Невоструев Л.М., Тычинина С.Е.

О НЕКОТОРЫХ ПАРАХ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ 2-ПЛОСКОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассмотрены пары двупараметрических семейств 2-плоскостей в P_5, которые являются частными случаями односторонних расслояемых пар двупараметрических семейств 2-плоскостей в P_5 или частными случаями односторонних пар Т. Изложение ведется методом внешних форм Картана [1].

§1. Основная система уравнений

Рассмотрим пятимерное проективное пространство P_5, в котором введен подвижный репер $\{A_i\}(i,j,k=1,2,...,6)$. Инфинитезимальные перемещения этого репера определим системой дифференциальных уравнений $dA_i=\omega_i^j A_j$, где формы Пфаффа ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$.

В P_5 рассмотрим пару двупараметрических семейств 2-плоскостей (α) и β, между 2-плоскостями которых установлена биекция. Понятие односторонней пары Т и односторонней расслояемой пары семейств (α) и (β) были введены в[2] и [3].

Обозначим через T^1 одностороннюю пару Т семейств (α) и (β) в направлении от (α) к (β), а через T^{-1} в направлении от (β) к (α). Аналогично обозначим через R^1 односторонне расслояемую пару семейств (α) и (β) в направлении от (α) к (β) и через R^{-1} в направлении от (β) к (α).

Определим 2-плоскость α точками A_1, A_2, A_3, а 2-плоскость β точками A_4, A_5, A_6.

Если семейства (α) и (β) образуют пару T^1, то, как известно [2], будут иметь место уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1^5=0,\omega_1^6=0,\omega_2^4=0,\omega_2^6=0\\&\omega_3^4=0,\omega_3^5=0,\omega_3^6=\omega_1^4+\omega_2^5=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega_4^2=a'\omega_4^1,\omega_4^3=b'\omega_4^1,\omega_5^1=a_2'\omega_5^2\\&\omega_5^3=b_1'\omega_5^2,\omega_6^1=a_2'\omega_6^3,\omega_6^2=b_2'\omega_6^3\end{aligned}\right\}\quad(2),$$

внешним дифференцированием которых находим

$$\left.\begin{aligned}&\omega_4^5\wedge\omega_1^4-\omega_1^2\wedge\omega_2^5=0,\omega_1^3\wedge\omega_2^5+\left(\omega_1^3-\omega_4^6\right)\wedge\omega_1^4=0\\&\omega_2^1\wedge\omega_1^4-\omega_5^4\wedge\omega_2^5=0,\omega_2^3\wedge\omega_1^4+\left(\omega_2^3-\omega_5^6\right)\wedge\omega_2^5=0\\&\omega_6^4\wedge\omega_2^5-\left(\omega_6^4-\omega_3^1\right)\wedge\omega_1^4=0,\omega_6^5\wedge\omega_1^4+\left(\omega_6^5-\omega_3^2\right)\wedge\omega_2^5=0\\&\Omega_1\wedge\omega_1^4+\Omega_2\wedge\omega_2^5=0\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta a'\wedge\omega_4^1+\left(a'a_1'-1\right)\omega_4^5\wedge\omega_5^2+\left(a'a_2'-b_2'\right)\omega_4^6\wedge\omega_6^3=0\\&\Delta b'\wedge\omega_4'+\left(a_2'b'-1\right)\omega_4^6\wedge\omega_6^3+\left(a_1'b'-b_1'\right)\omega_4^5\wedge\omega_5^2=0\\&\Delta a_1'\wedge\omega_5^2+\left(a'a_1'-1\right)\omega_5^4\wedge\omega_4'+\left(a_1'b_2'-a_2'\right)\omega_5^6\wedge\omega_6^3=0\\&\Delta b_1'\wedge\omega_5^2+\left(b_1'b_2'-1\right)\omega_5^6\wedge\omega_6^3+\left(a'b_1'-b'\right)\omega_5^4\wedge\omega_4^1=0\\&\Delta a_2'\wedge\omega_6^3+\left(a_2'b'-1\right)\omega_6^4\wedge\omega_4^1+\left(a_2'b_1'-a_1'\right)\omega_6^5\wedge\omega_5^2=0\\&\Delta b_2'\wedge\omega_6^3+\left(b_1'b_2'-1\right)\omega_6^5\wedge\omega_5^2+\left(b'b_2'-a'\right)\omega_6^4\wedge\omega_4^1=0\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

где

$$\Omega_1=\omega_1^1-\omega_3^3-\omega_4^4+\omega_6^6,\Omega_2=\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_5^5+\omega_6^6$$
$$\Delta a'=da'-a'\left(\omega_1^1-\omega_2^2+a'\omega_2'+b'\omega_3^1\right)+b'\omega_3^2+\omega_1^2$$
$$\Delta b'=db'-b'\left(\omega_1^1-\omega_3^3+a'\omega_2^1+b'\omega_3^1\right)+a'\omega_2^3+\omega_1^3$$
$$\Delta a_1'=da_1'+a_1'\left(\omega_1'-\omega_2^2-a_1'\omega_1^2-b_1'\omega_3^2\right)+b_1'\omega_3'+\omega_2^1$$
$$\Delta b_1'=db_1'-b_1'\left(\omega_2^2-\omega_3^3+a_1'\omega_1^2+b_1'\omega_3^2\right)+a_1'\omega_1^3+\omega_2^3$$
$$\Delta a_2'=da_2'+a_2'\left(\omega_1^1-\omega_3^3-a_2'\omega_1^3-b_2'\omega_2^3\right)+b_2'\omega_2'+\omega_3^1$$
$$\Delta b_2'=db_2^1+b_2^1\left(\omega_2^2-\omega_3^3-a_2^1\omega_1^3-b_2^1\omega_2^3\right)+a_2^1\omega_1^2+\omega_3^2$$

Здесь формы ω_1^4 и ω_2^5 являются независимыми. Если семейства (α) и (β) образуют пару R^1, то согласно [3] будут иметь место уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^2=0,\omega_1^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^3=0,\omega_2^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^3=0\\&\omega_2^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^1=0,\omega_3^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^1=0,\omega_3^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^2=0\\&\omega_1^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^1=\omega_2^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^2=\omega_3^\upsilon\wedge\omega_\upsilon^3\end{aligned}\right\},\quad(5)$$

где $\upsilon=4$, 5, 6.

§ 2. Преобразование T^1 R^1

Определение. Переход от произвольно заданного семейства (α) к семейству (β), при котором пара семейств (α) и (β) образуют пару T^1R^1 (т. е. пару T^1 и пару R^1), назовем преобразованием T^1R^1.

Уравнение (5), в силу уравнений (1), (2), сводится к трем уравнениям:

$$\omega_4^1\wedge\omega_1^4=0,\omega_5^2\wedge\omega_2^5=0,\omega_6^3\wedge\left(\omega_1^4+\omega_2^5\right)=0\quad(6)$$

Обозначим через (S) систему уравнений (1), (3), а через (S’) систему уравнений (1), (2), (3), (4), (6). Система (S) определяет произвольное семейство (α). Ее характеристическая система содержит, кроме форм ω_1^4 и ω_2^5, независимых на любом интегральном многообразии, и левых частей уравнений (1) $q=14$ форм:

$$\omega_4^5,\omega_1^2,\omega_1^3,\omega_4^6,\omega_2^1,\omega_5^4,\omega_2^3,\omega_5^6,\omega_6^4,\omega_3^1,\omega_6^5,\omega_3^2,\Omega_1,\Omega_2.\quad(7)$$

Легко показать, что характеристическая система форм систем (S’) включает в себя все формы характеристической системы (S), и, следовательно, характеристические переменные системы (S’) можно выбрать так, что они будут содержать характеристические переменные системы (S).

Так как система (S) находится в инволюции, то, взяв какое-нибудь ее решение и внеся его в систему (S'), мы обратим все уравнения системы (S) в тождества. Ввиду того, что решение системы (S) задано, все ее q искомых форм (7) будут теперь даны известными линейными комбинациями независимых форм. В силу этого система уравнений (4) примет другой вид, и замкнутая система уравнений (2), (4), (6) определит преобразование T^1R^1. Эта система, в которой $q=9$ формам $\omega_4^1, \omega_5^2, \omega_6^3$, $\Delta a', \Delta b', \Delta a_1', \Delta b_1', \Delta a_2', \Delta b_2'$, находится в инволюции с характерами $S_1 = 9, S_2 = 0$, т. е. справедлива.

<u>Теорема:</u> Преобразование T^1R^1 существует произволом девяти функций одного аргумента.

Заметим, что система (S') определяет пару T^1R^1, которая существует с произволом семи функций двух аргументов.

Геометрический смысл уравнений (6) состоит в том, что фокальные направления семейств (α) и (β) соответствуют прямо [2]. Таким образом, в паре T^1R^1 фокальные направления всегда соответствуют прямо.

Легко увидеть, что геометрической разницы между парами T^1R^1 и $T^{-1}R^{-1}$ нет, но между преобразованиями T^1R^1 и $T^{-1}R^{-1}$ имеется существенное различие, о чем говорит следующее:

<u>Определение.</u> Переход от произвольного заданного семейства (β) к семейству (α), при котором пара семейств (α) и (β) образует пару T^1R^1, назовем преобразованием $T^{-1}R^{-1}$. Справедлива.

<u>Теорема.</u> Преобразование $T^{-1}R^{-1}$ существует с произволом девяти функций одного аргумента.

§3. Пары T^1R^{-1}

<u>Определение.</u> Парой T^1R^{-1} семейств (α) и (β) назовем такую пару, если она является и парой T^1 и парой R^{-1}.

Если семейства (α) и (β) образуют пару T^1, то будут иметь место уравнения (1), (2). Если же теперь семейства (α) и (β) образуют и пару R^{-1}, то будут иметь место уравнения, получающиеся из (5) при помощи подстановки индексов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и которые в силу (1), (2) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l} a'\omega_1^4 \wedge \omega_2^5 = 0, b'\omega_4^1 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0 \\ b_1'\omega_5^2 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, a_1'\omega_5^2 \wedge \omega_1^4 = 0 \\ a_2'\omega_6^3 \wedge \omega_1^4 = 0, b_2'\omega_6^3 \wedge \omega_2^5 = 0 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^4 - \omega_6^3 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \omega_5^2 \wedge \omega_2^5 - \omega_6^3 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0 \quad (9)$$

Из уравнений (8) следует, что из шести коэффициентов $a_1', b_1', a', b', a_2', b_2'$ минимум три должны обращаться в нуль. Действительно, если обращаются в нуль какие-либо только два коэффициента, то одна из форм $\omega_4^1, \omega_5^2, \omega_6^3$ обращается в нуль. Если, например, $\omega_4' = 0$, то семейство (β) допускает огибающую 2-поверхность, так как в этом случае $dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \omega_4^5 A_5 + \omega_4^6 A_6$ и, следовательно, 2-плоскость β касается 2-поверхности A_4.

Отбрасывая эти случаи, имеем следующие возможности обращения в нуль трех коэффициентов из шести указанных:

$$\begin{array}{l} 1)\ b' = a_1' = b_2' = 0;\ 2)\ b' = a_1' = a_2' = 0 \\ 3)\ b' = b_1' = a_2' = 0;\ 4)\ b' = b_1' = b_2' = 0 \end{array} \qquad (10)$$

И еще четыре случая, получающиеся из (10) при помощи подстановки

$$\begin{pmatrix} a' & a_1' & a_2' & b_1' & b_2' & b' \\ b' & b_1' & b_2' & a_1' & a_2' & a' \end{pmatrix}.$$

Из случаев (10) только первый не приводит к вырождению рассматриваемой конфигурации. Действительно, если, например, имеется второй случай (10), то уравнения (8) дают

$$\omega_4^1 \wedge \omega_2^5 = 0, \omega_5^2 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \omega_6^3 \wedge \omega_2^5 = 0 .$$

Так как направления $\omega_4^1 = 0$, или $\omega_5^2 = 0$, или $\omega_6^3 = 0$ являются соответственно фокальными смещениями для фокусов A_4, A_5, A_6 [4], то из полученных уравнений следует, что фокальные смещения фокусов A_4 и A_6 записываются одним и тем же уравнением, т. е. вся прямая A_4A_6 состоит из фокусов.

Аналогично в третьем случае (10) также прямая A_4A_6 состоит из фокусов, а в четвертом – прямая A_5A_6.

В первом случае (10) уравнения (8) сводятся к трем уравнениям:

$$\omega_4^1 \wedge \omega_2^5 = 0, \omega_5^2 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \omega_6^3 \wedge \omega_1^4 = 0 . \quad (11)$$

Геометрический смысл этих уравнений состоит в том, что фокальные смещения фокусов A_4, A_5, A_6 соответствуют фокальным смещениям фокусов A_2, A_3, A_1, т. е. записываются одними и теми же уравнениями. Такое соответствие назовем циклическим, а пары T^1R^{-1} этого случая назовем парами $T^1R_1^{-1}$.

Если к случаям (10) применить выше указанную подстановку, то к выражению не приводит только один случай $a' = b_1' = a_2' = 0$. Геометрически этот случай отличается от первого случая (10) только тем, что циклическое соответствие фокальных смещений будет направлено в другую сторону, а именно: фокальным смещением фокусов A_4, A_5, A_6 будут соответствовать фокальные смещения A_3, A_1, A_2, следовательно, этот случай существенно отличается от первого случая (10).

Пусть теперь четыре коэффициента из шести $a', b', a_1', b_1', a_2', b_2'$ обращаются в нуль.

Тогда одна из пар a', b' или a_1', b_1' или a_2', b_2' должна обращаться в нуль. Пусть для определенности в нуль обращается пара $a' = 0, b' = 0$ (12).

Тогда, как видно из оставшихся уравнений (8), возможны три случая, не приводящие к вырождению конфигурации.

а) $a' = a_2' = 0$, б) $a_1' = b_2' = 0$, в) $b_1' = a_2' = 0$ (13)

Геометрический смысл уравнений (12) состоит в том, что соответствующие фокусы A_1 и A_4 2-плоскостей α и β обладают характеристическим свойством соответствующих фокусов пары Т [2].

Действительно, в этом случае $\omega_4^2 = 0$, $\omega_4^3 = 0$, т. е. имеем:

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4,$$
$$dA_4 = \omega_4^1 A_1 + \omega_4^4 A_4 + \omega_4^5 A_5 + \omega_4^6 A_6$$

что и доказывает наше утверждение.

Геометрический смысл (13) состоит в случае:

а) состоит в том, что фокальные смещения фокусов A_5 и A_6 соответствуют фокальным смещением фокусов A_3 и A_2. Действительно, теперь уравнения (8) дают: $\omega_5^2 \wedge (\omega_1^4 + \omega_2^5) = 0, \omega_6^3 \wedge \omega_2^5 = 0$, т. е. фокальные смещения фокусов A_3 и A_5 A_2 и A_6 записываются одним и тем же уравнением. Аналогично в случае б) фокальные смещения фокусов A_5 и A_6 соответствуют фокальным смещениям фокусов A_3 и A_1, а в случае в) фокальным смещениям фокусов A_5 и A_6 соответствуют фокальные смещения фокусов A_1 и A_2.

Отсюда следует, что случаи б) и в) не дают различных геометрических конфигураций, так как фокусы A_5 и A_6, A_2 и A_3 входят в эти конфигурациях равноправно. Конфигурация в) получается из конфигурации б) подстановкой индексов

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, существенно различными будут только случаи а) и б).

Отметим, что если рассматривать случаи, когда обращаются в нуль пары a_1', b_1' или a_2', b_2', то мы не получим новых геометрических конфигураций, и они получаются из рассмотренных случаев подходящей заменой индексов 1~2~3~1, 4~5~6~4.

Пары T^1R^{-1} случая (12), (13а) назовем парами $T^1R_2^{-1}$, а в случае (12), (13б) – парами $T^1R_3^{-1}$.

Рассмотрим теперь случай, когда из шести коэффициентов $a', b', a_1', b_1', a_2', b_2'$ в нуль обращаются пять коэффициентов. Тогда две из трех пар $a', b', a_1', b_1', a_2', b_2'$ должны обращаться в нуль. Пусть для определенности

$$a' = b' = a_1' = b_1' = 0. \quad (14)$$

Теперь, как следует из уравнений (8), возможны два случая $\alpha) a_2' = 0$ или $\beta) b_2' = 0$. (15)

Геометрический смысл уравнений (14) состоит в том, что соответствующие фокусы A_1 и A_4, A_2 и A_5 обладают характеристическим свойством соответствующих фокусов пары Т.

Геометрический смысл уравнения (15α) состоит в том, что фокальное смещение фокуса A_6 соответствует фокальному смещению фокуса A_2, а в случае (15β) фокальному смещению фокуса A_6 соответствует фокальное смещение фокуса A_1.

Таким образом, случаи (15) геометрически друг от друга не отличаются, и один получается из другого подстановкой индексов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пары T^1R^{-1} этого случая назовем парами $T^1R_4^{-1}$.

Заметим, что случаи $a_1' = b_1' = a_2' = b_2' = 0$ и $a' = b' = a_2' = b_2' = 0$ получаются из случая (14) соответственно циклической заменой индексов 1~2~3~1, 4~5~6~4 и 3~2~1~3, 6~5~4~6.

Наконец случай, когда все шесть коэффициентов $a', b', a_1', b_1', a_2', b_2'$ обращаются в нуль, приводит к расслояемым парам [3].

§4. Теорема существования пар $T^1R_1^{-1}$

Как было показано выше, пары $T^1R_1^{-1}$ характеризуются наличием уравнений:

$$b' = 0, a_1' = 0, b_2' = 0 \quad (16)$$

В силу уравнений (16) уравнения (8) сводятся к уравнениям (11), в силу которых уравнения (4. 22) принимают вид:

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^4 - \omega_6^3 \wedge \omega_2^5 = 0, \ (\omega_5^2 - \omega_6^3) \wedge \omega_2^5 = 0. \quad (17)$$

Уравнения (2), ввиду наличия условий (16), дают:

$$\omega_4^2 = a'\omega_4^1, \omega_4^3 = 0, \omega_5^1 = 0$$
$$\omega_5^3 = b_1'\omega_5^2, \omega_6' = a_2'\omega_6^3, \omega_6^2 = 0 \cdot \quad (18)$$

Из уравнений (11), (17) находим, что

$$\omega_4^1 = -p\omega_2^5, \omega_5^2 = p(\omega_1^4 + \omega_2^5), \omega_6^3 = p\omega_1^4. \quad (19)$$

Внешним дифференцированием уравнений (18), (19) находим:

$$
\left.\begin{array}{l}
\nabla a' \wedge \omega_2^5 + \left(\omega_4^5 - a'a'_2\omega_4^6\right) \wedge \omega_1^4 = 0, \\
\left(a'\omega_2^3 + \omega_1^3\right) \wedge \omega_2^5 + \omega_4^6 \wedge \omega_1^4 + b'_1\omega_4^5 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \\
\left(b'\omega_3^1 + \omega_2^1\right) \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) + \omega_5^4 \wedge \omega_2^5 - a'_2\omega_5^6 \wedge \omega_1^4 = 0, \\
\nabla b'_1 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) - \omega_6^5 \wedge \omega_1^4 - a'b'_1\omega_5^4 \wedge \omega_2^5 = 0, \\
\nabla a'_2 \wedge \omega_1^4 + \left(\omega_6^4 + a'_2 b'_1\omega_6^5\right) \wedge \omega_2^5 = 0, \\
\left(a'_2\omega_1^2 + \omega_3^2\right) \wedge \omega_1^4 - \omega_6^5 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) + a'\omega_6^4 \wedge \omega_2^5 = 0, \\
\left(\nabla\rho + \Omega_1 + \Omega_2 + a'\omega_2^1 + a'_2\omega_4^6\right) \wedge \omega_2^5 = 0, \\
\left(\nabla\rho + \Omega_1 + a'_2\omega_1^3\right) \wedge \omega_1^4 - b'_1\omega_6^5 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \\
\left(\nabla\rho + \Omega_2 + b'_1\omega_3^2\right) \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) + a'\omega_5^4 \wedge \omega_2^5 = 0,
\end{array}\right\} \quad (20)
$$

где: $\nabla a' = da' - a'\left(\omega'_1 - \omega_2^2 + a'\omega_2^1\right) + \omega_1^2 + \omega_4^5,$

$$\nabla b'_1 = db'_1 - b'_2\left(\omega_2^2 - \omega_3^3 + b'_1\omega_3^2\right) + \omega_2^3,$$

$$\nabla a'_2 = da'_2 + a'_2\left(\omega'_1 - \omega_3^3 - a'_2\omega_1^3\right) + \omega_3^1 + a'_2 b'_1\omega_6^5,$$

$$\nabla\rho = d\ln\rho + 2\left(\omega_3^3 - \omega_6^6\right)$$

Замкнутая система уравнений (1), (18), (19), (3), (20), определяющая пару $T^1R_1^{-1}$, имеет $q = 18$ форм: $\omega_4^5, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_4^6, \omega_2^1, \omega_5^4, \omega_2^3, \omega_5^6, \omega_6^4, \omega_3^1, \omega_6^5, \omega_3^2, \Omega_1, \Omega_2$, $\nabla a', \nabla b'_1, \nabla a'_2, \nabla\rho$ и находится в инволюции с характерами $S_1 = 16, S_2 = 2$, т. е. справедлива.

Теорема. Пары $T^1R_1^{-1}$ существуют с произволом двух функций двух аргументов.

§5. Теорема существования пар $T^1R_2^{-1}$

Пары $T^1R_2^{-1}$ характеризуются уравнениями (12), (13 а), в силу которых уравнение (8) сводятся к двум уравнениям:

$$\omega_5^2 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \omega_6^3 \wedge \omega_2^5 = 0. \quad (21)$$

Наиболее общее алгебраическое решение уравнений (9), (21) имеет вид:

$$\omega_4^1 = (\alpha - \beta)\omega_1^4 - \beta\omega_2^5, \omega_6^3 = -\beta\omega_2^5, \omega_5^2 = \beta\left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right). \quad (22)$$

Теперь в силу уравнений (12), (13a), (22) уравнения (2) принимают вид:

$$
\begin{array}{l}
\omega_4^2 = 0, \omega_4^3 = 0, \omega_5^1 = 0, \omega_6^1 = 0 \\
\omega_5^3 = \beta b'_1\left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right), \omega_6^2 = -\beta b'_2\omega_2^5.
\end{array} \quad (23)
$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (22), после некоторых преобразований получим:

$$\Delta\alpha \wedge \omega_1^4 + \beta\left(b'_1\omega_3^2 + b'_2\omega_5^6 - \Omega_1\right) \wedge \omega_2^5 = 0 \quad (24)$$

$$\Delta\beta \wedge \omega_1^4 = 0, \Delta b \wedge \omega_2^5 = 0, \quad (25)$$

где

$$\Delta\alpha = d\alpha + 2\alpha\left(\omega_1^1 - \omega_4^4\right) - \beta\left(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4 + \omega_5^5 - b'_1\omega_3^2\right) - \Omega_1,$$

$$\Delta\beta = d\ln\beta + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_5^5 - \omega_6^6 + b'_1\omega_3^2 + b'_2\omega_2^3$$

Из уравнений (4.40) в силу независимости форм ω_1^4 и ω_2^5 получаем, что $\Delta\beta = 0$, т. е.

$$d\ln\beta + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_5^5 - \omega_6^6 + b'_1\omega_3^2 + b'_2\omega_2^3 = 0. \quad (26)$$

Дифференцируем внешним образом уравнения (23), (26), после некоторых преобразований получим

$$
\left.\begin{array}{l}
(\alpha - \beta)\omega_1^2 \wedge \omega_1^4 - \beta\omega_4^5 \wedge \left(2\omega_1^4 + \omega_2^5\right) + \beta b'_2\omega_4^6 \wedge \omega_2^5 = 0, \\
\alpha\omega_1^3 \wedge \omega_1^4 + \beta\omega_4^6 \wedge \left(\omega_2^5 - \omega_1^4\right) - \beta b'_2\omega_5^4 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \\
\beta\left(\omega_2^1 + b'_2\omega_3^1\right) \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) - \omega_5^4 \wedge \left((\alpha - \beta)\omega_1^4 - \beta\omega_2^5\right) = 0 \\
\beta\left(\omega'_3 + b'_2\omega'_2\right) \wedge \omega_2^5 + \omega_6^4 \wedge \left((\alpha - \beta)\omega_1^4 - \beta\omega_2^5\right) = 0 \\
\Delta b'_1 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \Delta b'_2 \wedge \omega_2^5 = 0 \\
\left(\omega'_2 + b'_1\omega_3^1\right) \wedge \omega_1^2 + \left(\omega'_3 + b'_2\omega_2^1\right) \wedge \omega_1^3 - \omega_5^4 \wedge \omega_4^5 - \\
- \omega_6^4 \wedge \omega_4^6 + \Delta b'_1 \wedge \omega_3^2 + \Delta b'_2 \wedge \omega_2^3 - \\
- 2\beta\left(2 + b'_1 b'_2\right)\omega_1^4 \wedge \omega_2^5 = 0, \text{ где} \\
\Delta b'_1 = db'_1 - b'_1\left(\omega_2^2 - \omega_3^3 + b'_1\omega_3^2\right) - \left(b'_1 b'_2 - 2\right)\omega_2^3, \\
\Delta b'_2 = db'_2 + b'_2\left(\omega_2^2 - \omega_3^3 - b'_2\omega_2^3\right) - \left(b'_1 b'_2 - 2\right)\omega_3^2
\end{array}\right\} \quad (27)
$$

Замкнутая система уравнений (1), (23), (26); (3), (24), (27), определяющая пару $T^1R_2^{-1}$, содержит $q = 17$ форм: $\omega_4^5, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_4^6, \omega_2^1, \omega_5^4, \omega_2^3, \omega_5^6, \omega_6^4, \omega_3^1, \omega_6^5, \omega_3^2$, $\Omega_1, \Omega_2, \Delta\alpha, \Delta b'_1, \Delta b'_2$ и находится в инволюции с характерами $S_1 = 15, S_2 = 2$, то имеет место

Теорема. Пары $T^1R_2^{-1}$ существуют с произволом двух функций двух аргументов.

§6. Теорема существования пар $T^1R_3^{-1}$

Для пар $T^1R_3^{-1}$ имеют место уравнения (12), (13б), в силу которых уравнения (8) дают

$$\omega_5^2 \wedge \left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right) = 0, \omega_6^3 \wedge \omega_1^4 = 0 \quad (28)$$

Наиболее общее алгебраическое решение уравнений (11), (28) имеют вид

$$\omega_4^1 = \alpha\omega_1^4 - \beta\omega_2^5, \omega_5^2 = \beta\left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right), \omega_6^3 = \beta\omega_1^4 \quad (29)$$

Теперь уравнения (2) дают

$$
\begin{array}{l}
\omega_4^2 = 0, \omega_4^3 = 0, \omega_5^1 = 0, \omega_6^2 = 0, \\
\omega_5^3 = \beta b'_1\left(\omega_1^4 + \omega_2^5\right), \omega_6^1 = \beta a'_2\omega_1^4
\end{array} \quad (30)
$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (29), (30), после некоторых преобразований, получим

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta\alpha\wedge\omega_1^4-\beta(\Delta\beta+\Omega_1)\wedge\omega_2^5=0\\
(\Delta\beta+\Omega_2+b_1'\omega_3^2)\wedge(\omega_1^4+\omega_2^5)=0\\
(\Delta\beta+\Omega_1+a_2'\omega_1^3)\wedge\omega_1^4-b_1'\omega_3^2\wedge\omega_2^5=0\\
\omega_1^3\wedge(\alpha\omega_1^4-\beta\omega_2^5)-\beta\omega_4^6\wedge\omega_1^4=\\
=0,\omega_1^2\wedge(\alpha\omega_1^4-2\beta\omega_2^5)-\beta\omega_4^5\wedge\omega_2^5=0\\
\beta(\omega_2^1+b_1'\omega_3^1)\wedge(\omega_1^4+\omega_2^5)-\omega_5^4\wedge(\alpha\omega_1^4-\beta\omega_2^5)-\\
-\beta a_2'\omega_5^6\wedge\omega_1^4=0\\
(\omega_3^2+a_2'\omega_1^2)\wedge\omega_1^4-\omega_6^5\wedge(\omega_1^4+\omega_2^5)=0\\
\Delta b_1'\wedge(\omega_1^4+\omega_2^5)-\omega_5^6\wedge\omega_1^4=0\\
\Delta a_2'\wedge\omega_1^4+(\omega_6^4+a_2'b_1'\omega_6^5)\wedge\omega_2^5=0,\text{где}
\end{array}\right\}\quad(31)$$

$$\begin{array}{l}
\Delta\alpha=d\alpha+2\alpha(\omega_1^1-\omega_4^4)-\beta(\Omega_1+a_2'\omega_4^1),\\
\Delta\beta=d\ln\beta+2(\omega_3^3-\omega_6^6),\\
\Delta b_1'=db_1'-b_1'(\omega_2^2-\omega_3^3+b_1'\omega_3^2)+\omega_2^3,\\
\Delta a_2'=da_2'+a_2'(\omega_1^1-\omega_3^3-a_2'\omega_1^3)+\omega_3^1-\alpha/\beta\omega_6^4+a_2'b_1'\omega_6^5
\end{array}$$

Замкнутая система уравнений (1), (29), (30); (3), (31) определяет пару $T^1R_3^{-1}$. Характеристическая система содержит, кроме форм ω_1^4,ω_2^5 и левых частей уравнений (1), (29), (30), $q=18$ форм: $\omega_4^5,\omega_1^2,\omega_1^3,\omega_4^6,\omega_2^1,\omega_5^4,\omega_2^3,\omega_5^6,\omega_6^4,\omega_3^2,\omega_6^5,\omega_3^1,\Omega_1,\Omega_2,\Delta\alpha,\Delta\beta,$ $\Delta b_1',\Delta a_2'$. Система находится в инволюции с характерами $S_1=16, S_2=2$, т. е. справедлива.

<u>Теорема.</u> Пары $T^1R_3^{-1}$ существуют с произволом двух функций двух аргументов.

§7. Теорема существования пар $T^1R_4^{-1}$

Пары $T^1R_4^{-1}$ характеризуются уравнениями (14), (15 α), в силу которых уравнения (8), (9) сводятся к трем уравнениям

$$\begin{array}{l}
\omega_6^3\wedge\omega_2^5=0,(\omega_4^1-\omega_6^3)\wedge\omega_1^4=0,\\
\omega_5^2\wedge\omega_2^5-\omega_6^3\wedge\omega_1^4=0
\end{array}\quad(32)$$

Наиболее общее алгебраическое решение уравнений (32) имеет вид:

$$\begin{array}{l}
\omega_6^3=\alpha\omega_2^5,\omega_4^1=\beta\omega_1^4+\alpha\omega_2^5\\
\omega_5^2=\gamma\omega_2^5-\alpha\omega_1^4
\end{array}.\quad(33)$$

Уравнения (2) дают $\omega_4^2=0,\omega_4^3=0,\omega_5^1=0,\omega_5^3==0,\omega_6^1=0,\omega_6^2=\alpha b_2'\omega_2^5$ (34).

Продифференцировав уравнения (33), (34) внешним образом, после некоторых преобразований получим:

$$\left.\begin{array}{l}
\omega_1^2\wedge(\beta\omega_1^4+\alpha\omega_2^5)-\omega_4^5\wedge(\gamma\omega_2^5-\alpha\omega_1^4)-\alpha b_2'\omega_4^6\wedge\omega_2^5=0\\
\omega_1^3\wedge(\beta\omega_1^4+\alpha\omega_2^5)-\alpha\omega_4^6\wedge\omega_2^5=0\\
\omega_2^1\wedge(\gamma\omega_2^5-\alpha\omega_1^4)-\omega_5^4\wedge(\beta\omega_1^4+\alpha\omega_2^5)=0\\
\omega_2^3\wedge(\gamma\omega_2^5-\alpha\omega_1^4)-\alpha\omega_5^6\wedge\omega_2^5=0\\
\alpha(\omega_3^1+b_2'\omega_2^1)\wedge\omega_2^5-\omega_6^4\wedge(\beta\omega_1^4+\alpha\omega_2^5)=0\\
\Delta b_2'\wedge\omega_2^5+\omega_6^5\wedge\omega_1^4=0\\
(\Delta\alpha+\alpha(b_2'\omega_2^3-\Omega_1))\wedge\omega_2^5=0,\Delta\beta\wedge\omega_1^4+\Delta\alpha\wedge\omega_2^5=0\\
\Delta\gamma\wedge\omega_2^5-\Delta\alpha\wedge\omega_1^4=0,\text{где}\\
\Delta b_2'=db_2'+b_2'(\omega_2^2-\omega_3^3-b_2'\omega_2^3)+\omega_3^2-\dfrac{\gamma}{\alpha}\omega_6^5\\
\Delta\alpha=d\alpha+\alpha(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_4^4-\omega_5^5)\\
\Delta\beta=d\beta+2\beta(\omega_1^1-\omega_4^4)\\
\Delta\gamma=d\gamma+2\gamma(\omega_2^2-\omega_5^5)-\alpha b_2'\omega_5^6
\end{array}\right\}\quad(35)$$

Замкнутая система уравнений (1), (33), (34); (3), (35) определяет пару $T^1R_4^{-1}$. Эта система содержит $q=18$ форм: $\omega_4^5,\omega_1^2,\omega_1^3,\omega_4^6,\omega_2^1,\omega_5^4,\omega_2^3,\omega_5^6,\omega_6^4,$ $\omega_3^1,\omega_3^2,\omega_6^5,\Omega_1,\Omega_2,\Delta b_2',\Delta\alpha,\Delta\beta,\Delta\gamma$ и находится в инволюции с характерами $S_1=16$, $S_2=2$. Таким образом, справедлива.

<u>Теорема.</u> Пары $T^1R_4^{-1}$ существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Список использованной литературы:

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М. – Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. Тычинина С.Е. Пары Т конфигураций плоскостей в P_5 . Известия ВУЗов, Математика. 3 (70), 1968. С. 104-112.
3. Тычинина С.Е. Расслояемые пары конгруэнций плоскостей в P_5 // Известия вузов, Математика, 4 (71), 1968. С. 77-84.
4. Шепеленко Л.М. Проективное изгибание двупараметрического семейства (р-1)-плоскостей в (2р-1)-мерном проективном пространстве. Труды Томского ун-та, т. 161, 1962. С. 29-38.