Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Н.А. Морозов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки 150700.62 Машиностроение, 151000.62 Технологические машины и оборудование, 151600.62 Прикладная механика, 190600.62 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 140400.62 Электроэнергетика и электротехника

Оренбург
2013

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7
М 80

Рецензенты
кандидат технических наук, доцент С.Н. Горелов
кандидат технических наук, доцент Л.И. Кудина

Морозов, Н.А.
М 80 Определение кинематических характеристик твердого тела: методические указания / Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2013. - 24 с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки бакалавров. В методических указаниях рассмотрена методика решения основных задач кинематики твердого тела. Представлен пример выполнения лабораторной работы.

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7

© Морозов Н.А., 2013
© ОГУ, 2013

Содержание

1 Краткие теоретические сведения …….…..4

1.1 Поступательное движение твердого тела……..…..…4

1.2 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси…….……..5

1.3 Плоскопараллельное движение твердого тела……...……8

2 Задание для лабораторной работы…….……..….11

3 Пример выполнения лабораторной работы …….……..16

Список использованных источников……...24

1 Краткие теоретические сведения

В инженерной деятельности возникает необходимость решать задачи, связанные с определением кинематических характеристик твердых тел. Кинематические характеристики движения тел широко используются в инженерных расчетах. Траектории, скорости и ускорения тел, а также траектории, скорости и ускорения точек тел применяются при исследовании движения тел, для определения динамических характеристик этого движения (кинетическая энергия, количество движения, кинетический момент), для нахождения сил, действующих на тела, в расчетах на прочность и жесткость и в других случаях. Таким образом, в достаточно большом объеме реальных задач мы сталкиваемся с необходимостью определения кинематических характеристик движения тела.

В теоретической механике различают пять видов движения твердого тела:

1) поступательное;
2) вращательное;
3) плоскопараллельное (плоское);
4) сферическое;
5) общий случай движения твердого тела.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими видами движения твердого тела.

Основными задачами кинематики твердого тела являются:

1) задание движения и определение кинематических характеристик движения всего тела в целом;

2) изучение движения каждой из точек тела в отдельности.

1.1 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная на этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Таким образом, поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения сводится к задаче кинематики точки.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\bar{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\bar{a}$ - ускорением поступательного движения. Векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ можно, очевидно, изображать приложенными в любой точке тела.

1.2 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета, называется вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси. Прямая, точки которой остаются неподвижными, называется осью вращения. Все точки тела, не принадлежащие оси вращения, будут двигаться в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Положение вращающегося тела в любой момент времени будет известно, если задана зависимость угла поворота φ (рисунок 1) от времени t:

$$\varphi = f(t). \tag{1}$$

Равенство (1) называется уравнением или законом вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси z. Угол поворота измеряется в радианах (рад).

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

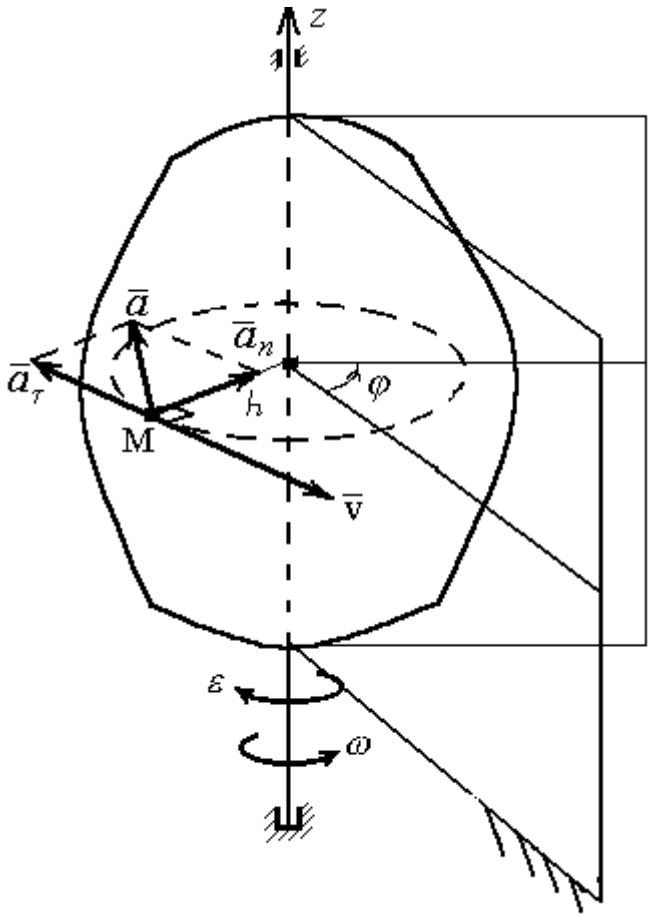

Рисунок 1 – Кинематические характеристики вращающегося тела

Угловая скорость вращающегося тела равна первой производной по времени от угла поворота тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{2}$$

Угловая скорость характеризует быстроту изменения угла поворота в данный момент времени.

Угловое ускорение вращающегося тела равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота тела:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (3)$$

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости в данный момент времени.

Единицы угловой скорости в СИ – рад/с, углового ускорения – рад/с^2.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения:

$$v = h \cdot |\omega|, \qquad (4)$$

где v - модуль скорости точки, м/с;

h - расстояние от точки до оси вращения, м;

ω - модуль угловой скорости тела, рад/с.

Вектор скорости точки тела направлен по касательной к траектории точки перпендикулярно плоскости, содержащей ось вращения и точку, в сторону вращения тела (рисунок 1).

Ускорение точки определяется как сумма его касательной $\overline{a}_\tau$ (тангенциальной) и нормальной $\overline{a}_n$ составляющих:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n. \qquad (5)$$

Модули касательного a_τ и нормального a_n ускорения точки определяется по формулам (6) и (7).

$$a_\tau = h \cdot |\varepsilon|, \tag{6}$$

$$a_n = h \cdot \omega^2. \tag{7}$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории точки (в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в противоположную сторону, если тело вращается замедленно); нормальное ускорение всегда направлено по радиусу h к оси вращения (рисунок 1).

Модуль ускорения точки будет определяться по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{8}$$

где a – ускорение точки, м/с^2.

1.3 Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела – движение, при котором все точки тела движутся по траекториям, лежащих в плоскостях, параллельных некоторой условно неподвижной плоскости.

Для того, чтобы задать положение тела, совершающего плоское движение, необходимо задать положение плоской фигуры, принадлежащей телу и лежащей в плоскости, параллельной заданной неподвижной плоскости. Положение плоской фигуры в данной плоскости (рисунок 2) будет задаваться положением произвольного отрезка AB, принадлежащего фигуре.

Положение отрезка можно задать, если определить положение какой-либо точки отрезка (полюса) и угол наклона отрезка к какой-либо оси. Следовательно, закон плоскопараллельного движения имеет вид:

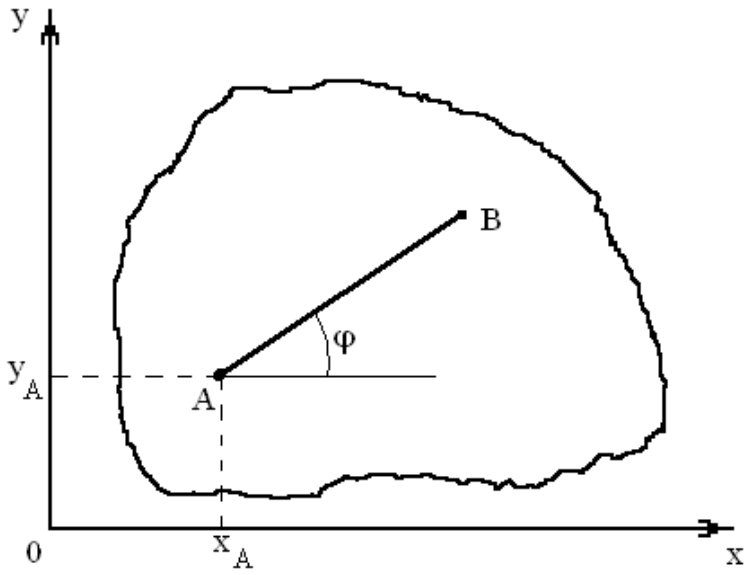

Рисунок 2 – Плоская фигура

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}, \tag{9}$$

где x_A, y_A - координаты полюса в декартовой системе координат, м;

φ - угол поворота тела, рад.

Плоскопараллельное движение можно разложить на поступательное движение тела вместе с точкой, выбранной за полюс, и вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс. В связи с этим кинематическими характеристиками тела при плоском движении будут являться скорость $\overline{v}_A$ и ускорение $\overline{a}_A$ полюса, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε тела.

Для определения скоростей точек тел, совершающих плоское движение, используются три способа:

1) теорема о проекциях скоростей двух точек на прямую, проходящую через эти точки;

2) теорема о сложении скоростей точек при плоском движении;

3) определение скоростей с помощью мгновенного центра скоростей.

Для определения ускорений точек тел, совершающих плоское движение, используются два способа:

1) теорема о сложении ускорений точек при плоском движении;

2) определение ускорений с помощью мгновенного центра ускорений.

В лабораторной работе в качестве тела, совершающего плоское движение, рассматривается каток. Скорости точек катка лучше всего определять с помощью мгновенного центра скоростей.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это точка, связанная с телом, скорость которой в данный момент равна нулю. Если данную точку выбрать за полюс, то движение тела можно представить как мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через МЦС, а скорости точек тела в данный момент времени определять по формуле (4).

Для катка, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, в каждый момент времени скорость точки касания катка с поверхностью будет равна нулю. Эта точка будет являться мгновенным центром скоростей, который обозначается *P* (рисунок 3).

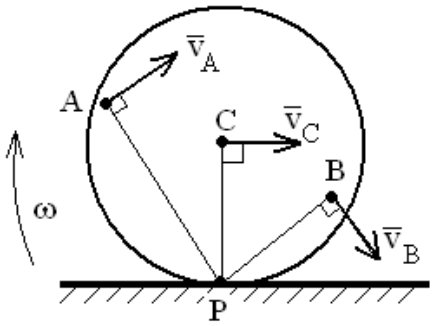

Рисунок 3 – Скорости точек катка

При определении ускорений точек за полюс, как правило, выбирают центр катка. Центр катка *C* движется прямолинейно, поэтому ускорение полюса можно определить по формуле:

$$a_C = a_C^{\tau} = \dot{v}_C . \qquad (10)$$

2 Задание для лабораторной работы

Задание для лабораторной работы выбирается в соответствии с номером варианта, выданного преподавателем. Номер варианта выдается в виде двухзначного числа. Последняя цифра числа соответствует номеру задачи (схемы к задачам представлены на рисунках 4 – 7). Необходимые для решения задачи исходные данные выбираются по таблице 1 в соответствии с первой цифрой варианта.

Механическая система состоит из двух грузов (1 и 2), двух ступенчатых блоков (3 и 4) и катка 5, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями. Радиусы блоков и катка соответственно равны r_3, r_4, R_3, R_4, R_5. Груз 1 перемещается вниз вертикально или по наклонной плоскости в соответствии с законом $S_1 = S_1(t)$, приводя в движение остальные тела системы.

Таблица 1 – Исходные данные, соответствующие первой цифре варианта

Цифра	r_3, см	r_4, см	R_3, см	R_4, см	R_5, см	$S_1 = S_1(t)$, см	Исследуемое тело	t_1, с
0	10	15	35	60	30	$S_1 = 3t^5 - 2t^2$	2	3
1	15	20	45	35	75	$S_1 = e^{t+1} + 3t^3$	3	5
2	25	25	60	50	65	$S_1 = t^5 + 8t^3$	4	7
3	30	10	55	45	45	$S_1 = e^t + 2t^2$	5	6
4	20	30	50	55	50	$S_1 = 8 + 15t^4$	2	9
5	25	15	40	40	80	$S_1 = 9t^4 + 3t^2$	3	8
6	15	30	35	50	35	$S_1 = t^4 - t$	4	4
7	30	25	60	55	60	$S_1 = e^{t+2} + t$	5	11
8	25	20	45	60	70	$S_1 = t^6 - 1$	2	10
9	10	15	50	45	25	$S_1 = t^3 + 2t^2 + 1$	3	12

Определить кинематические характеристики тел системы в момент времени t_1. Построить графики изменения кинематических характеристик исследуемого тела, указанного в таблице 1, с течением времени. В начальный момент система находилась в покое. Проскальзыванием нитей по ободам тел пренебречь. При определении ускорений за полюс катка принять его центр.

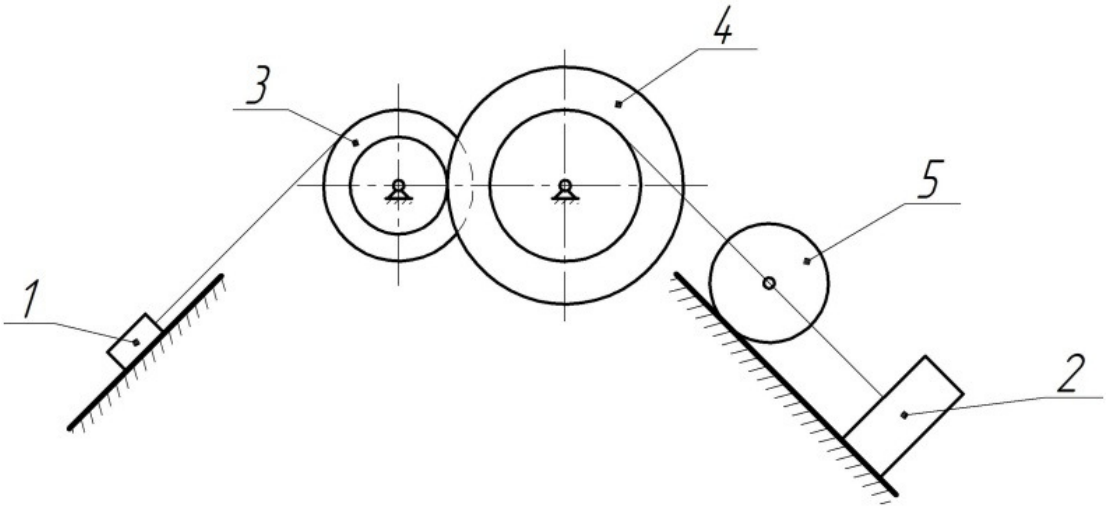

Схема 1

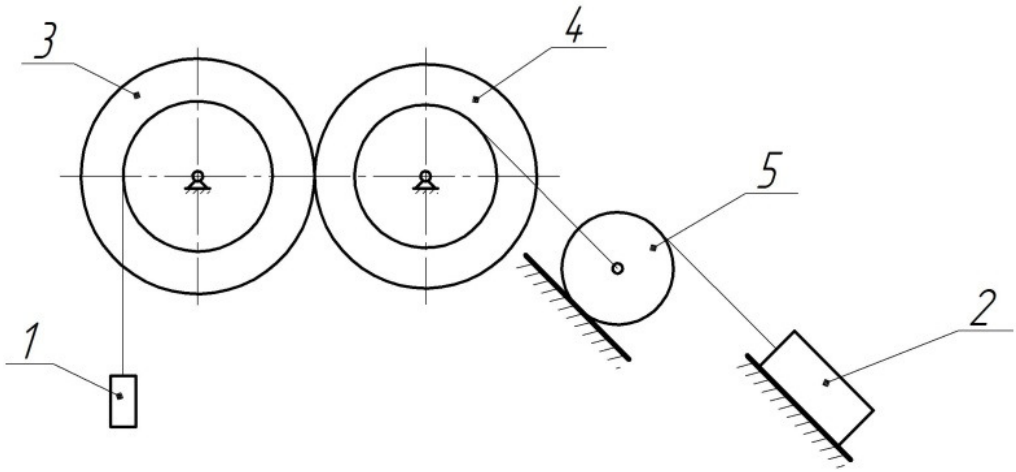

Схема 2

Рисунок 4 - Схемы 1, 2

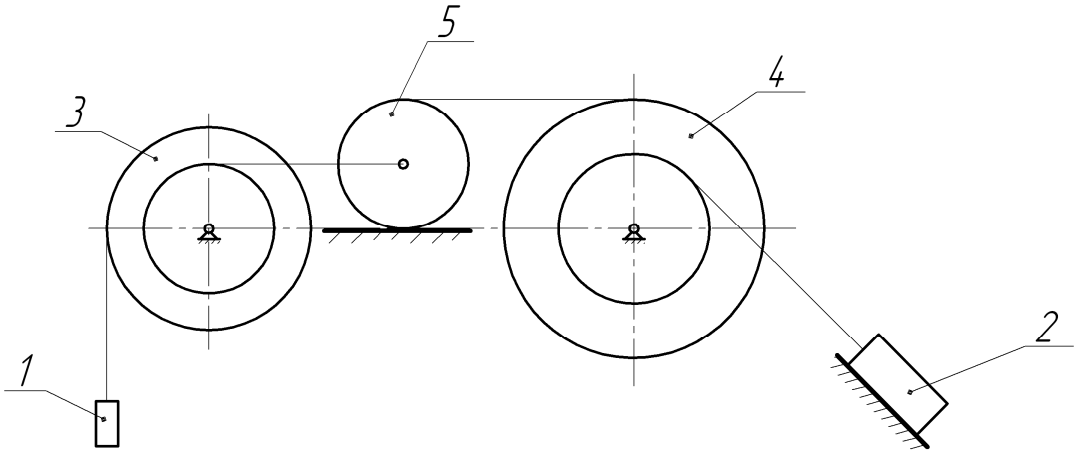

Схема 3

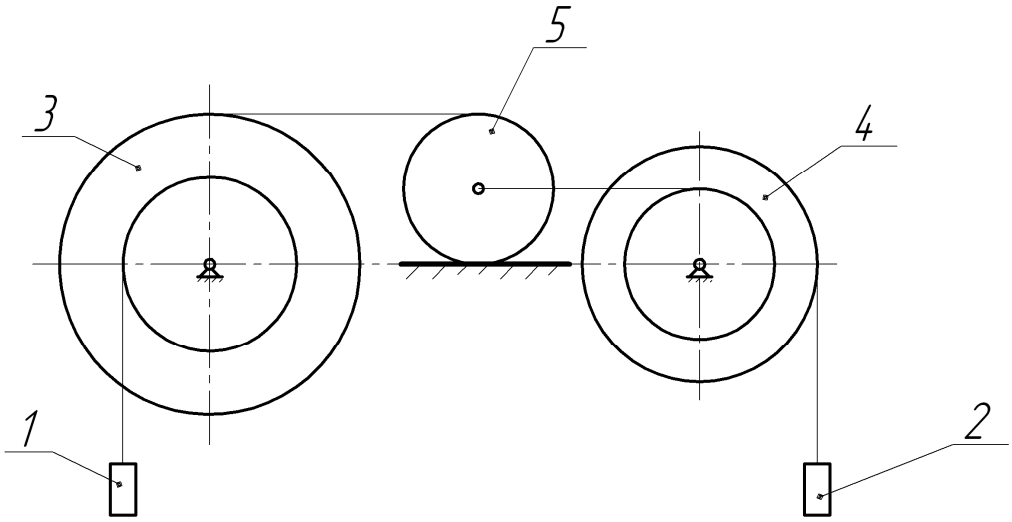

Схема 4

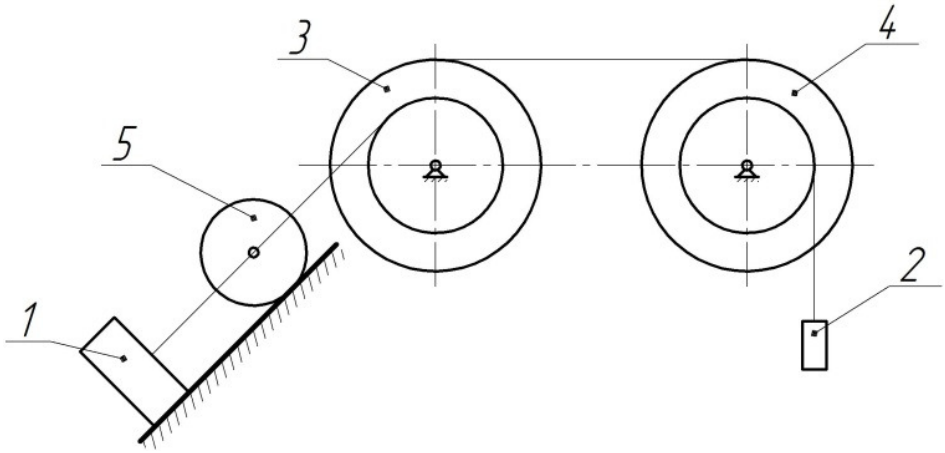

Схема 5

Рисунок 5 - Схемы 3, 4, 5

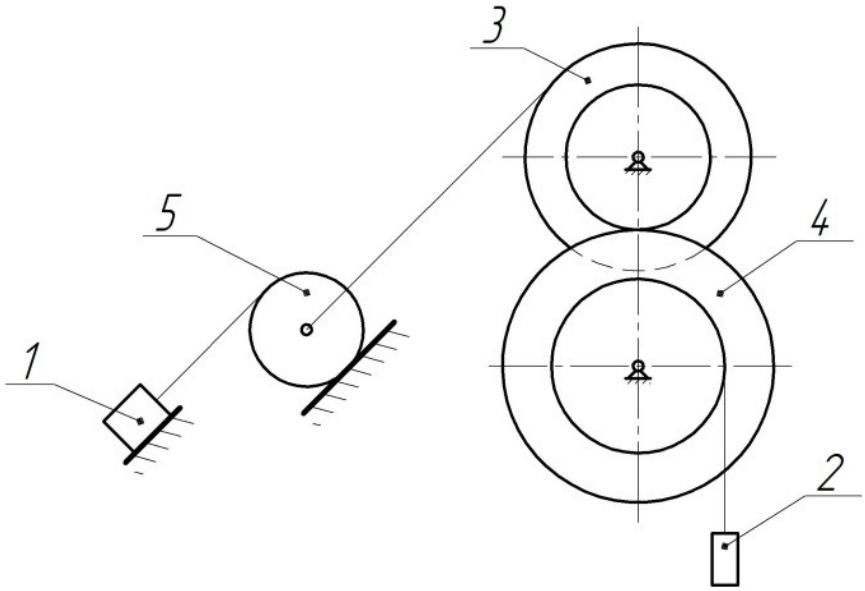

Схема 6

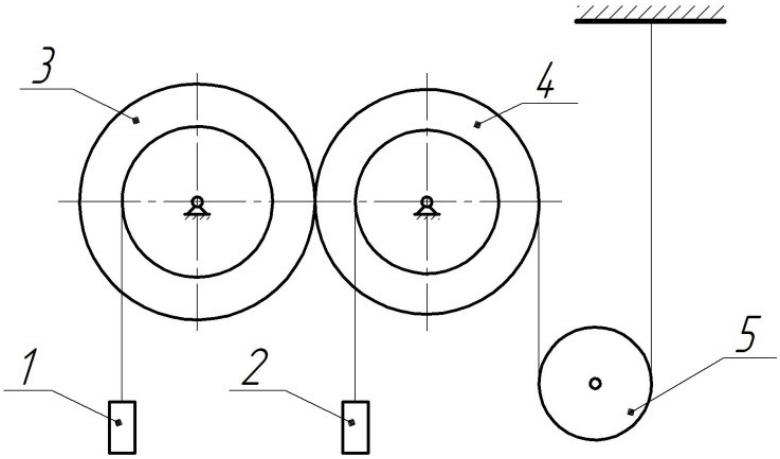

Схема 7

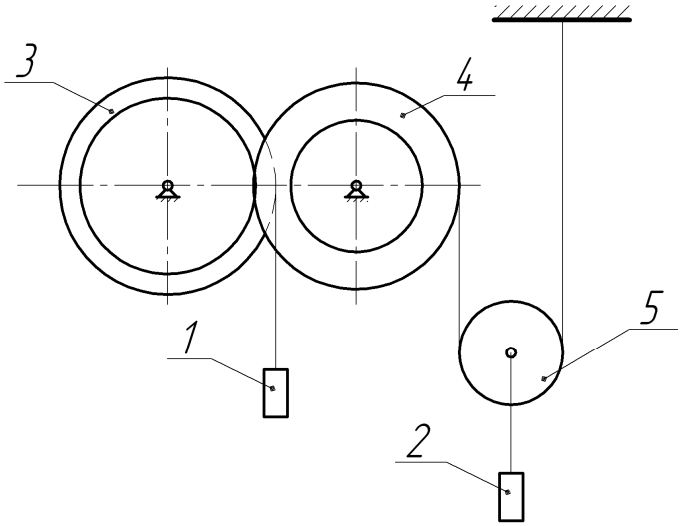

Схема 8

Рисунок 6 - Схемы 6, 7, 8

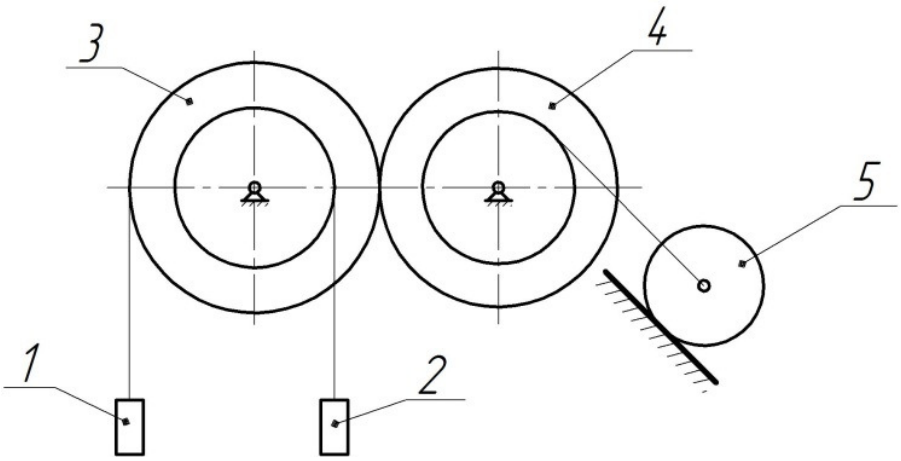

Схема 9

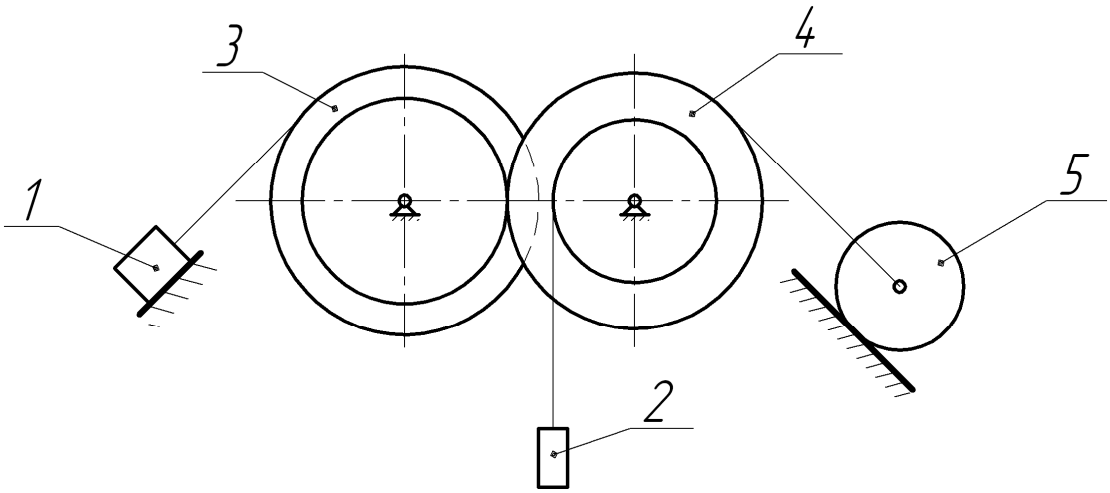

Схема 0

Рисунок 7 – Схема 9, 0

3 Пример выполнения лабораторной работы

Механическая система состоит из двух грузов (1 и 2), двух ступенчатых блоков (3 и 4) и катка 5, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями (рисунок 8). Радиусы блоков и катка соответственно равны $r_3 = 20$ см, $r_4 = 25$ см, $R_3 = 50$ см, $R_4 = 30$ см, $R_5 = 40$ см. Груз 1 перемещается вниз вертикально или по наклонной плоскости в соответствии с законом $S_1 = e^{t+3} + 5t^4 - 3t^3$, приводя в движение остальные тела системы.

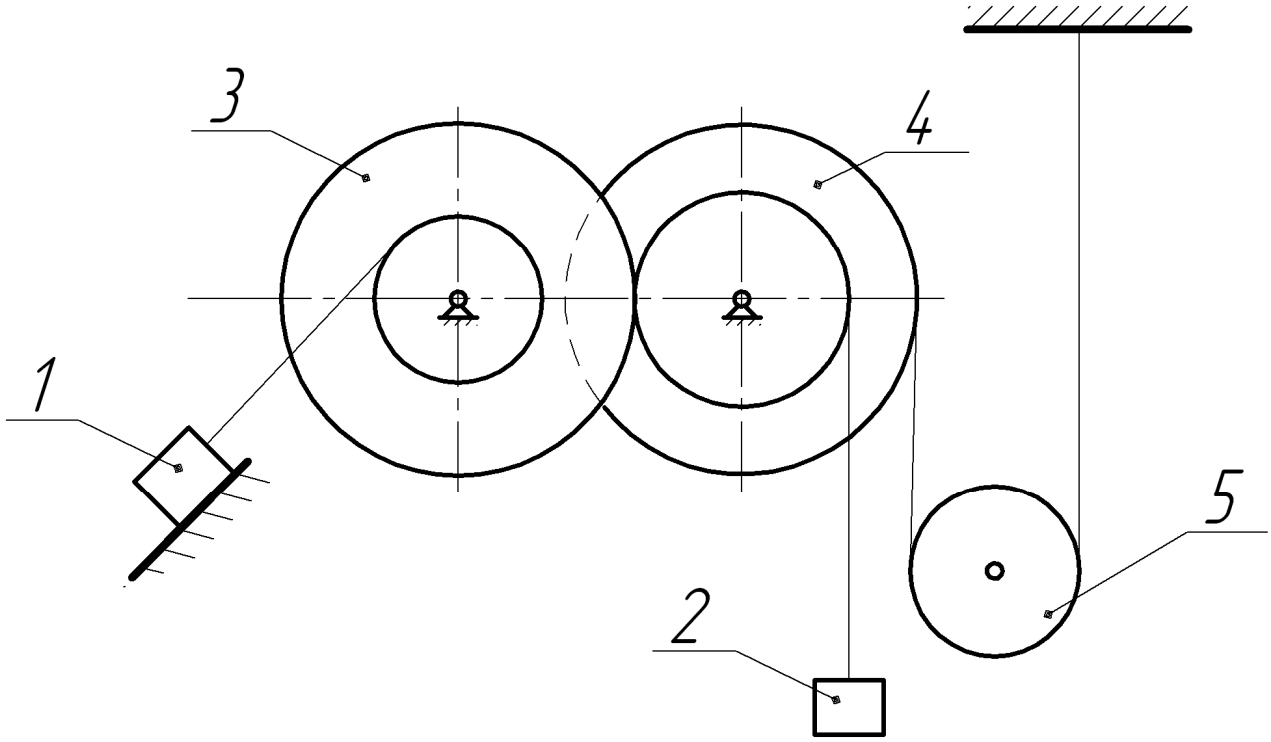

Рисунок 8 – Механическая система

Определить кинематические характеристики тел системы в момент времени $t_1 = 5$ с. Построить графики изменения кинематических характеристик тела 5 с течением времени. В начальный момент система находилась в покое. Проскальзыванием нитей по ободам тел пренебречь. При определении ускорений за полюс катка принять его центр.

Дано: $r_3 = 20$ см, $r_4 = 25$ см, $R_3 = 50$ см, $R_4 = 30$ см, $R_5 = 40$ см, $S_1 = 8e^{t+3} + 5t^4 - 3t^3$ см, $t_1 = 5$ с.

Найти: v_1, v_2, v_C, a_1, a_2, a_C, ω_3, ε_3, ω_4, ε_4, ω_5, ε_5, $v_C(t)$, $a_C(t)$, $\omega_5(t)$, $\varepsilon_5(t)$.

Решение:

1 Определим скорости и угловые скорости тел

$$v_1 = \dot{S}_1 = 8e^{t+3} + 20t^3 - 9t^2,$$

при $t_1 = 5$ с $v_1 = 8e^8 + 20 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 = 26122{,}66$ см/с

Проведем кинематический анализ. Выразим скорости и угловые скорости тел через скорость тела 1 и покажем их на рисунке (рисунок 9):

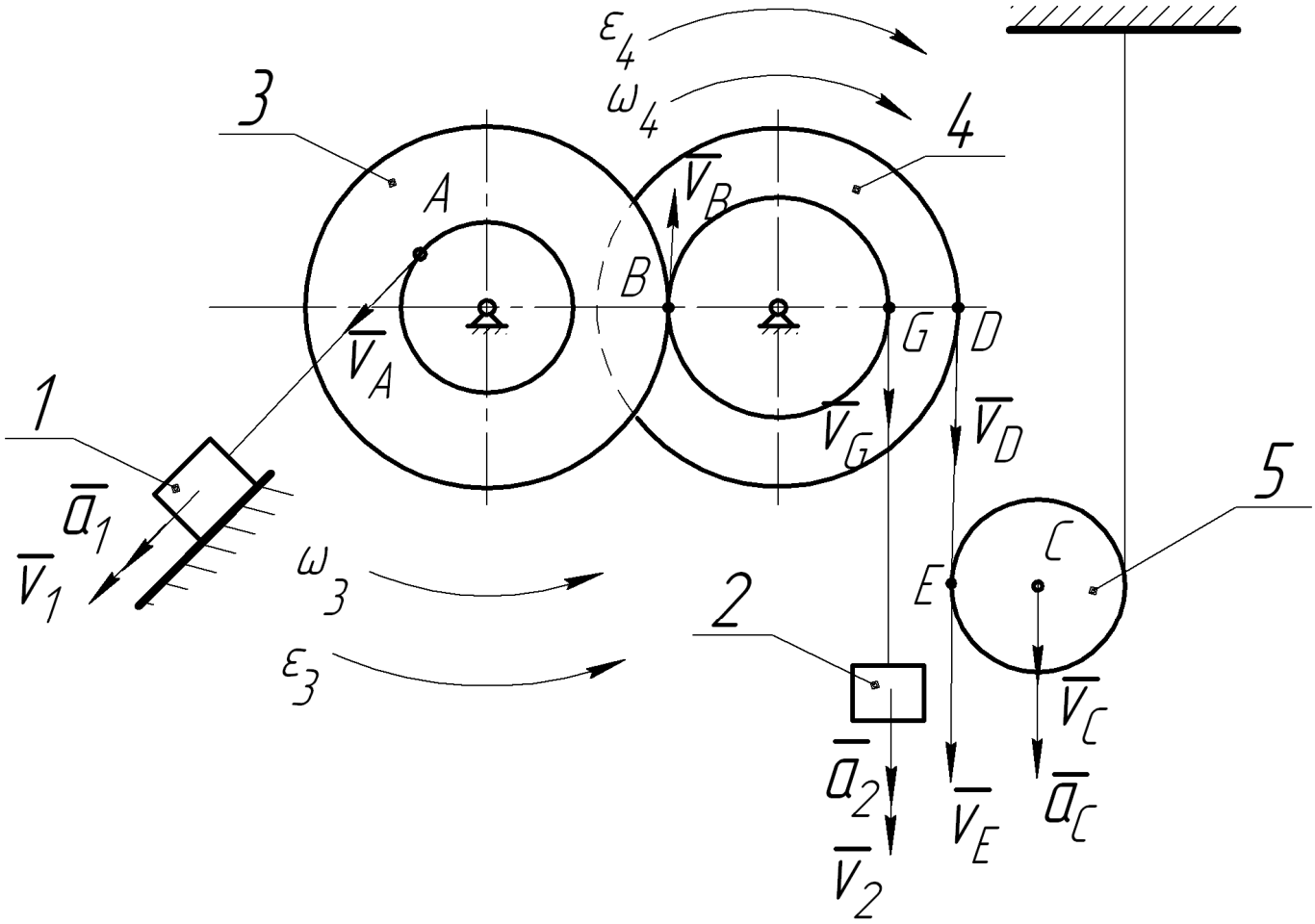

Рисунок 9 – Кинематические характеристики

$$v_A = v_1;$$

$$\omega_3 = \frac{v_A}{r_3} = \frac{v_1}{r_3};$$

$$v_B = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3};$$

$$\omega_4 = \frac{v_B}{r_4} = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4};$$

$$v_2 = v_G = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot r_4}{r_3 \cdot r_4} = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3} = v_B;$$

$$v_D = \omega_4 \cdot R_4 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4};$$

$$v_E = v_D = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4};$$

$$\omega_5 = \frac{v_E}{2R_5} = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2R_5};$$

$$v_C = \omega_5 \cdot R_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2R_5} R_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2}.$$

Для момента времени $t_1 = 5$ с:

$v_1 = 26122,66$ см/с $= 26,12$ м/с;

$$\omega_3 = \frac{v_1}{r_3} = \frac{26122,66}{20} = 1306,13 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{26122,66 \cdot 50}{20 \cdot 25} = 2612,27 \text{ рад/с};$$

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot R_3}{r_3} = \frac{26122,66 \cdot 50}{20} = 65306,65 \text{ см/с} = 65,31 \text{ м/с};$$

$$\omega_5 = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2R_5} = \frac{26122,66 \cdot 50 \cdot 30}{20 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 40} = 979,6 \text{ рад/с;}$$

$$v_C = \frac{v_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2} = \frac{26122,66 \cdot 50 \cdot 30}{20 \cdot 25 \cdot 2} = 39184 \text{ см/с} = 39,18 \text{ м/с.}$$

2 Определим ускорения и угловые ускорения тел. Для этого вычислим первые производные по времени от соответствующих скоростей и угловых скоростей.

$$a_1 = a_1^{\tau} = \dot{v}_1 = 8e^{t+3} + 60t^2 - 18t \text{ ,}$$

при $t_1 = 5$ с $a_1 = 8e^8 + 60 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 = 25257,66$ см/с^2= $25,26$ м/с^2;

$$a_2 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3}{r_3} = \frac{25257,66 \cdot 50}{20} = 63144,15 \text{ см/с}^2 = 63,14 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{\dot{v}_1}{r_3} = \frac{a_1}{r_3} = \frac{25257,66}{20} = 1262,88 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{a_1 \cdot R_3}{r_3 \cdot r_4} = \frac{25257,66 \cdot 50}{20 \cdot 25} = 2525,77 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_5 = \dot{\omega}_5 = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2R_5} = \frac{a_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2R_5} = \frac{25257,66 \cdot 50 \cdot 30}{20 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 40} = 947,16 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_C = \frac{\dot{v}_1 \cdot R_3 \cdot R_4}{r_3 \cdot r_4 \cdot 2} = \frac{25257,66 \cdot 50 \cdot 30}{20 \cdot 25 \cdot 2} = 37886,49 \text{ см/с}^2 = 37,89 \text{ м/с}^2.$$

3 Построим графики изменения кинематических характеристик тела 5

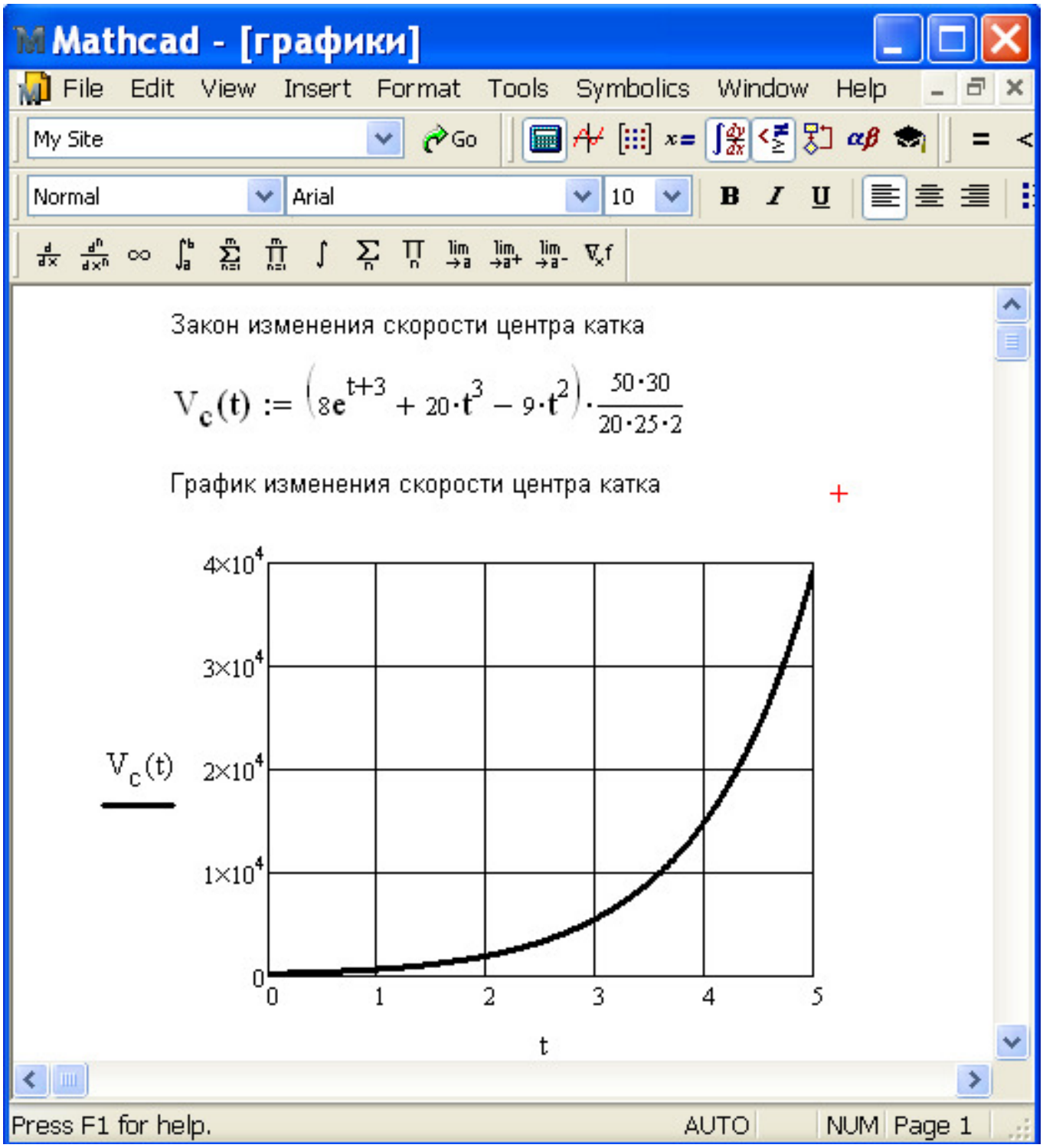

Рисунок 10 – График $v_C(t)$

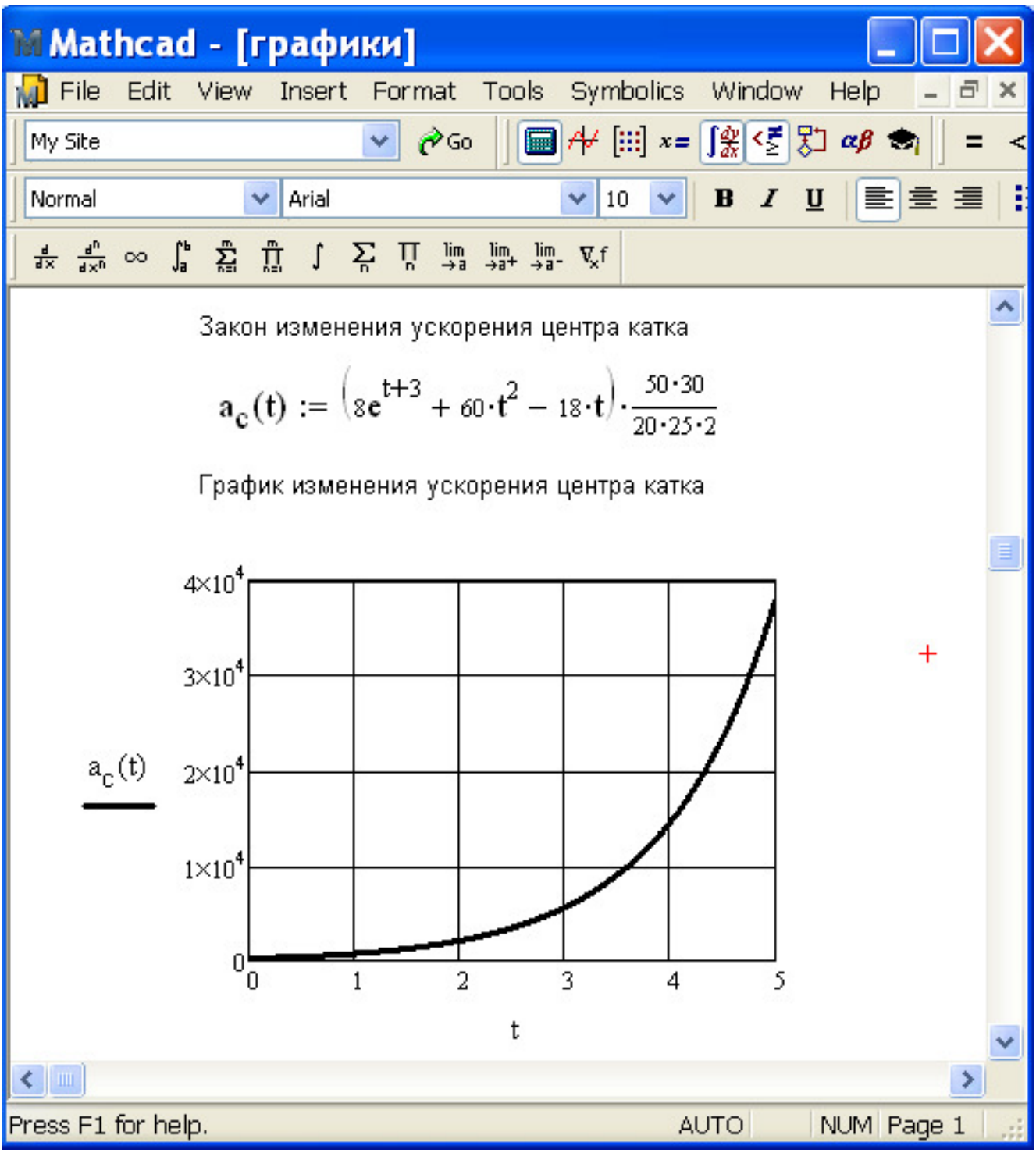

Рисунок 11 – График $a_C(t)$

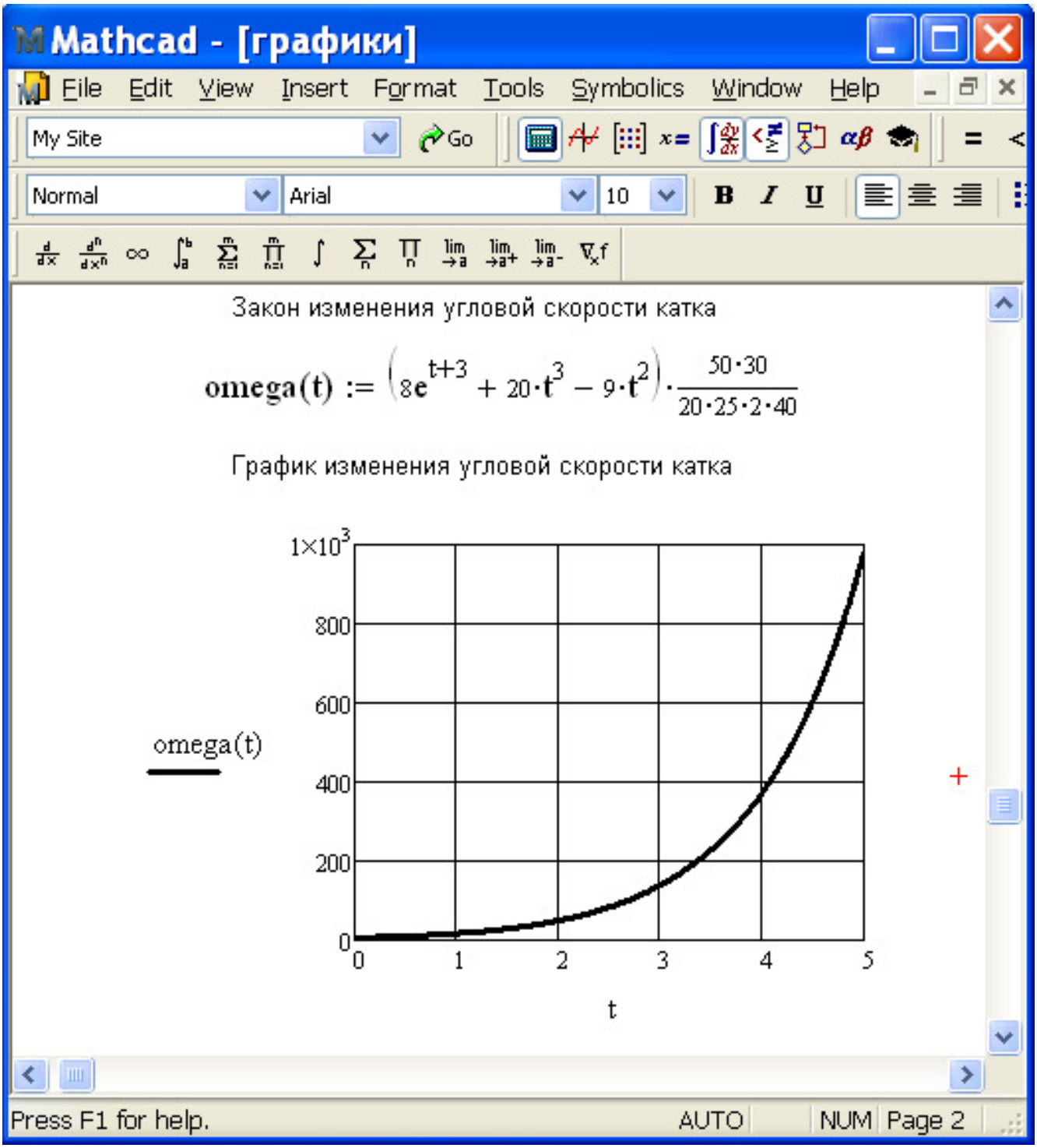

Рисунок 12 – График $\omega_5(t)$

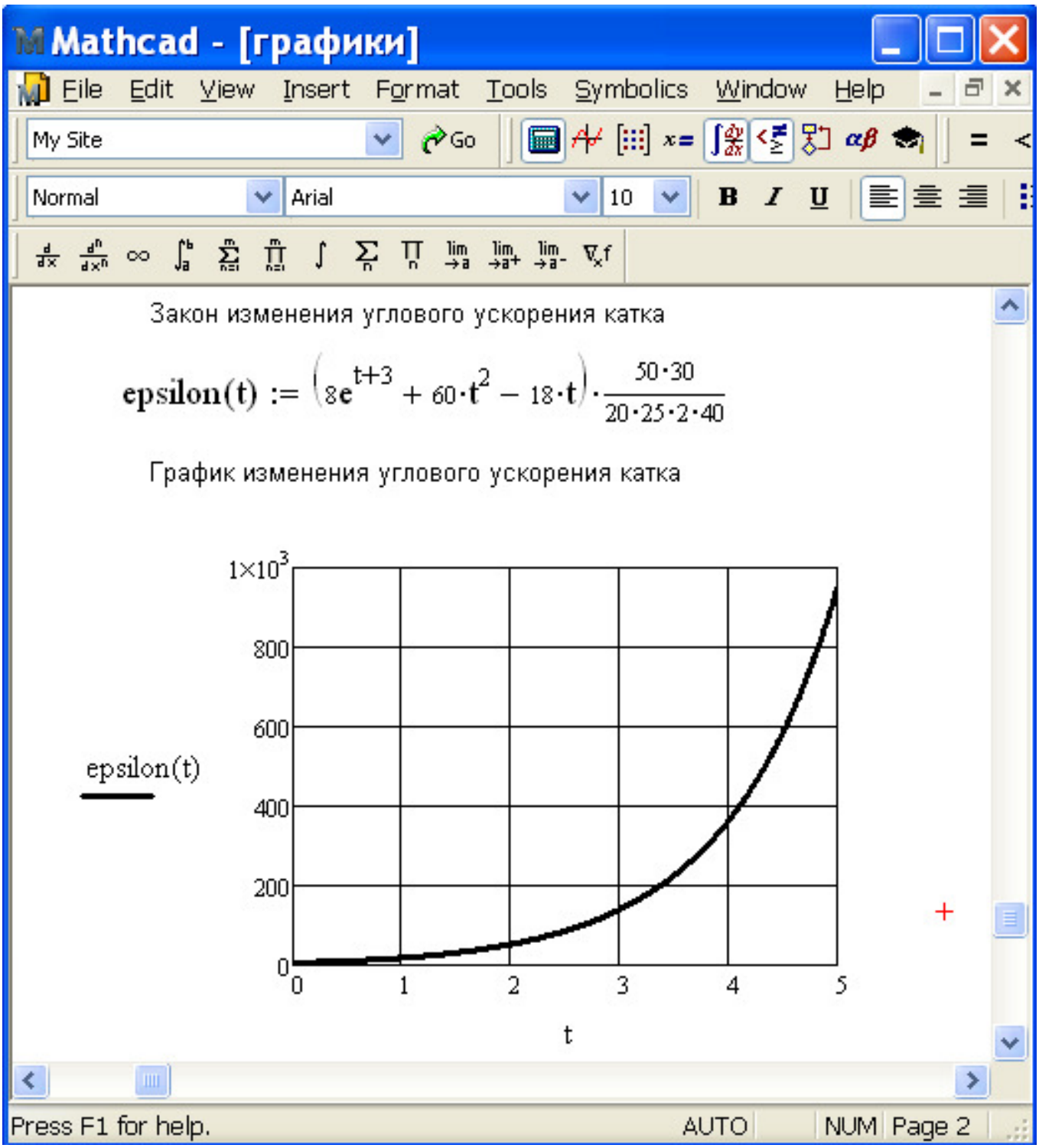

Рисунок 13 – График $\varepsilon_5(t)$

Список использованных источников

1 Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник для вузов. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова – 11-е изд., стер. – СПб: Лань, 2004. – 768 с.

2 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов. / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 10-е изд., стер. - М.: Интеграл-пресс, 2003. - 384 с.

3 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М. Тарг - 14-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003 - 416с.

4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для втузов в 3-х томах. Т.2. Динамика. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640с.

5 Дьяконов, В. Mathcad 2000: учебный курс. / В. Дьяконов – СПб: Питер, 2000. – 592 с.: ил.