Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

Н.А. Морозов, Ю.А. Чирков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.04.01 Машиностроение

Оренбург
2019

УДК 62-192
ББК 30.40
М 80

Рецензент – кандидат технических наук А.А. Гаврилов

Морозов, Н.А.
М 80 Определение функции прочностной надежности: методические указания / Н.А. Морозов, Ю.А. Чирков; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 18 с.

Методические указания содержат варианты заданий и пример решения задачи по определению функции прочностной надежности.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направления подготовки 15.04.01 Машиностроение по дисциплине «Прочностная надежность», а также будут полезны для самостоятельной работы и практических занятий обучающихся по техническим направлениям бакалавриата и магистратуры по дисциплинам «Надежность механических систем», «Надежность машин», «Математические основы надежности».

УДК 62-192
ББК 30.40

Содержание

1 Краткие теоретические сведения

Результаты освоения материала, представленного в методических указаниях, ориентированы на формирование компетенций ПК-9 (обладать способностью разрабатывать физические и математические модели исследуемых машин, приводов, систем, процессов, явлений и объектов, относящихся к профессиональной сфере, разрабатывать методики и организовывать проведение экспериментов с анализом их результатов) и ПК*-1 (быть готовым выполнять расчетно-экспериментальные работы в области прикладной механики с использованием современных вычислительных методов, высокопроизводительных вычислительных систем и наукоемких компьютерных технологий, широко распространенных в промышленности систем мирового уровня, и экспериментального оборудования для проведения механических испытаний).

В качестве показателя прочностной надежности H понимается вероятность P превышения несущей способности объекта R над действующей на объект нагрузкой N [1]:

$$H = P(R > N). \tag{1}$$

В этом случае прочностью будет являться случайная величина, которая характеризует предельные возможности работы объекта (несущую способность R), превышение которой означает отказ объекта, а нагрузкой N – любая случайная величина, воздействующая на данный объект со стороны других объектов. Таким образом, несущая способность и нагрузка могут быть как случайными величинами, так и неслучайными (детерминированными).

Любая случайная величина наиболее полно характеризуется законом распределения (функцией распределения) или плотностью распределения.

Функция распределения *F(x)* показывает вероятность того, что случайная величина X будет меньше, чем наперед заданное конкретное значение x (2), и может быть определена из системы (3):

$$F(x) = P(X < x), \tag{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < x_1 \\ i/n \quad \text{при} & x_1 \le X \le x_n \\ 1 & X > x_n \end{cases}, \tag{3}$$

где i – порядковый номер члена вариационного ряда;

n – количество значений случайной величины X;

x_i – i - й член вариационного ряда.

Вариационным рядом называется последовательность наблюдаемых значений случайной величины, расположенных в возрастающем порядке [3].

Функция плотности распределения случайной величины определяется как производная от функции распределения. В конечных величинах плотность распределения запишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{\Delta F_{\mathrm{i}}(x)}{\Delta x_i} = \frac{F_{i+1}(x) - F_i(x)}{x_{i+1} - x_i}. \tag{4}$$

Менее полными характеристиками случайных величин являются числовые характеристики, основными из которых будут математическое ожидание m_x и дисперсия D_x^2:

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{n}; \tag{5}$$

$$D_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x)^2}{n-1}. \qquad (6)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, а дисперсия – рассеяние результатов относительно этого среднего.

Наряду с дисперсией часто пользуются средним квадратическим отклонением D_x, которое связано с дисперсией следующим соотношением:

$$D_x = \sqrt{D_x^{\ 2}}. \qquad (7)$$

Приведенные выше формулы для определения функций *F(x), f(x)* и числовых характеристик m_x и D_x^2 случайной величины применимы при относительно небольшом количестве значений случайной величины.

При достаточно большом количестве значений весь диапазон аргумента x случайной величины X разбивают на k, как правило, равных интервалов точками x_1, …, x_{k+1}, подсчитывают число данных m_j, попадающих в интервал $[x_j \ldots x_{j+1}]$, а затем определяют частоту h_j попадания в каждый интервал:

$$h_j = \frac{m_j}{n}. \qquad (8)$$

Функция распределения и функция плотности распределения в этом случае определяются по формулам (9), (10). То есть плотность распределения в каждом интервале подсчитывается как отношение частоты попадания в интервал к величине интервала.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{S} m_j}{n} & \text{при} \quad x_1 \le x \le x_{k+1} \\ 1 & \end{cases} \quad \begin{matrix} x < x_1 \\ \\ x > x_{k+1} \end{matrix}, \tag{9}$$

$$f(x)=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{F_{s+1}(x)-F_s(x)}{x_{s+1}-x_S}=\frac{\dfrac{\sum_{j=1}^{S+1} m_j}{n}-\dfrac{\sum_{j=1}^{S} m_j}{n}}{\Delta x_s}=\frac{m_s}{\Delta x_s \cdot n}, \tag{10}$$

где S – номер интервала, для которого подсчитывается значение *P(x)*;

j – текущий номер интервала.

Математическое ожидание и дисперсия в случае интервального представления данных определяются по следующим зависимостям [2]:

$$m_x=\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j h_j,$$

$$D_x^2=\sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - m_x)^2 \cdot h_j, \tag{11}$$

где $\bar{x}_j$ – среднее значение j интервала.

Рассмотрим случай, когда R – неслучайная величина, а N – случайная. Вероятность безотказной работы элемента будет численно равна площади под кривой плотности распределения нагрузки $f_N(x)$ слева от точки с координатой R на оси абсцисс (рисунок 1), то есть прочностная надежность будет соответствовать функции распределения случайной величины N [1]:

$$H=\int_0^R f_N(x)dx = F_N(x). \tag{12}$$

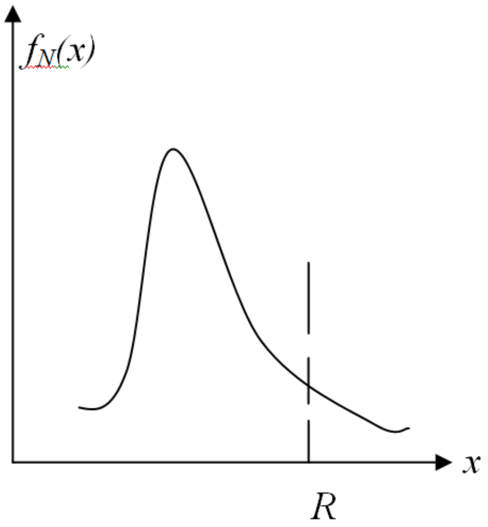

Рисунок 1 – Плотность распределения нагрузки *N*

В случае, когда *R* – величина случайная, а *N* – неслучайная, вероятность безотказной работы элемента будет численно равна площади под кривой плотности распределения несущей способности $f_R(x)$ справа от точки с координатой *N* на оси абсцисс (рисунок 2):

$$H = \int_{N}^{\infty} f_R(x)dx = 1 - \int_{0}^{n} f_R(x)dx = 1 - F_R(x). \tag{13}$$

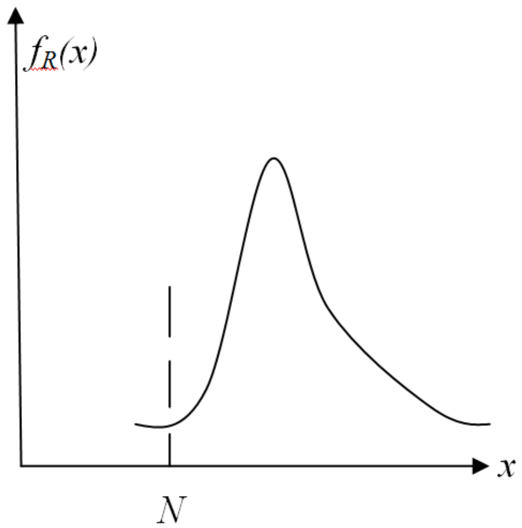

Рисунок 2 – Плотность распределения несущей способности *R*

2 Постановка задачи и исходные данные

Во всех заданиях требуется вычислить математическое ожидание, дисперсию, построить эмпирические функции распределения и функцию плотности распределения случайной величины, построить функцию прочностной надежности и определить показатели прочностной надежности.

1 При испытаниях профильной трубы на растяжение получены следующие значения предела текучести (σ_T, МПа): 380, 353, 358, 375, 394, 410, 386, 391, 399, 377. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в профильной трубе напряжения (σ, МПа): 350, 370, 400, 420.

2 Для одинаковых объектов проведены замеры напряжений σ, возникающих в элементе конструкции (таблица 1). Несущая способность элемента конструкции (*R*, МПа) является неслучайной величиной и равна: 220, 270, 300, 50.

Таблица 1– Исходные данные

Номер интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	20 – 70	5
2	70 – 120	10
3	120 – 170	24
4	170 – 220	6
5	220 – 270	4

3 Напряжения (σ, МПа), испытываемые элементом конструкции, по результатам замеров были следующие: 207, 236, 245, 262, 265, 337, 275, 375, 300, 292, 257, 269. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 335, 270, 280, 300.

4 При испытании партии стальных элементов конструкции были полу-

чены значения предела текучести (σ_T, МПа): 382, 420, 360, 338, 373, 400, 368, 371. Действующая нагрузка является неслучайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 343, 335, 380, 405.

5 Испытаны на устойчивость алюминиевые оболочки (таблица 2). Действующая нагрузка (N, кН) является неслучайной величиной и равна: 15, 10, 7, 34.

Таблица 2 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал нагрузки, кН	Количество оболочек в интервале
1	10 – 15	2
2	15 – 20	4
3	20 – 25	8
4	25 – 30	4
5	30 – 35	3
6	35 – 40	1

6 Значения предела текучести стальных образцов представлены в таблице 3. Действующая нагрузка постоянная и вызывает напряжения (σ, МПа): 410, 405, 380, 350.

7 Значения предела прочности при изгибе чугунных образцов равны (σ_B, МПа): 350, 352, 370, 365, 351, 340, 357. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в образцах напряжения (σ, МПа): 330, 350, 360, 340.

8 Был получен ряд напряжений (σ, МПа), испытываемых элементом конструкции: 107, 136, 145, 162, 165, 137, 175, 175, 100, 192, 124, 148, 165, 185. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 343, 335, 380, 405.

9 Был получен ряд напряжений (σ, МПа), испытываемых элементом конструкции: 107, 136, 145, 162, 165, 137, 175, 175, 100, 192, 124, 148, 165,

185. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 105, 150, 180, 130.

Таблица 3 – Исходные данные

№ интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал	№ интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	405 – 410	7	6	430 – 435	12
2	410 – 415	8	7	435 – 440	12
3	415 – 420	12	8	440 – 445	9
4	420 – 425	17	9	445 – 450	6
5	425 – 430	22			

10 При испытаниях стального стержня на растяжение получены следующие значения предела текучести (σ_T, МПа): 380, 353, 358, 375, 394, 410, 386, 391, 399, 377, 405, 400, 363. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в стержне напряжения (σ, МПа): 300, 420, 400, 350.

11 Проведены замеры напряжений σ, возникающих в элементе конструкции (таблица 4). Несущая способность элемента конструкции (R, МПа) является неслучайной величиной и равна: 100, 200, 300, 400.

12 Напряжения, испытываемые элементом конструкции, по результатам замеров были следующие (σ, МПа): 100, 95, 65, 88, 97, 84,124, 113, 125. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 50, 70, 100, 90.

13 Напряжения (σ, МПа), испытываемые элементом конструкции, по результатам замеров были следующие: 207, 236, 337, 275, 375, 300, 292, 257, 269. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 200, 270, 280, 300.

Таблица 4 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	20 – 70	5
2	70 – 120	10
3	120 – 170	24
4	170 – 220	6
5	220 – 270	4
6	270 – 300	3
7	330 – 400	1

14 При испытании партии стальных элементов конструкции были получены значения предела текучести (σ_T, МПа): 382, 420, 360, 338, 373, 400, 368, 371, 363, 385, 364, 355, 376. Действующая нагрузка является неслучайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 330, 335, 380, 390.

15 Испытаны на устойчивость стержни (таблица 5). Действующая нагрузка (N, кН) является неслучайной величиной и равна: 45, 15, 25, 50.

16 Значения предела текучести стальных образцов представлены в таблице 6. Действующая нагрузка постоянная и вызывает напряжения (σ, МПа): 410, 405, 380, 350.

17 Значения предела прочности (σ_B, МПа) чугунных образцов равны: 350, 352, 370, 365, 351, 340, 357, 355, 367, 386. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в образцах напряжения (σ, МПа): 330, 350, 380, 370.

18 Был получен ряд напряжений (σ, МПа), испытываемых элементом конструкции: 162, 165, 137, 175, 175, 150, 192, 124, 148. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 200, 130, 380, 405.

Таблица 5 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал силы, кН	Количество стержней в интервале
1	10 – 15	2
2	15 – 20	4
3	20 – 25	8
4	25 – 30	6
5	30 – 35	5
6	35 – 40	3
7	40 – 45	2
8	45 – 50	1

Таблица 6 – Исходные данные

№ интервала	Интервал σ_T, МПа	Количество замеров, попавших в интервал	№ интервала	Интервал σ_T, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	405 – 410	7	6	430 – 435	12
2	410 – 415	8	7	435 – 440	12
3	415 – 420	12	8	440 – 445	9
4	420 – 425	17	9	445 – 450	6
5	425 – 430	22	10	455 – 460	3

3 Пример выполнения задачи

При испытаниях на прочность параметры нагружения для ряда объектов были одинаковыми. Построить функцию распределения, функцию плотности распределения случайной величины, а также функцию надежности, если несущая способность объекта является случайной величиной (таблица 7).

Таблица 7 – Несущая способность

Порядковый номер объекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальное напряжение σ, МПа	312	329	248	321	418	267	193	375	358

Построим вариационный ряд, найдем функцию распределения и плотность распределения, а также функцию надежности (таблица 8).

Таблица 8 – Данные обработки случайной величины

Порядковый номер	Вариационный ряд σ, МПа	$F(\sigma)=i/N$	$f(\sigma)$	H
1	193	0,111	0,00201818	0,889
2	248	0,222	0,00584211	0,778
3	267	0,333	0,00246667	0,667
4	312	0,444	0,01244444	0,556
5	321	0,556	0,013875	0,444
6	329	0,667	0,00382759	0,333
7	358	0,778	0,00652941	0,222
8	375	0,889	0,0025814	0,111
9	418	1	-	0

Построим графики функции распределения и плотности распределения (рисунки 3 и 4), а так же график функции надежности (рисунке 5).

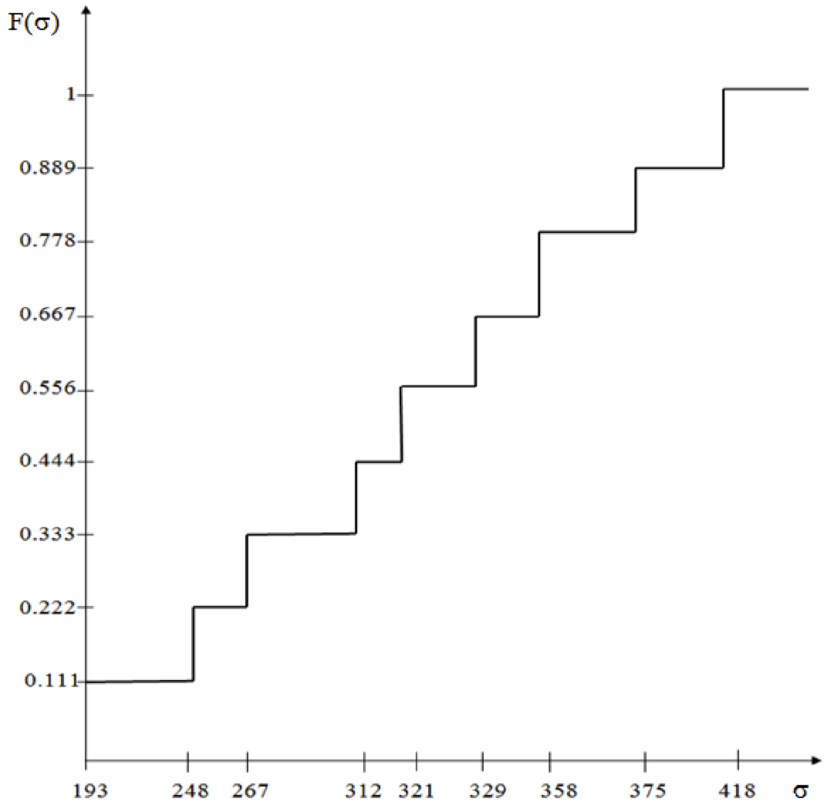

Рисунок 3 – Функция распределения

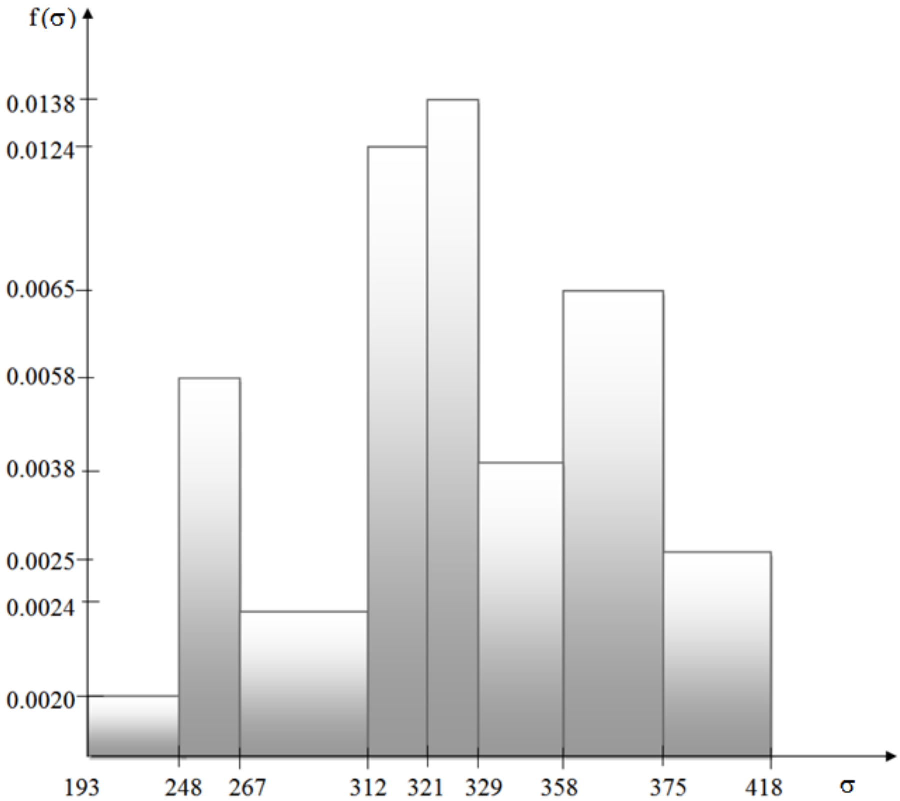

Рисунок 4 – Функция плотности распределения

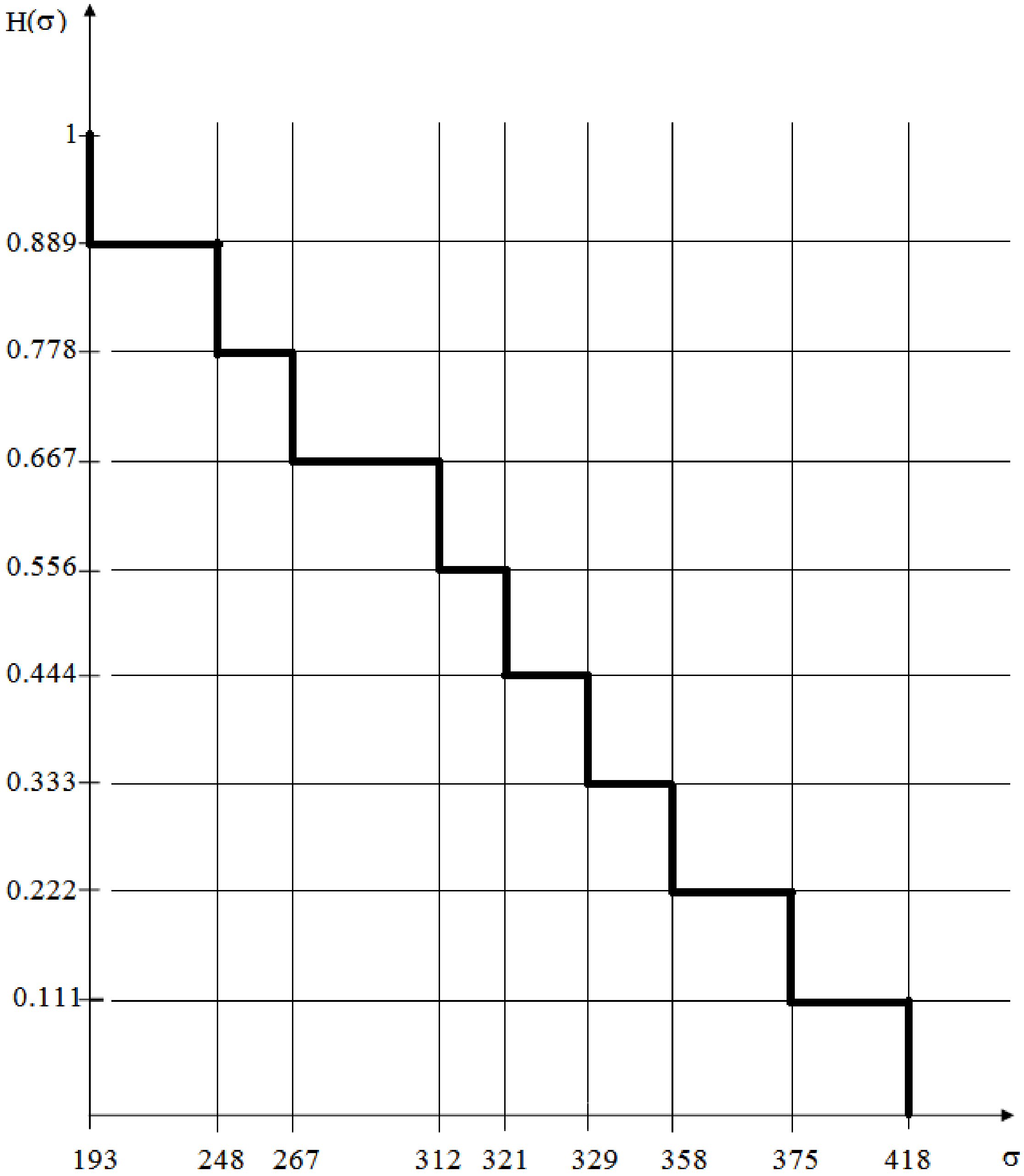

Рисунок 5 – Функция надежности

4 Вопросы для самоконтроля

1 По каким зависимостям производится расчет функции плотности распределения случайной величины при небольшом количестве значений случайной величины?

2 По каким зависимостям производится расчет функции распределения случайной величины при небольшом количестве значений случайной величины?

3 Что такое среднее квадратическое отклонение?

4 Что такое математическое ожидание?

5 Что такое частота попадания в интервал?

6 По каким зависимостям производится расчет математического ожидания и дисперсии при небольшом количестве значений случайной величины?

7 По каким зависимостям производится расчет функции плотности распределения случайной величины при большом количестве значений случайной величины?

8 По каким зависимостям производится расчет функции распределения случайной величины при большом количестве значений случайной величины?

9 В чем смысл показателя прочностной надежности?

10 Как определяется прочностная надежность, если несущая способность является неслучайной величиной?

11 Как определяется прочностная надежность, если действующая нагрузка является неслучайной величиной?

12 По каким зависимостям производится расчет математического ожидания и дисперсии при большом количестве значений случайной величины?

Список использованных источников

1 Куренков, В.И. Надежность изделий и систем ракетно-космической техники: лабораторный практикум / В.И. Куренков, В.В. Волоцуев. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2010. – 116 с.

2 Зорин, В.А. Надежность механических систем: учебник / В.А. Зорин. – М. : ИНФРА-М, 2015. – 380 с.

3 Половко, А.М. Основы теории надежности. Практикум: учеб. пособие для вузов / А.М. Половко, С. В. Гуров. – СПб. : БВХ-Петербург, 2006. – 560 с.