

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Л. И. Кудина

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ**

## **Расчет статически определимых стержневых систем**

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство

Оренбург  
2018

УДК 624.04(075.8)  
ББК 38.112я73  
К 88

Рецензент – доцент, кандидат технических наук О.В. Никулина

**Кудина, Л. И.**  
К88 Строительная механика в решениях задач. Расчет статически определимых стержневых систем: учебное пособие / Л.И. Кудина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 144 с.  
ISBN 978-5-7410-2216-0

Учебное пособие соответствует содержанию первой части традиционного вузовского курса строительной механики для строительных направлений бакалавриата. Рассматриваются задачи расчета статически определимых стержневых систем при действии неподвижной и подвижной нагрузки. Приведены примеры определения внутренних усилий в элементах многопролетных балок, трехшарнирных арок, составных рам и шпренгельных ферм с подробным решением.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов направления подготовки 08.03.01 Строительство всех форм обучения при изучении дисциплины «Строительная механика». Будет полезно при подготовке к практическим занятиям, при выполнении расчетно-графических заданий и контрольных работ. Может быть использовано преподавателями строительной механики при проведении практических занятий по дисциплине.

УДК 624.04(075.8)  
ББК 38.112я73

ISBN 978-5-7410-2216-0

© Кудина Л.И., 2018  
© ОГУ, 2018

## Содержание

Введение .....	4
1 Расчет многопролетных статически определимых балок .....	5
1.1 Краткие теоретические сведения .....	5
1.2 Примеры решения задач .....	10
2 Расчет трехшарнирных арок .....	38
2.1 Краткие теоретические сведения .....	38
2.2 Примеры решения задач .....	43
3 Определение внутренних усилий в плоских статически определимых рамах с замкнутым контуром .....	62
3.1 Краткие теоретические сведения .....	62
3.2 Примеры решения задач .....	64
4 Расчет шпренгельных статически определимых плоских ферм .....	90
4.1 Краткие теоретические сведения .....	90
4.2 Примеры решения задач .....	95
5 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины .....	144

## Введение

Содержание настоящего учебного пособия соответствует первой части традиционного курса строительной механики для обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

Обязательным условием успешного изучения теоретических положений курса строительной механики является практическое овладение методами расчета конкретных строительных конструкций.

Учебное пособие посвящено вопросам определения внутренних усилий в элементах статически определимых стержневых систем: многопролетных шарнирно-консольных балок, трехшарнирных арок, составных рам с замкнутым контуром, шпренгельных ферм при действии неподвижной и подвижной нагрузки. Рассмотренным примерам предшествует краткое изложение теоретических основ и общие рекомендации по решению рассматриваемого класса задач.

Отличительной особенностью данного пособия является развернутое изложение ряда вопросов, которым не уделяется должного внимания в существующих практических руководствах по дисциплине: кинематический способ построения линий влияния, определение опасного положения подвижной нагрузки на сооружении и т.п. Рассмотренные примеры задач с подробным решением охватывают наиболее сложные вопросы первой части курса строительной механики, вызывающие у изучающих дисциплину определенные трудности при решении практических задач.

Изложение материала пособия предполагает знакомство с основами расчетов на прочность и основными методами статики и аналитической механики, изучаемыми в курсах сопротивления материалов и теоретической механики.

Изучение материала, представленного в настоящем учебном пособии, позволяет приобрести необходимые практические навыки в решении типовых задач определения внутренних усилий в плоских статически определимых стержневых системах.

# 1 Расчет многопролетных статически определимых балок

## 1.1 Краткие теоретические сведения

*Многопролетной статически определимой балкой* (многопролетной шарнирной балкой, многопролетной шарнирно-консольной балкой) называется статически определимая неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок (с консолями и без консолей), соединенных между собой шарнирами (рисунок 1.1а).

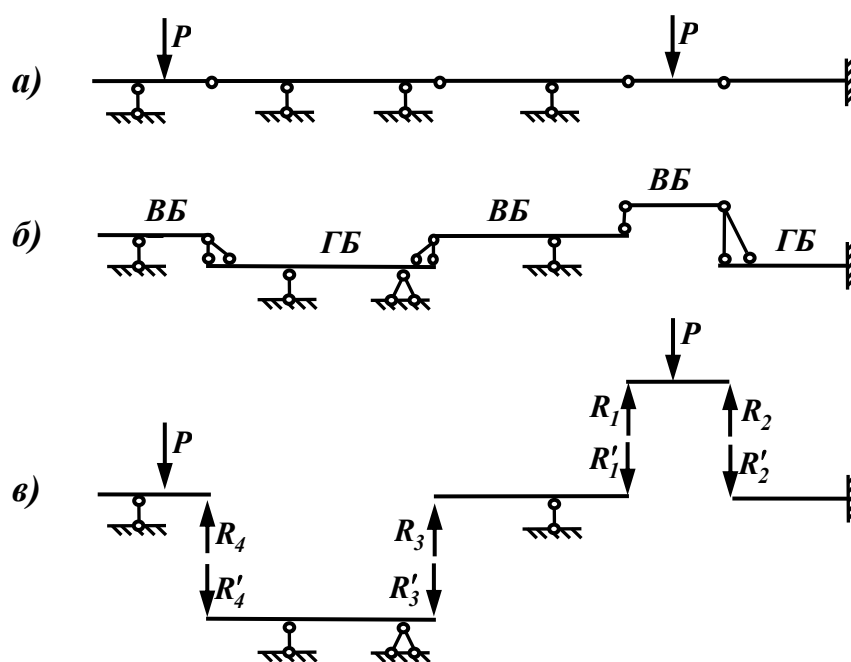


Рисунок 1.1

Расчет многопролетных статически определимых балок начинают с кинематического анализа, целью которого является проверка геометрической неизменяемости системы. Для этого по формуле П.Л. Чебышева определяют число степеней свободы системы:

$$W = 3D - 2Ш_0 - C_{on}, \quad (1.1)$$

где  $D$  – число жестких дисков, входящих в систему;

$Ш_0$  – число простых шарниров, исключая опорные;

$C_{on}$  – число опорных стержней.

Под жесткими дисками  $D$  понимают простейшие неизменяемые элементы системы. В данном случае дисками считаются однопролетные балки, из которых состоит исходная многопролетная балка.

Простым называется шарнир, соединяющий только два диска. Следовательно, число простых шарниров  $Ш_0$  будет равно числу шарниров, соединяющих между собой однопролетные балки, которые составляют исходную многопролетную. В дальнейшем такие шарниры будем называть промежуточными.

Если среди опор многопролетной шарнирной балки кроме опорных стержней есть и другие связи, то при определении числа  $C_{on}$  они учитываются через эквивалентное число стержней. Так, жесткая заделка считается эквивалентной трем опорным стержням, а шарнирно неподвижная опора эквивалента двум опорным стержням.

Формула (1.1) дает ответ на вопрос, обладает ли система необходимым числом связей для обеспечения ее неподвижности и геометрической неизменяемости. Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости системы необходимо провести анализ геометрической структуры (структурный анализ) многопролетной шарнирной балки.

Один из способов проведения структурного анализа заключается в построении так называемой «поэтажной» схемы, дающей наглядное представление о характере взаимодействия между собой отдельных однопролетных балок, составляющих исходную многопролетную.

*«Поэтажной» схемой* называется условное изображение многопролетной шарнирной балки в виде совокупности отдельных пролетов исходной балки, расположенных один за другим на разных уровнях («этажах»).

При составлении «поэтажных» схем следует различать главные и вспомогательные балки.

*Главной (основной)* балкой называется простая однопролетная балка, способная самостоятельно нести внешнюю нагрузку после разрушения исходной многопролетной балки по промежуточным шарнирам.

*Второстепенной (вспомогательной)* называется простая однопролетная балка, не способная самостоятельно нести внешнюю нагрузку после разрушения исходной по промежуточным шарнирам.

Пример «поэтажной» схемы многопролетной шарнирно-консольной балки представлен на рисунке 1.1б. Главные балки обозначены аббревиатурой ГБ, второстепенные – ВБ.

Как видно из рисунка 1.1б главными будут балки, которые имеют неподвижное защемление или две опоры, связанные с «землей» (основанием).

К второстепенным балкам следует отнести:

– балки, одной опорой опирающиеся на «землю» (основание), а другой – на консоль одной из главных или второстепенных балок;

– балки, не имеющие связи с основанием и опирающиеся на консоли главных или второстепенных балок.

Для построения «поэтажной» схемы следует мысленно удалить все промежуточные шарниры исходной многопролетной балки. При этом исходная балка распадается на отдельные диски-пролеты, среди которых нужно выделить главные балки, способные самостоятельно воспринимать внешнюю нагрузку.

Построение «поэтажной» схемы начинают с нижних этажей, т.е. схема строится снизу вверх. На нижнем «этаже» располагают главные балки. Затем на них последовательно опирают вспомогательные балки.

Для обеспечения геометрической неизменяемости одна из опор полученных простых балок делается шарнирно неподвижной (за исключением главных балок, имеющих жесткую заделку).

Если построенная «поэтажная» схема представляет собой неизменяемую систему, то и исходная многопролетная балка является геометрически неизменяемой.

Статический расчет многопролетных шарнирно-консольных балок сводится к построению эпюр поперечных сил (эпюры  $Q$ ) и изгибающих моментов (эпюры  $M$ ).

«Поэтажная» схема дает наглядное представление о характере взаимодействия между собой отдельных простых балок («этажей») и определяет последовательность их расчета.

Второстепенные балки передают нагрузку, приложенную к ним, через другие второстепенные балки на главные. Главные балки не передают нагрузку на второстепенные.

Поэтому расчет следует начинать с самых верхних «этажей» и далее последовательно переходить к нижележащим. При расчете нижележащих «этажей» надо учитывать не только ту нагрузку, которая непосредственно к ним приложена, но и давления, передаваемые на них опорами вышестоящих балок. Эти давления равны опорным реакциям соответствующей вышестоящей балки, но имеют противоположное направление (рисунок 1.1в). Главные балки рассчитываются в последнюю очередь.

Построение эпюр  $M$  и  $Q$  выполняют методами, изученными в курсе сопротивления материалов. Эпюры  $M$  и  $Q$  для всей многопролетной статически определимой балки строят по эпюрам, полученным для каждого отдельного элемента («этажа»). Отдельные эпюры располагают на одной оси, вычертив их в одном масштабе.

Линии влияния используются при расчете сооружений на подвижную нагрузку.

*Линией влияния* какого-либо силового фактора (например, изгибающего момента) в определенном сечении сооружения называется график, изображающий закон изменения этого фактора при передвижении по сооружению единичной силы.

При построении линий влияния используются *статический* и *кинематический* способы.

При использовании статического способа вместо исходной многопролетной шарнирно-консольной балки удобнее рассматривать ее «поэтажную» схему.

Построение линий влияния усилий для многопролетных шарнирных балок статическим способом рекомендуется выполнять следующим образом:

- перенести заданное сечение на «поэтажную» схему балки;



- по правилам построения линий влияния для простых однопролетных балок построить линию влияния усилия для «этажа», на который попадает сечение;
- построенную линию влияния продолжить без разрывов на все *вышестоящие* «этажи» через нулевые значения на опорах, связанных с «землей», и изломы под промежуточными шарнирами.

Кинематический способ построения линий влияния основывается на принципе возможных перемещений (принципе Лагранжа), изучаемом в курсе теоретической механики.

Построение линий влияния кинематическим способом рекомендуется проводить в следующем порядке:

- отбросить связь, усилие в которой требуется определить;
- заменить действие отброшенной связи ее положительно направленной реакцией (или искомым усилием);
- задать полученному механизму с одной степенью свободы такое возможное перемещение, чтобы искомое усилие совершало положительную работу;
- определить закон изменения исследуемого усилия из уравнения возможных работ сил, действующих на систему.

Следует заметить, что эпюра возможных перемещений точек полученного механизма с одной степенью свободы повторяет очертание линии влияния, т.е. будет являться *моделью* линии влияния соответствующего силового фактора. Поэтому на практике кинематический способ часто используется для проверки очертания уже построенной статическим способом линии влияния.

Усилие  $S$  от действия внешней нагрузки определяется по построенной линии влияния по формуле:

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i + \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i, \quad (1.2)$$

где  $y_i$  – ордината линии влияния, расположенная под точкой приложения сосредоточенной силы  $P_i$ ;

$\omega_i$  – площадь участка линии влияния, расположенного под распределенной нагрузкой интенсивностью  $q_i$ ;

$\alpha_i$  – угол наклона линии влияния на участке действия внешнего момента величиной  $M_i$ .

Знаки слагаемых в формуле (1.2) определяются алгебраически. Значения сосредоточенных сил  $P_i$  и интенсивности распределенной нагрузки  $q_i$  считаются положительными, если они совпадают по направлению с единичной силой, перемещающейся по длине балки, т.е. значения  $P_i$  и  $q_i$  считаются положительными, если соответствующие нагрузки направлены вертикально вниз. Знаки площадей  $\omega_i$  берутся в соответствии со знаками ординат  $y_i$  на участках линии влияния, где вычисляются эти площади. Внешние моменты  $M_i$  считаются положительными, если вызывают вращение по ходу часовой стрелки, и отрицательными – если вызывают вращение против хода часовой стрелки. Значение  $tg\alpha_i$  берется положительным на участках с возрастающими ординатами линии влияния и отрицательным на участках с убывающими ординатами.

## 1.2 Примеры решения задач

### *Пример 1.1*

Для многопролетной статически определимой балки (рисунок 1.2а) требуется:

- произвести анализ геометрической неизменяемости системы;
- построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ ;
- построить линию влияния опорной реакции  $R_D$ ;
- построить линии влияния  $M$  и  $Q$  для двух сечений, обозначенных на схеме балки;
- сравнить результаты вычислений исследуемых силовых факторов, полученных при аналитическом расчете и расчете по линиям влияния.

## **Решение**

### *1 Проверка геометрической неизменяемости системы*

Определяем число степеней свободы заданной многопролетной статически определимой балки по формуле П.Л. Чебышева (1.1):

$$W = 3D - 2Ш_0 - C_{on} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Необходимое условие геометрической неизменяемости (1.1) выполняется, следовательно, рассматриваемая многопролетная балка статически определима и имеет необходимое количество связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости заданной системы необходимо проведение структурного анализа. С этой целью строим «поэтажную» схему исходной шарнирно-консольной балки, для чего мысленно удаляем из нее промежуточные шарниры  $B$ ,  $E$  и  $G$ . При этом исходная многопролетная балка распадается на отдельные диски-пролеты  $AB$ ,  $BCDE$ ,  $EFG$  и  $GKL$ .

Построение «поэтажной» схемы начинаем с нижнего этажа, на котором располагаем главную балку  $BCDE$ , имеющую две опоры, связанные с «землей». Затем на нее последовательно опираем вспомогательные балки, поднимаясь каждый раз «этажом» выше (рисунок 1.2б). При построении «поэтажной» схемы шарниры  $B$ ,  $E$  и  $G$  заменяем двумя стержнями (шарнирно неподвижной опорой), что обеспечивает геометрическую неизменяемость полученных простых балок.

Как видно из построенной «поэтажной» схемы, каждый «этаж», начиная с нижнего, прикреплен к основанию (или предыдущим этажам) тремя стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке. Таким образом, «поэтажная» схема балки неподвижна относительно основания и геометрически неизменяема. Следовательно, исходная многопролетная статически определимая балка также является неподвижной относительно основания и геометрически неизменяемой.

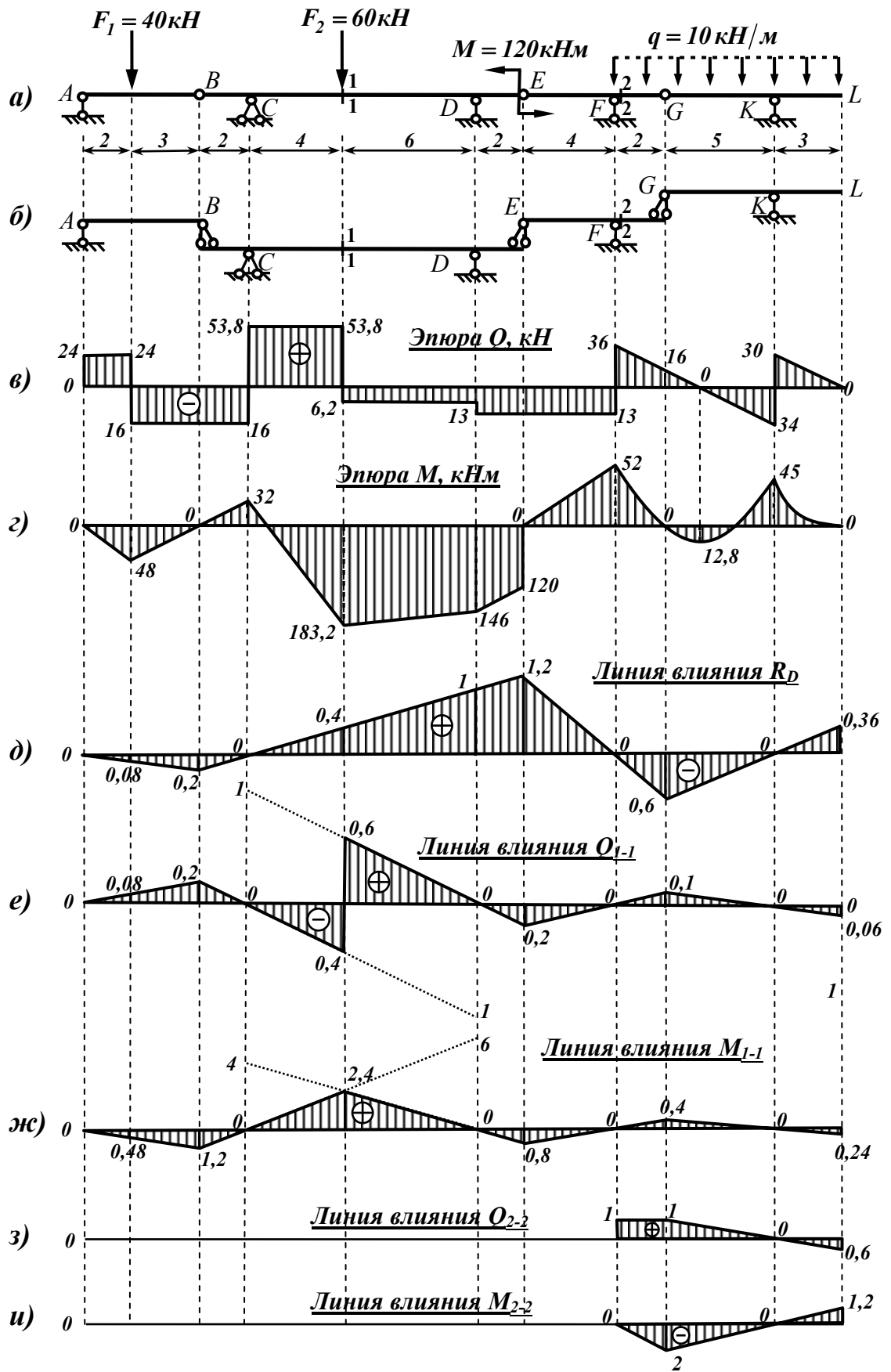
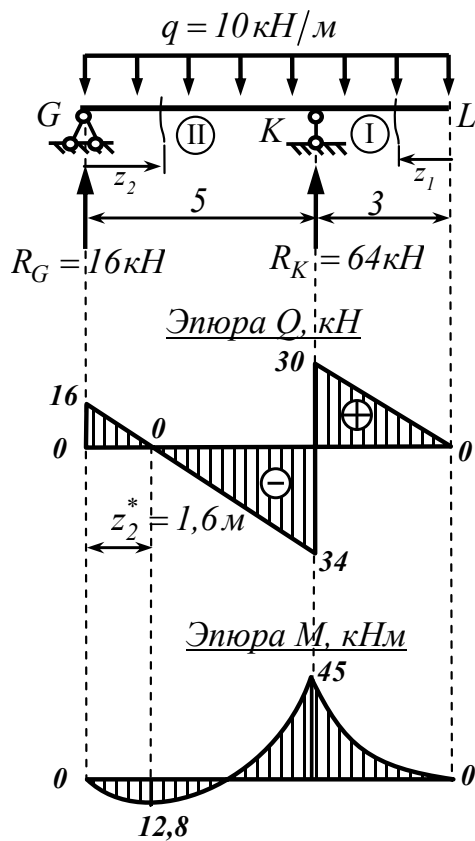


Рисунок 1.2

## 2 Построение эпюр поперечных сил $Q$ и изгибающих моментов $M$ от заданной нагрузки

Для построения эпюр изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  в многопролетной статически определимой балке необходимо построить соответствующие эпюры отдельно для каждого «этажа».

Расчет начинаем с самого верхнего (третьего) «этажа», второстепенной балки  $GKL$  (рисунок 1.2б).



Определяем опорные реакции балки  $GKL$  из уравнений моментов всех действующих сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum m_G = 0; 5R_K - q \cdot 8 \cdot 4 = 0; R_K = 64 \text{ кН}; \\ \sum m_K = 0; q \cdot 8 \cdot 1 - 5R_G = 0; R_G = 16 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций, составляя уравнение проекций всех сил на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum Y = R_G + R_K - 8q = 16 + 64 - 8 \cdot 10 = 0.$$

Строим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  для балки  $GKL$  методами, изученными в курсе сопротивления материалов.

Составим выражение для поперечной силы на  $I$  участке:

$$Q_I = qz_1 = 10z_1 \begin{cases} z_1 = 0; & Q_L = 0; \\ z_1 = 3; & Q_K^{прав} = 30 \text{ кН}. \end{cases}$$

Определяем значение изгибающего момента в характерных точках участка  $I$ :

$$M_I = -q \frac{z_1^2}{2} = -5z_1^2 \left| \begin{array}{l} z_1 = 0; \\ z_1 = 3; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M_L = 0; \\ M_K^{npas} = -45 \text{кНм}. \end{array}$$

Поперечная сила на участке *II*:

$$Q_{II} = R_G - qz_2 = 16 - 10z_2 \left| \begin{array}{l} z_2 = 0; \\ z_2 = 5; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q_G = 16 \text{кН}; \\ Q_K^{лев} = -34 \text{кН}. \end{array}$$

Изгибающий момент на участке *II*:

$$M_{II} = R_G z_2 - q \frac{z_2^2}{2} = 16z_2 - 5z_2^2 \left| \begin{array}{l} z_2 = 0; \\ z_2 = 5; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} M_G = 0; \\ M_K^{лев} = -45 \text{кНм}. \end{array}$$

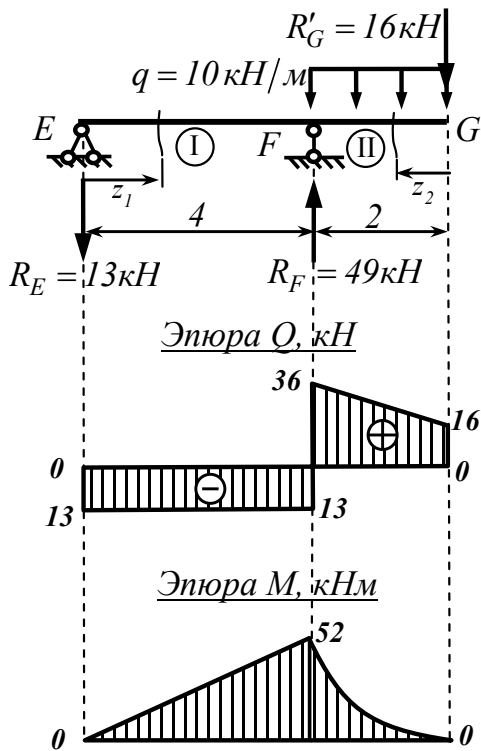
Изгибающий момент на участке *II* принимает экстремальное значение при  $Q(z_2^*) = 0$ . Положение экстремума определяем из простых геометрических соображений, рассматривая соответствующие участки эпюры поперечных сил, как подобные треугольники:

$$\frac{16}{z_2^*} = \frac{34}{5 - z_2^*}; \quad 16(5 - z_2^*) = 34z_2^*; \quad z_2^* = \frac{16 \cdot 5}{16 + 34} = 1,6 \text{ м}.$$

Тогда,

$$M(z_2^* = 1,6 \text{ м}) = R_G z_2^* - q \frac{(z_2^*)^2}{2} = 1,6 \cdot 16 - 10 \cdot \frac{(1,6)^2}{2} = 12,8 \text{кНм}.$$

Затем рассчитываем второстепенную балку *EFG*, расположенную «этажом» ниже балки *GKL* (рисунок 1.2б). Влияние вышележащего «этажа» учитываем, прикладывая в точке *G* силу  $R'_G$ , равную по величине и противоположно направленную реакции  $R_G$ .



Определяем опорные реакции балки  $EFG$  из уравнений моментов относительно опорных шарниров  $E$  и  $F$ :

$$\begin{cases} \sum m_E = 0; & 4R_F - 2q \cdot 5 - 6R'_G = 0; & R_F = 49 \text{ кН}; \\ \sum m_F = 0; & 4R_E - 2q \cdot 1 - 2R'_G = 0; & R_E = 13 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций, составляя уравнение проекций всех действующих на балку сил на ось  $y$ :

$$\sum Y = R_F - R_E - 2q - R'_G = 49 - 13 - 2 \cdot 10 - 16 = 0.$$

Выражение для поперечной силы на участке  $I$ :

$$Q_I = -R_E = -13 \text{ кН} = \text{const.}$$

Значение изгибающего момента в характерных точках участка  $I$ :

$$M_I = -R_E z_1 = -13 z_1 \begin{cases} z_1 = 0; & M_E = 0; \\ z_1 = 4; & M_F^{\text{лев}} = -52 \text{ кНм}. \end{cases}$$

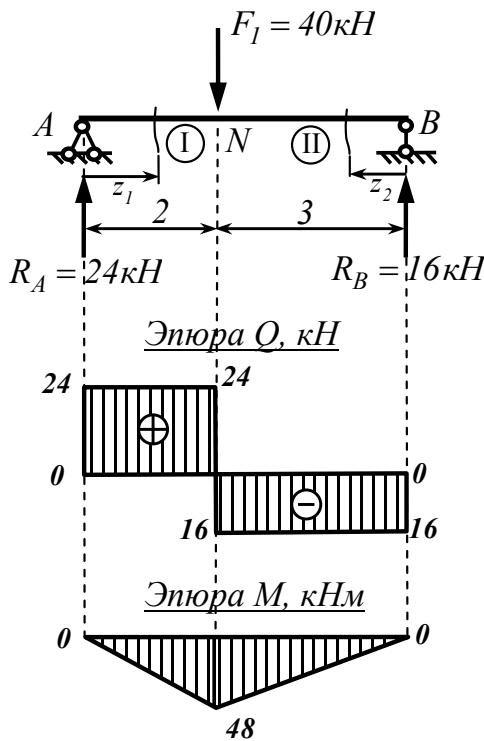
Поперечная сила на участке  $II$ :

$$Q_{II} = R'_G + qz_2 = 16 + 10z_2 \begin{cases} z_2 = 0; & Q_G = 16 \text{ кН}; \\ z_2 = 2; & Q_F^{\text{прав}} = 36 \text{ кН}. \end{cases}$$

Изгибающий момент на участке  $II$ :

$$M_{II} = -R'_G z_2 - q \frac{z_2^2}{2} = -16z_2 - 5z_2^2 \left| \begin{array}{l} z_2 = 0; \\ z_2 = 2; \end{array} \right. \begin{array}{l} M_G = 0; \\ M_F^{прав} = -52 \text{ кНм}. \end{array}$$

На втором «этаже» располагается еще одна второстепенная балка  $AB$  (рисунок 1.2б).



Опорные реакции балки  $AB$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_A = 0; \quad 5R_B - 2F_I = 0; \quad R_B = 16 \text{ кН}; \\ \sum m_B = 0; \quad 3F_I - 5R_A = 0; \quad R_A = 24 \text{ кН}. \end{array} \right.$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = R_A + R_B - F_I = 24 + 16 - 40 = 0.$$

Выражение для поперечной силы:

$$Q_I = R_A = 24 \text{ кН} = \text{const};$$

$$Q_{II} = -R_B = -16 \text{ кН} = \text{const}.$$

Значение изгибающего момента в характерных точках участков:

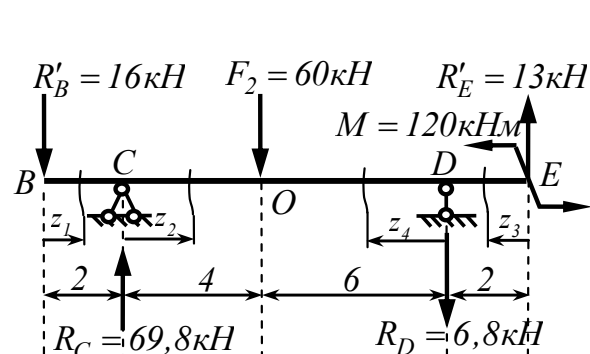
$$M_I = R_A z_1 = 24z_1 \left| \begin{array}{l} z_1 = 0; \\ z_1 = 2; \end{array} \right. \begin{array}{l} M_A = 0; \\ M_N^{лев} = 48 \text{ кНм}. \end{array}$$

$$M_{II} = R_B z_2 = 16z_2 \left| \begin{array}{l} z_2 = 0; \\ z_2 = 3; \end{array} \right. \begin{array}{l} M_A = 0; \\ M_N^{прав} = 48 \text{ кНм}. \end{array}$$



В последнюю очередь рассчитываем главную балку  $BCDE$ , расположенную на нижнем (первом) «этаже» (рисунок 1.2б). Влияние всех вышележащих «этажей» учитываем, прикладывая в точках  $B$  и  $E$  силы  $R'_B$  и  $R'_E$ , равные по величине и противоположно направленные реакциям  $R_B$  и  $R_E$  соответственно.

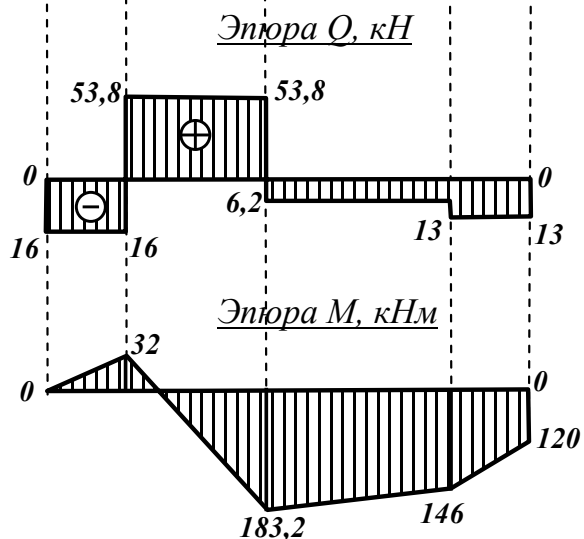
Опорные реакции балки  $BCDE$  определяем из уравнений моментов относительно опорных шарниров  $C$  и  $D$ :



$$\begin{cases} \sum m_C = 0; \\ \sum m_D = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2R'_B - 4F_2 + 12R'_E + M - 10R_D = 0; \\ 12R'_B + 2R'_E + 6F_2 - 10R_C + M = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_D = 6,8 \text{ кН}; \\ R_C = 69,8 \text{ кН}. \end{cases}$$



Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum Y &= R_C - R_D - F_2 - R'_B + R'_E = \\ &= 69,8 - 6,8 - 60 - 16 + 13 = 0. \end{aligned}$$

Значения поперечной силы по участкам:

$$Q_I = -R'_B = -16 \text{ кН} = \text{const};$$

$$Q_{II} = -R'_B + R_C = -16 + 69,8 = 53,8 \text{ кН} = \text{const};$$

$$Q_{III} = -R'_E = -13 \text{ кН} = \text{const};$$

$$Q_{IV} = -R'_E + R_D = -13 + 6,8 = -6,2 \text{ кН} = \text{const.}$$

Значение изгибающего момента в характерных точках участков:

$$M_I = -R'_B z_1 = -16 z_1 \left| \begin{array}{l} z_1 = 0; \quad M_B = 0; \\ z_1 = 2; \quad M_C^{\text{лев}} = -32 \text{ кНм}; \end{array} \right.$$

$$M_{II} = -R'_B (2 + z_2) + R_C z_2 = 53,8 z_2 - 32 \left| \begin{array}{l} z_2 = 0; \quad M_C^{\text{прав}} = -32 \text{ кНм}; \\ z_2 = 4; \quad M_O^{\text{лев}} = 183,2 \text{ кНм}; \end{array} \right.$$

$$M_{III} = M + R'_E z_3 = 120 + 13 z_3 \left| \begin{array}{l} z_3 = 0; \quad M_E = 120 \text{ кНм}; \\ z_3 = 2; \quad M_D^{\text{прав}} = 146 \text{ кНм}; \end{array} \right.$$

$$M_{IV} = M + R'_E (2 + z_4) - R_D z_4 = 6,2 z_4 + 146 \left| \begin{array}{l} z_4 = 0; \quad M_D^{\text{лев}} = 146 \text{ кНм}; \\ z_4 = 6; \quad M_O^{\text{прав}} = 183,2 \text{ кНм}. \end{array} \right.$$

Располагая эпюры, построенные для отдельных «этажей», на одной оси, получим эпюры поперечных сил  $Q$  (рисунок 1.2в) и изгибающих моментов  $M$  (рисунок 1.2г) для исходной многопролетной статически определимой балки.

### 3 Построение линий влияния

#### 3.1 Линия влияния опорной реакции $R_D$

Опора  $D$  находится на главной балке  $BCDE$ . Для «этажа», на котором находится опора  $D$ , линию влияния строим по обычным правилам для однопролетных балок: на оси линии влияния над точкой, соответствующей опоре  $D$ , откладываем вверх единичный отрезок и соединяем с нулем в точке, соответствующей другой опоре  $C$ . Полученную линию влияния продолжаем на левую и правую консоли балки  $BCDE$  (рисунок 1.2д).

Затем продолжаем линию влияния на все вышестоящие второстепенные балки через изломы в точках, соответствующих промежуточным шарнирам  $B$ ,  $E$  и  $G$ , и нулевые значения в точках, соответствующих связанным с «землей» опорами  $A$ ,  $F$  и  $K$ .

Ординаты характерных точек определяем из подобия треугольников (рисунок 1.2д).

### 3.2 Линия влияния поперечной силы $Q_{I-I}$

Сечение  $I - I$  расположено между опорами главной балки  $BCDE$ . Для заданного «этажа» строим линии влияния по обычным правилам для простых однопролетных балок. На оси линии влияния над точкой, соответствующей левой опоре  $C$ , откладываем вверх единичный отрезок и соединяем с нулем в точке, соответствующей правой опоре  $D$ . Выделяем правую ветвь – от правой опоры до сечения  $I-I$ . Продолжаем правую ветвь на правую консоль (рисунок 1.2е).

Аналогично строим левую ветвь. Под точкой, соответствующей правой опоре  $D$ , откладываем вниз единичный отрезок и соединяем с нулем в точке, соответствующей левой опоре  $C$ . Выделяем левую ветвь – от левой опоры до сечения  $I-I$ . Продолжаем левую ветвь на левую консоль.

Затем продолжаем построенную для «этажа» линию влияния на все вышележащие «этажи» через изломы в точках, соответствующих промежуточным шарнирам  $B$ ,  $E$  и  $G$ , и нулевые значения в точках, соответствующих связанным с «землей» опорам  $A$ ,  $F$  и  $K$ . Определяем характерные ординаты из подобия треугольников (рисунок 1.2е).

### 3.3 Линия влияния изгибающего момента $M_{I-I}$

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_{I-I}$  над точкой, соответствующей опоре  $C$ , откладываем вверх отрезок, численно равный расстоянию от этой опоры до сечения  $I-I$ . Соединяем полученную точку с нулем в точке, соответствующей правой опоре  $D$ . Выделяем правую ветвь: от нуля на правой опоре до заданного сечения  $I-I$ . Продолжаем полученную ветвь на правую консоль (рисунок

1.2ж).

Над точкой, соответствующей правой опоре  $D$ , откладываем вверх отрезок, численно равный расстоянию от этой опоры до сечения  $1-1$ . Соединяем полученную точку с нулем в точке, соответствующей левой опоре  $C$ . Выделяем левую ветвь: от нуля на левой опоре до заданного сечения  $1-1$ . Продолжаем полученную ветвь на левую консоль. Обе ветви должны пересекаться прямо под сечением  $1-1$ .

Затем продолжаем построенную для данного «этажа» линию влияния на все вышележащие «этажи» через изломы в точках, соответствующих промежуточным шарнирам  $B$ ,  $E$  и  $G$ , и нулевые значения в точках, соответствующих связанным с «землей» опорам  $A$ ,  $F$  и  $K$ . Определяем характерные ординаты из подобия треугольников (рисунок 1.2ж).

### 3.4 Линия влияния поперечной силы $Q_{2-2}$

Сечение  $2-2$  расположено на консоли второстепенной балки  $EFG$ . Для «этажа», на котором находится сечение, линии влияния строим по тем же правилам, что и для простых консольных балок.

Линия влияния поперечной силы  $Q_{2-2}$  имеет вид прямоугольника на участке от сечения  $2-2$  до конца консоли. Выше балки  $EFG$  расположен только один «этаж», поэтому продолжаем полученную линию только на второстепенную балку  $GKL$  через излом в точке, соответствующей промежуточному шарниру  $G$ , и нулевое значение в точке, соответствующей опоре  $K$ , связанной с «землей» (рисунок 1.2з).

### 3.5 Линия влияния изгибающего момента $M_{2-2}$

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_{2-2}$  на оси линии влияния под точкой, соответствующей концу консоли  $G$ , откладываем вниз отрезок, равный расстоянию от сечения  $2-2$  до конца консоли, и соединяем полученную точку с нулем в точке, соответствующей заданному сечению  $2-2$ . Продолжаем полученную линию влияния на вышестоящую балку  $GKL$  через излом в точке, соответствующей промежуточному шарниру  $G$ , и нулевое значение в точке, соответствующей

щей связанной с «землей» опорой  $K$  (рисунок 1.2*и*).

Для проверки построенных линий влияния (рисунки 1.2*д-и*) воспользуемся кинематическим способом.

Для построения *линии влияния опорной реакции*  $R_D$  удалим опорный стержень  $D$  и заменим его действие опорной реакцией  $R_D$ , имеющей положительное направление (вверх). Зададим полученному механизму с одной степенью свободы возможное перемещение так, чтобы исследуемая реакция  $R_D$  совершала положительную возможную работу (рисунок 1.3*б*). Возможным перемещением для диска  $BCDE$  является бесконечно малый поворот вокруг неподвижной шарнирной опоры  $C$ . В свою очередь, диски  $AB$ ,  $EFG$  и  $GKL$  также получают бесконечно малые возможные повороты вокруг мгновенных центров вращения  $A$ ,  $F$  и  $K$ , расположенных на опорах, связанных с основанием («землей»).

Эпюра возможных перемещений полученного механизма, показанная на рисунке 1.3*б* пунктирной линией, совпадает с линией влияния опорной реакции  $R_D$  на рисунке 1.2*д*. Ординату построенной линии влияния можно определить из следующих логических соображений: при расположении единичного груза непосредственно над опорой  $D$  реакция  $R_D$  должна быть равна этой силе, т.е. единице. Остальные ординаты, как и при построении линии влияния статическим способом, можно определить из геометрических соображений (из подобия треугольников).

Для построения *линии влияния поперечной силы*  $Q_{I-I}$  удалим из сечения  $I-I$  внутреннюю связь, препятствующую взаимному вертикальному смещению соседних сечений, и заменим действие этой связи положительно направленными поперечными силами (рисунок 1.3*в*). Зададим полученному механизму с одной степенью свободы возможное перемещение так, чтобы поперечные силы  $Q_{I-I}$  совершали положительную возможную работу. Возможным перемещением для частей  $B-C-I$  и  $I-D-E$  является бесконечно малый поворот вокруг связанных с основанием шарнирных опор  $C$  и  $D$ , причем эти части должны оставаться параллельными друг другу, т.к. введенный в сечение  $I-I$  шарнирный четырехугольник не допускает поворота части  $B-C-I$  относительно части  $D-E-I$ .

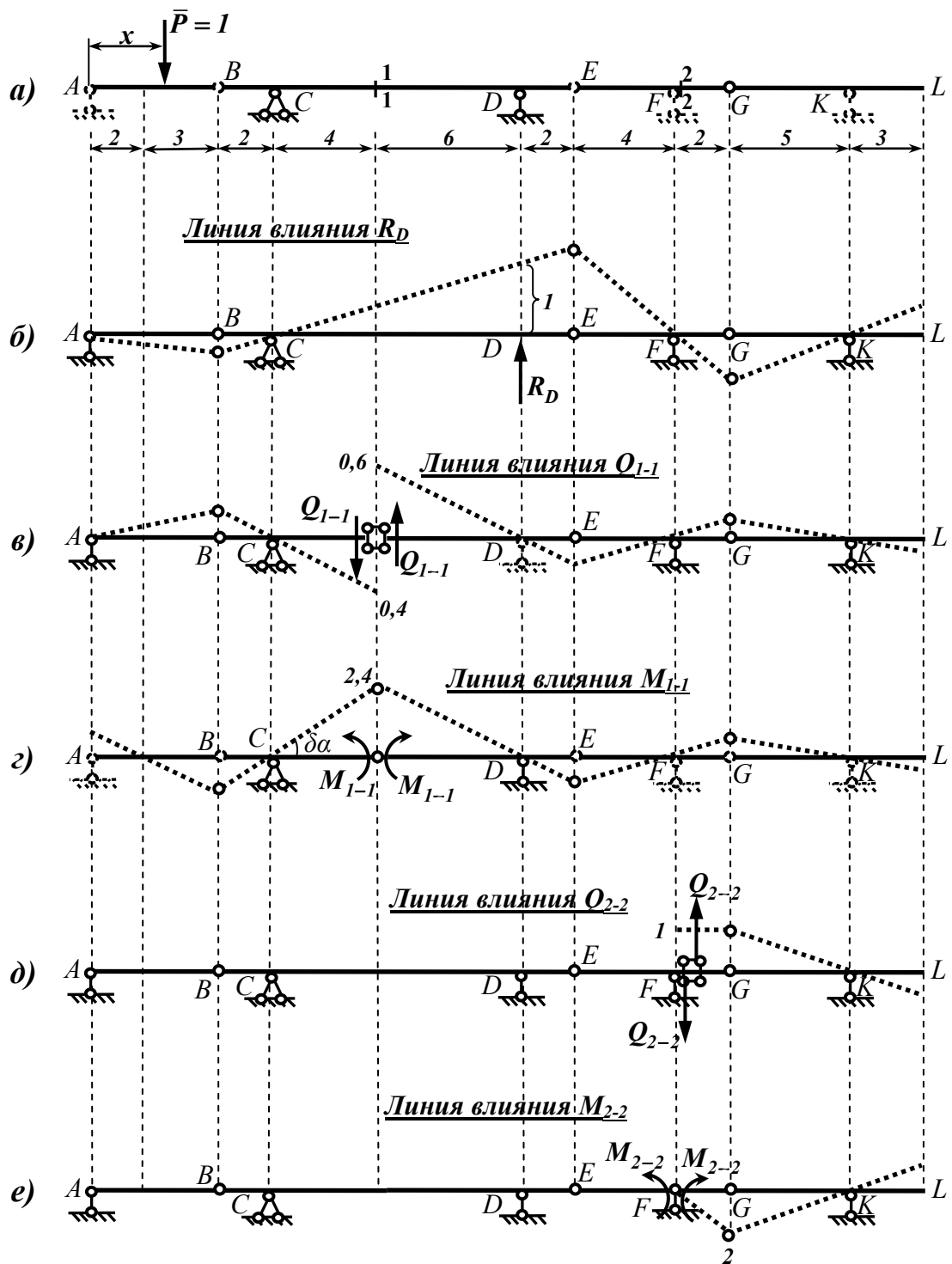


Рисунок 1.3

В свою очередь, диски  $AB$ ,  $EFG$  и  $GKL$  также получают бесконечно малые возможные повороты вокруг мгновенных центров вращения  $A$ ,  $F$  и  $K$ , расположенных на опорах, связанных с основанием. Показанная пунктирной линией эпюра воз-

возможных перемещений полученного механизма в точности совпадает с линией влияния опорной реакции  $Q_{1-1}$  на рисунке 1.2е. Ординаты построенной линии влияния можно определить из геометрических соображений (из подобия треугольников), учитывая, что относительное взаимное смещение смежных сечений в сечении 1-1 равно единице:

$$\frac{x}{4} = \frac{1-x}{10}; \Rightarrow x = 0,4.$$

Для построения *линии влияния изгибающего момента*  $M_{1-1}$  удалим из сечения 1-1 внутреннюю связь, препятствующую взаимному повороту соседних сечений, для чего введем в сечение 1-1 шарнир. Заменяем действие отброшенной связи положительно направленными моментами, растягивающими нижние волокна (рисунок 1.3в). Зададим полученному механизму с одной степенью свободы возможное перемещение так, чтобы моменты  $M_{1-1}$  совершали положительную возможную работу. Возможным перемещением для частей  $B-C-1$  и  $1-D-E$  является бесконечно малый поворот вокруг связанных с основанием шарнирных опор  $C$  и  $D$ . В свою очередь, диски  $AB$ ,  $EFG$  и  $GKL$  также получают бесконечно малые возможные повороты вокруг мгновенных центров вращения  $A$ ,  $F$  и  $K$ , расположенных на опорах, связанных с основанием. Показанная пунктирной линией эпюра возможных перемещений полученного механизма в точности совпадает с линией влияния опорной реакции  $M_{1-1}$  на рисунке 1.2д. Ординату построенной линии влияния можно определить из уравнения возможных работ:

$$M_{1-1}\delta\alpha + M_{1-1} \cdot \frac{4}{6}\delta\alpha - \bar{P} \cdot 4\delta\alpha = 0; \Rightarrow M_{1-1} = 2,4.$$

Для построения *линии влияния поперечной силы*  $Q_{2-2}$  удалим в сечении 2-2 внутреннюю связь, препятствующую взаимному вертикальному смещению сосед-

них сечений, заменяя действие этой связи положительно направленными поперечными силами (рисунок 1.3д). Возможным перемещением для части  $FG$  является бесконечно малое поступательное перемещение. В свою очередь, диск  $GKL$  получает бесконечно малый возможный поворот вокруг мгновенного центра вращения  $K$ , расположенного на опоре, связанной с основанием. Остальная часть механизма остается неподвижной. Показанная пунктирной линией эпюра возможных перемещений полученного механизма в точности совпадает с линией влияния опорной реакции  $Q_{2-2}$  на рисунке 1.2д. Характерную ординату построенной линии влияния найдем из логических соображений, учитывая, что при нахождении единичной силы в пределах диска  $FG$  поперечная сила  $Q_{2-2}$  равна этой силе, т.е. единице.

Для построения *линии влияния изгибающего момента  $M_{2-2}$*  удалим в сечении 2-2 внутреннюю связь, препятствующую взаимному повороту соседних сечений, заменяя действие этой связи положительно направленными изгибающими моментами (рисунок 1.3е). Возможным перемещением для части  $FG$  является бесконечно малый поворот вокруг шарнира  $F$ . В свою очередь, диск  $GKL$  получает бесконечно малый возможный поворот вокруг мгновенного центра вращения  $K$ . Остальная часть механизма остается неподвижной. Показанная пунктирной линией эпюра возможных перемещений полученного механизма в точности совпадает с линией влияния изгибающего момента  $M_{2-2}$  на рисунке 1.2е. Характерную ординату построенной линии влияния найдем из логических соображений: при нахождении единичной силы в точке  $G$  изгибающий момент  $M_{2-2}$  равен моменту этой силы относительно точки  $F$ .

#### 4 Определение усилий по линиям влияния

Для вычисления значений усилий по построенным линиям влияния от заданной неподвижной внешней нагрузки воспользуемся формулой (1.2):

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i + \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$



Значения усилий будут равны:

$$\begin{aligned} R_D &= F_1 \cdot (-0,08) + F_2 \cdot 0,4 - M \cdot \frac{1,2}{12} + q \cdot \left( -\frac{0,6 \cdot 7}{2} + \frac{0,36 \cdot 3}{2} \right) = \\ &= -40 \cdot 0,08 + 60 \cdot 0,4 - 120 \cdot 0,1 + 10 \cdot (-2,1 + 0,54) = -6,8 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{1-1}^{лев} &= F_1 \cdot 0,08 + F_2 \cdot 0,6 - M \cdot \left( -\frac{0,2}{2} \right) + q \cdot \left( \frac{0,1 \cdot 7}{2} - \frac{0,06 \cdot 3}{2} \right) = \\ &= 40 \cdot 0,08 + 60 \cdot 0,6 + 120 \cdot 0,1 + 10 \cdot (0,35 - 0,09) = 53,8 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{1-1}^{прав} &= F_1 \cdot 0,08 - F_2 \cdot 0,4 - M \cdot \left( -\frac{0,2}{2} \right) + q \cdot \left( \frac{0,1 \cdot 7}{2} - \frac{0,06 \cdot 3}{2} \right) = \\ &= 40 \cdot 0,08 - 60 \cdot 0,4 + 120 \cdot 0,1 + 10 \cdot (0,35 - 0,09) = -6,2 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1-1} &= F_1 \cdot (-0,48) + F_2 \cdot 2,4 - M \cdot \left( -\frac{0,8}{2} \right) + q \cdot \left( \frac{0,4 \cdot 7}{2} - \frac{0,24 \cdot 3}{2} \right) = \\ &= -40 \cdot 0,48 + 60 \cdot 2,4 + 120 \cdot 0,4 + 10 \cdot (1,4 - 0,36) = 183,2 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

$$Q_{2-2} = q \cdot \left( 1 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{0,6 \cdot 3}{2} \right) = 10 \cdot (2 + 2,5 - 0,9) = 36 \text{ кН};$$

$$M_{2-2} = q \cdot \left( -\frac{2 \cdot 7}{2} + \frac{1,2 \cdot 3}{2} \right) = 10 \cdot (-7 + 1,8) = -52 \text{ кНм}.$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Таблица сравнения результатов

Наименование искомых величин	Значения искомых величин, полученные		Относительная погрешность, %
	аналитически	по линиям влияния	
$R_D$	$-6,8кН$	$-6,8кН$	-
$Q_{1-1}$	$53,8кН$	$53,8кН$	-
	$-6,2кН$	$-6,2кН$	-
$M_{1-1}$	$183,2кНм$	$183,2кНм$	-
$Q_{2-2}$	$36кН$	$36кН$	-
$M_{2-2}$	$-52кНм$	$-52кНм$	-

Полученные результаты аналитических вычислений и вычислений по линиям влияния полностью совпадают.

### **Пример 2.2**

Для многопролетной статически определимой балки (рисунок 1.4а) требуется:

- произвести анализ геометрической неизменяемости системы;
- построить эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ ;
- построить линии влияния опорной реакции  $R_C$ , а также  $M$  и  $Q$  для двух сечений, обозначенных на схеме балки;
- сравнить результаты вычислений исследуемых силовых факторов.

### **Решение**

#### *1 Проверка геометрической неизменяемости системы*

Определяем число степеней свободы заданной многопролетной статически определимой балки по формуле П.Л.Чебышева (1.1):

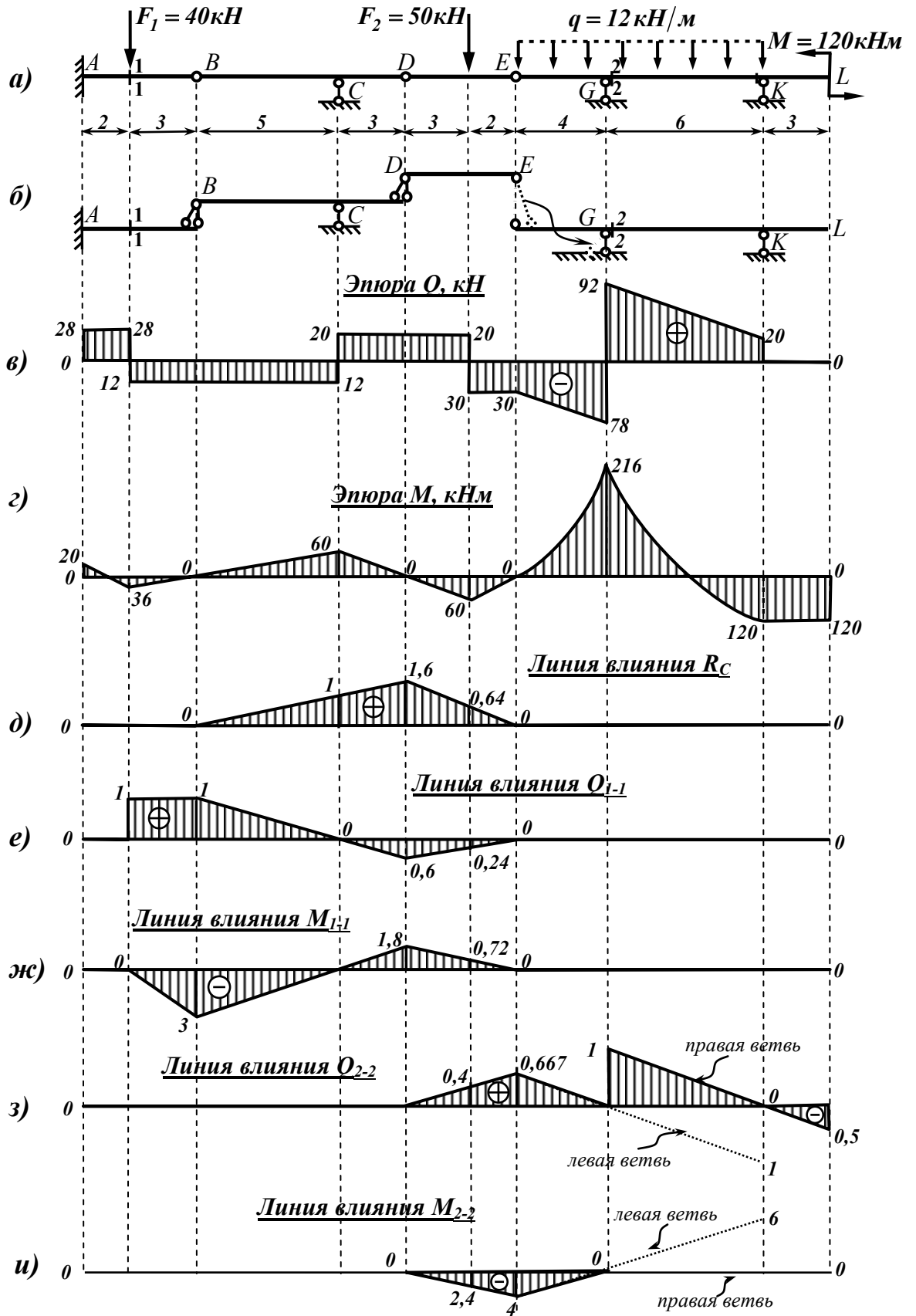


Рисунок 1.4

$$W = 3D - 2Ш_0 - C_{on} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Необходимое условие геометрической неизменяемости (1.1) выполняется, следовательно, рассматриваемая многопролетная балка статически определима и имеет необходимое количество связей для обеспечения геометрической неизменяемости.

Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости заданной системы необходимо проведение структурного анализа. Строим «поэтажную» схему, для чего мысленно удаляем из исходной шарнирно-консольной балки промежуточные шарниры  $B$ ,  $D$  и  $E$ . При этом исходная многопролетная балка распадается на отдельные диски-пролеты  $AB$ ,  $BCD$ ,  $DE$  и  $EGKL$ .

Построение «поэтажной» схемы начинаем с нижнего этажа, на котором предполагаем главные балки: балку  $AB$  с неподвижным защемлением и балку  $EGKL$ , имеющую две опоры, связанные с «землей». Затем на них последовательно опираем вспомогательные балки, поднимаясь каждый раз «этажом» выше (рисунок 1.4б).

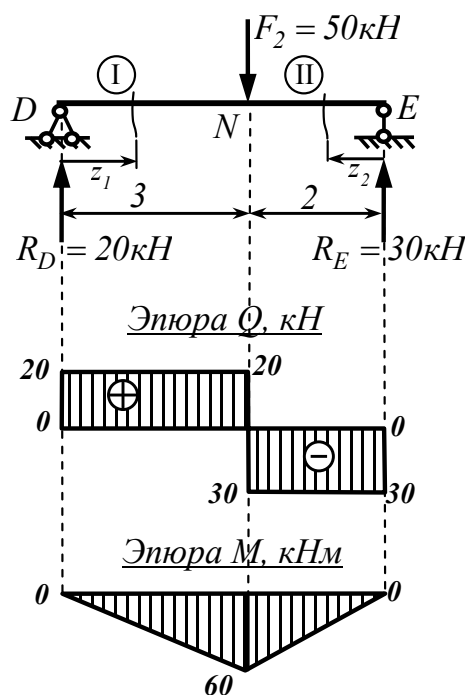
Заметим, что вспомогательная балка  $DE$ , расположенная на самом верхнем «этаже», при замене шарниров  $D$  и  $E$  неподвижными шарнирными опорами (двумя стержнями) имеет один избыточный стержень. Для обеспечения геометрической неизменяемости балки  $DE$  достаточно трех стержней. В то же время расположенная «этажом» ниже главная балка  $EGKL$  имеет недостаточное количество опорных стержней. Вместе с тем в исходной многопролетной балке пролет  $EGKL$  не имеет возможности горизонтального смещения благодаря наличию в точке  $A$  неподвижного защемления. Поэтому переносим избыточный стержень в опору  $G$  (рисунок 1.3б).

Построенная «поэтажная» схема балки неподвижна относительно основания и геометрически неизменяема, следовательно, исходная многопролетная статически определимая балка является неподвижной и геометрически неизменяемой.

*2 Построение эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  от заданной нагрузки*

Для построения эпюр изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  в исходной многопролетной статически определимой балке построим соответствующие эпюры для каждого «этажа».

Расчет начинаем с самого верхнего (третьего) «этажа», второстепенной балки  $DE$  (рисунок 1.3б).



Найдем опорные реакции балки  $DE$  из уравнений моментов всех действующих сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum m_D = 0; 5R_E - 3F_2 = 0; R_E = 30\text{кН}; \\ \sum m_E = 0; 2F_2 - 5R_D = 0; R_D = 20\text{кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = R_D + R_E - F_2 = 20 + 30 - 50 = 0.$$

Строим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  для балки  $DE$  методами сопротивления материалов.

Составим выражение для поперечной силы на  $I$  участке:

$$Q_I = R_D = 20\text{кН} = \text{const}.$$

Определяем значение изгибающего момента в характерных точках участка  $I$ :

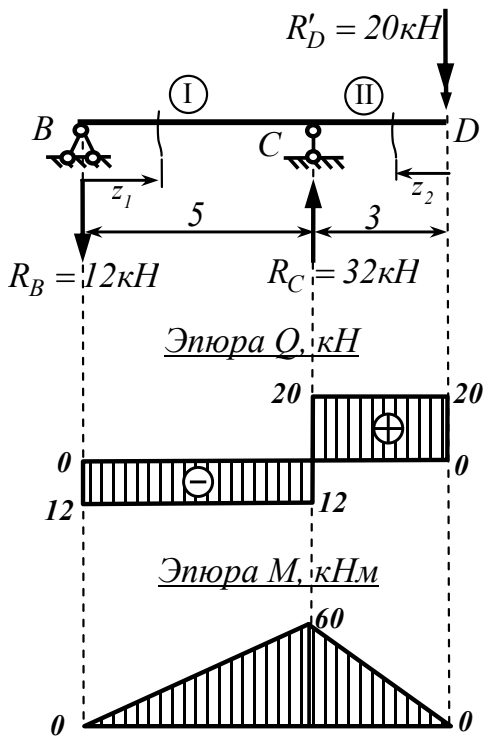
$$M_I = R_D z_1 = 20z_1 \begin{cases} z_1 = 0; & M_D = 0; \\ z_1 = 3; & M_N^{лев} = 60\text{кНм}. \end{cases}$$

Поперечная сила на участке  $II$ :

$$Q_{II} = -R_E = -30 \text{ кН} = \text{const.}$$

Изгибающий момент на участке II:

$$M_{II} = R_E z_2 = 30 z_2 \begin{cases} z_2 = 0; & M_E = 0; \\ z_2 = 2; & M_K^{\text{прав}} = 60 \text{ кНм}. \end{cases}$$



Переходим к расчету второстепенной балки  $BCD$ , расположенной «этажом» ниже балки  $DE$  (рисунок 1.3б). Влияние вышележащего «этажа»  $DE$  учитываем, прикладывая в точке  $D$  силу  $R'_D$ , равную по величине и противоположно направленную реакции  $R_D$ .

Определяем опорные реакции балки  $BCD$  из уравнений моментов относительно опорных шарниров  $B$  и  $C$ :

$$\begin{cases} \sum m_C = 0; & 5R_B - 3R'_D = 0; & R_B = 12 \text{ кН}; \\ \sum m_B = 0; & 5R_C - 8R'_D = 0; & R_C = 32 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций, составляя уравнение проекций всех действующих сил на ось  $y$ :

$$\sum Y = R_C - R_B - R'_D = 32 - 12 - 20 = 0.$$

Выражение для поперечной силы на участке I:

$$Q_I = -R_B = -12 \text{ кН} = \text{const.}$$

Значение изгибающего момента в характерных точках участка I:

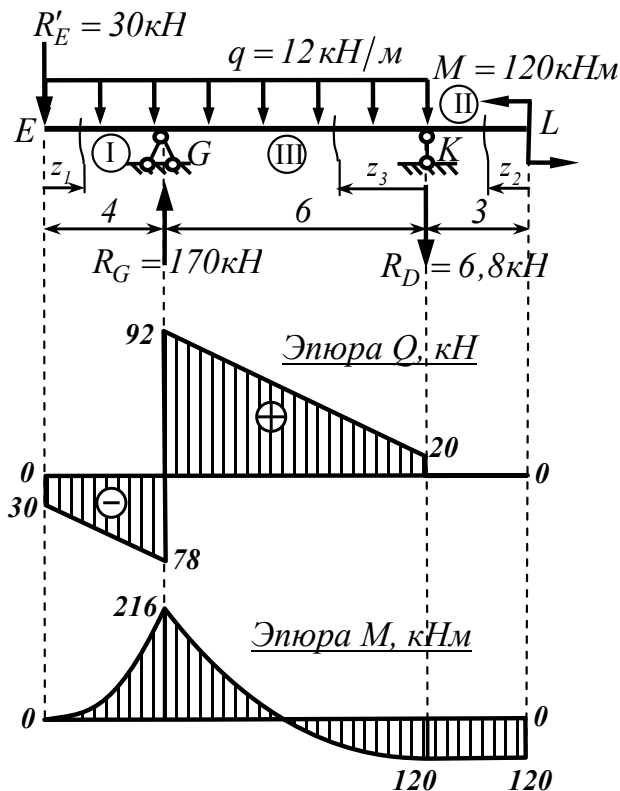
$$M_I = -R_B z_1 = -12 z_1 \left| \begin{array}{l} z_1 = 0; \quad M_B = 0; \\ z_1 = 5; \quad M_C^{\text{лев}} = -60 \text{ кНм}. \end{array} \right.$$

Поперечная сила на участке II:

$$Q_{II} = R'_D = 20 \text{ кН} = \text{const.}$$

Изгибающий момент на участке II:

$$M_{II} = -R'_D z_2 = -20 z_2 \left| \begin{array}{l} z_2 = 0; \quad M_D = 0; \\ z_2 = 3; \quad M_C^{\text{прав}} = -60 \text{ кНм}. \end{array} \right.$$



В последнюю очередь рассчитываем главные балки  $AB$  и  $EGKL$  (последовательность их расчета значения не имеет).

Определяем опорные реакции балки  $EGKL$ , учитывая влияние вышележащего «этажа»  $DE$ , приложив в точке  $E$  силу  $R'_E$ , равную по величине и противоположно направленную реакции  $R_E$ :

$$\begin{cases} \sum m_G = 0; & 4R'_E - 10q \cdot 1 - 6R_K + M = 0; \\ \sum m_E = 0; & 10R'_E + 10q \cdot 5 - 6R_G + M = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_K = 20 \text{кН}; \\ R_G = 170 \text{кН}. \end{cases}$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = R_G - R_K - R'_E - 10q = 170 - 20 - 30 - 120 = 0.$$

Выражения для поперечной силы по участкам:

$$Q_I = -R'_E - qz_1 = -30 - 12z_1 \begin{cases} z_1 = 0; & Q_E = -30 \text{кН}; \\ z_1 = 4; & Q_G^{\text{лев}} = -78 \text{кН}; \end{cases}$$

$$Q_{II} = 0;$$

$$Q_{III} = R_K + qz_3 = 20 + 12z_3 \begin{cases} z_3 = 0; & Q_K^{\text{лев}} = 20 \text{кН}; \\ z_3 = 6; & Q_G^{\text{прав}} = 92 \text{кН}. \end{cases}$$

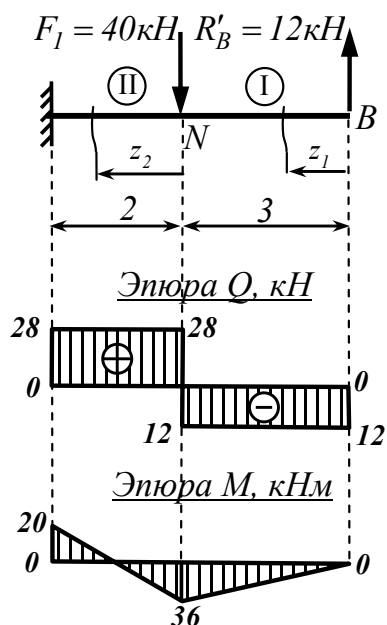
Выражения для изгибающего момента по участкам:

$$M_I = -R'_E z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = -30z_1 - 6z_1^2 \begin{cases} z_1 = 0; & M_E = 0; \\ z_1 = 4; & M_G^{\text{лев}} = -216 \text{кНм}; \end{cases}$$

$$M_{II} = M = 120 \text{кНм} = \text{const};$$

$$M_{III} = M - R'_K z_3 - q \frac{z_3^2}{2} = 120 - 20z_3 - 6z_3^2 \begin{cases} z_3 = 0; & M_K = 120 \text{кНм}; \\ z_3 = 6; & M_G^{\text{прав}} = -216 \text{кНм}. \end{cases}$$





Построение эпюр в консольной балке  $AB$  можно провести без определения опорных реакций. Влияние вышележащего «этажа»  $BCD$  учитываем, прикладывая в точке  $B$  силу  $R'_B$ , равную по величине и противоположно направленную реакции  $R_B$ .

Выражения для поперечной силы по участкам:

$$Q_I = -R'_B = -12 \text{ кН} = \text{const};$$

$$Q_{II} = -R'_B + F_I = 28 \text{ кН} = \text{const}.$$

Значение изгибающего момента в характерных точках:

$$M_I = R'_B z_1 = 12 z_1 \left| \begin{array}{l} z_1 = 0; \quad M_B = 0; \\ z_1 = 3; \quad M_N^{\text{прав}} = 36 \text{ кНм}; \end{array} \right.$$

$$M_{II} = R'_B (3 + z_2) - F_I z_2 = 36 - 28 z_2 \left| \begin{array}{l} z_1 = 0; \quad M_N^{\text{лев}} = 36 \text{ кНм}; \\ z_2 = 2; \quad M_A = -20 \text{ кНм}. \end{array} \right.$$

Располагая эпюры, построенные для отдельных «этажей», на одной оси, получим эпюры поперечных сил  $Q$  (рисунок 1.4в) и изгибающих моментов  $M$  (рисунок 1.4г) для исходной многопролетной статически определимой балки.

### 3 Построение линий влияния

#### 3.1 Линия влияния опорной реакции $R_C$

Опора  $C$  находится на вспомогательной балке  $BCD$ . Для «этажа», на котором находится опора  $C$ , линию влияния строим по обычным правилам для однопролетных балок: на оси линии влияния над точкой, соответствующей опоре  $C$ , откладываем

ем вверх единичный отрезок и соединяем с нулем в точке, соответствующей другой опоре  $B$ . Полученную линию влияния продолжаем на консоль балки  $CD$  (рисунок 1.4д). Затем продолжаем линию влияния на вышестоящую второстепенную балку  $DE$  через излом в точке, соответствующий промежуточному шарниру  $D$ . Балка  $DE$  не имеет связанных с «землей» опор, но следующий за ней «этаж»  $EGKL$  расположен ниже, следовательно, в точке  $E$  линия влияния должна закончиться (ордината в точке  $E$  будет равна нулю). Ординаты других точек построенной линии влияния определяем из геометрических соображений (подобия треугольников).

### 3.2 Линия влияния поперечной силы $Q_{1-1}$

Сечение  $1-1$  расположено на главной балке  $AB$ , для которой строим линию влияния по правилам для простых консольных балок. Линия влияния имеет вид прямоугольника на участке от сечения  $1-1$  до свободного конца балки (рисунок 1.4е). Продолжаем построенную для «этажа» линию влияния на все вышележащие «этажи» через изломы в точках, соответствующих промежуточным шарнирам  $B$  и  $D$ , и нулевое значение в точке, соответствующей связанной с «землей» опоре  $C$ . Балка самого верхнего «этажа»  $DE$  не имеет связанных с «землей» опор, но следующий за ней «этаж»  $EGKL$  расположен ниже, следовательно, в точке  $E$  линия влияния должна закончиться (ордината в точке  $E$  будет равна нулю). Ординаты остальных характерных точек построенной линии влияния определяем из подобия треугольников (рисунок 1.4е).

### 3.3 Линия влияния изгибающего момента $M_{1-1}$

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_{1-1}$  под точкой, соответствующей свободному концу главной балки  $AB$ , откладываем вниз отрезок, численно равный расстоянию от этой точки до сечения  $1-1$ . Соединяем полученную точку с нулем в точке, соответствующей сечению  $1-1$  (рисунок 1.4ж).

Затем продолжаем построенную для данного «этажа» линию влияния на все вышележащие «этажи» через изломы в точках, соответствующих промежуточным

шарнирам  $B$  и  $D$ , и нулевое значение в точке, соответствующей связанной с «землей» опоре  $C$ . Так как линия влияния не может продолжаться правее шарнира  $E$  (следующие за точкой  $E$  «этажи» расположены ниже «этажа»  $DE$ ), то ордината в этой точке равна нулю. Определяем характерные ординаты из геометрических соотношений (подобия треугольников).

### 3.4 Линия влияния поперечной силы $Q_{2-2}$

Сечение 2–2 расположено между опорами главной балки  $EGKL$ . Для заданного «этажа» строим линии влияния по обычным правилам для простых однопролетных балок. На оси линии влияния над точкой, соответствующей левой опоре  $G$ , откладываем вверх единичный отрезок и соединяем с нулем в точке, соответствующей правой опоре  $K$ . Выделяем правую ветвь – от правой опоры до сечения 2–2. Продолжаем правую ветвь на правую консоль (рисунок 1.4з).

Аналогично строим левую ветвь. Под точкой, соответствующей правой опоре  $K$ , откладываем вниз единичный отрезок и соединяем с нулем в точке, соответствующей левой опоре  $G$ . Выделяем левую ветвь – от левой опоры до сечения 2–2. Продолжаем левую ветвь на левую консоль. Соединяем обе ветви передаточной прямой. Так как сечение 2–2 расположено в непосредственной близости от опоры  $G$ , то левая ветвь линии влияния между опорами фактически превращается в точку.

Затем продолжаем построенную для «этажа» линию влияния на вышележащие «этажи». Но выше балки  $EGKL$  расположен только один этаж  $DE$ , поэтому линия влияния левее точки  $D$  продолжаться не может (ордината в этой точке будет равна нулю). Определяем характерные ординаты из подобия треугольников (рисунок 1.4з).

### 3.5 Линия влияния изгибающего момента $M_{2-2}$

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_{2-2}$  над точкой, соответствующей правой опоре  $K$ , откладываем отрезок, численно равный расстоянию от этой опоры до сечения 2–2. Соединяем полученную точку с нулем в точке, соответствующей левой опоре  $G$ . Продолжаем полученную ветвь на левую консоль. Рас-

стояние от левой опоры  $G$  до сечения 2–2 равно нулю, следовательно, правая ветвь будет нулевой линией. Выше балки  $EGKL$  расположен только один этаж  $DE$ , следовательно, ордината линии влияния в точке  $E$  равна нулю. Определяем характерные ординаты из подобия треугольников (рисунок 1.4и).

### 5 Определение усилий по линиям влияния

Для вычисления значений усилий по построенным линиям влияния от заданной неподвижной внешней нагрузки воспользуемся формулой (1.2):

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i + \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Значения усилий будут равны:

$$R_C = F_2 \cdot 0,64 = 50 \cdot 0,64 = 32 \text{ кН};$$

$$Q_{1-1}^{\text{лев}} = F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot (-0,24) = 40 \cdot 1 - 50 \cdot 0,24 = 28 \text{ кН};$$

$$Q_{1-1}^{\text{прав}} = F_2 \cdot (-0,24) = -50 \cdot 0,24 = -12 \text{ кН};$$

$$M_{1-1} = F_2 \cdot 0,72 = 50 \cdot 0,72 = 36 \text{ кНм};$$

$$\begin{aligned} Q_{2-2} &= q \cdot \left( \frac{0,667 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 6}{2} \right) + F_2 \cdot 0,4 - M \cdot \left( \frac{0,5}{3} \right) = \\ &= 12 \cdot (1,333 + 3) + 50 \cdot 0,4 - 120 \cdot \frac{0,5}{3} = 92 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$M_{2-2} = F_2 \cdot (-2,4) + q \cdot \left( -\frac{4 \cdot 4}{2} \right) = -50 \cdot 2,4 - 12 \cdot 8 = -216 \text{ кНм}.$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы 2.

Таблица 2 – Таблица сравнения результатов

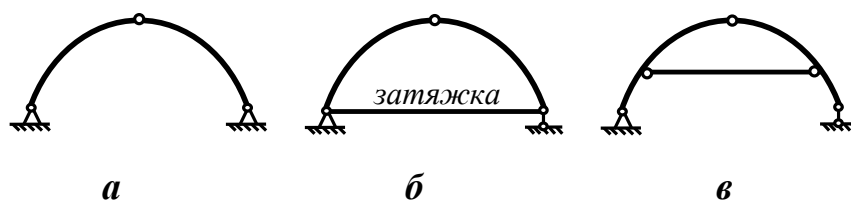
Наименование искомых величин	Значения искомых величин, полученные		Относительная погрешность, %
	аналитически	по линиям влияния	
$R_C$	$32кН$	$32кН$	-
$Q_{1-1}$	$28кН$	$28кН$	-
	$-12кН$	$-12кН$	-
$M_{1-1}$	$36кНм$	$36кНм$	-
$Q_{2-2}$	$92кН$	$92кН$	-
$M_{2-2}$	$-216кНм$	$-216кНм$	-

Полученные результаты полностью совпадают.

## 2 Расчет трехшарнирных арок

### 2.1 Краткие теоретические сведения

*Трехшарнирной аркой* называется система, состоящая из двух криволинейных балок, соединенных между собой и с основанием шарнирами (рисунок 2.1).



*a* – трехшарнирная арка без затяжки; *б* – трехшарнирная арка с затяжкой на уровне опор; *в* – трехшарнирная арка с повышенной затяжкой.

Рисунок 2.1

Трехшарнирная арка является геометрически неизменяемой системой. При отсутствии затяжки (рисунок 2.1*a*) две части арки и основание образуют шарнирный треугольник (соединение трех дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой). При наличии в арке затяжки, воспринимающей распор, одна из опор арки выполняется шарнирно подвижной (рисунок 2.1*б, в*). В этом случае шарнирный треугольник, образуемый двумя частями арки и затяжкой, прикреплен к основанию тремя непараллельными стержнями, не пересекающимися в одной точке.

Вертикальные составляющие опорных реакций арки определяются, как правило, из уравнений моментов действующих сил относительно опорных шарниров. Для определения распора (или усилия в затяжке) следует составить уравнение моментов относительно ключевого шарнира для одной из частей арки (как правило, менее нагруженной).

В общем случае в произвольном сечении  $K$  арки возникают продольная  $N_K$  и

поперечная  $Q_K$  силы и изгибающий момент  $M_K$ .

Для определения внутренних усилий, возникающих в сечении  $K$  арки без затяжки, удобно пользоваться формулами:

$$\begin{cases} M_K = M_K^0 - Hy_K; \\ Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \\ N_K = -[Q_K^0 \sin \varphi_K + H \sin \varphi_K]. \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $M_K^0$ ,  $Q_K^0$  – соответственно изгибающий момент и поперечная сила в сечении  $K$  эквивалентной балки (балки с пролетом и нагрузкой, равными пролету и внешней нагрузке арки);

$H$  – распор арки;

$y_K$  – ордината сечения  $K$ ;

$\varphi_K$  – угол наклона касательной, проведенной в сечении  $K$  к оси арки.

Для трехшарнирной арки с повышенной затяжкой, расположенной на высоте  $t$  над уровнем опор, внутренние усилия будут соответственно равны:

– для сечений, расположенных ниже затяжки:

$$\begin{cases} M_K = M_K^0; \\ Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K; \\ N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K. \end{cases} \quad (2.2)$$

– для сечений, расположенных выше затяжки:

$$\begin{cases} M_K = M_K^0 - N_{зат} (y_K - t); \\ Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - N_{зат} \sin \varphi_K; \\ N_K = -[Q_K^0 \cos \varphi_K + N_{зат} \sin \varphi_K]. \end{cases} \quad (2.3)$$

При использовании формул (2.1) – (2.3) для вычисления внутренних усилий в сечениях, расположенных на правой части арки, следует иметь в виду, что угол наклона касательной  $\varphi_K$  будет отрицательным, т.е.  $\sin \varphi_K < 0$ .

Угол  $\varphi$  наклона касательной к оси арки (его тригонометрические функции) можно вычислить по следующим формулам:

– для арки, очерченной по квадратной параболе  $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x); \quad \cos \varphi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi; \quad (2.4)$$

– для арки, очерченной по окружности  $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f$ :

$$\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}. \quad (2.5)$$

где  $l$  – пролет арки;

$f$  – стрела подъема арки;

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \text{ – радиус окружности.}$$

Так как вертикальные опорные реакции арки совпадают с опорными реакциями эквивалентной балки, то *линии влияния вертикальных составляющих опорных реакций арки строятся так же, как линии влияния соответствующих реакций эквивалентной балки.*

*Для построения линии влияния распора арки  $H$  необходимо построить линию влияния балочного изгибающего момента для сечения, соответствующего ключевому шарниру арки, а затем разделить все ее ординаты на стрелу подъема арки.*

Линии влияния (л.вл.) внутренних усилий для арки могут быть построены



способом наложения (алгебраического сложения) балочных линий влияния и распора. Для арки без затяжки по аналогии с выражениями (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{л.вл. } M_K = \text{л.вл. } M_K^0 - (\text{л.вл. } H) \cdot y_K; \\ \text{л.вл. } Q_K = (\text{л.вл. } Q_K^0) \cdot \cos \varphi_K - (\text{л.вл. } H) \cdot \sin \varphi_K; \\ \text{л.вл. } N_K = - \left[ (\text{л.вл. } Q_K^0) \cdot \sin \varphi_K + (\text{л.вл. } H) \cdot \sin \varphi_K \right]. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Характерные ординаты линий влияния получают алгебраическим сложением (вычитанием) соответствующих ординат линий влияния, входящих в соотношения (2.6).

Выражения для построения линий влияния арки с затяжкой получают по аналогии с формулами (2.2) и (2.3).

Другой способ построения линий влияния внутренних усилий в сечениях арки основывается на отыскании нулевых точек (нулевых ординат) на оси линии влияния (рисунок 2.2).

Выражения, определяющие нулевые точки на линиях влияния изгибающего момента  $M_K$ , поперечной  $Q_K$  и продольной  $N_K$  сил, возникающих в произвольном сечении *арки без затяжки (или с затяжкой на уровне опор)*, соответственно имеют вид:

$$u_M = \frac{l x_K}{f x_K + l_2 y_K}; \quad (2.7)$$

$$u_Q = \frac{f l}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_K}; \quad (2.8)$$

$$u_N = \frac{f l}{f - l_2 \operatorname{ctg} \varphi_K}; \quad (2.9)$$

где  $x_K$  – абсцисса сечения арки, для которого строится линия влияния;

$l$  – пролет арки;

$f$  – стрела подъема арки;

$\varphi_K$  – угол наклона касательной, проведенной к оси арки в сечении, для ко-

торого строится линия влияния.

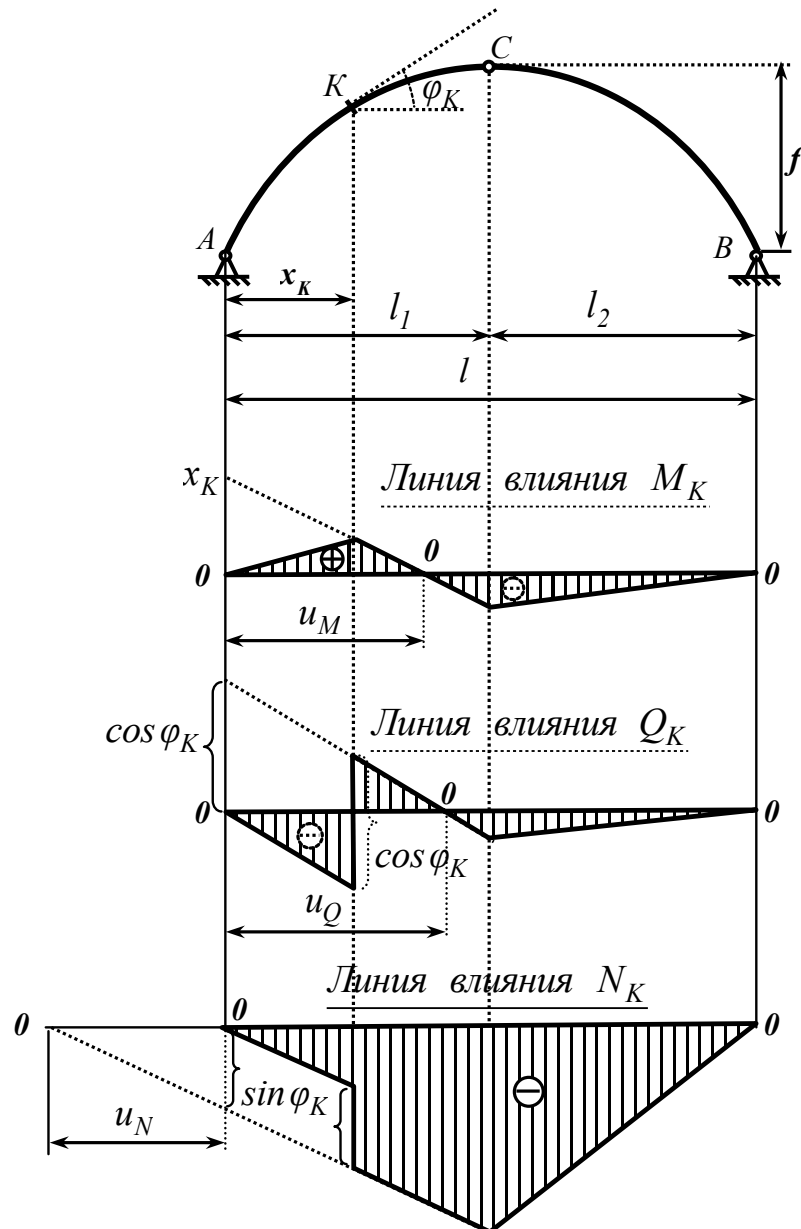


Рисунок 2.2

## 2.2 Примеры решения задач

### *Пример 2.1*

Для трехшарнирной арки без затяжки (рисунок 2.3а) требуется:

- произвести анализ геометрической неизменяемости системы;
- построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  от действующей нагрузки;
- построить линии влияния  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для указанного на оси арки сечения;
- сравнить результаты вычислений исследуемых силовых факторов, полученных при аналитическом расчете и при расчете по линиям влияния.

Уравнение оси арки – окружность. Действующая нагрузка и геометрические размеры арки указаны на рисунке 2.3а.

### *Решение*

#### *1 Кинематический анализ*

Две части арки и диск «основание» образуют геометрически неизменяемое соединение трех дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (шарнирный треугольник). Следовательно, заданная трехшарнирная арка является неподвижной и геометрически неизменяемой системой.

#### *2 Определение опорных реакций арки*

Для определения вертикальных составляющих опорных реакций арки составим уравнения моментов действующих сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0; \\ \sum m_B = 0; \end{cases} \begin{cases} 18V_B - 14,4F - q \cdot 9 \cdot 4,5 = 0; \\ q \cdot 9 \cdot 13,5 + 3,6F - 18V_A = 0; \end{cases} \begin{cases} V_B = 85 \text{ кН}; \\ V_A = 145 \text{ кН}. \end{cases}$$

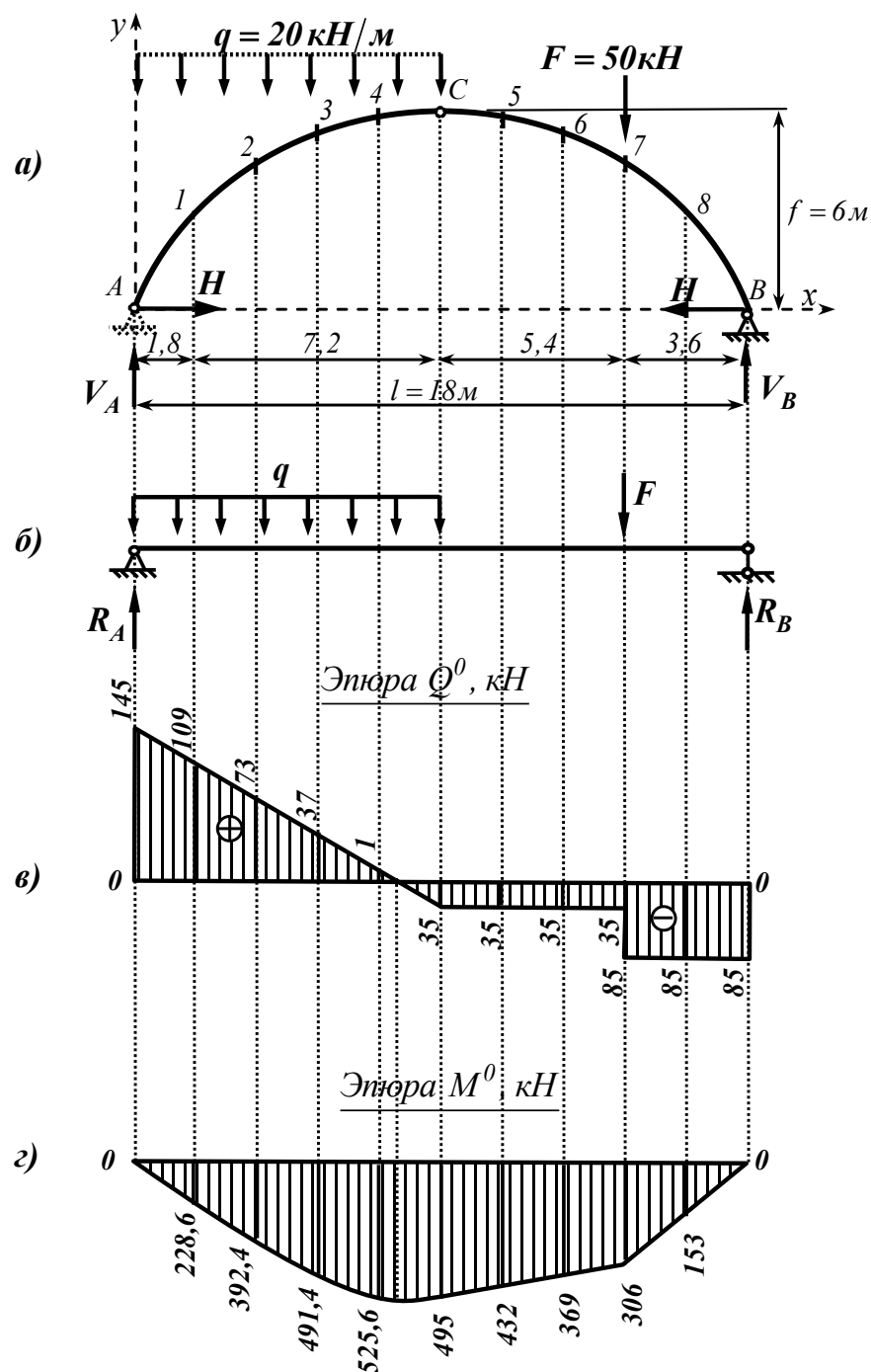


Рисунок 2.3

Для проверки правильности определения вертикальных реакций арки составим уравнение проекций действующих сил на ось  $y$ :

$$\sum Y = 0; \quad V_A + V_B - F - 9q = 145 + 85 - 50 - 9 \cdot 20 = 0.$$

Из уравнения проекций действующих сил на горизонтальную ось следует, что горизонтальные составляющие реакций (распор) неподвижных опорных шарниров  $A$  и  $B$  равны между собой.

Для определения распора  $H$  составим уравнение моментов действующих сил для левой части арки относительно ключевого шарнира  $C$ :

$$\sum m_C^{лев} = 0; 6H + 9q \cdot 4,5 - 9V_A = 0; H = 82,5 \text{ кН}.$$

Для проверки составим уравнение моментов действующих сил для правой части арки относительно ключевого шарнира  $C$ :

$$\sum m_C^{прав} = 0; 9V_B - 5,4F - 6H = 9 \cdot 85 - 5,4 \cdot 50 - 6 \cdot 82,5 = 0.$$

*3 Построение эпюр изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  от действующей нагрузки*

Разобьем пролет арки на десять равных участков длиной  $1,8 \text{ м}$  (рисунок 2.3а) Для вычисления значений внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях арки, используем формулы (2.1).

Схема эквивалентной балки и построенные эпюры балочных изгибающих моментов  $M^0$  и поперечных сил  $Q^0$  показаны соответственно на рисунках 2.3б, в, г.

Для вычисления ординат сечений арки по формулам (2.5) найдем радиус арки:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{6}{2} + \frac{18^2}{8 \cdot 6} = 9,75 \text{ м}.$$

Тогда, уравнение оси арки будет иметь вид:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f = \sqrt{9,75^2 - (9 - x)^2} - 3,75.$$

Тригонометрические функции угла  $\varphi$  наклона касательной к оси арки вычисляются по формулам (2.5):

$$\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R} = \frac{18 - 2x}{19,5}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R} = \frac{y + 3,75}{9,75}.$$

Вычисление внутренних силовых факторов в сечениях арки по формулам (2.1) удобно поводить в табличной форме (таблица 3). Для составления таблицы 3 рекомендуется использовать возможности табличного процессора Microsoft Excel, внося необходимые формулы в соответствующие ячейки.

По данным таблицы 3 строим эпюры изгибающих моментов  $M$  (рисунок 2.4б), поперечных сил  $Q$  (рисунок 2.4в) и продольных сил  $N$  (рисунок 2.4г) от действующей на арку внешней нагрузки.

#### 4 Построение линий влияния внутренних усилий в сечении 2-2

Построение линий влияния усилий в сечении 2-2 выполним способом нулевых точек по формулам (2.7) - (2.9).

Вычисляем координату нулевой точки линии влияния изгибающего момента  $M_{2-2}$ :

$$u_M = \frac{l f x_2}{f x_2 + l_2 y_2} = \frac{18 \cdot 6 \cdot 3,6}{6 \cdot 3,6 + 9 \cdot 4,37} = 6,38 \text{ м.}$$

Таблица 3

№ сече- че- ния	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$M^0$	$H y$	$M, \text{ кНм}$	$Q^0$	$Q^0 \cos\varphi$	$H \sin\varphi$	$Q, \text{ кН}$	$Q^0 \sin\varphi$	$H \cos\varphi$	$N, \text{ кН}$
<b>A</b>	0	0	0,923	0,385	0	0	<b>0</b>	145	55,77	76,15	<b>-20,38</b>	133,85	31,73	<b>-165,58</b>
<b>1</b>	1,8	2,82	0,738	0,674	228,6	233,01	<b>-4,41</b>	109	73,50	60,92	<b>12,58</b>	80,49	55,63	<b>-136,12</b>
<b>2</b>	3,6	4,37	0,554	0,833	392,4	360,36	<b>32,04</b>	73	60,78	45,69	<b>15,09</b>	40,43	68,69	<b>-109,12</b>
<b>3</b>	5,4	5,31	0,369	0,929	491,4	438,16	<b>53,24</b>	37	34,39	30,46	<b>3,92</b>	13,66	76,67	<b>-90,33</b>
<b>4</b>	7,2	5,83	0,185	0,983	525,6	481,173	<b>44,43</b>	1	0,98	15,23	<b>-14,25</b>	0,18	81,08	<b>-81,27</b>
<b>C</b>	9	6	0,000	1,000	495	495	<b>0</b>	-35	-35	0	<b>-35,00</b>	0	82,5	<b>-82,5</b>
<b>5</b>	10,8	5,83	-0,185	0,983	432	481,17	<b>-49,17</b>	-35	-34,40	-15,23	<b>-19,17</b>	6,46	81,08	<b>-87,54</b>
<b>6</b>	12,6	5,31	-0,369	0,929	369	438,16	<b>-69,16</b>	-35	-32,53	-30,46	<b>-2,07</b>	12,92	76,67	<b>-89,59</b>
<b>7</b>	14,4	4,37	-0,554	0,833	306	360,36	<b>-54,36</b>	-35	-29,14	-45,69	<b>16,55</b>	19,38	68,69	<b>-88,08</b>
								-85	-70,77	-45,69	<b>-25,08</b>	47,08	68,69	<b>-115,77</b>
<b>8</b>	16,2	2,82	-0,738	0,674	153	233,01	<b>-80,01</b>	-85	-57,32	-60,92	<b>3,61</b>	62,77	55,63	<b>-118,40</b>
<b>B</b>	18	0	-0,923	0,385	0	0	<b>0</b>	-85	-32,69	-76,15	<b>43,46</b>	78,46	31,73	<b>-110,19</b>

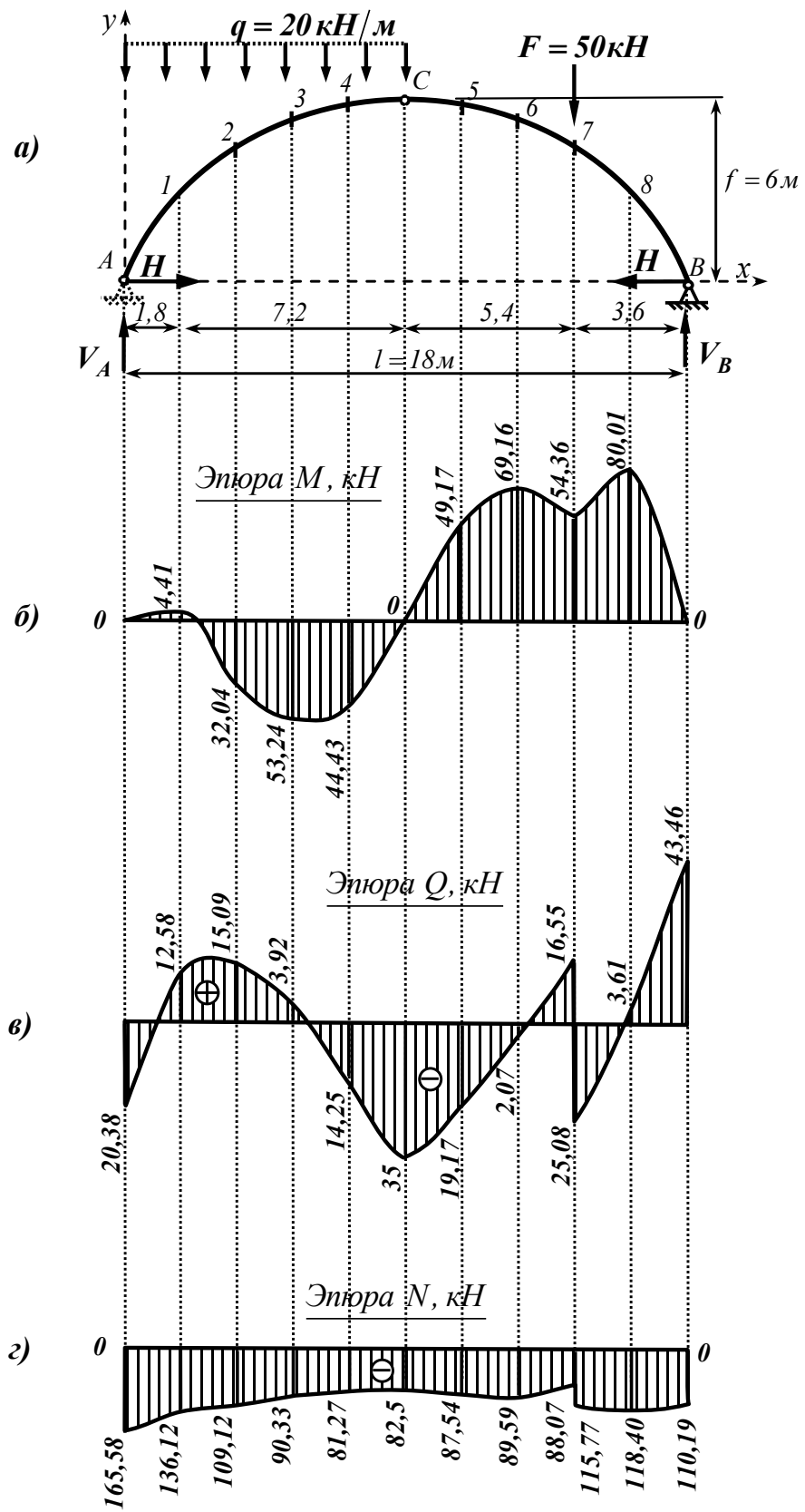


Рисунок 2.4



Над точкой, соответствующей левой опоре  $A$ , откладываем от оси линии влияния вверх отрезок, численно равный координате сечения  $x_2 = 3,6\text{ м}$ . Соединяем полученную точку с нулевой точкой на оси линии влияния. Остальные ординаты определяем из подобия треугольников (рисунок 2.5а).

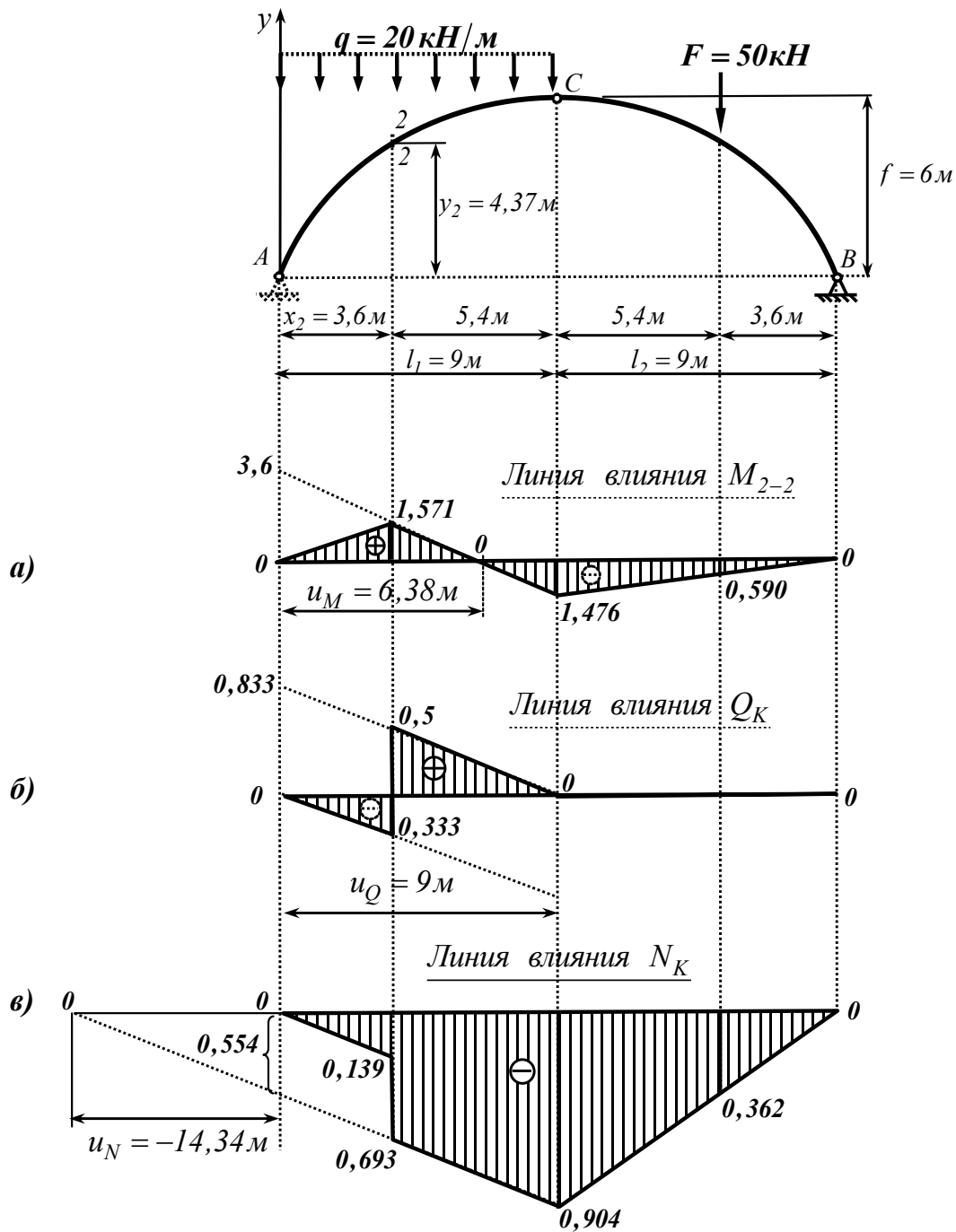


Рисунок 2.5

Вычисляем координату нулевой точки линии влияния поперечной силы  $Q_{2-2}$ :

$$u_Q = \frac{fl}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{6 \cdot 18}{6 + 9 \cdot \frac{0,554}{0,833}} = 9,0 \text{ м.}$$

В данном случае нулевая точка линии влияния поперечной силы расположена под ключевым шарниром  $C$ . Над точкой, соответствующей левой опоре  $A$ , откладываем от оси линии влияния вверх отрезок, численно  $\cos(\varphi_2) = 0,833$ . Соединяем полученную точку с нулевой точкой на оси линии влияния, выделяем правую ветвь (от нулевой точки до сечения 2-2). Левую ветвь (от нуля на левой опоре до сечения 2-2) проводим параллельно правой ветви. Ординаты определяем из подобия треугольников (рисунок 2.5б).

Вычисляем координату нулевой точки линии влияния продольной силы  $N_{2-2}$ :

$$u_N = \frac{fl}{f - l_2 \operatorname{ctg} \varphi_2} = \frac{6 \cdot 18}{6 - 9 \cdot \frac{0,833}{0,554}} = -14,34 \text{ м.}$$

Ордината нулевой точки получается отрицательной, следовательно, откладываем ее влево от опоры  $A$  (рисунок 2.5в). Под точкой, соответствующей левой опоре  $A$ , откладываем от оси линии влияния вниз отрезок, численно  $\sin(\varphi_2) = 0,554$ . Соединяем полученную точку с нулевой точкой на оси линии влияния, выделяем участок левой ветви от сечения 2-2 до точки соответствующей ключевому шарниру  $C$ . Полученную под ключевым шарниром точку соединяем с нулем на правой опоре (правая ветвь) Из нуля на левой опоре проводим прямую, параллельную построенному участку левой ветви. Выделяем участок от нуля на левой опоре до сечения 2-2 и соединяем оба построенных участка левой ветви передаточной прямой. Ординаты линии влияния определяем из подобия треугольников.

### 5 Определение усилий по линиям влияния

Для вычисления значений усилий по построенным линиям влияния от заданной неподвижной внешней нагрузки воспользуемся формулой (1.2):

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i + \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Значения усилий будут равны:

$$\begin{aligned} M_{2-2} &= F \cdot (-0,590) + q \cdot \left( \frac{1,571 \cdot 6,38}{2} - \frac{0,72 \cdot (9 - 6,38)}{2} \right) = \\ &= -50 \cdot 0,590 + 20 \cdot \left( \frac{1,571 \cdot 6,38}{2} - \frac{0,72 \cdot 2,62}{2} \right) = 32,06 \text{ кНм}; \end{aligned}$$

$$Q_{2-2} = q \cdot \left( \frac{0,5 \cdot 5,4}{2} - \frac{0,333 \cdot 3,6}{2} \right) = 20 \cdot (0,5 \cdot 2,7 - 0,333 \cdot 1,8) = 15,12 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} N_{2-2} &= F \cdot (-0,362) + q \cdot \left( -\frac{0,139 \cdot 3,6}{2} - \frac{0,554 + 0,904}{2} \cdot 5,4 \right) = \\ &= -50 \cdot 0,362 - 20 \cdot (-0,139 \cdot 1,8 - 1,458 \cdot 2,7) = -109,34 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы 4.

Таблица 4 – Таблица сравнения результатов

Наименование искомых величин	Значения искомых величин, полученные		Относительная погрешность, %
	аналитически	по линиям влияния	
$M_{2-2}$	32,04 кНм	32,06 кНм	0,06
$Q_{2-2}$	15,09 кН	15,12 кН	0,2
$N_{2-2}$	-109,12 кН	-109,34 кН	0,2

Результаты вычисления усилий аналитическим и графическим (по линиям влияния) способами практически совпадают.

### **Пример 2.2**

Для трехшарнирной арки с повышенной затяжкой (рисунок 2.6а) требуется:

- произвести анализ геометрической неизменяемости системы;
- построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  от действующей нагрузки;
- построить линии влияния  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для указанного на оси арки сечения;
- сравнить результаты вычислений исследуемых силовых факторов, полученных при аналитическом расчете и при расчете по линиям влияния.

Уравнение оси арки – парабола  $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$ . Действующая нагрузка и геометрические размеры арки указаны на рисунке 2.6а.

### **Решение**

#### *1 Кинематический анализ*

Две части арки и затяжка образуют геометрически неизменяемое соединение трех дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (шарнирный треугольник). Шарнирный треугольник прикреплен к основанию тремя непараллельными опорными стержнями, не пересекающимися в одной точке. Следовательно, заданная трехшарнирная арка с пониженной затяжкой является неподвижной и геометрически неизменяемой системой.

#### *2 Определение опорных реакций арки*

Для определения вертикальных составляющих опорных реакций арки составим уравнения моментов действующих сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0; \\ \sum m_B = 0; \end{cases} \begin{cases} 24V_B - 7,2F - q \cdot 9,6 \cdot 19,2 = 0; \\ q \cdot 9,6 \cdot 4,8 + 16,8F - 24V_A = 0; \end{cases} \begin{cases} V_B = 325,2 \text{ кН}; \\ V_A = 118,8 \text{ кН}. \end{cases}$$

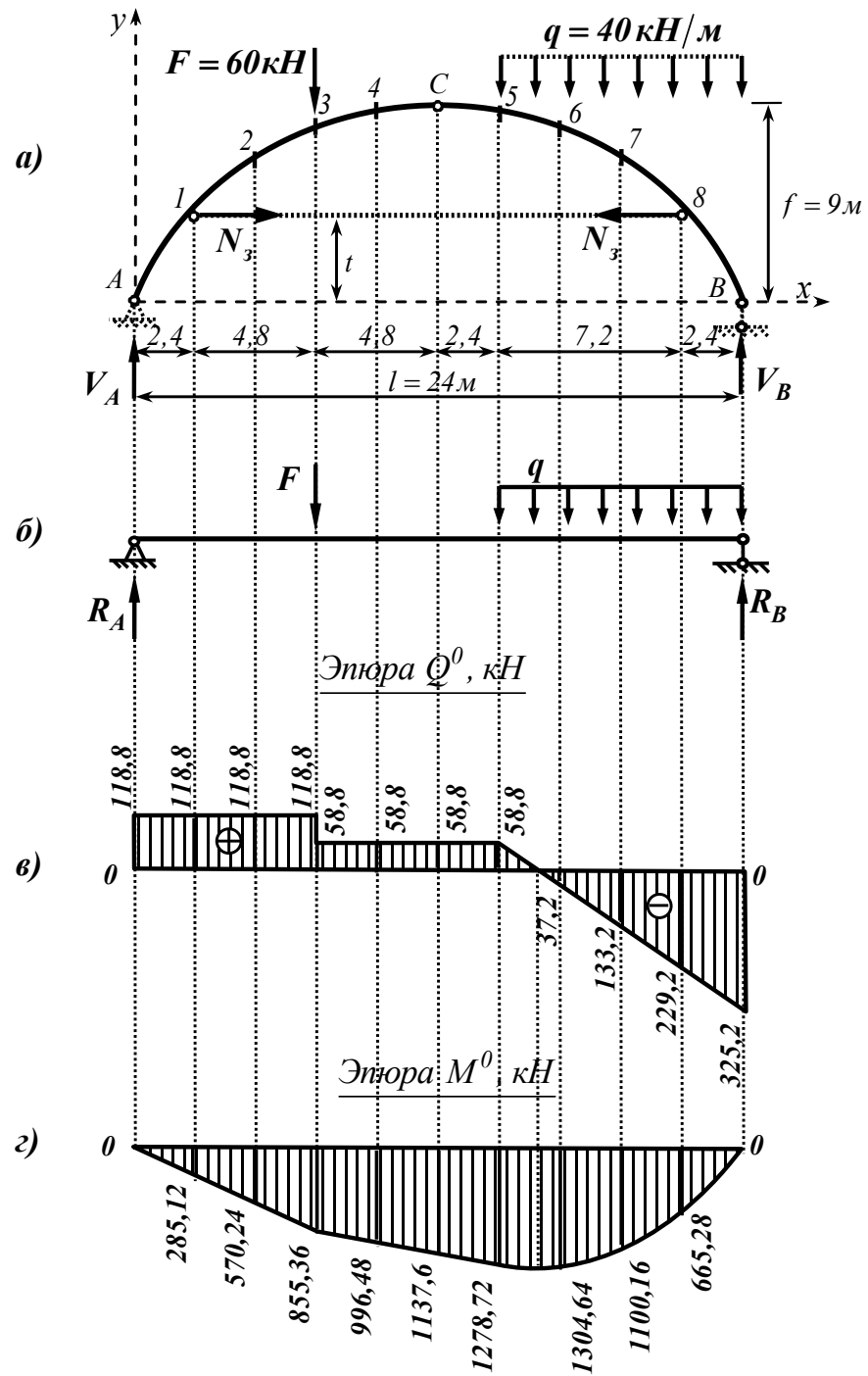


Рисунок 2.6

Для проверки правильности определения вертикальных реакций арки составим уравнение проекций действующих сил на ось  $y$ :

$$\sum F_{ky} = 0; \quad V_A + V_B - F - 9,6q = 118,8 + 325,2 - 60 - 9,6 \cdot 40 = 0.$$

Из уравнения проекций действующих сил на горизонтальную ось следует, что горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира  $A$  равна нулю, в связи с чем на рисунке 2.6а она не показана.

Для определения усилия в затяжке  $N_3$  предварительно вычислим высоту расположения затяжки  $t$ .

Уравнение оси арки имеет вид:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = \frac{4 \cdot 8}{24^2} x(24-x) = 0,0625x(24-x). \quad (2.10)$$

Высота расположения затяжки над уровнем опор равна

$$t = y(x = 2,4 \text{ м}) = 0,0625 \cdot 2,4 \cdot (24 - 2,4) = 3,24 \text{ м}.$$

Составляя уравнение моментов действующих сил для левой части арки относительно ключевого шарнира  $C$ , получим:

$$\sum m_C^{лев} = 0; \quad N_3 \cdot (9 - 3,24) + 4,8F - 12V_A = 0; \quad N_3 = 197,5 \text{ кН}.$$

Для проверки составим уравнение моментов действующих сил для правой части арки относительно ключевого шарнира  $C$ :

$$\sum m_C^{прав} = 0; \quad 12V_B - 9,6q \cdot 7,2 - 5,76N_3 = 12 \cdot 325,2 - 9,6 \cdot 40 \cdot 7,2 - 5,76 \cdot 197,5 = 0.$$

### 3 Построение эпюр изгибающих моментов $M$ , поперечных сил $Q$ и продольных сил $N$ от действующей нагрузки

Разобьем пролет арки на десять равных участков длиной 2,4 м (рисунок 2.6а). Для вычисления значений внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях арки, используем формулы (2.2) и (2.3).

Схема эквивалентной балки и построенные эпюры балочных изгибающих моментов  $M^0$  и поперечных сил  $Q^0$  показаны соответственно на рисунках 2.6б, в, г.

Вычисление внутренних силовых факторов в сечениях арки с затяжкой по формулам (2.2) и (2.3) удобно поводить в табличной форме (таблица 5). Значения тригонометрических функций угла  $\varphi$  наклона касательной к оси арки вычислялись по формулам (2.4) с учетом выражения (2.10):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = 0,0625 \cdot (24 - 2x); \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Для составления таблицы 5 рекомендуется использовать возможности табличного процессора Microsoft Excel, внося необходимые формулы в соответствующие ячейки электронной таблицы.

По данным таблицы 5 строим от действующей на арку внешней нагрузки (рисунок 2.7а) эпюры изгибающих моментов  $M$  (рисунок 2.7б), поперечных сил  $Q$  (рисунок 2.7в) и продольных сил  $N$  (рисунок 2.7г).

### 6 Построение линий влияния внутренних усилий в сечении 3-3

Сечение 3-3 расположено выше затяжки, поэтому построение линий влияния проводим способом сложения балочных линий влияния по формулам, аналогичным формулам (2.3) для вычисления внутренних усилий в арке:

Таблица 5

№ сечения	x, м	y, м	$tg\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$M^0$	$N_3(f-y)$	$M$ , кНм	$Q^0$	$Q^0 \cos\varphi$	$N_3 \sin\varphi$	$Q$ , кН	$Q^0 \sin\varphi$	$N_3 \cos\varphi$	$N$ , кН
<b>A</b>	0	0	1,5	0,832	0,555	0	-	<b>0</b>	118,8	65,90	-	<b>65,90</b>	98,85	-	<b>-98,85</b>
<b>I</b>	2,4	3,24	1,2	0,768	0,640	285,12	-	<b>285,12</b>	118,8	76,05	-	<b>76,05</b>	91,26	-	<b>-91,26</b>
							0	<b>285,12</b>	118,8	76,05	151,72	<b>-75,67</b>	91,26	126,44	<b>-217,70</b>
<b>2</b>	4,8	5,76	0,9	0,669	0,743	570,24	497,7	<b>72,54</b>	118,8	88,30	132,12	<b>-43,82</b>	79,47	146,80	<b>-226,27</b>
<b>3</b>	7,2	7,56	0,6	0,514	0,857	855,36	853,2	<b>2,16</b>	118,8	101,87	101,61	<b>0,26</b>	61,12	169,35	<b>-230,47</b>
									58,8	50,42	101,61	<b>-51,19</b>	30,25	169,35	<b>-199,61</b>
<b>4</b>	9,6	8,64	0,3	0,287	0,958	996,48	1066,5	<b>-70,02</b>	58,8	56,32	56,75	<b>-0,43</b>	16,90	189,17	<b>-206,07</b>
<b>C</b>	12	9	0	0,000	1,000	1137,6	1137,6	<b>0</b>	58,8	58,8	0	<b>58,80</b>	0	197,5	<b>-197,5</b>
<b>5</b>	14,4	8,64	-0,3	-0,287	0,958	1278,72	1066,5	<b>212,22</b>	58,8	56,32	-56,75	<b>113,07</b>	-16,90	189,17	<b>-172,27</b>
<b>6</b>	16,8	7,56	-0,6	-0,514	0,857	1304,64	853,2	<b>451,44</b>	-37,2	-31,90	-101,61	<b>69,71</b>	19,14	169,35	<b>-188,49</b>
<b>7</b>	19,2	5,76	-0,9	-0,669	0,743	1100,16	497,7	<b>602,46</b>	-133,2	-99,01	-132,12	<b>33,11</b>	89,11	146,80	<b>-235,91</b>
<b>8</b>	21,6	3,24	-1,2	-0,768	0,640	665,28	0	<b>665,28</b>	-229,2	-146,73	-151,72	<b>4,99</b>	176,08	126,44	<b>-302,51</b>
							-	<b>665,28</b>	-229,2	-146,73	-	<b>-146,73</b>	176,08	-	<b>-176,08</b>
<b>B</b>	24	0	-1,5	-0,832	0,555	0	-	<b>0</b>	-325,2	-180,39	-	<b>-180,39</b>	270,58	-	<b>-270,58</b>



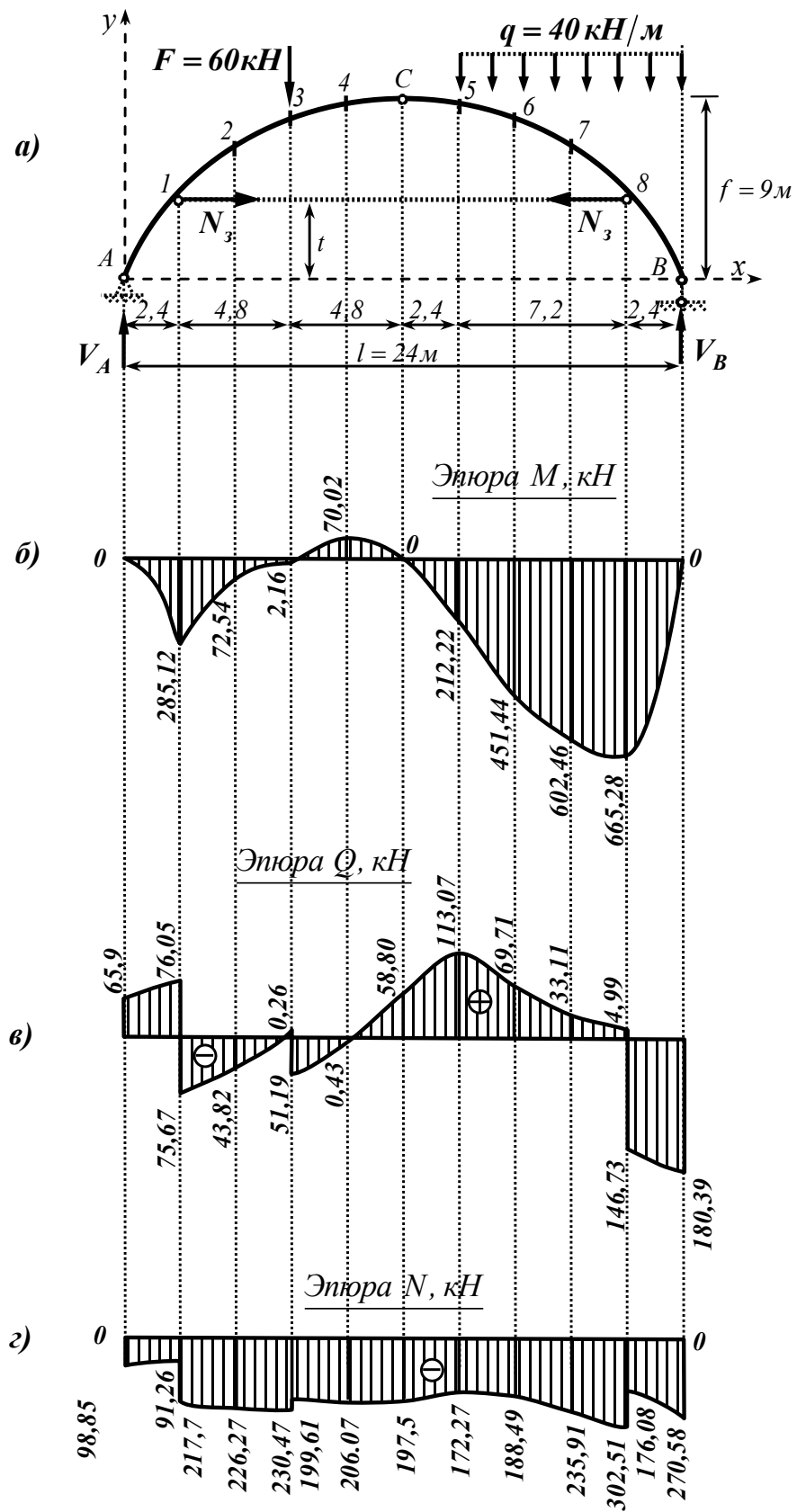


Рисунок 2.7

$$\begin{cases} \text{л. вл. } M_K = \text{л. вл. } M_K^0 - (\text{л. вл. } N_{зам}) \cdot (y_K - t); \\ \text{л. вл. } Q_K = (\text{л. вл. } Q_K^0) \cos \varphi_K - (\text{л. вл. } N_{зам}) \cdot \sin \varphi_K; \\ \text{л. вл. } N_K = - \left[ (\text{л. вл. } Q_K^0) \cos \varphi_K + (\text{л. вл. } N_{зам}) \cdot \sin \varphi_K \right]. \end{cases} \quad (2.11)$$

Для построения линии влияния изгибающего момента  $M_{3-3}$  предварительно строим линию влияния балочного момента  $M_{3-3}^0$  (рисунок 2.8а).

Для построения линии влияния усилия в затяжке  $N_3$  (рисунок 2.8б) строим линию влияния балочного момента в сечении  $C$ , соответствующем ключевому шарниру арки, и делим все ординаты линии влияния на расстояние по вертикали от ключевого шарнира до уровня затяжки  $(f - t)$ . Умножаем все ординаты построенной линии влияния  $N_3$  на расстояние  $(y_3 - t)$  от уровня затяжки до сечения 3-3 (рисунок 2.8в). В соответствии с выражением (2.11) определяем ординаты характерных точек линии влияния изгибающего момента  $M_{3-3}$  вычитанием соответствующих ординат линий влияния, показанных на рисунках 2.8а и 2.8в. Окончательный вид построенной линии влияния изгибающего момента  $M_{3-3}$  показан на рисунке 2.8г.

Аналогично по формулам (2.11) строим линии влияния поперечной силы  $Q_{3-3}$  (рисунок 2.89а) и продольной силы  $N_{3-3}$  (рисунок 2.9б).

### 7 Определение усилий по линиям влияния

Для вычисления значений усилий по построенным линиям влияния от заданной неподвижной внешней нагрузки воспользуемся формулой (1.2):

$$S = \sum P_i y_i + \sum q_i \omega_i + \sum M_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Значения усилий будут равны:

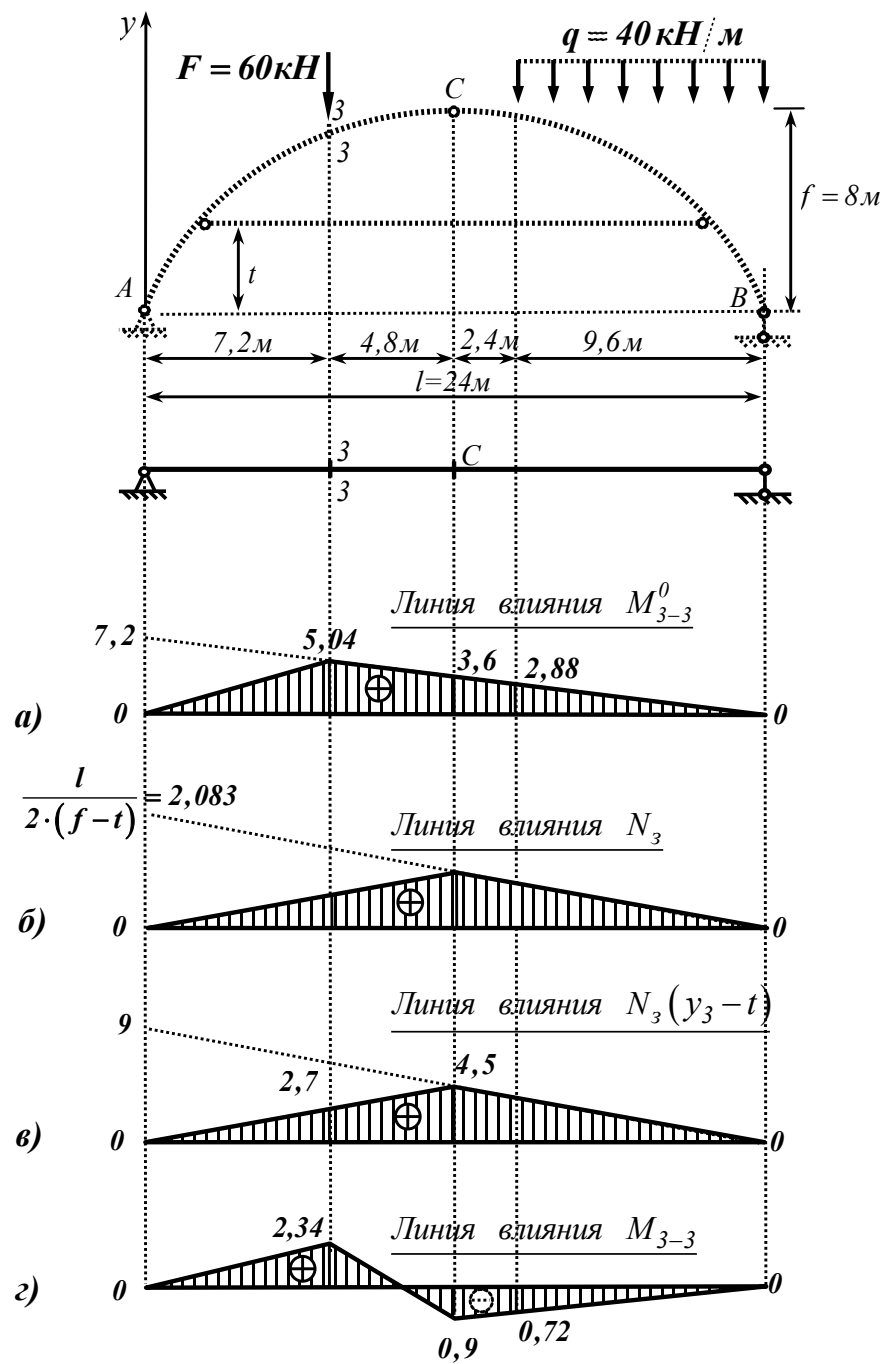


Рисунок 2.8

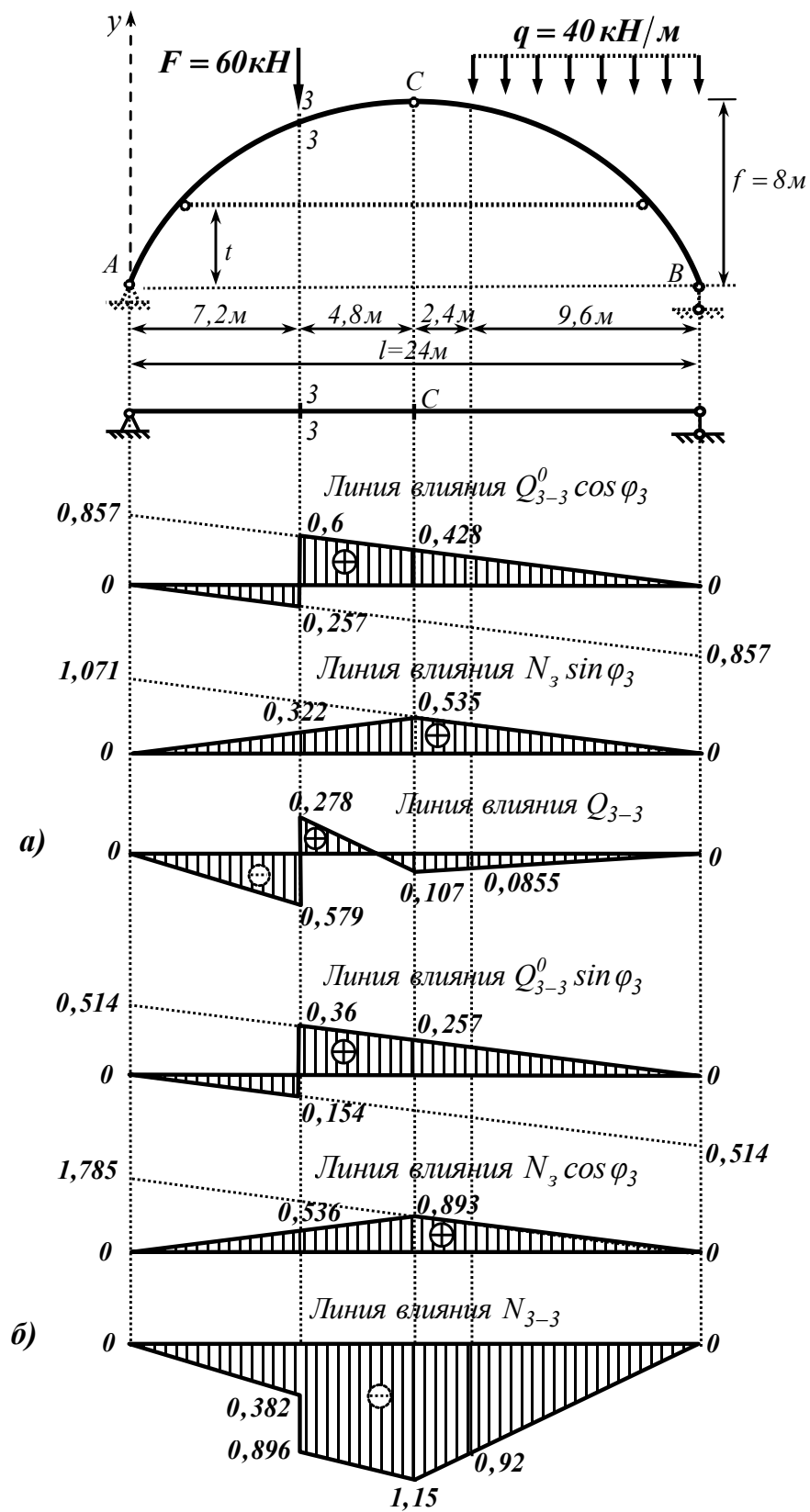


Рисунок 2.9

$$M_{3-3} = F \cdot 2,34 + q \cdot \left( -\frac{0,72 \cdot 9,6}{2} \right) = 60 \cdot 2,34 - 40 \cdot \frac{0,72 \cdot 9,6}{2} = 2,16 \text{ кНм};$$

$$Q_{3-3}^{лев} = F \cdot 0,278 + q \cdot \left( -\frac{0,0855 \cdot 9,6}{2} \right) = 60 \cdot 0,278 - 40 \cdot \frac{0,0855 \cdot 9,6}{2} = 0,26 \text{ кН};$$

$$Q_{3-3}^{прав} = F \cdot (-0,579) + q \cdot \left( -\frac{0,0855 \cdot 9,6}{2} \right) = -60 \cdot 0,579 - 40 \cdot \frac{0,0855 \cdot 9,6}{2} = -51,16 \text{ кН};$$

$$N_{3-3}^{лев} = F \cdot (-0,896) + q \cdot \left( -\frac{0,92 \cdot 9,6}{2} \right) = -60 \cdot 0,896 - 40 \cdot \frac{0,92 \cdot 9,6}{2} = -230,4 \text{ кН};$$

$$N_{3-3}^{прав} = F \cdot (-0,382) + q \cdot \left( -\frac{0,92 \cdot 9,6}{2} \right) = -60 \cdot 0,382 - 40 \cdot \frac{0,92 \cdot 9,6}{2} = -199,56 \text{ кН}.$$

Результаты вычислений представим в виде таблицы 6.

Таблица 6 – Таблица сравнения результатов

Наименование искомых величин	Значения искомых величин, полученные		Относительная погрешность, %
	аналитически	по линиям влияния	
$M_{3-3}$	2,16 кНм	2,16 кНм	-
$Q_{3-3}$	0,26 кН	0,26 кН	-
	-51,19 кН	-51,16 кН	0,01
$N_{3-3}$	-230,47 кН	-230,4 кНм	0,03
	-199,61 кН	-199,56 кН	0,02

Полученные результаты вычисления усилий аналитическим способом и графическим (по линиям влияния) практически совпадают.

### 3 Определение внутренних усилий в плоских статически определимых рамах с замкнутым контуром

#### 3.1 Краткие теоретические сведения

Статически определимые рамы с замкнутым контуром состоят из нескольких дисков (стержней) прямолинейного или ломаного очертания, связанных между собой шарнирами. Различают замкнутые контуры двух типов. Рама с замкнутым контуром *первого типа* содержит один свободный от внешней нагрузки прямолинейный стержень с шарнирными окончаниями (рисунок 3.1а). В раме с замкнутым контуром *второго типа* все диски (стержни) имеют ломаное очертание, или имеется один прямолинейный стержень с поперечной внешней нагрузкой (рисунки 3.1б, в).

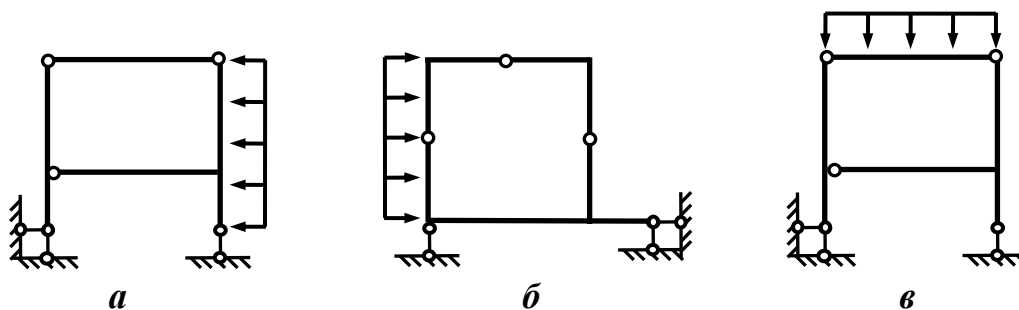


Рисунок 3.1 – Статически определимые рамы с замкнутым контуром

Независимо от типа замкнутого контура расчет рамы начинают с проверки геометрической неизменяемости и определения опорных реакций из условий равновесия рамы в целом.

В раме с замкнутым контуром первого типа ненагруженный прямолинейный стержень заменяют продольной силой, значение которой определяют из рассмотрения равновесия оставшейся части рамы. Замкнутый контур второго типа раскрывается путем расчленения системы на отдельные диски или выделения трехшарнирной рамы.

После раскрытия замкнутого контура эпюры возникающих внутренних силовых факторов строят так же, как в обычной статически определимой раме. Большое количество подробно рассмотренных примеров построения эпюр внутренних силовых факторов в статически определимых рамах без замкнутого контура содержится в [1]. Поэтому отметим лишь наиболее характерные особенности.

Построение эпюр, как правило, начинают с построения эпюры изгибающих моментов  $M$ . Знаки на эпюре  $M$  не ставят, а саму эпюру строят на *растянутых волокнах*.

Эпюру поперечных сил  $Q$  строят по эпюре  $M$  на основании дифференциальной зависимости  $Q = \frac{dM}{dx}$ . При этом на участках, где действуют только сосредоточенные силы (эпюра  $M$  имеет прямолинейное очертание), поперечную силу находят как тангенс угла наклона касательной к эпюре моментов. Для определения знака поперечной силы следует повернуть ось рассматриваемого стержня до совмещения с эпюрой  $M$ . Если этот поворот происходит по ходу часовой стрелки, то поперечная сила – положительна, если против хода часовой стрелки – отрицательна. На участках с распределенной нагрузкой, где эпюра моментов имеет криволинейное очертание, поперечную силу определяют, вырезая соответствующий элемент из рамы и рассматривая его как балку с внешней нагрузкой и моментами в опорных узлах, значения которых берут с эпюры  $M$ .

Эпюра продольных сил  $N$  строится по эпюре поперечных сил  $Q$  из рассмотрения равновесия узлов рамы.

Для проверки правильности построения эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$  необходимо руководствоваться следующими общими правилами:

1 В точках приложения сосредоточенных сил на эпюре изгибающих моментов  $M$  должен быть излом по направлению силы, а на эпюре поперечных сил  $Q$  скачок на величину и по направлению силы.

2 В сечениях, где применен сосредоточенный момент, на эпюре изгибающих моментов  $M$  должен быть скачок на величину этого момента.

3 На участках с распределенной нагрузкой эпюра изгибающих моментов  $M$  имеет криволинейное очертание с выпуклостью, направленной в сторону действия нагрузки.

4 В сечениях, где эпюра поперечных сил  $Q$  пересекает ось стержня (поперечная сила равна нулю), изгибающий момент  $M$  имеет экстремальное значение (максимум или минимум).

### 3.2 Примеры решения задач

#### Пример 3.1

Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для рамы, изображенной на рисунке 3.2а.

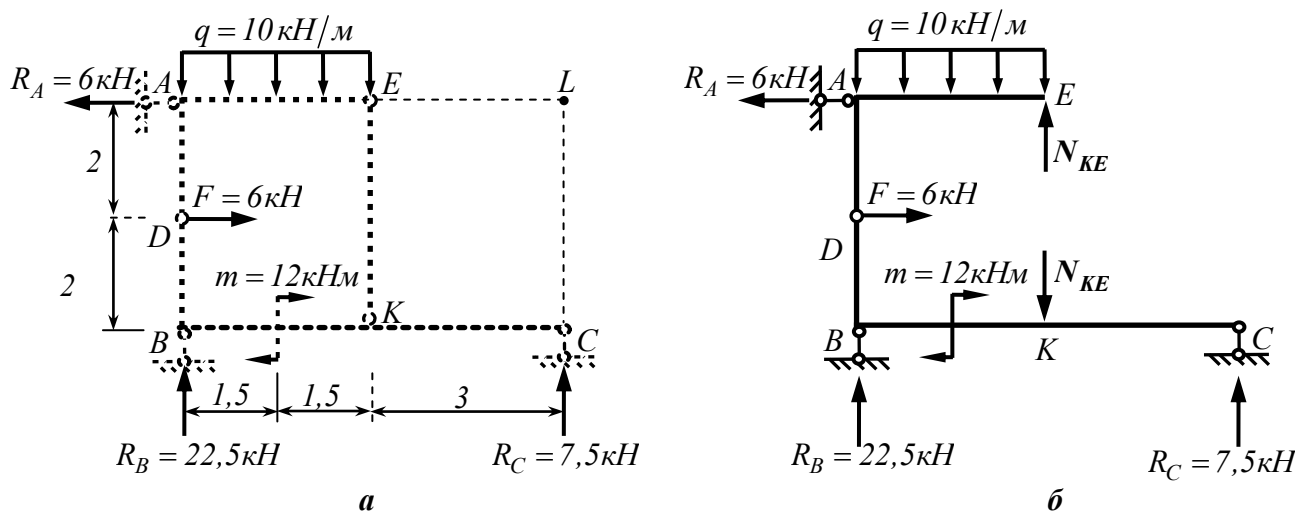


Рисунок 3.2

#### Решение

##### 1 Кинематический анализ

Проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости по формуле (1.1):



$$W = 3D - 2Ш_0 - C_{on} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Необходимое условие выполняется. Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости рамы проводим структурный анализ. Три диска  $DAE$ ,  $EK$  и  $DBC$  соединены тремя шарнирами  $D$ ,  $E$  и  $K$ , не лежащими на одной прямой, т.е. образуют шарнирный треугольник. В свою очередь, геометрически неизменяемый шарнирный треугольник присоединен к основанию тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке опорными стержнями. Следовательно, исходная рама статически определима, геометрически неизменяема и неподвижна относительно основания.

## 2 Определение опорных реакций рамы и усилия в затяжке

Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия для всей рамы в целом (рисунок 3.2а):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum m_A = 0; \\ \sum m_L = 0; \end{cases} \begin{cases} F - R_A = 0; \\ 6R_C + 2F - q \cdot 3 \cdot 1,5 - m = 0; \\ q \cdot 3 \cdot 4,5 + 2F - m - 6R_B = 0; \end{cases} \begin{cases} R_A = 6 \text{ кН}; \\ R_C = 7,5 \text{ кН}; \\ R_B = 22,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверим правильность нахождения реакций, составив уравнение проекций действующих сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0; \quad R_B + R_C - 3q = 22,5 + 7,5 - 30 = 0.$$

Следовательно, реакции опорных стержней определены правильно.

Раскроем замкнутый контур первого типа, заменив действие ненагруженного прямолинейного стержня  $KE$  (затяжки) возникающими в нем продольными силами  $N_{KE}$  (рисунок 3.2б). Усилие в затяжке определим из уравнения моментов сил относительно шарнира  $D$  для верхней части рамы:

$$\sum m_D^{верхн.} = 0; \quad 3N_{KE} - q \cdot 3 \cdot 1,5 + 2R_A = 0; \quad N_{KE} = 11 \text{ кН}.$$

### 3 Построение эпюр внутренних силовых факторов в раме

После раскрытия замкнутого контура (определения усилия в стержне  $KE$ ) эпюру изгибающих моментов  $M$  в раме строим так же, как и в обычной статически определимой раме, вычисляя значения моментов в характерных точках и откладывая найденные значения на *растянутых* волокнах (рисунок 3.3а).

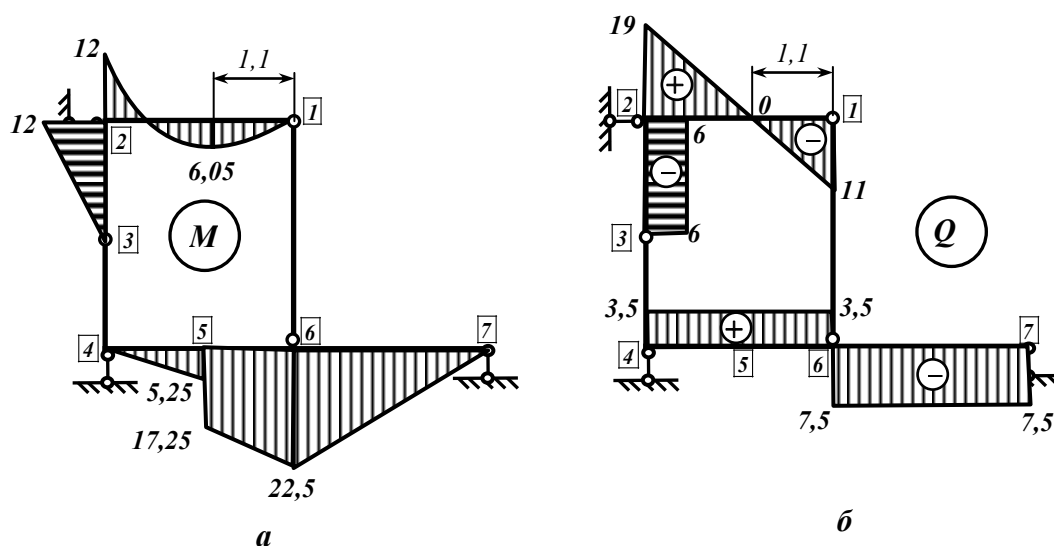


Рисунок 3.3

Эпюру поперечных сил  $Q$  строим по построенной эпюре изгибающих моментов  $M$  (рисунок 3.3а), используя дифференциальную зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой. На участках с прямолинейным очертанием эпюры  $M$  поперечная сила имеет постоянное значение и находится, как тангенс угла наклона эпюры  $M$  к оси стержня.

*Участок 2-3.* Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть против хода часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке отрицательна.

$$Q_{2-3} = -\frac{12}{2} = -6 \text{ кН}.$$

*Участок 4-5.* Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть по ходу часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке положительна.

$$Q_{4-5} = \frac{5,25}{1,5} = 3,5 \text{ кН}.$$

*Участок 5-6.* Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть по ходу часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке положительна.

$$Q_{5-6} = \frac{22,5 - 17,25}{1,5} = 3,5 \text{ кН}.$$

*Участок 6-7.* Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть против хода часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке отрицательна.

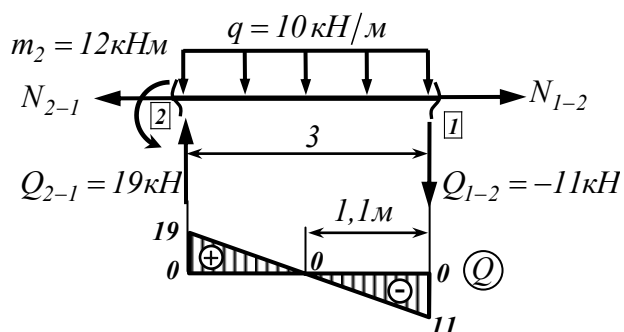
$$Q_{6-7} = -\frac{22,5}{3} = -7,5 \text{ кН}.$$

На участках 3-4 и 1-6 эпюра  $M$  имеет постоянное (нулевое) значение, поэтому поперечная сила равна нулю:

$$Q_{3-4} = Q_{1-6} = 0.$$

Для определения поперечной силы на участке 1-2 с криволинейной эпюрой

моментов, вырежем соответствующий участок из рамы и рассмотрим его равновесие под действием внешней равномерно распределенной нагрузки  $q = 10 \text{ кН/м}$  и внутренних силовых факторов, действующих в сечениях 1 и 2.



В сечении 2 действует изгибающий момент  $m_2 = 12 \text{ кНм}$ , растягивающий верхние волокна (величину и направление момента определяем по эпюре  $M$ ). Поперечные силы  $Q_{1-2}$  и  $Q_{2-1}$ , действующие в сечениях 1 и 2

изображаем на схеме так, чтобы они имели положительное направление (вращали выделенный элемент по часовой стрелке). Тогда получающийся знак поперечных сил будет автоматически переноситься на эпюру  $Q$ .

Величину поперечных сил определяем, составляя уравнения моментов действующих сил относительно сечений 1 и 2:

$$\begin{cases} \sum m_1 = 0; \\ \sum m_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} m_2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - 3Q_{2-1} = 0; \\ m_2 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - 3Q_{1-2} = 0; \end{cases} \begin{cases} Q_{2-1} = -11 \text{ кН}; \\ Q_{1-2} = 19 \text{ кН}. \end{cases}$$

Используя полученные значения, строим эпюру поперечных сил  $Q$  (рисунок 3.3б).

Так как поперечная сила на участке 1-2 меняет знак (на эпюре  $Q$  имеется нулевая точка), то в соответствующей точке эпюры  $M$  будет экстремум (минимум). Координату нулевой точки определяем из простых геометрических соображений, рассматривая подобные треугольники:

$$\frac{11}{19} = \frac{x}{3-x}; \Rightarrow x = 1,1 \text{ м}.$$

Экстремальное значение изгибающего момента будет равно:

$$M^{min}(x = 1,1m) = -1,1Q_{1-2} - q \cdot \frac{(1,1)^2}{2} = -1,1 \cdot (-11) - 5 \cdot (1,1)^2 = 6,05 \text{ кНм.}$$

Эпюру продольных сил  $N$  строим по эпюре поперечных сил  $Q$ , последовательно вырезая узлы из рамы и рассматривая их равновесие. Рекомендуется начинать с наиболее простых узлов, в которых сходятся два стержня. Неизвестные продольные силы, возникающие в стержнях, будем показывать так, чтобы они имели положительное направление (вызывали растяжение). В этом случае получающийся знак силы будет автоматически переноситься на эпюру  $N$ . Найденные значения продольных сил в элементах рамы будем сразу откладывать на эпюру  $N$ , тогда при рассмотрении равновесия последующих узлов рамы часть продольных сил, действующих в узле, будет уже известна.

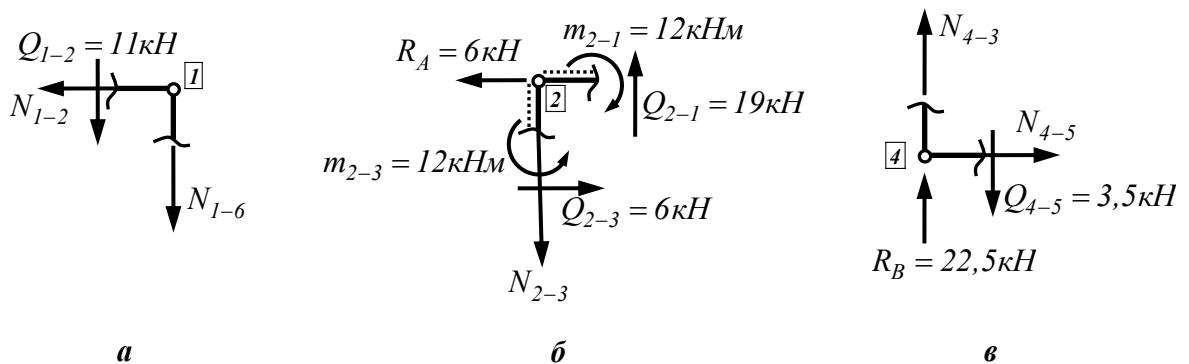


Рисунок 3.4

Узел 1 (рисунок 3.4а). По эпюре  $Q$  определяем, что в узле на отсеченный участок ригеля 1-2 действует отрицательная поперечная сила, равная  $11 \text{ кН}$ . Поэтому направление силы  $Q_{1-2}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы она вращала вырезанный узел против хода часовой стрелки. Неизвестные продольные силы, действующие в отсеченных участках ригеля и стойки рамы, направляем так, чтобы они вызывали растяжение соответствующих элементов. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{1-2} = 0; \\ N_{1-6} = -11 \text{ кН}. \end{cases}$$

Узел 2 (рисунок 3.4б). На узел действует внешняя сила – опорная реакция  $R_B = 22,5 \text{ кН}$ . По эпюре  $M$  определяем величину и направление действующих в узле на отсеченные участки ригеля и стойки изгибающие моменты. На схеме узла растянутые волокна показаны пунктиром. Очевидно, что по оси  $x$  узел уже уравновешен. Так же уравновешивают друг друга и приложенные в узле изгибающие моменты. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, на вертикальную ось  $y$  имеем:

$$\sum Y = 0; \quad N_{2-3} = 19 \text{ кН}.$$

Узел 4 (рисунок 3.4в). По эпюре  $Q$  определяем, что в узле на отсеченный участок ригеля 4-6 действует положительная поперечная сила, равная  $3,5 \text{ кН}$ . Поэтому направление силы  $Q_{4-6}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы она вращала вырезанный узел по ходу часовой стрелки. Неизвестные продольные силы, действующие в отсеченных участках ригеля и стойки рамы, направляем так, чтобы они вызвали растяжение соответствующих элементов. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{4-6} = 0; \\ N_{4-3} + R_B - Q_{4-5} = 0; \Rightarrow N_{4-3} = -R_B + Q_{4-5} = -22,5 + 3,5 = 19 \text{ кН}. \end{cases}$$

Узел 6 (рисунок 3.5а). По эпюре  $M$  определяем величину и направление действующих в узле изгибающих моментов. На схеме узла растянутые волокна показаны пунктиром. Очевидно, что изгибающие моменты уравновешивают друг друга. По эпюре  $Q$  определяем, что в узле слева действует положительная поперечная сила, равная  $3,5 \text{ кН}$ , а справа – отрицательная поперечная сила, равная

7,5 кН. Показываем направление поперечных сил с учетом их знаков: положительная поперечная сила  $Q_{4-6}$  вращает узел по ходу часовой стрелки, отрицательная сила  $Q_{6-7}$  – против хода часовой стрелки. Из равновесия узла 1 известно, что в стойке 1-6 действует отрицательная продольная сила, равная 11 кН. На схеме узла показываем продольную силу так, чтобы она вызывала сжатие отсеченного участка стойки 1-6. Неизвестную продольную силу, действующую в отсеченном участке ригеля 6-7, направляем так, чтобы она вызывала его растяжение.

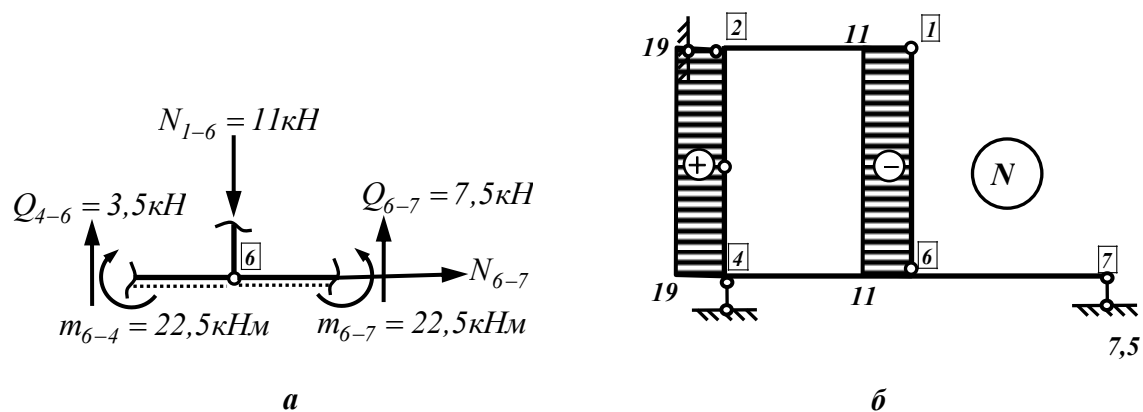


Рисунок 3.5

Очевидно, что продольная сила  $N_{6-7} = 0$ .

Составим для проверки равновесия узла уравнение проекций действующих сил на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum Y = 0; Q_{4-6} + Q_{6-7} - N_{1-6} = 3,5 + 7,5 - 11 = 0.$$

Окончательный вид эпюры продольных сил  $N$  для всей рамы показан на рисунке 3.5б.

### Пример 3.2

Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для рамы, изображенной на рисунке 3.6.

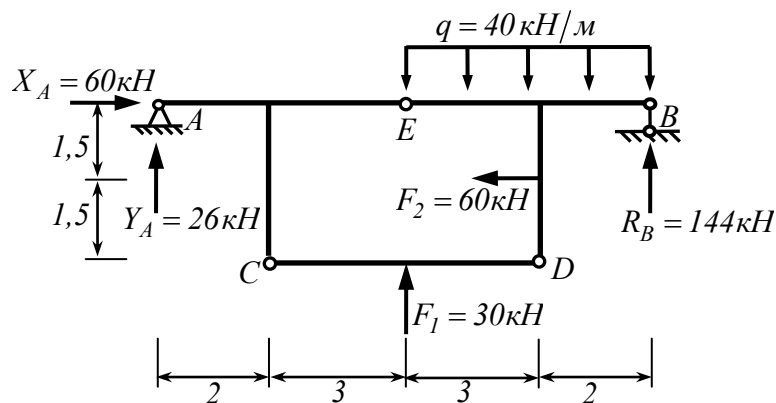


Рисунок 3.6

### Решение

#### 1 Кинематический анализ

Проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости по формуле (1.1):

$$W = 3D - 2Ш_0 - C_{on} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Необходимое условие выполняется. Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости рамы проводим структурный анализ. Три диска  $AEC$ ,  $BDE$  и  $CD$  соединены тремя шарнирами  $C$ ,  $D$  и  $E$ , не лежащими на одной прямой, т.е. образуют шарнирный треугольник. Геометрически неизменяемый шарнирный треугольник присоединен к основанию неподвижным шарниром  $A$  и опорным стержнем, не проходящим через ось шарнира. Следовательно, исходная рама статически определима, геометрически неизменяема и неподвижна относительно основания.



## 2 Определение опорных реакций рамы

Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия для всей рамы в целом (рисунок 3.6):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum m_A = 0; \\ \sum m_B = 0; \end{cases} \begin{cases} X_A - F_2 = 0; \\ 10R_B + 5F_1 - q \cdot 5 \cdot 7,5 - 1,5F_2 = 0; \\ q \cdot 5 \cdot 2,5 - 5F_1 - 1,5F_2 - 10Y_A = 0; \end{cases} \begin{cases} X_A = 60 \text{ кН}; \\ R_B = 144 \text{ кН}; \\ Y_A = 26 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверим правильность нахождения реакций, составив уравнение проекций действующих сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0; \quad Y_A + R_B + F_1 - 5q = 26 + 144 + 30 - 5 \cdot 40 = 0.$$

Следовательно, реакции опорных стержней определены правильно.

## 3 Построение эпюр внутренних силовых факторов в раме

Для определения внутренних усилий, возникающих в раме, необходимо раскрыть замкнутый контур второго типа. С этой целью отбросим стержень  $CD$  и рассмотрим равновесие верхней части рамы (рисунок 3.7а). Вертикальные составляющие реакций шарниров  $C$  и  $D$  определим из уравнений моментов сил, действующих на верхнюю часть рамы с учетом уже найденных значений реакций  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $R_B$ :

$$\begin{cases} \sum m_C = 0; \\ \sum m_D = 0; \end{cases} \begin{cases} 6V_D - q \cdot 5 \cdot 5,5 + 1,5F_2 - 3X_A - 2Y_A + 8R_B = 0; \\ 2R_B - 6V_C + q \cdot 5 \cdot 0,5 + 1,5F_2 - 3X_A - 8Y_A = 0; \end{cases} \begin{cases} V_D = 15 \text{ кН}; \\ V_C = 15 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для определения горизонтальных составляющих реакций шарниров  $C$  и  $D$  составим уравнения моментов сил, действующих на левую и правую части,

относительно шарнира  $E$ :

$$\begin{cases} \sum m_E^{лев} = 0; \\ \sum m_E^{прав} = 0; \end{cases} \begin{cases} -5Y_A - 3V_C + 3H_C = 0; \\ 5R_B + 3V_D - q \cdot 5 \cdot 2,5 - 1,5F_2 - 3H_D = 0; \end{cases} \begin{cases} H_C = 58,33 \text{ кН}; \\ H_D = 58,33 \text{ кН}. \end{cases}$$

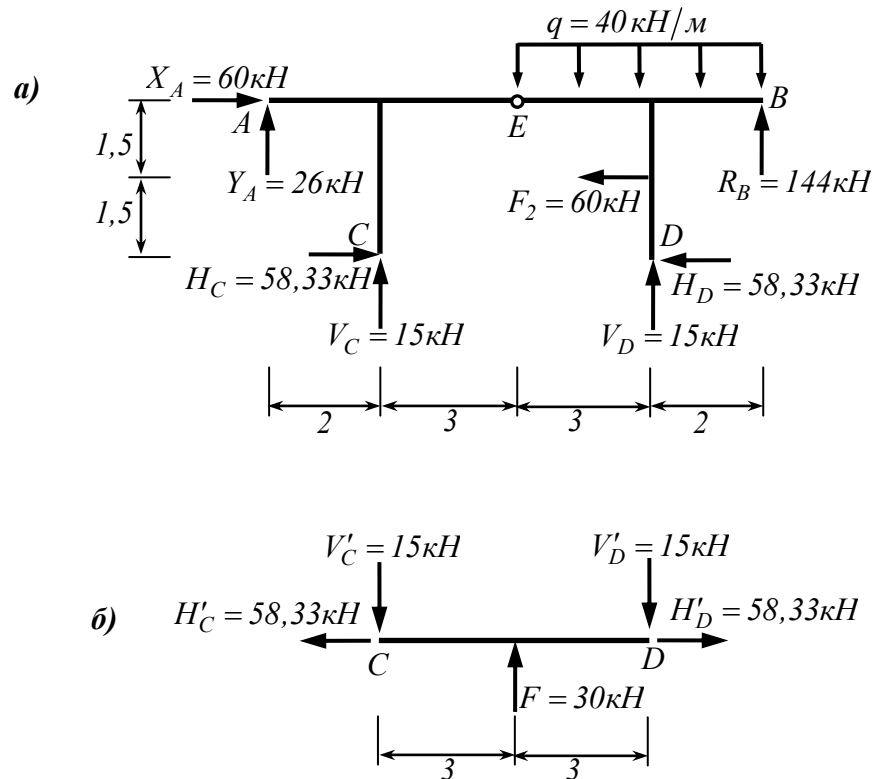


Рисунок 3.7

Для проверки правильности вычисления реакций внутренних связей (шарниров  $C$  и  $D$ ) составим уравнения проекций сил, действующих на верхнюю часть рамы (рисунок 3.7а):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} X_A + H_C - F_2 - H_D = 60 + 58,33 - 60 - 58,33 = 0; \\ V_C + V_D + Y_A + R_B - 5q = 15 + 15 + 26 + 144 - 5 \cdot 40 = 0. \end{cases}$$

После раскрытия замкнутого контура строим эпюру изгибающих моментов  $M$

так же, как и в обычной статически определимой раме, вычисляя значения моментов в характерных точках и откладывая найденные значения на *растянутых* волокнах. При построении эпюры  $M$  на участке  $CD$ , учитываем, что на стержень  $CD$  в точках  $C$  и  $D$  действуют силы, равные по величине, но *противоположные* по направлению найденным реакциям шарниров  $H_C, V_C, H_D$  и  $V_D$  (рисунок 3.7б).

Эпюра изгибающих моментов, построенная для всей рамы, показана на рисунке 3.8а.

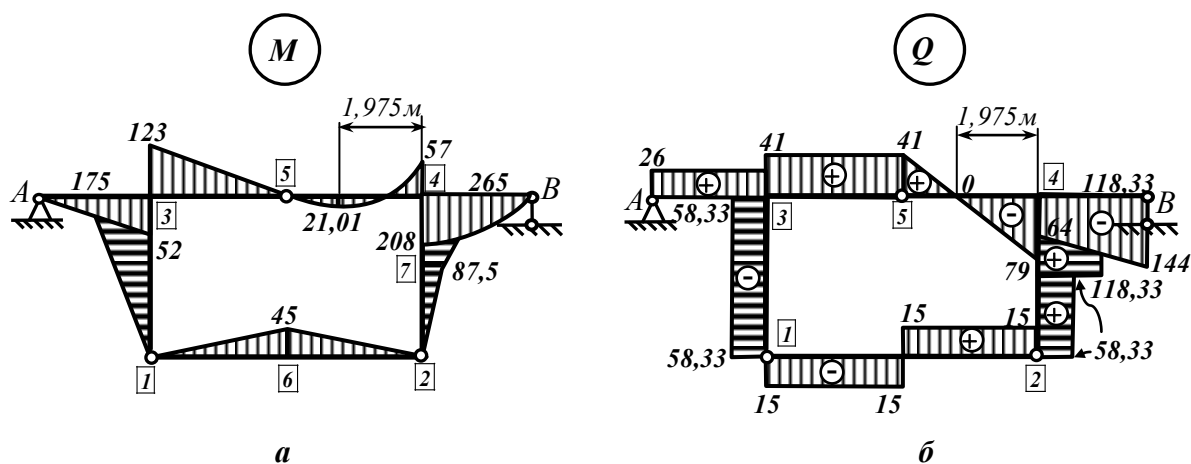


Рисунок 3.8

Эпюру поперечных сил  $Q$  строим по построенной эпюре изгибающих моментов  $M$ , используя дифференциальную зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой. На участках с прямолинейным очертанием эпюры  $M$  поперечная сила имеет постоянное значение и находится как тангенс угла наклона эпюры  $M$  к оси стержня.

Участок  $A-3$ . Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть по ходу часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке положительна.

$$Q_{A-3} = \frac{52}{2} = 26 \text{ кН}.$$

Участок 1-3. Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть против хода часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке отрицательна.

$$Q_{1-3} = -\frac{175}{3} = -58,33 \text{ кН}.$$

Аналогично определяем величину и знак поперечной силы на остальных участках:

$$Q_{3-5} = \frac{123}{3} = 41 \text{ кН};$$

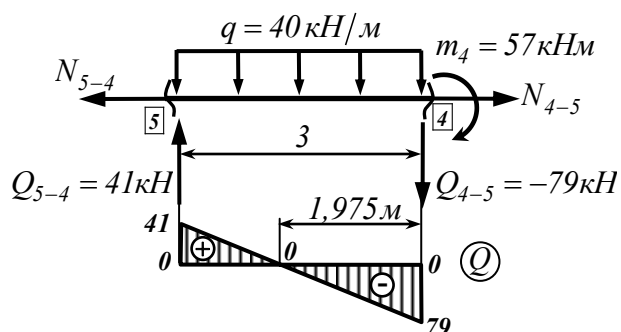
$$Q_{2-7} = \frac{87,5}{1,5} = 58,33 \text{ кН};$$

$$Q_{1-6} = -\frac{45}{3} = -15 \text{ кН};$$

$$Q_{4-7} = \frac{265 - 87,5}{1,5} = 118,33 \text{ кН}.$$

$$Q_{2-6} = \frac{45}{3} = 15 \text{ кН};$$

Для определения поперечной силы на участке 4-5 с криволинейным очертанием эпюры моментов, вырезаем соответствующий участок из рамы и рассматриваем его равновесие под действием внешней нагрузки и внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях 4 и 5.



В сечении 4 действует изгибающий момент  $m_4 = 57 \text{ кНм}$ , растягивающий верхние волокна (величину и направление момента определяем по эпюре  $M$ ). Поперечные силы  $Q_{4-5}$  и  $Q_{5-4}$ , действующие в сечениях 4 и 5 изображаем на схеме так, чтобы они имели

положительное направление (вращали вырезанный участок по ходу часовой

стрелки). В этом случае получающийся знак поперечных сил автоматически переносится на эпюру  $Q$ .

Величину поперечных сил определяем, составляя уравнения моментов действующих сил относительно сечений 4 и 5:

$$\begin{cases} \sum m_4 = 0; \\ \sum m_5 = 0; \end{cases} \begin{cases} q \cdot 3 \cdot 1,5 - m_4 - 3Q_{5-4} = 0; \\ -m_4 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - 3Q_{4-5} = 0; \end{cases} \begin{cases} Q_{5-4} = 41 \text{ кН}; \\ Q_{4-5} = -79 \text{ кН}. \end{cases}$$

Так как поперечная сила на участке 4-5 меняет знак (на эпюре  $Q$  имеется нулевая точка), то в соответствующей точке эпюры  $M$  будет экстремум (минимум). Координату нулевой точки определяем из простых геометрических соображений, рассматривая подобные треугольники на эпюре поперечных сил для участка 4-5:

$$\frac{41}{79} = \frac{3-x}{x}; \Rightarrow x = 1,975 \text{ м.}$$

Экстремальное значение изгибающего момента будет равно:

$$\begin{aligned} M^{\min}(x = 1,975 \text{ м}) &= -1,975 Q_{4-5} - q \cdot \frac{(1,975)^2}{2} - m_4 = \\ &= -1,975 \cdot (-79) - 40 \cdot \frac{(1,975)^2}{2} - 57 = 21,01 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Эпюру поперечных сил на участке 4-В можно построить аналогичным способом либо по обычным правилам. Окончательный вид эпюры поперечных сил  $Q$  для всей рамы показан на рисунке 3.8б.

Эпюру продольных сил  $N$  строим по эпюре  $Q$ , последовательно вырезая узлы из рамы и рассматривая их равновесие. Рекомендуется начинать с наиболее простых узлов, в которых сходятся два стержня. Неизвестные продольные силы, возникающие в стержнях, будем показывать так, чтобы они имели положительное

направление (вызывали растяжение). В этом случае получающийся знак силы будет автоматически переноситься на эпюру  $N$ . Найденные значения продольных сил в элементах рамы будем сразу откладывать на эпюре  $N$ , тогда при рассмотрении равновесия последующих узлов рамы часть продольных сил, действующих в узле, будет уже известна.

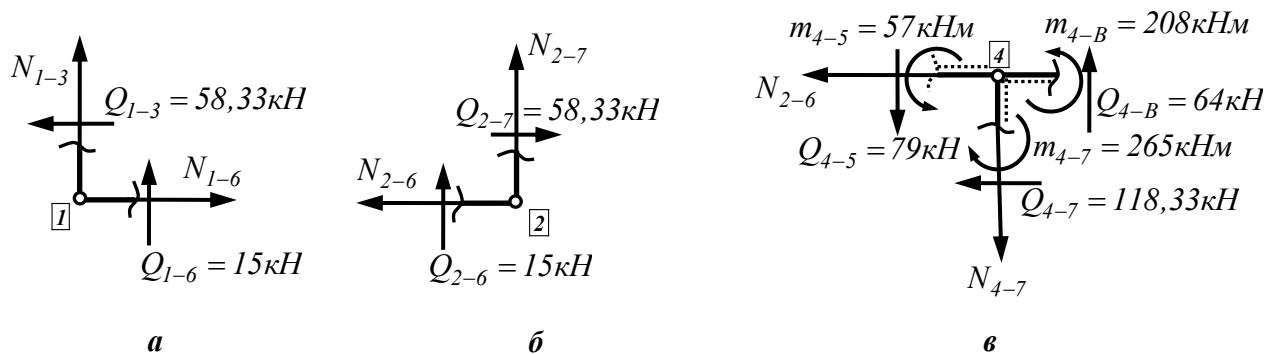


Рисунок 3.9

Узел 1 (рисунок 3.9а). По эпюре  $Q$  определяем, что в узле на отсеченный участок ригеля 1-6 действует отрицательная поперечная сила, равная  $15 \text{ кН}$ . На отсеченный участок стойки 1-3 действует отрицательная поперечная сила, равная  $58,33 \text{ кН}$ . Поэтому направление сил  $Q_{1-6}$  и  $Q_{1-3}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы они вращали вырезанный узел против хода часовой стрелки. Неизвестные продольные силы, действующие в отсеченных участках ригеля и стойки рамы, направляем так, чтобы они вызывали растяжение соответствующих элементов. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{1-6} = 58,33 \text{ кН}; \\ N_{1-3} = -15 \text{ кН}. \end{cases}$$

Узел 2 (рисунок 3.9б). По эпюре  $Q$  определяем, что в узле на отсеченный

участок ригеля 2-6 действует положительная поперечная сила, равная 15 кН. На отсеченный участок стойки 1-7 действует положительная поперечная сила, равная 58,33 кН. Поэтому направление сил  $Q_{2-6}$  и  $Q_{2-7}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы они вращали вырезанный узел по ходу часовой стрелки. Неизвестные продольные силы, действующие в отсеченных участках ригеля и стойки рамы, направляем так, чтобы они вызывали растяжение соответствующих элементов. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{2-6} = 58,33 \text{ кН}; \\ N_{2-7} = -15 \text{ кН}. \end{cases}$$

Узел 4 (рисунок 3.8в). По эпюре  $M$  определяем величину и направление действующих в узле на отсеченные участки ригелей и стойки изгибающие моменты. На схеме узла растянутые волокна показаны пунктиром. Составим уравнение моментов для узла 4:

$$\sum m_4 = m_{4-5} + m_{4-B} - m_{4-7} = 57 + 208 - 265 = 0.$$

Следовательно, приложенные в узле моменты уравновешивают друг друга.

По эпюре  $Q$  определяем действующие в узле поперечные силы. Неизвестные продольные силы, действующие на отсеченные участки ригеля 4-5 и стойки 4-7, направляем так, чтобы они вызывали растяжение соответствующих элементов. Очевидно, что в ригеле 4-В продольная сила не возникает. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} -N_{2-6} - Q_{4-7} = 0; \\ -N_{4-7} + Q_{4-B} - Q_{4-5} = 0; \end{cases} = 19 \text{ кН}. \begin{cases} N_{2-6} = -118,33 \text{ кН}; \\ N_{4-7} = -15 \text{ кН}. \end{cases}$$

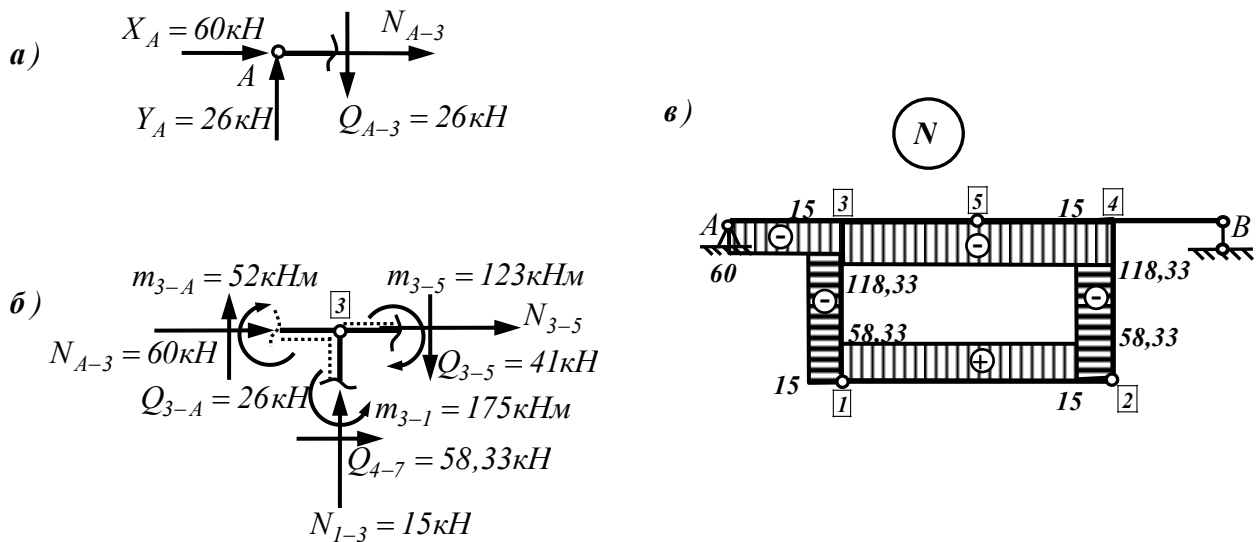


Рисунок 3.10

Узел  $A$  (рисунок 3.10а). На узел  $A$  действуют внешние силы  $X_A = 60\text{кН}$  и  $Y_A = 26\text{кН}$ . По эпюре  $Q$  определяем, что на отсеченный участок ригеля  $A-3$  действует положительная поперечная сила, равная  $26\text{кН}$ . Направление силы  $Q_{A-3}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы она вращала вырезанный узел по ходу часовой стрелки. Незвестную продольную силу  $N_{A-3}$  направляем так, чтобы она вызывала растяжение соответствующего элемента. Очевидно, что по оси  $y$  узел уже уравновешен. Из уравнений проекций сил на горизонтальную ось  $x$  имеем:

$$\sum X = 0; \quad N_{A-3} + X_A = 0; \quad N_{A-3} = -60\text{кН}.$$

Узел  $6$  (рисунок 3.5б). По эпюрам  $M$  и  $Q$  определяем величину и направление действующих в узле изгибающих моментов и поперечных сил. Из рассмотрения равновесия узла  $A$  известно, что в ригеле  $A-3$  действует отрицательная продольная сила, равная  $60\text{кН}$ . На схеме узла показываем продольную силу  $N_{A-3}$  так, чтобы она вызывала сжатие отсеченного участка ригеля. Незвестную продольную силу, действующую в отсеченном участке ригеля  $3-5$ , направляем так, чтобы она имела положительное направление (вызывала растяжение).



Составляем уравнения равновесия узла 3:

$$\begin{cases} \sum X = N_{A-3} + N_{3-5} + Q_{4-7} = 0; \Rightarrow N_{3-5} = -118,33 \text{ кН}; \\ \sum Y = Q_{3-A} + N_{1-3} - Q_{3-5} = 26 + 15 - 41 = 0; \\ \sum m_3 = m_{3-1} - m_{3-5} - m_{3-A} = 175 - 123 - 52 = 0. \end{cases}$$

Окончательный вид эпюры продольных сил  $N$  для всей рамы показан на рисунке 3.10в.

### Пример 3.3

Построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для рамы, изображенной на рисунке 3.11.

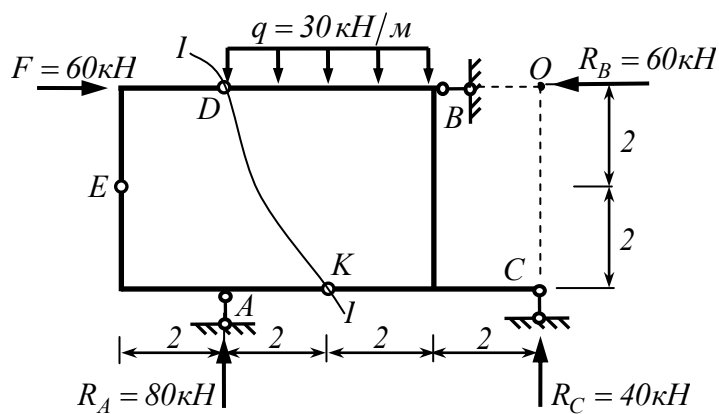


Рисунок 3.11

### Решение

#### 1 Кинематический анализ

Проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости по формуле (1.1):

$$W = 3D - 2Ш_0 - C_{on} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Необходимое условие выполняется. Проводим структурный анализ. Три диска  $EK$ ,  $DE$  и  $DBCK$  соединены тремя шарнирами  $D$ ,  $E$  и  $K$ , не лежащими на одной прямой, т.е. образуют шарнирный треугольник. Геометрически неизменяемый шарнирный треугольник присоединен к основанию тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке опорными стержнями. Следовательно, исходная рама статически определима, геометрически неизменяема и неподвижна относительно основания.

### 2 Определение опорных реакций рамы

Составим уравнения равновесия для всей рамы в целом (рисунок 3.11):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum m_D = 0; \\ \sum m_O = 0; \end{cases} \begin{cases} F - R_B = 0; \\ 6R_C - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ q \cdot 4 \cdot 4 - 6R_A = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B = 60 \text{ кН}; \\ R_C = 40 \text{ кН}; \\ R_A = 80 \text{ кН}. \end{cases}$$

Проверим правильность нахождения реакций, составив уравнение проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_C - 4q = 80 + 40 - 4 \cdot 30 = 0.$$

Следовательно, реакции опорных стержней определены правильно.

### 3 Построение эпюр внутренних силовых факторов в раме

Для определения внутренних усилий, возникающих в раме, необходимо раскрыть замкнутый контур второго типа. Для этого проведем сечение  $I-I$  и рассмотрим равновесие левой отсеченной части рамы (рисунок 3.12а). Определим составляющие реакций шарниров  $D$  и  $K$  из уравнений моментов сил, действующих

на левую отсеченную часть рамы, с учетом уже найденных значений реакций  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$ :

$$\begin{cases} \sum m_K = 0; \\ \sum m_E^{вверх} = 0; \\ \sum m_D = 0; \\ \sum m_E^{нижн.} = 0; \end{cases} \begin{cases} 4H_D - 4F + 2V_D - 2R_A = 0; \\ 2H_D - 2F - 2V_D = 0; \\ 4H_K - 2V_K = 0; \\ 2H_K - 4V_K + 2R_A = 0; \end{cases} \begin{cases} H_D = 86,67 \text{ кН}; \\ V_D = 26,67 \text{ кН}; \\ H_K = 26,67 \text{ кН}; \\ V_K = 53,33 \text{ кН}. \end{cases}$$

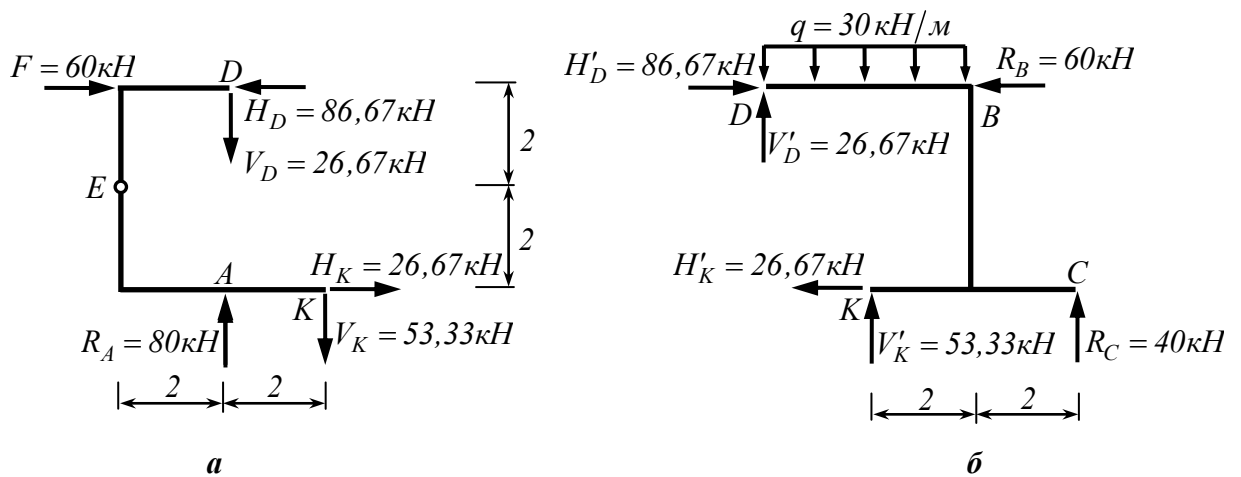


Рисунок 3.12

Для проверки правильности вычисления реакций внутренних связей (шарниров  $D$  и  $K$ ) составим уравнения проекций сил для левой отсеченной части рамы (рисунок 3.12а):

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} F - H_D - H_K = 60 - 86,67 + 26,67 = 0; \\ R_A - V_D - V_K = 80 - 26,67 - 53,33 = 0. \end{cases}$$

После раскрытия замкнутого контура строим эпюру изгибающих моментов  $M$  так же, как и в обычной статически определимой раме, вычисляя значения моментов

в характерных точках и откладывая найденные значения на *растянутых* волокнах. При построении эпюры  $M$  на части рамы  $DBCK$ , расположенной правее проведенного сечения  $I-I$ , учитываем, что в точках  $D$  и  $K$  действуют силы, равные по величине, но *противоположные* по направлению найденным реакциям  $H_D$ ,  $V_D$ ,  $H_K$  и  $V_K$  (рисунок 3.12б).

Эпюра изгибающих моментов  $M$ , построенная для всей рамы, показана на рисунке 3.13а.

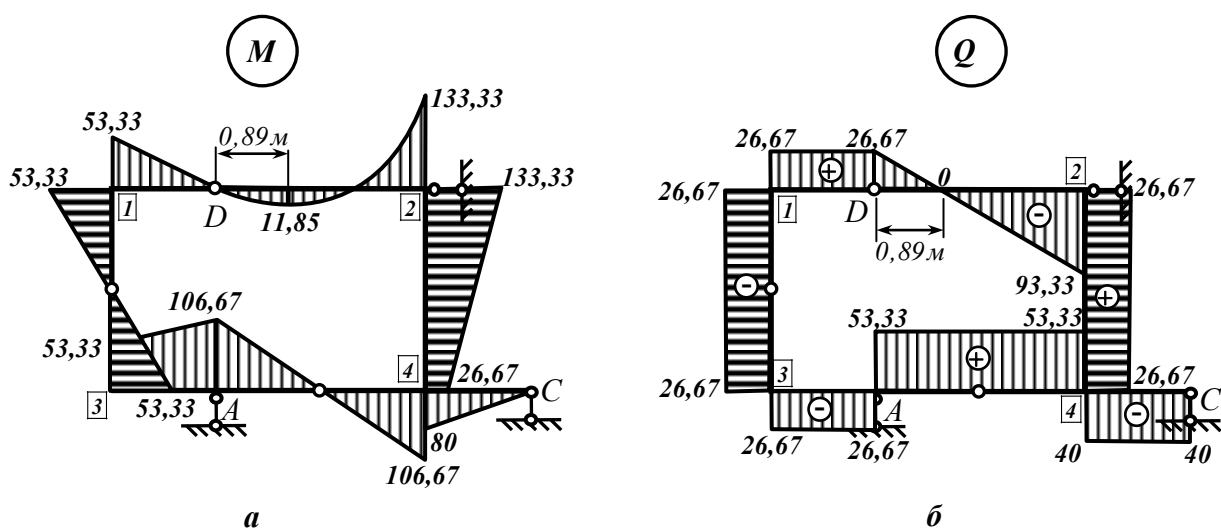


Рисунок 3.13

Эпюру поперечных сил  $Q$  строим по эпюре изгибающих моментов  $M$ , используя дифференциальную зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой. На участках с прямолинейным очертанием эпюры  $M$  поперечная сила имеет постоянное значение и находится как тангенс угла наклона эпюры  $M$  к оси стержня.

*Участок C-4.* Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть против хода часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке отрицательна.

$$Q_{C-4} = -\frac{80}{2} = -40 \text{ кН}.$$

Участок 1-D. Для совмещения с эпюрой моментов  $M$  ось стержня требуется повернуть по ходу часовой стрелки, следовательно, поперечная сила на этом участке положительна.

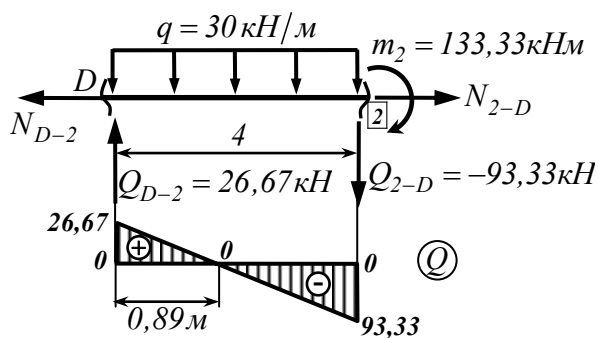
$$Q_{1-D} = \frac{53,33}{2} = 26,67 \text{ кН}.$$

Аналогично определяем величину и знак поперечной силы на остальных участках:

$$Q_{1-3} = -\frac{53,33 + 53,33}{4} = -26,67 \text{ кН}; \quad Q_{A-4} = \frac{106,67 + 106,67}{6} = 35,56 \text{ кН};$$

$$Q_{3-A} = -\frac{106,67 - 53,33}{2} = -26,67 \text{ кН}; \quad Q_{2-4} = \frac{133,33 - 26,67}{4} = 26,67 \text{ кН}.$$

Для определения поперечной силы на участке D-2 с криволинейным очертанием эпюры моментов, вырезаем соответствующий участок из рамы и рассматриваем его равновесие под действием внешней нагрузки и внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях D и 2.



В сечении 2 действует изгибающий момент  $m_2 = 133,33 \text{ кНм}$ , растягивающий верхние волокна (величину и направление момента определяем по эпюре  $M$ ). Поперечные силы  $Q_{D-2}$  и  $Q_{2-D}$ , действующие в сечениях D и 2, изображаем

на схеме так, чтобы они имели положительное направление (вращали вырезанный участок по ходу часовой стрелки). В этом случае получающийся знак поперечных сил автоматически переносится на эпюру  $Q$ .

Величину поперечных сил определяем, составляя уравнения моментов действующих сил относительно сечений  $D$  и  $2$ :

$$\begin{cases} \sum m_2 = 0; & \begin{cases} -m_2 + q \cdot 4 \cdot 2 - 4Q_{D-2} = 0; \\ \sum m_D = 0; & \begin{cases} -q \cdot 4 \cdot 2 - m_2 - 4Q_{2-D} = 0; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \begin{cases} Q_{2-D} = 26,67 \text{ кН}; \\ Q_{D-2} = -93,33 \text{ кН}. \end{cases}$$

Так как поперечная сила на участке  $D-2$  меняет знак (на эпюре  $Q$  имеется нулевая точка), то в соответствующей точке эпюры  $M$  будет экстремум (минимум). Координату нулевой точки определяем из простых геометрических соображений, рассматривая подобные треугольники на эпюре поперечных сил для участка  $D-2$ :

$$\frac{26,67}{93,33} = \frac{x}{4-x}; \Rightarrow x = 0,89 \text{ м.}$$

Экстремальное значение изгибающего момента будет равно:

$$\begin{aligned} M^{\min}(x = 0,89 \text{ м}) &= 0,89Q_{D-2} - q \cdot \frac{(0,89)^2}{2} = \\ &= 0,89 \cdot 26,67 - 30 \cdot \frac{(0,89)^2}{2} = 11,85 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Окончательный вид эпюры поперечных сил  $Q$  для всей рамы показан на рисунке 3.13б.

Эпюру продольных сил  $N$  строим по эпюре  $Q$ , последовательно вырезая узлы из рамы и рассматривая их равновесие. Рекомендуется начинать с наиболее простых узлов, в которых сходятся два стержня. Неизвестные продольные силы, возникающие в стержнях, будем показывать так, чтобы они имели положительное

направление (вызывали растяжение). В этом случае получающийся знак продольной силы будет автоматически переноситься на эпюру  $N$ . Найденные значения продольных сил в элементах рамы будем сразу откладывать на эпюре  $N$ , тогда при рассмотрении равновесия последующих узлов рамы часть продольных сил, действующих в узле, будет уже известна.

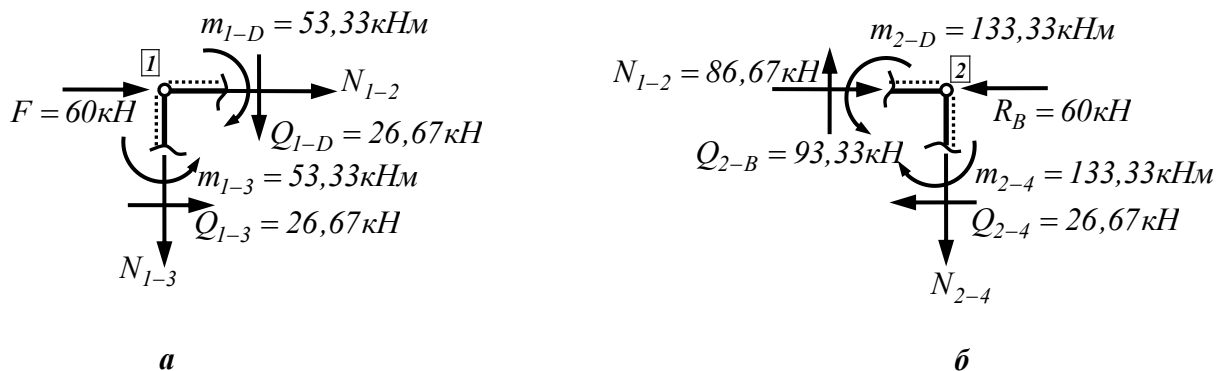


Рисунок 3.14

Узел 1 (рисунок 3.14а). На узел 1 действует внешняя сила  $F = 60 \text{ кН}$ . По эпюре  $M$  определяем величину и направление действующих на отсеченные участки ригеля и стойки изгибающие моменты. На схеме узла растянутые волокна показаны пунктиром. Очевидно, что изгибающие моменты  $m_{1-D}$  и  $m_{1-3}$  уравнивают друг друга.

По эпюре  $Q$  определяем, что на отсеченный участок ригеля 1-Д действует положительная поперечная сила, равная  $26,67 \text{ кН}$ . Поэтому направление силы  $Q_{1-D}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы она вращала вырезанный узел по ходу часовой стрелки. На отсеченный участок стойки 1-3 действует отрицательная поперечная сила, равная  $26,67 \text{ кН}$ . Поэтому направление силы  $Q_{1-3}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы она вращала вырезанный узел против хода часовой стрелки.

Неизвестные продольные силы, действующие в отсеченных участках ригеля и стойки рамы, направляем так, чтобы они вызывали растяжение соответствующих

элементов. Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} F + N_{1-2} + Q_{1-3} = 0; \\ -N_{1-3} - Q_{2-D} = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{1-2} = -86,67 \text{ кН}; \\ N_{1-3} = -26,67 \text{ кН}. \end{cases}$$

Аналогичным образом проверяем равновесие других узлов рамы.

*Узел 2* (рисунок 3.14б). На узел 2 действует внешняя сила  $R_B = 60 \text{ кН}$ . По эпюре  $M$  определяем величину и направление действующих на отсеченные участки ригеля и стойки рамы изгибающих моментов. Растянутые волокна на схеме узла показаны пунктиром. Очевидно, что изгибающие моменты уравнивают друг друга.

По эпюре  $Q$  определяем величину и направление действующих в узле поперечных сил. Из рассмотрения равновесия узла 1 уже известно, что в ригеле 1-2 действует отрицательная продольная сила, равная  $86,67 \text{ кН}$ . Поэтому направление силы  $N_{1-2}$  на схеме узла показываем таким образом, чтобы она вызывала сжатие соответствующего элемента. Неизвестную продольную силу, действующую на отсеченный участок стойки 2-4, направляем так, чтобы она имела положительное направление (вызывала растяжение стойки). Из уравнений проекций сил, действующих в узле, имеем:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \end{cases} \begin{cases} N_{1-2} - Q_{2-4} - R_B = 86,67 - 60 - 26,67 = 0; \\ -N_{2-4} - Q_{2-B} = 0; \end{cases} \Rightarrow N_{2-4} = -93,33 \text{ кН}.$$

*Узел 3* (рисунок 3.15а).

$$\begin{cases} \sum X = N_{3-4} - Q_{1-3} = 0; \Rightarrow N_{3-4} = 26,67 \text{ кН}; \\ \sum Y = Q_{3-A} - N_{1-3} = 26,67 - 26,67 = 0; \\ \sum m_3 = m_{3-1} - m_{3-A} = 53,33 - 53,33 = 0. \end{cases}$$



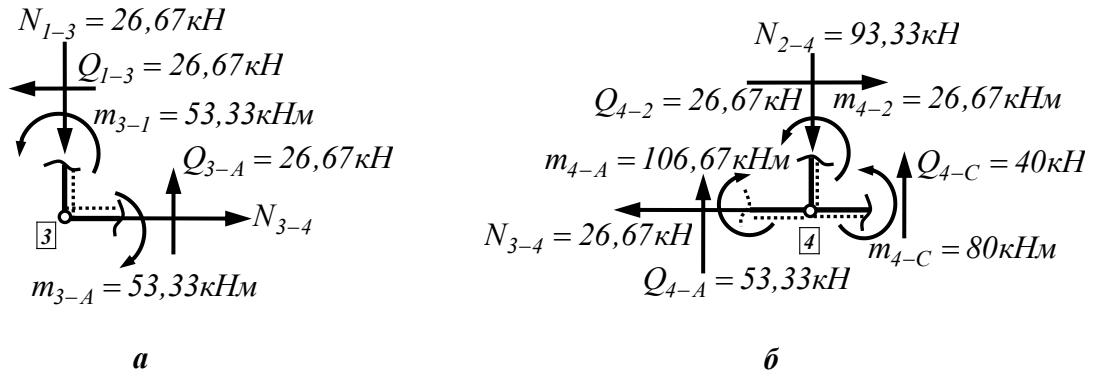


Рисунок 3.15

Узел 4 (рисунок 3.15б).

$$\begin{cases} \sum X = Q_{4-2} - N_{3-4} = 26,67 - 26,67 = 0; \\ \sum Y = Q_{4-A} - N_{2-4} + Q_{4-C} = 53,33 - 93,33 + 40 = 0; \\ \sum m_4 = m_{4-C} + m_{4-2} - m_{4-A} = 80 + 26,67 - 106,67 = 0. \end{cases}$$

Все уравнения выполняются, следовательно, узел 4 находится в равновесии.

Эпюра продольных сил  $N$  для всей рамы показана на рисунке 3.16.

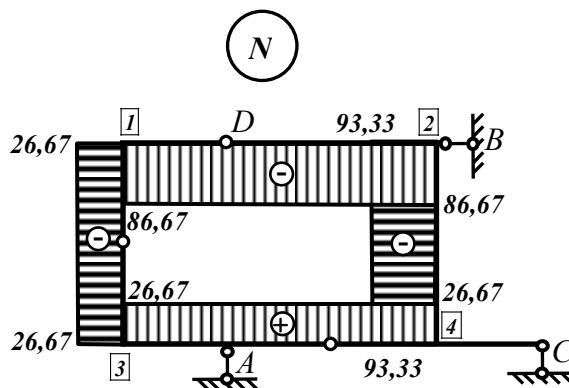
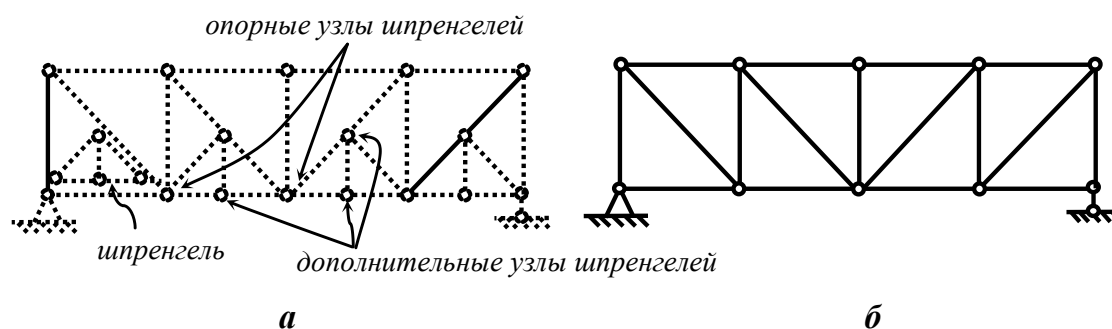


Рисунок 3.16

## 4 Расчет шпренгельных статически определимых плоских ферм

### 4.1 Краткие теоретические сведения

Для уменьшения длины панелей нагруженного пояса и, как следствие, уменьшения усилий в элементах ферм используются специальные устройства, заменяющих стержни грузового пояса – шпренгели (рисунок 4.1а). Фермы с установленными шпренгелями называются *шпренгельными*. Шпренгели опираются на узлы основной фермы и работают только на местную нагрузку, приложенную в пределах их пролета.



а – шпренгельная ферма; б – главная (основная) ферма.

Рисунок 4.1

Из-за большого количества сложных (кратных) шарниров необходимое условие геометрической неизменяемости фермы удобнее сформулировать в виде:

$$W = 2U - C - C_{on}, \quad (4.1)$$

где  $W$  – число степеней свободы фермы;

$U$  – число узлов фермы;

$C$  – число стержней фермы;

$C_{on}$  – число опорных стержней фермы.

По характеру работы различают фермы с *одноярусными* и *двухъярусными* шпренгелями.

В фермах с одноярусными шпренгелями дополнительный узел и опорные узлы шпренгеля находятся на одном поясе главной (основной) фермы (рисунок 4.2). Нагрузка, приложенная к дополнительному узлу шпренгеля, передается на основные узлы главной фермы того же пояса.

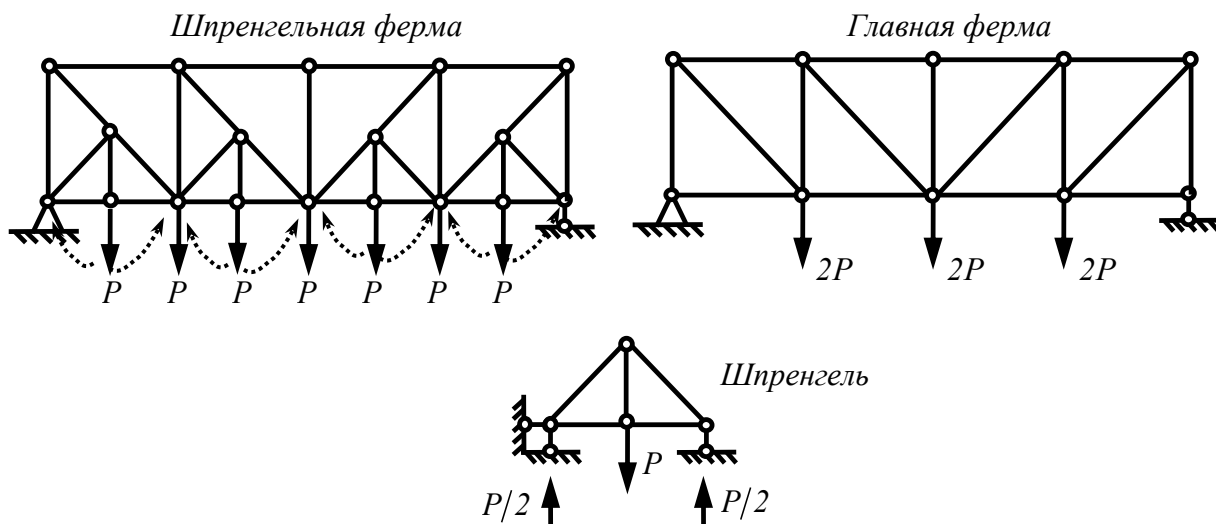


Рисунок 4.2 – Принцип работы одноярусных шпренгелей

В фермах с двухъярусными шпренгелями дополнительный узел шпренгеля и его опорные узлы расположены на разных поясах главной (основной) фермы (рисунок 4.3). Нагрузка, приложенная к дополнительному узлу шпренгеля на одном поясе, передается на основные узлы главной фермы другого пояса.

В шпренгельных фермах различают четыре типа стержней:

- 1) стержни, принадлежащие только главной ферме;
- 2) стержни, принадлежащие только шпренгелю;
- 3) стержни, принадлежащие одновременно главной ферме и шпренгелю;
- 4) стержни, для которых вид линии влияния зависит от уровня передвижения единичного груза (поверху или понизу).

Стержни четвертого типа встречаются только в фермах с двухъярусными шпренгелями.

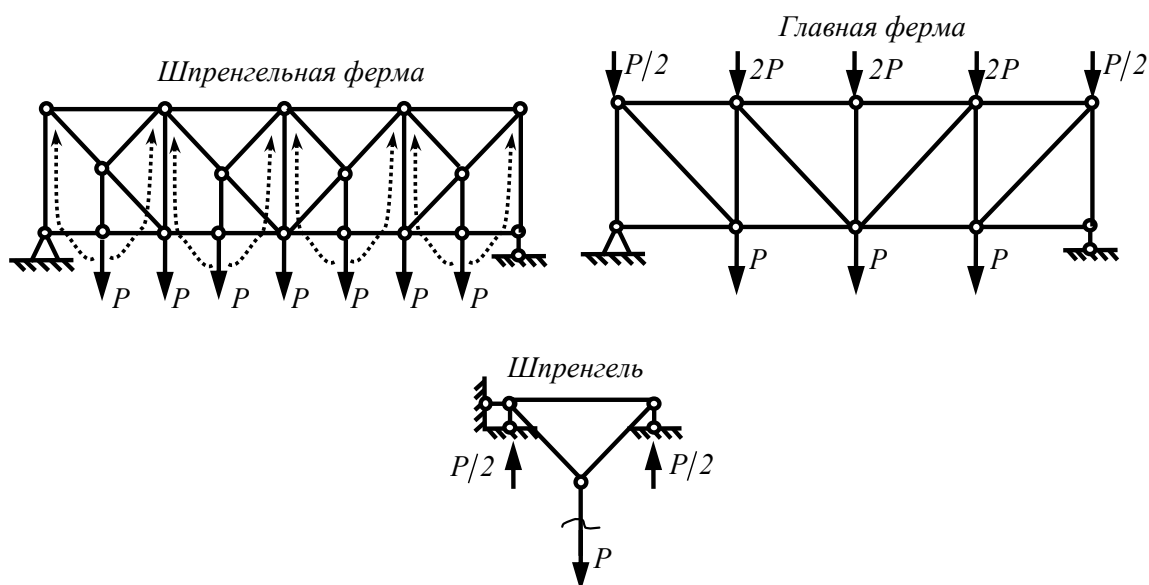


Рисунок 4.3 – Принцип работы двухъярусных шпренгелей

В зависимости от типа стержня, усилие в нем определяется соответственно либо из расчета только главной фермы, либо из расчета только шпренгеля, либо как алгебраическая сумма усилий, полученных отдельно при расчете главной фермы и шпренгеля.

В тех случаях, когда в исходной шпренгельной ферме можно провести сквозное сечение, пересекающее не более трех стержней, приведенное условное деление стержней при статическом расчете ферме можно не принимать во внимание.

Стержни четвертого типа выделяются только при расчете на подвижную нагрузку (при построении линий влияния).

При статическом расчете шпренгельных ферм используются те же способы, что и при расчете обычных ферм без шпренгелей: способ вырезания узлов, способ сечений (способ проекций и способ моментной точки), построение диаграммы Максвелла-Кремоны и т.д. Перечисленные способы подробно рассмотрены в большом количестве учебных пособий по теоретической и строительной механике, например, в [5].

Построение линий влияния в стержнях шпренгельных ферм в зависимости от типа стержня проводят по тем же правилам, что и для обычных ферм, используя аналитическое выражение для определения усилия в стержне:

– для стержней первого типа линии влияния усилий строятся из рассмотрения только главной фермы;

– для стержней второго типа линии влияния усилий строятся из рассмотрения только шпренгеля;

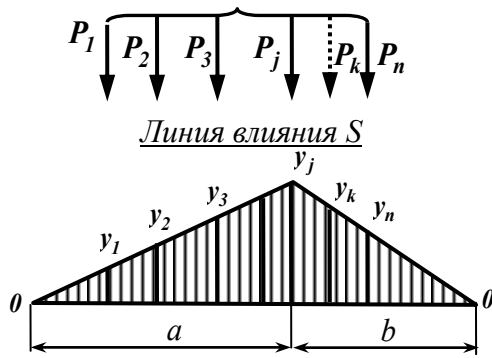
– для стержней третьего типа линии влияния усилий представляют собой алгебраическую сумму линий влияния, построенных отдельно для главной фермы и для шпренгеля;

– для построения линий влияния в стержнях четвертого типа строят совмещенную линию влияния усилия в стержне при перемещении единичного груза по верхнему и по нижнему поясу фермы, а затем устанавливают закон изменения усилия с учетом работы двухъярусных шпренгелей.

Если для определения усилия в стержне в исходной шпренгельной ферме можно провести сечение, пересекающее не более трех стержней, то построение линии влияния можно проводить без учета категории стержня и выделения главной фермы. Учет работы шпренгеля происходит в этом случае автоматически вследствие изменения границ разрезанной грузовой панели.

В некоторых случаях при расчете ферм требуется определить невыгоднейшее (опасное) положение заданной подвижной нагрузки на сооружении, при котором усилие  $S$  в некотором стержне достигает своего максимального (экстремального) значения.

Задача такого рода может быть решена с помощью загрузки линии влияния исследуемого усилия заданной подвижной нагрузкой, как правило, системой жестко связанных грузов. При этом следует учесть, что при треугольной линии влияния усилие  $S$  принимает максимальное значение, если один из грузов располагается непосредственно над ее вершиной (так называемый *критический груз*).



Для отыскания критического груза располагают грузы  $P_1, P_2, \dots, P_n$  поочередно над вершиной линии влияния и определяют значение исследуемого усилия  $S$  по формуле:

$$S = \sum P_i y_i; \quad (4.2)$$

где  $y_i$  – ордината линии влияния, расположенная непосредственно под грузом  $P_i$ .

Положение подвижной нагрузки, при котором исследуемое усилие  $S$  принимает наибольшее по абсолютной величине значение, считается опасным, а груз, расположенный над вершиной линии влияния, – критическим.

Другой путь отыскания критического груза и опасного положения подвижной нагрузки связан с решением системы неравенств вида:

$$\begin{cases} \frac{(P_{лев} + P_{кр})}{a} \geq \frac{P_{прав}}{b}; \\ \frac{P_{лев}}{a} \leq \frac{(P_{кр} + P_{прав})}{b}; \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $P_{лев}$ ,  $P_{прав}$  – суммарный вес грузов, расположенных соответственно слева и справа от критического;

$a$ ,  $b$  – расстояния от вершины треугольной линии влияния до левой и правой нулевых точек соответственно.

Система неравенств (4.3) решается способом последовательных попыток (непосредственной поочередной подстановкой сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$  в качестве  $P_{кр}$ ). Следует заметить, что условиям (4.3) может удовлетворять не один груз, а два соседних, иначе говоря, критический груз может быть не один.

## 4.2 Примеры решения задач

### *Пример 4.1*

Для шпренгельной фермы с одноярусными шпренгелями (рисунок 4.4):

1 Проверить геометрическую неизменяемость фермы.

2 Определить усилия от заданной постоянной нагрузки во всех стержнях главной фермы и шпренгелей графическим способом (с помощью диаграммы Максвелла-Кремоны).

3 Определить аналитически усилия от постоянной нагрузки в трех отмеченных на расчетной схеме стержнях. Сравнить полученные значения с графическим расчетом.

4 Определить усилия во всех стержнях главной фермы и шпренгелей от временной неподвижной нагрузки, приложенной на левой половине фермы, графическим способом (с помощью второй построенной диаграммы Максвелла-Кремоны).

5 По диаграмме, построенной в п. 4, для трех отмеченных стержней определить усилия от временной неподвижной нагрузки, приложенной к узлам правой половины фермы и на всем пролете.

6 Построить линии влияния усилий для трех отмеченных стержней и определить по этим линиям влияния наибольшие растягивающие («+») и сжимающие («-») усилия в стержнях от заданной системы подвижных грузов.

7 Значения усилий (с указанием знака), полученных в п.п. 3, 4, 5, 6 для трех отмеченных стержней, записать в таблицу расчетных усилий. Подсчитать максимальное (наибольшее растягивающее) и минимальное (наибольшее сжимающее) усилия.

8 Подобрать из условия прочности для одного из трех отмеченных стержней необходимую площадь поперечного сечения из спаренных равнополочных уголков. Принять допустимое напряжение равным  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ .

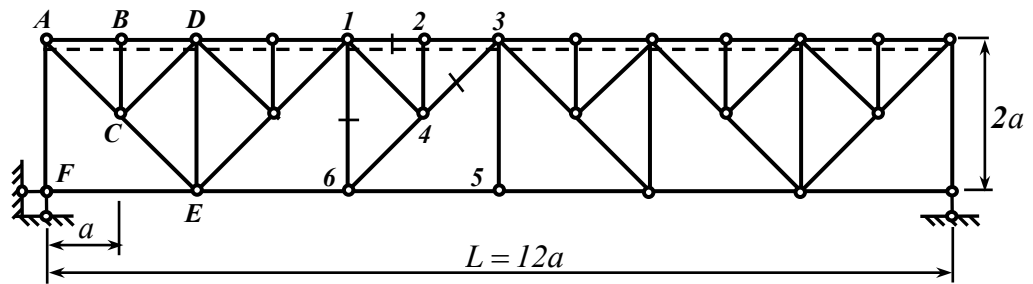


Рисунок 4.4 – Схема фермы

**Дано:**  $a = 3\text{ м}$ ;  $P_{\text{пост}} = G = 50\text{ кН}$ ;  $P_{\text{врем}} = Q = 25\text{ кН}$ . Грузовой пояс отмечен на схеме фермы (рисунок 4.4) пунктиром.

**Решение**

*1 Кинематический анализ*

Проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости фермы (3.1):

$$W = 2Y - C - C_{\text{он}} = 2 \cdot 26 - 49 - 3 = 0,$$

где  $Y = 26$  – число узлов фермы (включая опорные);

$C = 49$  – число стержней фермы;

$C_{\text{он}} = 3$  – число опорных стержней фермы.

Необходимое условие (4.1) выполняется. Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости фермы необходимо провести анализ геометрической структуры.

Выделим в структуре фермы геометрически неизменяемый шарнирный треугольник  $ABC$  (рисунок 4.4). Узел  $D$  присоединен к шарнирному треугольнику  $ABC$  двумя стержнями (способом диады), следовательно, новая полученная система также будет геометрически неизменяемой. Узел  $E$  также присоединяется к геометрически неизменяемой системе  $ABCD$  способом диады, образуя новую геометрически



неизменяемую систему  $ABCDE$  и т.д. Каждый последующий узел фермы присоединяется способом диады, образуя геометрически неизменяемую систему. Таким образом, вся ферма является геометрически неизменяемой системой.

Геометрически неизменяемая ферма присоединена к основанию («земле») тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями. Следовательно, ферма является неподвижной и геометрически неизменяемой системой

## *2 Графическое определение усилий в стержнях фермы от заданной постоянной нагрузки*

Выделим из исходной шпренгельной фермы главную ферму и шпренгели. Нагрузку, приложенную к узлам грузового пояса исходной фермы, перераспределим между узлами главной фермы с учетом работы одноярусных шпренгелей (рисунок 4.5).

В связи с симметрией фермы и нагрузки опорные реакции будут равны:

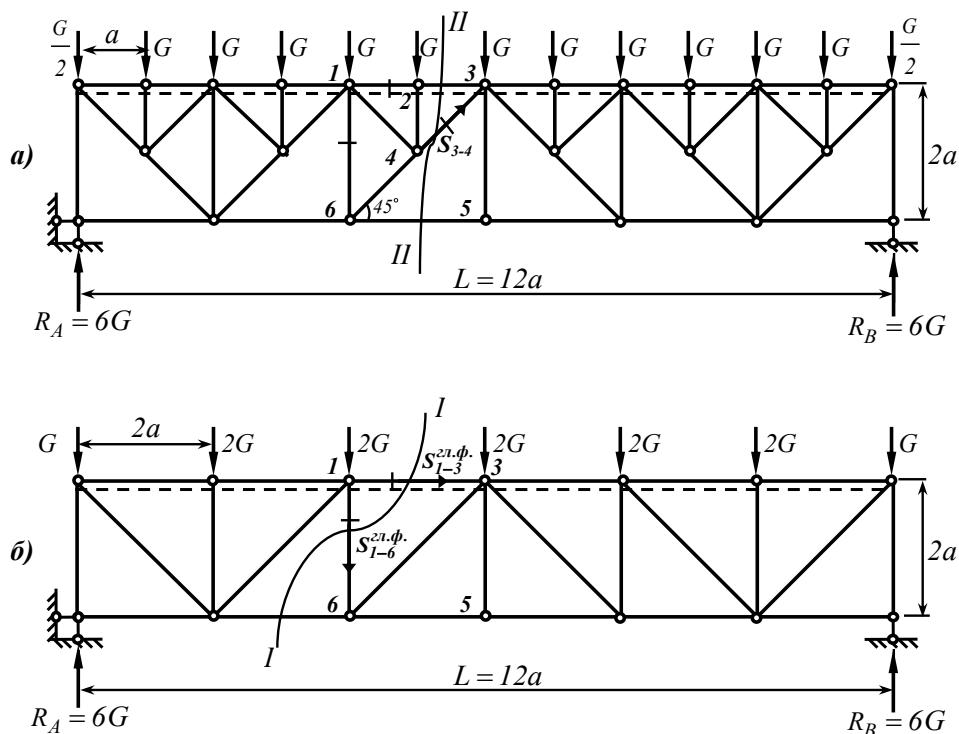
$$R_A = R_B = \frac{12G}{2} = 6G = 300\text{кН}.$$

Для определения усилий, возникающих в стержнях главной фермы и шпренгелей, строим диаграммы Максвелла-Кремоны.

Строим в произвольном масштабе схему фермы (рисунок 4.6). Обозначаем внешние зоны фермы прописными буквами латинского алфавита. Границами зон являются линии действия внешних сил и опорных реакций. Внутренние зоны фермы обозначаем римскими цифрами. Границами внутренних зон являются стержни фермы.

Обходя внешние зоны фермы по часовой стрелке (начиная с любой зоны), строим в выбранном масштабе многоугольник внешних сил. При этом каждая внешняя сила обозначается двумя индексами по названиям зон, на границе которых она находится. Первый индекс – наименование зоны, расположенной перед силой, второй индекс – наименование зоны, расположенной после силы. Например, реак-

ция левого опорного узла фермы получает на диаграмме название  $M-A$ . Если опорные реакции фермы определены правильно, то многоугольник внешних сил должен быть замкнут: конец последней силы должен совпадать на диаграмме с началом первой.



*a* – шпренгельная ферма с постоянной нагрузкой на всем пролете;  
*б* – главная (основная) ферма с нагрузкой, перераспределенной с учетом работы одноярусных шпренгелей.

Рисунок 4.5

Построение диаграммы начинаем с узла, в котором сходятся только два стержня, например, с левого опорного узла фермы. Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами по тому же правилу, что и внешние силы. Так, стержни, сходящиеся в левом опорном узле, получают обозначение  $A-I$  и  $I-M$ . Из точек  $A$  и  $M$ , которые уже присутствуют на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням: из точки  $A$  – параллельную стержню  $A-I$ , из

точки  $M$  – параллельную стержню  $I-M$ . Точку пересечения этих прямых обозначаем  $I$  (общий индекс, входящий в обозначения стержней). Положение точки  $I$  на диаграмме совпадает с точкой  $M$ . Это означает, что стержень  $I-M$  – нулевой.

Следующим рассматриваем узел, в котором может сходиться произвольное число стержней, но только в двух из них усилия неизвестны (усилия в стержнях  $A-I$  и  $I-M$  считаются известными после построения точки  $I$ ). Обходя крайний левый узел верхнего пояса фермы по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями:  $B-II$  и  $II-I$ . Из точки  $B$  проводим прямую, параллельную стержню  $B-II$ , из точки  $I$  – прямую, параллельную стержню  $II-I$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $II$ .

Затем переходим к следующему узлу, в котором сходятся только два стержня с неизвестными усилиями, и повторяем всю последовательность действий для предыдущего узла. Построение диаграммы считается законченным, когда на ней появляется точка с обозначением последней внутренней зоны фермы.

Построенные для главной фермы и шпренгеля диаграммы Максвелла-Кремоны показаны на рисунке 4.6. Заметим, что диаграмма построена только для одного шпренгеля, т.к. очевидно, что усилия в стержнях других шпренгелей будут равны усилиям в соответствующих стержнях рассмотренного шпренгеля.

Определяем в отмеченных на схеме фермы стержнях (рисунок 4.4) усилия по построенным диаграммам.

Стержень  $I-6$  принадлежит только главной ферме (стержень первого типа), поэтому усилие в нем определяем только из рассмотрения соответствующего стержня главной фермы.

При обходе по часовой стрелке узла  $6$  на схеме главной фермы (рисунок 4.6) стержень  $I-6$  получает обозначение  $IV-V$ . Величина усилия в стержне равна длине соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе. Мысленно переносим вектор  $\overrightarrow{IV;V}$  на схему фермы и накладываем на стержень  $I-6$ . Усилие имеет положительный знак, т.к. вектор  $\overrightarrow{V;VI}$  направлен от узла  $6$ .

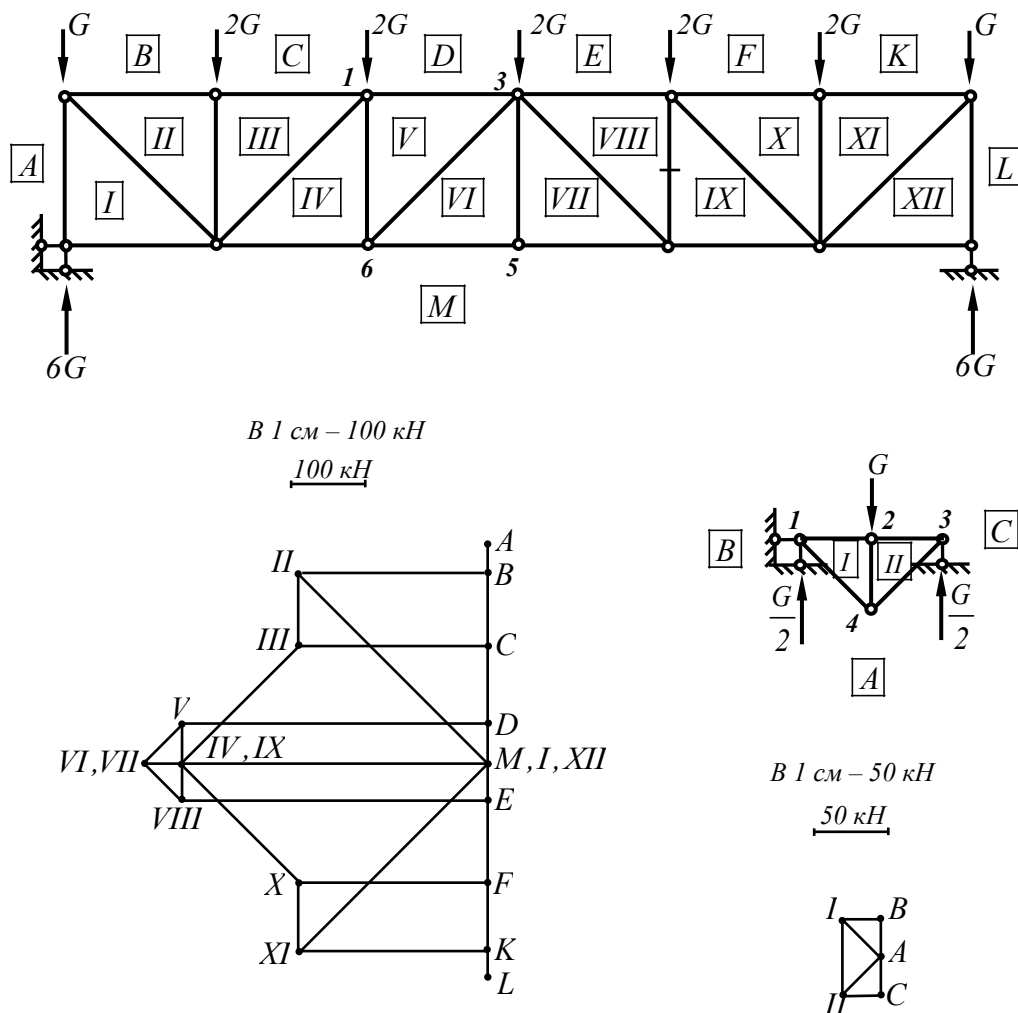


Рисунок 4.6 – Диаграммы Максвелла-Кремоны при действии постоянной нагрузки

$$S_{1-6} = S_{1-6}^{зл.ф.} = |IV; V| = 0,5 \text{ см} \cdot 100 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 50 \text{ кН}.$$

Стержни 1-2 и 3-4 относятся к третьему типу, так как принадлежат одновременно главной ферме и шпренгелю. Усилия в них определяются как алгебраическая сумма усилий в соответствующих стержнях главной фермы и шпренгеля.

Стержню 3-4 исходной фермы соответствует стержень 3-6 главной фермы. При обходе по часовой стрелке узла 6 на схеме главной фермы (рисунок 4.6) стер-

жень 3-6 получает обозначение  $V - VI$ . Величина усилия в стержне равна длине соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе. Усилие имеет отрицательный знак (стержень сжат), т.к. вектор  $\overline{V;VI}$  при наложении на стержень 3-6 на схеме фермы направлен к узлу 6.

$$S_{3-6}^{зл.ф.} = -|V;VI| = -0,7\text{см} \cdot 100 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -70\text{кН}(\text{сжат}).$$

По диаграмме, построенной для шпренгеля, определяем усилие в стержне 3-4 шпренгеля. При обходе по часовой стрелке узла 3 на схеме шпренгеля (рисунок 4.6) стержень 3-4 получает обозначение  $II - C$ . Величина усилия в стержне равна длине соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе. Усилие имеет отрицательный знак (стержень сжат), т.к. вектор  $\overline{II;C}$  при наложении на стержень 3-4 на схеме фермы направлен к узлу 3.

$$S_{3-4}^{шпр.} = -|A;II| = 0,7\text{см} \cdot 50 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 35\text{кН}.$$

Результирующее усилие в стержне 3-4 находим как алгебраическую сумму найденных усилий:

$$S_{3-4} = S_{3-6}^{зл.ф.} + S_{3-4}^{шпр.} = -70 + 35 = -35\text{кН}(\text{сжат}).$$

Аналогично определяем усилие в стержне третьего типа 1-2:

$$S_{1-3}^{зл.ф.} = -|D;V| = -4\text{см} \cdot 100 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -400\text{кН}(\text{сжат});$$

$$S_{1-2}^{шпр.} = -|B;I| = -0,5\text{см} \cdot 50 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -25\text{кН}(\text{сжат});$$

$$S_{1-2} = S_{1-3}^{зл.ф.} + S_{1-2}^{шпр.} = -400 - 25 = -425 \text{ кН (сжат)}.$$

Найденные значения усилий заносим в таблицу 7.

### 3 Аналитическое определение усилий в стержнях фермы от заданной постоянной нагрузки

Стержень 1-6 принадлежит только главной ферме, поэтому усилие в нем можно определить из расчета только главной фермы.

Для определения усилия в стержне 1-6 проведем сечение I-I главной фермы (рисунок 4.5б) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы. Усилие в стержне определим из уравнения проекций действующих сил на вертикальную ось (способ проекций):

$$\sum Y = -S_{1-6}^{зл.ф.} - 5G + 6G = 0; \quad S_{1-6} = S_{1-6}^{зл.ф.} = G = 50 \text{ кН}.$$

Найденное значение усилия в стержне совпадает со значением, полученным ранее по диаграмме Максвелла-Кремоны.

Стержень 3-4 относится к третьему типу, т.к. принадлежит одновременно главной ферме и шпренгелю. Однако в исходной шпренгельной ферме можно провести через этот стержень сечение II-II, пересекающее только три стержня фермы (рисунок 4.5а). Поэтому усилие в стержне 3-4 можно определить непосредственно из расчета исходной шпренгельной фермы. Рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы и составим уравнение проекций сил, действующих на отсеченную часть фермы, на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_A + S_{3-4} \sin 45^\circ - 5,5G = 0; \quad S_{3-4} = \frac{5,5G - R_A}{\sin 45^\circ} = -35,36 \text{ кН (сжат)}.$$

Подсчитаем погрешность определения усилия в стержне 3-4, найденного ранее графическим способом:

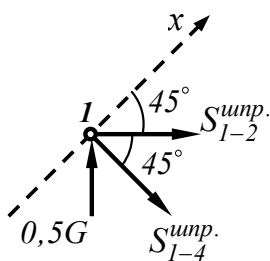
$$\Delta = \left| \frac{S_{3-4}^{\text{аналит.}} - S_{3-4}^{\text{граф.}}}{S_{3-4}^{\text{аналит.}}} \right| \cdot 100\% = \frac{35,36 - 35}{35,36} \cdot 100\% = 1,02\%.$$

Стержню 1-2 исходной фермы соответствует стержень 1-3 главной фермы. Для определения усилия в стержне 1-3 главной фермы воспользуемся проведенным ранее сечением I-I (рисунок 4.5б) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы. Усилие в стержне определим из уравнения моментов относительно моментной точки б (способ моментной точки):

$$\sum m_b = 2G \cdot 2a + G \cdot 4a - R_A \cdot 4a - S_{1-3}^{\text{зл.ф.}} \cdot 2a = 0;$$

$$S_{1-3}^{\text{зл.ф.}} = 4G - 2R_A = 4G - 12G = -8G = -8 \cdot 50 = -400 \text{ кН (сжат)}.$$

Для определения усилия в стержне 1-2 шпренгеля воспользуемся способом вырезания узлов. Вырежем из шпренгеля узел 1 и составим уравнение проекций на ось x:



$$\sum X = S_{1-2}^{\text{шпр.}} \cdot \cos 45^\circ + 0,5G \cdot \cos 45^\circ - S_{1-4}^{\text{шпр.}} = 0,$$

$$S_{1-2}^{\text{шпр.}} = -0,5G = -25 \text{ кН (сжат)}.$$

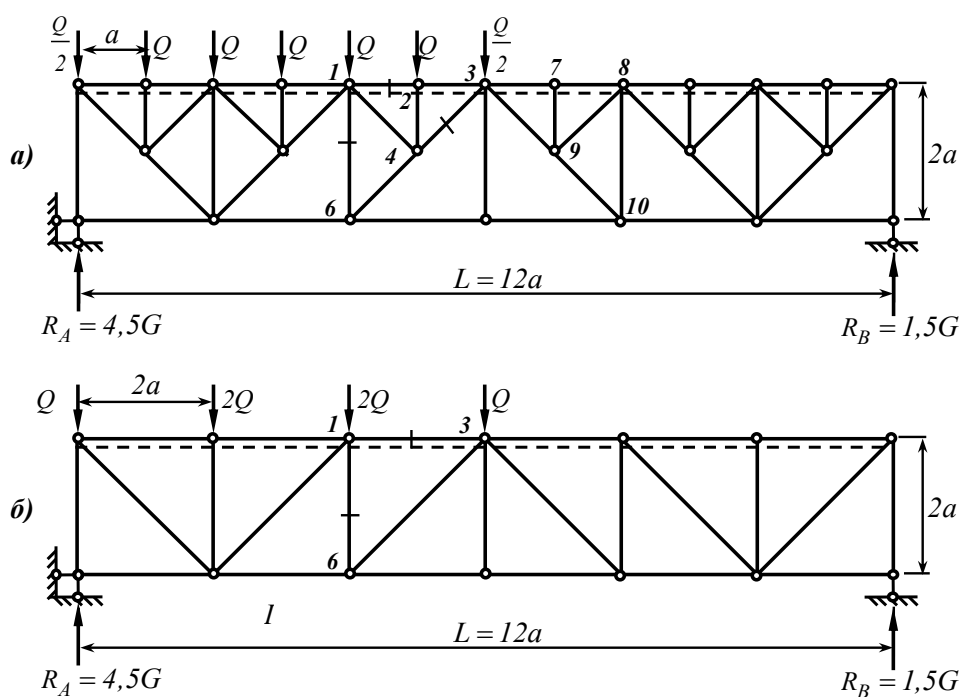
Результирующее усилие в стержне 1-2 исходной фермы равно:

$$S_{1-2} = S_{1-3}^{\text{зл.ф.}} + S_{1-2}^{\text{шпр.}} = -400 - 25 = -425 \text{ кН (сжат)}.$$

Найденное значение совпадает с полученным ранее по диаграмме Максвелла-Кремоны.

Таким образом, все значения усилий, полученные графическим способом (по диаграмме Максвелла-Кремоны), практически совпадают с результатами аналитического расчета.

#### 4 Графическое определение усилий в стержнях фермы от действия временной нагрузки



*a* – шпренгельная ферма с временной неподвижной нагрузкой;

*б* – главная (основная) ферма с временной нагрузкой, перераспределенной с учетом работы одноярусных шпренгелей.

Рисунок 4.7

Временную неподвижную нагрузку, приложенную к узлам левой половины грузового пояса шпренгельной фермы (рисунок 4.7*а*), перераспределим между узлами главной фермы с учетом работы одноярусных шпренгелей (рисунок 4.7*б*).



Опорные реакции определим из уравнений моментов действующих сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum m_A = 12a \cdot R_B - 2Q \cdot 2a - 2Q \cdot 4a - Q \cdot 6a = 0; \\ \sum m_B = Q \cdot 6a + 2Q \cdot 8a + 2Q \cdot 10a + Q \cdot 12a - 12a \cdot R_A = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B = 1,5Q = 37,5 \text{ кН}; \\ R_A = 4,5Q = 112,5 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для определения усилий, возникающих в стержнях главной фермы и шпренгелей от временной неподвижной нагрузки на левой половине пролета фермы, строим диаграммы Максвелла-Кремоны (рисунок 4.8). Заметим, что и в этом случае диаграмма построена только для одного шпренгеля, расположенного на загруженной левой половине фермы, т.к. очевидно, что усилия в стержнях остальных шпренгелей левой половины фермы будут равны усилиям в соответствующих стержнях рассмотренного шпренгеля, а усилия в стержнях шпренгелей незагруженной правой половины фермы будут равны нулю.

Определяем по построенным диаграммам усилия в отмеченных стержнях от действия временной неподвижной нагрузки, приложенной на левой половине пролета фермы.

$$S_{1-6} = S_{1-6}^{гл.ф.} = -|IV; V| = -0,5 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -12,5 \text{ кН} (\text{сжат});$$

$$S_{1-3}^{гл.ф.} = -|D; V| = -5 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -125 \text{ кН} (\text{сжат});$$

$$S_{1-2}^{шпр.} = -|B; I| = -0,5 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -12,5 \text{ кН} (\text{сжат});$$

$$S_{1-2} = S_{1-3}^{гл.ф.} + S_{1-2}^{шпр.} = -125 - 12,5 = -137,5 \text{ кН} (\text{сжат});$$

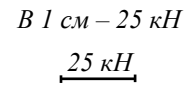
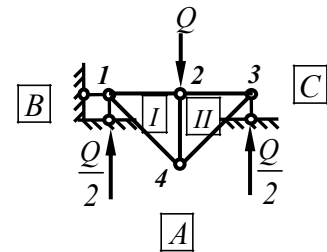
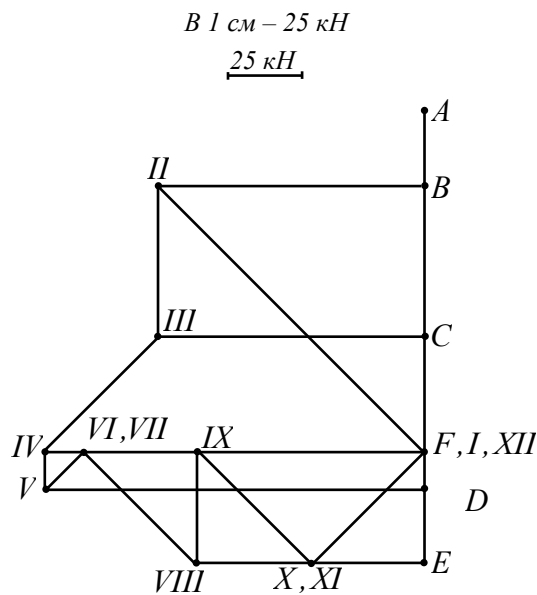
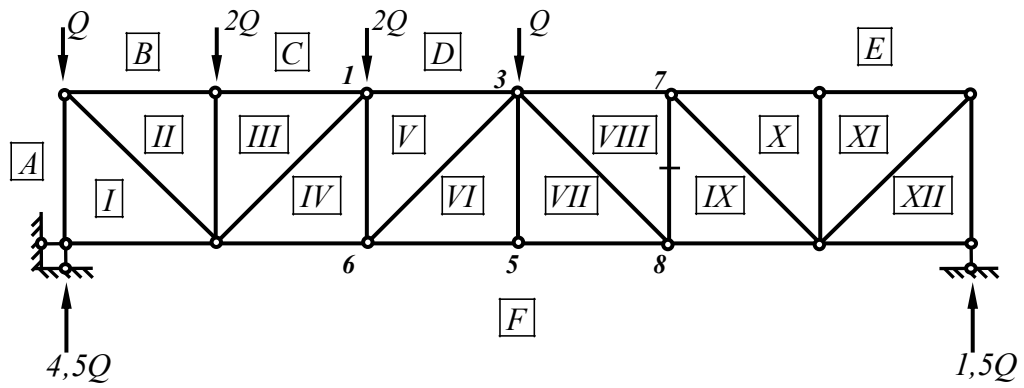


Рисунок 4.8 – Диаграммы Максвелла-Кремоны при действии временной неподвижной нагрузки на левой половине пролета фермы

$$S_{3-6}^{зл.ф.} = -|V; VI| = 0,7 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 17,5 \text{ кН};$$

$$S_{3-4}^{шпр.} = -|A; II| = 0,7 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 17,5 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{3-4} = S_{3-6}^{зл.ф.} + S_{3-4}^{шпр.} = 17,5 + 17,5 = 35 \text{ кН}.$$

Найденные значения усилий заносим в таблицу 7.

Определяем усилия в отмеченных стержнях при загрузении неподвижной временной нагрузкой правой половины пролета фермы. Очевидно, что эти усилия можно найти как усилия в симметрично расположенных относительно центральной стойки стержнях правой половины фермы, найденным по построенным диаграммам Максвелла-Кремоны (рисунок 4.7а).

Так, усилие в стержне 1-6 при загрузении правой половины пролета фермы будет равно усилию в стержне 8-9 при загрузении левой половины пролета:

$$S_{8-10} = S_{8-10}^{зл.ф.} = |VII; IX| = 1,5 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 37,5 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне 1-2 при загрузении правой половины пролета фермы найдем как усилие в стержне 7-8 при загрузении левой половины пролета:

$$S_{3-8}^{зл.ф.} = -|E; VIII| = -3 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -75 \text{ кН} (\text{сжат}); \quad S_{7-8}^{унп.} = 0;$$

$$S_{7-8} = S_{3-8}^{зл.ф.} + S_{7-8}^{унп.} = -75 \text{ кН} (\text{сжат}).$$

Усилие в стержне 3-4 при загрузении правой половины пролета фермы найдем как усилие в стержне 3-9 при загрузении левой половины пролета:

$$S_{3-10}^{зл.ф.} = -|VII; VIII| = -2,1 \text{ см} \cdot 25 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -52,5 \text{ кН} (\text{сжат}); \quad S_{3-9}^{унп.} = 0;$$

$$S_{3-9} = S_{3-10}^{зл.ф.} + S_{3-9}^{унп.} = -52,5 \text{ кН} (\text{сжат}).$$

Полученные данные заносим в соответствующие ячейки таблицы 7.

Очевидно, что усилия в исследуемых стержнях при загрузении временной неподвижной нагрузкой всего пролета фермы можно найти как алгебраическую сумму усилий, полученных при загрузении отдельно левой и правой половин пролета фермы (таблица 7).

### 5 Построение линий влияния усилий в стержнях фермы

При построении линий влияния усилий будем использовать статический способ. Усилия в рассеченных стержнях направляем от узлов, считая стержни растянутыми.

#### 5.1 Линия влияния усилия $S_{1-6}$

Стержень  $1-6$  относится к первому типу (принадлежит только главной ферме).

Для построения линии влияния (л.вл.) усилия в стержне  $1-6$  главной фермы проведем сечение  $I-I$  (рисунки 4.9а, б). Усилие в стержне будем определять из уравнения проекций сил на вертикальную ось (способ проекций). Рассмотрим два положения единичного груза  $\bar{P} = 1$ : слева и справа от проведенного сечения.

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится слева от рассеченной грузовой панели  $1-3$ . Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; S_{1-6} + R_B = 0; S_{1-6} = -R_B;$$

$$\text{л.вл.} S_{1-6} = (-1) \cdot \text{л.вл.} R_B.$$

Линии влияния реакций опор балочных ферм строятся по тем же правилам, что и линии влияния опорных реакций обычной однопролетной балки. Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.9в).

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится справа от рассеченной грузовой панели  $1-3$ . Заметим, что на рисунке 4.9б показано направление усилия  $S_{1-6}$  для правой отсеченной части фермы. Поэтому при рассмотрении равновесия левой отсеченной ча-

сти фермы направление усилия  $S_{1-6}$  мысленно изменим на противоположное. Тогда, из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

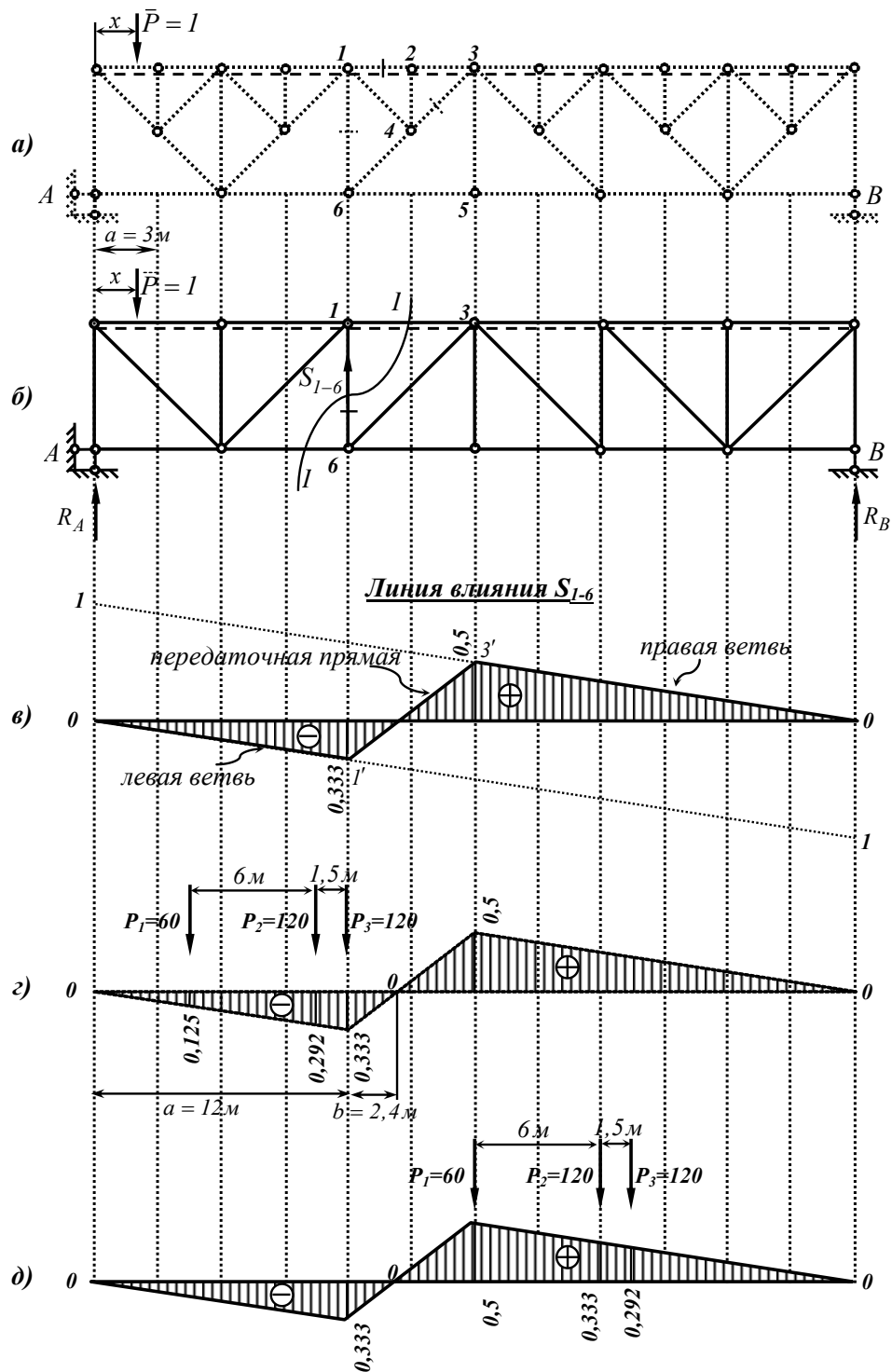


Рисунок 4.9

$$\sum Y^{лев} = 0; R_A - S_{1-6} = 0; S_{1-6} = R_A;$$

$$л.вл. S_{1-6} = л.вл. R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния (рисунок 4.9в). Учитываем узловую передачу нагрузки в ферме: сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки  $1'$  и  $3'$ , расположенные соответственно под узлами  $1$  и  $3$  разрезанной грузовой панели верхнего пояса, соединяем передаточной прямой. Определяем ординаты характерных точек из подобия треугольников (рисунок 4.9в).

### 5.2 Линия влияния усилия $S_{3-4}$

Стержень  $3-4$  относится к третьему типу (принадлежит одновременно главной ферме и шпренгелю). Однако для определения усилия в этом стержне можно провести в исходной шпренгельной ферме сечение, пересекающее три стержня (рисунок 4.10а). Поэтому линию влияния усилия  $S_{3-4}$  можно построить непосредственно из рассмотрения исходной фермы, без выделения главной фермы и шпренгеля.

Для построения линии влияния усилия в стержне  $3-4$  проведем сечение  $I-I$  (рисунок 4.10а). Усилие в стержне будем определять из уравнения проекций сил на вертикальную ось (способ проекций). Рассмотрим два положения единичного груза  $\bar{P} = 1$ : слева и справа от проведенного сечения.

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится слева от рассеченной грузовой панели  $2-3$ . Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; R_B - S_{3-4} \cdot \sin 45^\circ - \nu,$$

$$S_{3-4} = \frac{R_B}{\sin 45^\circ} = 1,414 R_B;$$

$$\text{л.вл. } S_{3-4} = 1,414 \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.10б).

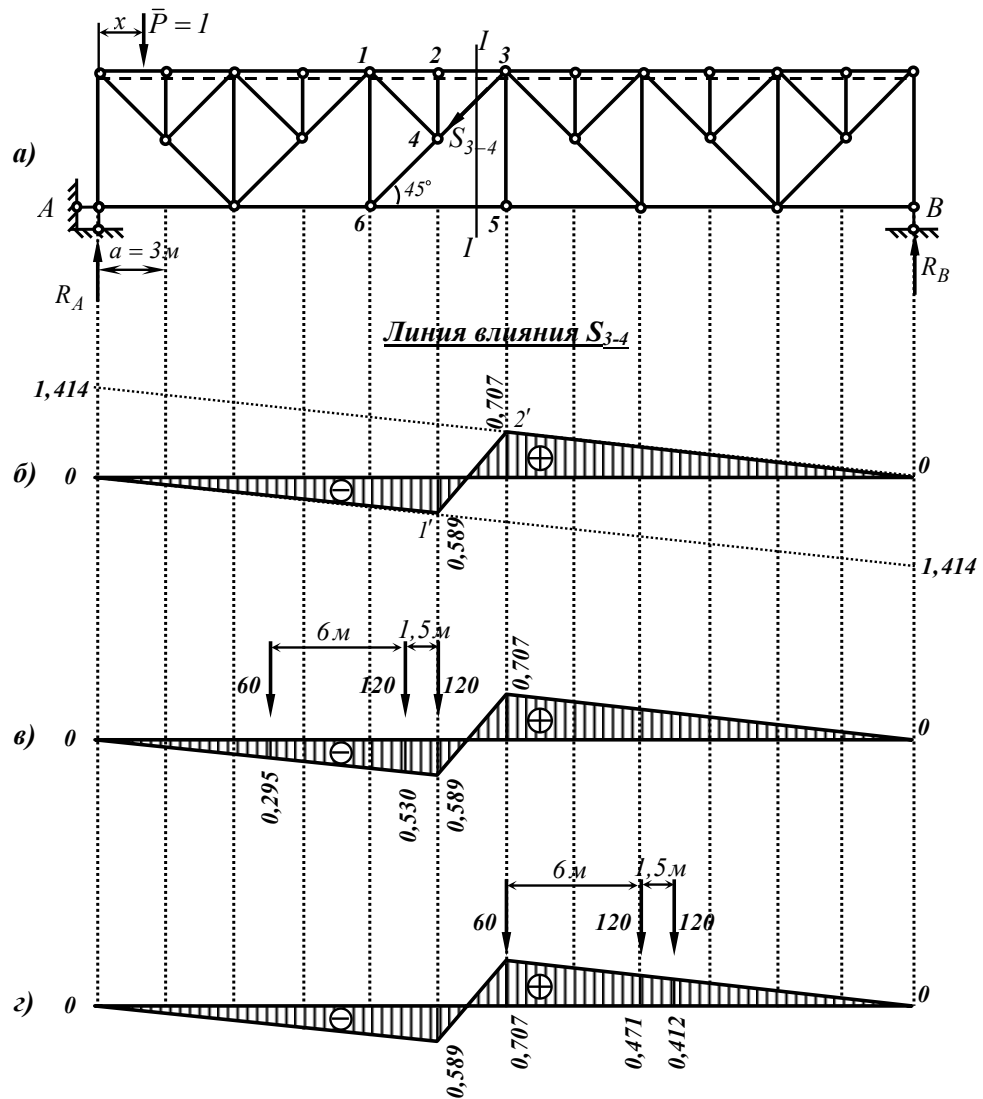


Рисунок 4.10

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится справа от рассеченной грузовой панели 2-3. Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; S_{3-4} \cdot \sin 45^\circ + R_A = 0;$$

$$S_{3-4} = -\frac{R_A}{\sin 45^\circ} = -1,414R_A;$$

$$\text{л.вл.} S_{3-4} = (-1,414) \cdot \text{л.вл.} R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Учитываем узловую передачу нагрузки в ферме: сносим на левую ветвь левый узел расчлененной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки  $2'$  и  $3'$ , расположенные соответственно под узлами 2 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой. Определяем ординаты характерных точек из подобия треугольников (рисунок 4.10б).

### 5.3 Линия влияния усилия $S_{1-2}$

Стержень 1-2 исходной фермы относится к третьему типу (принадлежит одновременно главной ферме и шпренгелю), поэтому линию влияния (л.вл.) усилия в стержне будем строить как алгебраическую сумму линий влияния, построенных отдельно для соответствующих стержней главной фермы и шпренгеля (рисунок 4.11а):

$$\text{л.вл.} S_{1-2} = \text{л.вл.} S_{1-3}^{\text{гл.ф.}} + \text{л.вл.} S_{1-2}^{\text{шпр.}}$$

Для построения линии влияния усилия  $S_{1-3}^{\text{гл.ф.}}$  проведем в главной ферме сечение I-I (рисунок 4.11б). Усилие в стержне будем определять из уравнения моментов относительно моментной точки  $b$  (способ моментной точки). Рассмотрим два положения единичного груза  $\bar{P} = 1$ : слева и справа от проведенного сечения.

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится слева от расчлененной грузовой панели 1-3. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum m_6^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{1-3}^{\text{гл.ф.}} \cdot 2a - R_B \cdot 4a = 0; \quad S_{1-3}^{\text{гл.ф.}} = -4R_B;$$



$$\text{л.вл. } S_{1-3}^{\text{гл.ф.}} = (-4) \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

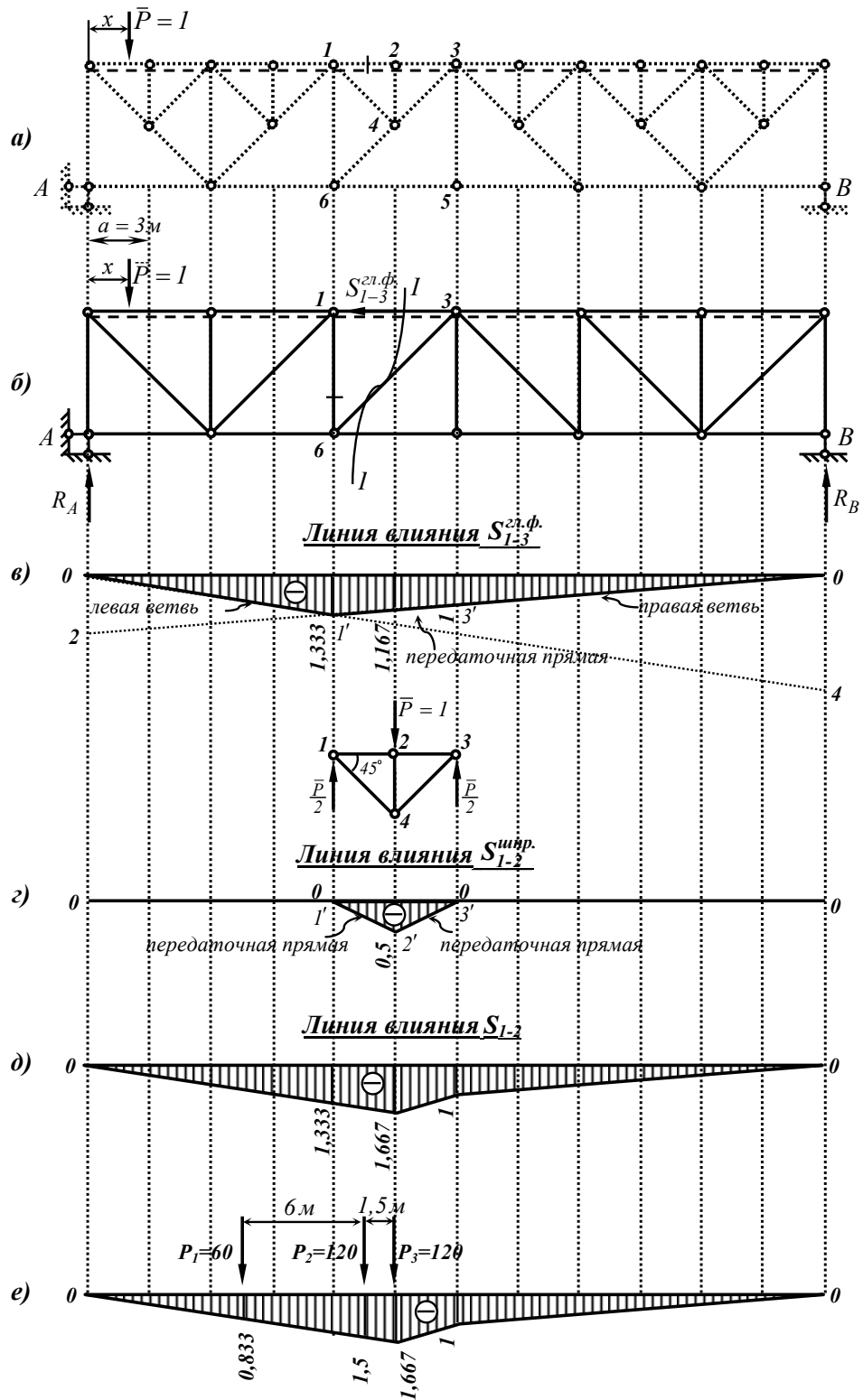


Рисунок 4.11

Линии влияния реакций опор балочных ферм строятся по тем же правилам, что и линии влияния опорных реакций обычной однопролетной балки. Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.11в).

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится справа от рассеченной грузовой панели 1-3. Заметим, что на рисунке 4.11б показано направление усилия  $S_{1-3}^{2л.ф.}$  для правой отсеченной части фермы. Поэтому при рассмотрении равновесия левой отсеченной части фермы направление усилия  $S_{1-3}^{2л.ф.}$  мысленно изменим на противоположное. Тогда, из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum m_6^{лев} = 0; -S_{1-3}^{2л.ф.} \cdot 2a - R_A \cdot 4a = 0; S_{1-3}^{2л.ф.} = -2R_A;$$

$$л.вл. S_{1-3}^{2л.ф.} = (-2) \cdot л.вл. R_A.$$

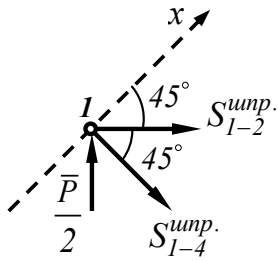
Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния (рисунок 4.11в). Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой б.

Затем сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 1' и 3', расположенные соответственно под узлами 1 и 3 разрезанной грузовой панели, соединяем передающей прямой. Определяем ординаты характерных точек из подобия треугольников (рисунок 4.11в).

Усилие в стержне 1-2 шпренгеля найдем способом вырезания узлов. Шпренгель работает только на местную нагрузку. Рассмотрим два случая.

Если единичная сила  $\bar{P} = 1$  находится между узлами 1 и 3 грузового пояса фермы, то узел 2 шпренгеля нагружен (рисунок 4.11г).

Вырежем узел 1 из шпренгеля и составим уравнение проекций действующих на него сил на ось x:



$$\sum X = S_{1-2}^{unp.} \cdot \cos 45^\circ + S_{1-4}^{unp.} \cdot \cos 45^\circ - \frac{\bar{P}}{2} = 0,$$

$$S_{1-2}^{unp.} = -0,5\bar{P} = -0,5.$$

Если единичная сила  $\bar{P} = 1$  находится левее узла 1 или правее узла 3 верхнего пояса фермы, то узел 2 шпренгеля не нагружен и  $S_{1-2}^{unp.} = 0$ .

Откладывая соответствующие значения от оси линия влияния и соединяя полученные точки 1', 2' и 3' передаточными прямыми, получим линию влияния усилия  $S_{1-2}^{unp.}$  (рисунок 4.11з).

Результирующую линию влияния усилия  $S_{1-2}$ , получаем складывая с учетом знаков ординаты характерных точек линий влияния усилий  $S_{1-3}^{gl.ф.}$  и  $S_{1-2}^{unp.}$  (рисунок 4.11д).

#### б Определение усилий в стержнях фермы от временной подвижной нагрузки

Определим по построенным линиям влияния наибольшие сжимающие и наибольшие растягивающие усилия, которые могут возникать в стержнях от заданной временной подвижной нагрузки (системы жестко связанных грузов  $P_1 = 60\text{кН}$ ,  $P_2 = 120\text{кН}$  и  $P_3 = 120\text{кН}$ ).

Линия влияния усилия  $S_{1-6}$  имеет отрицательный и положительный участки треугольного вида (рисунок 4.9в).

Найдем наибольшее сжимающее усилие  $S_{1-6}^{min}$ , возникающее в стержне, от заданной временной подвижной нагрузки. Для определения критического груза воспользуемся неравенствами (4.3).

Пусть  $P_{кр} = P_3 = 120\text{кН}$ . Тогда  $P_{лев} = P_1 + P_2 = 60 + 120 = 180\text{кН}$ ,  $P_{прав} = 0$ . Расстояния от вершины отрицательного участка линии влияния до нулевых точек слева

и справа соответственно равны  $a = 12\text{ м}$ ,  $b = 2,4\text{ м}$  (рисунок 4.9з). Проверяем выполнение неравенств (4.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(P_{лев} + P_{кр})}{a} \geq \frac{P_{прав}}{b}; \\ \frac{P_{лев}}{a} \leq \frac{(P_{кр} + P_{прав})}{b}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{180 + 120}{12} \geq 0; \\ \frac{180}{12} \leq \frac{120 + 0}{2,4}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 25 \geq 0; \\ 15 \leq 50. \end{array} \right.$$

Оба неравенства справедливы, следовательно, критический груз  $P_{кр} = P_3$ .

Так как критический груз может быть не один, проверяем следующий груз  $P_2$ .

Пусть  $P_{кр} = P_2 = 120\text{ кН}$ ,  $P_{лев} = P_1 = 60\text{ кН}$ ,  $P_{прав} = P_3 = 120\text{ кН}$ . Проверяем выполнение неравенств (4.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(P_{лев} + P_{кр})}{a} \geq \frac{P_{прав}}{b}; \\ \frac{P_{лев}}{a} \leq \frac{(P_{кр} + P_{прав})}{b}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{60 + 120}{12} \geq \frac{120}{2,4}; \\ \frac{60}{12} \leq \frac{120 + 120}{2,4}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 15 \geq 50; \\ 5 \leq 100. \end{array} \right.$$

Первое из неравенств ошибочно, следовательно, груз  $P_2$  не может быть критическим. Таким образом, мы выяснили, что при нахождении груза  $P_3$  над вершиной отрицательного участка линии влияния усилие  $S_{1-6}$  принимает экстремальное значение (рисунок 4.9з). Определив ординаты линии влияния под точками приложения сил  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , по формуле (4.2) найдем наибольшее сжимающее усилие, возникающее в стержне 1-6:

$$S_{1-6}^{min} = \sum P_i y_i = -(60 \cdot 0,125 + 120 \cdot 0,333 + 120 \cdot 0,292) = -82,5\text{ кН}.$$

Найдем наибольшее растягивающее усилие  $S_{1-6}^{max}$ , возникающее в стержне от заданной временной подвижной нагрузки. При расположении грузов  $P_2$  или  $P_3$  над вершиной положительного участка другие грузы могут оказаться на отрицательном участке линии влияния. В этом случае пользоваться неравенствами (4.3) нельзя. Задачу нахождения опасного положения подвижной нагрузки решаем, поочередно располагая грузы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , над вершиной положительного участка и подсчитывая значение усилия в стержне по формуле (4.2). Найденное опасное расположение подвижной нагрузки показано на рисунке 4.9д. Наибольшее растягивающее усилие, возникающее в стержне, будет равно:

$$S_{1-6}^{max} = \sum P_i y_i = 60 \cdot 0,5 + 120 \cdot 0,333 + 120 \cdot 0,292 = 105,4 \text{ кН}.$$

Аналогично, определяем опасное положение подвижной временной нагрузки на линиях влияния остальных стержней.

Наибольшее сжимающее усилие в стержне 3-4 (рисунок 4.10в):

$$S_{3-4}^{min} = \sum P_i y_i = -(60 \cdot 0,295 + 120 \cdot 0,530 + 120 \cdot 0,589) = -152,0 \text{ кН}.$$

Наибольшее растягивающее усилие в стержне 3-4 (рисунок 4.10г):

$$S_{3-4}^{max} = \sum P_i y_i = 60 \cdot 0,707 + 120 \cdot 0,471 + 120 \cdot 0,412 = 148,4 \text{ кН}.$$

Линия влияния усилия  $S_{1-2}$  имеет только отрицательный знак, следовательно, растягивающее усилие в этом стержне от заданной подвижной нагрузки возникнуть не может.

Наибольшее сжимающее усилие в стержне 1-2 (рисунок 4.11е):

$$S_{1-2}^{min} = \sum P_i y_i = -(60 \cdot 0,833 + 120 \cdot 1,667 + 120 \cdot 1,5) = -430,0 \text{ кН}.$$

Найденные значения усилий в стержнях заносим в соответствующие ячейки таблицы 7.

### 8 Определение расчетных усилий в стержнях от различных сочетаний нагрузок

По данным таблицы 7 определяем наибольшие растягивающие  $S_{max}$  и наибольшие сжимающие  $S_{min}$  усилия в исследуемых стержнях от сочетаний постоянной и двух временных нагрузок (неподвижной и подвижной).

Таблица 7 – Таблица расчетных усилий

Стержни	Усилия от нагрузки, кН						Расчетные усилия, кН	
	постоянная	Временная неподвижная			Временная подвижная		$S_{max}$	$S_{min}$
		на левой половине пролета	на правой половине пролета	на всем пролете	«+»	«-»	«+»	«-»
1-6	50	-12,5	37,5	25	105,0	-82,5	192,5	-90
3-4	-35	35	-52,5	-17,5	148,4	-152,0	-148,4	-239,5
1-2	-425	-137,5	-75	-212,5	-	-430,0	-	-1067,5

*Примечание* – Прочерк в ячейках расчетных усилий означает, что при любых сочетаниях постоянной и временных нагрузок усилие такого знака в стержне не возникает.

### 8 Подбор поперечного сечения стержня 1-6 из условия прочности

Из курса сопротивления материалов известно, что требуемая из условия прочности при растяжении (сжатии) площадь поперечного сечения стержня определяется соотношением:

$$A^{треб} \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}},$$

где  $N_{max}$  – максимальное (по абсолютной величине) значение продольной силы в стержне;

$\sigma_{adm}$  – допускаемое нормальное напряжение для материала стержня.

По данным таблицы 7 для стержня 1-6 максимальное значение продольной силы  $N_{max} = 192,5 \text{ кН}$ . Тогда требуемая площадь поперечного сечения стержня равна:

$$A^{треб} \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{192,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,203 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 12,03 \text{ см}^2.$$

Принимаем поперечное сечение стержня из двух спаренных равнополочных уголков 63/5 по ГОСТ 8509-93 общей площадью  $A = 2 \cdot 6,13 = 12,26 \text{ см}^2$ .

#### **Пример 4.2**

Для шпренгельной фермы (рисунок 4.12):

- 1 Проверить геометрическую неизменяемость фермы.
- 2 Определить усилия от заданной постоянной нагрузки во всех стержнях главной фермы и шпренгелей графическим способом (с помощью диаграммы Максвелла-Кремоны).
- 3 Определить аналитически усилия от постоянной нагрузки в трех отмеченных на расчетной схеме стержнях. Сравнить полученные значения с графическим расчетом.
- 4 Определить усилия во всех стержнях главной фермы и шпренгелей от временной неподвижной нагрузки, приложенной на левой половине фермы, графическим способом (с помощью второй построенной диаграммы Максвелла-Кремоны).
- 5 По диаграмме, построенной в п. 4, для трех отмеченных стержней определить усилия от временной неподвижной нагрузки, приложенной к узлам правой половины фермы и на всем пролете.

6 Построить линии влияния усилий для трех отмеченных стержней и определить по этим линиям влияния наибольшие растягивающие («+») и сжимающие («-») усилия в стержнях от заданной системы подвижных грузов.

7 Значения усилий (с указанием знака), полученных в п.п. 3, 4, 5, 6 для трех отмеченных стержней, записать в таблицу расчетных усилий. Подсчитать максимальное (наибольшее растягивающее) и минимальное (наибольшее сжимающее) усилия.

9 Подобрать из условия прочности для одного из трех отмеченных стержней необходимую площадь поперечного сечения из спаренных равнополочных уголков. Принять допускаемое напряжение равным  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ .

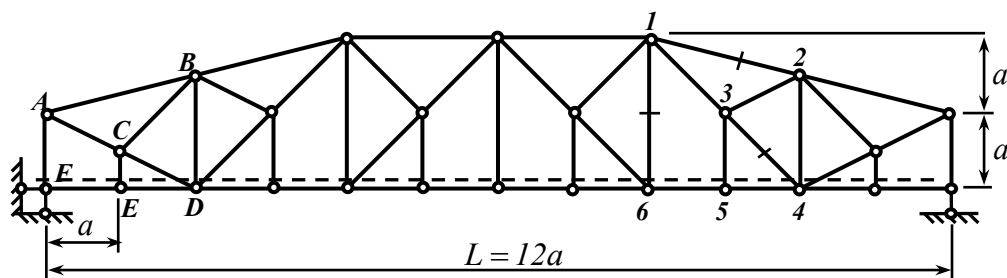


Рисунок 4.12 – Схема фермы

**Дано:**  $a = 3 \text{ м}$ ;  $P_{\text{пост}} = G = 80 \text{ кН}$ ;  $P_{\text{врем}} = Q = 40 \text{ кН}$ . Грузовой пояс отмечен на схеме фермы (рисунок 4.12) пунктиром.

### Решение

#### 1 Кинематический анализ

Проверяем выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости фермы (3.1):

$$W = 2Y - C - C_{on} = 2 \cdot 26 - 49 - 3 = 0,$$



где  $U = 26$  – число узлов фермы (включая опорные);

$C = 49$  – число стержней фермы;

$C_{on} = 3$  – число опорных стержней фермы.

Необходимое условие (4.1) выполняется. Для окончательного ответа на вопрос о геометрической неизменяемости фермы необходимо провести анализ геометрической структуры.

Выделим в структуре ферме геометрически неизменяемый шарнирный треугольник  $ABC$  (рисунок 4.12). Узел  $D$  присоединен к шарнирному треугольнику  $ABC$  двумя стержнями (способом диады), следовательно, новая полученная система также будет геометрически неизменяемой. Узел  $E$  также присоединяется к геометрически неизменяемой системе  $ABCD$  способом диады, образуя новую геометрически неизменяемую систему  $ABCDE$  и т.д. Каждый последующий узел фермы присоединяется способом диады, образуя геометрически неизменяемую систему. Таким образом, вся ферма является геометрически неизменяемой системой.

Геометрически неизменяемая ферма присоединена к основанию («земле») тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями. Следовательно, ферма является неподвижной и геометрически неизменяемой системой

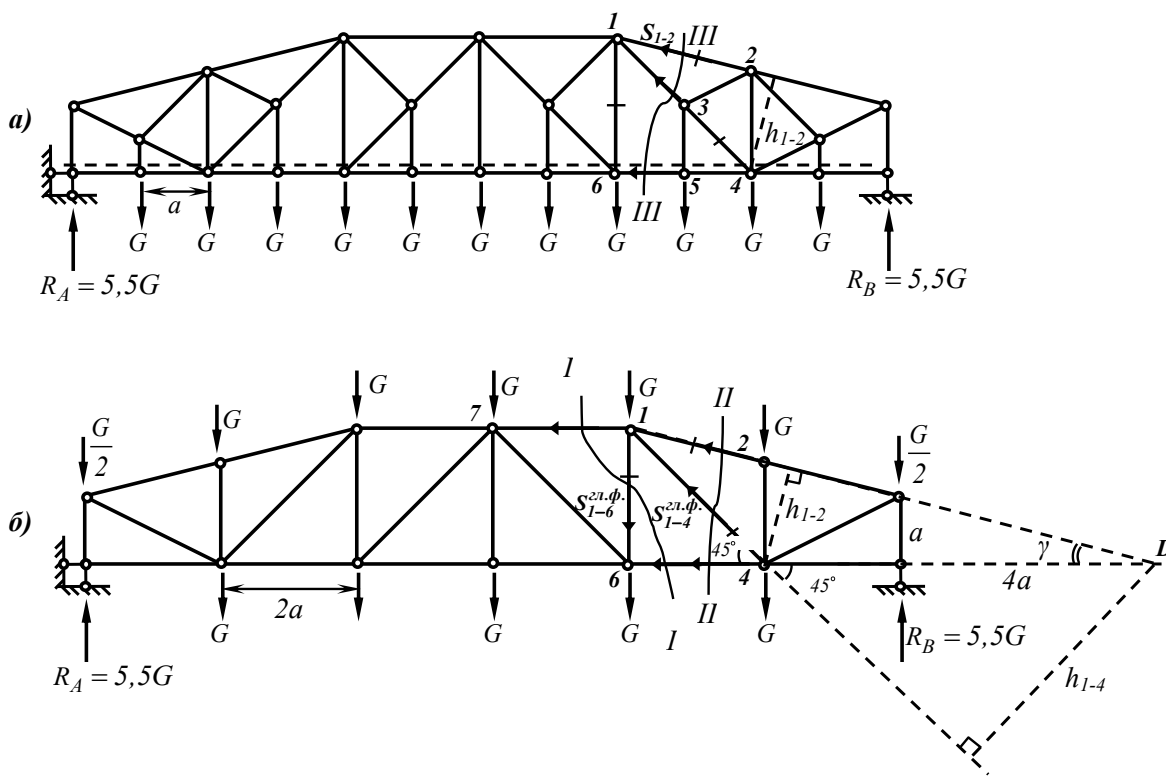
## *2 Графическое определение усилий в стержнях фермы от заданной постоянной нагрузки*

Выделим из исходной шпренгельной фермы главную ферму и шпренгели. Нагрузку, приложенную к узлам грузового пояса исходной фермы, перераспределим между узлами главной фермы с учетом работы двухъярусных шпренгелей (рисунок 4.13).

В связи с симметрией фермы и нагрузки опорные реакции будут равны:

$$R_A = R_B = \frac{11G}{2} = 5,5G = 440\text{кН}.$$

Для определения усилий, возникающих в стержнях главной фермы и шпренгелей, строим диаграммы Максвелла-Кремоны.



*a* – шпренгельная ферма с постоянной нагрузкой на всем пролете;  
*б* – главная (основная) ферма с нагрузкой, перераспределенной с учетом работы двухъярусных шпренгелей.

Рисунок 4.13

Строим в произвольном масштабе схему фермы (рисунок 4.14). Обозначаем внешние зоны фермы прописными буквами латинского алфавита. Границами зон являются линии действия внешних сил и опорных реакций. Внутренние зоны фермы обозначаем римскими цифрами. Границами внутренних зон являются стержни фермы.

Обходя внешние зоны фермы по часовой стрелке (начиная с любой зоны), строим в выбранном масштабе многоугольник внешних сил. При этом каждая внешняя сила обозначается двумя индексами по названиям зон, на границе которых

она находится. Первый индекс – наименование зоны, расположенной перед силой, второй индекс – наименование зоны, расположенной после силы. Например, реакция левого опорного узла фермы получает на диаграмме название  $U-A$ . Если опорные реакции фермы определены правильно, то многоугольник внешних сил должен быть замкнут: конец последней силы должен совпадать на диаграмме с началом первой.

Построение диаграммы начинаем с узла, в котором сходятся только два стержня, например, с левого опорного узла фермы. Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами по тому же правилу, что и внешние силы. Так, стержни, сходящиеся в левом опорном узле, получают обозначение  $A-I$  и  $I-U$ . Из точек  $A$  и  $U$ , которые уже присутствуют на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням: из точки  $A$  – параллельную стержню  $A-I$ , из точки  $U$  – параллельную стержню  $I-U$ . Точку пересечения этих прямых обозначаем  $I$  (общий индекс, входящий в обозначения стержней). Положение точки  $I$  на диаграмме совпадает с точкой  $U$ . Это означает, что стержень  $I-U$  – нулевой.

Следующим рассматриваем узел, в котором может сходиться произвольное число стержней, но только в двух из них усилия неизвестны (усилия в стержнях  $A-I$  и  $I-U$  считаются известными после построения точки  $I$ ). Обходя крайний левый узел верхнего пояса фермы по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями:  $B-II$  и  $II-I$ . Из точки  $B$  проводим прямую, параллельную стержню  $B-II$ , из точки  $I$  – прямую, параллельную стержню  $II-I$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $II$ . Затем переходим к следующему узлу, в котором сходятся только два стержня с неизвестными усилиями, и повторяем всю последовательность действий для предыдущего узла. Построение диаграммы считается законченным, когда на ней появляется точка с обозначением последней внутренней зоны фермы.

Построенные для главной фермы и шпренгелей диаграммы Максвелла-Кремоны показаны на рисунке 4.14. Заметим, что диаграммы построены для шпренгелей только одной половины фермы (той, на которой находятся отмеченные стержни), т.к. очевидно, что усилия в соответствующих стержнях шпренгелей другой половины фермы будут симметричны найденным.

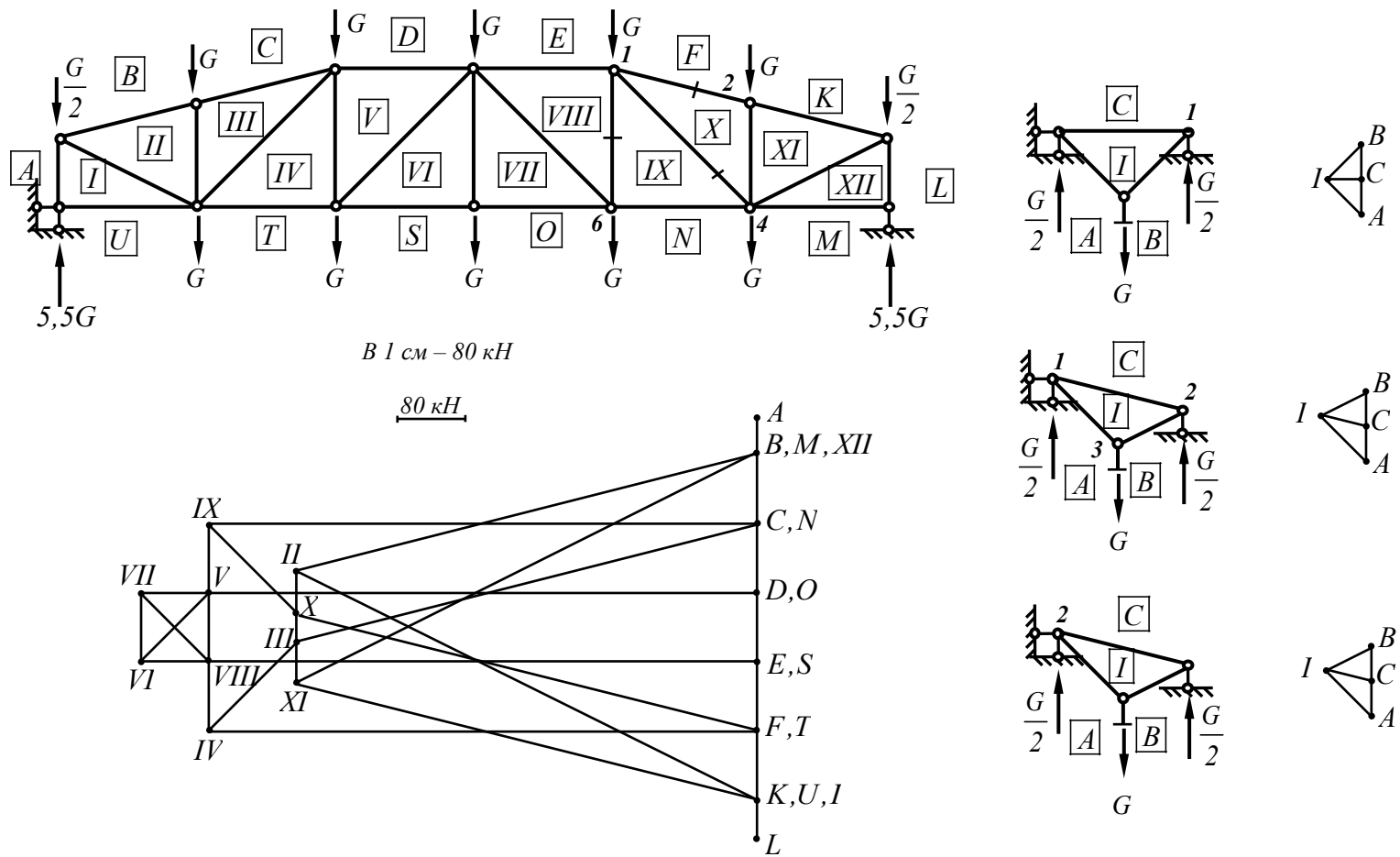


Рисунок 4.14 – Диаграммы Максвелла-Кремоны при действии постоянной нагрузки

Определяем в отмеченных на схеме фермы стержнях (рисунок 4.12) усилия по построенным диаграммам.

Стержни 1-6 и 3-4 принадлежат только главной ферме, поэтому усилия в них определяются только из рассмотрения соответствующих стержней главной фермы.

При обходе по часовой стрелке узла 6 на схеме фермы (рисунок 4.14) стержень 1-6 получает обозначение VIII – IX. Величина усилия в стержне равна длине соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе. Мысленно переносим вектор  $\overline{VIII; IX}$  на схему фермы и накладываем на стержень 1-6. Усилие имеет положительный знак, т.к. вектор  $\overline{VIII; IX}$  направлен от узла 6.

$$S_{1-6} = S_{1-6}^{гл.ф.} = |\overline{VIII; IX}| = 2\text{см} \cdot 80 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 160\text{кН}.$$

Стержню 3-4 исходной фермы соответствует стержень 1-4 главной фермы. При обходе по часовой стрелке узла 1 на схеме ферме (рисунок 4.14) стержень 1-4 получает обозначение X – IX. Величина усилия в стержне равна длине соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе. Усилие имеет отрицательный знак (стержень сжат), т.к. вектор  $\overline{X; IX}$  при наложении на стержень 1-4 на схеме фермы направлен к узлу 1.

$$S_{3-4} = S_{1-4}^{гл.ф.} = -|\overline{X; IX}| = -1,9\text{см} \cdot 80 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -152\text{кН}(\text{сжат}).$$

Стержень 1-2 относится к третьему типу, так как принадлежит одновременно главной ферме и шпренгелю. Усилие в нем определяется как алгебраическая сумма усилий в соответствующих стержнях главной фермы и шпренгеля.

$$S_{1-2}^{гл.ф.} = -|\overline{F; X}| = -6,9\text{см} \cdot 80 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -552\text{кН}(\text{сжат});$$

$$S_{1-2}^{unp.} = -|C; I| = -0,7 \text{ см} \cdot 80 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -56 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{1-2} = S_{1-2}^{zl.\phi.} + S_{1-2}^{unp.} = -552 - 56 = -608 \text{ кН (сжат)}.$$

Найденные значения усилий заносим в таблицу 8.

### 3 Аналитическое определение усилий в стержнях фермы от заданной постоянной нагрузки

Стержни 1-6 и 3-4 принадлежат только главной ферме и усилия в них можно определить из расчета только главной фермы.

Для определения усилия в стержне 1-6 проведем сечение I-I главной фермы (рисунок 4.13б) и рассмотрим равновесие правой отсеченной части фермы. Усилие в стержне определим из уравнения проекций действующих сил на вертикальную ось (способ проекций):

$$\sum Y = -S_{1-6}^{zl.\phi.} - 3,5G + 5,5G = 0; \quad S_{1-6} = S_{1-6}^{zl.\phi.} = 2G = 160 \text{ кН}.$$

Найденное усилие в стержне совпадает с усилием, полученным ранее по диаграмме Максвелла-Кремоны.

Стержню 3-4 исходной фермы соответствует стержень 1-4 главной фермы. Для определения усилия в стержне 1-4 главной фермы проведем сечение II-II (рисунок 4.13б) и рассмотрим равновесие правой отсеченной части фермы. Усилие в стержне определим из уравнения моментов относительно моментной точки D (способ моментной точки):

$$\sum m_D = 2G \cdot 6a + 0,5G \cdot 4a - R_B \cdot 4a - S_{1-4}^{zl.\phi.} \cdot h_{1-4} = 0.$$

Из геометрических соображений  $h_{1-4} = 6a \cdot \sin 45^\circ$ . Тогда

$$S_{1-4}^{гл.ф.} = -\frac{4G}{3 \sin 45^\circ} = -\frac{4 \cdot 80}{3 \cdot 0,707} = -150,87 \text{ кН}; \quad S_{3-4} = S_{1-4}^{гл.ф.} = -150,87 \text{ кН (сжат)}.$$

Подсчитаем погрешность определения усилия в стержне 3-4 графическим способом по формуле:

$$\Delta = \left| \frac{S_{3-4}^{аналит.} - S_{3-4}^{граф.}}{S_{3-4}^{аналит.}} \right| \cdot 100\% = \frac{152 - 150,87}{150,87} \cdot 100\% = 0,75\%.$$

Стержень 1-2 относится к третьему типу, т.к. принадлежит одновременно главной ферме и шпренгелю. Однако в исходной шпренгельной ферме можно провести сечение III-III, пересекающее три стержня (рисунок 4.13а). Поэтому усилие в стержне 1-2 можно определить непосредственно из расчета исходной шпренгельной фермы. Рассмотрим равновесие правой отсеченной части фермы и составим уравнение моментов относительно моментной точки 4:

$$\sum m_4 = S_{1-2} \cdot h_{1-2} + G \cdot a - G \cdot a + R_B \cdot 2a = 0;$$

$$h_{1-2} = 6a \cdot \sin \gamma; \quad \text{ctg } \gamma = 4; \quad \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \gamma}} = 0,243;$$

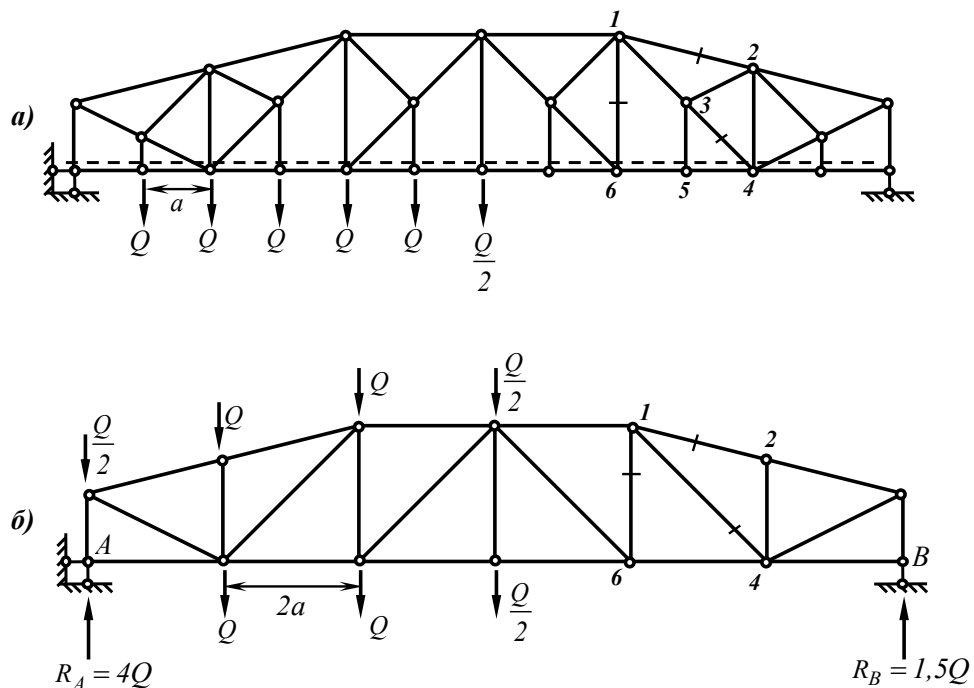
$$S_{1-2} = -\frac{2R_B a}{h_{1-2}} = -\frac{2R_B a}{6a \sin \gamma} = -\frac{5,5G}{3 \sin \gamma} = -\frac{5,5 \cdot 80}{3 \cdot 0,243} = -603,57 \text{ кН (сжат)}.$$

Подсчитаем погрешность определения усилия в стержне 1-2 графическим способом:

$$\Delta = \left| \frac{S_{I-2}^{\text{аналит.}} - S_{I-2}^{\text{граф.}}}{S_{I-2}^{\text{аналит.}}} \right| \cdot 100\% = \frac{608 - 603,57}{603,57} \cdot 100\% = 0,74\%.$$

Таким образом, значения усилий, полученные графическим способом (по диаграмме Максвелла-Кремоны), практически совпадают с результатами аналитического расчета.

4 Графическое определение усилий в стержнях фермы от действия временной нагрузки



- a* – шпренгельная ферма с временной неподвижной нагрузкой;
- б* – главная (основная) ферма с временной нагрузкой, перераспределенной с учетом работы двухъярусных шпренгелей.

Рисунок 4.15



Временную неподвижную нагрузку, приложенную к узлам левой половины грузового пояса шпренгельной фермы (рисунок 4.15а), перераспределим между узлами главной фермы с учетом работы двухъярусных шпренгелей (рисунок 4.15б).

Опорные реакции определим из уравнений моментов действующих сил относительно опорных шарниров:

$$\begin{cases} \sum m_A = 12a \cdot R_B - 2Q \cdot 2a - 2Q \cdot 4a - Q \cdot 6a = 0; \\ \sum m_B = Q \cdot 6a + 2Q \cdot 8a + 2Q \cdot 10a + 0,5Q \cdot 12a - 12a \cdot R_A = 0; \end{cases} \begin{cases} R_B = 1,5Q = 60 \text{ кН}; \\ R_A = 4Q = 160 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для определения усилий, возникающих в стержнях главной фермы и шпренгелей от временной неподвижной нагрузки, строим диаграммы Максвелла-Кремоны (рисунок 4.16). Заметим, что и в этом случае диаграммы построены только для шпренгелей, расположенных на одной (загруженной левой) половине фермы, т.к. очевидно, что усилия в шпренгелях незагруженной правой половины фермы равны нулю.

Определяем по построенной диаграмме усилия в отмеченных стержнях от действия временной неподвижной нагрузки, приложенной на левой половине пролета фермы:

$$S_{1-6} = S_{1-6}^{зл.ф.} = |VIII; IX| = 1,5 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 60 \text{ кН};$$

$$S_{3-4} = S_{1-4}^{зл.ф.} = -|X; IX| = -1,5 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -60 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{1-2}^{зл.ф.} = -|E; X| = -2,1 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -84 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{1-2}^{шпр.} = 0;$$

$$S_{1-2} = S_{1-2}^{зл.ф.} + S_{1-2}^{unp.} = -84 \text{ кН (сжат)}.$$

Найденные значения усилий заносим в таблицу 8.

Определяем усилия в отмеченных стержнях при загрузении неподвижной временной нагрузкой правой половины пролета фермы. Очевидно, что эти усилия будут равны усилиям в симметрично расположенных относительно центральной стойки стержнях левой половины фермы, найденным по построенной диаграмме Максвелла-Кремоны (рисунок 4.16).

Так, усилие в стержне 1-6 при загрузении правой половины пролета фермы будет равно усилию в стержне 7-10 при загрузении левой половины пролета:

$$S_{7-10} = S_{7-10}^{зл.ф.} = |IV; V| = 0,5 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = 20 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне 3-4 при загрузении правой половины пролета фермы найдем как усилие в стержне 7-9 главной фермы при загрузении левой половины пролета:

$$S_{7-9}^{зл.ф.} = -|III; IV| = -0,4 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -16 \text{ кН (сжат)}.$$

Усилие в стержне 1-2 при загрузении правой половины пролета фермы найдем как усилие в стержне 7-8 при загрузении левой половины пролета:

$$S_{7-8}^{зл.ф.} = -|C; III| = -4,8 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -192 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{7-8}^{unp.} = -|C; I| = -0,7 \text{ см} \cdot 40 \frac{\text{кН}}{\text{см}} = -28 \text{ кН (сжат)};$$

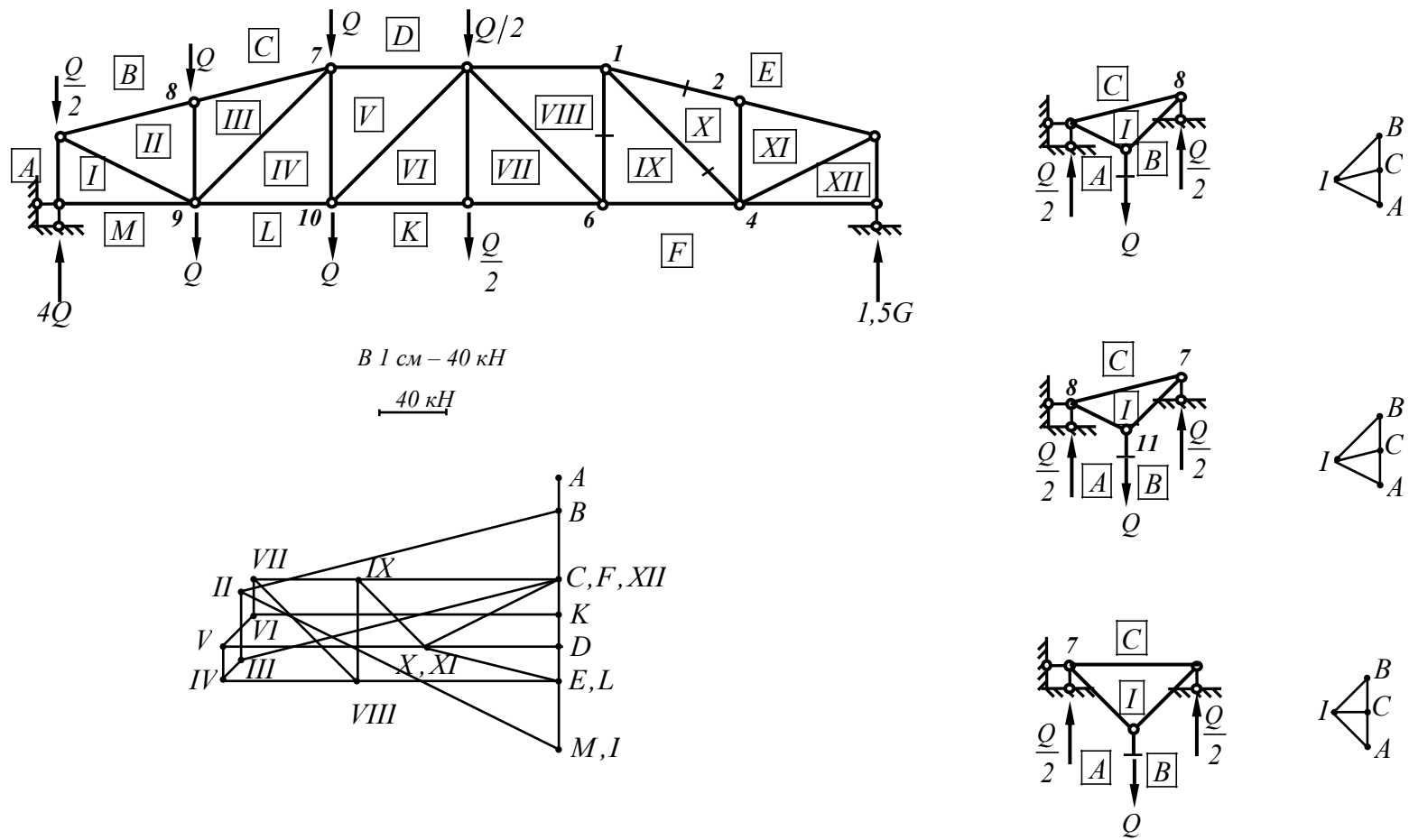


Рисунок 4.16 – Диаграммы Максвелла-Кремоны при действии временной неподвижной нагрузки

$$S_{7-8} = S_{7-8}^{гл.ф.} + S_{7-8}^{шпр.} = -192 - 28 = -220 \text{ кН (сжат)}.$$

Полученные данные заносим в соответствующие ячейки таблицы 8.

Очевидно, что усилия в исследуемых стержнях при загрузении временной неподвижной нагрузкой всего пролета фермы можно найти как алгебраическую сумму усилий, полученных при загрузении отдельно левой и правой половин пролета фермы (таблица 8).

### 5 Построение линий влияния усилий в стержнях фермы

При построении линий влияния усилий будем использовать статический способ. Усилия в рассеченных стержнях направляем от узлов, считая стержни растянутыми.

#### 5.1 Линия влияния усилия $S_{3-4}$

Стержень 3-4 исходной фермы относится к первому типу (принадлежит только главной ферме). Этому стержню соответствует стержень 1-4 главной фермы.

Для построения линии влияния (л.вл.) усилия в стержне 1-4 главной фермы проведем сечение I-I (рисунки 4.17а, б). Усилие в стержне будем определять из уравнения моментов относительно моментной точки D (способ моментной точки). Рассмотрим два положения единичного груза  $\bar{P} = 1$ : слева и справа от проведенного сечения.

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится слева от рассеченной грузовой панели 4-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum m_D^{прав} = 0; -S_{3-4} \cdot h_{3-4} - R_B \cdot 4a = 0.$$

$$S_{3-4} = -\frac{4a}{h_{3-4}} R_B = -\frac{4a}{6a \cdot \sin 45^\circ} R_B = -\frac{2}{\sqrt{2}} R_B = -0,943 R_B;$$

$$\text{л.вл. } S_{3-4} = (-0,943) \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

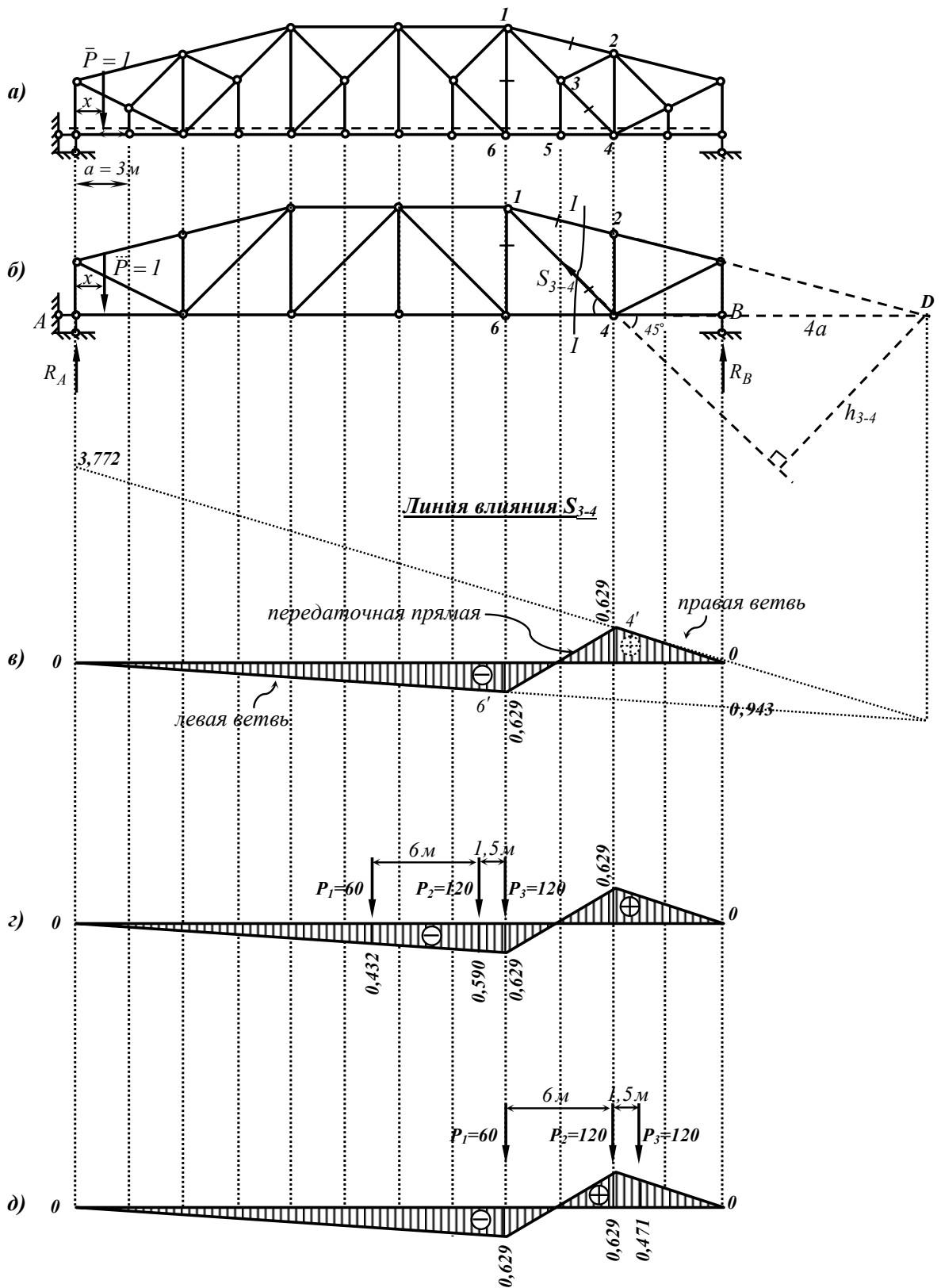


Рисунок 4.17

Линии влияния реакций опор балочных ферм строятся по тем же правилам, что и линии влияния опорных реакций обычной однопролетной балки. Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.17в).

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится справа от рассеченной грузовой панели 4-б. Заметим, что на рисунке 4.17б показано направление усилия  $S_{3-4}$  для правой отсеченной части фермы. Поэтому при рассмотрении равновесия левой отсеченной части фермы направление усилия  $S_{3-4}$  мысленно изменим на противоположное. Тогда, из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum m_D^{лев} = 0; S_{3-4} \cdot h_{3-4} - R_A \cdot 16a = 0;$$

$$S_{3-4} = \frac{16a}{h_{3-4}} R_A = \frac{16a}{6a \cdot \sin 45^\circ} R_A = \frac{8}{\sin 45^\circ} R_A = 3,772 R_A;$$

$$л.вл. S_{1-4} = 3,772 \cdot л.вл. R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния (рисунок 4.17в). Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой  $D$ .

Затем сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки  $b'$  и  $4'$ , расположенные соответственно под узлами  $b$  и  $4$  разрезанной грузовой панели, соединяем передающей прямой. Определяем ординаты характерных точек из подобия треугольников (рисунок 4.17в).

## 5.2 Линия влияния усилия $S_{1-2}$

Стержень 1-2 исходной фермы относится к третьему типу (принадлежит одновременно главной ферме и шпренгелю). Однако для определения усилия в этом стержне можно провести в исходной шпренгельной ферме сечение, пересекающее

три стержня (рисунок 4.18а). Поэтому линию влияния усилия  $S_{1-2}$  можно построить непосредственно из рассмотрения исходной фермы, без выделения главной фермы и шпренгеля.

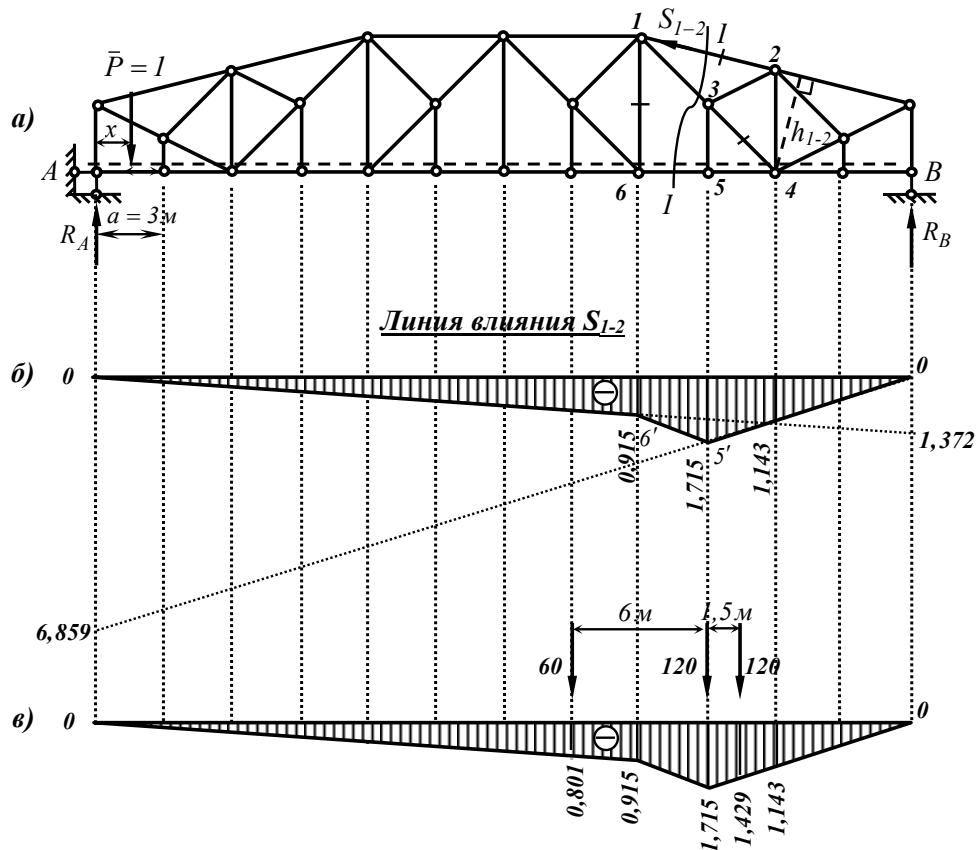


Рисунок 4.18

Для построения линии влияния усилия в стержне  $1-2$  проведем сечение  $I-I$  (рисунок 4.18а). Усилие в стержне будем определять из уравнения моментов относительно моментной точки 4 (способ моментной точки). Рассмотрим два положения единичного груза  $\bar{P} = 1$ : слева и справа от проведенного сечения.

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится слева от рассеченной грузовой панели 5-6. Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum m_4^{прав} = 0; S_{1-2} \cdot h_{1-2} + R_B \cdot 2a = 0;$$

$$S_{1-2} = -\frac{2a}{h_{1-2}} R_B = -\frac{2a}{6a \cdot \sin\gamma} R_B = -\frac{1}{3\sin\gamma} R_B = -1,372 R_B;$$

$$\text{л.вл. } S_{1-2} = (-1,372) \cdot \text{л.вл. } R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.18б).

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится справа от рассеченной грузовой панели 5-6. Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum m_4^{\text{лев}} = 0; -S_{1-2} \cdot h_{1-2} - R_A \cdot 10a = 0;$$

$$S_{1-2} = -\frac{10a}{h_{1-2}} R_A = -\frac{10a}{6a \cdot \sin\gamma} R_A = -\frac{5}{3\sin\gamma} R_A = -6,859 R_A;$$

$$\text{л.вл. } S_{1-2} = (-6,859) \cdot \text{л.вл. } R_A.$$

Используя полученное выражение, строим правую ветвь линии влияния. Заметим, что обе построенные ветви пересекаются под моментной точкой 4.

Затем сносим на левую ветвь левый узел рассеченной грузовой панели, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки  $b'$  и  $5'$ , расположенные соответственно под узлами 6 и 5 разрезанной грузовой панели, соединяем передающей прямой. Определяем ординаты характерных точек из подобия треугольников (рисунок 4.18б).

### 5.3 Линия влияния усилия $S_{1-6}$

Стержень 1-6 исходной фермы принадлежит только главной ферме, поэтому линию влияния усилия в стержне можно построить, рассматривая только главную ферму (рисунок 4.19а).



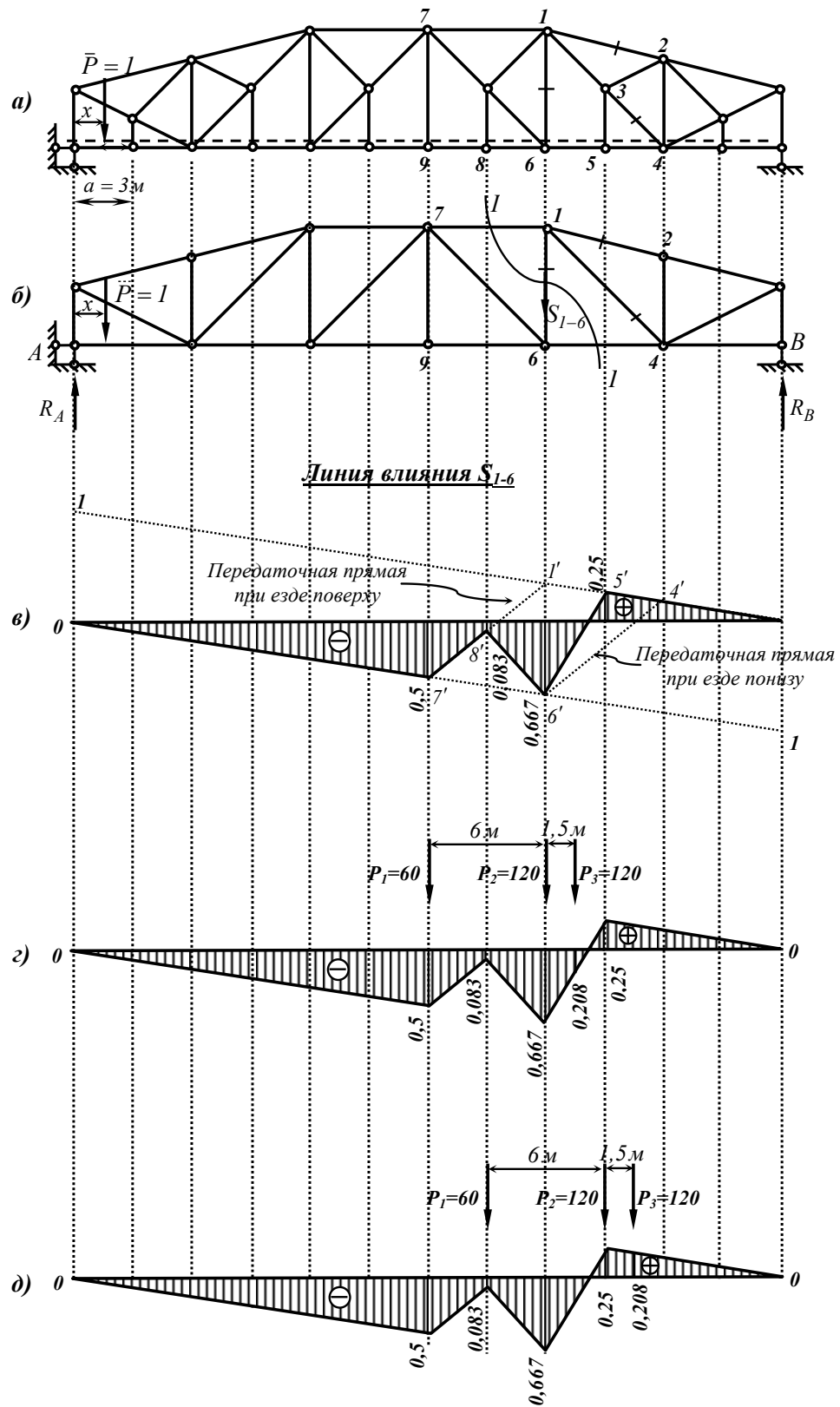


Рисунок 4.19

Для построения линии влияния усилия  $S_{I-6}$  проведем сечение  $I-I$  (рисунок 4.19б). Заметим, что линии влияния при перемещении единичного груза по верхнему и нижнему поясу фермы будут различными, так как проекции перерезанных сечением панелей верхнего и нижнего поясов фермы на горизонтальную прямую не совпадают. Кроме того в исходной ферме установлены двухъярусные шпренгели, передающие нагрузку с одного пояса фермы на другой. Следовательно, стержень  $I-6$  относится к четвертому типу.

Усилие в стержне будем определять из уравнения проекций сил на вертикальную ось (способ проекций). Рассмотрим два положения единичного груза  $\bar{P} = 1$ : слева и справа от проведенного сечения.

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится слева от сечения  $I-I$ . Из равновесия правой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{прав} = 0; R_B - S_{I-6} = 0; S_{I-6} = R_B;$$

$$л.вл. S_{I-6} = л.вл. R_B.$$

Используя полученное выражение, строим левую ветвь линии влияния (рисунок 4.19в).

Единичный груз  $\bar{P} = 1$  находится справа от сечения  $I-I$ . Из равновесия левой отсеченной части фермы имеем:

$$\sum Y^{лев} = 0; S_{I-6} + R_A = 0; S_{I-6} = -R_A;$$

$$л.вл. S_{I-6} = (-1) \cdot л.вл. R_A.$$

Учитываем узловую передачу нагрузки в ферме. Рассматриваем два уровня перемещения груза.

При перемещении единичного груза по верхнему поясу фермы на левую ветвь сносим левый узел рассеченной верхней грузовой панели 7-1, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 7' и 1', расположенные соответственно под узлами 7 и 1 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой при перемещении груза поверху (рисунок 4.19в).

При перемещении единичного груза по нижнему поясу фермы на левую ветвь сносим левый узел рассеченной нижней грузовой панели 6-4, на правую ветвь – правый узел. Полученные на ветвях точки 6' и 4', расположенные соответственно под узлами 6 и 4 разрезанной грузовой панели, соединяем передаточной прямой при перемещении груза понизу (рисунок 4.19в).

Затем учитываем работу двухъярусных шпренгелей в ферме.

Пока единичный груз находится левее узла 9 или правее узла 4, вид линии влияния  $S_{1-6}$  не зависит от того, по какому поясу перемещается единичный груз: построенные линии влияния левее точки 7' и правее 4' совпадают. Если же единичный груз в исходной ферме (рисунок 4.19а) находится между узлами 9 и 4 в работу включаются двухъярусные шпренгели, передающие нагрузку с нижнего пояса фермы на верхний. Руководствуясь этими соображениями, сносим дополнительные узлы двухъярусных шпренгелей 8 и 5 на линию влияния, соответствующую перемещению поверху (точки 8' и 5' на линии влияния). Основной узел главной фермы 6 сносим на линию влияния, соответствующую перемещению по грузовому нижнему поясу (точка 6' на линии влияния).

Иначе говоря, при построении линий влияния для стержней четвертой категории *основные узлы перерезанных панелей главной фермы сносят на линию влияния при движении по основному грузовому поясу, а дополнительные узлы шпренгелей – на линию влияния, соответствующую перемещению по другому (противоположному) поясу.*

Соединяя отмеченные точки передаточными прямыми и определив ординаты характерных точек, получим окончательную линию влияния усилия  $S_{1-6}$  (рисунок 4.19в).

### 5 Определение усилий в стержнях фермы от временной подвижной нагрузки

Определим по построенным линиям влияния наибольшие сжимающие и наибольшие растягивающие усилия, которые могут возникать в стержнях от заданной временной подвижной нагрузки (системы жестко связанных грузов  $P_1 = 60\text{кН}$ ,  $P_2 = 120\text{кН}$  и  $P_3 = 120\text{кН}$ ).

Линия влияния усилия  $S_{3-4}$  имеет отрицательный и положительный участки треугольного вида (рисунок 4.17в). Найдем наибольшее сжимающее усилие  $S_{3-4}^{min}$ , возникающее в стержне, от заданной временной подвижной нагрузки. Для определения критического груза воспользуемся неравенствами (4.3).

Пусть  $P_{кр} = P_3 = 120\text{кН}$ . Тогда  $P_{лев} = P_1 + P_2 = 60 + 120 = 180\text{кН}$ ,  $P_{прав} = 0$ . Расстояния от вершины отрицательного участка линии влияния до нулевых точек слева и справа соответственно равны  $a = 24\text{м}$ ,  $b = 3\text{м}$  (рисунок 4.17г). Проверяем выполнение неравенств (4.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(P_{лев} + P_{кр})}{a} \geq \frac{P_{прав}}{b}; \\ \frac{P_{лев}}{a} \leq \frac{(P_{кр} + P_{прав})}{b}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{180 + 120}{24} \geq 0; \\ \frac{180}{24} \leq \frac{120 + 0}{3}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 12,5 \geq 0; \\ 7,5 \leq 40. \end{array} \right.$$

Оба неравенства выполняются, следовательно, критический груз  $P_{кр} = P_3$ .

Так как критический груз может быть не один, проверяем следующий груз  $P_2$ . Пусть  $P_{кр} = P_2 = 120\text{кН}$ ,  $P_{лев} = P_1 = 60\text{кН}$ ,  $P_{прав} = P_3 = 120\text{кН}$ . Проверяем выполнение неравенств (4.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(P_{лев} + P_{кр})}{a} \geq \frac{P_{прав}}{b}; \\ \frac{P_{лев}}{a} \leq \frac{(P_{кр} + P_{прав})}{b}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{60 + 120}{24} \geq \frac{120}{3}; \\ \frac{60}{24} \leq \frac{120 + 120}{3}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 7,5 \geq 40; \\ 2,5 \leq 80. \end{array} \right.$$

Первое из неравенств не выполняется, следовательно, груз  $P_2$  не может быть критическим. Таким образом, мы выяснили, что при нахождении груза  $P_3$  над вершиной отрицательного участка линии влияния усилие  $S_{3-4}$  принимает экстремальное значение (рисунок 4.17з). Определив ординаты линии влияния в точках расположения грузов  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , по формуле (4.2) найдем наибольшее сжимающее усилие, возникающее в стержне 3-4:

$$S_{3-4}^{min} = \sum P_i y_i = -(60 \cdot 0,432 + 120 \cdot 0,590 + 120 \cdot 0,629) = -172,2 \text{ кН}.$$

Найдем наибольшее растягивающее усилие  $S_{3-4}^{max}$ , возникающее в стержне от заданной временной подвижной нагрузки. Так как положительный участок имеет небольшую длину, то при расположении одного из грузов над вершиной положительного участка остальные грузы могут либо оказаться на отрицательном участке линии влияния, либо выйти за пределы пролета фермы. В этом случае пользоваться неравенствами (4.3) нельзя. Задачу нахождения опасного положения подвижной нагрузки решаем, поочередно располагая грузы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , над вершиной положительного участка и подсчитывая значение усилия в стержне по формуле (4.2). Найденное опасное расположение подвижной нагрузки показано на рисунке 4.17д. Наибольшее растягивающее усилие, возникающее в стержне, будет равно:

$$S_{3-4}^{max} = \sum P_i y_i = -60 \cdot 0,629 + 120 \cdot 0,629 + 120 \cdot 0,471 = 94,3 \text{ кН}.$$

Аналогично, определяем опасное положение подвижной временной нагрузки на линиях влияния остальных стержней.

Наибольшее сжимающее усилие в стержне 1-2 (рисунок 4.18в):

$$S_{1-2}^{min} = \sum P_i y_i = -(60 \cdot 0,801 + 120 \cdot 1,715 + 120 \cdot 1,429) = -425,3 \text{ кН}.$$

Линия влияния усилия  $S_{1-2}$  имеет только отрицательный знак, растягивающее усилие в стержне 1-2 от заданной подвижной нагрузки возникнуть не может.

Наибольшее сжимающее усилие в стержне 1-6 (рисунок 4.19з):

$$S_{1-6}^{min} = \sum P_i y_i = -(60 \cdot 0,5 + 120 \cdot 0,667 + 120 \cdot 0,208) = -135 \text{ кН}.$$

Наибольшее растягивающее усилие в стержне 1-6 (рисунок 4.19д):

$$S_{1-6}^{max} = \sum P_i y_i = -60 \cdot 0,083 + 120 \cdot 0,25 + 120 \cdot 0,208 = 50 \text{ кН}.$$

Найденные значения заносим в соответствующие ячейки таблицы 8.

### 7 Определение расчетных усилий в стержнях от различных сочетаний нагрузок

По данным таблицы 8 определяем наибольшие растягивающие  $S_{max}$  и наибольшие сжимающие  $S_{min}$  усилия в исследуемых стержнях от сочетаний постоянной и двух временных нагрузок (неподвижной и подвижной).

Таблица 8 – Таблица расчетных усилий

Стержни	Усилия от нагрузки, кН						Расчетные усилия, кН	
	постоянная	Временная неподвижная			Временная подвижная		$S_{max}$ «+»	$S_{min}$ «-»
		на левой половине пролета	на правой половине пролета	на всем пролете	«+»	«-»		
1-2	-608	-84	-220	-304	-	-425,3	-	-1337,3
1-6	160	60	20	80	50	-135	290	-
3-4	-152	-60	-16	-76	94,3	-172,2	-	-400,2

*Примечание* – Прочерк в ячейках расчетных усилий означает, что при любых сочетаниях постоянной и временных нагрузок усилие такого знака в стержне не возникает.

## 8 Подбор поперечного сечения стержня 1-6 из условия прочности

Из курса сопротивления материалов известно, что требуемая из условия прочности при растяжении (сжатии) площадь поперечного сечения стержня определяется соотношением:

$$A^{треб} \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}},$$

где  $N_{max}$  – максимальное (по абсолютной величине) значение продольной силы в стержне;

$\sigma_{adm}$  – допускаемое нормальное напряжение для материала стержня.

По данным таблицы 8 для стержня 1-6 максимальное значение продольной силы  $N_{max} = 290 \text{ кН}$ . Тогда требуемая площадь поперечного сечения стержня равна:

$$A^{треб} \geq \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{290 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,8125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 18,125 \text{ см}^2.$$

Принимаем поперечное сечение стержня из двух спаренных равнополочных уголков 80/6 по ГОСТ 8509-93 общей площадью  $A = 2 \cdot 9,38 = 18,76 \text{ см}^2$ .

## 5 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

1 Дарков, А.В. Строительная механика : учеб. / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2010. – 656 с.

2 Саргсян А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций : учеб. для вузов / А.Е. Саргсян. – М.: Высшая школа, 2004. – 462 с.

3 Кривошапко, С.Н. Строительная механика: лекции, семинары, расчетно-графические работы: учеб. пособие для бакалавров / С.Н. Кривошапко. – М.: Изд-во Юрайт, 2011. – 391 с.

4 Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах: в 2 ч. / Н.Н. Анохин. – М.: АСВ, 2007. – Ч.1. – 335 с.

5 Кудина, Л.И. Определение усилий в стержнях плоских ферм: методические указания/ Л.И. Кудина. – Оренбург: ОГУ, 2013. - 43 с.