Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

Е. М. Крипак

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СОЛОУ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATHCAD

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.04 Прикладная математика, 38.03.05 Бизнес-информатика, 38.04.01 Экономика

Оренбург

2019

УДК 33.7:519.86
ББК 65.292+65.290-2
К 82

Рецензент – кандидат экономических наук, доцент О. Н. Яркова

Крипак Е. М.
К 82 Моделирование экономического роста на основе модели Солоу с помощью пакета Mathcad: методические указания / Е. М. Крипак; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 26 с.

Методические указания к лабораторному практикуму, семинарским занятиям и самостоятельной работе предназначены для освоения обучающимися моделей экономического роста при изучении дисциплин «Математическое моделирование» направлений подготовки 01.03.04 Прикладная математика и 38.03.05 Бизнес-информатика; «Моделирование в бизнес системах» направления 38.04.01 Экономика, а также могут быть рекомендованы обучающимся других направлений для исследования экономического роста.

УДК 33.7:519.86
ББК 65.292+65.290-2

Содержание

Введение

Рассматривая проблему экономического роста, можно выделить несколько периодов развития его теоретической основы и практических особенностей: докейнсианский период, кейнсианская и неокейнсианская теории.

Проблему экономического роста изучали представители меркантилизма (приток в страну полновесной иностранной монеты и недопущение вывоза ее из страны, поддержка экспортно-ориентированных отраслей) и классической школы, которые составили докейнсианский период развития проблемы экономического роста.

А. Смит в работе «Исследование о природе и причинах богатства народов» (1776 г.) связывал рост богатства народа с улучшением отдачи от факторов производства – земли, труда и капитала. Т. Мальтус рассматривал проблему экономического роста через призму роста населения. Д. Рикардо развил идею Мальтуса об убывающем плодородии почвы, однако причиной экономического роста считал технологический прогресс. К. Маркс рассматривал прибыль как определяющий фактор сбережений и накопления капитала, однако в отличие от Смита Маркс предполагал, что уменьшение коэффициента прибыли не приводит к стабильному состоянию, но является стимулом для капиталистов больше сокращать заработную плату рабочим и увеличивать безработицу.

Важный вклад в развитие теории экономического роста внес Й.А. Шумпетер («Теория экономического развития», 1939 г.), который является основоположником понятия «инновации» в экономической науке. Дж. Нейман наряду с представителями классической школы рассматривал «избыток» как важный фактор роста, объектом его анализа являлись падающие коэффициенты прибыли. Ключевым фактором в теории устойчивого роста Дж. Неймана является рост инвестиций в процессе развития общества.

Представителями кейнсианской теории экономического роста являются Дж. Кейнс, Р. Харрод, Е. Домар, Дж. Робинсон, Н. Калдор, Л. Пазинетти. Основой кейнсианской теории роста стала работа Дж. Кейнса «Общая теория занятости, процента и денег». Главным фактором кейнсианской модели является эффективный спрос. Значение уделяется балансу сбережений и инвестиций, так как разница между сбережениями и инвестициями, по мнению Кейнса, ведет к нарушению макроэкономического равновесия.

Кейнсианская теория экономического роста разрабатывалась в период депрессивной экономики, последователи неокейнсианства расширили подход Кейнса в сторону большего универсализма. Р. Харрод в работах «Торговый цикл», «К теории экономической динамики» и Е. Домар в статьях 1946-1947 гг. одновременно и независимо друг от друга рассматривали проблему гарантированного роста. Э. Хансен дополнил теории Харрода и Домара. Исходным для Э. Хансена является фактор автономных инвестиций, вызванных влиянием НТП. Прирост инвестиций порождает рост доходов, в свою очередь, реинвестированная в производство прибыль ведет к росту инвестиций. Хансен использует понятия акселератора и мультипликатора, совместное действие которых представляет собой систему «сверхмультипликатора».

Ключевым элементом неоклассической модели экономического роста Солоу является накопление капитала, которое, в свою очередь, характеризуется нормой выбытия капитала. По мнению Солоу, для того чтобы экономика находилась в устойчивом состоянии, капитал должен возрастать с темпом не ниже суммы темпов амортизации, роста населения и технологического прогресса.

В настоящее время проблема экономического роста и повышения уровня жизни населения приобретает особую актуальность.

1 Краткие теоретические сведения

Модель Солоу является односекторной моделью экономического роста. В этой модели экономическая система рассматривается как единое целое, производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Модель достаточно адекватно отражает важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства. Экспорт – импорт в явном виде не учитывается.

Состояние экономики в модели Солоу задается следующими пятью эндогенными переменными:

L – число занятых;

K – основные производственные фонды (ОПФ) или капитал;

X – валовой внутренний продукт (ВВП);

I – инвестиции;

C – фонд непроизводственного потребления.

Кроме того, в модели используются следующие экзогенные (заданные вне системы) показатели:

ν – годовой темп прироста числа занятых, $-1 < \nu < 1$;

μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, $0 < \mu < 1$;

ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте), $0 < \rho < 1$.

Предполагается, что эндогенные переменные изменяются во времени (аргумент t опущен, но присутствует по умолчанию). Экзогенные показатели считаются постоянными во времени, причем норма накопления является управляющим параметром, то есть в начальный момент времени может устанавливаться управляющим органом системы на любом уровне из области допустимых значений.

Допущения модели Солоу формулируются следующим образом:

1) показатели ρ, μ, ν считаются постоянными;
2) инвестиционные лаги отсутствуют;

3) производственная функция имеет постоянную отдачу от масштаба производства;
4) ρ может устанавливаться управляющим органом системы на любом допустимом уровне в начальный момент времени.

Время t считается непрерывным и измеряется в годах. Для мгновенных показателей L=L(t), K=K(t) это представляется совершенно естественным, поскольку, в принципе, в любой день можно установить число занятых и путем инвентаризации определить объем основных производственных фондов. Значения показателей типа потока X=X(t), I=I(t), C=C(t) в момент t=[t] +{t} определяются в виде накопленных за год, начинающихся на {t} дней позже 1 января года [t].

Рассмотрим, как меняются ресурсные показатели за небольшой промежуток времени Δt. Согласно определению темпа прироста:

$$\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t \text{, или } \frac{dL}{dt} = \nu L.$$

Поэтому

$$\ln L = \nu t + \ln A,$$

$$L = Ae^{\nu t}.$$

Используя начальное условие $L(0)=L_0$, получаем уравнение динамики трудовых ресурсов (1):

$$L = L_0 e^{\nu t}. \qquad (1)$$

Рассмотрим динамику ОПФ. Износ и инвестиции в расчете за год равны $\mu K \Delta t$ и $I\Delta t$, поэтому прирост фондов за это время:

$$\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение (2), определяющее динамику ОПФ:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \\ K(0) = K_0. \end{cases} \quad (2)$$

Предполагается, что годовой выпуск в каждый момент времени определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией (3):

$$X = F(K, L). \quad (3)$$

Инвестиции и фонд потребления следующим образом выражаются через ВВП:

$$I = \rho X, \quad (4)$$

$$C = (1 - \rho)X. \quad (5)$$

Итак, получаем следующую запись модели Солоу в абсолютных показателях (6):

$$\begin{aligned} & L = L_0 e^{\nu t}; \\ & \begin{cases} \frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \\ K(0) = K_0 \end{cases} \\ & X = F(K, L); \\ & I = \rho X; \\ & C = (1 - \rho)X. \end{aligned} \quad (6)$$

Схема функционирования экономики согласно модели Солоу приведена на рисунке 1.

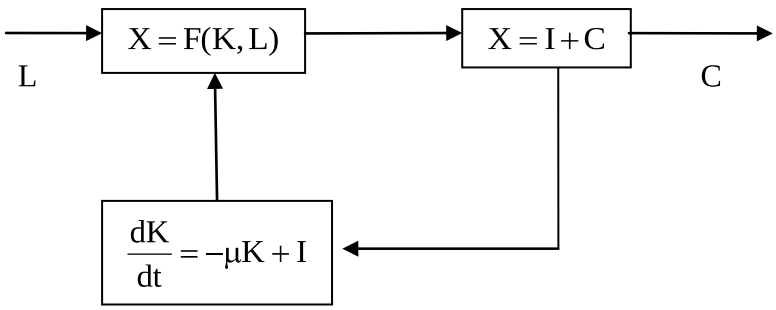

Рисунок 1 – Структурная схема модели Солоу

Видно, что входом в систему служит число занятых L, выходом – фонд потребления C, поэтому эта система односвязная. В структуре системы имеется контур обратной связи, который образуется из нелинейного статического элемента X=F(K,L), распределительного линейного статического звена X=I+C и инерционного звена. Поскольку в системе имеется нелинейный элемент X=F(K,L), то система – нелинейная.

Для анализа модели перейдем от абсолютных показателей к относительным:

$$k = \frac{K}{L};$$
$$x = \frac{X}{L};$$
$$i = \frac{I}{L};$$
$$c = \frac{C}{L},$$

где k – капиталовооруженность (фондовооруженность);

x – народнохозяйственная производительность труда;

i – удельные инвестиции;

c – среднедушевое потребление.

Запишем модель в относительных показателях.

Поскольку

$$x = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L},1) = f(k);$$
$$i = \rho x;$$
$$c = (1-\rho)x;$$
$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = \nu Lk + L\frac{dk}{dt},$$

то запись модели Солоу в относительных показателях приобретает вид (7):

$$\begin{aligned}
&\lambda = \mu + \nu; \\
&\begin{cases} \dfrac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \\ k(0) = k_0 \end{cases} \\
&x = f(k); \\
&i = \rho f(k); \\
&c = (1-\rho) f(k).
\end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, каждый абсолютный или относительный показатель изменяется во времени, то есть можно говорить о траектории системы в абсолютных или относительных показателях.

Траектория называется стационарной, если показатели не изменяются во времени: $k = k^0 = \text{const},\ x = x^0 = \text{const},\ I = I^0 = \text{const},\ c = c^0 = \text{const}.$

Как видно из формул (7), установление капиталовооруженности на постоянном уровне k^e приводит к выходу на стационарную траекторию. На стационарной траектории выполняется условие:

$$\frac{dk^e}{dt} = 0\,.$$

Поэтому получаем алгебраическое уравнение для определения стационарного уровня:

$$-\lambda k^e + \rho f(k^e) = 0, \tag{8}$$

или

$$\lambda k^e = \rho f(k^e). \tag{8'}$$

Поскольку функция F(K,L) – неоклассическая, то $f(0) = 0, f' > 0, f'' < 0.$

Если еще задано условие $\rho f'(0) > \lambda,$ то уравнение (8) будет иметь единственное ненулевое решение.

Определим дополнительно из условия (9) координаты точки перегиба (10):

$$\frac{d^2k}{dt^2} = 0 \tag{9}$$

$$\tilde{k} : \rho f'(\tilde{k}) = \lambda. \qquad (10)$$

Исследуем переходный режим в модели Солоу. В системе могут наблюдаться следующие типы переходного процесса:

$k_0 < \tilde{k}$ – вначале имеет место ускоренный рост капиталовооруженности, который по достижению значений k^e сменяется замедленным ростом;

$\tilde{k} < k_0 < k^e$ – наблюдается замедленный рост капиталовооруженности;

$k_0 > k^e$ – замедляющееся падение капиталовооруженности («проедание» фондов).

Более детально исследуем переходный процесс в том случае, когда производственная функция является функцией Кобба-Дугласа (11):

$$X = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}. \qquad (11)$$

Тогда $x = \dfrac{X}{L} = A \cdot K^{\alpha}L^{-\alpha} = Ak^{\alpha}$.

Уравнение динамики капиталовооруженности принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha}; \\ k(0) = k_0. \end{cases}$$

Стационарное решение найдем из условия:

$$k^e : \frac{dk}{dt} = 0.$$

$$-\lambda k + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha} = 0;$$

$$-\lambda + \rho \cdot A \cdot k^{\alpha-1} = 0;$$

$$k^{\alpha-1} = \frac{\lambda}{\rho \cdot A};$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot A}{\lambda};$$

$$k^e = \left(\frac{\rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Солоу показал, что 80 % экономического роста определяется величиной α-эластичностью выпуска по капиталу. Влияние остальных параметров составляет не более 20 % в совокупности.

Определим координаты точки перегиба, которая задает характер траектории роста:

$$\tilde{k}: \frac{d^2k}{dt^2} = 0;$$

$$-\lambda + \alpha \cdot \rho \cdot A \cdot k^{\alpha-1} = 0;$$
$$k^{\alpha-1} = \frac{\lambda}{\alpha \cdot \rho \cdot A};$$
$$k^{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda};$$
$$\tilde{k} = \left(\frac{\alpha \cdot \rho \cdot A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Видно, что на значение $\tilde{k}$ оказывают влияние те же параметры, но эластичность выпуска по капиталу еще в большей мере.

Аналогичные результаты можно получить, если найти аналитическое решение задачи. Сделав замену $k = e^{-vt}u, u = e^{vt}k$, получаем для u уравнение с разделяющимися переменными (12), которое имеет решение (13):

$$\begin{cases} \frac{du}{u^{\alpha}} = \rho A e^{(1-\alpha)\lambda t} dt \\ u(0) = k_0 \end{cases}, \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{du}{u^{\alpha}} = \int \rho A e^{(1-\alpha)\lambda t} dt; \\
&\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\rho A e^{(1-\alpha)\lambda t}}{(1-\alpha)\lambda} + c; \\
&u^{1-\alpha} = \frac{\rho A}{\lambda} e^{(1-\alpha)\lambda t} + c; \\
&u = \left(\frac{\rho A}{\lambda} e^{(1-\alpha)\lambda t} + c\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \\
&k_0 = u(0) = \left(\frac{\rho A}{\lambda} + c\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow c = k_0^{(1-\alpha)} - \frac{\rho A}{\lambda}; \\
&u(t) = \left(\frac{\rho A}{\lambda} e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned} \qquad (13)$$

или с использованием значения стационарной капиталовооруженности:

$$u(t) = ((k^e)^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{1-\alpha} - (k^e)^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Возвращаясь к капиталовооруженности, получаем:

$$k(t) = ((k^e)^{1-\alpha} + (k_0^{1-\alpha} - (k^e)^{1-\alpha})e^{-(1-\alpha)\lambda t})^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Откуда видно, что $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = k^e$.

Солоу предложил «золотое правило накопления», суть которого состоит в том, что надлежащим выбором нормы накопления можно максимизировать среднедушевое потребление в стационарном режиме, а, следовательно, и через относительно непродолжительное время после начала переходного процесса.

В самом деле, среднедушевое потребление (14) целиком определяется функцией $g(\rho)$ (рисунок 2):

$$c^e(\rho) = (1-\rho)A(k^e)^\alpha = (1-\rho)A(\frac{\rho A}{\lambda})^{\frac{1}{1-\alpha}} = B(g(\rho))^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad (14)$$

где $B = (\frac{A}{\lambda^\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g(\rho) = \rho^\alpha (1-\rho)^{1-\alpha}.$

Имеем, что $\frac{dg}{d\rho} = (\frac{\rho}{1-\rho})^\alpha \frac{\alpha-\rho}{\rho}$. Поэтому:

1) $\frac{dc^E}{d\rho} > 0, \text{ при } \rho < \alpha;$

2) $\frac{dc^E}{d\rho} < 0, \text{ при } \rho > \alpha.$

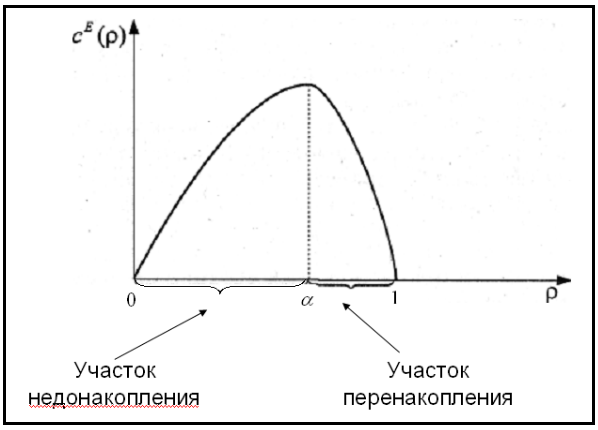

Рисунок 2 – Удельное потребление как функция нормы накопления

Таким образом, наибольшее среднедушевое потребление при $\rho^* = \alpha$, то есть норма накопления должна быть равна эластичности выпуска по фондам. На практике норма накопления всегда меньше своего оптимального значения ($\rho < \alpha$), то есть имеет место недонакопление.

2 Описание лабораторной работы

В лабораторной работе «Моделирование экономического роста на основе модели Солоу с помощью пакета Mathcad» объектом исследования является экономика страны, которая выступает в неструктурированном виде.

Цель лабораторной работы – приобретение навыков построения и исследования моделей экономического роста.

Выполнение лабораторной работы включает следующие этапы:

1) изучение теоретического материала по тематике работы;
2) постановку задачи и построение математической модели;
3) исследование модели с помощью пакетов прикладных программ (Mathcad или Excel);
4) подготовку письменного отчета;
5) защиту лабораторной работы.

3 Постановка задачи

Провести исследование экономического роста на основе базовой модели Солоу для заданной производственной функции страны и экзогенных параметров. Требуется:

1) Найти аналитическое решение дифференциального уравнения, описывающего динамику капиталовооруженности.

2) Определить стационарный уровень капиталовооруженности k^e и значение точки перегиба $\tilde{k}$.

3) Определить при каких предположениях относительно начальных состояний системы будет наблюдаться:

а) ускоренный экономический рост;

б) замедляющийся экономический рост;

в) экономический спад.

Построить соответствующие траектории на основе аналитического решения.

4) Определить, как влияет изменение α на экономический рост (увеличить α на 10%).

5) Исследовать экономический рост при изменении нормы накопления ($\rho > \alpha,\ \rho < \alpha$).

6) Определить, как влияет изменение λ и А на экономический рост (увеличить и уменьшить λ и А на 10%).

7) Предложить оптимальный вариант развития экономической системы.

Пример 0 варианта задания

Исходные данные для 0 варианта индивидуального задания представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные для индивидуального задания

№	Производственная функция F(K, L)	μ	ν
0	$5K^{1/3}L^{2/3}$	0,1	0,03

4 Порядок выполнения работы

Для решения поставленных задач известен вид производственной функции – $F(K,L) = 5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ и следующие экзогенные показатели:

1) доля выбывших за год основных производственных фондов μ=0,1;

2) годовой темп прироста числа занятых $\nu = 0{,}03$.

Установим норму накопления ρ=0,2 (так как значение определяется самостоятельно).

Перейдем к построению и исследованию модели экономического роста с использованием ППП Mathcad.

1. Определим стационарный уровень капиталовооруженности k^e. Для этого введем в рассмотрение величину $\lambda = \mu + \nu = 0{,}1 + 0{,}03 = 0{,}13.$

Далее определим народнохозяйственную производительность труда (15):

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}}{L} = 5k^{\frac{1}{3}}. \tag{15}$$

Установление капиталовооруженности на постоянном уровне k^e приводит к выходу на стационарную траекторию. На стационарной траектории $\frac{dk^e}{dt} = 0,$ поэтому $-\lambda k^e + \rho f(k^e) = 0$ или $\lambda k^e = \rho f(k^e).$

Подставляя исходные значения, получаем, что $-0{,}13k^e + 0{,}2 \cdot 5(k^e)^{\frac{1}{3}} = 0$ или $-0{,}13k^e + (k^e)^{\frac{1}{3}} = 0$, откуда находим, что k^e =21,3.

Далее определим точку перегиба $\tilde{k}$. Эта точка находится из уравнения $\frac{d^2k}{dt^2} = 0.$

В данном случае получаем, что $-0{,}13 + \frac{1}{3}k^{-\frac{2}{3}} = 0$ или $\frac{1}{3}k^{-\frac{2}{3}} = 0{,}13$, откуда следует, что $\tilde{k} = 4{,}2$.

Тогда при $k_0 < 4{,}2$ будет наблюдаться ускоренный рост, при $4{,}2 < k_0 < 21{,}3$ – замедляющийся рост, а при $k_0 > 21{,}3$ – экономический спад.

Построим траектории капиталовооруженности на основе аналитического решения, соответствующие значению k_0, равному 1, 10 и 25 соответственно. Результат представлен на рисунке 3.

На рисунке 3 показаны все 3 типа сходимости капиталовооруженности к стационарному значению k^e (соответственно кривые k1-k3).

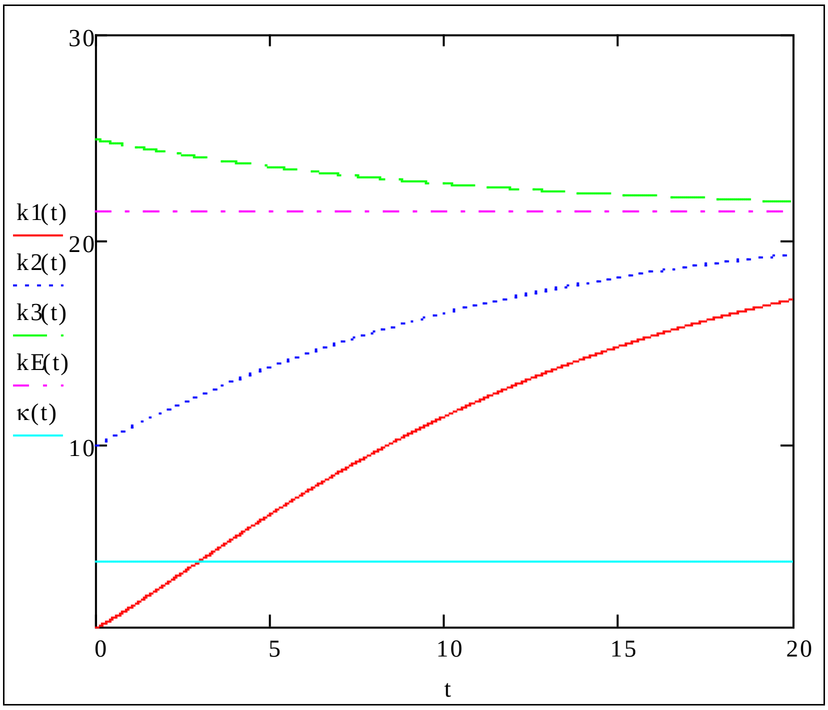

Рисунок 3 – Траектории капиталовооруженности

Заметим, что при $\tilde{k} < k_0 < k^e$ имеет место достаточно короткий переходный процесс, т. е. практически через относительно небольшой промежуток времени текущее и стационарное значение показателя будут мало отличаться.

2. Определим, как влияет изменение α на экономический рост.

Проведем исследование функции при увеличении α на 10%. Для этого проведем аналогичные рассуждения, определив сначала стационарный уровень капиталовооруженности k^e.

Народнохозяйственная производительность труда в данном случае будет составлять (16):

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{5K^{0.36}L^{0.64}}{L} = 5k^{0.36}. \tag{16}$$

Аналогично, используя уравнение $-\lambda k^e + \rho f(k^e) = 0$, получаем, что $-0{,}13k^e + 0{,}2 \cdot 5(k^e)^{0.36} = 0$ или $-0{,}13k^e + (k^e)^{0.36} = 0$, откуда находим, что k^e=25. То есть уровень капиталовооруженности достигнет значения 25.

Далее определим точку перегиба $\tilde{k}$. Эта точка отвечает уравнению $\frac{d^2k}{dt^2} = 0.$ Получаем, что $-0{,}13 + 0.36k^{-0.64} = 0$ или $0.36k^{-0.64} = 0{,}13$, откуда следует, что $\tilde{k}$ =5.

Тогда при $k_0 < 5$ будет наблюдаться ускоренный рост, при $5 < k_0 < 25$ – замедляющийся рост, а при $k_0 > 25$ – экономический спад.

Таким образом, замечаем, что при увеличении α на 10% наблюдается более высокий уровень ускоренного роста.

Проведем исследование функции при фиксированном значении $\alpha = 0.5$.

Народнохозяйственная производительность труда будет составлять (17):

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{5K^{0.5}L^{0.5}}{L} = 5k^{0.5}. \qquad (17)$$

Аналогично приходим к уравнению: $-0{,}13k^e + 0{,}2 \cdot 5(k^e)^{0.5} = 0$ или $-0{,}13k^e + (k^e)^{0.5} = 0$, откуда получаем, что стационарный уровень капиталовооруженности k^e =59,2.

Далее определим точку перегиба $\tilde{k}$. В данном случае получаем, что $-0{,}13 + 0.5 \cdot k^{-0.5} = 0$ или $0.5k^{-0.5} = 0{,}13$, откуда следует, что $\tilde{k} = 14{,}8$.

Таким образом, при $k_0 < 14{,}8$ будет наблюдаться ускоренный рост, при $14{,}8 < k_0 < 59{,}2$ – замедляющийся рост, а при $k_0 > 59{,}2$ – экономический спад.

Получаем, что при α=0,5 наблюдается еще более высокое значение для этапа ускоренного роста. Сравнивая исходные значения стационарного уровня капиталовооруженности и точки перегиба и полученные при α=0,5, замечаем, что при увеличении α наблюдается увеличение значений k^e и $\tilde{k}$ в несколько раз. Следовательно, α оказывает значимое влияние на экономический рост.

3. Определим, как влияет изменение λ и A на экономический рост (увеличим и уменьшим λ и A на 10%).

Проведем аналогичное исследование функции при увеличении λ и A на 10%. В данном случае величина $\lambda = 0{,}14$.

Сначала определим стационарный уровень капиталовооруженности k^e.

Народнохозяйственная производительность труда составит (18):

$$f(k)=\frac{F(K,L)}{L}=\frac{5{,}5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}}{L}=5{,}5k^{\frac{1}{3}}. \qquad (18)$$

Далее получаем, что $-0{,}14k^e+0{,}2\cdot 5{,}5(k^e)^{\frac{1}{3}}=0$ или $-0{,}14k^e+1{,}1(k^e)^{\frac{1}{3}}=0$, откуда находим, что k^e =22,1.

На следующем шаге определим точку перегиба $\tilde{k}$. В данном случае $-0{,}14+1{,}1\cdot\frac{1}{3}\cdot k^{-\frac{2}{3}}=0$ или $0{,}33k^{-\frac{2}{3}}=0{,}14$, откуда получаем, что $\tilde{k}=3{,}7$.

Значит, при $k_0<3{,}7$ будет наблюдаться ускоренный рост, при $3{,}7<k_0<22{,}1$ – замедляющийся рост, а при $k_0>22{,}1$ – экономический спад.

Таким образом, при увеличении λ и A на 10% наблюдается увеличение значения стационарного уровня капиталовооруженности k^e и уменьшение значения точки перегиба $\tilde{k}$, а, следовательно, и более короткий участок ускоренного роста.

Построим траектории капиталовооруженности на основе аналитического решения, соответствующие исходным и увеличенным на 10% λ и A. Результат представлен на рисунке 4.

Проведем исследование функции при уменьшении λ и A на 10%. В данном случае величина $\lambda=0{,}12$.

По аналогии сначала определим стационарный уровень капиталовооруженности k^e.

Народнохозяйственная производительность труда составит:

$$f(k)=\frac{F(K,L)}{L}=\frac{4{,}5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}}{L}=4{,}5k^{\frac{1}{3}}. \qquad (19)$$

Из уравнения $-0{,}12k^e+0{,}2\cdot 4{,}5(k^e)^{\frac{1}{3}}=0$ или $-0{,}12k^e+0{,}9(k^e)^{\frac{1}{3}}=0$ находим, что k^e =21,3.

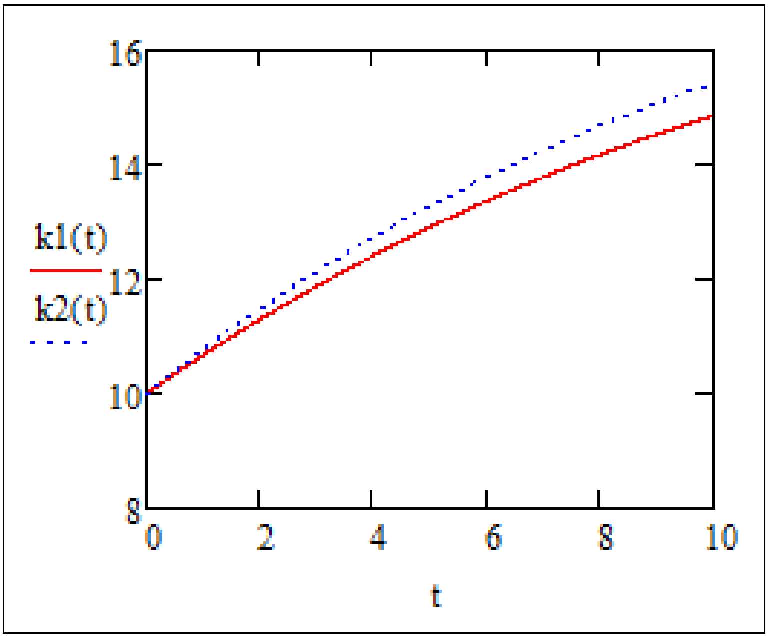

Рисунок 4 – Траектории капиталовооруженности

Далее определим точку перегиба $\tilde{k}$. В данном случае $-0{,}12+0{,}9\cdot\frac{1}{3}\cdot k^{-\frac{2}{3}}=0$ или $0{,}27k^{-\frac{2}{3}}=0{,}12$, откуда получаем, что $\tilde{k}=3{,}43$.

Значит, при $k_0<3{,}43$ будет наблюдаться ускоренный рост, при $3{,}43<k_0<21{,}3$ – замедляющийся рост, а при $k_0>21{,}3$ – экономический спад.

Таким образом, получаем, что при уменьшении λ и A на 10% не наблюдается больших расхождений между значениями стационарного уровня капиталовооруженности k^e, а значение точки перегиба $\tilde{k}$ уменьшилось, т.е. ускоренный рост в этом случае более короткий.

Построим траектории капиталовооруженности на основе аналитического решения, соответствующие исходным и уменьшенным на 10% λ и A. Результат представлен на рисунке 5.

Рассмотрим, как изменяются при варьировании значения нормы накопления $(\rho>\alpha,\rho<\alpha)$ удельные инвестиции и среднедушевое потребление. Т.к. исходное значение нормы накопления составляет $\rho=0{,}2$, то в качестве $\rho<\alpha$ возьмем значение нормы накопления $\rho_1=0{,}1$, а условию $\rho>\alpha$ возьмем в соответствие значение $\rho_2=0{,}7$.

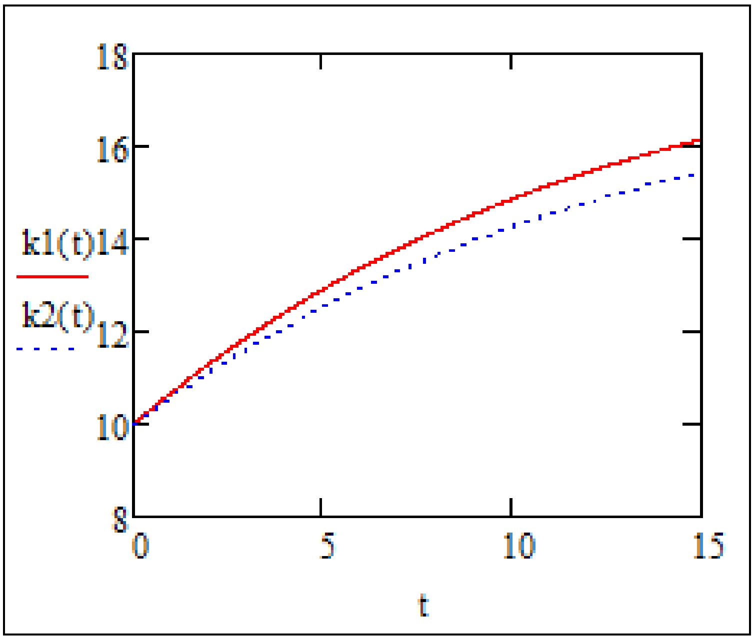

Рисунок 5 – Траектории капиталовооруженности

4. В итоге рассмотрим изменение следующих функций: $i_1 = \rho_1 x$; $i_2 = \rho_2 x$ и $c_1 = (1-\rho_1)x$; $c_2 = (1-\rho_2)x$. Результаты представлены на рисунках 6 и 7.

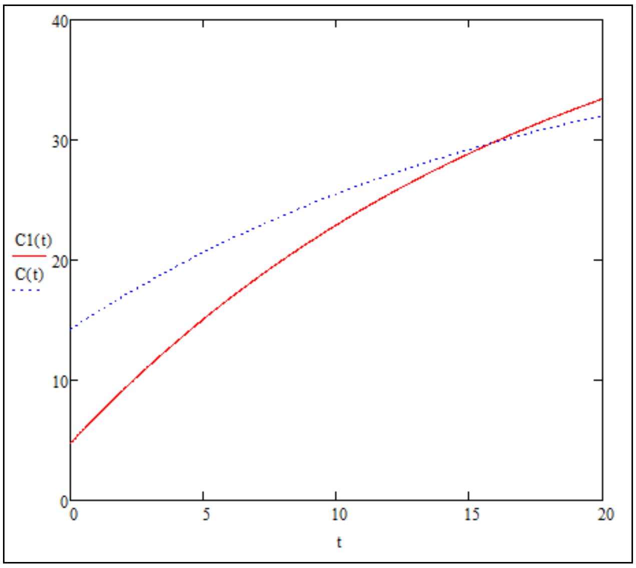

Рисунок 6 – Траектории изменения среднедушевого потребления, соответствующие значению $\rho_1 = 0{,}1$ и $\rho_2 = 0{,}7$

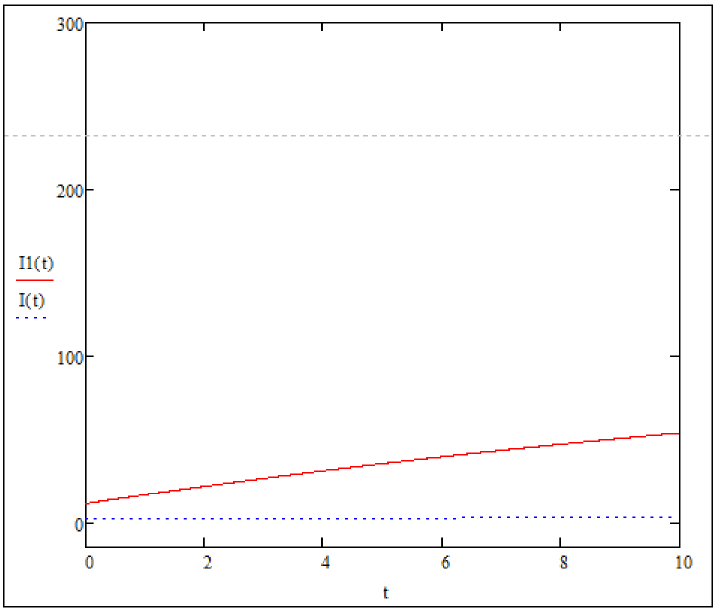

Рисунок 7 – Траектории изменения удельных инвестиций, соответствующие значению $\rho_1 = 0{,}1$ и $\rho_2 = 0{,}7$

Таким образом, исходя из результатов, получаем, что с увеличением нормы накопления ρ наблюдается тенденция к увеличению среднедушевого потребления и удельных инвестиций.

Из анализа всех построенных моделей можно сделать вывод, что первая модель развития экономики при норме накопления $\rho_1 = 0{,}1(\rho < \alpha)$ не может рассматриваться как оптимальная, поскольку в экономике имеет место ситуация недонакопления, которая обычно всегда встречается на практике. Во второй модели при норме накопления $\rho_2 = 0{,}7$ $(\rho > \alpha)$ $\frac{dc^E}{d\rho} < 0$, т.е. наблюдается ситуация перенакопления, в которой норма накопления превышает эластичность выпуска по фондам.

Наиболее оптимальным вариантом развития экономики является модель с нормой накопления равной эластичности выпуска по фондам, т.е. $\rho^* = \alpha$. В данном случае имеет место «золотое правило накопления», суть которого в том, что надлежащим выбором нормы накопления можно максимизировать среднедушевое потребление в стационарном режиме.

5 Содержание письменного отчета

Отчет по лабораторной работе оформляется на листах формата А4 и должен иметь следующую структуру:

1) краткие теоретические сведения, необходимые для решения поставленных задач;
2) постановка задачи и математические модели, применяемые для исследования;
3) результаты применения ППП для решения задач;
4) анализ полученных результатов и выводы.

6 Вопросы к защите

1) Укажите особенности модели Солоу.
2) Охарактеризуйте структурную схему модели Солоу.
3) Как описывается динамика рабочей силы?
4) Как описывается динамика капитала?
5) Как задается динамика ВВП?
6) Как задаётся динамика инвестиций и динамика потребления в односекторной модели Солоу?
7) Приведите модель Солоу в абсолютных показателях.
8) Приведите модель Солоу в относительных показателях.
9) В каком диапазоне изменяется темп прироста числа занятых ν ?
10) В каком диапазоне изменяется норма накопления ρ?
11) Как выводится «Золотое правило» накопления?
12) При каком выборе нормы накопления ρ достигается наибольшее среднедушевое накопление?
13) Какие показатели в модели Солоу являются экзогенными?
14) Какие переменные в модели Солоу являются эндогенными?
15) При каких условиях в модели Солоу, записанной в относительных показателях, наблюдается замедленный рост капиталовооруженности?

16) При каких условиях в модели Солоу, записанной в относительных показателях, наблюдается замедляющееся падение капиталовооруженности?
17) Какой параметр в модели Солоу может устанавливаться управляющим органом системы на любом допустимом уровне?

7 Варианты для индивидуальных заданий

Варианты для индивидуальных заданий приведены в приложении А (таблица А.1).

Список использованных источников

1. Замков, О. О. Математические методы в экономике: учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных; общ. ред. А. В. Сидорович. – 4-е изд., стер. – М. : Дело и Сервис, 2004. – 368 с. – ISBN 5-86509-054-2.

2. Интриллигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975.

3. Колемаев, В. А. Математическая экономика: учебник [Электронный ресурс] / В. А. Колемаев. – Юнити-Дана, 2015.

Приложение А
(обязательное)

Информационные данные об экономической системе

Таблица А.1 - Варианты для индивидуальных заданий

№	Производственная функция F(K, L)	μ	ν
1	$4K^{1/4}L^{3/4}$	0,09	0,04
2	$2K^{3/4}L^{1/4}$	0,05	0,02
3	$3K^{2/3}L^{1/3}$	0,08	0,01
4	$5K^{1/2}L^{1/2}$	0,07	0,04
5	$4K^{1/3}L^{2/3}$	0,09	0,03
6	$3K^{2/3}L^{1/3}$	0,1	0,02
7	$5K^{1/5}L^{4/5}$	0,05	0,01
8	$6K^{2/3}L^{1/3}$	0,08	0,04
9	$4K^{2/5}L^{3/5}$	0,07	0,03
10	$3K^{1/4}L^{3/4}$	0,09	0,05
11	$5K^{1/3}L^{2/3}$	0,1	0,01
12	$2K^{3/4}L^{1/4}$	0,05	0,04
13	$4K^{2/3}L^{1/3}$	0,08	0,03
14	$5K^{1/2}L^{1/2}$	0,07	0,02
15	$6K^{1/3}L^{2/3}$	0,09	0,01
16	$4K^{2/3}L^{1/3}$	0,1	0,04
17	$3K^{3/4}L^{1/4}$	0,05	0,03
18	$2K^{1/3}L^{2/3}$	0,08	0,02
19	$4K^{2/3}L^{1/3}$	0,07	0,01
20	$5K^{1/4}L^{3/4}$	0,09	0,04
21	$2K^{1/2}L^{1/2}$	0,1	0,03
22	$3K^{1/3}L^{2/3}$	0,05	0,02
23	$6K^{1/3}L^{2/3}$	0,08	0,01
24	$5K^{2/3}L^{1/3}$	0,07	0,04
25	$4K^{1/3}L^{2/3}$	0,09	0,05