Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Оренбургский государственный университет" для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2019

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7
С 17

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент А.Н. Павленко

Смирнова, Е.Н.

С 17 Методические рекомендации к самостоятельной работе по дисциплине «Дополнительные главы математики»: методические указания / Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 47 с.

Методические указания посвящены основным понятиям по дисциплине «Дополнительные главы математики». В них содержатся вопросы к экзамену; решение задач нулевого варианта; задания для самостоятельного решения; литературу, рекомендуемую для изучения дисциплины; а также список использованных источников. Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики» предназначены для магистрантов первого курса заочной формы обучения направления подготовки 13.04.02 Электроэнергетика и электротехника.

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7

Содержание

Введение

Методические указания предназначены для оказания помощи магистрантам заочного отделения при выполнении домашней контрольной работы по дисциплине «Дополнительные главы математики». Также могут быть использованы студентами очной формы обучения.

Контрольная работа предусматривает выполнение 11 заданий, из которых 5 заданий из раздела «Теория поля», 2 задания – «Методы оптимизации», 4 задания – «Нечеткие множества», причем каждое задание содержит по 20 вариантов. Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по учебным пособиям, рекомендуемым в данных указаниях. В методических указаниях также приводится решение задач нулевого варианта.

1 Вопросы к экзамену

1. Основные понятия теории поля.
2. Поверхности и линии уровня.
3. Производная по направлению.
4. Градиент скалярного поля и его свойства.
5. Векторные линии поля. Поток поля.
6. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса.
7. Циркуляция поля. Ротор поля.
8. Формула Стокса.
9. Оператор Гамильтона (оператор «набла»).
10. Соленоидальное поле.
11. Потенциальное поле.
12. Задача оптимизации общего вида.
13. Критерии оптимизации.
14. Алгоритм Свенна.
15. Метод золотого сечения.
16. Метод деления интервала пополам.
17. Метод Ньютона.
18. Метод конфигураций.
19. Метод сопряженных направлений.
20. Метод градиентного спуска с постоянным шагом.
21. Метод наискорейшего градиентного спуска.
22. Определение нечеткого множества. Основные характеристики нечетких множеств.
23. Функция принадлежности. Типы функции принадлежности.
24. Множества α - уровня.
25. Меры нечеткости.

26.Нечеткие высказывания. Логические операции над нечеткими высказываниями.

27.Нечеткий вывод.

28.Операции над нечеткими множествами.

2 Решение задач нулевого варианта

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(M)=xy^2+yz^2+x^2z$ в точке M_0(l,l,l) по направлению вектора нормали к поверхности S: $x^2+y^2-3z^2+2=0$ в этой точке, образующего с осью Oz острый угол.

Решение:

Производная скалярного поля $u(M)=u(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению l вычисляется по формуле $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.(y^2+2xz)\right|_{M_0}=3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.(2xy+z^2)\right|_{M_0}=3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.(2y+x^2)\right|_{M_0}=3.$$

Вектор нормали к поверхности S в точке M_0 равен: $\overline{N}=\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0};\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0};\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\right)$,

если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$.

$$\overline{N}=\left(2x|_{M_0};2y|_{M_0};-6z|_{M_0}\right)=(2,2,-6).$$

$$\left|\overline{N}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-6)^2}=2\sqrt{11}.$$

Вектор $\overline{N}$ образует тупой угол с осью Oz, т.к. его третья координата отрицательна. Поэтому единичный вектор нормали к данной поверхности в точке M_0, образующий по условию задачи с осью Oz острый угол будет равен:

$$\bar{l} = -\frac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \left(-\frac{2}{2\sqrt{11}};-\frac{2}{2\sqrt{11}};\frac{6}{2\sqrt{11}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{11}};-\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}}\right).$$

Значит, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{11}};\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{11}};\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) + 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) + 3\cdot\frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(M)=x^3+y^3+z^3+xyz+1$ и $v(x) = \frac{x^2}{2} + y^2 + z^3$ в точке $M_0(0,1,1)$.

Решение:

Градиент скалярного поля $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ есть вектор, координаты которого определяются по формуле $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k$.

В нашей задаче имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 3x^2 + yz\Big|_{M_0} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 3y^2 + xz\Big|_{M_0} = 3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 3z^2 + xy\Big|_{M_0} = 3.$$

Таким образом, $\overline{a_1} = grad(u(M_0)) = (1,3,3)$.

Аналогично найдем $grad(v(M_0))$:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{M_0} = x\Big|_{M_0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{M_0} = 2y\Big|_{M_0} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{M_0} = 3z\Big|_{M_0} = 3.$$

Таким образом, $\overline{a_2} = grad(v(M_0)) = (0,2,3)$.

Косинус угла между векторами $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ равен: $\cos(\overline{a_1},\overline{a_2}) = \dfrac{(\overline{a_1},\overline{a_2})}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|} = \dfrac{15}{\sqrt{247}}$.

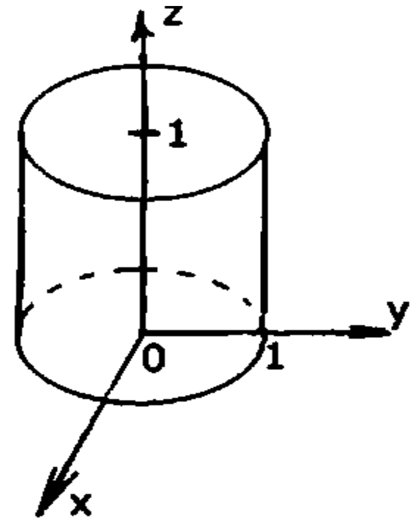
Тогда, $(\overline{a_1},\overline{a_2}) = \arccos\dfrac{15}{\sqrt{247}}$.

Задача 3. Найти поток векторного поля a=xi+yj+zk через часть поверхности S: x^2+y^2=1, вырезаемую плоскостями P_1: z=0, P_2: z=1 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение:

Поток векторного поля через замкнутую поверхность S найдем по формуле Остроградского-Гаусса: П=$\oint\!\!\oint_\sigma a_n d\sigma = \iiint_v div\, a\, dV$.

S: x^2+y^2=1 – круговой цилиндр.



Найдем дивергенцию векторного поля:

$$div\, a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1+1+1=3.$$

Воспользуемся цилиндрическими координатами: x=r cos φ, y=r sin φ, z=z.

Отсюда,

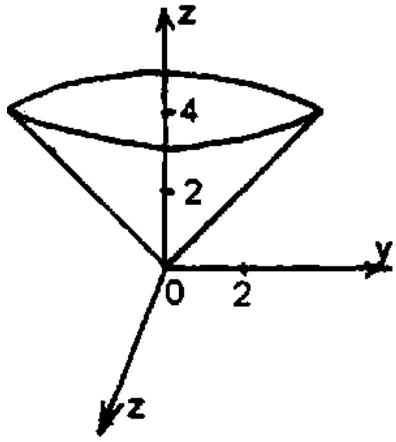
$$\text{Ï} = \iiint_v div\, a\, dV = \iiint_v 3dV = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^1 dz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = 3\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi.$$

Задача 4. Найти поток векторного поля a=xzi+yzj+(z^2-1)k через часть поверхности S: x^2+y^2=z^2 (z≥0), вырезаемую плоскостью P: z=4 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

Решение:

Поток векторного поля через замкнутую поверхность S найдем по формуле: $\Pi=\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$.

Построим поверхность S.



Вычислим отдельно каждый поверхностный интеграл:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz=\iint\limits_{\sigma} xzdydz=\iint\limits_{\sigma} z\sqrt{z^2-y^2}dydz=\int\limits_0^4 zdz\int\limits_{-z}^{z}\sqrt{z^2-y^2}dy=$$

$$=\int\limits_0^4 z\left(\frac{y}{2}\sqrt{z^2-y^2}+\frac{z^2}{2}\arcsin\frac{y}{z}\right)\Bigg|_{-z}^{z}dz=\frac{1}{2}\pi\int\limits_0^4 z^3dz=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{4}z^4\Bigg|_0^4=32\pi.$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz=\iint\limits_{\sigma} yzdxdz=\iint\limits_{\sigma} z\sqrt{z^2-x^2}dxdz=\int\limits_0^4 zdz\int\limits_{-z}^{z}\sqrt{z^2-x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^4 z\left(\frac{x}{2}\sqrt{z^2-x^2}+\frac{z^2}{2}\arcsin\frac{x}{z}\right)\Bigg|_{-z}^{z}dz=\frac{1}{2}\pi\int\limits_0^4 z^3dz=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{4}z^4\Bigg|_0^4=32\pi.$$

$$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint\limits_{\sigma}(z^2-1)dxdy=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2-1)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4 r(r^2-1)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^4(r^3-r)dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_0^4 d\varphi=56\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=112\pi.$$

$\Pi=32\pi+32\pi+112\pi=176\pi$.

Задача 5. Найти работу силы $F=x^2y$i$+y$j при перемещении вдоль линии L от точки M (-1,3) к точке N (0,1).

Решение:

Работу силы при перемещении вдоль линии L определим по формуле:

$A=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

Составим уравнение прямой вдоль отрезка MN:

$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}$ или y=-2x+1.

$$A=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_L x^2ydx+ydy=\int\limits_{-1}^{0}(x^2y-2y)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}(x^2(-2x+1)-2(-2x+1))dx==\int\limits_{-1}^{0}(-2x^3+x^2+4x-2)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{19}{6}.$$

$$A==\left|-\frac{19}{6}\right|=\frac{19}{6}.$$

Задача 6. Найти циркуляцию векторного поля $a=zi+xj-yk$ вдоль контура L: x=3cos t, y=3sin t, z=sin t, где $t\in[0,2\pi]$.

Решение:

Применим формулу $Ц=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz,$ тогда $Ц=\oint\limits_L zdx+xdy-ydz$.

Получаем:

$$Ц=\int\limits_0^{2\pi}\sin t\cdot(-3\sin t)dt+3\cos t\cdot 3\cos tdt-3\sin t\cos tdt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(6\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t+3)dt=(3\sin 2t-\frac{3}{4}\cos 2t+3t)\Bigg|_0^{2\pi}=6\pi.$$

Таким образом, циркуляция векторного поля равна 6π.

Задача 7. Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ методами деления интервала пополам и золотого сечения.

Решение:

1. Найдем начальный интервал неопределенности методом Свенна.

Зададим x^0=5 и t=5. Положим k=0.

Вычислим значения функции в точках $x^0-t=5-5=0$, $x^0=5$, $x^0+t=5+5=10$: $f(0)=0$, $f(5)=-10$, $f(10)=80$.

Т.к. $f(0)>f(5)<f(10)$, то начальный интервал неопределенности найден: $L_0=[a_0,b_0]=[0,10]$. Зададим N=9 так, чтобы L_0 содержал N+1=10 равных интервалов.

2. Решим методом деления интервала пополам.

Положим k=0.

Вычислим среднюю точку $x_0^c=\frac{0+10}{2}=5$, $|L_0|=10-0=10$, $f(x_0^c)=-10$.

Вычислим точки: $y_0=a_0+\frac{|L_0|}{4}=0+10/4=2,5$, $z_0=b_0-\frac{|L_0|}{4}=10-10/4=7,5$;

$f(y_0)=-17,5$, $f(z_0)=22,5$. Сравним значения $f(y_0)$ и $f(x_0^c)$: т.к. $f(y_0)=-17,5<f(x_0^c)=-10$, то положим $a_1=a_0=0$, $b_1=x_0^c=5$, $x_1^c=y_0=2,5$. Положим $L_2=[0,5]$, $|L_2|=5>l=1$, $k=1$. Перейдем к шагу 4.

Вычислим точки: $y_1=a_1+\frac{|L_2|}{4}=0+5/4=1,25$, $z_1=b_1-\frac{|L_2|}{4}=5-5/4=3,75$;

$f(y_1)=-11,875$, $f(z_1)=-16,875$. Сравним значения $f(y_1)$ и $f(x_1^c)=f(y_0)=-17,5$: т.к. $f(y_1)=-11,875>f(x_1^c)=-17,5$, то положим $a_2=y_1=1,25$, $b_2=z_1=3,75$, $x_2^c=x_1^c=2,5$. Получим $L_4=[1,25;3,75]$, $|L_4|=3,75-1,25=2,5>l=1$, $k=2$. Перейдем к шагу 4.

Вычислим точки: $y_2=a_2+\frac{|L_4|}{4}=1,25+2,5/4=1,875$;

$z_2=b_2-\frac{|L_4|}{4}=3,75-2,5/4=3,125$; $f(y_2)\approx-15,47$, $f(z_2)\approx-17,97$. Сравним значения $f(y_2)$ и $f(x_2^c)=f(x_1^c)=-17,5$: т.к. $f(y_2)=-15,47>f(x_2^c)=-17,5$, то перейдем к шагу 6.

Сравним значения $f(z_2)$ и $f(x_2^c)=-17,5$: т.к. $f(z_2)=-17,97<f(x_2^c)=-17,5$, то положим $a_3=x_2^c=2,5$; $b_3=b_2=3,75$; $x_3^c=z_2=3,125$.

Получим $L_6=[2,5;3,75]$, $|L_6|=3,75-2,5=1,25>l=1$, $k=3$. Перейдем к шагу 4.

Вычислим точки: $y_3=a_3+\frac{|L_6|}{4}=2,5+1,25/4=2,81$,

$z_3=b_3-\frac{|L_6|}{4}$=3,75–1,25/4=3,43; $f(y_3) \approx -17{,}93$, $f(z_3) \approx -17{,}62$. Сравним значения $f(y_3)$ и $f(x_3^c) = f(z_2) = -17{,}97$: т.к. $f(y_3) = -17{,}93 > f(x_3^c) = -17{,}97$, то перейдем к шагу 6.

Сравним значения $f(z_3)$ и $f(x_3^c) = -17{,}97$: т.к. $f(z_3) = -17{,}63 > f(x_3^c) = -17{,}97$, то положим $a_4= y_3$=2,81; $b_4=z_3$=3,43; $x_4^c= x_3^c$ =3,125.

Получим L_8=[2,81;3,43], $|L_8|$=3,43-2,81=0,62<$l=1$, $x^*\in L_8$, N=8. В качестве решения можно взять среднюю точку последнего интервала $x^*=x_4^c$=3,125.

3. Решим методом золотого сечения.

Положим k=0. Вычислим $y_0=a_0+0{,}382(b_0-a_0)=0+0{,}382\cdot 10=3{,}82$;

$z_0=a_0+b_0-y_0$=0+10–3,82=6,18. Вычислим $f(y_0) = -16{,}65$, $f(z_0) = 2{,}22$. Сравним $f(y_0)$ с $f(z_0)$: т.к. $f(y_0)<f(z_0)$, положим $a_1=a_0=0$, $b_1=z_0=6{,}18$,

$y_1=a_1+b_1-y_0$=0+6,18–3,82=2,36. $z_1=y_0$=3,82. Получим L_2=[0;6,18], $|L_2|$=6,18>l=1. Положим k=1 и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_1) = -17{,}18$; $f(z_1) = f(y_0) = -16{,}65$, т.к. $f(y_1)<f(z_1)$, положим $a_2=a_1=0$, $b_2=z_1$=3,82, $y_2=a_2+b_2-y_1$=0+3,82–2,36=1,46. $z_2=y_1$=2,36. Получим L_3=[0;3,82], $|L_3|$=3,82>$l=1$. Положим k=2 и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_2) = -13{,}25$, $f(z_2) = f(y_1) = -17{,}18$. т.к. $f(y_2)>f(z_2)$, то $a_3 = y_2$ = 1,46; $b_3=b_2$=3,82; $y_3=z_2$=2,36; $z_3=a_3+b_3-z_2$=1,46+3,2–2,362=2,92. Получим L_4=[1,46;3,82], $|L_4|$=3,82–1,46=2,36>$l=1$. Положим k=3 и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_3) = f(z_2) = -17{,}18$, $f(z_3) = -17{,}99$. т.к. $f(y_3)>f(z_3)$, то $a_4 = y_3$ = 2,36; $b_4=b_3$=3,82; $y_4=z_3$=2,92; $z_4=a_4+b_4-z_3$=2,36+3,82-2,92=3,26. Получим L_5=[2,36;3,82], $|L_5|$=3,82-2,36=1,46>$l=1$. Положим k=4 и перейдем к шагу 4.

Вычислим $f(y_4) = f(z_3) = -17{,}99$, $f(z_4) = -17{,}86$. т.к. $f(y_4)<f(z_4)$, то $a_5 = a_4$ = 2,36; $b_5=z_4$=3,26; $z_5=y_4$=2,92; $y_5=a_5+b_5-y_4$=2,36+3,26-2,92=2,7. Получим L_6=[2,36;3,26], $|L_6|$=3,26-2,36=0,9<$l=1$.

$x^*\in L_6$=[2,36;3,26], $N=6$, $x^*=\frac{3{,}26+2{,}36}{2}$=2,81.

Задача 8. Найти минимум функции $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ методом конфигураций.

Решение:

1^0. Положим $x^0=(0,5;1)^T$ – старый базис; $\Delta_1=0,2$; $\Delta_2=0,4$; $\varepsilon=0,1$; $\alpha=4$; $\lambda=1,5$. Положим $k=0$, $i=1$, $y^1=x^0=(0,5;1)^T$.

2^0. Так как $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(0,7;\ 1)=2,68>f(y^1)=2$, то шаг неудачен.

Так как $f(y^1-\Delta_1 d_1)=f(0,3;\ 1)=1,48<f(y^1)=2$, то шаг удачный:

$y^2=y^1-\Delta_1 d_1=(0,3;1)^T$.

3^0. Поскольку $i=1<2=n$, то $i=i+1=2$ и переходим к шагу 2.

2^1. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(0,3;1,4)=2,56>f(y^2)=1,48$, то шаг неудачен. Так как

$f(y^2-\Delta_2 d_2)=f(0,3;0,6)=0,72<f(y^2)=1,48$, то шаг удачный:

$y^3=y^2-\Delta_2 d_2=(0,3;0,6)^T$.

3^1. Поскольку $i=2=n=2$ и $f(y^3)=0,72<f(x^0)=2$, перейдем к шагу 4.

4^0. Положим $y^3=x^1=(0,3;0,6)^T$ – новый базис, $i=1$, $k=k+1=1$, найдем $y^1=x^1+1,5\cdot(x^1-x^0)=(0,3;0,6)^T+1,5\cdot[(0,3;0,6)^T-(0,5;1)^T]=(0;0)^T$. Выполнен поиск по образцу. Перейдем к шагу 2.

2^2. $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(0,2;\ 0)=0,08>f(y^1)=0$, то шаг неудачен.

Так как $f(y^1-\Delta_1 d_1)=f(-0,2;\ 1)=0,08>f(y^1)=0$, то шаг не удачный:

$y^2=y^1=(0;0)^T$.

3^2. Поскольку $i=1<2=n$, то $i=i+1=2$ и переходим к шагу 2.

2^3. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(0;0,4)=0,16>f(y^2)=0$ и

$f(y^2-\Delta_2 d_2)=f(0;-0,4)=0,16>f(y^2)=0$, то шаги неудачные и $y^3=y^2=(0;0)^T$.

3^3. Поскольку $i=2=n=2$ и $f(y^3)=0<f(x^0)=2$, то поиск по образцу удачен. Перейдем к шагу 4.

4^1. Положим $x^2=y^3=(0;0)^T$, $i=1$, $k=k+1=2$,

$y^1=x^2+1,5\cdot(x^2-x^1)=(0;0)^T+1,5\cdot[(0;0)^T-(0,3;0,6)^T]=(-0,45;-0,9)^T$ и перейдем к шагу 2.

2^4. Так как $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(-0,25;\ -0,9)=1,16<f(y^1)=1,62$, то шаг удачен:

$y^2=y^2+\Delta_2 d_2=(-0,25;\ -0,5)^T$.

3^4. Поскольку $i=1<2=n$, то $i=i+1=2$ и перейдем к шагу 2.

2^5. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(-0{,}25;\ -0{,}5)=0{,}5>f(y^2)=1{,}16$, то шаг удачен:

$y^3=y^2+\Delta_2 d_2=(-0{,}25;\ -0{,}5)^T$.

3^5. Поскольку $i=2=n=2$ и $f(y^3)=0{,}5>f(x^2)=0$, то поиск по образцу неудачен. Осуществляется возврат в точку x^2. Перейдем к шагу 5.

5^0. Так как $\Delta_1=0{,}2>\varepsilon=0{,}1$; $\Delta_2=0{,}4>\varepsilon$, то уменьшим шаг: $\Delta_1=\dfrac{\Delta_1}{4}=0{,}05$; $\Delta_2=\dfrac{\Delta_2}{4}=0{,}1$.

Положим $y^1=x^2=(0;0)^T$; $x^3=x^2=(0;0)^T$; $i=1$, $k=k+1=3$ и перейдем к шагу 2.

2^6. Так как $f(y^1+\Delta_1 d_1)=f(0{,}05;\ 0)=5\cdot 10^{-3}>f(y^1)=0$ и

$f(y^1-\Delta_1 d_1)=f(-0{,}05;\ 0)=5\cdot 10^{-3}>f(y^1)=0$, то шаги неудачны: $y^3=y^2=(0;0)^T$.

3^6. Поскольку $i=1<2=n$, то $i=i+1=2$ и перейдем к шагу 2.

2^7. Так как $f(y^2+\Delta_2 d_2)=f(0;0{,}1)=0{,}01>f(y^2)=0$ и

$f(y^2-\Delta_2 d_2)=f(0;-0{,}1)=0{,}01>f(y^2)=0$, то шаги неудачны: $y^3=y^2=(0;0)^T$.

3^7. Поскольку $i=2=n$ и $f(y^3)=f(x^3)=0$, то исследующий поиск неудачен. Перейдем к шагу 5.

5^1. Так как $\Delta_1=0{,}05<\varepsilon=0{,}1$; $\Delta_2=0{,}1\le\varepsilon=0{,}1$, то, то поиск закончен $x^*=x^3=(0;0)^T$.

Задача 9. Найти минимум функции $f(x)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$ методом сопряженных направлений.

Решение:

1^0. Зададим начальную точку $x^0=(8,9)^T$, $d_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $d_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon=0{,}1$. Положим $d_0=d_n=d_2$, $y^0=x^0$, $k=0$, $i=0$.

2^0. Получаем $y^1=y^0+t_0 d_0=(8,9)^T+t_0(0,1)^T=(8,9+t_0)^T$. Найдем минимум функции $f(8,9+t_0)=36+(3+t_0)^2$ по t_0. Очевидно, он достигается при $t_0=-3$, а $y^1=(8,6)^T$.

3^0. Имеем $i=0<2=n$, поэтому $i=i+1=1$ и перейдем к шагу 2.

2^1. Получаем $y^2=y^1+t_1 d_1=(8,6)^T+t_1(1,0)^T=(8+t_1,6)^T$. Найдем минимум функции $f(8+t_1,6)=4(3+t_1)^2$ по t_1. Очевидно, он достигается при $t_1=-3$, а $y^2=(5,6)^T$.

3^1. Имеем $i=1=n-1$, поэтому $i=i+1=2$ и переходим к шагу 2.

2^2. Получаем $y^3=y^2+t_2d_2=(5,6)^T+t_2(0,1)^T=(5,6+t_2)^T$. Найдем минимум функции $f(5,6+t_0)=t_2^2$ по t_2. Очевидно, он достигается при $t_2=-3$, а $y^3=y^2=(5,6)^T$.

3^2. Имеем $i=2=n$, $y^3\neq y^1$ и перейдем к шагу 4.

4^0. Находим $x^1=y^3=(5,6)^T$, $\|x^1-x^0\|=\sqrt{(8-5)^2+(9-6)^2}=4,21>\varepsilon$. Положим: $\bar{d}_0=\bar{d}_n=\bar{d}_2=y^3-y^1=(5,6)^T-(8,6)^T=(-3,0)^T$.

$\bar{d}_1=d_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, т.к. rang $\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2=n$, то новая система направлений линейно независима. В этом случае положим: $d_2=\bar{d}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$, $d_1=\bar{d}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $d_0=\bar{d}_0=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$; $k=k+1$, $i=0$, $y^0=x^1=(5,6)^T$ и перейдем к шагу 2.

2^3. Получаем $y^1=y^0+t_0d_0=(5,6)^T+t_0(-3,0)^T=(5-3t_0,6)^T$. Найдем минимум функции $f(5-3t_0,6)=36t_0^2$ по t_0. Очевидно, он достигается при $t_0=0$, а $y^1=(5,6)^T=y^0$.

3^3. Имеем $i=0<n-1=1$, поэтому $i=i+1=1$ и перейдем к шагу 2.

2^4. Получаем $y^2=y^1+t_1d_1=(5,6)^T+t_1(0,1)^T=(5,6+t_1)^T$. Найдем минимум функции $f(5,6+t_1)=t_1^2$ по t_1. Очевидно, он достигается при $t_1=0$, а $y^2=(5,6)^T=y^1=y^0$.

3^4. Имеем $i=1=n-1$, $y^2=y^0$, поэтому поиск завершается, $x^*=y^2=(5,6)^T$; $f(x^*)=0$.

Задача 10. Найти локальный минимум функции $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ методом градиентного спуска с постоянным шагом.

Решение:

I. Определение точки x^*, в которой выполнен, по крайней мере, один из критериев окончания расчетов.

1. Зададим x^0, ε_1, ε_2, M: $x^0=(0,5;1)^T$, $\varepsilon_1=0,1$; $\varepsilon_2=0,15$; $M=10$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x^k)=(4x_1+x_2;\ x_1+2x_2)^T$.

2. Положим $k=0$.

3^0. Вычислим $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0)=(3;2,5)^T$.

4^0. Вычислим $\|\nabla f(x^0)\|$: $\|\nabla f(x^0)\|=3,9>0,1$. Переходим к шагу 5.

5^0. Проверим условие $k\geq M$: $k=0<10=M$. Переходим к шагу 6.

6^0. Зададим $t_0=0,5$.

7^0 Вычислим x^1: $x^1=(0,5;1)^T-0,5\cdot(3;2,5)^T=(-1;-0,25)^T$; $f(x^1)=2,31$.

8^0. Сравним $f(x^1)$ с $f(x^0)=2$. Имеем $f(x^1)>f(x^0)$. Вывод: условие $f(x^{k+1})<f(x^k)$ для $k=0$ не выполняется. Зададим $t^0 = 0{,}25$, переходим к повторению шагов 7, 8.

7^{01}. Вычислим x^1: $x^1=(0{,}5;\ 1)^T - 0{,}25\cdot(3;2{,}5)^T=(-0{,}25;0{,}375)^T$; $f(x^1) = 0{,}171$.

8^{01}. Сравним $f(x^1)$ с $f(x^0)$. Вывод: $f(x^1)<f(x^0)$. Переходим к шагу 9.

9^0. Вычислим $|x^1-x^0|$, $|f(x^1)-f(x^0)|$:

$|x^1-x^0|=0{,}976>0{,}15$; $|f(x^1)-f(x^0)|=1{,}829>0{,}15$. Вывод: полагаем $k=1$ и переходим к шагу 3.

3^1. Вычислим $\nabla f(x^1)$: $\nabla f(x^1)=(-0{,}625;0{,}51)^T$.

4^1. Вычислим $\|\nabla f(x^1)\|$: $\|\nabla f(x^1)\|=0{,}81$. Переходим к шагу 5.

5^1. Проверим условие $k\geq M$: $k=1<10=M$. Переходим к шагу 6.

6^1. Зададим $t_0=0{,}25$.

7^1. Вычислим x^2: $x^2=(-0{,}25;0{,}375)-0{,}25\cdot(-0{,}625;0{,}5)^T=(-0{,}094;\ 0{,}25)^T$; $f(x^2)=0{,}056$.

8^1. Сравним $f(x^2)$ с $f(x^1)$. Вывод: $f(x^2)<f(x^1)$. Переходим к шагу 9.

9^1. Вычислим $|x^2-x^1|$, $|f(x^2)-f(x^1)|$:

$|x^2-x^1|=0{,}2>0{,}15$; $|f(x^2)-f(x^1)|=0{,}115<0{,}15$. Вывод: полагаем $k=2$ и переходим к шагу 3.

3^2. Вычислим $\nabla f(x^2)$: $\nabla f(x^2)=(-0{,}126;0{,}406)^T$.

4^2. Вычислим $\|\nabla f(x^2)\|$: $\|\nabla f(x^2)\|=0{,}425>0{,}1$. Переходим к шагу 5.

5^2. Проверим условие $k\geq M$: $k=2<10=M$, переходим к шагу 6.

6. Зададим $t_2=0{,}25$.

7^2. Вычислим x^3: $x^3=(-0{,}094;\ 0{,}25)^T-0{,}25\cdot(-0{,}126;\ 0{,}406)^T=(-0{,}063;0{,}15)^T$; $f(x^3)=0{,}021$.

8^2. Сравним $f(x^3)$ с $f(x^2)$. Вывод: $f(x^3)<f(x^2)$. Переходим к шагу 9.

9^2. Вычислим $|x^3-x^2|$, $|f(x^3)-f(x^2)|$:

$|x^3-x^2|=0{,}105<0{,}15$; $|f(x^3)-f(x^2)|=0{,}035<0{,}15$. Вывод: полагаем $k=3$ и переходим к шагу 3.

3^3. Вычислим $\nabla f(x^3)$: $\nabla f(x^3)=(-0{,}102;0{,}237)^T$.

4^3. Вычислим $\|\nabla f(x^3)\|$: $\|\nabla f(x^3)\|=0{,}257>0{,}1$. Переходим к шагу 5.

5^3. Проверим условие $k\geq M$: $k=3<10=M$, переходим к шагу 6.

6^3. Зададим $t_3=0{,}25$.

7^3. Вычислим x^4: $x^4=(-0{,}063;0{,}15)^T-0{,}25\cdot(-0{,}102;\ 0{,}237)^T=(-0{,}038;0{,}091)^T$: $f\,(x^4) = 0{,}0076$.

8^3. Сравним $f(x^4)$ с $f(x^3)$. Вывод: $f(x^4)<f(x^3)$. Переходим к шагу 9.

9^3. Вычислим $|x^4-x^3|$, $|f(x^4)-f(x^3)|$:

$|x^4-x^3|=0{,}064<0{,}15$; $|f(x^4)-f(x^3)|=0{,}015<0{,}15$.

Условия $\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon_2$, $|f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2$, выполнены при $k=2{,}3$. Расчет окончен. Найдена точка $x^4=(-0{,}038;\ 0{,}091)^T$; $f\,(x^4)=0{,}0076$.

Задача 11. Пусть для описания расстояния между двумя точками используется лингвистическая переменная β – ″расстояние″ с множеством базовых значений T = {″малое″, ″среднее″, ″большое″}. Базовое множество лингвистической переменной β: X = {1, 3, 6, 8}. Терм ″малое″ характеризуется нечеткой переменной <малое, X, C>. Требуется построить функцию принадлежности нечеткого множества C, т.е. определить значение $\mu_C(x)$, $x \in X$.

Решение:

Исходной информацией для построения функций принадлежности являются экспертные парные сравнения. Для каждой пары элементов универсального множества эксперт оценивает преимущество одного элемента над другим по отношению к свойству нечеткого множества.

Парные сравнения удобно представлять матрицей $M=\|m_{ij}\|$, где m_{ij} – уровень преимущество элемента u_i над u_j ($i,j=1,\ldots,n$), определяемый по девятибальной шкале Саати:

1 – если отсутствует преимущество элемента u_i над элементом u_j;

3 – если имеется слабое преимущество u_i над u_j;

5 – если имеется существенное преимущество u_i над u_j;

7 – если имеется явное преимущество u_i над u_j;

9 – если имеется абсолютное преимущество u_i над u_j;

2,4,6,8 – промежуточные сравнительные оценки.

Матрица парных сравнений является диагональной ($m_{ii}=1$, $i=1,\ldots,n$) и обратно симметричной ($m_{ij} == \frac{1}{m_{ji}}$, $i,j=1,\ldots,n$).

Пусть опросом экспертов получена следующая матрица парных сравнений:

$$M=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 6 & 8 \\ \hline 1 & & & & \\ 3 & & & & \\ 6 & & & & \\ 8 & & & & \end{array}$$

$$M=\begin{array}{c}\\1\\3\\6\\8\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 3 & 6 & 8\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 7\\ 1/5 & 1 & 4 & 6\\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4\\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Здесь, например, на пересечении первой строки и второго столбца стоит число 5, т. е. m_{12}=5, т. е. в следствие оценки эксперта $\mu_C(1)$ больше $\mu_C(3)$ в соответствии с таблицей.

Значение функции принадлежности μ_A в точках x_1, x_2, …, x_n можно определить, используя формулу: $\mu_A(x_i)=\dfrac{m_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} m_{ij}}$, где j – произвольный столбец матрицы M.

Зафиксируем первый столбец матрицы M: $M_1=\{1;\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7}\}$ и найдем значения функций принадлежности в точках x_i, i=1,2,3,4.

$$\sum_{i=1}^{4} m_{ij}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{317}{210}$$

$$\mu_C(1)=\frac{m_{11}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}}=\frac{210}{317}\approx 0{,}66;$$

$$\mu_C(3)=\frac{m_{21}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}}=\frac{42}{317}\approx 0{,}13;$$

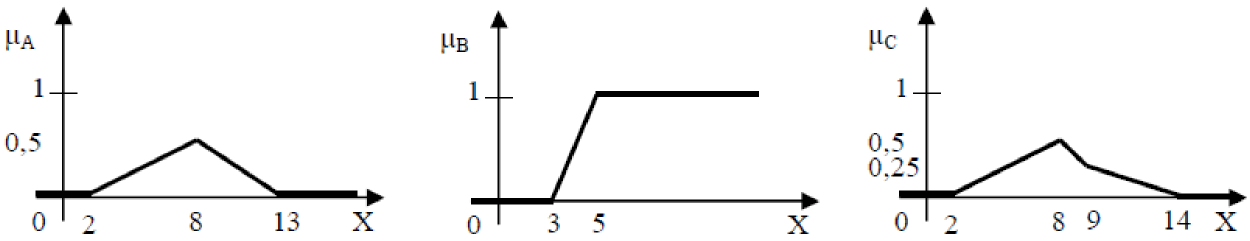
$$\mu_C(6)=\frac{m_{31}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}}=\frac{35}{317}\approx 0{,}1;$$

$$\mu_C(8)=\frac{m_{41}}{\sum_{i=1}^{4} m_{i1}}=\frac{30}{317}\approx 0{,}09.$$

Таким образом, нечеткое множество C имеет вид:

C=0,66/1+0,13/3+0,1/6+0,09/8.

Задача 12. Дано 3 нечетких множества *A,B,C* (заданы их функции принадлежности). Построить функцию принадлежности нечеткого множества $D=\bar{A}\cap(A\cup C\cup B)$ и определить степень принадлежности одного элемента множеству *D*.



Решение:

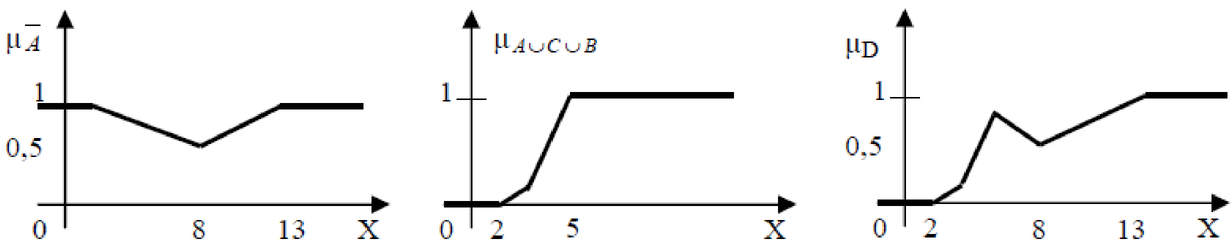
Для построения функции принадлежности нового множества необходимо:

1) Определить последовательность выполнения операций в формуле.

Множество $D=\overline{A}\cap(A\cup C\cup B)$, значит, последовательность операций будет следующей: $\overline{A}, A\cup C\cup B, \overline{A}\cap(A\cup C\cup B)$.

2) Построить на отдельных графиках промежуточные множества, согласно определенной последовательности действий. Свести промежуточные множества на одном графике и определить итоговую функцию принадлежности.

Построим согласно этой последовательности операций графики функций принадлежности:



3) Используя определенный в задаче метод, определить аналитически степень принадлежности элемента, входящего в ядро итогового множества.

Ядро множества D состоит из элементов из интервала (2,13). Выберем элемент 8.

$\mu_A(8)=0,5$; $\mu_B(8)=1$; $\mu_C(8)=0,5$;

$\mu_{\overline{A}}(8)=1-\mu_A(8)=1-0,5=0,5$;

$\mu_{\overline{C}}(8)$=1-μ_C(8)=1-0,5=0,5;

$\mu_{A\cup C}(8)$=max {μ_A(8); μ_C(8)}=0,5;

$\mu_{A\cup C\cup B}(8)$=max { $\mu_{A\cup C}(8)$; μ_B(8)}=1;

$\mu_{\overline{A}\cap(A\cup C\cup B)}$=min { $\mu_{A\cup C\cup B}(8)$; $\mu_{\overline{A}}(8)$}=0,5.

4) Проверить аналитические вычисления по построенному графику функции принадлежности.

$\mu_D(8)$=0,5.

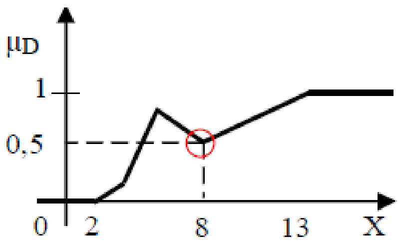


Рисунок 1 – График функции принадлежности

Задача 13. Дано множество W={a_1, a_2, …, a_8} и два его нечетких подмножества: X={u, $\mu_x(u)$} и Y={u, $\mu_x(u)$}, $x, y \in W$.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_y(u)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2

1) представить X и Y геометрически;

2) найти функции принадлежности и представить геометрически множество: $Z=\overline{Y}\cap(X\cup Y\cap\overline{X})$;

3) определить какое из множеств X и Y является «более нечетким» двумя способами.

Решение:

1) представим X и Y геометрически:

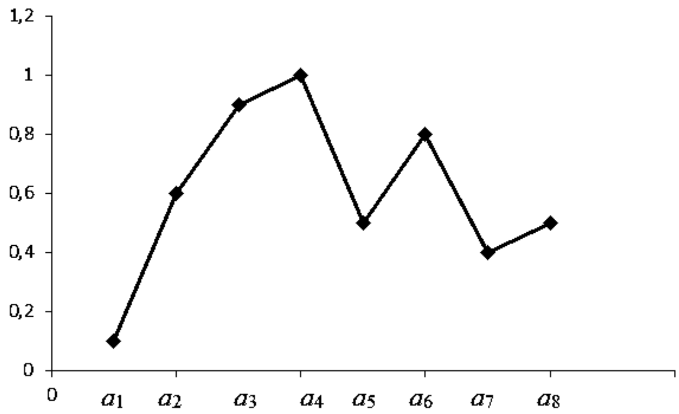


Рисунок 2 – Геометрическое представление нечеткого подмножества X

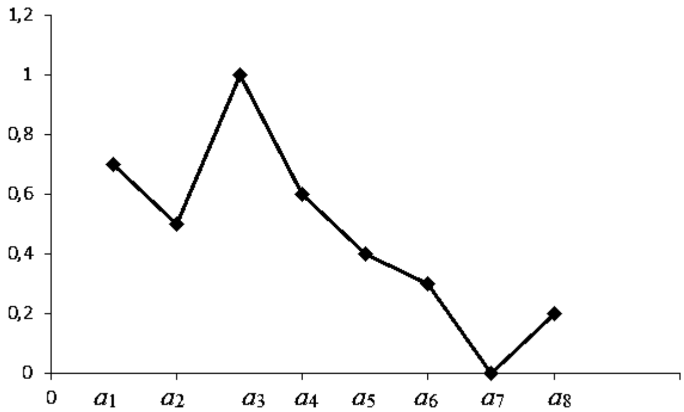


Рисунок 3 – Геометрическое представление нечеткого подмножества X

2) Воспользуемся определениями операций над нечеткими множествами:

$\mu_{\bar{A}}(u)$=1-$\mu_A(u)$;

$\mu_{A\cap B}(u)$=min {$\mu_A(u)$, $\mu_B(u)$};

$\mu_{A\cup B}(u)$=max {$\mu_A(u)$, $\mu_B(u)$}.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_X(u)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_Y(u)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2
$\mu_{\bar{X}}(u)$	0,9	0,4	0,1	0	0,5	0,2	0,6	0,5
$\mu_{\bar{Y}}(u)$	0,3	0,5	0	0,4	0,6	0,7	1	0,8
$\mu_{Y\cap\bar{X}}(u)$	0,7	0,4	0,1	0	0,4	0,2	0	0,2
$\mu_{X\cup Y\cap\bar{X}}(u)$	0,7	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_{\bar{Y}\cap(X\cup Y\cap\bar{X})}(u)$	0,3	0,5	0	0,4	0,5	0,7	0,4	0,5

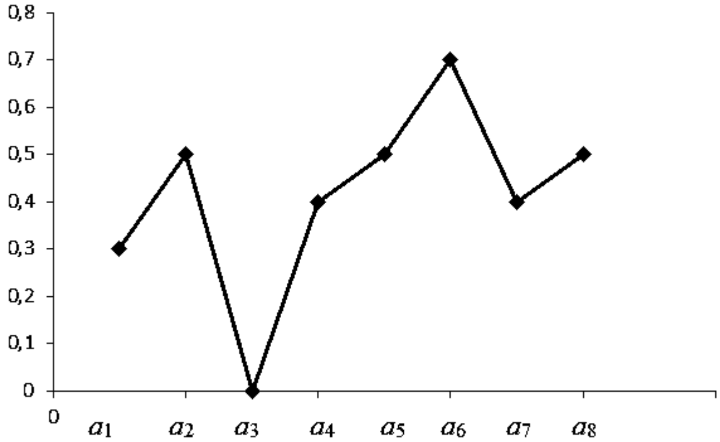


Рисунок 4 – Геометрическое представление нечеткого подмножества Z

3) Вычислим индексы нечеткости множеств, используя расстояние Хемминга и расстояние Евклида по формулам:

$$I_A^L = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i)\right|;$$

$$I_A^E = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i) - \mu_{A_0}(x_i))^2},$$

A_0 – обычное множество, ближайшее к A, характеристическая функция которого определяется по формуле:

$$\mu_{A_0} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A > 0,5; \\ 0, & \text{если } \mu_A < 0,5; \\ 1 \text{ или } 0, & \text{если } \mu_A = 0,5. \end{cases}$$

Построим обычное множество, ближайшее к A.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_X(u)$	0,1	0,6	0,9	1	0,5	0,8	0,4	0,5
$\mu_Y(u)$	0,7	0,5	1	0,6	0,4	0,3	0	0,2
$\mu_{X_0}(u)$	0	1	1	1	0	1	0	0
$\mu_{Y_0}(u)$	1	0	1	1	0	0	0	0

Вычислим индексы нечеткости множеств, используя расстояние Хемминга:

$$I_X^L = \frac{2}{8}(0,1+0,4+0,1+0+0,5+0,2+0,4+0,5)=0,55;$$

$$I_Y^L = \frac{2}{8}(0,3+0,5+0+0,4+0,4+0,3+0,2)=0,525.$$

Замечаем, что множество X является более нечетким, чем множество Y, т.к. $I_X^L > I_Y^L$.

Вычислим индексы нечеткости множеств, используя расстояние Евклида:

$$I_X^E = \frac{2}{\sqrt{8}}\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}4^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}5^2} = 0{,}66;$$

$$I_Y^E = \frac{2}{\sqrt{8}}\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}5^2 + 0{,}4^2 + 0{,}4^2 + 0{,}3^2 + 0{,}2^2} = 0{,}63.$$

Индекс нечеткости множеств, используя расстояние Евклида, дал такой же результат: множество X является более нечетким, чем множество Y, т.к. $I_X^E > I_Y^E$.

Задача 14. Построить нечеткую базу знаний (использовать не менее 3 лингвистических переменных) для задачи определения временных затрат для решения студентом задач (учитывать успеваемость студента и количество решаемых вариантов), проверить ее на полноту и произвести нечеткий вывод для конкретных значений (выбрать случайным образом).

Решение:

1) Предложения, описывающие задачу следующие:

- если успеваемость студента высокая или хорошая и он прорешивает малое количество вариантов, то ему требуется немного времени;
- если успеваемость студента высокая или хорошая и он прорешивает много вариантов, то ему требуется достаточно большой промежуток времени;
- если успеваемость студента низкая и он прорешивает много вариантов, то ему требуется много времени;
- если успеваемость студента средняя и он прорешивает достаточно большое количество вариантов, то ему требуется достаточно большой промежуток времени.

Выделить из этих предложений лингвистические переменные (определим их через формальную запись $<\beta, T, X, G, M>$):

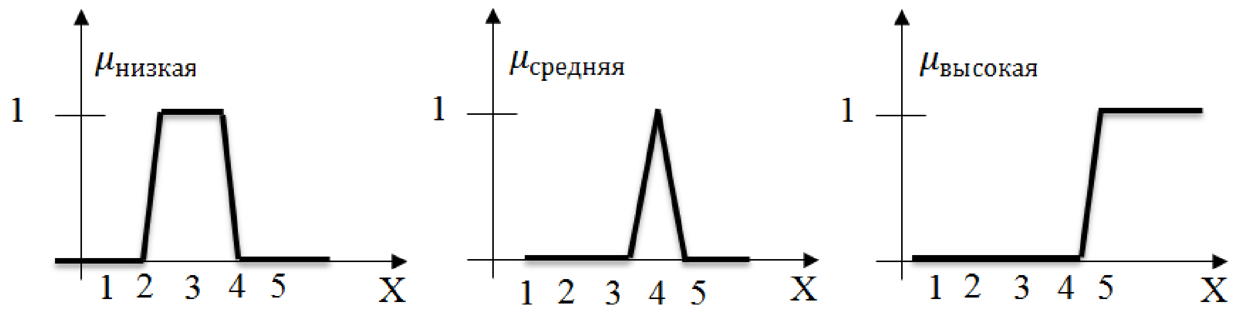
1. β=успеваемость студента, T=(≪высокая≫, ≪средняя≫, ≪низкая≫), X=[2,5] (используется пятибалльная система), G =(≪высокая или средняя≫, ≪очень

низкая»), *M* – уменьшение на единицу степени принадлежность нечеткой переменной «высокая», операция объединения нечетких множеств;

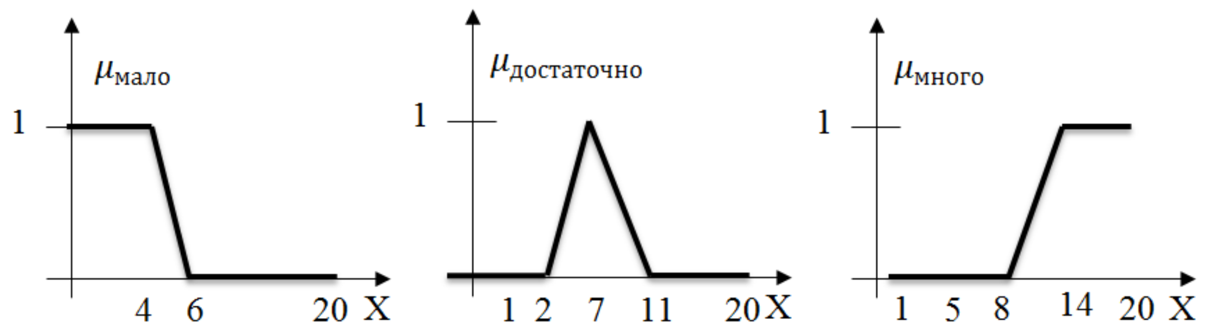
2. β=количество вариантов, *T*=(«мало», «достаточно», «много»), *X*=[1,20] (количество вариантов 20 в каждой теме), *G*=(«мало или достаточно», «очень много»), *M* – увеличение на единицу степени принадлежность нечеткой переменной «много», операция объединения нечетких множеств.

Для полного задания лингвистической переменной необходимо определить нечеткие переменные, входящие в *T*:

Успеваемость:



Количество вариантов:



Количество времени:

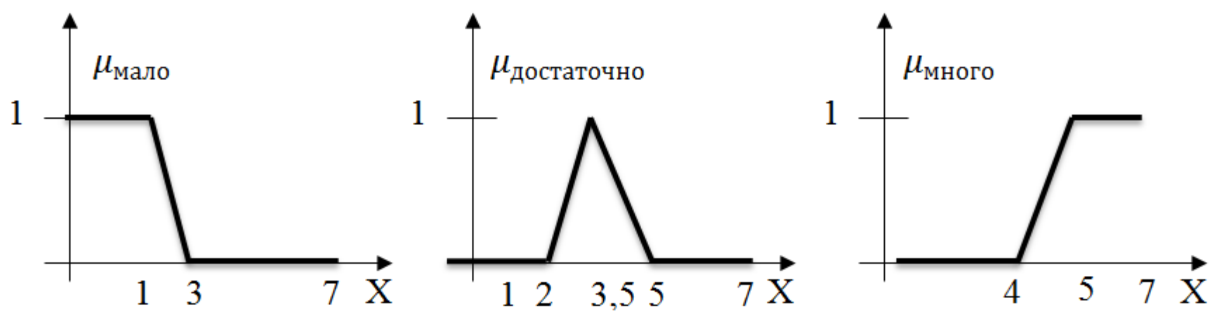


Рисунок 5 – Графики функции принадлежности нечетких переменных

С учетом выделенных лингвистических переменных, нечеткие правила следующие:

Если Успеваемость = ≪высокая≫ или Успеваемость = ≪средняя≫ и Количество вариантов = ≪мало≫, то Количество времени = ≪мало≫.

Если Успеваемость = ≪высокая≫ или Успеваемость = ≪средняя≫ и Количество вариантов = ≪много≫, то Количество времени = ≪достаточно≫.

Если Успеваемость = ≪низкая≫ и Количество вариантов = ≪много≫, то Количество времени = ≪много≫.

Если Успеваемость = ≪низкая≫ и Количество вариантов = ≪достаточно≫, то Количество времени = ≪достаточно≫.

2) Проверим полученную базу на полноту:

Существует хотя бы одно правило для каждого лингвистического терма выходной переменной – выходная переменная ≪Количество времени≫ имеет 3 терма ≪мало≫ – используется в 1 правиле ≪достаточно≫ в 2 и 4, ≪много≫ – в третьем.

Для любого терма выходной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот терм используется в качестве предпосылки – есть две входных переменных ≪Успеваемость≫ и ≪Количество времени≫ у каждой из них 3 терма: ≪высокая≫ используется в 1 и 2 правиле, ≪средняя≫ 1, 2 и 4, ≪низкая≫ – в 3, ≪мало≫ – в 1, ≪достаточно≫ – в 2 и 3.

Значит, полученная база нечетких правил полная.

3) Пусть имеется студент Иванов А.А., имеющий среднюю оценку 3,5 и решивший прорешать 9 вариантов. Нужно определить, сколько ему понадобится времени.

Определим степени уверенности простейших утверждений:

Успеваемость = ≪высокая≫ – 0;

Успеваемость = ≪средняя≫ – 0,5;

Успеваемость = ≪низкая≫ – 1;

Количество вариантов = ≪мало≫ – 0;

Количество вариантов = ≪достаточно≫ – 0,5;

Количество вариантов = ≪много≫ – 0,125.

Определим степени уверенности посылок правил:

Правило 1: min (max (0;0,5), 0) = 0;

Правило 2: min (max (0;0,5), 0,125) = 0,125;

Правило 3: min (1;0,125) = 0,125;

Правило 4: min (0,5;0,5) = 0,5.

Построим новую выходную нечёткую переменную, используя полученные степени уверенности:

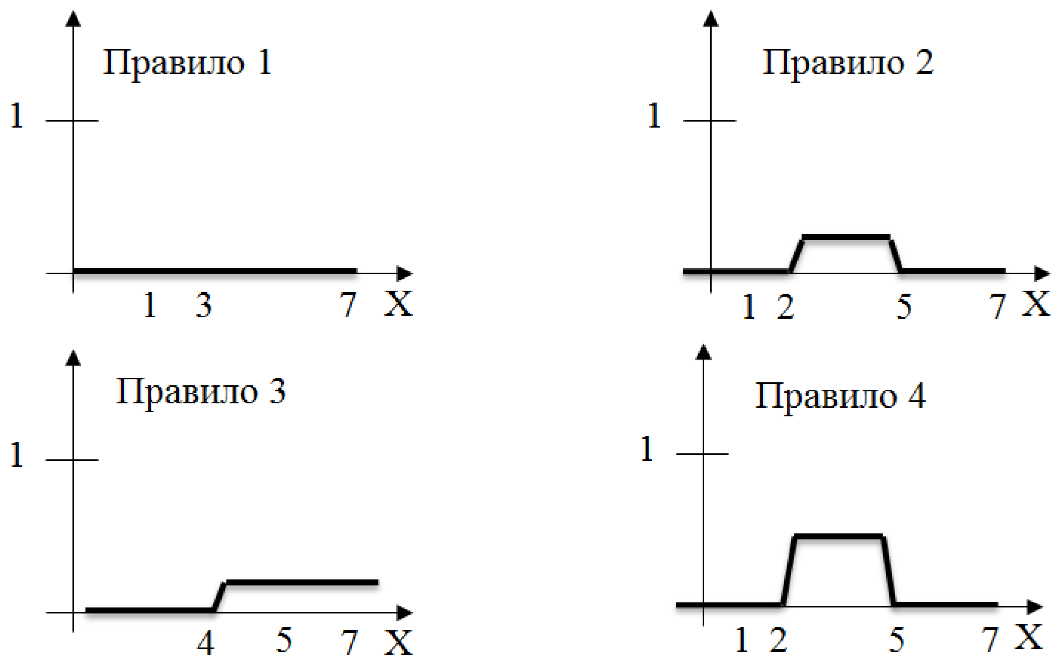
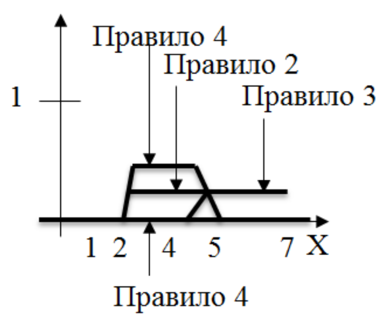


Рисунок 6 – Графики выходной нечёткой переменной

4) Аккумуляция:



Новый терм выходной переменной Количество часов:

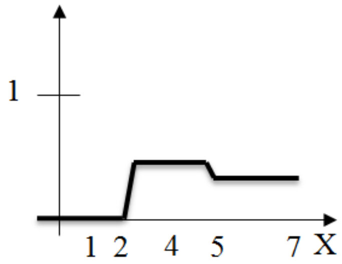


Рисунок 7 – График терма выходной переменной Количество часов

5) Исходя из полученного графика степени принадлежности выходного терма, можно сказать, что Иванову А.А., имеющему среднюю оценку 3,5, на решение 9 вариантов заданий понадобится не менее 2,75 часа (степень уверенности данного утверждения 0,5) [1].

3 Задания для контрольной работы

Раздел 1: Теория поля

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

1.1. $u=4\ln(3+x^2)-8xyz$, S: $x^2-2y^2+2z^2=1$, $M(1,1,1)$.

1.2. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, S: $4z+2x^2-y^2=0$, $M(2, 4,4)$.

1.3. $u=-2\ln(x^2-5)-4xyz$, S: $x^2+2y^2-2z^2=1$, $M(1,1,1)$.

1.4. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2+5z^2}$, S: $z^2=x^2+4y^2-4$, $M(-2, \frac{1}{2},1)$.

1.5. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$, S: $x^2-y^2-3z^2+12=0$, $M(2,2,4)$.

1.6. $u = x\sqrt{y} - yz^2$, S: $x^2+y^2=4z$, $M(2,1,-1)$.

1.7. $u=7\ln(1/13+x^2)-4xyz$, S: $7x^2-4y^2+4z^2=7$, $M(1,1,1)$.

1.8. $u=\mathrm{arctg}(y/x)-8xyz$, S: $x^2+y^2-2z^2=10$, $M(2,2,-1)$.

1.9. $u = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}$, S: $4x^2-y^2+z^2=16$, $M(1,-2,4)$.

1.10. $u=\sqrt{x^2+y^2}-z$, S: $x^2+y^2=24z$, $M(3,4,1)$.

Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)$ в точке M по направлению вектора l.

1.11 $u=y(\ln z-\operatorname{arctg} x)$, l=i-2j+k, $M(2,-1,1)$.

1.12 $u=2\ln(1+x^2)-xyz$, l=2i-j+3k, $M(1,1,1)$.

1.13. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, l=i-j+k, $M(1,1,1)$.

1.14. $u=x+\ln(z^2+y^2)$, l=-2i+j-k, $M(2,1,1)$.

1.15. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$, l=2j-2k, $M(1,5,-2)$.

1.16. $u=y\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg} z$, l=2i-3j-2k, $M(0,1,1)$.

1.17. $u=x(\ln y-\operatorname{arctg} z)$, l=8i+4j+8k, $M(-2,1,-1)$.

1.18. $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$, l=-i+2j-2k, $M(1,3,2)$.

1.19. $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$, l=4i+3j, $M(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},3)$.

1.20. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$, l=5i-6j+2$\sqrt{5}$k, $M(1,1,2)$.

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке M.

2.1. $v=\frac{x^3}{2}+6y^3+3\sqrt{6}z^3$, $u=\frac{yz^2}{x^2}$, $M(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

2.2. $v=\frac{4\sqrt{6}}{x}+\frac{\sqrt{6}}{9y}+\frac{3}{z}$, $u=x^2yz^3$, $M(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{3}{2}})$.

2.3. $v=9\sqrt{2}x^3-\frac{y^3}{2\sqrt{2}}+\frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $u=\frac{z^3}{xy^2}$, $M(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}})$.

2.4. $v=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}-\frac{1}{\sqrt{6}z}$, $u=\frac{z}{x^3y^2}$, $M(1,2,\frac{1}{\sqrt{6}})$.

2.5. $v=\frac{2}{x}+\frac{3}{2y}-\frac{\sqrt{6}}{4z}$, $u=\frac{y^3}{x^2z}$, $M(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2})$.

2.6. $v=3\sqrt{2}x^3-\frac{y^2}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}z^3$, $u=\frac{z^2}{xy^2}$, $M(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}})$.

2.7. $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $u = \dfrac{xz^2}{y}$, $M(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1)$.

2.8. $v = \dfrac{\sqrt{6}}{2x} - \dfrac{\sqrt{6}}{2y} + \dfrac{2}{3z}$, $u = \dfrac{yz^2}{x}$, $M(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

2.9. $v = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $u = \dfrac{xy^2}{z^2}$, $M(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}})$.

2.10. $v = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}z}$, $u = \dfrac{x^3y^2}{z}$, $M(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

2.11. $v = -\dfrac{4\sqrt{2}}{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{9y} + \dfrac{1}{\sqrt{3}z}$, $u = \dfrac{1}{x^2yz}$, $M(2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

2.12. $v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u = \dfrac{x^2}{y^2z^3}$, $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

2.13. $v = x^2 + y^2 + 6z^2$, $u = xyz$, $M(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

2.14. $v = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2y} - \dfrac{\sqrt{6}}{4z}$, $u = \dfrac{y^3}{x^2z}$, $M(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{1}{2})$.

2.15. $v = \sqrt{2}x^2 - \dfrac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$, $u = xy^2z$, $M(1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{\sqrt{6}})$.

2.16. $v = -\dfrac{\sqrt{6}}{2x} + \dfrac{\sqrt{6}}{2y} - \dfrac{2}{3z}$, $u = \dfrac{x}{yz^2}$, $M(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

2.17. $v = \dfrac{6}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $u = \dfrac{y^2z^3}{x^2}$, $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

2.18. $v = -\dfrac{1}{\sqrt{2}x} - \dfrac{2\sqrt{2}}{y} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2z}$, $u = \dfrac{y^2z^3}{x}$, $M(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

2.19. $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $u = \dfrac{y}{xz^2}$, $M(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, 1)$.

2.20. $v = x^2 - y^2 - 3z^2$, $u = \dfrac{yz^2}{x}$, $M(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

Задача 3. Найти поток векторного поля *a* через часть поверхности *S*, вырезаемую плоскостями P_1, P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

3.1. $a=x\mathrm{i}+2y\mathrm{j}+z\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=1$.

3.2. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}-z\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=4$.

3.3. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+2z\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=3$.

3.4. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z^3\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=1$.

3.5. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+xyz\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=5$.

3.6. $a=(x-y)\mathrm{i}+(x+y)\mathrm{j}+z^2\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=2$.

3.7. $a=(x+y)\mathrm{i}-(x-y)\mathrm{j}+xyz\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=4$.

3.8. $a=(x^3+xy^2)\mathrm{i}+(y^3+x^2y)\mathrm{j}+z^2\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=3$.

3.9. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+\sin z\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=5$.

3.10. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=1$, $P_1: z=0$, P_2: $z=2$.

Найти поток векторного поля a через часть поверхности S, вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

3.11. $a=x\mathrm{i}+(y+z)\mathrm{j}+(z-y)\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=1$.

3.12. $a=y\mathrm{i}-x\mathrm{j}+\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=4$.

3.13. $a=xy\mathrm{i}-x^2\mathrm{j}+3\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=1$.

3.14. $a=xz\mathrm{i}+yz\mathrm{j}+(z^2-1)\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=4$.

3.15. $a=y^2x\mathrm{i}-yx^2\mathrm{j}+\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=5$.

3.16. $a=(xz+y)\mathrm{i}+(yz-x)\mathrm{j}+(z^2-2)\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=3$.

3.17. $a=xyz\mathrm{i}-x^2z\mathrm{j}+3\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=2$.

3.18. $a=(x+xy)\mathrm{i}+(y-x^2)\mathrm{j}+(z-1)\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=3$.

3.19. $a=(x+y)\mathrm{i}+(y-x)\mathrm{j}+(z-2)\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=2$.

3.20. $a=x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+(z-2)\mathrm{k}$, S: $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$, P: $z=1$.

Задача 4. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

4.1. $F=(x^2-2y)\mathrm{i}+(y^2-2x)\mathrm{j}$, L: отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

4.2. $F=(x^2+2y)\mathrm{i}+(y^2+2x)\mathrm{j}$, L: отрезок MN, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

4.3. $F=(x^2+2y)\mathrm{i}+(y^2+2x)\mathrm{j}$, L: $2-\dfrac{x^2}{8}=y$, $M(-4,0)$, $N(0,2)$.

4.4. $F=(x+y)\mathrm{i}+(2x)\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=4$ ($y\geq 0$), $M(2,0)$, $N(-2,0)$.

4.5. $F=x^3\mathrm{i}-y^3\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=4$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$), $M(2,0)$, $N(0,2)$.

4.6. $F=(x+y)\mathrm{i}+(x-y)\mathrm{j}$, L: $y=x^2$, $M(-1,1)$, $N(1,1)$.

4.7. $F=x^3y\mathrm{i}-y\mathrm{j}$, L: отрезок MN, $M(-1,0)$, $N(0,1)$.

4.8. $F=(2xy-y)\mathrm{i}+(x^2+x)\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=9$ ($y\geq 0$), $M(3,0)$, $N(-3,0)$.

4.9. $F=(x+y)\mathrm{i}+(x-y)\mathrm{j}$, L: $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$), $M(1,0)$, $N(0,3)$.

4.10. $F=y\mathrm{i}-x\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=1$ ($y\geq 0$), $M(1,0)$, $N(-1,0)$.

4.11. $F=(x^2+y^2)\mathrm{i}+(x^2-y^2)\mathrm{j}$, L: $\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1; \\ 2-x, & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$, $M(2,0)$, $N(0,0)$.

4.12. $F=y\mathrm{i}-x\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=2$ ($y\geq 0$), $M(\sqrt{2},0)$, $N(-\sqrt{2},0)$.

4.13. $F=xy\mathrm{i}+2y\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=1$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$), $M(1,0)$, $N(0,1)$.

4.14. $F=y\mathrm{i}-x\mathrm{j}$, L: $2x^2+y^2=1$ ($y\geq 0$), $M(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $N(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$.

4.15. $F=(x^2+y^2)(\mathrm{i}+2\mathrm{j})$, L: $x^2+y^2=9$ ($y\geq 0$), $M(3,0)$, $N(-3,0)$.

4.16. $F=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{i}+(y-x\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=1$ ($y\geq 0$), $M(1,0)$, $N(-1,0)$.

4.17. $F=x^2y\mathrm{i}-xy^2\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=4$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$), $M(2,0)$, $N(0,2)$.

4.18. $F=(x+y\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{i}+(y-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=16$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$), $M(4,0)$, $N(0,4)$.

4.19. $F=y^2\mathrm{i}-x^2\mathrm{j}$, L: $x^2+y^2=9$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$), $M(3,0)$, $N(0,3)$.

4.20. $F=(x+y)^2\mathrm{i}-(x^2+y^2)\mathrm{j}$, L: отрезок MN, $M(1,0)$, $N(0,1)$ [2].

Задача 5. Найти циркуляцию векторного поля a вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t).

5.1. $a=y\mathrm{i}-x\mathrm{j}+z^2\mathrm{k}$, Γ: $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t; \quad y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t; \\ z=\sin t. \end{cases}$

5.2. $a=-x^2y^3\mathrm{i}+\mathrm{j}+z\mathrm{k}$, Γ: $\begin{cases} x=\sqrt[3]{4}\cos t; \quad y=\sqrt[3]{4}\sin t; \\ z=3. \end{cases}$

5.3. a=(y-z)i-(z-x)j+(x-y)k, Γ: $\begin{cases} x = \cos t; \quad y = \sin t; \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

5.4. a=x^2i+yj-zk, Γ: $\begin{cases} x = \cos t; \quad y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t; \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t. \end{cases}$

5.5. a=(y-z)i-(z-x)j+(x-y)k, Γ: $\begin{cases} x = 4\cos t; \quad y = 4\sin t; \\ z = 1 - \cos t. \end{cases}$

5.6. a=2yi-3xj+xk, Γ: $\begin{cases} x = 2\cos t; \quad y = 2\sin t; \\ z = 2 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$

5.7. a=2zi-xj+yk, Γ: $\begin{cases} x = 2\cos t; \quad y = 2\sin t; \\ z = 1. \end{cases}$

5.8. a=yi-xj+zk, Γ: $\begin{cases} x = \cos t; \quad y = \sin t; \\ z = 3. \end{cases}$

5.9. a=xi+z^{2}j+yk, Γ: $\begin{cases} x = \cos t; \quad y = 2\sin t; \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1. \end{cases}$

5.10. a=3yi-3xj+xk, Γ: $\begin{cases} x = 3\cos t; \quad y = 3\sin t; \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t. \end{cases}$

5.11. a=-x^2y^{3}i+2j+xzk, Γ: $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t; \quad y = \sqrt{2}\sin t; \\ z = 1. \end{cases}$

5.12. a=6zi-xj+xyk, Γ: $\begin{cases} x = 3\cos t; \quad y = 3\sin t; \\ z = 3. \end{cases}$

5.13. a=zi+y^2j-xk, Γ: $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t; \quad y = 2\sin t; \\ z = \sqrt{2}\cos t. \end{cases}$

5.14. a=xi+2z^2j+yk, Γ: $\begin{cases} x = \cos t; \quad y = 3\sin t; \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2. \end{cases}$

5.15. a=xi- $\dfrac{1}{3}z^2$j+yk, Γ: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t; \quad y = \dfrac{1}{3}\sin t; \\ z = \cos t - \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

5.16. a=4yi-3xj+xk, Г: $\begin{cases} x = 4\cos t; \quad y = 4\sin t; \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t. \end{cases}$

5.17. a=-zi-xj+xzk, Г: $\begin{cases} x = 5\cos t; \quad y = 5\sin t; \\ z = 4. \end{cases}$

5.18. a=zi+xj+yk, Г: $\begin{cases} x = 2\cos t; \quad y = 2\sin t; \\ z = 0. \end{cases}$

5.19. a=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k, Г: $\begin{cases} x = 3\cos t; \quad y = 3\sin t; \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

5.20. a=2yi-zj+xk, Г: $\begin{cases} x = \cos t; \quad y = \sin t; \\ z = 4 - \cos t - \sin t. \end{cases}$

Раздел 2: Методы оптимизации

Задача 1. Методом деления интервала пополам и методом золотого сечения решить задачи, начальный интервал неопределенности определить по алгоритму Свенна:

1.1. $f(x)=x^2-6x+14 \to \min$, $x^0=0$, $t=1$.

1.2. $f(x)=x^2-5x+14 \to \min$, $x^0=-1$, $t=1$.

1.3. $f(x)=x^2+6x-1 \to \min$, $x^0=10$, $t=1$.

1.4. $f(x)=x^2+6x-1 \to \min$, $x^0=8$, $t=1$.

1.5. $f(x)=x^2-5x+14 \to \min$, $x^0=-2$, $t=1$.

1.6. $f(x)=x^2+6x-1 \to \min$, $x^0=11$, $t=1$.

1.7. $f(x)=(x-2)(x+1) \to \min$, $x^0=-2$, $t=1$.

1.8. $f(x)=(x+2)(x+3) \to \min$, $x^0=-1$, $t=1$.

1.9. $f(x)=x^2+x+3 \to \min$, $x^0=-1$, $t=1$.

1.10. $f(x)=x^2-7x+1 \to \min$, $x^0=-1$, $t=1$.

1.11. $f(x)=(2x+1)(x-3) \to \min$, $x^0=8$, $t=1$.

1.12. $f(x)=(x-2)(x+1) \to \min$, $x^0=-1$, $t=1$.

1.13. $f(x)=(x+2)(x+3) \to \min$, $x^0=-3$, $t=1$.

1.14. $f(x)=x^2+x+3 \to \min$, $x^0=-3$, $t=1$.

1.15. $f(x)=x^2-2x+3 \to \min$, $x^0=-2$, $t=1$.

1.16. $f(x)=x^2-x+4 \to \min$, $x^0=5$, $t=1$.

1.17. $f(x)=x^2-5x+1 \to \min$, $x^0=5$, $t=1$.

1.18. $f(x)=x^2-3x+4 \to \min$, $x^0=-1$, $t=1$.

1.19. $f(x)=(x-1)(x+7) \to \min$, $x^0=4$, $t=1$.

1.20. $f(x)=x^2+8x+1 \to \min$, $x^0=0$, $t=1$.

Задача 2. Решить задачи методом конфигураций:

2.1. $f(x)=3x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+3 \to \min$, $x^0=(0,5;1)^T$; $\Delta_1=0,6$; $\Delta_2=0,5$; $\varepsilon=0,2$; $\alpha=4$; $\lambda=1,5$.

2.2. $f(x)=x_1^3+x_2^2-3x_1-2x_2+2 \to \min$, $x^0=(-0,5;1)^T$; $\Delta_1=0,5$; $\Delta_2=0,8$; $\varepsilon=0,3$; $\alpha=2$; $\lambda=2$.

2.3. $f(x)=x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2-4x_1+3 \to \min$, $x^0=(0,5;1)^T$; $\Delta_1=0,2$; $\Delta_2=0,4$; $\varepsilon=0,1$; $\alpha=4$; $\lambda=1,5$.

2.4. $f(x)=4(x_1-2)^2+(x_2-5)^2+(x_3+2)^2 \to \min$, $x^0=(1;6;-1)^T$; $\Delta_1=0,4$; $\Delta_2=0,6$; $\Delta_3=0,8$; $\varepsilon=0,6$; $\alpha=2$; $\lambda=2,5$.

2.5. $f(x)=2x_1^2+4x_2^2-3x_1x_2-3x_1+2x_2+1 \to \min$, $x^0=(0;1)^T$; $\Delta_1=0,2$; $\Delta_2=0,3$; $\varepsilon=0,1$; $\alpha=2$; $\lambda=1,5$.

2.6. $f(x)=10x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2-2x_1-2x_2+1 \to \min$, $x^0=(0,5;0,5)^T$; $\Delta_1=0,1$; $\Delta_2=0,3$; $\varepsilon=0,2$; $\alpha=2$; $\lambda=2,5$.

2.7. $f(x)=3x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+3 \to \min$, $x^0=(1,5;2)^T$; $\Delta_1=0,4$; $\Delta_2=0,3$; $\varepsilon=0,1$; $\alpha=3$; $\lambda=2,5$.

2.8. $f(x)=x_1^3+x_2^2-3x_1-2x_2+2 \to \min$, $x^0=(0;2)^T$; $\Delta_1=0,4$; $\Delta_2=0,6$; $\varepsilon=0,1$; $\alpha=2$; $\lambda=1$.

Решить задачи методом сопряженных направлений:

2.9. $f(x)=2x_1^2+4x_2^2-3x_1x_2-3x_1+2x_2+1 \to \min$, $x^0=(0;1)^T$; $\varepsilon=0,8$.

2.10. $f(x)=10x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2-2x_1-2x_2+1 \to \min$, $x^0=(0,5;0,5)^T$; $\varepsilon=0,2$.

2.11. $f(x)=(x_1^2+x_2-11)^2+(x_2^2+x_1-7)^2 \to \min$, $x^0=(4;1)^T$; $\varepsilon=0,6$.

2.12. $f(x)=x_1^3+x_2^2x_1^2+x_1x_2-3x_1 \to \min$, $x^0=(3;2)^T$; $\varepsilon=0,7$.

2.13. $f(x)=3x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+3 \to \min$, $x^0=(0,5;1)^T$; $\varepsilon=0,8$.

2.14. $f(x)=(x_1^2+x_2-11)^2+(x_2^2+x_1-7)^2 \to \min$, $x^0=(3;4)^T$; $\varepsilon=0,8$.

2.15. $f(x)=2x_1^2+4x_2^2-3x_1x_2-3x_1+2x_2+1 \to \min$, $x^0=(1;-1)^T$; $\varepsilon=0,6$.

2.16. $f(x)=10x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2-2x_1-2x_2+1\to\min$, $x^0=(1{,}5;0)^{\mathrm{T}}$; $\varepsilon=0{,}5$.

Решить задачи методом градиентного спуска с постоянным шагом:

2.17. $f(x)=x_1^3+x_2^2-x_1x_2-2x_1+3x_2-4\to\min$, $x^0=(0;0)^{\mathrm{T}}$; $\varepsilon_1=0{,}1$; $\varepsilon_2=0{,}3$; $M=3$.

2.18. $f(x)=(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2\to\min$, $x^0=(0;0)^{\mathrm{T}}$; $\varepsilon_1=0{,}2$; $\varepsilon_2=0{,}4$; $M=4$.

2.19. $f(x)=((x_2+1)^2+x_1^2)(x_1^2+(x_2-1)^2)\to\min$, из точек $x^0=(0{,}5;0)^{\mathrm{T}}$ и $x^0=(-0{,}1;-0{,}5)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_1=0{,}5$; $\varepsilon_2=0{,}6$; $M=5$.

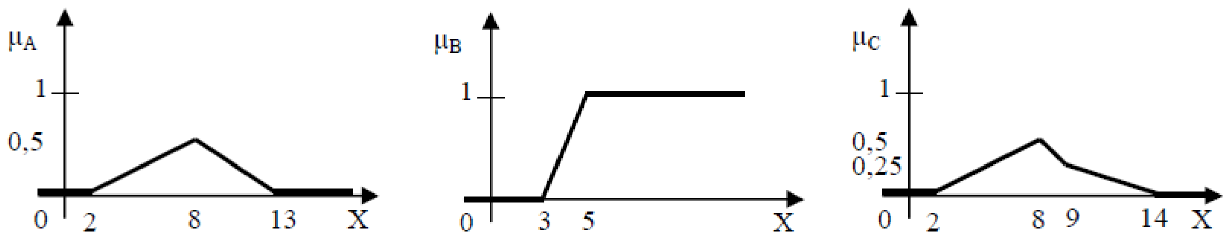
2.20. $f(x)=(x_1^2+x_2^2-1)^2-(x_1+x_2-1)^2\to\min$, из точек $x^0=(0;3)^{\mathrm{T}}$ и $x^0=(3{,}0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_1=0{,}5$; $\varepsilon_2=0{,}6$; $M=4$ [3].

Раздел 3: Нечеткие множества

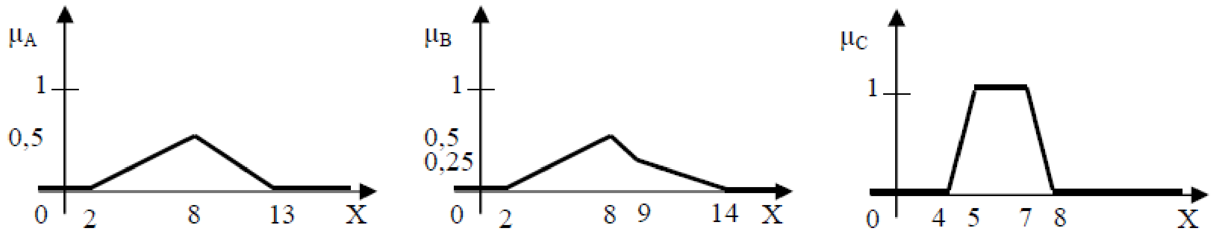
Задача 1. Для исследования взять 5 дисциплин, изучаемых в текущем семестре. Для описания важности дисциплины при обучении студента использовать лингвистическую переменную β - «важность дисциплины» с множеством базовых значений *T* – «»малое», «среднее», «большое»». Необходимо, используя метод парных сравнений, построить функцию принадлежности нечеткого множества *A* – большое значение.

Задача 2. Дано 3 нечетких множества *A,B,C* (заданы их функции принадлежности). Построить функцию принадлежности нечеткого множества $D=\bar{A}\cap(A\cup\overline{C\cup B})$ и определить степень принадлежности одного элемента множеству *D*.

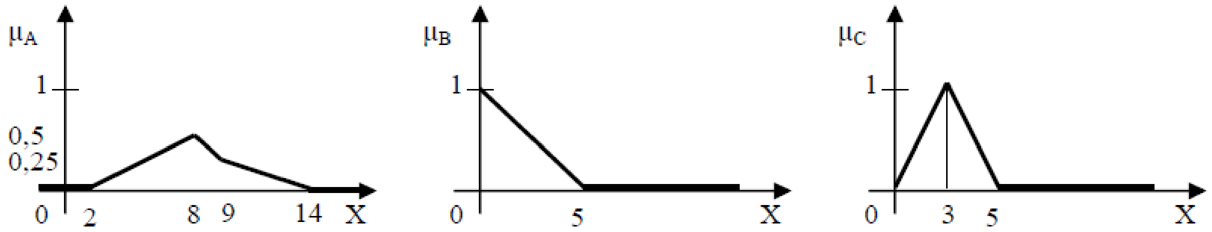
2.1.



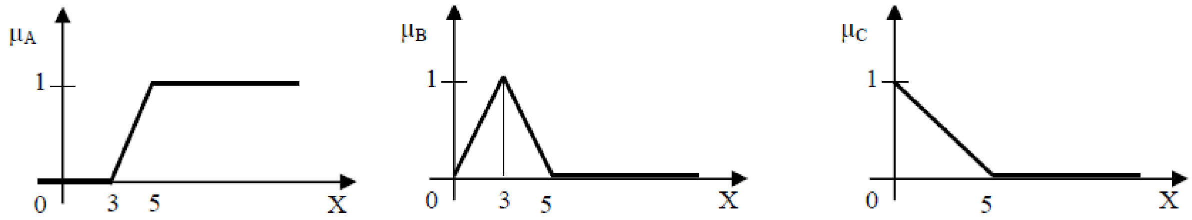
2.2.



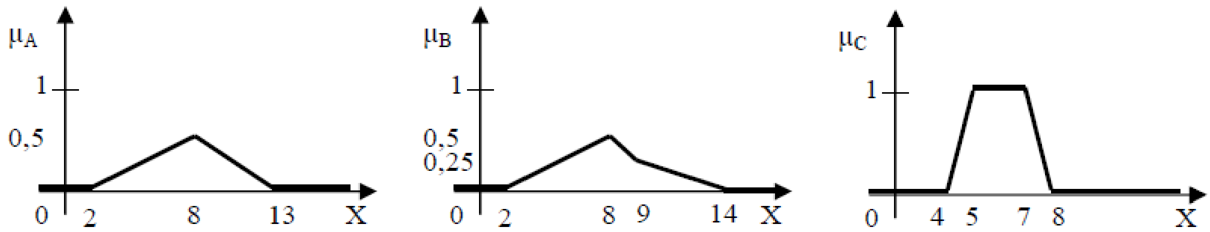
2.3.



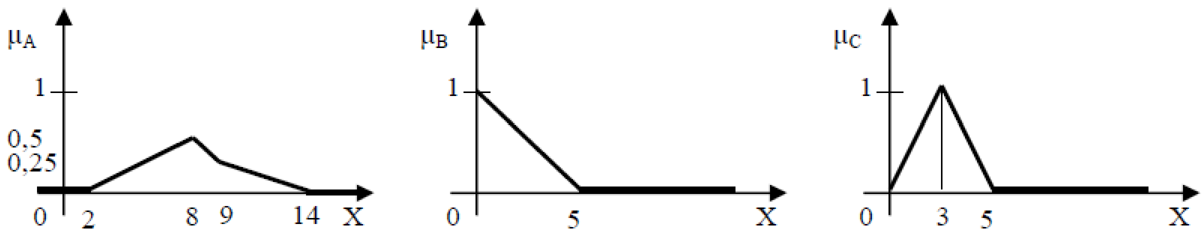
2.4.



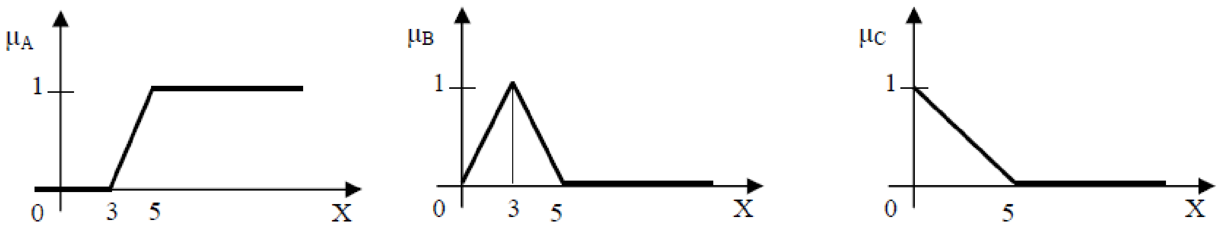
2.5.



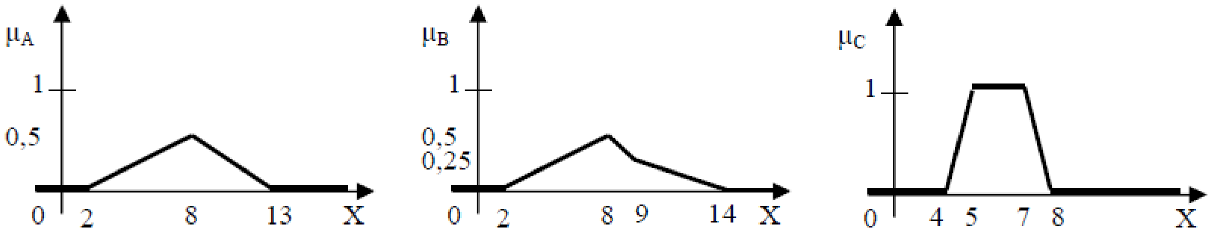
2.6.



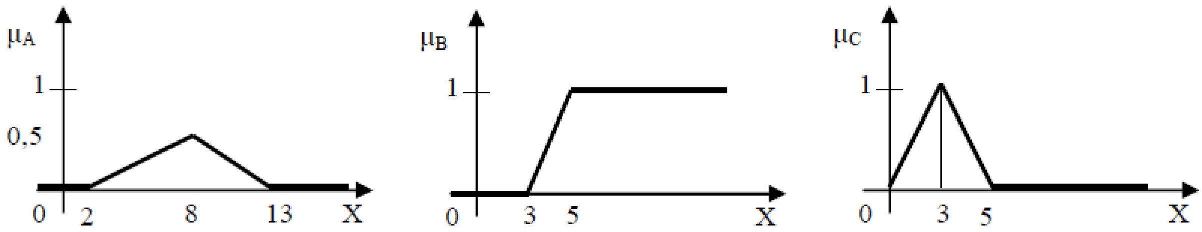
2.7.



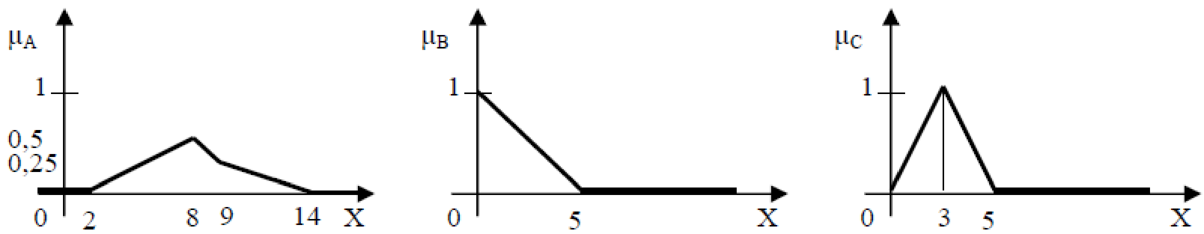
2.8.



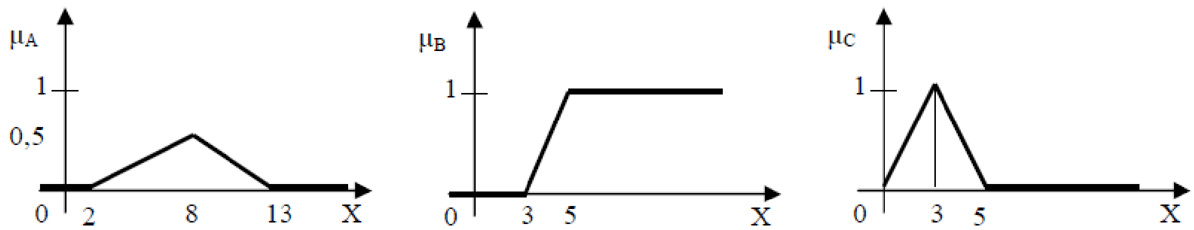
2.9.



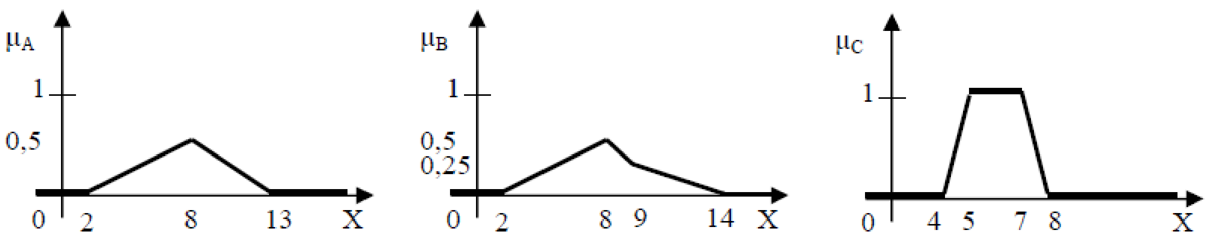
2.10.



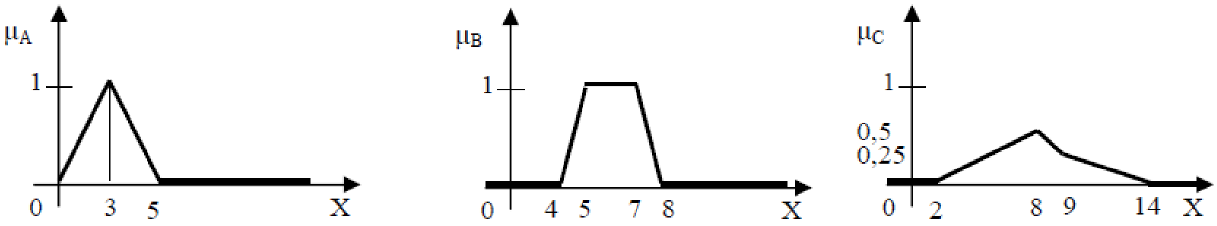
2.11.



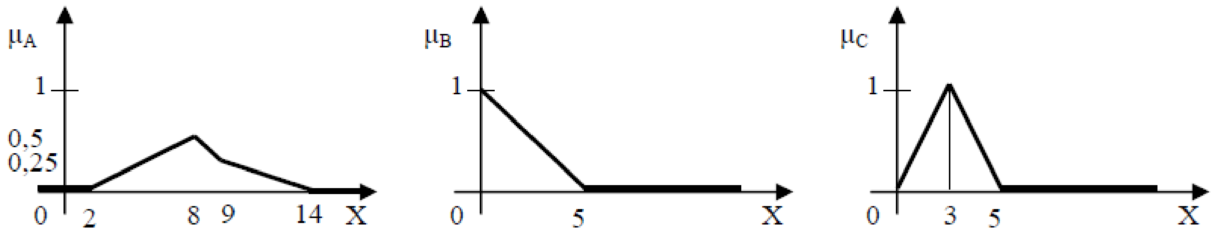
2.12.



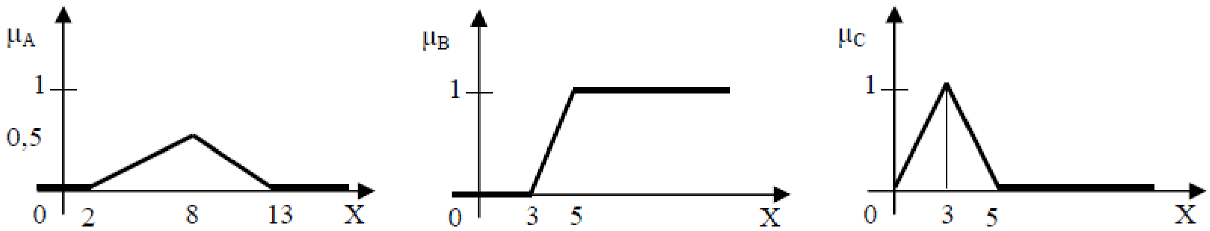
2.13.



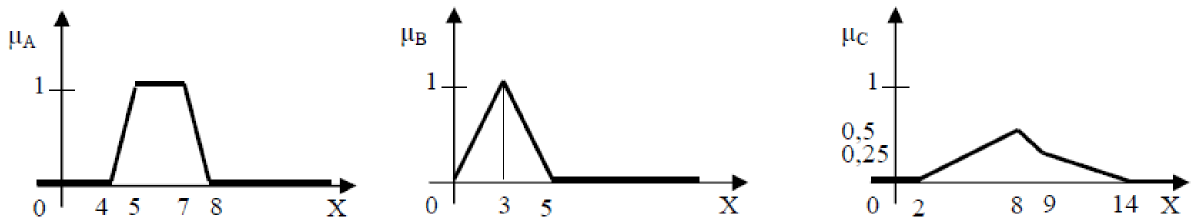
2.14.



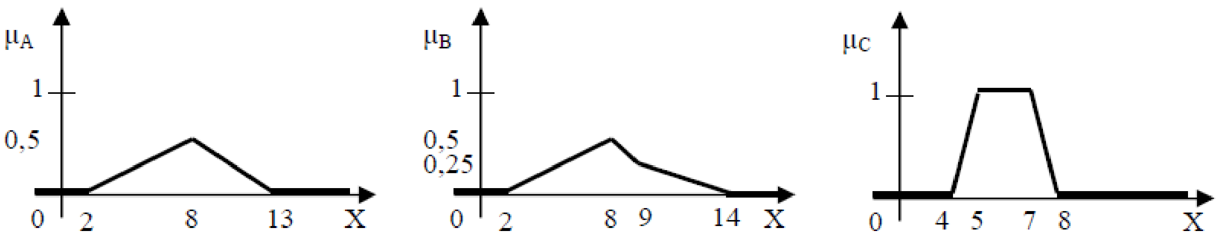
2.15.



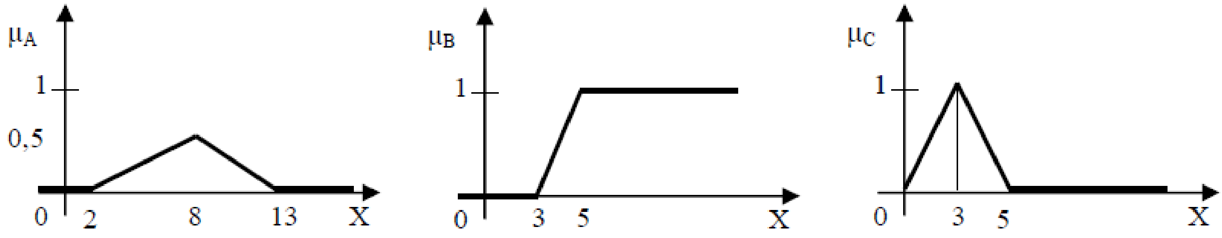
2.16.



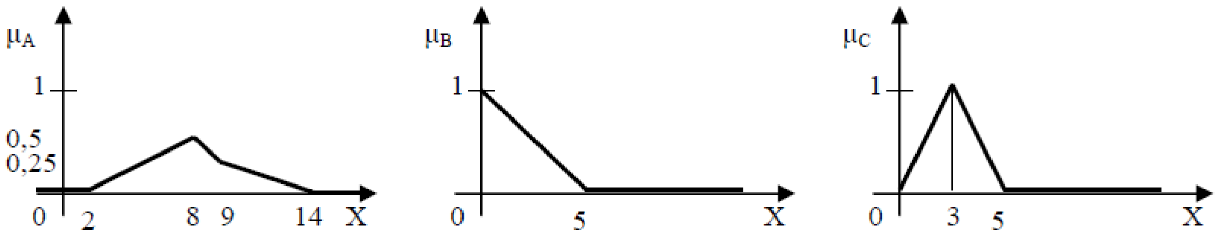
2.17.



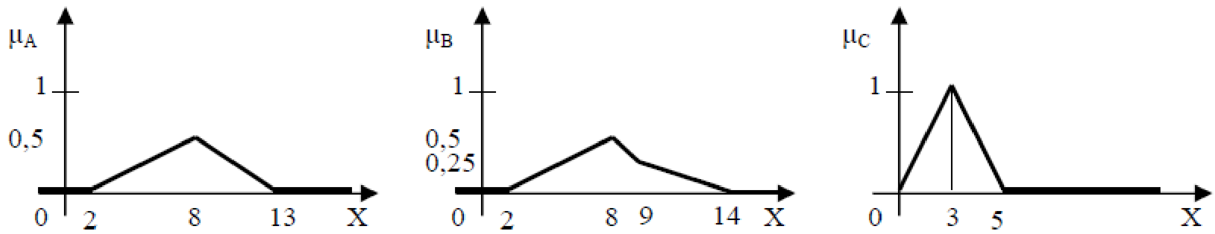
2.18.



2.19.



2.20.



Задача 3. Дано множество $W=\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ и два его нечетких подмножества: $X=\{u,\mu_x(u)\}$ и $Y=\{u, \mu_y(u)\}$, $x, y \in W$.

1) представить X и Y геометрически;

2) найти функции принадлежности и представить геометрически множество: $Z=\overline{X}\cap(\overline{X\cup Y}\cup Y)$;

3) определить какое из множеств X и Y является «более нечетким» двумя способами.

3.1.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,2	0,8	0,5	1	0	0,9	0,3	0,4
$\mu_y(u)$	0,7	0	0	0,6	0,4	1	0	0,4

3.2.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,1	1	0,4	0,1	0,3	1	0	0,1
$\mu_y(u)$	0,3	0,3	0,3	0,5	0,7	0,7	0,4	0,3

3.3.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,4	0,8	0,1	0,3	0,7	0	1	0,8
$\mu_y(u)$	0,6	0,2	0,1	0,4	0,8	0,7	0,1	0

3.4.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,4	0,3	1	0,2	0,7	0,8	0,4	0,2
$\mu_y(u)$	0,1	0,1	1	0	0,6	0,4	0,3	0,6

3.5.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	0,9	0,3	0,7	0,1	0,7	0,5	0,3
$\mu_y(u)$	0,6	1	0,2	0,2	0,3	0,9	1	0,4

3.6.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,5	0,4	0,6	0,1	1	1	0,3	0,4
$\mu_y(u)$	0,9	0,2	0,1	0	0,4	0,8	0,1	0,6

3.7.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,4	0,7	0,6	0,3	0,4	0,7	0,2	0,5
$\mu_y(u)$	0,9	0,1	0,3	0,7	0,2	0,1	1	0,3

3.8.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0	0,7	0,3	1	0,1	0,8	0,2	0,1
$\mu_y(u)$	0,6	0,1	0	0,5	0,8	1	0,4	0,2

3.9.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,4	0	1	0,1	0,1	0	1	1
$\mu_y(u)$	0,6	0,2	0,3	0	0,1	0,5	0,1	0,8

3.10.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	1	0,4	0,3	0,7	0,5	0	0
$\mu_y(u)$	1	0,3	0,9	0,1	0,5	0,1	0,3	1

3.11.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	0,9	0,7	0,1	0,2	1	0,7	0,1
$\mu_y(u)$	0,3	0,2	0,3	0,4	0,6	0,3	0	0

3.12.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,5	0,7	0,9	0,8	0,3	0,4	0,2	0,7
$\mu_y(u)$	1	0,1	0,6	1	0,5	0	0,7	0,9

3.13.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,1	0,6	0,4	0,7	0,9	1	0,2	0,7
$\mu_y(u)$	0,5	0,3	0,4	0,4	0	0,1	0,3	0,5

3.14.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	0,9	0,4	0,1	0,5	0,4	0,4	0,5
$\mu_y(u)$	0	0,3	0,1	0,6	0,7	0,5	0,1	0,5

3.15.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,5	0,9	0,1	0,2	0,3	1	0,1	0,6
$\mu_y(u)$	0,8	0,9	1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,2

3.16.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,1	0,7	0	0,2	0,3	1	0,7	0,3
$\mu_y(u)$	0,9	0,2	0,3	0,4	0,6	0,2	0,3	0,5

3.17.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	0,2	0,7	0,2	0,8	0,4	1	1
$\mu_y(u)$	0,6	0,3	0,2	0,1	0,7	0,1	0,2	0,4

3.18.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	0,8	1	1	0,2	0,1	0,3	0,4
$\mu_y(u)$	0,7	0	0,3	0,6	0,4	0,1	0	0,8

3.19.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,2	0,7	0,5	1	0,1	0,6	0,3	0,2
$\mu_y(u)$	0,7	0	0,3	0,6	1	1	0	0,4

3.20.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
$\mu_x(u)$	0,3	0,7	0,4	0,2	0,1	0,7	0,3	0,2
$\mu_y(u)$	0,7	0,8	0	0,6	1	0,2	0	0,3

Задача 4. Построить нечеткую базу знаний (использовать не менее 3 лингвистических переменных), проверить ее на полноту и произвести нечеткий вывод для конкретных значений (выбрать случайным образом).

4.1. для задачи закупок (соотношение цены, качества, объёма закупок и т.д.);

4.2. для задачи распределения нагрузок спортсмена (соотношение нагрузок, физического состояния, потребляемых калорий и т.д.);

4.3. для задачи управления транспортным средством (регулировка скорости с учетом передачи, погодных условий интенсивности покоя и т.д.);

4.4. для задачи управления транспортным средством (управление рулём, газом, тормозом при въезде в гараж);

4.5. для задачи регулирования теплоснабжения (соотношение среднесуточной, ветра, размера здания и т.д.);

4.6. для задачи регулирования реверсного движения на волжском мосту (учитывать время, интенсивность потока, день недели и т.д.);

4.7. для задачи подбора специй для блюда (соотношение количества и остроты специй, рецептуры, предпочтений едока, объема пищи и т.д.);

4.8. для задачи подбора объёма блюд (учитывать калорийность, вкусовые предпочтения, количество едоков и т.д.), проверить ее на полноту и произвести нечеткий вывод для конкретных значений (выбрать случайным образом);

4.9. для задачи подачи электроэнергии в условиях экономики (учет времени суток, типа помещений, количества людей, типа оборудования и т.д.);

4.10. для задачи подбора интенсивности занятий (учитывать начальный уровень подготовки, объём учебного материала, количество человек в группе, необходимый уровень усвоения и т.д.);

4.11. для задачи расчёта потребления бензина (учитывать тип совершаемых маневров, уровень подготовки водителя, состояние автомобиля и т.д.),

4.12. для задачи регулирования системы орошения (учитывать время года, количество выпадающих осадков, вид орошаемой культуры и т.д.);

4.13. для задачи настройки аудиосистемы (мощность колонок, их количество, размер помещения, назначение установки и т.д.);

4.14. для задачи выбора дозы снотворного (количество препарата, действие препарата, восприимчивость к выбранному препарату, цель и т.д.),

4.15. для задачи планирования объёма производства продукции (с учётом возможной прибыли, необходимых ресурсов, платёжеспособности населения, рынка сбыта и т.д.);

4.16. для задачи регулирования кондиционера (учитывать его мощность, объём помещения, температуру окружающей среды, необходимую температуру, в помещении и т.д.);

4.17. для задачи распределения нагрузки между компьютерами при использовании их в кластерах (учитывать характеристики, их количество, количество параллельного кода, характеристики сети и т.д.);

4.18. для задачи выбора складского помещения (учитывать площадь склада, количество и размеры продукции, удаленность от места производства и точек реализации, свойства продукции и характеристики помещений и т.д.);

4.19. для задачи выбора комплектующих для компьютера (учитывать цену, потребности пользователя, совместимость, сроки использования и т.д.);

4.20. для задачи определения количества линий в службе поддержки (учитывать количество обслуживаемых клиентов, среднюю частоту обращения в службу одного клиента, среднее время обслуживания одной заявки, квалификацию персонала и т.д.).

4 Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

1 Аверкин, А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун [и др.]. – М.: Наука, 1986. – 312 с. – ISBN 978–5–458–25284–3.

2 Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 11–е изд. – СПб.: Лань, 2005. – 736 с. – ISBN 581–1404–999.

3 Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

4 Гаврилов, В. Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: учебник для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 492 с. – ISBN 5–7038–1270–4.

5 Заде, Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. – М.: Мир, 1976. – 167 с.

6 Ильин, В. А. Основы математического анализа: В 2–х ч. учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позднляк. – 7–е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2009. – Ч.2. – 464 с. – ISBN 978–5–9221–0537–8.

7 Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

8 Лесин, В. В. Основы методов оптимизации: учеб. пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – 3-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 342 с. – Библиогр.: с. 340-341. – ISBN 978–5–8114–1217–4.

9 Летова, Т. А. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие / Т. А. Летова, А. В. Пантелеев. – М.: Логос, 2011. – 424 с. – (Новая университетская библиотека). – ISBN 978–5–98704–540–4.

10 Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – 13–е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1985. – Т.2. – 432 с.

11 Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – Минск: Высшая школа, 2013. – Ч. 3. Ряды. – 368 с. – ISBN 978–985–06–2222–8.

Список использованных источников

1 Конышева, Л. К. Основы теории нечетких множеств: для бакалавров и специалистов: учеб. пособие для вузов / Л. К. Конышева, Д. М. Назаров. – СПб.: Питер, 2011. – 191 с. – (Учебное пособие. Стандарт третьего поколения).

2 Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

3 Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – Высш. шк., 2005.