эксперимент следует относить к числу статистических. Прежде всего, следует выделить класс экспериментов, где влияние случая пренебрежимо. И хотя формально результаты, полученные для статистических моделей, справедливы и для детерминированных, постановки задач и методы исследования здесь другие. Можно выделить также экспериментальные ситуации, в которых об ошибке измерений известно, что она не превосходит заданной величины, но невозможно получить сведения об её распределении. Здесь методы исследования также могут быть не связаны с теорией вероятностей. Наконец, можно упомянуть о нечетком задании условий эксперимента.

4.2 Понятие о полиноме, отклике, факторах и уровнях варьирования, факторном пространстве

Для математического описания системы, как правило, применяют степенную функцию – ряд Тейлора, т.к. любую непрерывную функцию можно представить в виде полинома *n*-степени.

В общем виде уравнение представляют как:

$$y = a_0 + a_i x_i + a_{ii} x_i^n + a_{ij} x_i x_j \tag{4.2}$$

В любой исследовательской задаче обязательно формулируется цель исследования и выбирается один или несколько критериев для ее достижения. Так целью эксперимента может быть снижение стоимости изделий за счет рационального подбора состава бетона. Критерием могут служить расход цемента или других материалов. В терминологии планирования эксперимента количественная оценка цели исследования носит название отклика и обозначается *У*. К отклику предъявляется ряд требований:

- отклик должен быть количественным и выражаться одним числом;
- иметь ясный физический смысл;
- должен быть статистически эффективным, т.е. измеряться с наибольшей точностью;
- должен быть информационным и однозначным, то есть должно максимизироваться или минимизироваться только одно свойство материала или процесса.

Фактором (обозначается X) в планировании эксперимента называют независимую изменяющуюся переменную, которая влияет на результаты эксперимента. Система может подвергаться воздействию большого числа факторов. При их выборе следует руководствоваться следующими принципами:

- факторы должны быть управляемыми, то есть экспериментатор может установить и поддерживать нужное значение фактора;
- точность замера факторов должна быть максимально высокой;
- факторы должны быть однозначны, то есть не являться функцией других факторов;
- факторы должны непосредственно воздействовать на отклик;
- совокупность факторов должна обладать свойством совместимости, что означает осуществимость и безопасность их комбинаций;
- факторы должны быть независимыми некоррелированными, то есть требуемое значение фактора устанавливается независимо от значений, которые имеют другие факторы.

Значения факторов, которые они принимают в опыте, называются уровнями. Обычно фактор имеет от 2 до 5 уровней. Обычно они изменяются через равные интервалы, но иногда могут быть и не равны между собой.

При планировании эксперимента факторы X_i из натуральных переменных (именованные величины с размерностью кг, м, руб. и т.д.) переводятся в кодированные x_i обычно с ограничением $-1 \le X_i \le +1$, которое превращает К-мерный параллелепипед в К-мерный куб, а эллипсоид – в сферу. С алгебраической точки зрения введение кодированных переменных $|X_i| = 1$ отражает стремление к ортогонализации систем функций, с вычислительной – к упрощению расчетов оценок коэффициентов полиномиальных моделей, с общеметодической – к созданию стандартизированного набора оптимальных планов, независимых от субстанции и структуры объекта исследования. Переход от натуральных переменных к кодированным можно осуществить двумя операциями: центрированием и масштабированием. Центрирование – перенос начала координат системы кодированных факторов X_i в центр эксперимента с координатами в натуральных переменных:

$$X_{0i} = 0,5(X_{i\max} + X_{i\min}) \quad (4.3)$$

Масштабирование – изменение центрированных числовых значений факторов в *c* раз:

$$c = 1/\Delta X_i \quad (4.4)$$

где ΔX_i – полудиапазон изменения (так называемый диапазон варьирования) i-го фактора, вычисленный по формуле:

$$\Delta X_i = 0,5(X_{i\,max} - X_{i\,min}) \quad (4.5)$$

Кодированные (x_i) переменные вычисляются по формуле:

$$x_i = (X_i - X_{0i})/\Delta X_i \qquad (4.6)$$

Возврат к натуральным переменным (X) осуществляется:

$$X = x_i \Delta X_i + X_{0i} \qquad (4.7)$$

Введение кодированных переменных x_i изменяет аппроксимирующий полином:

$$Y = a_0 + \Sigma a_i X_i + \Sigma a_{ij} X_i X_j + \Sigma a_{ii} X_i^2 + \ldots \varepsilon \qquad (4.8)$$

На полином вида:

$$Y = b_0 + \Sigma b_i x_i + \Sigma b_{ij} x_i x_j + \Sigma b_{ii} x_i^2 + \ldots \qquad (4.9)$$

в котором коэффициенты b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} – являются оценками истинных коэффициентов β_0, β_i, β_{ii}, β_{ij} соответственно. Коэффициенты моделей (4.8) и (4.9) связаны между собой соотношениями. Однако не рекомендуется переводить модель, полученную для кодированных переменных, в модель, содержащую натуральные переменные X_i. Не касаясь математической и статистической стороны такого перевода, разрушающего оптимальность планов, отметим, что резко ухудшаются возможности интерпретации модели и принятия по ней технико-экономических решений.

В ряде случаев, когда модель относительно проста, стремятся получить ее графическое изображение, которое называется изолиниями, если это плоскость, изоповерхностями, если это трехмерное пространство.

Факторным пространством называется пространство, координатные оси которого соответствуют значениям факторов. Для однофакторной системы $y=f(x)$ эта область представляется отрезком прямой, ограниченным максимальным и минимальным значениями фактора (x). Для многофакторной системы факторное пространство может быть ограничено прямоугольником (для двух факторов), прямоугольным параллелепипедом (для трех фактов).

В соответствии с целями исследования и возможностями их достижения для конкретной системы факторное пространство может принимать самые различные формы, ограниченные кусками линейных и нелинейных поверхностей (рисунок 9). Так сферическое ограничение, описанное радиусом $\sqrt{R}$ вокруг R-мерного куба, целесообразно в ряде задач, связанных с поиском области оптимума, расположенной в любом равновероятном направлении от центра эксперимента. Усеченный квадрат с добавочной функцией часто применяется в системах с предельным физическим состоянием, возникающим при одновременном увеличении нескольких факторов (появляется взрывоопасность или расслоение смеси и т.п.). Ограниченное треугольником факторное пространство характерно для специальных «смесевых» задач, когда сумма долей всех компонентов смеси есть величина постоянная, например, равная единице. Это факторное пространство широко применяется в физической химии, металлургии, в технологии цемента, стекла и т.п.

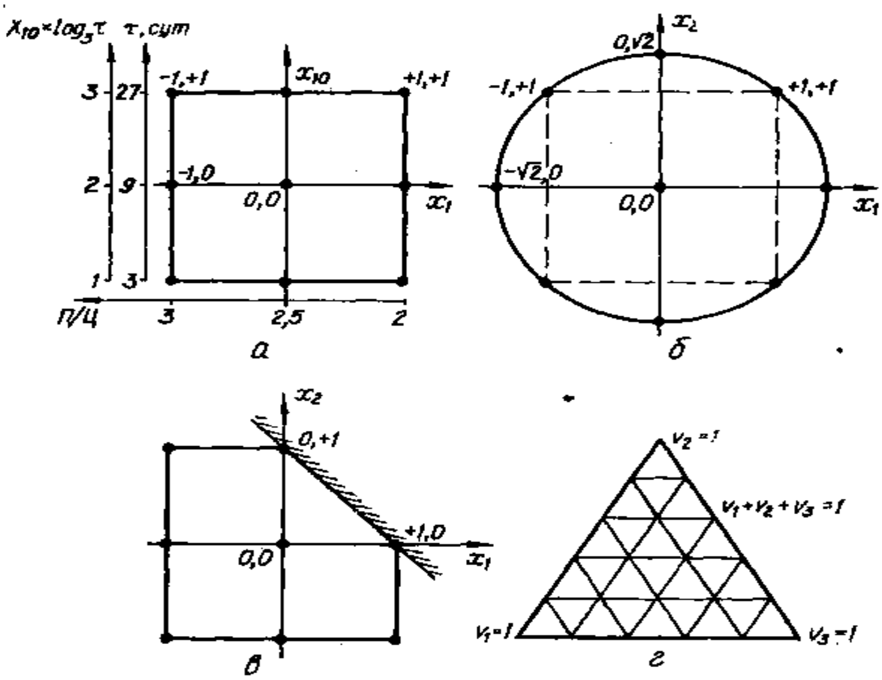


Рисунок 9 – Формы факторного пространства: а – квадрат после нормализации факторов; б – сфера, описанная вокруг квадрата; в – усечённый квадрат; г – симплекс

В зависимости от количества факторов модели могут быть одно-, двух-, трех-, четырехфаторные и более, но они встречаются реже.

однофакторная модель: $y=a_0+bx$

двухфаторная: $У=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{12}x_1x_2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2$

трехфакторная: $У=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3$

Аналогично остальные.

Все коэффициенты являются случайными величинами – статистическими оценками истинных параметров полинома.

Смысл коэффициентов: свободный член - a_0 – тождественно равен расчетному значению отклика $У$ в центре факторного пространства (при x_i=0).

Коэффициент a_i называется линейным эффектом_фактора x_i , его следует интерпретировать как усредненную в исследуемом диапазоне $-1 \leq x_i \leq +1$ скорость изменения отклика системы $\partial\hat{Y}/ \partial x_i$ при управлении x_i. Знак перед коэффициентом a_i определяет, увеличивается или уменьшается выход системы $\hat{Y}$ с ростом x_i.

Коэффициент a_{ij} называется квадратичным эффектом фактора x_i. Его следует интерпретировать как ускорение изменения отклика системы $\partial^2\hat{Y}/\partial x_i^2$ при изменении фактора x_i на безразмерную масштабную единицу.

Группа элементов $a_{ij}\ x_i\ x_j$ представляют попарные произведения факторов x_i и x_j. Коэффициент a_{ij} у такого произведения называется эффектом взаимодействия. Возможное число $\alpha\{a_{ij}\}$ эффектов взаимодействия равно числу сочетаний

$c^2k=k!/[2!(k-2)!]=0,5k(k-1)$: при $k=2$ $\alpha\{a_{ij}\}=1$; $k=3$ $\alpha=3$; $k=9$ $\alpha=36$ и т.д.

где k – количество факторов.

Эффект взаимодействия меняет усредненную скорость изменения отклика системы $\hat{Y}$ под влиянием управления фактором x_1 в зависимости от того, на каком уровне находится другой фактор x_2. Наличие в модели эффекта взаимодействия приведет к перемещению в факторном пространстве и линейной функции для скорости $\partial\hat{Y}/\partial x_i$ и координат вершины параболы.

4.3 Первичная статистическая обработка результатов эксперимента

Статистическое поведение моделирования системы проводится исследователем только на основе фактических данных, т.е. сведений о состоянии конкретного объекта технико-экономического исследования. Так как эти данные будут способствовать изменению наших знаний об объекте, то они представляют собой информацию о нем, причем тем большую, чем новее для нас содержание этих сведений. Будем считать, что исследуемая величина у связана некоторым образом с величинами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – входными величинами (факторами), - значения каждой из которых могут быть выбраны произвольно из некоторой области.

Например, $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$.

В качестве факторов могут рассматриваться время, температура, напряжение, давление, процентное содержание реагентов и т. д. Каждому набору факторов соответствует вектор – столбец $\overline{X}$.

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T \qquad (4.10)$$

где T – знак транспонирования.

Пространство размерности N, которому принадлежит вектор $\overline{X}$, называется факторным пространством. Совокупность точек этого пространства, в котором значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ могут быть реализованы экспериментатором, называется допустимой областью факторного пространства, то есть вектор столбцов факторов $\overline{X}$ может быть n штук, и они составляют некоторую матрицу.

$$\begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ \ldots x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22}\ \ldots x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k1}\ x_{k2}\ \ldots x_{kn} \end{pmatrix} \qquad (4.11)$$

Заметим, что эти наборы вектор – столбцов факторов можно составлять различным образом. Можно изменять сразу же все значения факторов или по отдельности каждый. Немаловажную роль играет число этих наборов п.

Так как в эксперименте рассматриваются не все возможные значения входных факторов, а некоторая выборка из этих значений (n столбцов матрицы), то необходимо, чтобы эта выборка была значима. Ответ на этот вопрос могут дать некоторые критерии согласия. В эксперименте каждый набор входных параметров $\overline{X}_i$, повторяется n_i раз, но значения выходного параметра y тождественно равны между собой не будут. Они будут иметь значения (хоть и мало отличающиеся друг от друга).

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in_i}$$

В качестве значения выходного параметра y_i для набора входных параметров $\overline{X}_i$, берется среднее значение величин y_{ik} (прообраз математического ожидания)

$$y_i = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} y_{ik}}{n_i} \qquad (4.12)$$

Кроме того, вычисляется среднеквадратическое отклонение σ_i равное корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n_i} (y_i - y_{ik})^2}{n_i} \qquad (4.13)$$

Большое значение имеет число n_i, повторений набора входных параметров $\overline{X}_i$, так как при малом значении n_i, и среднее значение выходного параметра y_i, и среднеквадратическое отклонение σ_i, характеризующее разброс значений выходного параметра вокруг среднего значения y_i, будут существенно отличаться от истинных значений этих величин. Так как точные значения этих величин неизвестны, то для оценки точности приближенных их значений можно использовать доверительный интервал, а также критерии согласия.

В этом заключается первичная статистическая обработка результатов эксперимента. Таким образом, в результате проведения эксперимента получается таблица значений $\overline{X}_i$ и y_i.

В результате для каждого из N_y выходов системы всегда будет получена информационная таблица, фиксирующая данные и результаты их первичной статистической обработки (исходные данные образуют информационную матрицу), представленную в таблице 2.

Таблица 2 - Информационная таблица поведения системы

Входные характеристики системы (план эксперимента)			Выходные характеристики системы (результаты эксперимента)		
Номер опыта	Значения факторов $x_1 \dots x_i \dots x_k$	Число параллельных измерений	Значения Y в каждом измерении	Среднее выхода $\hat{Y}_u$	Дисперсия выхода S_u^2
1	$X_{11} \dots 1u \dots X_{k1}$	m_1	$Y_{11} \dots Y_{1\omega} \dots Y_{1m}$	$\hat{Y}_1$	S_1^2
…	………………	…	……	…	…
u	$X_{1u} \dots X_{iu} \dots X_{ku}$	m_u	$Y_{u1} \dots Y_{u\omega} \dots Y_{umu}$	$\hat{Y}_u$	S_u^2
…	………………	…	…….	…	….
…	………………	…	…….	…	….
…	………………	…	…….	…	….
N	$X_{1N} \dots X_{iN} \dots X_{KN}$	m_N	$Y_{N1} \dots Y_{N\omega} .. Y_{NmN}$	$\hat{Y}_N$	S_N^2

В нее входят:

а) номера опытов 1, …*u*, …*N*;

б) матрица значений факторов $[x]$ размерности $N*K$;

в) число измерений m_u в каждом опыте;

г) матрица экспериментальных значений выходов $[Y_u]$ размерности $N*m$;

д) вектор наблюдений $[Y]$ размерности $N*1$, составленный из средних значений $\hat{Y}_u$;

е) вектор дисперсии $[S^2]$ размерности $N*1$, составленный из рассчитанных по результатам каждой строки оценок S_u^2.

4.4 Математическая модель эксперимента. Метод наименьших квадратов

После того как проведены первичная статистическая обработка результатов эксперимента и обоснование точности полученных экспериментальных данных необходимо найти аналитическую зависимость выходного параметра y от входных параметров (факторов) $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Рассмотрим простейший случай. Пусть выходной параметр y зависит только от одного фактора x. В результате проведения эксперимента получим данные, представленные в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты эксперимента

Параметры	*Значения*			
x	x_1	x_2	…	x_m
y	y_1	y_2	…	y_m

Возникает задача найти функцию $y = f(x)$, отражающую в основном характер экспериментальной зависимости, - это задача сглаживания экспериментальной зависимости. Так как y и x случайные величины, то кривая, проходящая через точки M_i (рисунок 10), не отражает основного характера зависимости $y = f(x)$. Кривой, отражающей в основном характер экспериментальной зависимости $y = f(x)$, будет кривая $Г$.

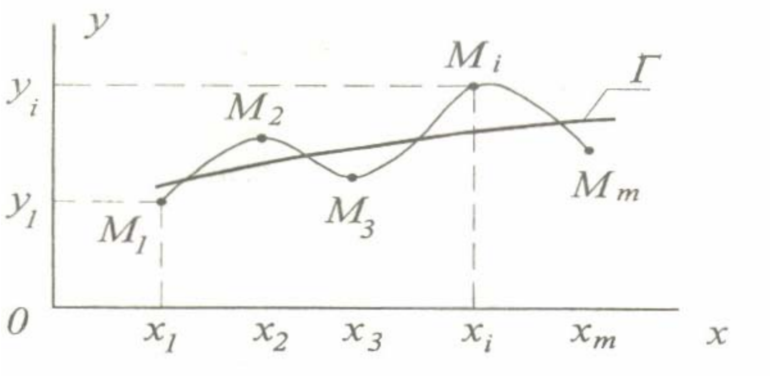


Рисунок 10 – Сглаживание экспериментальной зависимости

Решают две вспомогательные задачи:

1. Определение вида сглаживающей функции.
2. Определение значений параметров, входящих в сглаживающую функцию [17].

Первая задача решается исходя из дополнительной информации об эксперименте, вторая - математическими методами. Зачастую сглаживающая функция представляется в виде линейной комбинации неизвестных числовых параметров и некоторых известных линейно независимых функций

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) \tag{4.14}$$

Такими функциями, например, могут быть

$$\varphi_i(x) = x^{i-n} \tag{4.15}$$

Для удобства дальнейших вычислений вводят в эту матрицу еще одну переменную, она называется «фиктивной» и во всех опытах равна $x_{0u} = +1$. В результате получена матрица размерностью $N*(K+1)$. Вектор наблюдений образует другую матрицу, размерностью $N*1$.

$$[x] = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{K1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0u} & x_{1u} & \dots & x_{Ku} \\ x_{0N} & x_{1N} & \dots & x_{KN} \end{pmatrix}; \qquad [Y]_M = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_u \\ \dots \\ Y_N \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Рассмотрим на примере однофакторной модели идею метода наименьших квадратов, который дает наилучшие линейные оценки.

Для однофакторной модели (линейной) матрица $[x]$ содержит лишь два столбца. Необходимо подобрать такие значения b_0 и b_1 (или так провести прямую на графике (рисунок 11) в координатах X_1 и Y), чтобы модель наилучшим образом удовлетворяла данным. Провести прямую через все точки с координатами (X_{1u} и Y_u) практически невозможно. Это объясняется тем, что:

а) измерения Y_u точны, но гипотеза о линейном влиянии X_1 на Y не соответствует истине;

б) влияние X_1 на Y действительно линейно, но Y_u измерено со значительной среднеквадратической ошибкой $S_э$;

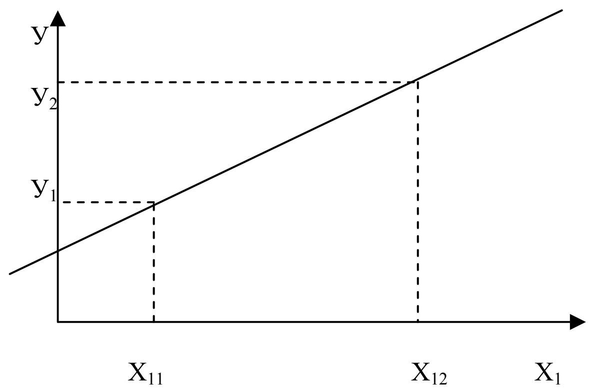


Рисунок 11 – Графическое изображение однофакторной модели
$y=b_0x_0 + b_1x_1$

в) одновременно несовершенна гипотеза линейности и существует ошибка измерения $S_э$.

Следовательно, всегда между наблюдаемыми значениями (Y_u) и расчетными значениями ($\hat{Y}_u$) возможна разница (Δu):

$$\Delta u = Y_u - \hat{Y}_u \qquad (4.17)$$

Необходимо свести общую разницу к минимуму. При этом наиболее громоздкие вычисления получаются, если минимизировать не сумму абсолютных отклонений по всем опытам, $(\Sigma|\Delta u|)$, а сумму квадратов отклонений:

$$\Sigma\Delta u^2 = \Sigma(Y_u - \hat{Y}_u)^2 \to \min \qquad (4.18)$$

При подстановке значений $\hat{Y}_u$ из модели для каждого опыта получим:

$$\Sigma(Y_u - b_0 - b_1 X_{1u})^2 \to \min \qquad (4.19)$$

Для нахождения минимума функции необходимо приравнять к нулю частные производные по всем неизвестным, т.е. по b_0 и b_1. Получаем систему нормальных уравнений, при решении которых и будут вычислены неизвестные коэффициенты модели:

$$\begin{aligned} \partial Y/\partial b_0 &= -2\sum(Y_u - b_0 - b_1 x_{1u}) = 0 \\ \partial Y/\partial b_1 &= -2\sum(Y_u - b_0 - b_1 x_{1u})x_{1u} = 0 \end{aligned} \qquad (4.20)$$

сокращая оба уравнения на «-2» и производя почленное суммирование, получим:

$$\begin{cases} \sum Y - \sum b_0 - \sum b_1 x_{1u} = 0 \\ \sum Y x_{1u} - \sum b_0 x_{1u} - \sum b_1 x_{1u}^2 = 0 \end{cases} \qquad (4.21)$$

Далее вводим обозначения:

$N(u)=(00)$ $\quad$ $\Sigma X_{1u}=(01)$ $\quad$ $\Sigma Y=(0Y)$

$\Sigma X_{1u}=(10)$ $\quad$ $\Sigma X_{1u}^2=(11)$ $\quad$ $\Sigma YX_{1u}=(1Y)$

Тогда система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} (00)b_0 + (01)b_1 &= (0Y) \\ (10)b_0 + (11)b_1 &= (1Y) \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

Неизвестные оценки коэффициентов модели образуют вектор b:

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad (4.23)$$

Известные априори суммы *(00), (i0), (ij) и (ii)*, определенные только уровнями факторов X_i в информационной таблице, образуют квадратичную матрицу M размером $(k+1)*(k+1)$:

$$M=\begin{pmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 0j & \dots & 0k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i0 & i1 & ij & \dots & ik \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k0 & k1 & kj & \dots & kk \end{pmatrix} \qquad (4.24)$$

Эта матрица называется матрицей моментов плана, ее можно получить из матрицы плана X_1, если последнюю умножить слева на транспонированную матрицу X^T: $M= X^T * X$.

С целью исследования свойств и обобщения результатов для матриц различных планов X матрицу M целесообразно нормировать по числу опытов, получая информационную матрицу $M_N=\frac{1}{N}\cdot M=\frac{1}{N}X^T X$.

Известные апостериори суммы ($0Y$) и (iY), включающие результаты эксперимента, образуют вектор Y_M, являющийся произведением X^T на вектор наблюдений Y:

$$Y_M=\begin{pmatrix}0Y\\1Y\end{pmatrix}\qquad Y_M=\begin{pmatrix}0Y\\ \dots\\ iY\\ \dots\\ kY\end{pmatrix}\qquad Y_M=X^TY \tag{4.25}$$

Следовательно, в матричной форме система нормальных уравнений записывается:

$$M_b=У_M \tag{4.26}$$

А с учетом матрицы X: $X^TX^B= X^TУ$ из нее определяется вектор оценок коэффициентов:

$$b=M^{-1}У_M=(X^T\quad X)^{-1}X^TУ=N^{-1}M_N^{-1}X^TY=ДX^TY=LY \tag{4.27}$$

В данном случае выделены две новые независимые от результатов эксперимента матрицы: так называемая D-матрица, или ковариационная, элементы которой оценивают статистические характеристики модели, и так называемая L-матрица, элементы которой позволяют рассчитывать оценки b_i без обращения матриц по простым формулам с помощью микрокалькуляторов.

$$Д=M^{-1}=(X^TX)^{-1} \tag{4.28}$$

$$L=DX^T=(X^TX)^{-1}X^T \tag{4.29}$$

Неизвестные оценки в системе нормальных уравнений можно рассчитать через определитель $det\ M=A$ матрицы моментов и определителя $det\ M_i=A_i$ матриц M_i, образуемых путем замены i-го столбца на вектор-столбец $У_M$:

$$b_i=det\ M_i/\ det\ M=A_i/A \tag{4.30}$$

Таким образом, для однофакторной модели при использовании правила Крамера используются простые формулы:

$$A=\begin{vmatrix}00 & 10\\10 & 11\end{vmatrix}\qquad A_0=\begin{vmatrix}0Y & 10\\1Y & 11\end{vmatrix}\qquad A_1=\begin{vmatrix}00 & 0Y\\10 & 1Y\end{vmatrix}$$

$$b_0 = A_0 / A = \left[(0Y)(11) - (1Y)(10)\right] / \left[(00)(11) - (10)^2\right] \qquad (4.31)$$

$$b_0 = A_1 / A = \left[(00)(1Y) - (10)(0Y)\right] / \left[(00)(11) - (10)^2\right]$$

Ковариационная матрица $D = X^T X^{-1}$ определяется только матрицей независимых переменных X, т.е. планом эксперимента, поэтому априорный анализ ее свойств лежит в основе синтеза этих планов [7].

Рассмотрим пример. Найти функцию, отражающую экспериментальную зависимость y от x, используя данные таблицы 4.

Таблица 4 – Результаты эксперимента

Параметры	Значения параметров									
x	1,20	1,31	1,40	1,61	1,74	1,80	2,00	2,14	2,19	2,41
y	0,54	0,59	0,67	0,76	0,85	0,97	1,07	1,18	1,27	1,30

Функцию $y = f(x)$ возьмем в виде

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Неизвестные C_1, C_2, C_3 определим из условий (4.15).

Здесь $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = 1$.

В результате получим систему

$$128{,}94C_1 + 64{,}30C_2 + 33{,}17C_3 = 34{,}63;$$
$$64{,}30\, C_1 + 33{,}17\, C_2 + 17{,}80C_3 = 17{,}60;$$
$$33{,}17\, C_1 + 17{,}80\, C_2 + 10{,}00C_3 = 9{,}29.$$

Решив эту систему, найдем $C_1 = 0{,}168$; $C_2 = 0{,}102$; $C_3 = 0{,}189$. Следовательно, функциональная зависимость y от x имеет вид

$$y = 0{,}168x^2 + 0{,}102x + 0{,}189.$$

4.5 Получение некоторых эмпирических формул

В том случае, когда в сглаживающую функцию (4.14) искомые параметры входят нелинейно, вначале формулу нужно преобразовать таким образом, чтобы каждый параметр входил линейно, а потом найти его значение методом наименьших квадратов [20].

Пусть вид сглаживающей функции

$$y = e^{ax} \qquad (4.32)$$

Значения x и y даны в таблице 9. Прологарифмируем выражение (4.32) $lny = ax$. Получим новую функцию

$$\bar{y} = ax \tag{4.33}$$

где $\bar{y} = ln\ y$ можно получить из таблицы 9. Параметр a находится из минимизации функции

$$S = \sum_{k=1}^{m} \left(\bar{y}_k - ax_k\right)^2 \to \min \tag{4.34}$$

Используя условие (4.15), найдем

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{m} \bar{y}_k x_k}{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \tag{4.35}$$

Если сглаживающая функция имеет вид

$$y = a\ lnx \tag{4.36}$$

то представим ее так: $y = a\bar{x}$, где $\bar{x} = ln\ x$ получим из таблицы 9. Параметр a находится из условия минимума функции

$$S = \sum_{k=1}^{m} \left(y_k - a\bar{x}_k\right)^2 \to \min \tag{4.37}$$

Так что

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{m} y_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^{m} \bar{x}_k^2} \tag{4.38}$$

4.6 Метод наименьших квадратов для функции нескольких переменных

Будем теперь считать, что исследуемая величина y связана некоторым образом с величинами $x_1, x_2, ..., x_k$ - входными величинами (факторами), - значения каждого из которых могут быть выбраны произвольно из некоторой области.

Пусть связь y с $x_1, x_2, ..., x_k$ характеризуется зависимостью (видом регрессии y на $x_1, x_2, ..., x_k$).

$$M\left(\frac{y}{\bar{X}}\right) = \eta(x_1, x_2, ..., x_k) = \eta(\bar{X}) \qquad (4.39)$$

Функцию $\eta(\bar{X})$ называют функцией отклика. Эта функция обычно неизвестна экспериментатору, но, обладая некоторой информацией или интуицией, экспериментатор выбирает вид этой функции. Будем брать эту функцию в виде линейно зависящей от нескольких числовых параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

$$\eta(\bar{X}, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m) = f_1(\bar{X})\theta_1 + f_2(\bar{X})\theta_2 + ... + f_m(\bar{X})\theta_m \qquad (4.40)$$

Вид функции $f_i(\bar{X})$ - известен. Обозначим

$$\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ . \\ . \\ \theta_m \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(\bar{X}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{X}) \\ f_2(\bar{X}) \\ . \\ . \\ f_m(\bar{X}) \end{pmatrix}. \qquad (4.41)$$

В векторных обозначениях выражение (4.40) можно записать:

$$\eta(\bar{X}, \bar{\theta}) = \bar{\theta}^T \bar{f}(\bar{X}) \qquad (4.42)$$

Чтобы получить математическую модель процесса, нужно определить вектор θ в (4.42) (оценить $\bar{\theta}$ и оценки найти наилучшие в некотором смысле). Доказано, что наилучшие линейные оценки $\bar{\theta}^*$, полученные для $\bar{\theta}$, дает метод наименьших квадратов. В выражении (4.42) вектор $\bar{\theta}$ входит как раз линейно. Есть и другие способы оценки $\bar{\theta}$. Заметим, что эти оценки должны быть состоятельными, несмещенными и обладать наименьшими дисперсиями среди всех оценок $\bar{\theta}$. Такие оценки и называются наилучшими линейными оценками.

Предположим, что в точках $\bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_n$ (n - разных наборов факторов факторного пространства были проведены независимые измерения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с дисперсиями $\sigma^2_1, \sigma^2_1, \ldots, \sigma^2_n$. В дальнейшем будем считать, что y_1 - это среднее выборочное значение, а среди $\bar{X}_i$ нет одинаковых.

Нам нужно построить оценку параметров $\bar{\theta}$. Известно, что наилучшая линейная оценка $\bar{\theta}^*$ минимизирует сумму взвешенных квадратичных уклонений.

$$S(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left[y_i - \bar{f}^T(\bar{X}_i)\bar{\theta}\right]^2 \qquad (4.43)$$

где $\omega_i = \dfrac{n_i}{\sigma_i^2}$.

Условия минимума для (4.43) имеют вид

$$\frac{\partial S(\bar{\theta})}{\partial \theta_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m). \tag{4.44}$$

Откуда, решив систему линейных алгебраических уравнений (4.44), найдем $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_m^*$ - оценки для $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$. Подставляя эти значения в (4.42) найдем аналитическую зависимость y от $x_1, x_2, ..., x_k$, т. е. математическую модель исследуемого экспериментально процесса.

4.7 Дисперсионная матрица оценок

Распишем систему уравнений (4.44) подробнее:

$$2\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left[y_i - \bar{f}^T(\bar{X}_i)\bar{\theta}^* \right] f_j(\bar{X}_i) = 0 \tag{4.45}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$.

Эту систему после преобразования запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i f_j(\bar{X}_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_j(\bar{X}_i) \bar{f}^T(\bar{X}_i)\bar{\theta}^* \tag{4.46}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть
$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i f_j(\bar{X}_i) \tag{4.47}$$

Тогда

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i y_i \bar{f}(\bar{X}_i) \tag{4.48}$$

Обозначим

$$J_{ip} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_j(\bar{X}_i) f_p(\bar{X}_i) \qquad (j = 1, 2, ..., m) \tag{4.49}$$

Так что

$$J = \begin{pmatrix} J_{11}\ J_{12} \ldots J_{1m} \\ J_{21}\ J_{22} \ldots J_{2m} \\ . \quad . \quad \ldots . \\ J_{m1}\ J_{m2} \ldots J_{mm} \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

Теперь соотношение (4.46) можно записать в виде

$$Y_j = \sum_{p=1}^{m} J_{ip}\theta_p^* \qquad (j = 1, 2, ..., m). \qquad (4.51)$$

А всю систему запишем так:

$$Y = J\overline{\theta}^* \qquad (4.52)$$

Решение этой системы в матричной форме имеет вид

$$\overline{\theta}^* = J^{-1}Y. \qquad (4.53)$$

где J - информационная матрица Фишера.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \bar{f}(\overline{X}_i)\bar{f}^T(\overline{X}_i) \qquad (4.54)$$

Обратная матрица является дисперсионной матрицей оценок

$$J^{-1} = D(\overline{\theta}^*) \qquad (4.55)$$

Дисперсионная матрица играет большую роль при выборе наилучших оценок. Оценка $\overline{\theta}'$ предпочтительнее оценки $\overline{\theta}''$, если дисперсионная матрица $D(\overline{\theta}')$ меньше дисперсионной матрицы $D(\overline{\theta}'')$ или определитель

$$\left|D(\overline{\theta}')\right| < \left|D(\overline{\theta}'')\right| \qquad (4.56)$$

Итак, наилучшие линейные оценки для рассматриваемого эксперимента найдены. Но может быть и другой эксперимент с другим n и другим набором факторов. Следует обратить внимание на то, что наилучшей линейной оценкой поверхности отклика $\eta(\overline{X}, \overline{\theta})$ является

$$\eta(\overline{X}, \overline{\theta}^*) = \overline{\theta}^{*T} \bar{f}(\overline{X}) \qquad (4.57)$$

Дисперсия оценки $\eta(\overline{X}, \overline{\theta}^*)$ равна $d(\overline{X}) = \bar{f}^T(\overline{X}) D(\overline{\theta}^*) \bar{f}(\overline{X})$..

4.8 Критерии оптимального планирования

Следующей проблемой после выбора типа функции η является определение таких численных значений неизвестных параметров $\theta_1, ..., \theta_m$, при которых функция регрессии будет достаточно хорошо (или даже наилучшим образом) описывать эмпирические данные. Для её решения прежде всего необходимо задать критерий, который определял бы степень соответствия эмпирических данных и регрессионной зависимости. Любой такой критерий должен учитывать отклонения между измеренными значениями y_1 ..., y_N и приближенными значениями.

Критерии оптимального выбора θ могут быть заданы различными способами. Например, наилучшим могут считаться те θ, для которых величины минимальны.

$$\max_{j=1,\dots,N}\left|\varepsilon_j\right|, \quad \sum_{j=1}^{N}\left|\varepsilon_j\right|, \quad \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j^2 = \varepsilon^T\varepsilon \tag{4.58}$$

Многие экспериментальные ситуации таковы, что нельзя (по крайней мере без дополнительных экспериментов) задать один критерий оптимальности, но можно указать множество критериев $\{\Phi_\alpha(\xi)\}$, каждый из которых желательно минимизировать выбором ξ. При этих условиях задача планирования многокритериальна.

Можно утверждать, что специфической задачей теории планирования эксперимента является конструирование критерия его оптимальности. Второй задачей является экстремальная (может быть очень сложная) задача. Можно выделять некоторые классы экстремальных задач теории планирования эксперимента, допускающих специальные методы исследования, но роль общей теории решения экстремальных задач приуменьшить нельзя. В соответствии с этой точкой зрения основное внимание уделяется критериям оптимальности, их конструированию и их свойствам. При конструировании критерия важную роль играет априорная информация, находящая свое отражение в высказываемой экспериментатором гипотезе модели изучаемого явления.

Эксперимент как активное воздействие на объект с целью получения необходимого эффекта требует на свою реализацию некоторого расхода ресурсов: материальных, временных, трудовых и др. Эксперимент может быть оптимизирован по двум граничным направлениям:

1) если исследователь может израсходовать на эксперимент весь имеющийся в наличии ресурс, то естественно его стремление получить максимально возможный объем новой информации о поведении, структуре, надежности и других сторонах исследуемого объекта;

2) если исследователю задан уровень необходимого эффекта или объем информации о поведении объекта, то естественно его стремление к тому, чтобы достигнуть результата при минимальном расходе ресурсов (уменьшая количество опытных установок и образцов, сокращая сроки работы, не привлекая специалистов определенного уровня и т.п.).

На основании вышеизложенного следуют выводы, определяющие некоторые основные принципы оптимального планирования эксперимента. Во-первых, из системы нормальных уравнений для определения L неизвестных оценок b_i в модели, линейной по параметрам, следует, что необходимо и достаточно, чтобы матрица X содержала L разных строк. Следовательно, минимальное число опытов в плане $N_{min} = L$ (насыщенный план), а избыточность опытов $N - L$ полезна не с алгебраической, а со статистической точки зрения. Во-вторых, ковариационная матрица D определяет не только численные значения вектора B неизвестных оценок коэффициентов модели, но и характеристики точности модели как в целом, так и отдельных ее параметров. Диагональные элементы матрицы c_{ii} оценивают дисперсии оценок каждого коэффициента $S^2\{b_i\}$, следовательно, точность оценок будет различной, если эти элементы не равны между собой. Внедиагональные элементы c_{ij} определяют корреляцию оценок коэффициентов модели и если $\rho\{b_i \ b_j\}\neq 0$, то работа исследователя с моделью усложнится. В-третьих, ковариационная матрица $D = X^T X^{-1}$ не зависит от результатов эксперимента и, следовательно, может быть исследована до его реализации. Результаты такого анализ могут служить основой для конструирования матрицы плана X некоторым оптимальным (с точки зрения целей исследования системы) образом до проведения опытов. До опыта можно исследовать и меру точности предсказания выхода $d= X^T\ Dx$, связанную только с расположением опытных точек, использовать результаты анализа для повышения точности модели и т.п.

Исследование матриц D, мер точности d и других статистических характеристик с целью конструирования матриц плана X и есть одно из направлений оптимального алгоритмизированного планирования эксперимента. Оптимальность оценивается по большому числу критериев, каждый из которых приобретает ту или иную ценность для экспериментатора в зависимости от целей его исследований. Эти критерии в абстрактной математической форме обобщают ту массу пожеланий, которые выдвигают к результатам исследований. Ниже приведены критерии, имеющие наибольшее распространение в материаловедении и технологии и наиболее важны для решения прикладных технико-экономических задач.

Из анализа формул следуют критерии, связанные с определением и минимизацией дисперсии оценок коэффициентов модели:

а) оценки коэффициентов модели будут независимыми только при $\rho\{b_i \ b_j\}=0$, что приводит к диагональности матрицы $[D]$. При этом угол поворота $\Omega=0$ и направление главных осей эллипсоида рассеяния (γ и π в линейной однофакторной модели) совпадает с направлением координатных осей пространства параметров, а размеры его большого и малого диаметров могут определяться как индивидуальные доверительные интервалы оценок b_i. План, обеспечивающий $\rho\{b_i \ b_j\}=0$, называется *ортогональным* (рисунок 12, *д*). В таком плане суммы по всем N опытам равны 0, а для двухуровневых планов, кроме того, действительно соотношение:

$$\sum_{u=1}^{N} X_{iu} X_{ju} = 0(i \prec j) \qquad \sum_{u=1}^{N} X_{iu}^2 = N \tag{4.59}$$

б) для минимизации обобщенной дисперсии, пропорциональной объему эллипсоида рассеяния оценок параметра, а для линейной однофакторной модели – площади эллипса $S_э^2\sqrt{(A')^{-1}}$, необходимо минимизировать определитель ковариационной матрицы или максимизировать определитель информационной матрицы $[M]$, в частности $A' = \left[(00)(11) - (10)^2\right]$. План, соответствующий требованию *mindet* $[M]^{-1}$ на множества планов, отвечает критерию *D-оптимальности* (determinant) (рисунок 12, *а*). Этот критерий наиболее тесно связан с центральными идеями математической статистики (с теорией эффективных оценок) и является одним из важнейших в современной математической теории эксперимента;

в) минимальная средняя дисперсия оценок коэффициентов связана с поиском суммы квадратов длин осей эллипсоидов рассеяния (для эллипса из: $\sigma_v^2+\sigma_\pi^2 \approx (A)^{-1}\cdot S_{э2}\sqrt{[(11)+(10)]^2-4A'}$ или минимума длины диагонали $\sqrt{(\sigma_v^2+\sigma_\pi^2)}$ многомерного прямоугольника, описанного вокруг эллипсоида. Для этого минимизируется след матрицы $t_2[D]$(или $[(11)+(00)]\rightarrow min$). Такой критерий носит название *А-оптимальность* (averadge variance) (рисунок 12, *б*);

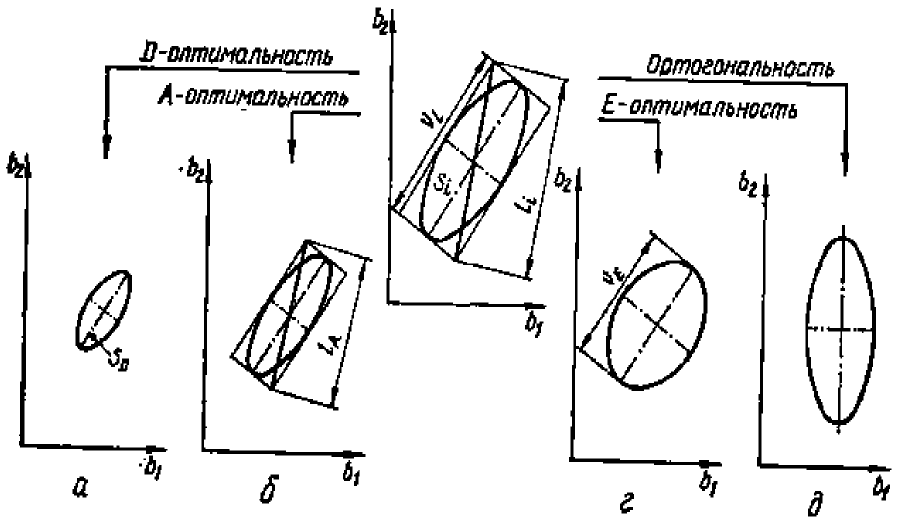


Рисунок 12 – Взаимосвязь критериев оптимальности с эллипсом рассеяния: *а* – *D*-оптимальность; *б* –*А*-оптимальность; *в*– параметры эллипса; *г* – *Е*-оптимальность; *д* – ортогональность

г) для минимизации максимальной оси эллипсоида рассеяния (σ_v) минимакс собственного значения (eigen value) матрицы *[D]* - критерий *Е-оптимальности* (рисунок 12, *г*). В этом случае отдельные оценки параметров модели не будут обладать слишком большими дисперсиями и ковариациями.

С оценками коэффициентов модели связаны и такие критерии оптимальности планов, как минимакс дисперсии оценок коэффициентов (minimax c_{ii}) и минимум суммы относительных ошибок оценок min $\sum_{i=1}^{k}(S\{b_i\}\div b_i)=\min\sum_{i=1}^{k}t_i$.

Из анализа меры точности *d* следуют критерии, связанные с ошибкой модели в целом:

а) если необходимо обеспечить минимум средней дисперсии оценки выхода или $\overline{S}^2\{\hat{Y}\}$, то должна быть минимальная функция $\min\overline{d}=\sum_p[X_p^T][M]^{-1}[X_p]$, что соответствует критерию *Q-оптимальности*;

б) минимуму максимального значения дисперсии оценки min($\bar{S}^2\{\hat{Y}\}$)max соответствует minimax *d*, а критерий называется *G-оптимальность* (general variance);

в) постоянство дисперсии предсказания на равных расстояниях от центра эксперимента – *ротатабельность* – обеспечивается при $d=f\{\rho\}$, где $\rho = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

г) если в пределах $(|\rho| \leq 1)$, желательно обеспечить постоянство дисперсии предсказания $\bar{S}^2\{\hat{Y}\} \approx const$, *униформность*, то должно обеспечиваться кроме ротатабельности, и условия $d \approx const$, что достигается повторением опытов, в частности в центре плана.

К числу критериев, облегчающих процедуру экспериментов и построение моделей, можно отнести следующие:

а) *минимизация числа опытов*, то есть близость числа опытов N к числу оцениваемых параметров модели α. По-видимому, особый интерес этот критерий будет вызывать у экспериментатора на первом поисковом этапе исследования, когда можно получить даже не очень точное представление об объекте, но при минимуме затрат материальных и временных ресурсов.

б) *простота вычислений* коэффициентов модели;

в) *композиционность плана* – возможность использовать точки плана первого этапа в плане второго этапа в случае, если модель первого этапа (полином степени m, например, линейный) неадекватно описывает поведение системы (требуется описание полиномом степени $m+1$, например, квадратичным).

Наличие такого большого числа, часто несовместимых критериев оптимальности, с одной стороны, усложняет принятие решения о выборе плана экспериментатором, с другой стороны, дает ему возможность построить (или выбрать) план в соответствии с целями данного этапа исследований. В настоящее время в результате развития общей методологии математической теории эксперимента теперь нет необходимости выбирать один какой-нибудь критерий, а появилась возможность построения компромиссных планов достаточно хороших с позиций разных критериев [7].

4.9 Планы для построения линейных и неполных квадратичных моделей

Линейная модель имеет вид:

$$Y = B_0 + \Sigma B_i X_i \tag{4.60}$$

Для построения таких моделей целесообразно использовать полный факторный двухуровневый план типа $2^К$, в котором реализуются все возможные сочетания двух уровней факторов «+1» и «-1» (где $К$ – количество факторов). Число возможных сочетаний определяется количеством факторов и составляет $N = 2^K$. В таблице 5 представлены возможные сочетания уровней для двух факторов.

Для двух факторов, которые принимают в опыте по два значения, число сочетаний или опытов равно

$$N = 2^2 = 4 \tag{4.61}$$

Таблица 5 - Полный факторный двухуровневый план типа $2^К$

№ опыта	X_1	X_2
1	+1	+1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	-1	-1

Таблица представляет собой матрицу планирования эксперимента: строки матрицы соответствуют различным опытам, а столбцы значениям факторов.

Полный факторный план для всего количества факторов можно построить самостоятельно, переходя от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности путем увеличения числа факторов на единицу. При этом исходный план записывается дважды для каждого уровня нового фактора. Так, для построения плана 2^3 используется план типа 2^2 (таблица 6).

Таблица 6 - Полный факторный трехуровневый план типа $2^К$

№	X_1	X_2	X_3
1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1
3	-1	+1	+1
4	-1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	+1	-1	-1
7	-1	+1	-1
8	-1	-1	-1

Полные факторные эксперименты широко распространены вследствие простоты вычисления коэффициентов регрессии:

$$B_0 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} Y_U \tag{4.62}$$

$$B_i = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} X_{iu} Y_U \tag{4.63}$$

где N – количество факторов;

Y_U – результаты эксперимента;

X_i - факторы;

U – строка плана.

Помимо простоты вычислений план обеспечивает получение независимых от X оценок коэффициентов уравнения. Это значит, что исключение из уравнения любого коэффициента не приводит к изменению величин остальных коэффициентов. Это свойство оказывается полезным в том случае, когда нужно оценить степень влияния факторов на отклик без построения модели. Недостаток – перерасход материалов.

Неполные квадратичные модели. Линейная модель не всегда дает возможность описать с нужной точностью изучаемый процесс. В некоторых случаях дополнение линейного уравнения членами взаимодействия A_{ij} повышает его точность и позволяет получить работоспособную модель вида:

$$Y = b_0 + b_i x_i + b_{ij} x_i x_y \tag{4.64}$$

Уравнение называется неполным квадратичным_и может включать в общем случае не только парные взаимодействия, но и взаимодействия более высокого порядка, например, тройные: $b_{ijk}x_i x_j x_k$. Полные факторные планы позволяют вычислить все возможные взаимодействия факторов. Минимизация числа опытов достигается за счет дробных реплик типа 2^{K-P}. Для того, чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь, тогда, значение нового фактора определяется знаками этого столбца.

4.10 Планы для построения полиномиальных моделей второго порядка

Полином второго порядка от n переменных имеет вид:

$$Y = b_0 + b_i X_i + b_{ii} X_i^2 + b_{ij} X_i X_j \tag{4.65}$$

Существует большое количество планов для построения данного вида регрессии, наиболее лучше из них представлены в Таблицах планов экспериментов [30] .

Все эти планы, помимо различий в свойствах, можно разделить на две большие группы: симметричные и несимметричные. К первым относятся те, у которых выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N} X_i X_j = 0 \tag{4.66}$$

Все остальные называются несимметричными.

Расчет коэффициентов регрессии для симметричных планов осуществляется по ковариационно-корреляционной матрице, которую в общем виде можно представить следующим образом:

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \left|\begin{array}{ccccccc} N^* & a^* & a^* & \dots & a^* & & \\ a^* & r^* & p^* & \dots & p^* & 0 & \\ a^* & p^* & p^* & \dots & r^* & & \\ & & & & a^{-1}E_n & & \\ & & 0 & & & p^{-1} & \\ & & & & & & \frac{E_n(n-1)}{2} \end{array}\right| \qquad (4.67)$$

где a^*; N^*; r^*; a^{-1}; p^{-1}; p^* - элементы матрицы.

Коэффициенты регрессии находят по упрощенной схеме:

$$B_0 = N^* \sum_{u=1}^{N} Y_u + a^* \sum_{i=1}^{n} \sum_{u=1}^{N} X_{ui}^2 Y_u$$

$$B_{ii} = a^* \sum_{n=1}^{N} Y_u + \left(r^* - p^*\right) \sum_{u=1}^{N} X_{ui}^2 Y_u + p^x \sum_{i=1}^{n} \sum_{u=1}^{N} X_{ui}^2 Y_u \qquad (4.68)$$

$$B_i = a^{-1} \sum X_{ui} Y_i \qquad B_{ij} = p^{-1} \sum_{u=1}^{N} X_{uj} X_{ui} Y_u$$

Коэффициенты регрессии несимметричных планов находят по матрице для расчета м.н.к.-оценок параметров моделей, которая в общем виде выглядит следующим образом и обозначается L (таблица 7).

Таблица 7 - Матрица для расчета м.н.к. - оценок параметров моделей

	Θ_0	Θ_{ii}	Θ_{jj}	Θ_i	Θ_j	Θ_{ij}	Θ_{kl}
Θ_0	Θ_{i0}	Θ_{0ii}	Θ_{0jj}	Θ_{0i}	Θ_{0j}	Θ_{0ij}	Θ_{0kl}
Θ_{ii}	Θ_{ii0}	Θ_{iiii}	Θ_{iijj}	Θ_{iii}	Θ_{iij}	Θ_{iiij}	Θ_{iikl}
Θ_{jj}	…	…	…	…	…	…	…
Θ_i							
Θ_j							
Θ_{ij}							

Коэффициенты регрессии вычисляются по формуле:

$$B_i = L \cdot У_u \qquad (4.69)$$

Это означает, что оценку каждого параметра получают как скалярное произведение соответствующей строки матрицы L на вектор наблюдений $У$, который в общем виде может быть представлен следующим образом (таблица 8):

Таблица 8 – План и результаты эксперимента

№ опыта	Факторы		У
	X_1	X_2	
1	+1	-1	$У_1$
2	-1	0	$У_2$
...	…	…	…
n	+1	0	$У_n$

Тогда, например, свободный член регрессии будет вычисляться следующим образом:

$$B_0=Θ_{00}У_1+Θ_{0ii}У_2+Θ_{0jj}У_3+Θ_{0i}У_4+Θ_{0j}У_5+Θ_{ij}У_6+Θ_{0ке}У_7+…+Θ_{0ке}У_n \quad (4.70)$$

Квадратичный коэффициент:

$$B_{ii}=Θ_{ii0}У_1+Θ_{iiii}У_2+Θ_{iijj}У_3+Θ_{iii}У_4+Θ_{iij}У_5+Θ_{iiij}У_6+…+Θ_{iiке}У_n \quad (4.71)$$

4.11 Регрессионный анализ модели

В результате реализации опытов матрицы планирования получают значения отклика для каждого опыта (строки матрицы плана). На первом этапе определяют дисперсию воспроизводимости, т.е. насколько велико рассеивание результатов экспериментов.

Определение дисперсии воспроизводимости. Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности, который оценивается ошибкой эксперимента ошибкой воспроизводимости. Эта ошибка определяется в результате проведения повторных параллельных опытов, для чего один и тот же опыт воспроизводится в одинаковых условиях несколько раз. По результатам n параллельных опытов определяется среднее арифметическое $\overline{У}$:

$$\overline{Y_u}=\left(Y_{1q}+Y_{2q}+...+Y_{nq}\right)/n=\sum Y_{uq}/n \quad (4.72)$$

где n- количество опытов в одной точке плана,

q - номер строки плана эксперимента,

$\overline{У}$ - среднее арифметическое значение результата эксперимента,

$У_n$ - экспериментальное значение функции.

Отклонение отдельных значений $У_{nq}$ от среднего $\overline{У}_n$ свидетельствует об изменчивости значений повторных опытов. Для измерения этой изменчивости используют дисперсию (S^2) и среднее квадратическое отклонение (S_n):

$$S_n^2 = \frac{\sum (У_{nq} - \overline{У_n})^2}{n-1} \qquad (4.73)$$

$$S_n = \sqrt{S_n^2} \qquad (4.74)$$

Выше изложенное относится к расчету дисперсии в отдельном опыте, т.е. в одной из строк матрицы планирования. Матрица плана состоит из серии опытов, и дисперсия всего эксперимента определяется с учетом дисперсии всех опытов плана, в которых проводились параллельные опыты. Дисперсия эксперимента называется дисперсией отклика $S^2(У)$ или дисперсией воспроизводимости $(S^2_{воспр})$.

Дисперсию воспроизводимости проще всего определить, когда во всех точках плана ставится одинаковое число повторных опытов n. Тогда дисперсия отклика рассчитывается как среднее арифметическое дисперсий отдельных опытов матрицы плана.

$$S^2(У) = \sum_{n=1}^{N} S_n^2 / N \qquad (4.75)$$

где N- число опытов матрицы.

Однако формула справедлива, если все дисперсии S_n^2 однородны, т.е. среди суммируемых дисперсий нет таких, которые бы существенно превышали все остальные. Проверка однородности дисперсий проводится по критерию Кохрена.

$$G_{расч} = S^2_{\max} / \sum_{n=1}^{N} S_n^2 \qquad (4.76)$$

где G - расчетное значение критерия Кохрена;

$S^2_{\max}$ - максимальное значение дисперсии;

N - количество точек в плане;

n - количество параллельных опытов в одной точке плана.

Табличное значение критерия Кохрена определяется при заданной доверительной вероятности α (обычно 0,05) и числе степеней свободы $f_1=n-1$ и $f_2=N$. Если расчетное значение критерия меньше табличного, то принимается гипотеза об однородности дисперсий. Если же $G_p>G_m$, то следует увеличить число параллельных опытов и добиться однородности дисперсий. Если никакими способами нельзя достигнуть воспроизводимости, то математические методы планирования к такому эксперименту применять нельзя.

Если число повторных опытов в различных точках плана неодинаково, то вычислительная процедура усложняется.

В некоторых случаях дисперсия отклика воспроизводимости определяется по n параллельным опытам, поставленным только в одной центральной точке плана и рассчитывается по формуле (4.74).

На втором этапе в соответствии с типом плана вычисляют коэффициенты регрессии и проводят регрессионный анализ полученной модели.

Регрессионный анализ включает в свою очередь три этапа:

- проверку значимости коэффициентов регрессии;
- проверку адекватности уравнения регрессии;
- проверку информационной способности уравнения регрессии.

Проверка значимости проводится для каждого коэффициента с помощью критического значения коэффициента $B_{i\ кр}$, ниже которого расчетные значения B_i целесообразно считать равными нулю. Прежде всего, необходимо найти дисперсию коэффициента регрессии $S^2\{B_i\}$. При использовании планов полного факторного эксперимента дисперсии всех коэффициентов равны и вычисляются по формуле:

$$S^2\{B_i\} = S^2\{У\} / N \qquad (4.77)$$

и при проведении n параллельных опытов во всех точках плана:

$$S^2\{B_i\} = S^2\{У\}/(N-n) \qquad (4.78)$$

Критическое значение коэффициента регрессии вычисляется по формуле:

$$B_{iкк} = t \cdot S_э \qquad (4.79)$$

где t- табличное значение критерия Стьюдента;

$S_э$- дисперсия опыта, равная

$$S_э = \sqrt{S^2\{в_i\}} \qquad (4.80)$$

Табличное значение критерия Стьюдента определяют при выбранном уровне значимости α (обычно 0,05) и числе степеней свободы, с которым определяли дисперсию $S^2\{У\}$ ($f=N-1$, если параллельные опыты не проводились, $f=N-(n-1)$ при постановке параллельных опытов). Если $/B_i/<B_{i\ кр}$, то коэффициент B_i считается незначимым, приравнивается к нулю, исключается из уравнения регрессии.

При использовании планов полиномиальных моделей критические значения коэффициентов определяют по формуле:

$$B_{iкк} = T_i\sqrt{S^2\{B_i\}} \cdot t \qquad (4.81)$$

где T_i- диагональные элементы ковариационно-корреляционной матрицы соответствующего плана [30].

Проверка адекватности и информационной ценности выполняется для уравнения, которое содержит только значимые коэффициенты регрессии. Для проверки адекватности модели, иначе говоря, полученного уравнения изучаемому процессу, вычисляется дисперсия неадекватности $S^2_{на}$. Дисперсия неадекватности характеризует отклонение расчетных значений отклика $\tilde{У}_и$ от экспериментальных $\overline{У}$:

$$S^2_{на} = SS_{на} / f_{на} = \sum (\tilde{У} - У_и)^2 / (N - B) \qquad (4.82)$$

где $SS_{на}$- сумма квадратов отклонений расчетных значений от средних экспериментальных $\overline{У}$,

B - число значимых коэффициентов в уравнении регрессии.

Полученное значение $S^2_{на}$ сравнивается с дисперсией эксперимента $S^2_э$, для чего формулируется нуль-гипотеза $H_o : \delta^2_э = \delta_{нд}$.

Проверка гипотезы проводится по *F-критерию* (критерию Фишера).

$$F_a = S^2_{на} / S^2_э \qquad (4.83)$$

Значение F_a сравнивается с $F_{табл.}$, принятым при $f_1=N-B$ и $f_2=f_э$, α обычно принимается 0,05. Если $F_a<F_{табл.}$, то гипотеза о равенстве дисперсий признается правдоподобной, и, следовательно, предсказываемые уравнением результаты по точности будут не хуже экспериментальных. Уравнение регрессии адекватно описывает результаты эксперимента. Если $F_a>F_{табл.}$, то гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, уравнение считается неадекватным и нуждается в доработке.

Для проверки информационной ценности уравнения формулируется гипотеза о равенстве общей дисперсии и дисперсии неадекватности $H_0 : \delta^2_{общ}\{У\} = \delta^2_{на}$, которая проверяется по F-критерию:

$$F_и = S^2_{общ}\{У\} / S^2_{на} \qquad (4.84)$$

Общая по эксперименту дисперсия $S^2_{общ}$ рассчитывается по формуле:

$$S^2_{общ}\{У\} = \sum (У_и - \overline{У})^2 / (N - 1) \qquad (4.85)$$

где $\overline{У}$ - общее среднее по всему эксперименту (плану).

Табличное значение *F-критерия* принимается при $f_1=N-1$, $f_2=f_{на}$ обычно $\alpha=0{,}05$. Если $F_и>F_{табл.}$, то гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, и, следовательно, полученная модель имеет информационную ценность. Если $F_и<F_{табл.}$, то такая модель не представляет информационной ценности.

Построение графического отклика модели. Для более полного получения информации о полученной модели необходимо построить ее графическое изображение.

В случае однофакторной модели это осуществляется довольно просто.

Для этого достаточно менять значения варьируемого фактора (X) в пределах заданного интервала, подставляя каждый раз в уравнение и вычисляя значения функций ($У$). Например, интервал изменения X от -1 до +1, следовательно, подставлять в уравнение можно следующие значения (X): -1; -0,5; 0; 0,5; 1 (подставляют только кодированные значения X). Затем строят график в координатах X-$У$ (рисунок 13).

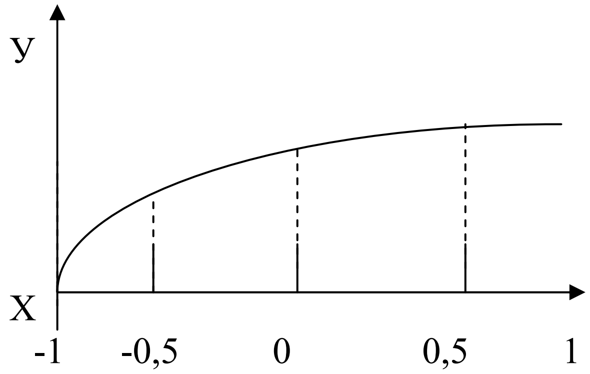


Рисунок 13 – Отклик однофакторной модели

Построение графического отклика многофакторной модели значительно сложнее. Графический отклик в этом случае называется изолиниями (если модель двухфакторная) и изображается в квадрате в координатах X_1-X_2; или изоповерхностями (если модель трехфакторная) и изображается в кубе в координатах X_1-X_2-X_3.

Если модель многофакторная, то ее необходимо упростить до двух или трех факторной. Для этого исследователь по-своему усмотрению стабилизирует на определенном уровне те факторы, которые влияют в наименьшей степени. Подставляя в уравнение их кодированные значения, получают выражение с двумя или тремя неизвестными.

Далее определяют значения $У$, для которых необходимо произвести построения. Как правило, для этого из экспериментальных данных определяют минимальное или максимальное значение $У$. Это будут границы интервала, в котором и выбираются любые значения $У$, для которых будут проводить построение, равномерно удаленные друг от друга. Иногда удобно строить графики для нужных марок бетона. Принцип выбора значения $У$ изображен на рисунке 14.

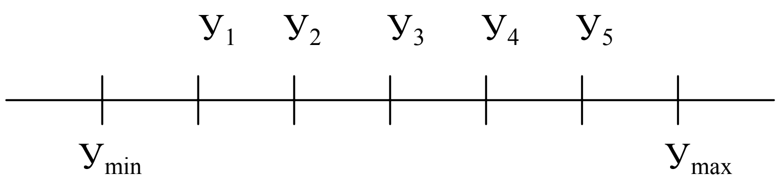
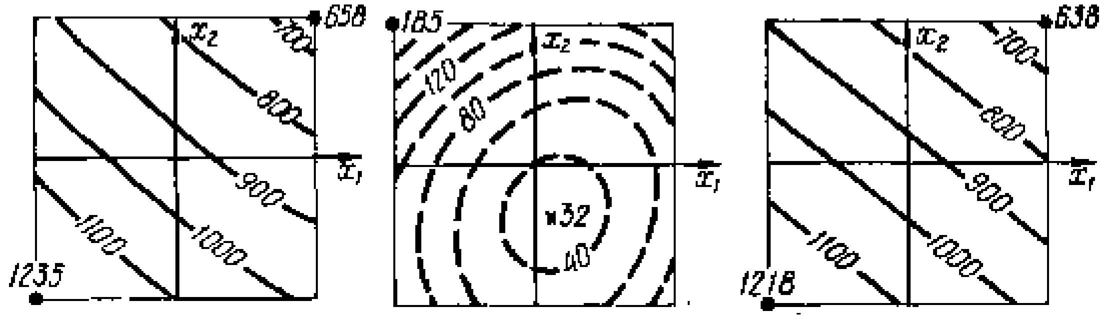


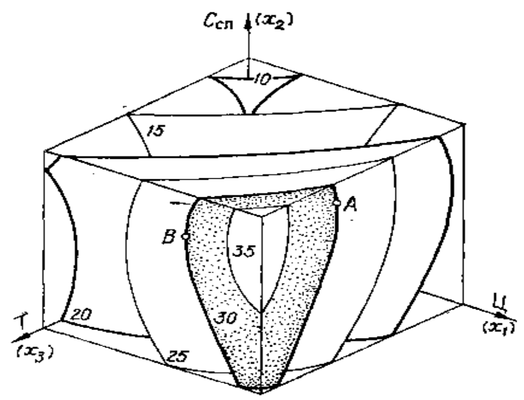
Рисунок 14 – Выбор значений функций для построения графика

Для построения изолиний необходимо, зафиксировав значения функции $У$ и $У_1$, поочередно менять значения фактора X_1 от -1 до +1, решая уравнение относительно X_2. Затем меняют X_2 - решая уравнение относительно X_1. Таким образом, будет построена изолиния $У_1$. Далее строят точно также изолинию $У_2$, затем $У_3$, и т.д.

Для построения изоповерхностей, прежде всего, фиксируют один из факторов на вертикальной оси. Затем строят изолинии на горизонтальных поверхностях куба. После чего соединяют точки на гранях куба, и получают изоповерхности $У_1$, $У_2$, $У_3$ и т.д. (рисунок 15).



а



б

Рисунок 15 – Примеры геометрических откликов математических моделей: а - геометрический отклик двухфакторной модели, на плоскости; б - геометрический отклик трёхфакторной модели, в кубе

4.12 Анализ математической модели

После построения математическими методами адекватной модели, имеющей информационную ценность, ее необходимо проанализировать.

В задачи анализа входит оценка влияния каждого фактора на отклик. Величина линейного коэффициента регрессии - количественная мера этого влияния, чем больше коэффициент, тем сильнее влияет фактор. Часто вклад фактора оценивается при переходе его с нижнего уровня на верхний. Вклад, определенный таким образом, равен удвоенному значению коэффициента и называется эффектом фактора. Учет вклада каждого фактора можно оценивать и по коэффициенту влияния:

$$A_i = B_i / \Delta x_i \qquad (4.86)$$

где A_i- коэффициент влияния;

B_i- коэффициент регрессии;

ΔX_i – изменение фактора.

О характере влияния факторов говорят знаки коэффициентов. Знак плюс свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора растет величина отклика, а при знаке минус - убывает. Изменение интервалов варьирования факторов приводит к изменению коэффициентов регрессии.

Коэффициенты взаимодействий оценивают влияние одного фактора в зависимости от уровня, на котором находится другой фактор. Знак плюс коэффициента B_{ij} указывает на то, что одновременное увеличение или уменьшение факторов X_i и X_j приводит к росту отклика. Если коэффициент взаимодействия имеет знак минус, то рост величины отклика обеспечивается в том случае, если один из факторов будет уменьшаться, а другой увеличиваться.

По полиномиальной модели можно решить следующие технико-экономические задачи.

Интерполяционные. Определение $\hat{y}$ внутри области $X_i = \pm 1$.

Экстраполяционные. Определение числовых значений $\hat{y}$ вне области эксперимента подстановкой $/X_i/ > 1$; при этом по мере удаления от границ $/X_i/ = 1$ будет резко увеличиваться ошибка предсказанного значения $\hat{y}$.

Максимизация выхода. Определение максимального значения функции в пределах эксперимента.

Минимизация выхода. Определение минимального значения функции в пределах эксперимента.

Управление при фиксированном $\hat{y} = const$. Если некоторым нормативом заданно требуемое значение $У_{тр}$, можно найти координаты. Значения координат за границами эксперимента не следует использовать.

Минимизация расхода ресурса при фиксированном $\hat{y}$. При анализе решения предыдущей задачи можно найти координаты, минимизирующие расход ресурса $X_{i\,min}$.

Управление выходом в заданной полосе $У_{\alpha тр} \le \hat{y} \le У_{\beta тр}$. Задача возникает в связи необходимостью обеспечить значение выхода системы в некоторых фиксированных пределах, например, вязкость технологической смеси и др. Решается уравнение для двух $У_{тр}$; ответ записывается в виде неравенств $X_{imm} \le X \le X_{jmm}$.

Оценка влияния фактора X_i. Описание влияния X_i на $\hat{y}$ ведется с использованием графиков и эффектов факторов, в некоторых случаях целесообразно проводить оценку по отношению $B_i/\ B_0$ $\quad B_{ii}/B_0$, которое указывает, насколько изменение фактора X_i влияет на среднее значение выхода $У$.

Если число моделей две и более, то могут быть решены компромиссные задачи, являющиеся важнейшими и наиболее сложными технико-экономическими задачами. По полиномиальным моделям для нескольких критериев оптимизации $У_i$ всегда можно найти зону оптимума, в которой лежат все оптимальные решения.

4.13 Решение оптимизационных задач

Большинство задач в строительном материаловедении и технологии, как и в любой практической деятельности, предполагает выбор решения из множества возможных вариантов. Оптимизация - определение наиболее целесообразного варианта решения, т. е. лучшего с точки зрения намеченной цели. Сравнение вариантов по отношению к цели осуществляется на основе критерия предпочтения - критерия оптимальности (эффективности, качества и др.).

В строительно-технологической практике содержание задач оптимизации может быть самым разным: организовывать поставку сырьевых материалов заводу железобетонных конструкций и вывоз готовых изделий таким образом, чтобы транспортные расходы были минимальны; обеспечить как можно более низкий процент брака при назначении параметров технологического процесса; снизить расход портландцемента при производстве изделий требуемого качества за счет использования добавок и наполнителей; определить соотношение между компонентами полимерной композиции, обеспечивающее максимальную прочность материала при изгибе, и т. д.

Решить содержательно разные задачи оптимизации позволяют общие математические методы. Для этого необходимо конкретную задачу сформулировать как математическую, т. е. описать в математических терминах оба обязательных элемента оптимизации - множество вариантов решений и критерий оптимальности, придавая, таким образом, количественные оценки возможным вариантам и количественную меру их «близости» к цели.

Решение задачи оптимизации первого вида- поиска экстремумов выхода сводится к поиску в пределах некоторой области экстремальных значений выхода системы $У^*$ - максимума $У_{max}$ с координатами X_{max} и (или) минимума $У_{min}$ с координатами X_{min}. К решению задачи могут быть привлечены любые методы оптимизации. В том случае, когда поведение системы описывается моделями в виде полиномов не выше второго порядка, целесообразно применять специфический диссоциативно-шаговый метод оптимизации, при котором полином разбивается на n-количество квазиоднофакторных моделей. Они анализируются (вернее их производные) и значения подставляются в общую модель.

В том случае, когда экономико-статистическая модель линейна по факторам, поиск оптимума вне области, как и в области эксперимента, можно вести по одной из модификаций градиентного метода: по методу крутого восхождения Бокса-Уилсона, или по методу наискорейшего спуска. Для того, чтобы от центра эксперимента (X_i=0) перейти в окрестность точки оптимума показателя качества $У_{opt}$, необходимо сделать ряд шагов по кратчайшему пути, т.е. по градиенту *ΔУ*. Для реализации такого движения следует изменять факторы $X_1 ... X_к$ пропорционально соответствующим коэффициентам линейной модели и в ту сторону, куда указывает знак коэффициента. На рисунке 16 изображена последовательность нахождения оптимума по методу крутого восхождения Бокса-Уилсона.

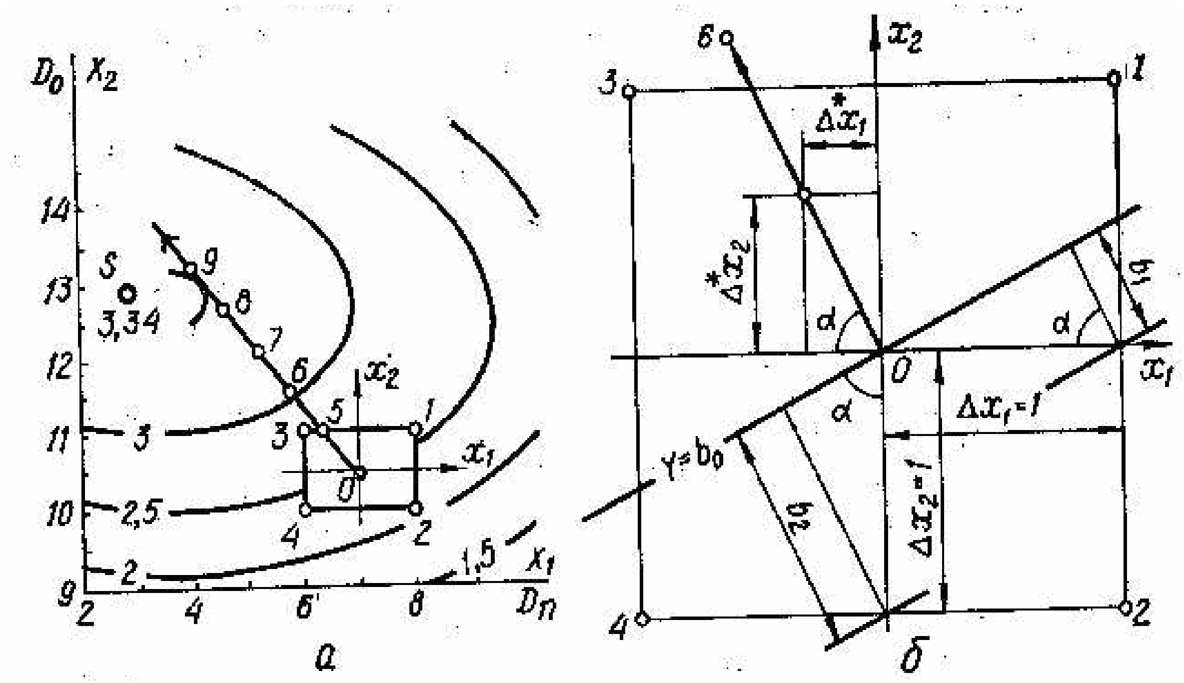


Рисунок 16 – Поиск оптимума по методу Бокса-Уилсона: *а* – общий выбор точек эксперимента; *б* – геометрические зависимости при формировании градиента

Решение с помощью полиномиальных моделей задач оптимизации второго вида - минимизация расхода ресурса. В практике анализа, проектирования и управления в области строительного материаловедения и технологии наиболее распространены оптимизационные задачи второго вида, когда необходимо достигнуть заданного уровня функционирования системы $У_{j\ тр.} = const$, израсходовав при этом минимальный ресурс X_j. При решении таких задач возникает ряд трудностей. К числу их относится тот факт, что нелинейное уравнение для определения уровня любого X_i соответствующего $У_{j\ тр.} = const$ получается в неявном виде:

$$(в_0 - Y_{jннор}) + в_i x_i + в_{ij} x_i x_j + в_{ii} x_i^2 = 0 \qquad (4.87)$$

При этом одному значению $У_{j\ тр.} = const$ соответствует не одна пара корней, а множество точек на изоповерхности второго порядка в *k*-мерном пространстве, на котором и нужно найти значение *X*, соответствующее минимуму расхода ресурса по одному из факторов. Эти трудности могут быть преодолены с помощью методов нелинейного программирования, а также при применении метода диссоциативно-шаговой оптимизации, направленной на пошаговое уменьшение размерности факторного пространства за счет стабилизации части факторов на оптимальных уровнях $X_{i\ opt}$.

Принятие инженерных решений по комплексу экспериментально-статистических моделей. В материаловедческих и технологических задачах поведение исследуемой системы характеризуется обычно группой критериев качества, координаты оптимума которых, как правило, не совпадают. В силу этого возникает новый круг проблемных вопросов, связанных с принятием компромиссных решений в многокритериальных инженерных задачах. Выбор компромиссного решения не может быть сделан без введения дополнительных правил. Размер группы критериев качества должен быть уменьшен за счет установления корреляционных связей между критериями и исключением тех из них, изменение которых допустимо оценивать по другим оставшимся критериям. Можно построить на основе единичных критериев некоторый интегральный критерий как функцию $V=f(Y_i\ \ldots Y_j\ \ldots Y_0)$ и для него искать экстремальные значения. Примером такого интегрального критерия является себестоимость единицы продукции. Можно с помощью квалифицированных экспериментов установить приоритет критериев, проранжировав их как $У^{(j)}$ по степени важности для состояния данной системы в целом. Компромиссная задача решается последовательно путем поиска области, удовлетворяющей требованиям по наиболее важному критерию, затем в этой области определяется подобласть, удовлетворяющая требованиям по второму критерию и т.д. Принцип приоритета весьма плодотворен - он применяется при построении интегральных критериев, в частности критерия желательности.

Для поиска компромиссных решений весьма удобно использовать оптимизацию диссоциативно-шаговым методом. Сначала для каждого из Θ критериев $У_э$ находится индивидуальные координаты оптимума $X\{Y_j\}$ в виде k-мерных векторов. Далее формируется матрица размером $k\times\Theta$, в которой Θ критериев размещаются ранжированно по приоритетам. В матрице выбирается и стабилизируется тот фактор X_i, уровни которого $X_i^*\{Y_j\}$ для всех или наиболее важных критериев совпадают. Таким образом, размерность факторного пространства сокращается на единицу, а результаты стабилизации фактора на общем уровне $X_{i\ общ}$ оцениваются по снижению уровня тех критериев, для которых $X_{i\ общ} \neq X_i^*\{Y\}$. Если результаты приемлемы для технолога, то процедура повторяется, начиная с поиска $(k\text{-}1)$-ый индивидуальной координаты оптимума.

Этот способ позволяет принимать компромиссные решения очень гибко, оценивая в инженерных терминах результаты каждого шага, и при необходимости возвращаться назад. После того как за R шагов размерность факторного пространства сокращена до $k\text{-}R\leq 3$, принятие компромиссных решений резко упрощается, поскольку появляется возможность графически отобразить любое количество изоповерхностей для Q показателей качества. На последнем этапе применяется комплекс двухфакторных диаграмм, каждая из которых может быть представлена семейством изолиний или таблицами с шагом квантования ΔX_i.

При классификации компромиссных задач по инженерным формулировкам наиболее распространенной оказывается задача о выборе рецептуры и технологических режимов получения материалов с комплексом свойств, отвечающих в общем случае двухсторонним нормативам.

$$Y_{jmm.\min} \le Y_j \le Y_{jmm.\max} \qquad (4.88)$$

В области сначала должна быть определена разрешенная подобласть Ω_{mp}, а затем в ней точка, удовлетворяющая требованиям экономии ресурсов или наибольшей устойчивости решения и колебаниям процесса.

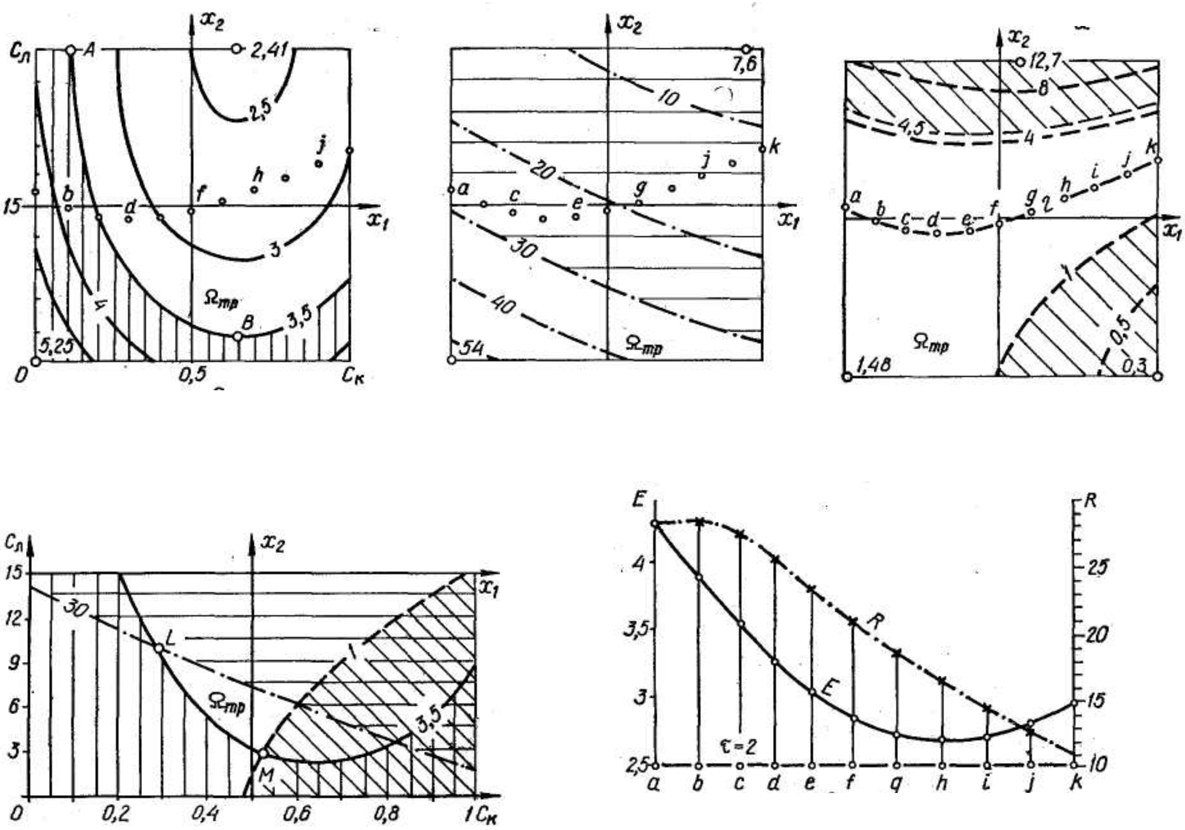
С помощью группы двухфакторных диаграмм можно решить ещё одну важную инженерную задачу, характерную для практики материаловедческих исследований.

В ряде случаев целесообразно анализировать поведение системы по некоторому *j*-му показателю качества при условии, что уровень другого её отклика постоянен - $У_j = const$ (без потери общности). Такой анализ назван изопараметрическим. Так, в технологии бетона уровни свойств затвердевшего материала нередко сравниваются между собой при условии постоянства такого косвенного реологического параметра, как подвижность бетонной смеси. Эти смеси называются равноподвижными, а в более общей терминологии - изореологическими. В технологии ячеистых бетонов их механические показатели сравниваются при одинаковой плотности или пористости материала и т.п.

Экспериментальное определение составов и технологии изготовления изопараметрических образцов весьма трудоемко, так как требуются предварительные опыты для достаточно точного попадания на заданный уровень свойства, например, на заданную вязкость смеси. В то же время использование комплекса экспериментально-статистических моделей позволяет решать такие задачи достаточно просто и легко.

По определению, на любой изолинии двухфакторной диаграммы уровень отклика системы постоянен - $У_j = f(x_1,x_2) = const$, а, следовательно, движение вдоль изолинии возможно только тогда, когда каждому изменению фактора x_2 соответствует функционально заданное изменение фактора $x_1 = \psi(x_2)$. Поскольку уровни факторов x_1 *и* x_2 вдоль изолинии $У_j = const$ изменяются, то это влечет за собой изменения *j* – го свойства материала. Анализируя эти изменения, можно получить новую материаловедческую и технологическую информацию. На рисунке 17 представлен порядок оптимизации с помощью группы двухфакторных диаграмм на примере анализа влияния состава композита на время отвердевания композита, модуль упругости и предел прочности. Как видно из рисунка сначала определяют область допустимых значений отдельно по каждому параметру, а затем проводится комплексный анализ сразу по всем трем свойствам.

Вышеизложенные методы решения компромиссных задач на двухфакторных диаграммах могут быть развиты на трехфакторные ситуации, рассматриваемые на объемных диаграммах. Это нередко оказывается необходимым в тех случаях, когда область допустимых решений слишком мала и, целесообразно искать возможности её расширения до заданного значения за счет изменения уровней третьего фактора.



E – модуль упругости, *R* – предел прочности, *τ* – время отвердевания композита по двухфакторным моделям; x_1 – концентрация кремнеорганической жидкости, x_2 – концентрация латекса

Рисунок 17 – Комплексный анализ свойств: *а* – изолинии *E* и область допустимых решений $E_{тр}$ < 3,5 МПа; *б* – изолинии *R* и область $R_{тр}$ > 30 МПа; *в* – изолинии *τ* и область 1<*τ*<4,5 ч; *г* – допустимая область $У_{тр}$ для всех трех свойств; *д* – изопараметрический анализ *E* и *R* при *τ* = 2 = const

4.14 Моделирование свойств смесей

Используемые для получения строительных материалов и изделий сырьевые материалы (вяжущие, заполнители и наполнители, химические добавки и т.п.) могут представлять собой смеси из q размерных веществ, минералов, зерен разной крупности и т.п. Их состав (рецептура) задается концентрациями компонентов в виде массовых, объемных или мольных долей (процентов) V_i, причем $0 \le V_i \le 1; \sum V_i = 1$ [34].

Системы, свойства которых зависят только от соотношения компонентов $V=(V_1, V_2, \ldots V_q)$ и не зависят от количества смеси, и от условий ее переработки и других факторов, называются системами “состав-свойства” или “смесь-свойства” и обозначаются *MQ* (от англ. mixture - смесь и quality - свойство, качество). Условие (выше) определяет рецептуру как систему с *q* линейно связанными элементами $в_i$, число степеней свободы которой равно *(q-1)*. Ее геометрическим аналогом является *(q-1)*-мерный правильный симплекс (простой), т.е. выпуклый многогранник, не имеющий диагональных сечений. Для двух компонентной системы это отрезок прямой, для $q = 3$-равносторонний треугольник, для $q = 4$ - тетраэдр. При изучении систем *MQ* факторы $X_i=V_i$ варьируются на симплексе. Зависимость *У(V)* может быть представлена как диаграмма “состав-свойства”. Каждому *j*-му составу смеси V_j, определяемому уровень свойства $У(V_j)$, соответствует точка симплекса: чистым веществам (или зернам одного размера, или порошку одного минерала) - вершины симплекса, двойным смесям - точки ребер, тройным системам - точки поля треугольника. Для любой точки *M* на треугольнике (рисунок 18) содержание *i*-го компонента $V_i = l_{iM}/l$ пропорционально расстоянию l_{iM} от *M* до стороны, противолежащей *i*-ой вершине:

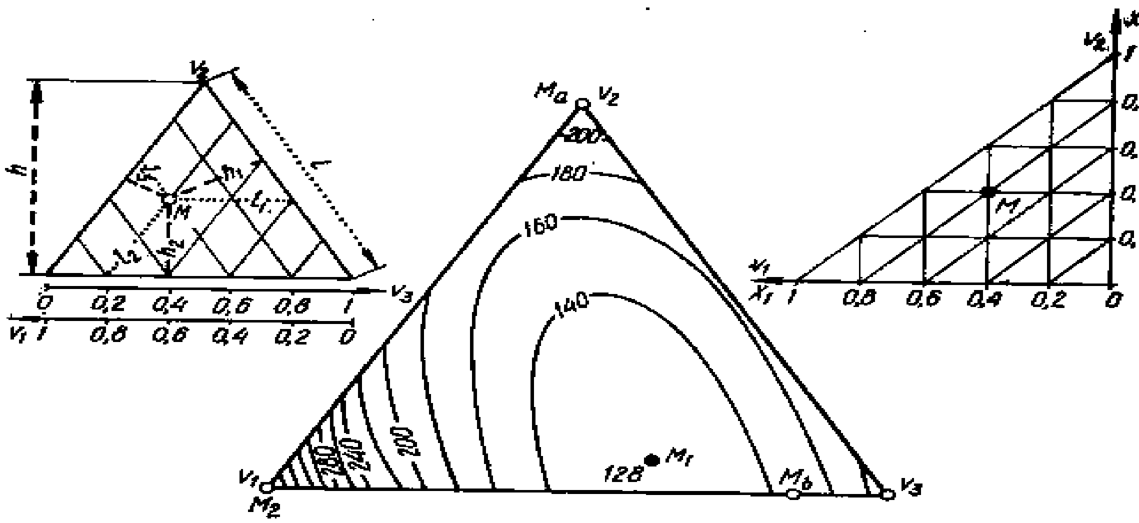


Рисунок 18 – Отображение на смесевом треугольнике: *а* – зернового состава заполнителя; *б* – зависимость эффективной вязкости композиции от состава наполнителя; *в* – аналог «*а*» при исключении третьего компонента X_2.

по перпендикуляру, если за единицу принята высота L_l или по прямой, параллельной стороне, если за единицу принята сторона *l*. Свойство *У* в зависимости от состава трехкомпонентной смеси представляют изолиниями в поле концентрационного треугольника.

При $q = 4$ возможно объемное изображение изоповерхностей свойства в теле тетраэдра, поверхность которого отображается разверткой из четырех треугольных диаграмм (рисунок 19). В связи с удобством графической интерпретации результатов моделирования треугольная диаграмма является основным информационным элементом при анализе многокомпонентных систем *MQ*. Поскольку технические свойства (в отличие, например, от температуры фазовых переходов стекол, шликеров, сплавов и т.п.) определяется, как правило, не только исходным составом смеси, но и условиями ее переработки в изделие, то при анализе этих свойств система и соответствующие диаграммы “состав-свойства” рассматриваются для фиксированных значений других рецептурно-технологических эксплуатационных факторов.

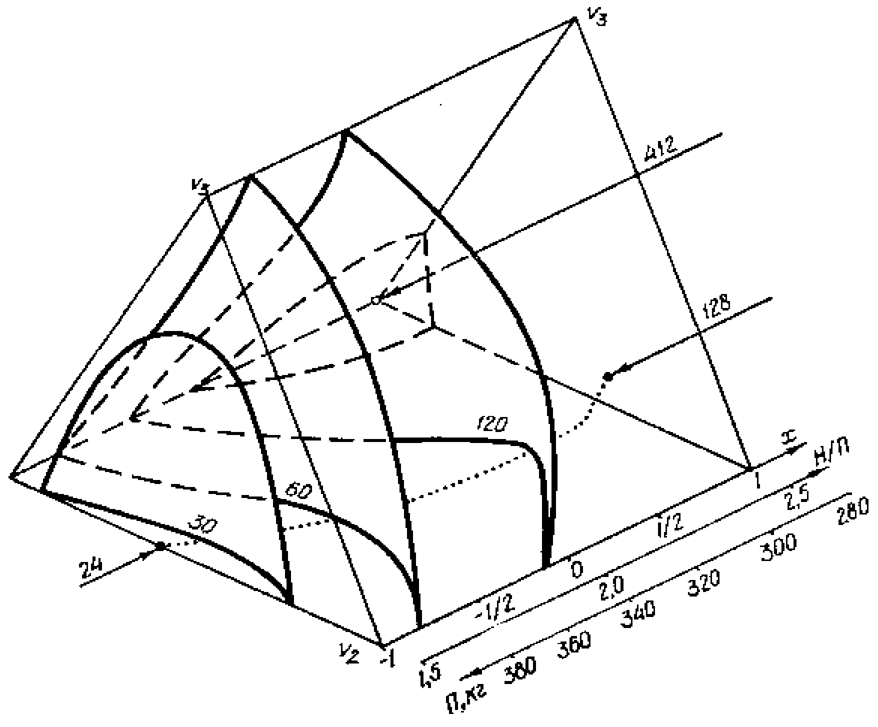


Рисунок 19 – Диаграмма «зерновой состав-вязкость» при разной степени наполнения

Построение и анализ диаграмм “состав-свойства” осуществляется на основе экономико-статистических моделей зависимостей свойств от состава смеси Полный полином степени m от q смесевых факторов V_i в системе MQ не может быть использован в качестве формы таких моделей: в силу линейной связи факторов члены такого полинома оказываются линейно зависимыми, т.е. не представляют систему базисных функций при разложении $У$ по C^m_{q+m} составляющим вектора $f^t(V)=(1, V_1, \dots, V_q, V_1V_2, \dots, V_1^2, \dots, V_{q1}^2 \dots)$.

Поскольку желательно, чтобы описание системы отражало воздействие на нее всех компонентов. В качестве моделей для системы MQ, как правило, используют предложенные Шефе приведенные полиномы с числом коэффициентов C^m_{q+m-1}. Такой полином второй степени для тройной системы получается из обычного полинома:

$$У = a_0+a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3+a_{12}V_1V_2+a_{13}V_1V_3+a_{23}V_2V_3+a_{11}V_1^2+a_{22}V_2^2+a_{33}V_3^2 \qquad (4.89)$$

после вытекающих подстановок:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_0V_1+a_0V_2+a_0V_3 \\
V_1^2 &= V_1-V_1V_2-V_1V_3 \\
V_2^2 &= V_2-V_1V_2-V_2V_3 \\
V_3^2 &= V_3-V_1V_3-V_2V_3
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

при обозначении $A_i = a_0+a_i+a_{ii} \qquad A_{ij}=a_{ij}-a_{ii}-a_{ij}$

получается приведенный полином

$$У = A_1V_1+A_2V_2+A_3V_3+A_{12}V_1V_2+A_{13}V_1V_3+A_{23}V_2V_3 \tag{4.91}$$

В котором 6 коэффициентов A заменяют 10 коэффициентов полинома. Аналогично записывается приведенный полином второй степени от q переменных.

$$У = \sum A_iV_i+\sum A_{ij}V_iV_j \tag{4.92}$$

Коэффициенты приведенных полиномов имеют физический смысл. A: равны величине $У$ (значению свойства) для "чистого" i-го компонента; нелинейную часть таких моделей называют синергизмом (содружество), i-ое смешивания компонентов вызывает увеличение отклика $(A_{ij}>0)$, или антагонизмом (борьба) при его уменьшении $(A_{ij}<0)$.

Совместное воздействие на технические свойства материалов смесевых (взаимозависимых) факторов V и взаимонезависимых факторов /X/<1 (параметры технологии и эксплуатации, относительное к количеству базового компонента содержание смеси и т.п.) можно оценить, анализируя изменения диаграмм "состав-свойство" под влиянием X_i. Передвигая диаграмму "V-Y" вдоль оси X_i в факторном пространстве и фиксируя ее в отдельных точках этой оси, можно проанализировать скачкообразные изменения изолиний $У(V) = const$ под влиянием этого фактора. При непрерывном перемещении диаграммы вдоль оси X_1 формируется треугольная призма, в которой изоповерхности свойства $У(V_1, V_2, V_3, X_1)=C_{mp}=const$ образованы соответствующими изолиниями $У(V_1, V_2, V_3)=C_{mp}=const$.

Отобразить графически изменение диаграммы "состав-свойство" под влиянием двух технологических факторов- X_1 и X_2 можно только дискретно: строятся и анализируются смесевые диаграммы $f(V)$ в фиксированных точках квадрата $\{X_1,X_2\}$, в частности в девяти точках - центроидах.

Возможно другое отображение - в 7 точках- центроидах треугольника (вершины, середины сторон и центр тяжести) строятся изменяющиеся от точки к точке квадратные диаграммы $У(X_1,X_2)$.

Системы, свойства которых определяются группой смесевых факторов $V= (V_1\ldots V_q)^t$ и группой технологических факторов $X = (X_1\ldots X_k)^t$, названы системами "смесь, технология-свойства" и обозначены MTQ (от англ. technology- технология).

4.15 Принципы имитационного моделирования

Любая модель в принципе имитационная, поскольку она имитирует (подражание) реальный объект. Однако сложились термины “имитационное моделирование” и ”имитационная модель”, которые характерны для вполне определенного класса действий с моделями объектов при решении инженерных, технико-экономических и других задач. Имитация в этом смысле - это анализ системы с помощью вариантных расчетов.

Имитационная модель воспроизводит процесс функционирования объекта во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени.

Имитационное моделирование является частным случаем цифрового моделирования. Аналитические методы описания и анализа функционирования сложных систем обычно не позволяют учесть особенности организационно-экономических систем, связанные с непрерывностью и дискретностью их элементов, с нелинейностью связи между характеристиками системы, с воздействием многочисленных внешних и внутренних случайных факторов. Для количественного анализа и решения задач строгого аналитического описания, используется имитационное моделирование. Имитационная модель не ставит целью получение точного решения задачи, но она и не связывает себя слишком жесткими математическими предписаниями. Она не решается в аналитическом смысле, а осуществляется именно проигрывание", "прогон" модели. Мощные электронно-вычислительные комплексы дают возможность проводить эксперименты, в которых экспериментатор со своей интуицией и "здравым смыслом" может постоянно контролировать решения изменять исходные предпосылки и логику решения, уточнять требования к выходным данным и т. д.

Имитационное моделирование имеет ряд преимуществ по сравнению с аналитическим: это возможность применять модели, адекватные реальным системам, неограниченно экспериментировать с моделью, внося различные допущения, фактор неопределенности и т.д. (напомним, что аналитическая оптимизация динамических вероятностных процессов наталкивается на очень большие трудности).

В то же время разработка и программирование для ЭВМ имитационных моделей сопряжены обычно с весьма большими затратами труда и времени. Ведь каждая имитационная модель по-своему уникальна, тогда как аналитические модели носят типовой характер, и для их решений на ЭВМ почти всегда можно воспользоваться готовыми прикладными программами, Поэтому, если реальная задача хорошо вписывается в аналитическую модель, то потребность в разработке имитационной модели отпадет. Имитационные модели могут применяться в самых различных областях: для исследования, принятия и проверки решений, полученных другими методами; построения и оценки альтернатив; расчета широкого диапазона прогнозов и оценок будущего состояния производственной системы; оценки долгосрочных последствий от принятого решения; формирования календарного расписания производственной деятельности с вероятностными сроками начала и окончания работ или этапов и т.д. Имитационные модели часто используются в "деловых играх". В этом случае модель, состоящая из большого числа математических уравнений, связывающих причины и следствия, позволяют определить последствия решений, принимаемых участниками игры. Таким образом, имитационный эксперимент - это воспроизведение с помощью ЭВМ модели функционирования некоторой реальной системы.

В технических объектах производится предварительная декомпозиция (de- от слова отмена и т.п.) процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы или подсистемы и для описания тех из них, для которых это возможно и целесообразно, используются функциональные зависимости - аналитические модели (уравнения математической физики, экспериментально-статистические и другие). Для остальных подпроцессов строятся алгоритмы, описывающие правила функционирования подсистем с той или иной степенью формализации.

Имитационная система может рассматриваться как машинный аналог сложного реального процесса. Эксперимент с реальным процессом функционирования системы заменяется машинным экспериментом с математической моделью в режиме имитации этого процесса в ЭВМ.

Имитационное моделирование на ЭВМ является эффективным (а нередко единственным) инструментом исследования и проектирования сложных систем, когда реальный эксперимент невозможен или нецелесообразен по различным причинам. К достоинствам имитационного моделирования, в частности, относится: возможность исследовать поведения объекта в любых условиях (естественно, в области действия модели); значительное сокращение продолжительности испытаний по сравнению с натуральным экспериментом; гибкость структуры модели и возможность замены ее элементов (моделей подсистем, алгоритмов, базы данных и пр.) в ходе экспериментов с целью поиска оптимального варианта, как имитационной модели, так и самой системы при ее проектировании.

К недостаткам имитационного моделирования относится то, что в результате машинной реализации всей цепи анализа системы будет получено частное численное решение, отвечающее фиксированным параметрам системы, уровням факторов, алгоритмам поведения и др. элементам структуры модели. Поэтому для анализа результатов процесса функционирования системы необходимо проводить имитационный эксперимент многократно, варьируя исходные условия каждой реализации. Это требует значительных затрат машинного времени на проведение имитационных экспериментов.

Одна из наиболее развитых областей применения имитационных моделей при решении инженерных задач - это исследование процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, методам статистического моделирования. При этом исходные условия каждой реализации задаются как случайные величины, закон распределения которых известен, а результаты множества таких реализаций, как выборочная совокупность числовых значений выхода системы. Для этой совокупности нужно найти статистические оценки неизвестного распределения (по тем же алгоритмам, которые применяются для обработки результатов натурного эксперимента) и сделать инженерные выводы о поведении системы.

Проведение имитационного эксперимента слагается из следующих этапов.

1. Описание явления или процесса, подлежащего моделированию.

2. Определение количественных характеристик, доступных наблюдению или измерению.

3. Проведение необходимых упрощений, выбор типа модели (т.е. создание собственно математической модели).

4. Перевод модели на язык ЭВМ - выбор языка программирования и создание программы.

5. Анализ результатов расчета. Сравнение с результатами натурного эксперимента или косвенными данными, имеющимися в распоряжении исследователя.

Модели принято подразделять на детерминированные и вероятностные.

Пример. Простейшим примером детерминированной модели может служить модель системы, описываемой дифференциальным уравнением или системой таких уравнений. Так, малые колебания маятника (точка массой m находится на конце стержня длиной l, другой конец которого закреплен так, что маятник в целом может отклоняться на угол θ) описываются дифференциальным уравнением

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\theta = 0 \qquad (4.93)$$

где t - время,

g - ускорение силы тяжести.

Примером такого же типа является широко известное описание распространения тепла в стержне с помощью уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} \qquad (4.94)$$

где T - температура,

x - координата точки стержня,

a - константа, определяемая свойствами материала.

Детерминированные модели описанного выше типа исследуются аналитически, если они достаточно просты, и с использованием ЭВМ, если вместо одного уравнения в описании модели фигурируют, например, системы большого числа уравнений и искомые функции зависят от большого числа переменных. Имитационный эксперимент с помощью ЭВМ состоит для таких моделей в численном решении соответствующих уравнений. При этом, как правило, требуется замена исходной системы уравнений разностной системой или другая дискретизация, что вносит дополнительную погрешность, обусловленную не существом задачи, а выбором численного метода.

Примерами вероятностных моделей могут служить, в первую очередь, системы массового обслуживания (СМО). Такие системы часто невозможно исследовать другими способами, кроме имитационного моделирования. Простейшие СМО характеризуются:

а) случайным потоком заявок. Заявки поступают в случайные моменты времени (которые образуют скачкообразный процесс);

б) случайным временем обслуживания. Каждая заявка либо застает обслуживающее устройство свободным и немедленно начинает обслуживаться, либо становится в очередь. Либо время обслуживания, либо интервалы между поступлениями заявок могут быть детерминированы, но, когда детерминированы и время, и интервалы, задача не представляет интереса.

ЭВМ снабжены датчиками случайных чисел. С помощью известных приемов, описанных в руководствах по статистическому моделированию, по одной или некоторому множеству реализаций равномерно распределенной случайной величины могут быть получены реализации случайной величины или случайного вектора с заданными законами распределения.

Все это позволяет строить имитационную модель случайного процесса, протекающего в СМО, наблюдая изменения ее состояний во времени.

Пример - имитационная модель размещения туристов в гостинице. При проектировании современных туристических комплексов важно заранее предвидеть узкие места в обслуживании. С этой целью предварительно моделируют процесс обслуживания. При моделировании размещения туристов в реальной или проектируемой гостинице необходимо задать:

- закон, по которому прибывают туристы, и интервалы времени между прибытием отдельных туристов или групп. Обычно такой закон задают, исходя из статистической обработки реальных потоков туристов. Он зависит от вида транспорта и расписания прибытия поездов, самолетов и т. п.;
- распределение вероятностей категорий туристов (иностранные туристы, правительственные делегации, крупные группы и т. п.);
- количество свободных мест в гостинице в начальный момент времени;
- время оформления туриста, которое зависит от категории туриста и ряда других факторов.

Модель может быть более или менее подробной. Обычно в ЭВМ хранятся сведения о туристах, размещенных и находящихся в процессе размещения в определенные моменты времени (например, каждые 20 мин.). Каждую количественную характеристику модели можно рассматривать как случайный процесс и применять для обработки данных методы, разработанные в статистике случайных процессов. Моделирование, подобное описанному, применяется для решения вопросов о числе мест в проектируемой гостинице, числе лифтов, размере холла, численности персонала и т. п.

Существенно менее разработанной является теория планирования имитационного эксперимента. Имитационный эксперимент предоставляет больше возможностей для планирования, чем натурный, так как при имитационном эксперименте распределения случайных величин находятся в распоряжении экспериментатора, а при натурном даются природой.

Отсюда следует, прежде всего, что все методы планирования эксперимента, разработанные для натурного эксперимента, могут быть использованы и в имитационном эксперименте.

Известные методы планирования подразделяются на общие методы и методы, специфические для марковских моделей [13].

Как и в общем случае, непосредственной целью планирования имитационного эксперимента является минимизация затрат. Если результатом экспериментирования является одно число - оценка математического ожидания моделируемой случайной величины ξ по N ее независимым реализациям, то затраты на проведение имитационного эксперимента (трудоемкость) определяются величиной $tD\xi$, где t - среднее время ЭВМ, необходимое для получения одной реализации ξ.

Далее рассматриваются наиболее простые и распространенные методы планирования имитационных экспериментов.

Метод зависимых испытаний. Пусть модель зависит от некоторого числового параметра x, а в результате моделирования на ЭВМ мы получаем реализацию случайного процесса $\xi(x, \omega)$, где $\omega = \omega\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_l})$; через α_1, α_2, ... здесь и далее обозначены псевдослучайные числа, получаемые последовательно с помощью программного датчика. При изучении зависимости модели от параметра x планирование состоит в том, что моделирование при разных значениях X производится по одной и той же последовательности случайных чисел.

Так, вычисления $\xi(x_0, \omega)$ и $\xi(x_0+h,\omega)$ по одной и той же последовательности случайных чисел ω дают возможность оценить разность $E[\xi(x_0+h,\omega) - \xi(x_0+\omega)]$ с большей точностью, чем при вычислении $\xi(x_0+h,\omega)$ и $\xi(x_0,\omega')$ где ω и ω' независимы. Это необходимо иметь в виду при проведении имитационных экспериментов с целью оптимизации.

Метод противоположной переменной. Как правило, целью моделирования является оценка некоторых средних характеристик модели. Отображение $\omega = \omega\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_l})$ сводит (по крайней мере, теоретически) задачу к задаче оценивания интеграла по единичному гиперкубу. Размерность гиперкуба заранее неизвестна. Тем не менее, можно применять квадратурные формулы со случайными узлами, которые нечувствительны к размерности интеграла.

Так, например, наряду с реализацией случайного процесса $\xi\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_l})$ можно использовать $\xi(1 - \alpha_1,\ 1 - \alpha_2,\ 1 - \alpha_N)$. Процесс $½[\xi((\alpha_1, \ldots, \alpha_N) + \xi(1 - \alpha_1, \ldots, 1 - \alpha_N)]$ будет иметь те же средние характеристики, но с меньшими дисперсиями. Известны более сложные квадратурные формулы, применяемые для аналогичных целей.

Расщепление и рулетка. Этот общий прием уместно пояснить на простейшем примере системы массового обслуживания с одним прибором. Пусть в систему через случайные промежутки времени поступают заявки, которые ставятся в очередь, если имеются заявки, уже находящиеся в очереди или в процессе обслуживания. Если очереди нет и прибор свободен, то заявка немедленно поступает на обслуживание. Состояние системы обычно характеризуют числом n заявок, находящихся в системе в данный момент. Моделирование состоит в прослеживании изменений числа n. Интерес представляют вероятности $p_n(t)$ того, что в системе в момент времени t находится n требований. Если для системы существует стационарный режим, то существует предел $p_n = \lim_{t \to \infty} p_n(t)$. Если заявки поступают редко и обслуживаются быстро, то p_n при большом n—величина малая, и оценить ее трудно (большого числа заявок в системе практически не бывает).

В этих случаях можно поступать так. Разделим время функционирования системы на отрезки длины T и зададимся некоторыми $n = N$ и m. Если k_0 — первое значение такое, что по истечении времени k_0T число требований в системе превзойдет N, то с этого момента времени будем рассматривать m идентичных систем, снабжая все характеристики «весом» по $1/m$ каждую. Некоторый момент времени k_1T окажется опять таким, что число требований, хотя бы в одной из систем, будет $2N$ ($k_1 > k$). Эту систему мы опять делим на m (или какое-нибудь другое число m_1) систем, домножая ее характеристики на $1/m$. Этот прием и носит название «расщепление». При этом выделяются перспективные для нас системы.

Очевидно, что при таком расщеплении накапливается с течением времени много систем, для нас неперспективных. Среди них проводится «лотерея». «Выигравшая» система сохраняется, и ей приписывается вес, равный суммарному весу всех участвовавших в лотерее систем. Это и есть «рулетка».

Методика выбора параметров расщепления и рулетки и составляет задачу планирования эксперимента, которая изучена недостаточно.

Перечисленные методы применимы при моделировании широкого класса систем. Во всяком случае, все агрегативные системы могут моделироваться с их использованием.

В основе статистического моделирования лежит универсальный численный метод решения математических задач при моделировании случайных величин- метод Монте-Карло.

Метод Монте-Карло дал интересные и полезные инженерные результаты при использовании в режиме имитации моделей заполнения объема материала зернами разных размеров и форм, при моделировании деформации и прочности бетона методами механики разрушения, при исследовании проницаемости бетона, при анализе однородности смешивания технологических смесей и в ряде других материаловедческих и технологических задач.

При анализе «n» результатов натурального эксперимента в одной точке k-факторного пространства предполагается, что все эти k исследуемых рецептурно-технологических факторов имеют неизменные уровни и именно эта стабильность определяет центр их группирования - среднее значение выхода системы $\tilde{Y}$. В то же время рассеяние результатов в некотором интервале $\{Y_{V(min)}\ Y_{v(max)}\}$ обуславливается неконтролируемым действием случайных факторов ξ; оно оценивается среднеквадратическим отклонением $S\{\tilde{Y}\}$, которое приравнивается к ошибке эксперимента $S_э$.

Новое среднее значение выхода системы $\tilde{Y}$ при переходе ее в другую точку факторного пространства, как известно, достаточно просто предсказывается по экспериментально-статистической модели. Можно оценить ошибку предсказания $S\{\hat{Y}\}$, связанную с постоянной в данной области ошибкой эксперимента $S_э$ и с мерой точности модели d, зависящей от свойств плана эксперимента и от координат точки предсказания.

Однако, ни ошибка эксперимента $S_э$, ни ошибка предсказания $S\{\hat{Y}\}$ не могут охарактеризовать устойчивость выхода системы Y к неизбежным колебаниям во времени тех k факторов X_i, которые и в натурном эксперименте, и при прогнозе Y по модели принимались фиксированными $(X_i=const\ (i = \overline{1,R}))$. Эти колебания факторов во времени $X_i(\tau_\varepsilon)$ приведут к дополнительному рассеянию значений Y; при этом рецептурно-технологическое решение $(X_i=const)$ следует считать неустойчивым, если малым колебаниям $X_i(\tau_\varepsilon)$ будет соответствовать большое рассеяние Y_ε, оцениваемое среднеквадратичным отклонением $S\{Y_\varepsilon\}$, коэффициентом вариации $\upsilon\{Y_\varepsilon\}$ и т.п. При сравнении двух рецептурно-технологических решений A и B, обеспечивающих равные средние значения выхода $Y^{(A)}=Y^{(B)}$, предпочтительнее то, которое имеет большую устойчивость (меньшее $S\{Y_\varepsilon\}$ и т.п.).

Решение проблемы устойчивости при натурном эксперименте с системой весьма трудоемко и требует специального планирования эксперимента, основанного на многомерном дисперсионном анализе. Поэтому разработана ориентированная на машинный эксперимент методика, согласно которой:

на первом этапе строится экспериментально-статистическая k-факторная модель поведения системы;

на втором этапе независимо анализируются закономерности распределения случайных значений уровней факторов $X_{i\varepsilon}$, характерных для данного производства;

на третьем этапе генерируются в ЭВМ случайные числа для имитации в соответствии с результатами второго этапа случайных колебаний факторов $X_{i\varepsilon}$ вокруг выбранного рецептурно-технологического решения $(X_i=const)$;

на четвертом этапе методом Монте-Карло по модели «проигрываются» и реализацией, соответствующих случайным уровням k факторов, т.е. n раз производится расчет $\tilde{Y}$;

на пятом этапе по алгоритмам, применяемым при статистическом анализе результатов натурного эксперимента в одной точке, оцениваются статистические характеристики генерированной в ходе реализации метода Монте-Карло выборочной совокупности $\tilde{Y}$ и рассчитывается критерий устойчивости рецептурно-технологического решения.

При имитационном моделировании вообще, а при реализации метода Монте-Карло на экспериментально-статистических моделях в частности, целесообразно применять все идеи и методы математической теории эксперимента, что позволяет резко уменьшить число вариантов, а в ряде задач получить простые полиномиальные описания сложных вероятностных ситуаций. При планировании имитационного эксперимента в качестве переменных могут выступать не только рецептурно-технологические факторы, изменяющие координаты точек X_i, но и характеристики диапазонов ω_i варьирования случайных величин p_i, а также сами законы распределения $f(P_i)$ этих величин.

Опыт решения задач анализа устойчивости рецептурно-технологических решений методом Монте-Карло показывает эффективность и полезность такого подхода, однако его методическое и программное обеспечение пока далеки от совершенства.

Метод Монте-Карло широко применяют при моделировании структуры и свойств композиционных материалов. Реальные искусственные строительные материалы неоднородны по структуре. Так, бетоны на уровне макроструктуры состоят из зерен крупного заполнителя (щебня) разного размера и формы и цементно-песчаной матрицы. Характерный дефект структуры – трещины на границе раздела матрицы и заполнителя, в частности, из-за седиментационных явлений при твердении бетона. На следующем уровне (называемом мезоструктурой) легко обнаруживается, что цементно-песчаная матрица неоднородна – она состоит из зерен крупнодисперсионного наполнителя (песка) и матрицы из цементного камня, в которой распределены некоторые дефекты в виде трещин и крупных пор.

На уровне микроструктуры сама по себе цементная матрица также неоднородна – она состоит из затвердевшего цементного геля с твердыми включениями в виде зерен цементного клинкера и тонкомолотого наполнителя. Характерные элементы структуры на этом уровне – поры различной конфигурации и технологические трещины. В зависимости от цели исследования в структуре реальных материалов могут быть выявлены как иные уровни, так и иные структурные элементы.

Проблема моделирования структуры и ее влияния на свойства материала является одной из самых актуальных в материаловедении, однако она пока находится в начальной стадии разрешения. Целесообразно выделить несколько базовых задач в этой проблеме. Во-первых, в структуре должны быть выявлены характерные элементы, которым придается идеализированная геометрическая форма (сфероиды, цилиндры и т.п.) с заданным законом распределения размеров и которые наделяются комплексом свойств (плотностью, модулем упругости, проводимостью и т.п.) с уровнями, распределенными по известным законам. Во-вторых, структурные элементы должны быть «расставлены» в пространстве (ограниченная плоскость, куб. сфера, изделие сложной конфигурации

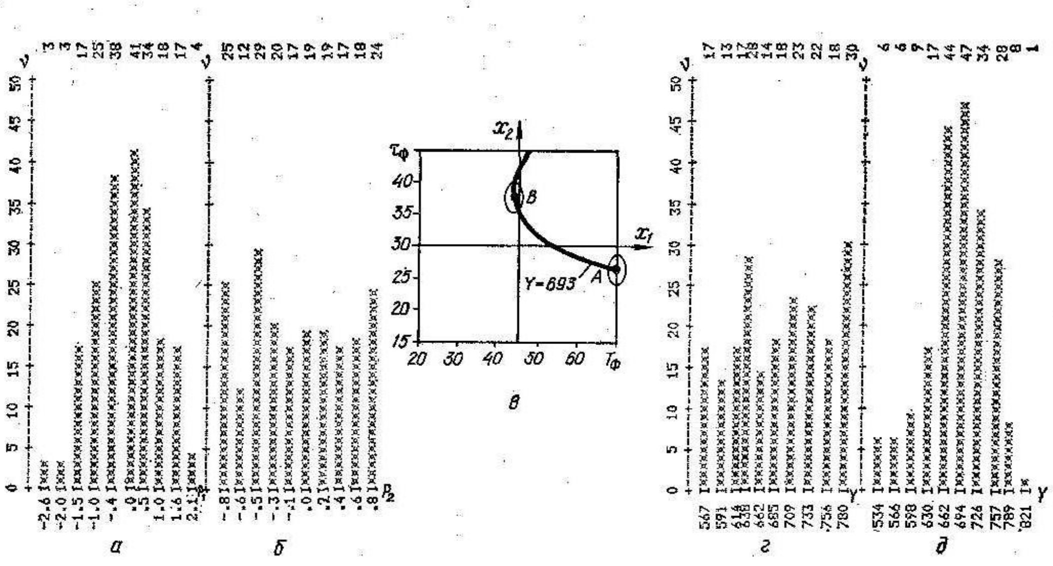


Рисунок 20 – Анализ устойчивости технологических решений (точки А и В) с помощью метода Монте-Карло: *а* – гистограмма генерированных случайных величин для имитации колебаний $T_ф$; *б* – то же для $\tau_ф$; *в* – положение сравниваемых решений *A* и *B* на изолинии *Y=693*; *г* – гистограмма результирующих колебаний *Y* в точке *A*; *д* – то же, в точке *B*.

и т.п.) по некоторым правилам, в число которых входит случайное расположение i-го элемента в незанятой другими элементами области. В-третьих, должны быть установлены закономерности взаимодействия элементов структуры (как между собой, так и со средой, внешней по отношению к материалу) при изменении напряжений и деформаций, при тепломассообмене и пр. В-четвертых, необходимо составить алгоритмы пошагового изменения структурных элементов и характеров взаимосвязей между ними при пошаговом изменении внешней среды. Все эти задачи, особенно третьей и четвертой групп, очень сложны и пока, вообще говоря, еще не сформулированы достаточно полно и конкретно.

Некоторые представления, связанные с моделированием структуры, поясняются на рисунке 21.

В плоский контейнер размером *A*A* (без потери общности *A=1*), у которого левая стенка и дно совпадают с осями координат, в случайном порядке «упаковываются» элементы структуры.

Для круглого зерна *1* (пора, наполнитель и т.п.) задаются три случайных числа, которые определяют случайный выбор одного из возможных радиусов $R^{(1)}$, расстояние центра зерна от левой стенки $x_1^{(1)}$ и от дна $x_2^{(1)}$. Поскольку контейнер пока пустой, то все эти числа запоминаются. Следующее зерно 2 считается неупакованным и не запоминается, поскольку оно пересеклось со стенкой (нарушено условие $R^{(2)} \le x_i^{(2)} \le 1 - R^{(2)}$. Зерно 3 укладывается в контейнер, так как оно попало на пустое место (выполнено условие

$\left|x_i^{(3)} - x_i^{(1)}\right| \geq R^{(1)} + R^{(3)}$, а вот информация о зерне 4 не запоминается, так как оно пересекает уже уложенное зерно 1. Повторяя процедуру n раз, можно «заполнить» контейнер, промоделировав случайную укладку зерен, радиусы которых подчиняются заданному закону распределения, и тем самым оценить, в частности, пустотность (пористость, проницаемость и т.п.) материала. Следует отметить, что существуют алгоритмы, «сдвигающие» зерно, попавшее на занятое место, до тех пор, пока оно не упакуется. Кроме того, у каждого зерна 1, 2, 3, … может быть свой случайно распределенный или связанный с размером зерна уровень физического свойства (модуль упругости, электропроводность, плотность), что расширяет круг решаемых с помощью такого «контейнера» инженерных задач.

Структурные элементы могут иметь форму, отличную от сферической. Для фиксации прямоугольника 5 (кристалл, волокно и т.п.) кроме координат центра x_i нужно задать еще три случайные величины: размер одной из сторон l, соотношение между сторонами $l{:}b$, угол наклона φ к оси координат. Для фиксации многоугольника 6 (крупный заполнитель и т.п.) дополнительно задаются радиус описанной окружности $R^{(6)}$ и n координат (четыре угла φ_i) его вершин.

Важнейшими структурными элементами, особенно в задачах моделирования деформации и прочности материалов методом механики разрушения, являются дефекты – трещины в матрицах разного структурного уровня. Трещины на контактах матрицы и включения (зерно 7 на рисунке 21, *а*) распределяются в случайном порядке сначала по зернам, а потом на одну из граней выбранного зерна.

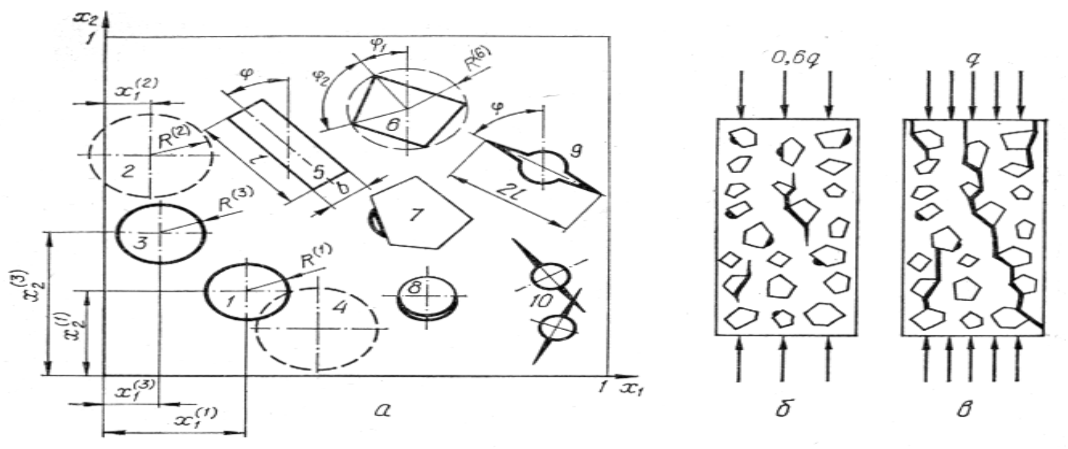


Рисунок 21 - Имитация структуры материала: а – упаковка контейнера элементами структуры; б , в – изменения в структуре при изменении внешней нагрузки

Если имитируются трещины, возникающие от седиментационного расслоения смеси, то они располагаются всегда на нижней части зерна (8 на рисунке 21, *а*). Трещины около отверстий (пор) моделируются структурным элементом 9, для которого обычно задается случайный угол наклона φ, а также, при необходимости, случайные радиусы пор R и длина трещины l. Допустимо такое расположение двух пор, при котором трещины пересекаются (элемент 10 на рисунке 21, *а*), образуя непрерывную слившуюся трещину.

В зависимости от постановки задач моделирования структуры и свойств композиционных материалов могут быть распределены и другие элементы: ленты разной длины и конфигурации, каналы с узлами запирания, сети и т.п., а сам контейнер может быть объемным.

Алгоритм, описывающий закономерности поведения структуры при изменении условий внешней среды, строится, как правило, прежде всего, как пошаговый процесс поведения каждого типа элементов структуры (с учетом возможного взаимодействия с контактирующими соседними элементами). Поскольку единичный элемент достаточно сильно упрощен, то для описания происходящих с ним изменений построить математическую модель не так сложно, как для структуры в целом. При этом можно использовать любые модели, но наиболее удачными, как правило, являются модели концептуальные, в которых четко прослеживаются физические особенности процесса. Например, пора 1 в нагруженном материале описывается формулами технической механики как круговой концентратор напряжений. После того, как пиковые напряжения превысят некоторый уровень, и появится радиальная трещина, произойдет переход к другим формулам технической механики, описывающим деформации элемента 9. Когда длина трещины значительно превысит радиус отверстия или две соседние трещины сольются в элемент 10, то для описания процесса деформации потребуется третий комплекс формул (таблиц, графиков и т.п.).

После того, как произошедшие со всеми индивидуальными элементами изменения зафиксированы в машине, они могут быть тем или иным образом интегрированы (или усреднены, или представлены мажорантами и т.п.) и переданы для обсуждения оператору-исследователю. Если после данного шага никаких существенных перемен (границы которых заранее определены исследователем) не произошло, то будет автоматически совершен следующий шаг в изменении условий внешней среды и так последовательно (рисунке 21, *б, в*) до наступления критического состояния в структуре (разрушение, электрический пробой, сквозной проход жидкости и др.). Уровень влияния внешней среды (нагрузка, электрическое напряжение, давление жидкости и др.), при котором достигается критическое состояние, а также общий характер процесса поведения материала при воздействии внешней среды сравниваются с результатами натурального эксперимента. На основе такого сравнения и принимается решение об адекватности модели.

Преимущества вышеизложенного принципиально нового подхода к анализу структуры и свойств композиционных материалов очевидны. Необходимо подчеркнуть две особенности такого моделирования: во-первых, на любом этапе исследования в связи с появлением более сильных физических гипотез или точных формул можно некоторую часть имитационной модели заменить; во-вторых, в ходе реализаций статических испытаний можно выявить те сочетания структуры элементов и влияния внешней среды, при которых моделируемое явление идет по неизвестному направлению, что открывает возможности целенаправленного создания новых материалов и технологий [7].

4.16 Решение рецептурно-технологических задач на ЭВМ в режиме диалога

При решении задач численными методами инженер-технолог взаимодействует с компьютером, оснащенным программным обеспечением. Программное обеспечение составляют:

1) программы, реализующие разные численные методы;

2) управляющие программы (операционные системы и специальные проблемно-ориентированные программные средства, разработанные для решения определенного класса задач), которые организуют вычислительный процесс и обеспечивают взаимодействие специалиста и компьютера.

Это взаимодействие осуществляется в одном из двух режимов.

В пакетном режиме пользователь заранее определяет последовательность применяемых методов, задает их параметры, все исходные данные задачи, вводит эту информацию в машину (в пакете задания) и по завершению всех заданных расчетов получает конечные результаты. После их анализа при необходимости уточнить результат или изменить отдельные исходные данные снова выполняется полный расчет.

В режиме диалога (в интерактивном режиме) пользователь и компьютер задают друг другу вопросы и получают ответы. При этом алгоритм решения задачи может быть построен по сложной многоветвевой схеме, в которой переходы на ту или иную ветвь не заданы жесткой логикой, а выбираются в ходе диалога человеком. Это делает процесс решения инженерных задач более гибким и полным, позволяя учесть неформализованную информацию. Алгоритм может уточняться и пересматриваться в ходе выполнения в зависимости от текущих результатов. Если при пакетном режиме работы с машиной управление вычислительным процессом осуществляется статически, то в режиме диалога этот процесс становится динамическим на основе оперативного обмена информацией через дисплей.

Диалоговая система программ для решения рецептурно-технологических задач должна быть оснащена средствами, позволяющими в интерактивном режиме осуществлять управление алгоритмами, данными, специальными подсистемами анализа решений. Управление алгоритмами предполагает: возможность изменения алгоритма поиска оптимума (например, смена покоординатного спуска на градиентный в тупиковой точке); изменение процедур расчета отдельных характеристик (в частности, замену расчета среднего на оценку медианы); замену условий остановке при поиске оптимального решения или корня управления и т.п. Управление данными предполагает, в частности, изменение отдельных входных экспериментальных данных уточненными, добавление новых данных, замену точек плана имитационного эксперимента и параметров генерируемых распределенных случайных величин, увеличение или снижение точности при поиске оптимума, изменение нормативных значений параметров и т.п. Специальные подсистемы в режиме диалога должны обеспечить возможность: анализировать окрестности оптимума с помощью представления на экране дисплея изолиний критерия оптимальности с учетом ошибок модели; выделять и варьировать ограничения для определенных путей улучшения рецептурно-технологических решений; использовать результаты в виде удобных таблиц и графиков и т.д.

Наиболее рациональной для решения рецептурно-технологических задач на компьютере представлена система программ, которая включает: богатую и пополняемую библиотеку функциональных программных модулей, реализующих разные численные методы; обеспечивающие программные средства, позволяющие работать на компьютере и в диалоговом режиме на удобном для пользователей языке и с использованием автоматизированных пакетов программ в тех случаях, когда знания и участие технолога не могут быть использованы в вычислительном процессе.

Следует еще раз подчеркнуть, что выбор того или иного численного метода для поиска приближенного решения зависит, в частности, от двух взаимосвязанных (но не взаимозаменяемых!) причин – от класса математических моделей, описывающих инженерную ситуацию с известной полнотой и заданной точностью и от возможностей, используемых для реализации вычислительной процедуры (включая программное обеспечение). Диапазон методов при этом весьма велик – от простейших аналитических расчетов на микрокалькуляторах до вычислительного эксперимента.

5 Основные виды задач, решаемых при организации, планировании и управлении строительством

5.1 Математические модели некоторых задач в строительстве

Роль технико-экономических расчетов для анализа и прогнозирования деятельности, планирования и управления строительными системами значительна, причем узловыми среди них являются вопросы выбора оптимизации решений. При этом решение представляет собой выбор параметров, характеризующих организацию определенного мероприятия, причем выбор почти полностью зависит от лица, принимающего решение [13].

Решения могут быть удачными или неудачными, обоснованными и неразумными. Практику, как правило, интересуют решения оптимальные, такие, которые являются по тем или иным причинам предпочтительнее, чем другие.

Выбор оптимальных решений особенно в сложных вероятностных математических системах, к которым относятся строительные системы, немыслим без широкого применения математических методов решения задач и средств вычислительной техники.

Сооружение любого строительного объекта происходит путем выполнения в определенной последовательности большого количества разноплановых работ.

Рассмотрим несколько характерных задач и получим для них математическую формулировку (математическую модель).

Задача 1 (Транспортная задача.)

В городе имеется 2 бетонных завода. Первый выпускает *в* день 400 т бетона, а второй - 560 т. Бетон с этих заводов отправляется на 4 стройплощадки. На первую стройплощадку поступает в день 220 т бетона, на вторую - 200 т, на третью- 180 т, на четвертую - 360 т. Стоимость перевозки одной тонны бетона с каждого завода на каждую стройплощадку известна. Требуется так организовать перевозку бетона с заводов на стройплощадки, чтобы суммарная стоимость всех перевозок была минимальной.

От содержательной постановки задачи перейдем к математической. Если обозначить через C_{ij} - стоимость перевозки одной тонны бетона *с i - го* завода на *j- ю* стройплощадку (это известные величины), а через x_{ij} - количество тонн бетона, которое нужно перевести с *i - го* завода на *j -ю* стройплощадку (это искомые величины), то стоимость всех перевозок будет выражаться функцией

$$f=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij} \qquad (5.1)$$

Необходимо найти минимум этой функции, но x_{ij} не независимы, они связаны между собой следующими ограничениями. С первого завода вывозится 400 т бетона, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{4}x_{1j}=400$$

Со второго завода вывозится 560 т, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{4}x_{2j}=560$$

На первую стройплощадку завозится 220 т бетона, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{2}x_{i1}=220$$

Аналогично можно записать для остальных стройплощадок:

$$\sum_{i=1}^{2}x_{i2}=200,\ \sum_{i=1}^{2}x_{i3}=180,\ \sum_{i=1}^{2}x_{j4}=360.$$

Таким образом, x_{ij} должны удовлетворять следующей системы ограничений:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 400, \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 560, \sum_{i=1}^{2} x_{i1} = 220, \sum_{i=1}^{2} x_{i3} = 180, \sum_{i=1}^{2} x_{i4} = 360. \qquad (5.2)$$

К этим ограничениям необходимо добавить еще x_{ij} > O (так как обратно бетон со стройплощадок на заводы не увозится).

Задача математически ставится так: найти минимум функции (5.1) условии, что ее аргументы удовлетворяют системе уравнений (5.2).

Задача 2 (Задача о ресурсах).

В распоряжении бригады имеются следующие ресурсы: 300 кг металла, 100 м^2 стекла, 160 чел.-ч (человеко-часов) рабочего времени. Бригаде поручено изготовлять два наименования изделий - *A* и *B*. Цена одного изделия *A* – 10 р., для его изготовления необходимо 4 кг металла, 2 м^2 стекла и 2 чел.-ч рабочего времени. Цена одного изделия *B* - 12 р., для его изготовления необходимо 5 кг металла, 1 м^2 стекла и 3 чел.-ч рабочего времени. Требуется так спланировать объем выпуска продукции, чтобы ее стоимость была максимальной.

Получим математическую модель этой задачи. Обозначим через x_1 и x_2 количество изделий *A* и *B,* которое необходимо запланировать (это искомые величины).

Полная стоимость запланированной к производству продукции выражается функцией

$$f = 10_{x_1} + 12_{x_2} \qquad (5.3)$$

На x_1 изделий *A* требуется $4x_1$ кг металла, $2x_1$ м^2 стекла и $2x$ чел.-ч рабочего времени. На x_2 изделий *B* требуется $5x_2$, кг металла, x_2 м^2 стекла и $3x_2$ чел.-ч рабочего времени. Следовательно, так как ресурсы заданы, то должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &4 x_1 + 5 x_2 < 300 \\ &2 x_1 + x_2 < 100 \\ &2 x_1 + 3 x_2 < 160 \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Таким образом, нужно найти максимум функции (5.3) при условии, что ее аргументы удовлетворяют системе неравенств (5.4).

Задача 3.

Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок двух типов *A* и *B* для производства 90 шт. изделий. Для одного изделия требуются 2 заготовки типа *A* и 10 заготовок типа *B*. Возможны четыре варианта раскроя одного листа проката. Количество заготовок *A* и *B*, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, а также отходы от раскроя указаны в таблице 9.

Какое количество листов проката нужно раскроить при помощи каждого варианта для изготовления 90 шт. изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими?

Таблица 9 – Исходные данные для задачи 3.

Вариант раскроя	Заготовки, шт.		Отходы от раскроя, ед.
	A	B	
1	4	0	12
2	3	3	5
3	1	9	3
4	0	12	0

Получим математическую модель задачи.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - количество листов проката, раскраиваемых соответственно вариантами 1, 2, 3, 4.

Отходы от раскроя составят

$$f = 12_{x1} + 5_{x_2} + 3x_3 \qquad (5.5)$$

Для производства 90 шт. изделий необходимо 180 заготовок типа *A* и 900 - типа *B*. Следовательно, аргументы функции (5.5) должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} &4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180 \qquad (5.6)\\ &3x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900 \end{aligned}$$

Следовательно, математически задача ставится так: найти минимум функции (5.5) при условии, что ее аргументы удовлетворяют системе уравнений (5.6).

Задача 4.

Необходимо составить наиболее дешевую смесь из трех веществ. В состав смеси должны входить не менее 6 единиц химического вещества *A*, не менее 8 единиц вещества *B* и не менее 12 единиц вещества *C*. Имеются 3 вида продуктов (I, II, III), содержащих эти химические вещества в следующих пропорциях (таблица 10).

Таблица 10 – Исходные данные для задачи 4

Продукты	Вещества		
	A	B	C
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

Стоимость одной весовой единицы продукта 1 - 2 р., продукта II -3 р., продукта III - 2,5 р.

Получим математическую модель задачи.

Обозначим через x_1, x_2, x_3 - количество продуктов вида I, II, III соответственно, входящих в смесь.

Стоимость смеси из трех веществ выражается функцией

$$f = 2_{x_1} + 3_{x_2} + 2{,}5_{x_3} \quad (5.7)$$

Система ограничений примет вид

$$\begin{aligned} &2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 > 6 \\ &x_1 + 2\,x_2 + 1{,}5\,x_3 > 8 \\ &3\,x_1 + 4x_2 + 2\,x_3 > 12 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Математически задача ставится так: найти минимум функции (5.7) при условии, что ее аргументы удовлетворяют системе неравенств (5.8).

Задача 5.

В задаче 1 все производственное сырье (бетон) было использовано. Но бывает и так, что часть сырья не используется. Такие задачи называются открытыми. Рассмотрим одну из таких задач.

Имеются 4 хранилища горючего с запасами 500, 300, 500 и 200 т и 3 заправочные станции с потребностями 300, 400 и 300 т. Стоимость перевозок одной тонны горючего из хранилищ в заправочные станции приведена в таблица 11.

Таблица 11 – Исходные данные для задачи 5

Хранилища	Заправочные станции		
	B_1	B_2	B_3
A_1	6	4	5
A_2	8	3	2
A_3	7	5	6
A_4	5	2	2

Требуется спланировать перевозку горючего так, чтобы затраты были минимальными.

В задаче сумма запасов горючего в хранилищах на 500 т больше, чем потребности на станциях. Поэтому введем фиктивную заправочную станцию B с потребностью в горючем 500 т, равной разности суммы запасов и суммы потребностей. Стоимость перевозок горючего из хранилищ A_1, A_2, A_3, A_4 в фиктивную станцию B_4 назначим равной нулю.

Теперь постановка рассматриваемой задачи не отличается от постановки задачи 1.

Задача 6.

Найти оптимальную массу плоской фермы при выполнении условий прочности (рисунок 22).

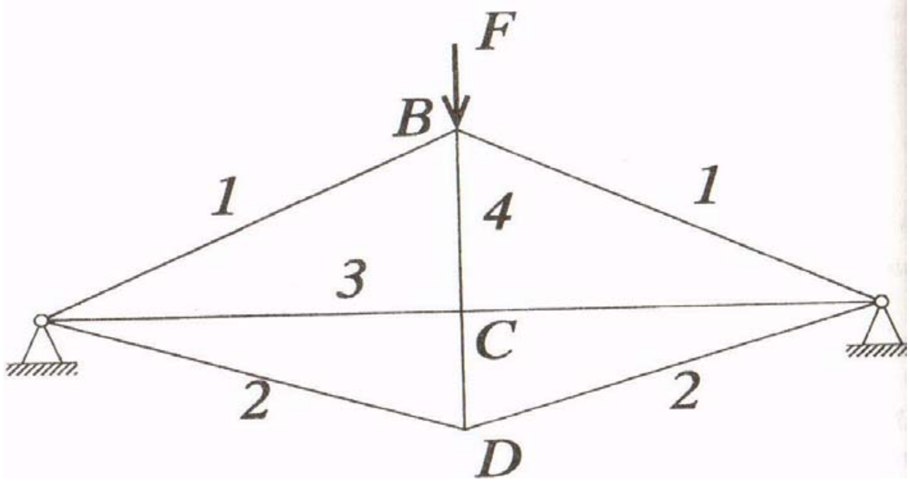


Рисунок 22 – Условия прочности к задаче 6

Эта задача не столько экономическая, сколько техническая - задача оптимизации строительных конструкций.

Статически неопределимая шарнирно-стержневая система (ферма) нагружена силой F.

Необходимо выбрать площади поперечных сечений A таким образом чтобы общая масса M фермы была минимальной.

Длина стержней L, м, известна:

$l_1 = 6{,}3246$
$l_2 = 6{,}03$ $\quad BC = 2$
$l_3 = 12$ $\quad CO = 0{,}6$
$l_4 = 2{,}6$

Масса фермы определяется формулой

$$M = \rho(12.6492A_1 + 12.06A_2 + 12A_3 + 2.6A_4) \qquad (5.9)$$

где ρ - удельный вес материала стержней, кг/м^3.

Выражение (5.9) - функция цели, минимум которой нужно найти.

Систему ограничений составим из условий прочности. Требуется, чтобы во всех стержнях фермы напряжения не превосходили по абсолютной величине расчетного сопротивления материала стержней R (одинакового на растяжение и сжатие)

$$\left|\frac{N_i}{A_i}\right| \le R \qquad (5.10)$$

Следовательно, система ограничений представляется в виде двух неравенств

$$N_i + RA_i \geq 0, \quad -N_i + RA_i \geq 0 \qquad (5.11)$$

Первое неравенство в (5.11) означает, что стержень работает на сжатие, второе - на растяжение. Так как стержни 1 и 4 работают только на сжатие, а 2 - только на растяжение, то систему (5.11) можно записать в виде

$$N_1 + RA_1 \geq 0; \quad N_4 + RA_4 \geq 0; \quad -N_2 + RA_2 \geq 0; \quad N_3 + RA_3 \geq 0; \quad -N_3 + RA_3 \geq 0. \qquad (5.12)$$

Исходя из условий равновесия в узлах фермы, получим три уравнения с четырьмя неизвестными:

$$N_1 = -1{,}5812 \quad N_4 - 1{,}5812F; \quad N_2 = -5{,}025N_4; \quad N_3 = 6{,}5N_4 + 1{,}5F.$$

Подставляя эти выражения в неравенства (5.12) и вводя дополнительные переменные y, получим систему ограничений в виде равенств:

$$\begin{aligned}
&y_1 - RA_1 + 1{,}5812N_4 = -1{,}5812F\\
&y_2 - RA_2 - 5{,}025N_4 = 0\\
&y_3 - RA_3 - 6{,}5N_4 = 1{,}5F\\
&y_4 - RA_3 + 6{,}5N_4 = -1{,}5F\\
&y_5 - RA_4 - N_4 = 0
\end{aligned} \qquad (5.13)$$

Таким образом, математически задача ставится так: найти минимум функции (5.9) при условии, что ее аргументы удовлетворяют системе ограничений (5.13).

Таким образом, для различных производственных задач получается одна и та же математическая модель, которая состоит в следующем.

Нужно найти экстремум некоторой функции, аргументы которой удовлетворяют некоторой системе уравнений или неравенств. Такие задачи получили название задач математического программирования.

Функция, глобальный экстремум которой находится, называется функцией цели, а условия, налагаемые на ее аргументы, называются системой ограничений.

Естественными называются ограничения, при которых все аргументы функции цели считаются неотрицательными.

Канонической формой задачи математического программирования считается такая форма, когда находится глобальный минимум функции цели и система ограничений, исключая естественные, выражается равенствами.

Различают следующие виды математического программирования: линейное, нелинейное, динамическое и др.

Математическое программирование называется линейным, если функция и цели и система ограничений линейны относительно всех аргументов.

В противном случае математическое программирование называется нелинейным.

Математическое программирование называется динамическим, если условия рассматриваемой задачи зависят от времени.

Область возможного изменения аргументов функции цели, определяемая системой ограничений, называется областью допустимых значений аргументов. Следовательно, минимум функции цели нужно искать в точках, принадлежащих этой области. Можно показать, что в случае линейного программирования областью допустимых значений аргументов будет:

при 2 аргументах - выпуклый многоугольник, так как система ограничений в этом случае (графически) - это система прямых линий (рисунок 23);

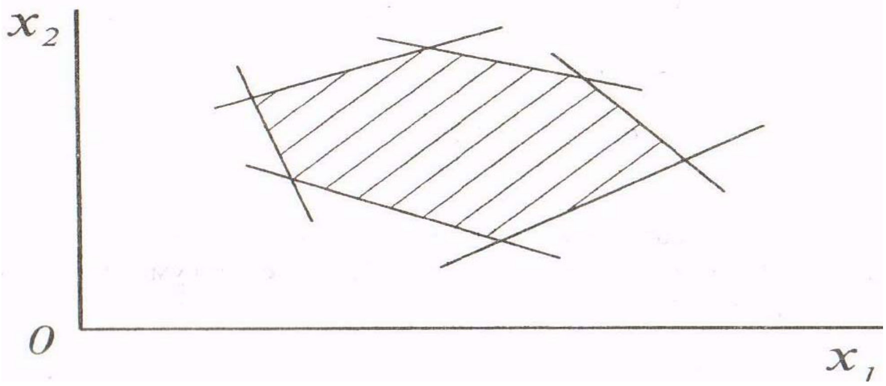


Рисунок 23 – Область допустимых значений при двух аргументах

при 3 аргументах – выпуклый многогранник;

при n > 3 аргументов – это выпуклый гипермногогранник.

В математическом программировании речь идет о нахождении глобального экстремума функции цели. Этот экстремум может быть внутри или на границе области допустимых значений аргументов.

Можно показать, что в случае линейного программирования, если глобальный экстремум функции цели существует, то он имеет место только в вершинах многоугольника, многогранника и гипермногогранника.

Дадим общую формулировку задачи линейного программирования в канонической форме. Требуется найти глобальный минимум линейной функции n аргументов (функции цели)

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \tag{5.14}$$

при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют следующей совместной (имеющей решение), неопределенной (имеющей множество решений) системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \tag{5.15}$$

Ранг матрицы которой $r < n$.

(Ранг матрицы – это наивысший порядок отличного от нуля определителя, который можно из этой матрицы составить.) Ранг матрицы равен числу основных, базисных неизвестных. Будем считать, что все $b_k > 0$. Занумеруем неизвестные так, чтобы свободными неизвестными были первые p неизвестных $(p = n - r)$. Тогда прочие r неизвестных, называемых базисными, можно выразить из системы (5.15):

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= \beta_1 + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1p}x_p \\ x_{p+2} &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2p}x_p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{p+r} &= \beta_r + \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \ldots + \alpha_{rp}x_p \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Система (5.16) называется базисной системой ограничений.

Подставив (5.16) в выражение (5.14) вместо базисных неизвестных, получим функцию цели в базисной форме

$$F = F_0 + \sum_{i=1}^{p} d_i x_i \qquad (5.17)$$

Задание функции цели в виде (5.17), а системы ограничений в виде (5.16) называется базисной формой задачи линейного программирования (такая форма задачи линейного программирования нужна для симплекс-метода).

Упорядоченная совокупность n величин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая системе ограничений (5.15) или (5.16), называется допустимым решением (планом).

Допустимое решение, у которого все свободные неизвестные равны нулю, называется допустимым базисным решением, или опорным планом (это как раз вершины многоугольника, многогранника, гипермногогранника). Упорядоченная совокупность n величин $(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая системе ограничений (5.15) или (5.16) и дающая глобальный экстремум функции цели (5.14) или (5.17) называется оптимальным решением (планом).

Известно, что оптимальный план, если он существует, принадлежит множеству опорных планов.

Число опорных планов конечно. Оно равно C (числу сочетаний из n по p). Но, например, число $C^{20}_{50} = 10^{20}$ – очень большое, перебор всех опорных планов провести трудно, поэтому такой перебор не реален.

Американским экономистом Дж. Данцигом был предложен метод направленного перебора опорных планов, при котором функция цели все время уменьшается. Такой метод получил название симплекс-метода. При таком направленном переборе нужно провести не более $2n$ переборов опорных планов.

Изложим методику применения симплекс-метода в общем виде:

1 Систему ограничения вида (5.15) следует привести к базисной форме по правилам линейной алгебры.

2 Положив в базисной системе уравнений все свободные неизвестные равными нулю, нужно найти значения базисных неизвестных. Если эти значения будут неотрицательными, то первый исходный план будет опорным.

В противном случае следует выбрать другие свободные неизвестные так, чтобы исходный план был опорным.

3 В выражении функции цели базисные неизвестные нужно заменить их выражениями из базисной системы уравнений.

4 Положив в найденном выражении функции цели все свободные неизвестные равными нулю, найдем значение функции цели, соответствующее выбранному опорному плану.

5 Если все коэффициенты при свободных неизвестных в функции цели неотрицательные, то найденный опорный план будет оптимальным, а найденное значение функции цели будет искомым глобальным ее минимумом.

6 Если же не все коэффициенты при свободных неизвестных функции цели будут неотрицательными, то нужно выбрать свободную неизвестную с отрицательным коэффициентом, например, x_α (обычно берется неизвестная с максимальным по модулю отрицательным коэффициентом). Далее положить в базисной системе уравнений все свободные неизвестные, кроме x_α, равными нулю и определить максимально возможное значение x_α, при котором все базисные неизвестные неотрицательные.

7 Ту из базисных неизвестных, например, x_β , которая обращается в нуль при указанном значении x_α, следует выбрать за свободную неизвестную вместо x .

Неизвестную же x_α перевести в разряд базисных.

8 Далее следует повторить цикл расчетов по пп. 3 – 7 до тех пор, пока опорный план не будет оптимальным, то есть пока все коэффициенты при свободных неизвестных в функции цели не будут неотрицательными.

В математическом обеспечении ЭВМ есть стандартная программа решения задач линейного программирования по симплекс-методу.

5.2 Примеры решения некоторых задач

5.2.1 Решение транспортной задачи

Чтобы применить к решению транспортной задачи симплекс-метод, переобозначим неизвестные так:

x_1, x_2, x_3, x_4 – количество тонн бетона, которое вывозится с первого бетонного завода соответственно на 1, 2, 3 и 4-ю строительные площадки;

x_5, x_6, x_7, x_8 – количество тонн бетона, вывозимого со второго бетонного завода соответственно на 1, 2, 3 и 4-ю строительные площадки. Зададимся конкретными значениями стоимости перевозки одной тонны бетона с соответствующих заводов на строительные площадки (в определенных денежных единицах).

Все данные сведем в таблицу 12.

Таблица 12 – Транспортная задача

Бетонные заводы	Строительные площадки	Входные параметры	
		Стоимость перевозки 1т	Количество тонн
1	1	X_1	2
	2	X_2	1
	3	X_3	3
	4	X_4	2
2	1	X_5	2
	2	X_6	3
	3	X_7	3
	4	X_8	1

Тогда функция цели (стоимость всех перевозок) и система ограничений примут вид

$$\begin{aligned} &f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 + x_8 \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 400 \\ &x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 560 \\ &x_1 + x_2 = 220 \\ &x_2 + x_6 = 200 \\ &x_3 + x_7 = 180 \\ &x_4 + x_8 = 360 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Выпишем матрицу системы ограничений

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \tag{5.19}$$

Теперь нужно найти ранг этой матрицы. Если первые две строки матрицы поменять местами, то можно получить неравный нулю определитель

$$\left\{\begin{matrix} 10000 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 10001 \end{matrix}\right\} = 1 \neq 0 \tag{5.20}$$

Следовательно, ранг матрицы системы ограничений r = 5 (не равен нулю определитель пятого порядка, а все определители большего порядка равны нулю).

Значит, пять неизвестных будут базисными, а три – свободными. Обозначим их так:

X_1, x_2, x_3 - свободные неизвестные;

x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 – базисные неизвестные.

Из системы ограничений (5.18) выражаем базисные неизвестные:

$$\begin{aligned} &x_4 = 400 - x_1 - x_2 - x_3 \\ &x_5 = 220 - x_1 \\ &x_6 = 200 - x_2 \\ &x_7 = 180 - x_3 \\ &x_8 = - 40 + x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Если все свободные неизвестные принять равными нулю, то $x_8 = -40 < 0$. Следовательно, опорный план не найден. Нужно неизвестную х перевести в базисные неизвестные, а x_8 – в свободные.

Тогда из (5.21) получим выражение новых базисных неизвестных через свободные:

$$\begin{aligned} &x_1 = 40 - x_2 - x_3 + x_8 \\ &x_4 = 360 - x_8 \\ &x_5 = 180 + x_2 + x_3 - x_8 \\ &x_6 = 200 - x_2 \\ &x_7 = 180 - x_3 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Теперь при равных нулю свободных неизвестных все базисные неизвестные положительны. Следовательно, план (40, 0, 0, 360, 180, 200, 180, 0) является опорным.

Запишем функцию цели (5.18) в базисной форме:

$$\mathrm{f} = 2300 - 2\mathrm{x}_2 - x_8 \tag{5.23}$$

Так как некоторые коэффициенты при неизвестных в функции цели отрицательны, то найденный опорный план не является оптимальным.

Наибольший по модулю отрицательный коэффициент в (5.23) стоит перед x_2, поэтому эту неизвестную переведем из свободных в базисные, а неизвестную x_1, переведем из базисных в свободные. Тогда система ограничений (5.22) примет вид

$$\begin{aligned} &x_2 = 40 - x_1 - x_3 + x_8 \\ &x_4 = 360 - x_8 \\ &x_5 = 220 - x_1 \\ &x_6 = 160 + x_1 + x_3 - x_8 \\ &x_7 = 180 - x_3 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Запишем новый опорный план (0, 40, 0, 360, 220, 160, 180, 0). Функция цели (5.23) также изменится и примет вид

$$f = 2220 + 2x_1 + 2x_3 - 3x_8 \qquad (5.25)$$

Опять найденный опорный план не является оптимальным, так как в функции цели (5.25) перед x_8 стоит отрицательный коэффициент. Значит, неизвестную x_8 нужно перевести из свободных в базисные. При этом базисная неизвестная x_6 перейдет в свободные.

Система ограничений теперь примет вид

$$\begin{aligned} &x_2=200-x_6\\ &x_4=200-x_1-x_3+x_6\\ &x_5=220-x_1\\ &x_7=180-x_3\\ &x_8=160+x_1+x_3-x_6 \end{aligned} \qquad (5.26)$$

Новый опорный план будет (0, 200, 0, 200, 220, 0, 180, 160), а функция цели

$$f = 1740 - x_1 - x_3 + 3x_6 \qquad (5.27)$$

И опять найденный опорный план не будет оптимальным, так как перед некоторыми неизвестными в функции цели (5.27) стоит отрицательный коэффициент.

Переведем неизвестную x_1 из свободных в базисные, тогда базисная неизвестная x_4 перейдет в свободные.

Теперь система ограничений (5.26) примет вид

$$\begin{aligned} &x_1=200-x_3-x_4+x_6\\ &x_2=200-x_6\\ &x_5=20+x_3+x_4-x_6\\ &x_7=180-x_3\\ &x_8=160-x_4 \end{aligned} \qquad (5.28)$$

Опорный план будет таким (200, 200, 0, 0, 20, 0, 180, 360), а функция цели

$$f = 1540 + x_4 + 2x_6 \qquad (5.29)$$

Так как все коэффициенты при неизвестных в функции цели (5.29) неотрицательны, то найденный опорный план (5.28) будет оптимальным.

Следовательно, чтобы стоимость всех перевозок бетона была минимальной, с первого бетонного завода нужно вывести на первую строительную площадку 200 т, на вторую – тоже 200 т. На третью и четвертую бетон не завозить. Со второго бетонного завода на первую строительную площадку вывести 20 т, на третью - 180т, на четвертую – 360 т, а на вторую площадку бетон не завозить. Стоимость всех перевозок при таком плане будет составлять 1540 соответствующих единиц.

5.2.2 Решение задачи о ресурсах

Вид сформулированной задачи в п. 5.1 не является каноническим, поскольку условия (5.4) имеют вид неравенств, а не уравнений и поставлена задача максимизации целевой функции (5.3). Путем введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 (по количеству ограничений неравенств (5.4)) ограничения можно свести к равенствам, прибавив эти переменные к левым частям неравенств. Тогда ограничения примут вид

$$\begin{aligned} &4x_1 + 5x_2 + x_3 = 300 \\ &2x_1 + x_2 + x_4 = 100 \\ &2x_1 + 3x_2 + x_5 = 160 \end{aligned} \qquad (5.30)$$

При этом очевидно, что $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$

Заметим, что введение дополнительных неизвестных не повлияло на вид целевой функции (5.3), которая зависит только от параметров x_1 и x_2 Фактически $x_3,\ x_4,\ x_5$ будут указывать остатки ресурсов, не использованные в произвотстве.

Теперь нужно перейти от задачи максимизации к задаче минимизации. Если функцию цели (5.3) взять со знаком минус, то есть принять

$$F = -10x_1 - 12x_2 \qquad (5.31)$$

то получим задачу минимизации для этой целевой функции. Нетрудно увидеть, что ранг матрицы системы ограничений (5.30)

$$\left\{ \begin{array}{l} 45100 \\ 21010 \\ 23001 \end{array} \right\} \qquad (5.32)$$

равен 3. Следовательно, базисных неизвестных будет три, а свободных две. Ясно, что x_1 и x_2, должны быть среди базисных, за базисную неизвестную возьмем еще x_3. Тогда, разрешив систему (5.30) относительно x_1, x_2 *и* x_3 получим систему ограничений в базисной форме

$$\begin{aligned} &x_1 = 35 - 0{,}75\,x_4 + 0{,}25\,x_5 \\ &x_2 = 30 + 0{,}5\,x_4 - 0{,}5\,x_5 \\ &x_3 = 10 + 0{,}5\,x_4 + 1{,}5\,x_5 \end{aligned} \qquad (5.33)$$

Если свободные неизвестные x_4 и x_5 принять равными нулю, то неизвестные будут положительны. Следовательно, первый опорный план будет иметь вид (35, 30, 10, 0, 0).

Подставив в функцию цели (5.32) вместо базисных переменных их выражения (5.33), получим

$$F = -710 + 1{,}5x_4 + 3{,}5x_5 \qquad (5.34)$$

Так как все коэффициенты при свободных неизвестных в функции цели положительны, то найденный опорный план будет оптимальным.

Таким образом, ответ на поставленную задачу об использовании ресурсов следующий: для получения максимальной суммарной стоимости продукции при заданных ресурсах необходимо запланировать изготовление изделий *A* в количестве 35 шт. и изделий *B* в количестве 30 шт.

Суммарная стоимость продукции равна 710 р. При этом все ресурсы стекла и рабочего времени будут использованы, а металла останется 10 кг.

5.2.3 Решение задачи нахождения оптимальной массы фермы

Из последнего уравнения системы (5.13) выразим N_4 и подставим в остальные уравнения системы. В результате исключим неизвестное N_4, и система ограничений примет вид

$$\begin{aligned}
&y_1 - RA_1 + 1{,}5812y_5 - 1{,}5812RA_4 = -1{,}5812F\\
&y_2 - RA_2 - 5{,}025\,y_5 + 5{,}025\,RA_4 = 0\\
&y_3 - RA_3 - 6{,}5\,y_5 + 6{,}5RA_4 = 1{,}5F\\
&y_4 - RA_3 + 6{,}5\,y_5 - 6{,}5RA_4 = -1{,}5F
\end{aligned} \qquad (5.35)$$

Ранг матрицы системы ограничений (5.35) $r = 4$. Следовательно, базисных неизвестных будет 4, а свободных – 5. Неизвестные A_1, A_2, A_3, A_4 за свободные принять нельзя, так как свободные неизвестные в опорном плане принимаются равными нулю. Поэтому за свободные неизвестные принимаем y_1 y_2, y_3, y_4, y_5, и за базисные – A_1, A_2, A_3 A_4, которые из системы (5.35) выражаем через свободные (из последних двух уравнений выражаем A_4, а из первых трех – A_1, A_2, A_3

$$\begin{aligned}
&A_1 = 1{,}2163\frac{F}{R} + \frac{1}{R}\left(y_1 + 0{,}121y_3 - 0{,}2116y_4\right)\\
&A_{21} = 1{,}1596\frac{F}{R} + \frac{1}{R}\left(y_2 - 0{,}3865y_3 + 0{,}3865y_4\right)\\
&A_3 = 0{,}5\frac{1}{R}\left(y_3 + y_4\right)\\
&A_4 = 0{,}2308\frac{F}{R} + \frac{1}{R}\left(-0{,}077y_3 + 0{,}077y_4 + y_5\right)
\end{aligned} \qquad (5.36)$$

Так как при $Y = 0$ базисные неизвестные A_i неотрицательны, то первый опорный план будет иметь вид

$$\left(1{,}2163\frac{F}{R};\quad 1{,}1596\frac{F}{R};\quad 0;\quad 0{,}2308\frac{F}{R};\quad 0;\quad 0;\quad 0;\quad 0;\quad 0\right). \qquad (5.37)$$

Запишем функцию цели в базисной форме, подставив для этого (5.36) в (5.9),

$$M = \frac{\rho}{R}(29{,}97F + 12{,}6492y_1 + 12{,}06y_2 + 2{,}6769y_3 + 8{,}1846y_4 + 2{,}6y_5) \quad (5.38)$$

Так как все коэффициенты при свободных неизвестных в функции цели не отрицательны, то найденный первый опорный план будет оптимальным. Следовательно, оптимальные площади поперечных сечений будут равны

$$A_1 = 1{,}2163\frac{F}{R};\quad A_2 = 1{,}1596\frac{F}{R};\quad A_3 = 0;\quad A_4 = 0{,}2308\frac{F}{R}.$$

При этом $M_{\min} = 29{,}97\dfrac{\rho F}{R}$

Если

$$F = 200\ кН;\quad R = 20\frac{кН}{см^2};\quad то\ A_1 = 12{,}16 см^2;\quad A_2 = 11{,}6 см^2;\quad A_3 = 0;\quad A_4 = 2{,}31 см^2$$

Следует заметить, что в результате оптимизации рассмотренной фермы она даже изменила свой первоначальный вид (стержень 3 убран).

5.3 Организационные задачи

Для выполнения любого вида работ требуется определенный набор материалов, машин, средств малой механизации, людских ресурсов, организационного обеспечения и т.д. и т.п. Причем зачастую количество и качество выделяемых ресурсов определяет длительность выполнения этих работ.

Распределяя правильно (или, как принято говорить, «оптимально») ресурсы, можно влиять на качество, сроки, стоимость строительства, производительность труда.

Далее приводится систематизация основных организационных задач, возникающих в практической деятельности инженеров-строителей.

Задачи распределения.

Задачи распределения в общем случае возникают тогда, когда существует ряд работ, подлежащих выполнению, и требуется выбрать наиболее эффективное распределение ресурсов и работ. Задачи этого типа можно разделить на три основных группы.

Задачи распределения первой группы характеризуются следующими условиями.

1 .Существует ряд операций, которые должны быть выполнены.

2.Имеется достаточное количество ресурсов для выполнения всех операций.

3.Некоторые операции можно выполнять различными способами, с использованием различных ресурсов, их комбинаций, количества.

4.Некоторые способы выполнения операций лучше других (более дешевые, более прибыльные, требующие меньше затрат времени и т.д.).

5.Тем не менее, имеющееся количество ресурсов недостаточно для выполнения каждой операции оптимальным способом.

Задача заключается в том, чтобы найти такое распределение ресурсов по операциям, при котором достигается максимальная общая эффективность системы. Например, могут минимизироваться суммарные затраты или максимизироваться общая прибыль.

Вторая группа задач возникает, когда наличных ресурсов не хватает для выполнения всех возможных операций. В этих случаях приходится выбирать операции, которые должны быть выполнены, а также определять способ их выполнения.

Задачи третьей группы возникают тогда, когда имеется возможность регулировать количество ресурсов, т.е. определять, какие ресурсы следует добавить, а от каких целесообразно отказаться.

Большинство задач такого рода решается в целях оптимизации строительных и технологических процессов. Основное средство их анализа – модели математического программирования, сетевые графики.

Задачи замены.

Задачи замены связаны с прогнозированием замены оборудования и их физическим или моральным износом.

Различают два типа задач замены. В задачах первого типа рассматривают объекты, некоторые характеристики которых ухудшаются в процессе эксплуатации, но сами они полностью выходят из строя через довольно длительное время, выполнив значительный объем работы.

Чем дольше эксплуатируется подобного рода объект без профилактики или капитального ремонта, тем менее эффективной становится его стоимость единицы продукции.

Для поддержания эффективности работы такого объекта необходимо обслуживание, ремонт, что сопряжено с определенными затратами.

Чем дольше эксплуатируется, тем выше затраты на поддержание его в рботоспособном состоянии. С другой стороны, если часто заменять, то возрастает объем капиталовложений. Задача сводится, в этом случае, к определению порядка и сроков замены, при которых достигается максимум общих эксплуатационных затрат и капиталовложений.

Наиболее общим методом решения задач такого типа является динамическое программирование.

Объектами рассматриваемой группы являются строительно-дорожная техника, оборудование, транспортные средства и т.п.

Второй тип объектов характеризуется тем, что они полностью выходят из строя внезапно или через определенный отрезок времени. В этой ситуации задача сводится к определению целесообразных сроков индивидуальной или групповой замены, а также частоты этой операции, при этом стремятся разработать стратегию замены, которая обеспечивает сведение к минимуму затрат, включающих стоимость элементов, потери от отказов и на замену.

К объектам второго типа относятся детали, узлы, агрегаты строительно-дорожной техники, оборудования. Для решения задач второго типа применяются вероятностные методы и статистическое моделирование. Частным случаем задач замены являются задачи эксплуатации и ремонта.

Задачи поиска.

Задачи поиска связаны с определением наилучших способов получения информации с тем, чтобы минимизировать общую сумму двух типов затрат: затрат на получение информации и затрат, вызванных ошибками в принимаемых решениях из-за отсутствия точной и своевременной информации. Эти задачи используются при рассмотрении большого круга вопросов анализа хозяйственной деятельности строительной организации, например, задачи оценки и прогнозирования систем контроля качества, многие бухгалтерские процедуры и т.д.

В качестве средств, применяемых при решении таких задач, используются основном вероятностные и статистические методы.

Задачи массового обслуживания или задачи очередей.

Теория массового обслуживания представляет собой раздел теории вероятности, в котором изучается поведение систем, состоящих, как правило, из 2-х подсистем (рисунок 24). Одна из них является обслуживающей, а другая – источником заявок на обслуживание, которые образуют поток, носящий случайный характер. Заявки, не обслуженные в момент поступления, образуют очередь, поэтому теорию массового обслуживания иногда называют теорией очередей. Теория эта отвечает на вопрос, какой должна быть обслуживающая подсистема, чтобы суммарные экономические потери от простоя обслуживающей подсистемы и от простоя заявок в очереди были минимальными. Многие задачи из области организации и управления в строительстве относятся к задачам, решаемым методами теории очередей.

Так, в задачах массового обслуживания или задачах очередей рассматриваются связи между потоком строительных работ и машинами, используемыми для их механизации. Типичными задачами массового обслуживания являются задачи на определение количества строительных бригад, машинной техники, организации работы автоматических линий и систем комплексной автоматизации производственных процессов, задачи, связанные с организациионно-производственной структурой строительных организаций и т.д.

Для решения задач массового обслуживания часто применяется метод статистических испытаний, заключающийся в воспроизведении на ЭВМ строительного процесса или, иначе говоря, случайного процесса, описывающего поведение системы, с последующей статистической обработкой результатов ее функционирования.

Рисунок 24 - Задача массового обслуживания

Задачи управления запасами (создание и хранение).

Каждая стройка нуждается в строительных конструкция, материалах, полуфабрикатах, сантехоборудовании и т.д. Как правило, поставки и расходование их неравномерны, часто в них вносится элемент случайности. Чтобы строительное производство не задерживалось из-за отсутствия материалов и оборудования, на стройке должен иметься некоторый их запас. Однако этот запас не должен быть велик, так как хранение строительных материалов и различного оборудования связано с расходами на строительство и эксплуатацию складов, а также с замораживанием средств, затраченных на их приобретение и строительство.

Различают два вида издержек, связанных с использованными ресурсами [20]:

издержки, возрастающие с ростом запасов;

издержки, убывающие с ростом запасов.

Возрастающие издержки включают складские расходы; потери, обусловленные старением, порчей; налоги, страховые взносы и т.п.

Издержки, убывающие при увеличении запасов, могут быть четырех видов.

1 Издержки, связанные с отсутствием запасов или несвоевременными поставками.

2 Расходы на подготовительно-заготовительные операции: чем большие объемы продукции закупаются или производятся, тем реже обрабатываются заказы.

3 Продажная цена или прямые издержки производства. Продажа по сниженным ценам, закупка товара большими партиями требует увеличения складских запасов.

4 Издержки, вызываемые наймом, увольнением и обучением работников.

Решение задач управления запасами позволяет определить, что заказывать, сколько заказывать и когда, чтобы минимизировать издержки, связанные как с созданием избыточных запасов, так и с их недостаточным уровнем, когда дополнительные издержки возникают из-за нарушения ритма производства.

Средствами анализа таких задач являются теория вероятностей, статистические методы, методы линейного и динамического программирования, методы моделирования.

Задачи теории расписаний.

Многие задачи планирования и управления строительным производством требуют упорядочения во времени использования некоторой фиксированной системы ресурсов (сборные конструкции, краны, автотранспорт, трудовые ресурсы и т.д.) для выполнения заранее определенной совокупности работ в оптимальный промежуток времени.

Круг вопросов, связанных с построением оптимальных (по тому или иному критерию) календарных планов, с разработкой математических методов получения решений, на базе использования соответствующих моделей, изучается в теории расписаний.

Задачи теории расписаний возникают повсюду, где существует необходимость выбора того или иного порядка выполнения работ, т.е. изучаемые в теории расписаний модели отражают специфические ситуации, возникающие при организации любого производства, при календарном планировании строительства, во всех случаях целенаправленной человеческой деятельности.

Практические цели требуют, чтобы модель строительного производства полнее отражала реальные процессы и вместе с тем была настолько простой, чтобы искомые результаты можно было получать за приемлемое время. Анализируемые в рамках теории расписаний модели являются разумным компромиссом между этими естественными, но противоречивыми тенденциями.

6 Моделирование в строительстве

Практически для любой задачи организации, планирования и управления строительством характерна множественность ее возможных решений, зачастую большая неопределенность и динамичность осуществляемых процессов. В процессе разработки плана работы строительной организации плана возведения объекта строительства приходится сравнивать между собой огромное количество вариантов и выбирать из них оптимальный в соответствии с выбранным критерием. Критерий - это тот показатель, который является мерилом эффективности пути достижения цели.

Для предварительного анализа и поиска эффективных форм организации, а также планирования и управления строительством используется моделирование.

Современное строительство как системный объект характеризуется высокой степенью сложности, динамичностью, вероятностным характером поведения, большим числом составляющих элементов со сложными функциональными связями и другими особенностями. Для эффективного анализа и управления такими сложными системными объектами необходимо иметь достаточно мощный аппарат моделирования. В настоящее время интенсивно ведутся исследования в области совершенствования моделирования строительства, однако практика пока еще располагает моделями с довольно ограниченными возможностями полного адекватного отображения реальных процессов строительного производства. Разработать универсальную модель и единый метод ее реализации в настоящее время практически невозможно. Одним из путей решения данной проблемы является построение локальных экономико-математических моделей и методов их машинной реализации [20].

Проблема выбора оптимальных решений имеет, применительно к конкретной задаче, свои специфические особенности, а круг таких задач весьма широк. Тем не менее, возможно и полезно выделить некоторые черты и вытекающие из них общие подходы к постановке задачи и поиску наивыгоднейших решений.

Корректно составленная и предназначенная для практического использования модель должна удовлетворять двум условиям:

адекватно отражать наиболее существенные черты анализируемого явления, процесса, системы;

должна быть разрешима, т.е. в описывающей ее системе условий должны отсутствовать математические, экономические, технологические противоречия и иметься эффективные вычислительные алгоритмы для поиска решений. Так как экономико-математическая модель - это всего лишь постановка экономической задачи на математическом языке, то для ее решения необходимо разработав или подобрать из существующих метод решения (алгоритм).

Модели, используемые при решении задач организации, планирования управления строительным производством, условно можно разделить на модели линейного программирования, нелинейные модели, модели динамического программирования, оптимизационные модели, целочисленные модели, цифровое моделирование, имитационные модели, вероятностно-статистические модели, модели теории игр модели итеративного агрегирования, организационно-технологические, графические модели, сетевые модели. Рассмотрим каждую из них в отдельности.

6.1 Модели линейного программирования

Понятие линейности связано понятиями пропорциональности и аддитивности (аддитивность - возможность суммирования результатов). Методами математического программирования решаются задачи на экстремум (максимум, минимум) функций многих переменных с ограничениями и на область изменения этих переменных. Из методов математического программирования наибольшее распространение получил метод линейного программирования. Слово программирование показывает, что они применяются для планирования, т.е. для составления плана (программы), который обеспечивал бы оптимальное использование материальных и трудовых ресурсов. Слово линейное определяет математическую природу этих моделей.

Она состоит в том, что условия задач выражаются системой линейных уравнений или неравенств, содержащих неизвестные только первой степени. Для любых задач линейного программирования характерны три следующих условия (по академику В.С.Немчинову):

- наличие системы взаимосвязанных факторов;
- строгое определение критерия оценки оптимальности;
- точная формулировка условий, ограничивающих использование наличных ресурсов.

С учетом этих условий экономическим содержанием задач линейного программирования является отыскание наилучших способов использования имеющихся ресурсов, например, определение оптимального плана закрепления потребителей однородного груза за поставщиками.

Такого рода задачи получили название транспортных задач линейного программирования. Если нужно использовать разнородные ресурсы, например, различные машины, материалы и т.д. для выполнения какой-либо работы, то применяется общий метод линейного программирования, который получил в соответствии со своей математической основой название симплекс-метода, предложенного американским ученым Дж.Данцигом. Рассмотрим существо модели линейного программирования на простейшем примере.

Пример. Пусть фирма специализируется на строительстве двух типов складских помещений. Известны производственные и ресурсные возможности фирмы, стоимость 1 кв.м каждого из складских помещений.

Требуется определить, сколько нужно строить складских помещений каждого типа, чтобы выручка от их продажи была максимальной (таблица 13).

Введем следующие обозначения:

x_j - количество изготавливаемых складских помещений *j-ого* типа;

c_j - рыночная стоимость складского помещения;

a_{ij} - затраты i-ого вида ресурсов на одно складское помещение *j-ого* типа;

b_i - общий объем имеющихся ресурсов *i-ого* вида.

Исходные данные, помещенные в таблице 13, представим в буквенном выражении (таблица 14).

Составим математическую модель. Показатель эффективности, который необходимо максимизировать, - выручка от реализации складских помещений (обозначим ее *C*), линейно зависит от элементов решения x_1 и x_2.

$$C = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (6.1)$$

$$\text{или } C = \sum_{j=1}^{2} C_j \cdot xj$$

Таблица 13 – Исходные данные к транспортной задаче линейного программирования

Наименование основных показателей	Типы складских помещений		Имеющиеся ресурсы
	I	II	
1	2	3	4
1. Рыночная стоимость складского помещения (у.е.), C_1, C_2	100	200	
2. Трудоемкость изготовления каркаса одного складского помещения, чел.-ч	a_{i1} 67	a_{i2} 168	b_i 1600
3. Трудоемкость по изготовлению дверей, перегородок, полов на одно складское помещение, чел.-ч	8	8	140
4. Машиноемкость работ по подготовке фундамента	3.7	5.4	120
5. Машиноемкость монтажа каркаса складского помещения автомобильным краном, маш.-ч	-	1.7	13
6. Трудоемкость по возведению оборудованию одного складского помещения, чел.-ч	125	100	2000

Таблица 14 – Исходные данные в буквенном выражении

Вид ресурса	Тип складского помещения	
	I	II
b_1	a_{11}	a_{12}
b_2	a_{21}	a_{22}
b_3	a_{31}	a_{32}
b_4	a_{41}	a_{42}
b_5	a_{51}	a_{52}

Запишем систему ограничений: (6.2)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_3 &\le b_3\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_4 &\le b_4\\
a_{51}x_1 + a_{52}x_5 &\le b_5
\end{aligned}
$$

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладываемые на элементы решения x_1 и x_2.

Постановка задачи сводится к следующему: найти такие неотрица-

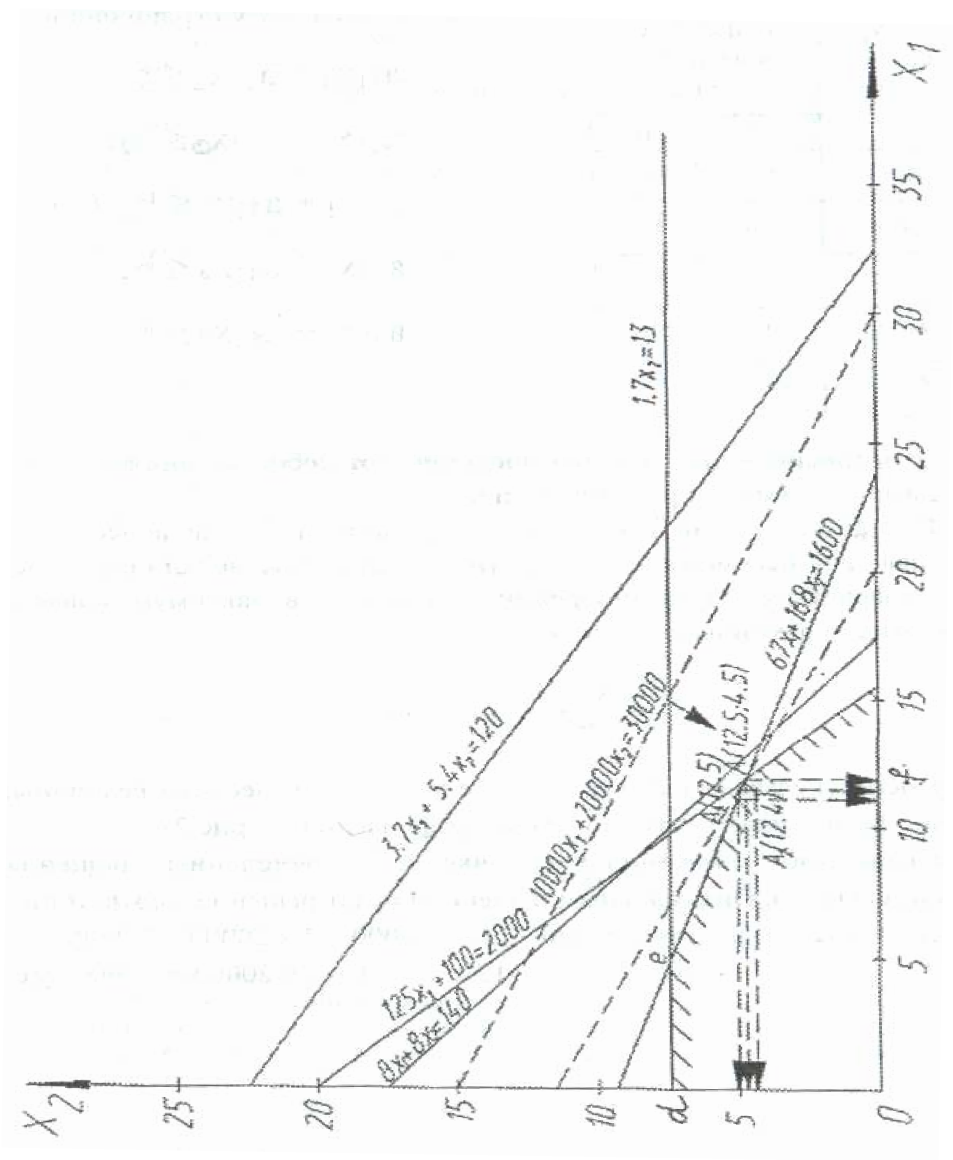


Рисунок 25 – Значения переменных X_1 и X_2, полученных графическим способом

тельные значения переменных x_1 и x_2, чтобы они удовлетворяли ограничениям - неравенствам и одновременно обращали в максимум целевую функцию этих переменных:

$$C = \sum_{j=1}^{2} C_j \cdot xj \Rightarrow \max \qquad (6.3)$$

Поскольку в задаче фигурируют только две неизвестных величины, то решение задачи может быть получено графически (рисунок 25).

Рассмотрим ближайшие к точке A целочисленные решения A_1 (12, 5) и A_2

(12, 4). Оптимальным решением будет решение, соответствующее точке A_1 (12, 5). Действительно,

$$11 \times 10000 + 5 \times 20000 = 210000 \text{ у.е.}$$
$$12 \times 10000 + 4 \times 20000 = 200000 \text{ у.е.}$$

6.2 Нелинейные модели

Слово нелинейные показывает, что соответствующие задачи описываются нелинейными уравнениями. Свойство нелинейности состоит в том, что результат взаимодействия нескольких факторов не равен простой алгебраической сумме их действий. Например, если планировать одновременную работу двух рабочих, то их производительность будет одна, если четырех - она может быть и меньше из-за недостаточности фронта работ, несогласованности действий рабочих и т.д. Нелинейная зависимость между переменными характерна и для задач размещения, в которых неизвестными являются не только пункты производства, но и объемы производства в каждом из них. Затраты на выпуск единицы строительной продукции обычно уменьшаются с ростом объема производства нелинейно. Поэтому в критерии оптимальности задачи размещения производства, представляющем собой приведенные затраты на производство и транспортировку продукции, будут содержаться нелинейные члены.

Покажем на примере различия в линейной и нелинейной постановках задач.

Пусть задача связана с определением оптимального распределения m однотипных строительных бригад для строительства n однотипных объектов.

Задан требуемый темп выполнения работ и норма их выполнения для каждой бригады - qi.

Требуется найти такое распределение бригад, при котором темп выполнения всего объема работ будет максимальным.

Введем обозначения:

V_i^{mp} - требуемый темп выполнения работ на *i-ом* объекте;

q_i - норма по выполнению работ на *i-ом* объекте;

x_i - количество бригад, назначаемых на выполнение работ на *i-ом* объекте.

Рассмотрим функцию,

$$V_i = V_i\,(x_i, q_i) \qquad (6.4)$$

характеризующую темп выполнения работ на *i-ом* объекте при выделении на этот объект x_i бригад.

В линейной постановке этой задачи целевая функция и ограничения должны быть линейными. В частности, функция $V_i = V_i\ (x_i,\ q_i)$ запишется в виде:

$$V_i = x_i \cdot q_i \qquad (6.5)$$

Графически эта зависимость представлена на рисунке 26.

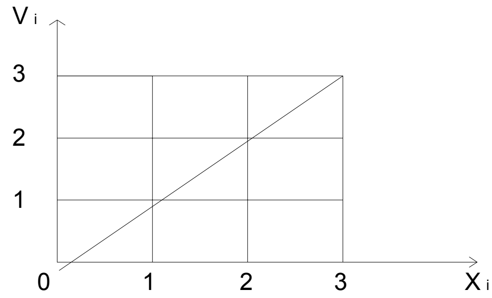


Рисунок 26 - Зависимость темпа выполнения работ на объекте от количества выделенных бригад

В качестве критерия выберем средний темп выполнения работ на n объектах.

$$V_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i x_i \qquad (6.6)$$

Если обозначить величину $\frac{1}{n} q_i$ через C_i , то целевая функция будет иметь вид:

$$V_{cp}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \qquad (6.7)$$

Систему ограничений можно построить следующим образом:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + ... + x_n \le m \\ & q_i * x_i \le V_{ш}^{тр}, i = 1, n \\ & x_i \ge 0 \\ & x_i - целые. числа \end{aligned} \qquad (6.8)$$

Таким образом, постановка задачи имеет следующий вид: найти на такое количество бригад x_i, выделяемых на каждый объект, при котором достигает максимума функция

$$V_{cp} = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \qquad (6.9)$$

И выполняются ограничения:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + ... + x_n \le m \\ & q_1 * x_1 \le V_1^{тр} \\ & q_2 x_2 \le V_2^{тр} \\ & .... \\ & q_n x_n \le V_n^{тр} \\ & x_i - целые. и. x_i \ge 0, i = i, n \end{aligned} \qquad (6.10)$$

На практике функцию $V_i\ (x_i)$ вряд ли правильно считать при значениях x_i

> 3 линейной. Учитывая тенденцию так называемого "насыщения", она скорее всего будет иметь вид, показанный на рисунке 27.

Рисунок 27 - Характер изменения общей производительности бригад в зависимости от их количества

Рассмотрим нелинейную постановку задачи, сняв требование линейности с функции $V_i\ (x_i)$ и целевой функции $F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, т.е. будем считать их произвольного вида.

Покажем важнейший недостаток приведенной ранее линейной постановки задачи, а именно: критерий - средний темп выполнения работ

$$V_{cp} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i \qquad (6.11)$$

Он не учитывает возможности выполнения работ на отдельном объекте. Например, для следующих 2-х вариантов распределения бригад может оказаться средний темп выполнения работ одинаковым

$$V_{cp}^{1} = \frac{1}{3}(30 + 60 + 0) = 30\,ед.\quad объема\quad работ/сут.$$

$$V_{cp}^{2} = \frac{1}{3}(30 + 30 + 30) = 30\,ед.\quad объема\quad работ/сут.$$

Более полным будет обобщённый критерий, если его построить на принципе учёта расстояния или «дефицита» показателей эффективности по отдельным объектам, в частности, «дефицита» по темпам возведения отдельных объектов:

$$\Delta V_i(x_i q_i) = V_i^{тр} - V_i(x_i q_i) \qquad (6.12)$$

Обычно «дефицит» выражают в относительных величинах

$$\Delta V_i(x_i q_i) = \max\left(\frac{V_i^{тр} - V_i(x_i q_i)}{V_i^{тр}}\right) \qquad (6.13)$$

Целевая функция с учётом приведённых ранее соображений может быть записана в виде:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\left[\frac{V_i^{тр} - V(x_i q_i)}{V_i^{тр}}\right] \to \min \qquad (6.14)$$

Иначе говоря, чем меньше значения максимального "дефицита", т. е. функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, тем в целом успех выполнения работ будет выше. При этом ограничения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i \le m \\ &V_i(x_i, q_i) \le V_i^{тр} + q_i \\ &x_i \le M_i \\ &x_i \ge 0, x_i - целые, i = \overline{1,n} \end{aligned} \qquad (6.15)$$

Если в линейной постановке зависимость темпа строительства от количества выделенных на объект бригад описывалась формулой

$$V_i = x_i q_i \qquad (6.16)$$

то в нелинейной постановке она может иметь следующий вид:

$$V_i = l_i * q * x_i^{\alpha i} \qquad (6.17)$$

где l_i- коэффициент, учитывающий условия выполнения работ (например, зима).

При $l_i = 1, \alpha_1 = 0{,}5, i = \overline{1{,}3}$ график функции V=$2\sqrt{x}$ показан на рисунке 28.

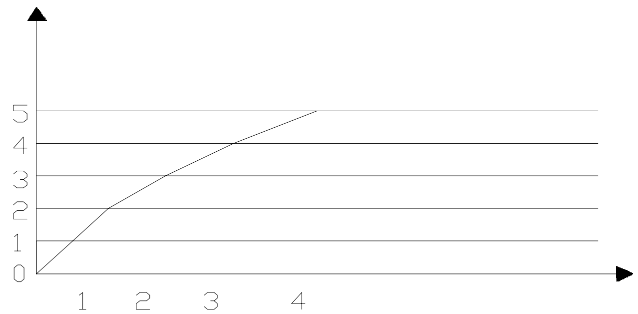


Рисунок 28 - Характер изменения возможностей бригад от их количества

В рассмотренном примере показана разница в линейной и нелинейной постановке аналогичной задачи.

В некоторых задачах из области организации и управления строительством в качестве "дефицита" может быть использовано отклонение требуемого времени продолжительности строительства от расчетного, т.е.

$$\Delta T_i = \max\left[\frac{T_i(q_i x_i) - T_i^{mp}}{T_i}\right], i = \overline{1,n} \qquad (6.18)$$

При этом целевая функция будет иметь вид:

$$F = \max_{l \le i \le n}(\Delta T_i) \qquad (6.19)$$

Алгоритмом для поиска решений в случае нелинейных моделей является математический аппарат нелинейного программирования. Если целевая функция отыскивается в условиях неопределенности, то такая задача относится к стохастическому программированию. Применительно к экономико-технологическим явлениям и процессам нелинейное программирование относится к наиболее неизученному математическому направлению.

6.3 Модели динамического программирования

Их применение связано в первую очередь с анализом так называемых многошаговых процессов принятия решений. Процесс является одношаговым, если, например, разработана схема оптимального пути из пункта A в пункт B. Если же вначале известно, как проехать из A в первый промежуточный пункт, а там станет известно, как добраться до 2-го промежуточного пункта и т.д., то весь путь будет известен только по достижении пункта B и процесс принятия решений по поводу оптимального пути из A в B станет уже многошаговым. Таким образом, динамическое программирование - это метод оптимизации, приспособленный к операциям в которых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Как раздел математического программирования динамическое программирование начало развиваться в 50-х годах XX века благодаря работам Р.Белмана и его сотрудников. Впервые этим методом решались задачи оптимального управления запасами, затем класс задач значительно расширился (многошаговые детерминированные модели задач оптимального распределения ресурсов; расчет развития на перспективу производственной базы стройиндустрии; установление оптимальных режимов замены и изношенного оборудования, производства и хранения продукции во времени, при меняющемся спросе на нее, рациональная загрузка транспортных средств, оптимальное распределение капиталовложений и др.).

Большую и практически важную группу моделей программирования составляют задачи календарного планирования строительного производства, оптимизации сроков выполнении этапов работ для минимизации себестоимости их выполнения и т.д.

Как практический метод оптимизации, метод оптимизации программирования стал возможен лишь при использовании современной вычислительной техники.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, который может быть сформулирован следующим образом; чтобы получить оптимальное решение, надо руководствоваться правилом - каков бы ни был путь достижения исследуемой системой некоторого состояния, последующие решения должны принадлежать оптимальной стратегии для остающейся части пути, начинающейся с данного состояния.

Сущность метода динамического программирования описывается так называемым динамическим рекурентным соотношением

$$\int_n(s) = \min\left[C_{sj} + \int_{n-1}(\int)\right], n = 1,2,......$$
$$\textit{Ко всем } s \qquad (6.20)$$
$$\textit{и } j \textit{ на сети}$$

где $f_n(s)$ - стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат для пути из состояния s до конечного состояния системы, если остаток пути состоит из n шагов;

$J_n(s)$ - решение, позволяющее достичь $f_n(s)$;

c_{sj} - стоимость перевода исследуемой системы из состояния s в состояние j.

Пример. Необходимо организовать перевозку строительных грузов из пункта 1 в пункт 7, используя дорожную сеть, показанную на рисунке 29. Перевозка будет осуществляться большегрузным транспортом, в связи с чем участки дорог между узловыми пунктами потребуют дооборудования. Время в днях, которое потребуется для дооборудования, показано на схеме. Необходимо определить маршрут для перевозки грузов, время дооборудования которого будет наименьшим.

Исходные данные и вычислительный процесс удобно представить в виде таблиц 15 и 16. Из таблицы 16 видно, что процесс решения начинается с конечного пункта и заканчивается в начальном, а ответ формируется, начиная с исходного пункта.

В рассматриваемом примере ответ имеет вид: 1 → 4 → 6 → 7

при этом время оборудования этого маршрута составит 12 дней.

Динамическое программирование, позволяя на каждом промежуточном этапе разрабатывать схему дальнейшей реализации программы, является весьма универсальным методом. Однако его применение чаще всего эффективно в задачах с небольшим числом переменных.

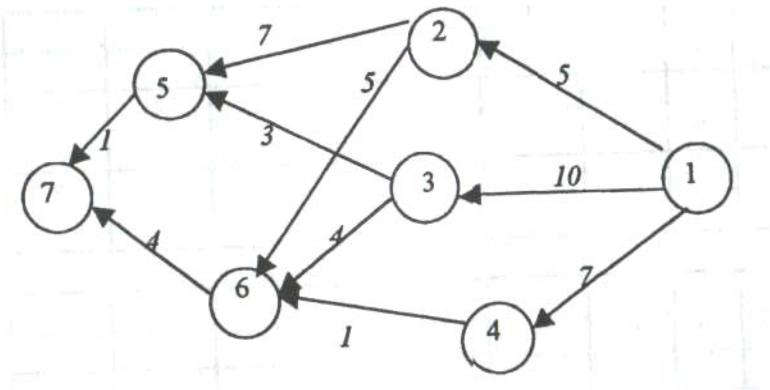


Рисунок 29 - Дорожная сеть, используемая при перевозке строительных грузов из пункта 1 в пункт 7

Таблица 15 – Исходные данные к задаче динамического программирования

Исходные данные

Cij	J	Cij	s	J	
1	2	5	4	5	7
	3	10		6	1
	4	7			
2	5	7	5	7	1
	6	5			
3	5	3	6	7	4
	6	4			

Таблица 16 – Расчёт модели динамического программирования

Вычислительный процесс

S	J	C_{ij}	$F_{n-1}(s)$	$\int_n(s) = C_{ij} + \int_{n-1}(s)$	$f_n(s)$	$J_n(s)$
n=1						
5	7	1	0	1	1	7
6	7	4	0	4	4	7
n=2						
2	5	7	1	8	5	5
	6	5	4	9		
3	5	3	1	4	5	5
	6	4	4	8		
4	5	7	1	8	6	6
	6	1	4	5		
n=3						
1	2	5	8	13		
	3	10	4	14	12	4
	4	7	5	12		

6.4 Оптимизационные модели (постановка задач оптимизации)

Оптимизационные модели представляют собой обширный класс экономико-математических моделей, позволяющих выбрать из всех возможных решений самый лучший, оптимальный вариант. В математическом смысле оптимальность понимается как достижение экстремума (максимума или минимума) критерия оптимальности, именуемого также нулевой или целевой функцией.

Оптимизационные модели решаются с помощью методов математического программирования с использованием электронно-вычислительной техники и формируются в общем виде следующим образом: "Надо отыскать значения показателей $X_1, X_2,...,X_n$, характеризующие экономический объект или процесс, придающие максимальное или минимальное значение нулевой (целевой) функции $F(X_1, X_2,...,X_n)$, при соблюдении ограничений, накладываемых на область изменения показателей $X_1, X_2,...,X_n$ и связей между ними в виде $fj(X_1, X_2,...,X_n)<a_{ij} = l,m$.

Если решение $X_1, X_2,...,X_n$ не противоречит ограничениям, принятым в задаче, то его называют допустимым. Допустимое решение, при котором нулевая функция принимает экстремальное (максимальное или минимальное решение) считается оптимальным. Иначе говоря, полученные таким образом значения неизвестных $X_1, X_2,...,X_n$ будут искомыми величинами в рассматриваемой задаче.

Если целевая функция, ограничения, связи между искомыми показателями выражены в виде линейных зависимостей, то оптимизационная модель сводится к задаче линейного программирования. На практике часто целевую функцию выразить в виде линейных зависимостей не удается. Это приводит к необходимости рассмотрения задач нелинейного программирования.

Оптимизационные модели в строительстве чаще всего встречаются в задачах отыскания лучшего способа использования экономических и материальных ресурсов, размещения производственных мощностей предприятий по производству строительных изделий, парка строительных машин и т.д.

6.5 Модели управления запасами

Модели управления запасами используются при необходимости определения в строительстве объема запаса строительных материалов, конструкций и изделий, характера изменения его в процессе возведения объекта, обновления запаса в связи с поступлением и расходованием ресурсов, с целью обеспечения бесперебойности и надежности строительного процесса при минимальных затратах, связанных с хранением, пополнением, расходованием запаса.

Так как уровень спроса неожиданно возникающих потребностей в ресурсах носит чаще всего случайный характер, то модели управления запасами должны быть стохастическими, вероятностными, в упрощенной постановке возможно использование детерминированных моделей.

В строительстве чаще всего применяются модели управления складскими запасами.

В общем виде экономико-математическая модель управления может быть представлена:

$$З(t) = Знач + P(t) - R(t) \qquad (6.21)$$

где $З(t)$ - текущий уровень запаса материалов на складе в момент времени t;

$Знач$ - начальный запас материалов на складе за время t;

$P(t)$ - поступление материалов на склад за время t;

$R(t)$ - расходование материалов со склада за время t.

Очевидно, что в любой момент запас материалов на складе не может быть отрицательным, то есть:

$$З(t) > 0 \qquad (6.22)$$

Поступление и расходование материалов со склада обычно производится партиями. Обозначив объем поставки через P_i, а объём расходуемой партии R_j, преобразуем исходное соотношение к виду:

$$З(t) = З_{нач} + \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{j=1}^{n} R_j \qquad (6.23)$$

где n - количество поставляемых партий стройматериалов;

m - количество расходуемых партий стройматериалов.

Это равенство является базисным в модели управления запасами. В зависимости от того, какие величины (показатели) в нём заданы, а какие являются искомыми, различают разные виды моделей. Часто в модели включают показатели, характеризующие затраты на поставку, хранение, отправку товаров со склада.

Критерием оптимальности моделей управления запасами, как правило, является объем затрат, их минимум (минимум исследуемой функции). В процессе определения экономического содержания затрат учитываются затраты, связанные с заказом каждой новой партии материальных ресурсов; транспортные расходы; расходы на содержание складов и хранение материалов; затраты на складские операции, штрафы и т. д.

Ограничения в задачах управления запасами могут быть самого различного характера. Как правило, они используются для описания предельной величины тех или иных параметров системы (модели). Например, ограничения могут устанавливаться по максимальному объёму запасов; максимальной площади, занимаемой складируемыми материалами и конструкциями; максимальной стоимости; средней стоимости числу поставок в заданном интервале времени, максимальному объему и т. д.

Многообразие реальных практических ситуаций предопределяет рассмотрение большого числа вариантов задач управления запасами.

Методом теории запасов можно решать очень широкий круг задач оптимального планирования таких ресурсов, как финансы, парк строительных машин и транспортных средств, трудовые ресурсы и т. д.

6.6 Целочисленные модели

Результаты решений многих задач, стоящих перед строителями, должны быть выражены в целых числах (например, определение оптимального количества заводов, являющихся поставщиками строительных конструкций или числа монтажных кранов и т.д.). Но если даже в простую задачу линейного программирования внести дополнительное требование целочисленности неизвестных (х = 1,2,3 и т.д.), то решать ее обычными методами уже нельзя. На первый взгляд кажется, что можно легко выйти из положения, округлив полученное каким-либо методом решение. Но, что может означать, к примеру, 2, 3 дома? Надо строить 3 дома? Это решение невозможно, либо возможно осуществить за счет уменьшения других показателей плана. Найти целочисленный оптимальный план - задача непростая. Для решения ее требуется применение довольно тонких специальных математических методов (например, метод "Гомори", основанный на идеях симплекс-метода).

Одним из примеров целочисленного программирования является задача о назначениях. Покажем на примере сущность этой задачи и алгоритм ее решения, в основе которого лежит так называемый венгерский метод.

Пример. Пусть имеется необходимость перебросить пять строительных бригад к месту строительства пяти различных объектов. Под назначением понимается факт приписки бригады к одному из объектов. Задача состоит в том, чтобы найти такое назначение, при котором общее время доставки бригад к месту работы было минимальным.

Представим время t_{ij} доставки *i-ой* бригады в *j-ый* пункт назначения в виде таблице 17.

Таблица 17 – Этап 1

3	5	7	2	4
4	6	7	3	1
2	1	3	4	5
6	3	2	7	8
5	4	3	1	9

Таблица 18 – Этап 2

1	4	5	1	0
2	5	5	2	0
0	0	1	3	4
4	2	0	6	7
3	3	1	0	8

Основной принцип задачи о назначениях состоит в следующем: оптимальность решения не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов t_{ij} строки (или столбца) таблицы (матрицы) на одну и ту же величину t.

Алгоритм решения может быть представлен в виде этапов.

Этап 1.Образование нулей.

Среди элементов каждого столбца таблицы 17 выбирается наименьший элемент (в таблице эти элементы обведены кружочками) и вычитается из всех элементов этого столбца. В результате этих действии получаем таблицу 18, в которой элементами являются разности

$$t_{ij}^{(1)} = t_{ij} - \min_i t_{ij} \qquad (6.24)$$

Таблица 19 – Этап 3

					$X_{(2)}$	
1	1	4	5	1	$\boxed{0}$	$X_{(3)}$
2	2	5	5	2	0	$X_{(1)}$
3	$\boxed{0}$	0	1	3	4	
4	4	2	$\boxed{0}$	6	7	
5	3	3	1	$\boxed{0}$	8	
	1	2	3	4	5	

Таблица 20 – Этап 4

1	$\boxed{1}$	4	5	1	0
2	2	5	5	2	$\boxed{0}$
3	0	$\boxed{0}$	1	3	4
4	4	2	$\boxed{0}$	6	7
5	3	3	1	$\boxed{0}$	8
	1	2	3	4	5

Этап 2. Поиск возможного оптимального решения.

Оптимальное решение в данной постановке означает, что затраты имеют нулевое значение. Если такое решение найти не удалось, то следует перейти к третьему этапу. Последовательность действий при поиске оптимального решения состоит в следующем. Анализ табл. 18 начинается с выявления строк, содержащих минимальное число нулей, при этом один из нулей такой строки обводится квадратиком. Затем вычёркиваются все остальные нули, находящиеся в этой строке. Процесс продолжается до тех пор, пока в таблице все нули будут либо обведены квадратиками, либо вычеркнутыми. На данном этапе оптимального решения получить не удалось, так как во второй строке таблицы нет нулевого элемента.

Возьмем, например, элемент t_{22} - 5, тогда решение будет иметь вид:

$$t_{22}+t_{15}+t_{31}+t_{43}+t_{54}=5+0+0+0+0=5 \qquad (6.25)$$

а это решение неоптимально (таблица 19).

Этап 3. Образование набора строк и столбцов, содержащих все нули, имеющиеся в таблице (таблица 19).

Последовательность действий:

1 Пометим крестиком (x) строки, не содержащие ни одного обведённого квадратиком нуля. В нашем случае строка 2.

2 Отметим каждый столбец, содержащий зачеркнутый нуль хотя бы в одной из помеченных строк. В нашем случае 5-ый столбец.

3 Пометим каждую строку, в которой содержится обведенный квадратиком нуль хотя бы в одном из помеченных столбцов. В нашем случае строка 1.

4 Далее повторяем перечисленные действия 2 и 3 пока не останется строк и столбцов, которые еще можно пометить. Переходим к этапу 4.

Этап 4. Завершение этапа 3.

Прочеркнем каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец (таблица 19). Прочеркнем строки 3, 4, 5 и 5-ый столбец. Переходим к этапу 5.

Этап 5. Добавление нулей.

В части таблицы, состоящей из неперечеркнутых элементов, выберем наименьший элемент (таблица 19). Это будет элемент 1-ой строки, равный 1. Вычтем этот элемент из всех элементов столбцов 1, 2, 3, 4, 5 и прибавим его затем ко всем элементам перечеркнутых строк, т.е. строк 3, 4, 5. В результате получаем таблицу 20.

Этап 6. Получение оптимального решения или переход к этапу 3

Оптимальное решение определяется в последовательности, описанной в этапе 2. Повторив этап 2, получим таблицу 20. В таблице 20 нули, обведенные квадратиками, образуют оптимальное решение:

$$t_{11} + t_{25} + t_{32} + t_{43} + t_{54} = 3 + 1 + 1 + 2 + 1 = 8 \qquad (6.26)$$

6.7 Цифровое моделирование (метод перебора)

Методы линейного и динамического программирования дают возможность заменить простой перебор возможных вариантов решений упорядоченным и экономным поиском оптимального результата. Однако существует много технико-экономических задач, важных в практическом отношении, для решения которых нужны иные методы. К таким задачам относятся различные вероятностные задачи, где оптимальное решение (поведение, стратегию) надо выбирать в условиях неопределенности исходных данных, когда поведение системы случайно и может быть описано лишь в терминах математической статистики (среднее значение, математическое ожидание, дисперсия, спектр, функция корреляции, законы распределения и т.п.). В этих случаях обычно нельзя указать рациональные аналитические методы решения, и поэтому такие задачи решаются методом перебора.

Одним из простейших и, пожалуй, наиболее распространенных методов оптимизации является метод перебора (сканирования). Сущность этого метода состоит в следующем.

Пусть в процессе моделирования производственной ситуации, по которой необходимо принять решение, получена символьная модель вида:

$$W = f(c_i, v_j) \qquad (6.27)$$

где W - общий критерий функционирования;
c_i - множество управляемых переменных;
v_j - множество неуправляемых переменных;
f - соотношение, связывающее управляемые и неуправляемые переменные.

Чтобы получить желаемое решение, нужно определить значения управляемых переменных, максимизирующие или минимизирующие критерии функционирования системы W.

Обычно для получения решения задачи поступают таким образом. Сначала устанавливают диапазон возможных изменений управляемых переменных C_i. Затем для дальнейших исследований используются управляемые переменные C_i, которые удовлетворяют системе определённых ограничений. Для этих значений вычисляются значения целевой функции W. В качестве решения задачи принимаются значении C_i, при которых целевая функция принимает экстремальные значения.

Достоинством метода является не только простота его реализации на ЭВМ, но и принципиальная применимость к решению многих практических задач, возможность получения глобального экстремума. Основной недостаток - большие затраты времени, особенно в связи с возрастанием размерности задачи.

6.8 Вероятностно-статистические модели

Это модели, учитывающие влияние случайных факторов в процессе функционирования строительных систем, основаны на статистической, т.е. количественной оценке массовых явлений, позволяющей учитывать их нелинейность, динамику, случайные возмущения, описанные разными законами распределения.

Вообще в любой производственной задаче всегда присутствуют вероятностные элементы. Если принимаются решения по таким моделям, то они должны содержать информацию о вероятности наступления определенных событий и о том, какое влияние эта вероятность может оказать на результаты данной системы. Например, при организации планового профилактического ремонта строительных кранов необходимо знать не только, какие узлы и детали их могут выйти из строя, но и вероятность наступления этого события, а также точно оценить последствия.

Вероятностно-статистические модели изучаются как с привлечением традиционного арсенала средств и методов теории вероятности и математической статистики (теория массового обслуживания, факторный анализ, стохастическое программирование и т.д.), так и путем статистического моделирования, представляющего собой числовую имитацию с помощью ЭВМ функционирования модели.

Возможности в изучении вероятностных моделей, открываемые методом статистического моделирования, настолько велики, что сегодня уже приходится обосновывать необходимость традиционного аналитического подхода к построению моделей и изучению их свойств. Статистическое моделирование является лучшим методом в том случае, если целью задачи является просто получение ответа в конкретном случае. Если же целью является получение общего решения и проникновение в глубь изучаемого феномена, то статистическое моделирование – менее удовлетворительный путь.

6.9 Модели теории игр

На практике не редко возникают ситуации, когда интересы различных подразделений в строительстве не совпадают. Такие ситуации называются конфликтными, а модели, с помощью которых эти ситуации анализируются – игровыми.

Теория игр - это математическая теория разрешения таких ситуаций, в которых сталкиваются интересы сторон, преследующих различные цели. Игра представляет собой математическую модель конфликтной ситуации, с помощью которой участвующие в ней стороны, действуя по определенным правилам, пытаются найти стратегию поведения гарантирующую, в результате разрешения конфликта, достижение желаемой цели.

Результат действий одной из сторон зависит не только от её действий, но и от действий, выбранных противниками. Таким образом, задачей игр является установление таких способов действий, которые обеспечивают наибольшую выгоду каждого из участников игры.

Наибольшее развитие в теории игр получило изучение так называемых парных игр с нулевой суммой. Иначе говоря, использование таких конфликтных ситуаций, в которых имеются две враждующие стороны и выигрыши, получаемые одной стороной в ходе конфликта и в результате выбора обеими сторонами определенных стратегий, в точности равны проигрышам другой. При этом стратегия – это совокупность правил и рекомендаций по ведению игры от начала до конца. Условия игры задаются так называемой матрицей игры или платежной матрицей. Она показывает плату играющих сторон в случае, когда одна сторона выбирает стратегию A_i, а другая - стратегию B_j. Если сторона A имеет n стратегий, то такая игра называется игрой размерности $n \times m$.

Приведем пример платежной матрицы, заимствованной из [20].

Она отражает ситуацию, в которой сторона A для достижения цели может выбрать одну из трех стратегий A_1 ,A_2, A_3. В то же время сторона B может ответить любой из четырех стратегий B_1, B_2, B_3, B_4. Цифрами в платежной матрице показаны выигрыши и проигрыши.

Из таблицы 21 следует, что сторона B проигрывает столько, сколько выигрывает сторона A. Цель игры для стороны A - найти стратегию, обеспечивающую максимальный гарантированный выигрыш, а цель стороны *B* – выбрать стратегию, обеспечивающую минимальный проигрыш.

Таблица 21 - Платежная матрица

A_i	B_j				Минимальный гарантированный выигрыш стороны А (min a_{ij})
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	50	50	18	25	18
A_2	27	5	9	95	5
A_3	64	90	12	20	12
Максимальный выигрыш стороны В (max a_{ij})	64	90	18	95	

Очевидно, сторона *A* выберет стратегию A_j, гарантирующую получение максимального среди минимальных выигрышей, равный 18 единицам. При этом сторона *B* ответит стратегией B_3, которая гарантирует ей минимальный из максимальных проигрышей, также равный 18 единицам. Любые другие ситуации могут либо только уменьшить выигрыш стороны *A*, либо увеличить проигрыш стороны *B*.

Такое понятие теории игр как компромиссное (равновесное или эффективное) решение помогает более глубокому выяснению принципов оптимальности в процессах принятия решений.

Следует отметить, что теория игр в том виде, как она сейчас сложилась, представляет собой скорее раздел "чистой", а не прикладной математики. Впервые основные положения этой науки были изложены в 1944 году в книге Неймана и Моргенштейна "Теория игр и экономическое поведение". Теория игр представляет собой пример того, как можно математизировать задачи, которые обычно решались чисто экспериментальным путем, без использования количественных измерителей.

6.10 Модели итеративного агрегирования

Итерация (от лат. iteratio - повторение) - повторное применение каких-либо математических операций.

При использовании математических моделей на различных уровнях иерархии управления приходится иметь дело с агрегированием (укрупнением) информации. Очевидно, что для моделей более высоких уровней управления характерна большая степень агрегирования показателей, чем для моделей низких уровней, система показателей которых может быть весьма детализированной. Поэтому при согласовании решений "по вертикали" приходится иметь дело с проблемой, связанной с неодинаковой степенью детализации показателей моделей разных уровней. Для решения этой проблемы разрабатываются модели и методы итеративного агрегирования.

6.11 Организационно-технологические модели

Организационные, организационно-технологические и технологические модели представляют графическое или формализованное описание процессов возведения зданий, сооружений, структуру управления этими процессами, строительной организацией и т.д. В любой организационно-технологической модели должны быть описаны перечень строительно-монтажных работ, порядок их выполнения, характер взаимосвязей между работами, отражающих специфику технологии строительства, строительные нормы и правила, необходимость рационального использования ресурсов и т.д.

Технологические модели строительного производства являются основным элементом современных автоматизированных систем управления строительством (АСУС). Центральное ядро оперативного управления и тесно связанных с ним задач подготовки строительного производства, технико-экономического управления, управления материально-техническим обеспечением и многих других задач базируется именно на таких моделях. Моделирование задач строительного производства требует значительной исходной информации, в первую очередь нормативной.

Организационная модель наглядно и просто отображает структуру управления строительно-монтажной организацией, в то время как экономико-математическая модель строительной организации чрезвычайно сложна ввиду ее многозвенности и динамичности. Различают дискриптивный и нормативный (прескриптивный) методы разработки организационных моделей. При дискриптивном методе анализируется существующая организационная система, разрабатываются и внедряются экономимо-математические методы для решения задач управления и совершенствования организационной структуры. При нормативном методе разрабатываются оптимальная организационная структура строительно-монтажной организации и соответствующая ей оптимальная система управления.

Организационные, организационно-технологические и технологические модели являются одним из инструментов организации планирования и управления производственно-хозяйственной деятельностью строительно-монтажных организаций и строительным производством. Поэтому приобретение навыков в их формировании и применении является обязательным условием подготовки инженеров-строителей.

6.12 Графические модели

Для анализа структуры, связей, процессов и отношений в производственных системах используются графические модели, обладающие определенной наглядностью и универсальностью, позволяющей рассматривать их в любых направлениях, по частям или в целом. Графические модели нашли широкое применение в строительстве для отображения взаимосвязи работ подразделений, распределения обязанностей, полномочий и т.д.

Графически можно интерпретировать (т.е. изобразить в виде планов, схем, диаграмм или графиков) многие модели линейного и динамического программирования, организационно-технологические и др.

На практике графические методы моделирования классифицируются по содержанию и форме на три основные группы:

- оргограммы, т.е. графики, отражающие организационные отношения в производственных системах. К ним относятся классификационные схемы, оргасхемы, оперограммы, органиграммы и т.д. Оргограммы используются для моделирования организационных структур и процессов;
- хронограммы (пооперационные, контрольные, сборочные и другие графики);
- топограммы (схемы обслуживания рабочих мест, маршрутные схемы, циклограммы и т.д.). Хронограммы и топограммы, графически отображающие расположение предметов, ресурсов и явлений во времени и пространстве, нашли наибольшее применение при построении моделей строительного производства (линейные графики Ганта, циклограммы, сетевые графики и др.);
- диаграммы и номограммы - это графики количественных отношений (соотношений) различных величин. Номограммы дают также возможность определить некоторые величины без специальных вычислений.

6.13 Сетевые модели

Традиционные линейные графики горизонтальные и циклограммы, вообще говоря, не дают указаний о нахождении способов наилучшего использования ресурсов. Сетевые модели позволяют найти оптимальные или близкие к оптимальным последовательности работ и использования ресурсов. Опираясь на современную вычислительную технику, сетевое моделирование, наряду с эффективным использованием времени и других ресурсов, обеспечивает также возможность четкого оперативного руководства при реализации весьма сложных строительных программ. Сетевая модель, помимо графической интерпретации, может быть представлена, например, в виде таблицы или массива исходных данных для ЭВМ.

Термин сетевая модель (сетевой график, логическая сеть) основывается на понятии ориентированного графа. Ориентированным графом называется совокупность множества точек и множества ориентированных дуг, соединяющих эти точки.

Область графа, ограниченная несколькими точками (вершинами) некоторые из них не имеют входящих или выходящих дуг, носит название сети. Сеть, моделирующая определенный строительный процесс (программу), называется сетевой моделью данного процесса (программы) При этом ориентация дуг графа осуществляется в соответствии с логикой (технологией) этого процесса.

Упорядоченная группа дуг, в которой каждая вершина (исключая первую и последнюю), является общей точкой для двух дуг в группе, называется путем. Один или несколько из множества путей, который на строительном графике имеет наибольшую продолжительность, называется критическим. Переоценка времени реализации всего проекта связана с переоценкой времени выполнения работ, лежащих на этом пути. Критический путь находится с помощью ЭВМ и различных математических методов (например, можно использовать динамическое программирование).

Сетевые модели ознаменовали собой значительный шаг вперед в области моделирования и календарного планирования дискретных технологических процессов. В отличие от линейных, сетевые модели могут описать взаимосвязи между работами и определенный класс организационно-технологических схем строительных процессов.

Математические методы сетевого планирования достаточно хорошо разработаны. Имеются многочисленные программы анализа сетевых моделей и решения задач календарного планирования на их основе.

На базе сетевых моделей созданы так называемые системы сетевого планирования и управления, которые широко применяются в различных отраслях экономики России и особенно в строительстве. Системы сетевого планирования и управления, являясь предшественником автоматизированных систем управления строительством, прочно вошли в них в виде одной из основных частей.

Сетевые методы нельзя отнести к оптимизационным, хотя и существуют способы нахождения на их основе наилучших вариантов. В большей степени они связаны с анализом всего комплекса работ, осуществляемых для реализации определенной программы. При этом соблюдается основной принцип использования сетевых методов - выделение ведущего звена (критического пути), определяющего выполнение всей программы. В соответствии с этим принципом во всей совокупности работ выделяют те, которые в случае невыполнения их в срок, задержат, например, ввод в строй какого-либо объекта.

Значительным достижением, в настоящее время, является разработка способов построения стохастических сетевых моделей, в которых анализируемые параметры имеют вероятностный характер. Это сразу же поставило сетевое моделирование в ряд наиболее эффективных способов нахождения тех или иных рациональных методов планирования и поиска управленческих решений. Некоторые успехи достигнуты и в области оптимизации параметров сетевых графиков. Это стало возможным благодаря использованию методов теории графов.

7 Организационное моделирование систем управления строительством

7.1 Основные направления моделирования систем управления строительством

Организационные модели используются на всех стадиях проектирования систем управления строительством для поиска, обоснования и выбора оптимальной структуры управления, но особую роль они играют при определении количественных характеристик аппарата управления, разработке процедур управленческой деятельности, при анализе и совершенствовании информационных потоков [20].

Обычно применяемые в экономических моделях методы теории организации и управления непосредственно заимствованы из технических дисциплин. Эти методы объясняют, как надо управлять физической системой, воздействуя на соответствующие свободные параметры при ограничениях, характеризующих законы функционирования системы, но недостаточно учитывают социально-психологические факторы.

На содержательном уровне задача управления экономическими системами формулируется в тех же терминах, но они обладают более организованной внутренней структурой, вызывающей значительные затруднения при ее описании.

На практике можно выделить следующие основные направления моделирования систем:

- математико-кибернетическое моделирование, включающее в себя математические многоуровневые системы принятия решений, имитацию процессов организационного управления, формальное описание информационных и административно-управленческих связей и другие модели;
- моделирование организационного поведения на реальных строительных объектах с целью изучения степени управленческой специализации, различий в стилях управления, опробования вариантов организационных структур и др.;
- использование статистических методов и моделей для анализа организационных параметров на базе выборочных обследований работы реальных строительных организаций.

7.2 Аспекты организационно-управленческих систем (моделей)

Каждое из указанных выше направлений, несмотря на различие в используемом методическом аппарате, изучает аналогичные проблемы, которые должны:

- отражать характер управления производственными процессами. Элементами модели являются производственные процессы и связи между ними;
- показывать взаимосвязь источников и потребителей информации.

Элементы модели - источники и потребители информации, а также связи между ними;

- анализировать процессы сбора, систематизации, обработки информации и выработки управленческих решений. Элементы модели - процессы обработки информации и связи между ними;
- отражать специализацию аппарата управления, элементы модели - функции аппарата управления, его работы и операции;
- анализировать состав органов и объектов управления, их административной подчиненности. Элементами модели являются подразделения строительной организации, должности, характеристики подчиненности;
- отражать взаимоотношения индивидуумов и групп людей. Элементами модели являются конкретные индивиды и группы людей, их взаимосвязи.

Указанные проблемы моделирования систем управления в значительной степени связаны между собой, каждой из них соответствует своя структура.

7.3 Деление организационно-управленческих моделей на группы

Модели организационных систем и процессов управления условно можно разделить на две группы:

Модели первой группы. К ней относятся модели принятия решений и информационных потоков - модели принятия решений (одно или многоуровневых), информационные модели коммуникационной сети, компактные информационные модели, интегрированные информационно-функциональные модели. Для моделей первой группы характерно формальное моделирование одного или нескольких аспектов организационной системы с использованием экономико-математических методов. Результаты такого моделирования используются лишь как дополнительный аргумент при оптимизации организационной структуры системы управления.

Модели второй группы в основном отражают связи и отношения между элементами организационной структуры. Ко второй группе организационно-управленческих моделей относятся: модель организационно-технологических связей, модель организационно-управленческих связей, модель факторного статистического анализа управленческих связей, детерминированная функциональная модель, организационная модель массового обслуживания, организационно-информационнная модель. Для второй группы организационно-управленческих моделей характерно использование, полно или частично, формализованной структуры управления. Результаты моделирования могут быть непосредственно использованы, помимо совершенствования информационной системы управлении, при оптимизации организационной структуры строительной организации.

7.4 Виды моделей первой группы

Модели принятия решений (одно или многоуровневых) отражают информационный (коммуникационный) и информационно-технологический аспекты системы управления. В качестве математического аппарата используются методы математического программирования, сетевые модели, теории игр и т.д., т.е. широкий арсенал методов исследования операций.

Информационные модели коммуникационной сети строительной организации отражают производственно-технологический и социально-психологический аспекты, формируются по принципу минимизации суммарной стоимости передачи информации при условии доведения ее до всех получателей. В этом случае информационная структура отождествляется с организационной структурой управления. Эти модели целесообразно использовать для решения бухгалтерских, учетных, оперативно-диспетчерских и т.п. процессов, когда качество управления строительной организацией в значительной мере определяется затратами на передачу информации.

Компактные информационные модели отражают производственно-технологический, информационно-технологический и организационно-административный аспект управления и формируются с использованием принципа минимизации коммуникационных связей. Предполагается, что наилучшие условия для этого создаются при максимальной близости элементов системы.

Интегрированные информационно-функциональные модели. Интегрированная информационно-функциональная модель отражает производственно-технологический, функциональный и социально-психологический аспекты, используется для разработки и внедрения интегрированной системы обработки данных с одновременной оптимизацией организационной структуры строительной организации.

7.5 Виды моделей второй группы

Модели организационно-технологических связей отражают производственно-технологический, информационный, информационно-технологический аспекты управления и основываются на предположении, что на низовых уровнях управления решающим фактором, определяющим организационную структуру, является характер технологии строительного производства.

Связи между производственно-технологическими процессами и занятыми в них работниками различаются по типам (общие, последовательные, многосторонние) и интенсивности (сильные, средние, слабые). Наиболее тесно связанные элементы системы строительной организации объединяются в группу с последующим выделением руководителей-мастеров, прорабов, начальников участков.

Модель организационно-управленческих связей отражает производственно-технический, функциональный, информационно-технологический и организационно-административный аспекты, дает возможность оценить интенсивность информационных (организационных) связей в диапазоне от "очень сильная связь" до "связь между функциями нежелательна”. Анализируются варианты закрепления функций за подразделениями, выделяются функции, имеющие наиболее тесную связь, контроль за исполнением которых будет выполнять один руководитель. Модель организационно-управленческих связей применяется для анализа сложных управленческих связей и оптимизации структуры на среднем уровне.

Модель факторного статистического анализа управленческих связей. Модель факторного статистического анализа управленческих связей отражает производственно-технологический, информационно-технологический, функциональный и организационно-административный аспекты, базируется на анализе целей строительных организаций, рассматриваемых на определенный, продолжительный период времени. На основе этого устанавливается перечень функций и задач в системе управления. Осуществляется анализ значимости отдельных задач, их связей и взаимозависимостей, оценивается целесообразность укрупнения задач и обязанностей руководителей, ответственных за их реализацию. Полученные данные обрабатываются методами факторного анализа. Модель применима в случае, когда известен круг задач и состав исполнителей, а также в случае необходимости перераспределения функций и задач подразделений внутри действующей строительной организации.

Детерминированные функциональные модели. Детерминированная функциональная модель отражает производственно-технологический, функциональный и организационно-административный аспекты; создается путем деления функций управления на элементарные функции (работы, операции), каждая из которых могла бы выполняться одним исполнителем и при этом его загрузка была бы нормальной. Проводится балансировка загрузки работников за счет регулирования числа подчиненных у одного руководителя, передачи, при необходимости, части загрузки другому руководителю и т.п. Разрабатываются права и обязанности каждого руководителя, положение о функциях подразделений в системе управления строительной организации. Модель применяется для анализа на среднем уровне системы управления при условии его стабильного функционирования в течение длительного времени.

Организационные модели массового обслуживания. Организационная модель массового обслуживания отражает производственно-технологический, социально-психологический и организационно-административный аспекты управления. В основу ее положено математическое описание процесса функционирования системы управления с учетом регулярного выполнения регламентированных задач управления и случайного, незапланированного взаимодействия в процессе функционирования системы управления из-за отклонений при реализации ранее принятых решений.

Подсистема оперативного управления описывается в виде линейно-стохастической сети массового обслуживания с неоднородными потоками требований по перераспределению ресурсов и оптимизируется по критерию минимума суммы потерь, возникающих вследствие естественного запаздывания управляющих решений (регулярная составляющая), а также непредвиденных задержек в принятии и согласовании решений (случайная составляющая).

Модель дает возможность оказать помощь в создании организационной структуры строительной организации и информационных связей функциональных служб, принимающих согласованные решения.

Организационно-информационные модели. Организационно-информационная модель отражает производственно-технический, функциональный, социально-психологический и организационно-административный аспекты управления и имеет вид органиграммы распределения ролей в процессе принятия решений.

Во Франции, например, существует нормативное описание органиграммы, где дается следующее определение её цели: "Цель органиграммы структуры управления заключается в схематическом представлении всего предприятия, его части или отдельного органа".

Обычно выделяют два типа связей в органиграмме: связи по линии иерархии управления, изображаемые сплошными линиями, и связи совещательного (консультативного) характера, изображаемые пунктирными линиями, хотя при желании показать другие связи можно использовать и другие условные обозначения.

Те же французские специалисты выделяют следующие соображения, определяющие практическое значение разработки и использования организационно-информационной модели в виде оргограммы:

- все приобретает определенный порядок, представляющий собой важнейший фактор эффективности работы предприятия, структуру его организации;

- руководитель предприятия и каждый работник получают четкое представление обо всем предприятии в целом и об области своей деятельности;

- устраняется возможность ослабления ответственности, представляющая собой серьезную опасность для предприятия;

- создается возможность систематического выявления перегрузок, дублирования и необходимости создания новых должностей;

- устраняются конфликты между званиями (должностями) и полномочиями (ответственностью);

- при отсутствии руководителя распределение работ на предприятии может быть произведено автоматически;

- создается возможность для быстрого формирования новых элементов.

На рисунке 30 показан пример органиграммы одной из фирм, занимающейся экспортом своей продукции, и указаны линии прямого подчинения, связей информационного и совещательного (консультативного) характера, линии передачи специализированных полномочий. Главный администратор по сбыту имеет штабные функции (совещательную власть) по отношению к другим директорам по сбыту и имеет функциональные, или специализированные, полномочия (полученные от генерального администратора в части, относящейся к сбыту) по отношению к региональному директору. Диаграмма наглядно показывает, с одной стороны, что эти связи представляют собой нечто большее, чем информационные и совещательные (консультативные) связи, а с другой - что региональный директор имеет право апеллировать непосредственно к генеральному администратору по поводу распоряжений, отдаваемых, например, генеральным администратором по сбыту. В данном случае речь идет о линейной и совещательной структуре (так называемой функциональной структуре) с добавлением связей, возникающих в результате передачи некоторых специализированных полномочий.

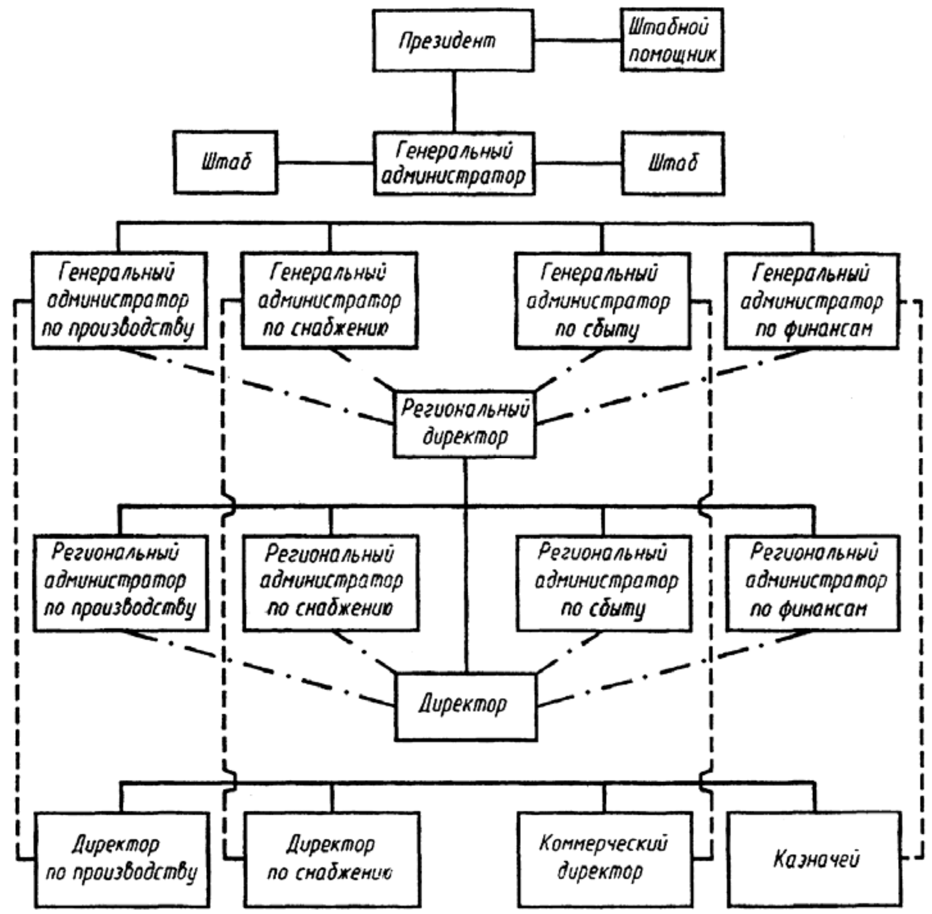


Рисунок 30 - Пример функционально-сбытовой органиграммы фирмы

------- линия прямого подчинении

- - - - линия связей информационного и совещательного (консультативного) характера

– · – · линия передачи специализированных полномочий

Наконец, в этой же самой структуре мы видим связь, обозначенную пунктиром. Эта связь информационного и совещательного (консультативного) характера имеет нисходящее направление, но она предполагает наличие постоянных взаимоотношений. Это функциональная служба, отнесенная к определенному уровню системы управления, в которой специалист, находящийся на нижней ступени, подчиняется линейному начальнику.

Органиграмма, понимаемая в широком смысле, содержит, как правило, структуры управления и перечень функций, осуществляемых каждым руководителем.

Список использованных источников

1. Андреева, Е. А. Математическое моделирование [Текст]: учебное пособие для вузов / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. - Тверь: Тверской гос. ун-т, 2004. - 502 с. - Библиогр.: с. 474-475.

2. Барановский, М. И. Экономико-математическое моделирование в нефтяной промышленности [Текст] / М. И. Барановский, Ю. С. Волков, Г. И. Овсеенко. - М.: Недра, 1979. - 136 с.: ил. - Библиогр.: с. 131-134.

3. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков.- 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Бином, 2003. - 632 с.: ил. - ISBN 5-94774-060-5.

4. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст]: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков.- 4-е изд. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. - 636 с.: ил. - (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 624-628. - Предм. указ.: с. 629-632. - ISBN 5-94774-396-5.

5. Баженов, Ю. М. Перспективы применения математических методов в технологии сборного железобетона [Текст] / Ю. М. Баженов, В. А. Вознесенский. - М.: Стройиздат, 1974. - 192 с.

6. Бояринов, А.И. Методы оптимизации в химической технологии Текст]: учебное пособие / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. – 2-е изд. - М.: Химия, 1975. - 576 с.: ил. - Предм. указ.: с. 570-575.

7. Вознесенский, В. А. Численные методы [Текст]: решения строит.-технол. задач на ЭВМ: учеб. для вузов / В. А. Вознесенский, Т. В. Ляшенко, Б. Л. Огарков ; под ред. В. А. Вознесенского. - Киев: Вища шк., 1989. - 324 с.: ил. - Библиогр.: с. 318-320. - Предм. указ.: с. 321-325. - ISBN 5-11-001439-6.

8. Вознесенский, В. А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях [Текст] / В. А. Вознесенский.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Финансы и статистика, 1981. - 263 с.: ил. - (Математическая статистика для экономистов). - Библиогр.: с. 256-260.

9. Воробьев, В. А. Применение физико-математических методов в исследовании свойств бетона [Текст] / В. А. Воробьев, В. К. Кивран, В. П. Корякин. - М.: Высш. шк., 1977. - 272 с.: ил.

10. Вознесенский, В.А., Принятие решений по статистическим моделям [Текст] / В. А. Вознесенский, А.Ф. Ковальчук. - М.: Статистика, 1978. -192 с. ил. (Математическая статистика для экономистов). - Библиогр.: с. 186-190.

11.Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман .- 12-е изд., перераб. - М.: Высш. шк., 2008. - 479 с.: ил - (Основы наук). - Прил.: с. 461-473. - Библиогр.: с. 474-479. - ISBN 978-5-9692-0192-7

12.Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие / В. Е. Гмурман.- 11-е изд., перераб. - М.: Высшее образование, 2008. - 404 с. - (Основы наук). - Прил.: с. 387-404. - ISBN 978-5-9692-0194-1

13.Гранов, Г. С. Экономико-математическое моделирование в решении организационно-управленческих задач в строительстве [Текст]: учеб. пособие для вузов / Г. С. Гранов, Г. Ш. Сафаров, К. Р. Тагирбеков. - М.: АСВ, 2004. - 64 с. - ISBN 5-93093-100-3.

14.Горев, В. В. Математическое моделирование при расчетах и исследованиях строительных конструкций [Текст]: учеб. пособие для вузов / В. В. Горев, В. В. Филиппов, Н. Ю. Тезиков. - М.: Высш. школа, 2002. - 206 с.: ил. - ISBN 5-06-004335-5.

15.Гусаров, В.М. Статистика [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.М. Гусаров. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. - 463 с. - Библиогр.: с. 456. - ISBN 5-238-00206-8.

16.Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Пер. с англ.: Методы планирования эксперимента / Джонсон Н., Лион Ф. - М.: Мир, 1981. - 520 с.: ил.

17.Ермаков, С.М. Математическая теория оптимального эксперимента: учеб. пособие / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. - М.: Наука, 1987. - 319с.: ил. - Библиогр.: с. 315-318.

18.Измаилов, А. Ф. Численные методы оптимизации [Текст] / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. - М.: Физматлит, 2003. - 304 с. - Библиогр.: с. 294-296. - Предм. указ.: с. 297-300. - ISBN 5-9221-0045-9.

19.Калинина, В.Н. Математическая статистика [Текст]: учеб. для средн. спец. учеб. заведений / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин.- 3-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 2001. - 336 с. - ISBN 5-06-003865-3. - ISBN 5-7695-0376-5.

20.Карпов, В.В. Математические модели задач строительного профиля и численные методы их исследования: учеб. пособие для вузов / В.В. Карпов, А.В. Коробейников.- 2-е изд., доп. и перераб. -М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 1999. - 188 с. - ISBN 5-93093-051-1.

21.Колемаев, В. А. Экономико-математическое моделирование [Текст]: моделирование макроэкономических процессов и систем: учебник для вузов / В. А. Колемаев. - М.: Юнити, 2005. - 295 с. - Прил.: с. 251. - Библиогр.: с. 292. - ISBN 5-238-00969-0.

22.Коробов, П.Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов [Текст]: учебник для вузов / П. Н. Коробов.- 3-е изд. перераб. и доп. - СПб.: ДНК, 2006. - 376 с. - (Классическое образование). - Прилож.: с. 360-369. - ISBN 5-901562-60-7.

23.Котюков, В.И. Многофакторные кусочно-линейные модели [Текст] / В.И. Котюков. - М.: Финансы и статистика, 1984. - 216 с.: ил.

24.Лапчик, М.П. Численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. - М.: Академия, 2004. - 384 с.- (Высшее профессиональное образование). - Библиогр.: с. 381. - ISBN 5-7695-1339-X.

25.Математическое моделирование и оптимизация химико-технологических процессов [Текст]: практ. рук. / В.А. Холоднов [и др.]. - СПб.: Профессионал, 2003. - 480 с. - Библиогр.: с. 466-469. - ISBN 5-98371-010-9.

26.Рохваргер, А.Е., Математическое планирование научно-технических исследований [Текст] / А.Е.Рохваргер, А.Ю.Шевянов. - М.: Наука, 1975. - 440

с.: ил.
27.Самарский, А. А. Математическое моделирование [Текст]: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов.- 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2001. - 320 с. - Библиогр.: с. 313-316. - ISBN 5-9221-0120-X.
28.Статистика [Текст]: учеб. пособие / под ред. В.М. Симчеры. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 368 с. - Библиогр.: с. 363-364. - ISBN 5-279-02788-X.
29.Статистические методы в инженерных исследованиях [Текст]: (лабораторный практикум): учеб. пособие для вузов / под ред. Г. К. Круга. - М.: Высш. шк., 1983. - 216 с
30.Таблицы планов эксперимента для факторных и полиноминальных моделей [Текст]: справ. издание / под ред. В. В. Налимова. - М.: Металлургия, 1982. - 752 с.: табл. - Библиогр.: с. 749.
31.Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.А. Ватутин [и др.].- 2-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2003. - 328 с.: ил.- (Высшее образование). - Авт. указаны на обороте тит. л. - Библиогр.: с. с. 322. - ISBN 5-7107-6667-4.
32.Федоров, В.В. Теория оптимального эксперимента [Текст]: планирование регрессионных экспериментов / В.В. Федоров. - М.: Наука, 1971. - 312 с.: ил.
33.Хартман, К. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов [Текст] / К.Хартман, Э.Лецкий, В.Шеффер. пер. с нем. Г. А. Фомина, Н. С. Лецкая; под ред. Э. К. Лецкого. - М.: Мир, 1977. - 552 с.: ил. - Парал. тит. л. на нем. яз.
34.Яковис, Л.М. Многокомпонентные смеси для строительства: Расчет. методы оптимизации состава [Текст] / Л.М. Яковис. - СПб.: Стройиздат, 1988. - 296 с.: ил. - Библиогр.: с. 289-294.