Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Методические указания

Часть 1

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2019

УДК 512.64(076.5) + 514.12(076.5)
ББК 22.143я7 + 22.151.5я7
У76

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Усова, Л.Б.
У 76 Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: методические указания. Часть 1 / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 69 с.

Методические указания «Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»» часть 1 содержат разделы, состоящие из вопросов для самоподготовки, заданий для практического занятия и заданий для самостоятельного решения. Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал, разобрать задания практического занятия и успешно выполнить задания для самостоятельного решения. Разобранные примеры окажут существенную помощь студентам при решении заданий на практических занятиях и дома, а также помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная разработка предназначена для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК 512.64(076.5) + 514.12(076.5)
ББК 22.143я7 + 22.151.5я7

Содержание

Введение

Методические указания «Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»»» часть 1 содержат следующие темы практических занятий: 1 Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Способы представления комплексных чисел; 2 Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами; 3 Определитель. Способы вычисления определителя; 4 Обратная матрица. Способы нахождения обратной матрицы. Ранг матрицы. Способы нахождения ранга матрицы; 5 Система линейных уравнений. Способы решения системы линейных уравнений.

Цель создания такой разработки – развитие у студентов практических навыков решения задач в аудиторное и внеаудиторное время.

Методические указания состоят из блоков:

блок 1 «Вопросы для самоподготовки» – содержит вопросы для проверки усвоения теоретического материала;

блок 2 «Практическое занятие» – содержит разноуровневые задания, состоящие из двух пунктов. Пункт (а) сопровождается подробным решением задания, а пункт (б) студент должен выполнить самостоятельно или с помощью преподавателя;

блок 3 «Задания для самостоятельного решения» – содержит задания с ответами для самостоятельного решения и закрепления пройденного материала.

Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал с помощью вопросов для самоподготовки, разобраться в решении заданий, содержащихся в практических занятиях, успешно выполнить задания для самостоятельного решения. Разобранные задания окажут существенную помощь студентам на практических занятиях и дома, помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная разработка предназначена для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

1 Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Способы представления комплексных чисел

1.1 Вопросы для самоподготовки

1 Запишите тригонометрическую форму комплексного числа.

2 Запишите алгебраическую форму комплексного числа.

3 Запишите формулу возведение в степень комплексного числа.

4 Вычислите i^7 на множестве комплексных чисел.

5 Вычислите $\sqrt[3]{1}$ на множестве комплексных чисел.

6 Вычислите $\frac{1}{3+i}$.

7 Решите уравнение $z^2+2=0$ на множестве комплексных чисел.

8 Запишите показательную форму комплексного числа $i-1$.

9 Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих равенству $z\cdot\bar{z}=1$.

10 Запишите в тригонометрической форме комплексное число $-1-\sqrt{3}i$.

11 Запишите комплексное число $3e^{\frac{\pi}{2}i}$ в алгебраической форме.

12 Изобразите на комплексной плоскости множество точек $\operatorname{Im} z+\operatorname{Re} z=2$.

13 Найдите $|z|$ и $\arg z$, если $z=1-\sqrt{3}i$.

14 Изобразите на комплексной плоскости множество точек $|z|\le 2$.

15 Вычислите $\sqrt{-4}$ на множестве комплексных чисел.

16 Вычислите $\sqrt{i}$ на множестве комплексных чисел.

17 Вычислите $\sqrt{16}$ на множестве комплексных чисел.

18 Запишите формулу извлечения корня $n-$ой степени из комплексного числа.

19 Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данному равенству: $|z+1|=|z-i|$.

20 Вычислите i^{2006}.

1.2 Практическое занятие

Задание 1 Выполните действия $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ над комплексными числами в алгебраической форме: а) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = i - 4$; б) $z_1 = 6 - i$, $z_2 = -2 - 3i$.

Решение. а) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = i - 4$; $z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (i - 4) = -7 + 6i$;

$z_1 - z_2 = (-3 + 5i) - (i - 4) = -3 + 5i - i + 4 = 1 + 4i$;

$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 5i) \cdot (i - 4) = -3i + 12 + 5i^2 - 20i = 12 - 23i + 5 \cdot (-1) = 7 - 23i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3 + 5i)}{(i - 4)} = \frac{(-3 + 5i)(-i - 4)}{(i - 4)(-i - 4)} = \frac{3i + 12 - 5i^2 - 20i}{-i^2 + 16} =$$

$$= \frac{12 - 17i - 5 \cdot (-1)}{-(-1) + 16} = \frac{17 - 17i}{17} = 1 - i.$$

Ответ: а) $z_1 + z_2 = -7 + 6i$, $z_1 - z_2 = 1 + 4i$, $z_1 \cdot z_2 = 7 - 23i$, $\frac{z_1}{z_2} = 1 - i$;

б) $z_1 + z_2 = 4 - 4i$, $z_1 - z_2 = 8 + 2i$, $z_1 \cdot z_2 = -15 - 16i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-9 + 20i}{13}$.

Задание 2 Вычислите выражения: а) $\frac{(5 + i) \cdot (7 - 6i)}{3 + i}$; б) $\frac{(1 + 3i) \cdot (8 - i)}{(2 + i)^2}$.

Решение. а) Для вычисления данного выражения необходимо раскрыть скобки, привести подобные слагаемые.

$$\frac{(5 + i) \cdot (7 - 6i)}{3 + i} = \frac{35 - 30i + 7i - 6i^2}{3 + i} = \frac{35 - 23i - 6 \cdot (-1)}{3 + i} = \frac{35 - 23i + 6}{3 + i} =$$

$$= \frac{41 - 23i}{3 + i} = \frac{(41 - 23i) \cdot (3 - i)}{(3 + i) \cdot (3 - i)} = \frac{123 - 41i - 69i + 23i^2}{9 - i^2} = \frac{123 - 110i - 23}{9 + 1} =$$

$$= \frac{100 - 110i}{10} = 10 - 11i.$$

Ответ: а) $10 - 11i$; б) $5 + i$.

Задание 3 Вычислите: а) i^2, i^3, i^4, i^5, i^{24}, $i^{102}, i^{2433}\, i^{3015}$; б) $i^{44}, i^{54}, i^{113}, i^{539}$.

Решение. а) Поскольку $i^2 = -1$ и используя свойства степени с целым показателем получим $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^{24} = (i^4)^6 = 1^6 = 1$, $i^{102} = (i^2)^{51} = (-1)^{51} = -1$, $i^{2433} = i^{2432} \cdot i^1 = (i^2)^{1216} \cdot i = (-1)^{1216} \cdot i = 1 \cdot i = i$,
$i^{3015} = i^{3014} \cdot i^1 = (i^2)^{1507} \cdot i = (-1)^{1507} \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

Ответ: а) $-1; -i; 1; i; 1; -1; i; -i;$ б) $i^{44} = 1, i^{54} = -1, i^{113} = i, i^{539} = -i$.

Задание 4 Вычислите значение: а) $\sqrt{-5-12i}$; б) $\sqrt{3-4i}$.

Решение. а) $\sqrt{-5-12i}$.

Чтобы извлечь квадратный корень из комплексного числа, записанного в алгебраической форме, т.е. для числа $z = a + bi$ найти комплексное число $z_1 = x + yi$ такое, что $\sqrt{a+bi} = x + yi$, используем формулы: $x = \pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ и $y = \dfrac{b}{2x}$.

$\sqrt{-5-12i} = x + yi$, где $a = -5, b = -12$.

Тогда $x = \pm\sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{25+144}}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{b}{2x_1} = \frac{-12}{4} = -3 \Rightarrow x_1 + y_1 i = 2 - 3i;$$

$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = \dfrac{b}{2x_2} = \dfrac{-12}{-4} = 3 \Rightarrow x_2 + y_2 i = -2 + 3i.$ Таким образом,

$\sqrt{-5-12i} = \pm(2-3i).$

Ответ: а) $2-3i; -2+3i$; б) $2-i; -2+i$.

Задание 5 Комплексное число представить в тригонометрической форме:

а) $z = 1 + i\sqrt{3}$; б) $z = 1 - i$; в) $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. а) $z = 1 + i\sqrt{3}$. Комплексное число представлено в алгебраической форме: $z = x + iy$, где $x = 1$, $y = \sqrt{3}$. По формулам $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$

получим $|z| = r = \sqrt{1+3} = 2$, $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. (Рисунок 1)

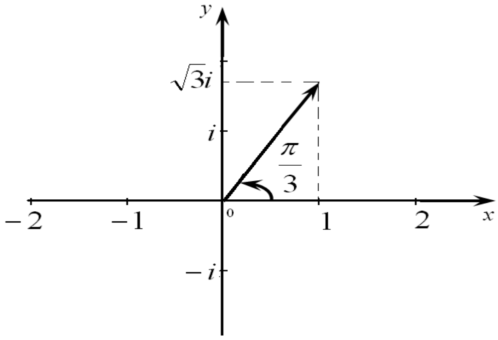

Рисунок 1

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, следовательно $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: а) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$;

в) $z = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Задание 6 Возведите в степень комплексное число: а) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$; б) $(2-2i)^{42}$.

Решение. а) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$.

Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Из алгебраической формы $z = x + iy$, $x = -1$ и $y = -\sqrt{3}$, по формулам $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, находим: $|z| = r = \sqrt{1+3} = 2$, $tg\varphi = \dfrac{\left(-\sqrt{3}\right)}{(-1)} = \sqrt{3}$, $\varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$ (рисунок 2)

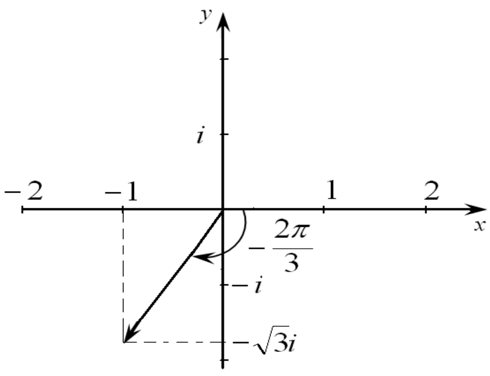

Рисунок 2

Тогда тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь следующий вид: $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$.

По формуле Муавра: $z^n=\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ данное число возведем в степень: $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}=\left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15}=$

$=2^{15}\cdot\left(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi)\right)=2^{15}\left(1+0i\right)=2^{15}=32768$.

Ответ: а) 32768; б) $-i\cdot(8^{21})$.

Задание 7 Даны два комплексных числа. Записать комплексные числа в тригонометрической форме, вычислить их произведение и частное:

а) $z_1=1+i\sqrt{3}$ и $z_2=\sqrt{3}+i$; б) $z_1=-1+i$ и $z_2=-1-i$.

Решение. а) $z_1=1+i\sqrt{3}$ и $z_2=\sqrt{3}+i$.

По известным действительным и мнимым частям строим на плоскости OXY точки, соответствующие этим числам. Определяем их модули и аргументы, затем по найденным r и φ записываем z_1 и z_2 в тригонометрической форме:

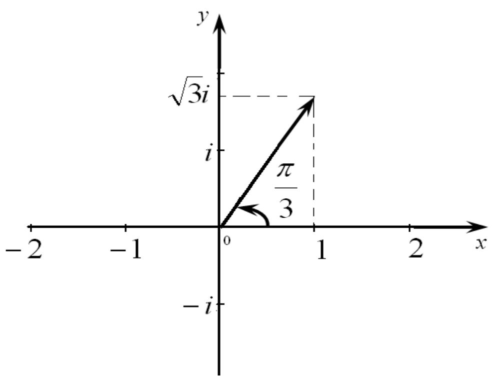

Рисунок 3

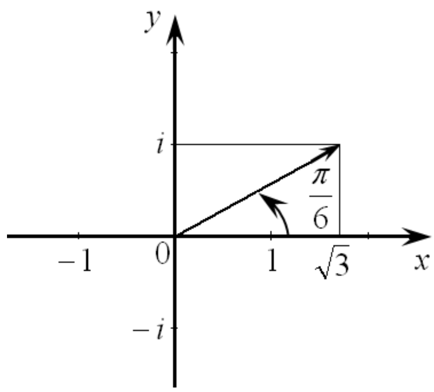

Рисунок 4

$$z_1\Rightarrow\begin{cases}r_1=\sqrt{1+3}=2,\\ \varphi_1=arctg\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$$

$$z_2\Rightarrow\begin{cases}r_2=\sqrt{3+1}=2,\\ \varphi_2=arctg\,\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right) \qquad z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} \right).$$

Теперь найдем произведение и частное, используя алгебраическую и тригонометрическую формы:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(1 + i \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} + i \cdot (3+1) = 4 \cdot i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} \right) = 4 \cdot i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} + i \cdot (3-1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}.$$

Ответ: а) $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot i, \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$; б) $z_1 \cdot z_2 = 2, \frac{z_1}{z_2} = -i.$

Задание 8 Вычислить z^4 и $\sqrt[4]{z}$, если:

а) $z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. а) $z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Запишем комплексное число z в тригонометрической форме и используя формулы: $z^n = (r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi), n \in Z.$ (1)

$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0,1,\ldots,n-1$, получим (2)

$$z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z^4 = r^4 \cdot (\cos 4\varphi + i \cdot \sin 4\varphi) = 1 \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{8\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{4} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{4} \right) = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right) \right).$$

Меняя k от 0 до 3, получим четыре значения для w и отметим полученные значения точками на комплексной плоскости:

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2},$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2},$$

$$w_4 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

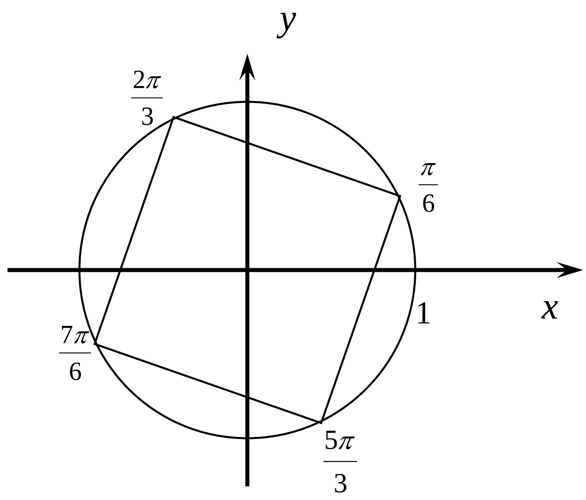

Рисунок 5

Все точки, соответствующие полученным значениям, располагаются на окружности радиуса R=1, причем аргумент первого комплексного числа равен $\frac{\pi}{6}$, а аргументы остальных получаются из первого последовательным увеличением на $\frac{\pi}{2}$ и образуют правильный четырехугольник (квадрат).

Ответ: а) $z^4 = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}, w_2 = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}, w_4 = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) $z^4 = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_1 = i\frac{\sqrt{3}}{2} + \cdot\frac{1}{2}, w_2 = i\frac{1}{2} - \cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, w_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}.$

Задание 9 Решите уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $z^5 + 32 = 0$; б) $z^3 + i = 0$.

Решение. а) $z^5 + 32 = 0$.

Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt[5]{-32}$. Число (–32) представим в тригонометрической форме, где $x = -32$, $y = 0$ (рисунок 6).

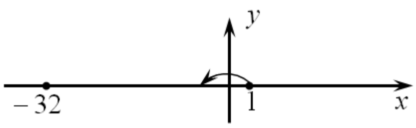

Рисунок 6

Тригонометрическая форма имеет вид: $-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)$.

По формуле $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$,

где $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$, находим

$z=\sqrt[5]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)$, где $k=0,1,2,3,4$.

Полагая $k=0,1,2,3,4$ получим пять различных значений, которые отмечены на комплексной плоскости, они расположены на окружности с центром в начале координат и радиусом равным 2, и образуют правильный пятиугольник с вершинами в данных точках:

$$w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right),$$

$$w_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$

$$w_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$w_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right),$$

$$w_4=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right).$$

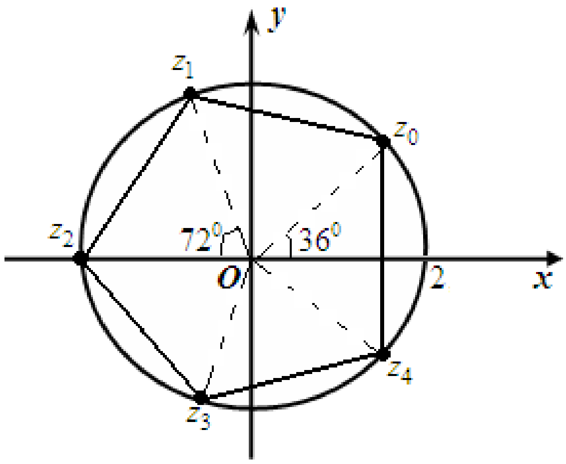

Рисунок 7

Ответ: а) $w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right), w_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right), w_2=-2,$

$w_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right), w_4=2\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right);$

б) $w_0 = i, w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

Задание 10 Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 3$; б) $|z + 2 - 3i| < 5$; в) $|z - 4 + i| \ge 3$; г) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; д) $\arg(z + 1 - 2i) > \frac{5\pi}{6}$;

е) $\arg(z - 3 + 4i) \le \frac{3\pi}{4}$; ж) $-3 \le \mathrm{Im} z < 4$; з) $-1 < \mathrm{Re}\, z < 5$; и) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3}{4}\pi; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 1 \le z \cdot \bar{z} \le 4, \\ -\sqrt{3} \le \mathrm{Im} z \le 0; \end{cases}$ л) $|z - i| = |z + 2|$; м) $\begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \ge \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Решение. а) $|z| = 3$. Так как $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$ и $x^2 + y^2 = 9$. Мы получили уравнение окружности с радиусом $R = 3$ с центром в начале координат (рисунок 8).

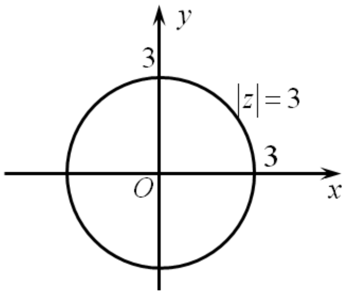

Рисунок 8

б) $|z + 2 - 3i| < 5$. Так как $|z + 2 - 3i| = |x + iy + 2 - 3i| = |(x + 2) + i(y - 3)| =$ $= \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$, то $\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} < 5$ и $(x+2)^2 + (y-3)^2 < 25$. Решением данного неравенства являются точки, лежащие внутри окружности с радиусом $R = 5$ с центром в точке (–2;3) без точек окружности (рисунок 9).

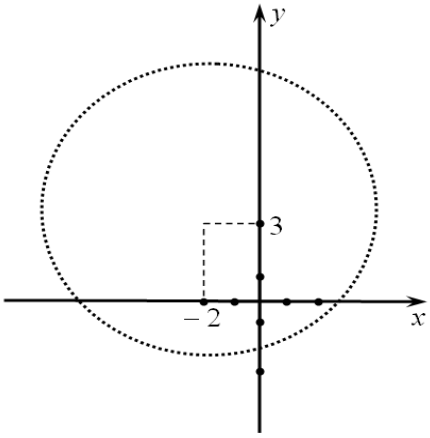

Рисунок 9

г) $\arg z = \frac{\pi}{6}$. $\arg z = \varphi$ – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $[0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$, то есть точки z, лежащие на комплексной плоскости, аргумент которых равен $\frac{\pi}{6}$, лежат на луче, выходящем из точки $O(0; 0)$ под углом $\frac{\pi}{6}$ к действительной оси (рисунок 10).

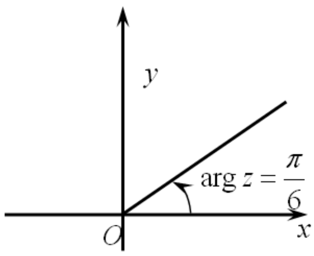

Рисунок 10

д) $\arg(z+1-2i) > \frac{5\pi}{6}$.

$\arg(z+1-2i) = \arg(x+yi+1-2i) = \arg((x+1)+i(y-2)) > \frac{5\pi}{6}$. Точки z, лежащие на комплексной плоскости, на лучах, выходящих из точки $(-1;2)$, аргументы которых, больше чем $\frac{5\pi}{6}$ и меньше чем 2π. Точки, лежащие на луче $\frac{5\pi}{6}$, не принадлежат данному множеству, а точки, лежащие на луче 2π, принадлежат этому множеству.

Изобразите на рис. 11 множество точек, удовлетворяющих данному условию.

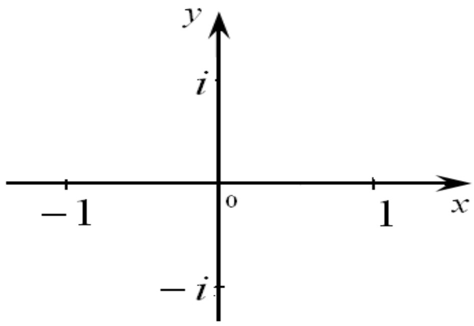

Рисунок 11

е) $\arg(z-3+4i)\le\dfrac{3\pi}{4}$. Решить самостоятельно.

ж) $-3\le \operatorname{Im} z<4$. Так как $\operatorname{Im} z=y$, то $-3\le y<4$. Точки, удовлетворяющие данному неравенству, будут лежать между двумя горизонтальными прямыми $y=-3,\ y=4$. Причем точки прямой $y=-3$ удовлетворяют неравенству, а точки прямой $y=4$ не удовлетворяют.

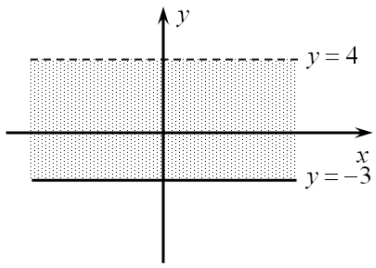

Рисунок 12

и) $\begin{cases} |z|\le 1, \\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le \dfrac{3}{4}\pi; \end{cases}$ Решить самостоятельно.

к) $\begin{cases} 1\le z\cdot \bar{z}\le 4, \\ -\sqrt{3}\le \operatorname{Im} z\le 0; \end{cases}$

Так как $z\cdot\bar{z}=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2+y^2$, а $\operatorname{Im} z=y$, то данную систему неравенств можно записать в виде: $\begin{cases} 1\le x^2+y^2\le 4, \\ -\sqrt{3}\le y\le 0. \end{cases}$

Неравенства $1\le x^2+y^2\le 4$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R=1$ и $R=2$ с центром в начале координат. Неравенства

$-\sqrt{3} \le y \le 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми: $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек заштриховано на рис.13.

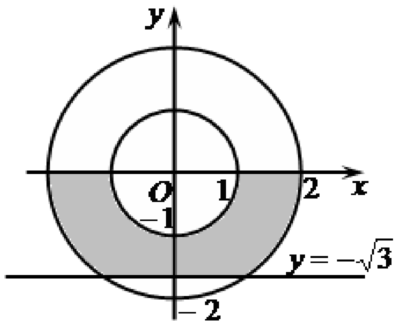

Рисунок 13

Задание 11 Найдите корни уравнения на множестве комплексных чисел:

а) $z^2 + 2z + 5 = 0$; б) $z^2 - 6z + 25 = 0$.

Решение. а) $z^2 + 2z + 5 = 0$. Решим квадратное уравнение относительно переменной z, тогда $D = 4 - 4 \cdot 5 = -16 = 16i^2$, $z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

Ответ: а) $z_{1,2} = -1 \pm 2i$; б) $z_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Задание 12 Решите биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел: а) $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$; б) $z^4 - 16 = 0$.

Решение. а) $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$;

Введем переменную $z^2 = t$, получим квадратное уравнение $t^2 + 18t + 81 = 0 \Rightarrow (t+9)^2 = 0 \Rightarrow t + 9 = 0 \Rightarrow z^2 + 9 = 0 \Rightarrow z^2 - 9i^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 9i^2 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 3i$.

Ответ: а) $z_{1,2} = \pm 3i$; б) $z_{1,2} = \pm 2$.

Задание 13 Решите уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $|z| - z = 1 + 2i$; б) $|z| - z = 8 + 12i$.

Решение. а)$|z| - z = 1 + 2i$. $\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1, \\ -y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x^2 + 4} - x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2, \\ x^2+4=1+2x+x^2, \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ 2x=3, \end{cases} \begin{cases} y=-2, \\ x=\dfrac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow z=\frac{3}{2}-2i.$$

Ответ: а) $z=\dfrac{3}{2}-2i$; б) $z=5-12i$.

Задание 14 Разложите на сумму простейших дробей над полем C:

а) $\dfrac{(-1+i)z-11-5i}{z^2+2z+5}$; б) $\dfrac{(1+i)(z+5)}{z^2-2z+5}$.

Решение. а) $\dfrac{(-1+i)z-11-5i}{z^2+2z+5}$.

Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого решим квадратное уравнение: $z^2+2z+5=0$. $D=4-4\cdot 5=4-20=-16=16i^2 \Rightarrow z_{1,2}=-1\pm 2i$.

$$\frac{(-1+i)z-11-5i}{(z+1-2i)(z+1+2i)}=\frac{A}{z+1-2i}+\frac{B}{z+1+2i}=\frac{A(z+1+2i)+B(z+1-2i)}{z^2+2z+5}=$$

$$=\frac{Az+A+2Ai+Bz+B-2Bi}{z^2+2z+5}=\frac{z(A+B)+A+B+2Ai-2Bi}{z^2+2z+5}.$$

$$\begin{cases} A+B=-1+i, \\ A+B+2Ai-2Bi=-11-5i, \end{cases} \begin{cases} A=-1+i-B, \\ A+B+2Ai-2Bi=-11-5i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1+i-B, \\ (-1+i-B)+B+2i(-1+i-B)-2Bi=-11-5i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1+i-B, \\ -1+i-B+B-2i-2-2Bi-2Bi=-11-5i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1+i-B, \\ -4Bi=-8-4i, \quad /\cdot i \end{cases} \begin{cases} A=-1+i-B, \\ 4B=-8i+4, \quad /:4 \end{cases} \begin{cases} A=-1+i-B, \\ B=-2i+1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-1+i+2i-1, \\ B=-2i+1, \end{cases} \begin{cases} A=3i-2, \\ B=-2i+1. \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{(-1+i)z-11-5i}{z^2+2z+5}=\dfrac{3i-2}{z+1-2i}+\dfrac{1-2i}{z+1+2i}$.

Ответ: а) $\dfrac{(-1+i)z-11-5i}{z^2+2z+5}=\dfrac{3i-2}{z+1-2i}+\dfrac{1-2i}{z+1+2i}$;

б) $\dfrac{(1+i)(z+5)}{z^2-2z+5}=\dfrac{-i+2}{z-1-2i}+\dfrac{-1+2i}{z-1+2i}$.

Задание 15 Найти многочлен второй степени $f(z)$, если:

а) $f(0)=2$, $f(-i)=4+i$, $f(2+i)=6+7i$;

б) $f(0)=4$, $f(1+2i)=-5-3i$, $f(2-i)=8+8i$.

Решение. а) $f(0)=2$, $f(-i)=4+i$, $f(2+i)=6+7i$.

$f(z)=az^2+bz+c$. $f(0)=c$,

$f(-i)=a(-i)^2+b(-i)+c=ai^2-bi+c=-a-bi+c$,

$f(2+i)=a(2+i)^2+b(2+i)+c=a(4+4i+i^2)+b(2+i)+c=$

$=a(4+4i-1)+b(2+i)+c=a(3+4i)+b(2+i)+c$.

$$\begin{cases} c=2, \\ -a-bi+c=4+i, \\ a(3+4i)+b(2+i)+c=6+7i, \end{cases} \quad \begin{cases} c=2, \\ a=-bi-2-i, \\ (-bi-2-i)(3+4i)+b(2+i)=4+7i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=2, \\ a=-bi-2-i, \\ b=\dfrac{3(1+3i)}{3-i} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{3(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3(3+i+9i-3)}{9-i^2}=\frac{3(10i)}{10}=3i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=2, \\ a=-bi-2-i, \\ b=3i, \end{cases} \begin{cases} c=2, \\ a=1-i, \\ b=3i. \end{cases}$$

Таким образом, многочлен второй степени имеет вид: $f(z)=(1-i)z^2+3iz+2$.

Ответ: а) $f(z)=(1-i)z^2+3iz+2$; б) $f(z)=iz^2+(2i-1)z+4$.

Задание 16 а) Выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$;

б) Выразить $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Решение. а) Выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Воспользуемся формулой Муавра при $n=5$:

$(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi \Rightarrow \cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi\cdot i\sin\varphi + 10\cos^3\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi +$
$+10\cos^2\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + i^5\cdot\sin^5\varphi = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$

Учитывая, что $i^2 = -1,\ i^3 = i^2\cdot i = -i,\ \ i^4 = i^2\cdot i^2 = 1,\ i^5 = i^3\cdot i^2 = i$,

последнее соотношение можно переписать в виде:

$\cos^5\varphi + i\cdot 5\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi - i\cdot 10\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi +$
$+5\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi + i\cdot\sin^5\varphi = \cos 5\varphi + i\cdot\sin 5\varphi$

Отделив действительную и мнимую части, окончательно получим:

$$\begin{aligned}&\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi\\&\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cdot\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cdot\cos^4\varphi\end{aligned}.$$

Ответ: а) $\begin{aligned}&\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi,\\&\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cdot\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cdot\cos^4\varphi\end{aligned}$,

б) $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi; \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$

Задание 17 Найти решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases}(1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i,\\(1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i.\end{cases}$; б) $\begin{cases}iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i,\\2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i.\end{cases}$

Решение. а) $\begin{cases}(1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i\\(1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i.\end{cases}$; $\begin{cases}z_1 = -\dfrac{1-i}{1+i}z_2 + 1,\\(1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i.\end{cases}$;

$\begin{cases}z_1 = -\dfrac{1-i}{1+i}z_2 + 1,\\(1-i)(-\dfrac{1-i}{1+i}z_2 + 1) + (1+i)z_2 = 1+3i.\end{cases}$; $\begin{cases}z_1 = -\dfrac{1-i}{1+i}z_2 + 1,\\(1+i)z_2 = i.\end{cases}$; $\begin{cases}z_1 = -\dfrac{1-i}{1+i}z_2 + 1,\\z_2 = i+1.\end{cases}$; $\begin{cases}z_1 = i,\\z_2 = i+1.\end{cases}$

Ответ: а) $z_1 = i, z_2 = 1+i$; б) $z_1 = 2, z_2 = 1-i.$

Задание 18 Найти вещественные числа x, y удовлетворяющие уравнению:

а) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$; б) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$.

Решение. а) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i \Rightarrow 2x + ix + y + 2iy = 1-4i \Rightarrow$

$2x + y + i(x+2y) = 1-4i \Rightarrow \begin{cases}2x + y = 1\\x + 2y = -4\end{cases}; \begin{cases}y = 1-2x\\x+2y = -4\end{cases}; \begin{cases}y = 1-2x\\x + 2(1-2x) = -4\end{cases};$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2 - 4x = -4 \end{cases}; \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = 2 \end{cases}; \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: а) $\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -5 \\ x = 3 \end{cases}$.

Задание 19 Выполнить действия. Результат представить в алгебраической форме: а) $(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{2\pi}{9}i})^3$; б) $3 \cdot e^{\frac{\pi}{5}i} \cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}$.

Решение. а) $(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{2\pi}{9}i})^3 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) =$

$$= 2\sqrt{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \sqrt{2}(-1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}.$$

Ответ: а) $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; б) -12.

Задание 20 Найдите модуль и аргумент комплексного числа z, если:

а) $z = (1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})^2 \cdot (1 - i ctg\frac{11\pi}{10})^3$; б) $z = \dfrac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4}{(\sin\frac{3\pi}{10} + i\cos\frac{7\pi}{10})^2}$.

Решение. а) $z = (1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})^2 \cdot (1 - i ctg\frac{11\pi}{10})^3$.

Представим два данных комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = 1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} \Rightarrow x = 1 - \cos\frac{\pi}{5}, y = \sin\frac{\pi}{5}.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1 - \cos\frac{\pi}{5})^2 + \sin^2\frac{\pi}{5}} = 2\sin\frac{\pi}{10}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{10}} = \sin\frac{\pi}{10} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \cos\frac{2\pi}{5};$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{10}} = \cos\frac{\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \sin\frac{2\pi}{5} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{5}.$$

Первое комплексное число в тригонометрической форме имеет вид:

$$z_1 = 1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{10}(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}).$$

Аналогично для второго числа:

$$z_2 = 1 - ictg\frac{11\pi}{10} \Rightarrow x = 1, y = -ctg\frac{11\pi}{10}.\ r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + ctg^2\frac{11\pi}{10}} = \frac{1}{\sin\frac{11\pi}{10}}.$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \sin\frac{11\pi}{10} = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{10}) = \cos\frac{8\pi}{5}.$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-ctg\frac{11\pi}{10}}{1/\sin\frac{11\pi}{10}} = -ctg\frac{11\pi}{10}\cdot\sin\frac{11\pi}{10} = -\cos\frac{11\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{10}) = \sin\frac{8\pi}{5} \Rightarrow \varphi = \frac{8\pi}{5}$$

Второе комплексное число в тригонометрической форме имеет вид:

$$z_2 = 1 - ictg\frac{11\pi}{10} = \frac{1}{\sin\frac{11\pi}{10}}(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}).$$

Подставим тригонометрические формы данных чисел в первоначальное выражение:

$$z = (1 - \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})^2 \cdot (1 - ictg\frac{11\pi}{10})^3 = (2\sin\frac{\pi}{10}(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}))^2 \cdot$$

$$(1/\sin\frac{11\pi}{10}(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}))^3 = (4\sin^2\frac{\pi}{10}(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}))\cdot$$

$$(1/\sin^3\frac{11\pi}{10}(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5})) = 4\sin^2\frac{\pi}{10}(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5})\cdot$$

$$\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{10}}(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5}) = \frac{4}{\sin\frac{\pi}{10}}\cdot(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5})\cdot(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5}) =$$

$$\frac{4}{\sin\frac{\pi}{10}}\cdot(\cos\frac{28\pi}{5} + i\sin\frac{28\pi}{5}) = \frac{4}{\sin\frac{\pi}{10}}\cdot(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}).$$

Ответ: а) $r = \frac{4}{\sin\frac{\pi}{10}}, \varphi = \frac{8\pi}{5}$; б) $r = 64, \varphi = -\frac{4\pi}{15}$.

1.3 Задания для самостоятельного решения

Задание 1 Возведите в степень комплексное число: а) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^8$, б) $(1-i)^{12}$.

Ответ: а) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) –64.

Задание 2 Выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следующие функции:

а) $\sin 4\varphi$, б) $\cos 4\varphi$.

Ответ: а) $4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi-4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$; б) $\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$.

Задание 3 Вычислите все значения корней и изобразите на комплексной плоскости: а) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$, б) $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$, в) $\sqrt[4]{-1}$, г) $\sqrt[5]{-1-i}$.

Ответ: а) $z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i, z_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$;

б) $z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right), z_2=\sqrt[3]{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right), z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}-i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)$;

в) $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i, z_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i, z_3=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i, z_4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$;

г) $z_1=\sqrt[5]{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right), z_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{20}+i\sin\dfrac{13\pi}{20}\right), z_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{21\pi}{20}+i\sin\dfrac{21\pi}{20}\right)$,

$z_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{29\pi}{20}+i\sin\dfrac{29\pi}{20}\right), z_5=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{37\pi}{20}+i\sin\dfrac{37\pi}{20}\right)$.

Задание 4 Решите уравнение: а) $z^3+8=0$, б) $z^4-1=0$, в) $z^4+z^2-2=0$.

Ответ: а) $z_1=1+i\sqrt{3}, z_2=-2, z_3=1-i\sqrt{3}$, б) $z_1=1, z_2=i, z_3=-1, z_4=-i$,

в) $z_1=1, z_2=-1, z_3=i\sqrt{2}, z_4=-i\sqrt{2}$.

Задание 5 Решите уравнение $4z^4-8z^3+7z^2+2z-2=0$, если известен один его корень $z_1=1-i$.

Ответ: $z_2=1+i,\ z_3=0{,}5,\ z_4=-0{,}5$.

Задание 6 Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

а) $z^4+16=0$; б) $z^4-z^3+2z^2-z+1=0$;

в) $z^8-17z^4+16=0$; г) $z^2-(4+i)z+10+2i=0$.

Ответ: а) $z_{1,2}=\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$, $z_{3,4}=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$; б) $z_{1,2}=\pm i$, $z_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$;

в) $z_{1,2}=\pm 1$, $z_{3,4}=\pm i$, $z_{5,6}=\pm 2$, $z_{7,8}=\pm 2i$; г) $z_1=2+3i$, $z_2=2-2i$.

Задание 7 Указать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих указанному соотношению:

а) $|z-1|=|z-i|$, б) $|z-1|=|z+2i|$, в) $|z+1|+|z-1|=3$, г) $\mathrm{Re}\,z^2=1$, д) $\mathrm{Im}z^2=1$.

Ответ: а) Прямая $y=x$; б) Прямая $4y+2x+3=0$; в) Эллипс $\dfrac{x^2}{9/4}+\dfrac{y^2}{5/4}=1$;

г) Гипербола $x^2-y^2=1$; д) Гипербола $2x\cdot y=1$.

Задание 8 Найти вещественные числа x, y, удовлетворяющие уравнению:

а) $\dfrac{x+1+(y-1)i}{5+3i}=1+i$; б) $(x+y)^2 i-\dfrac{6}{i}-x=1-y+5(x+y)i$.

Ответ: а) $\begin{cases} y=9 \\ x=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y_1=2 \\ x_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y_2=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Задание 9 Решите уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $|z|-3z=-12i$; б) $z^2+\bar{z}=0$.

Ответ: а) $z=\sqrt{2}+4i$; б) $z_1=0, z_2=-1, z_{3,4}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

2 Матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами

2.1 Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте определение матрицы.
2. Сформулируйте определение квадратной матрицы.
3. Сформулируйте определение диагональной матрицы.
4. Сформулируйте определение транспонированной матрицы к матрице A.
5. При каких условиях равны две матрицы?
6. В каком случае можно умножить две матрицы?
7. Сформулируйте определение ступенчатой матрицы.
8. Сформулируйте определение столбцевой (строчной) матрицы.
9. Когда можно сложить две матрицы?
10. Вычислите $3B+E$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.
11. Сформулируйте определение единичной матрицы.
12. Вычислите $A\cdot B$ и $B\cdot A$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$.
13. Сформулируйте элементарные преобразования матриц.
14. Когда можно умножить матрицу на число?
15. Вычислите $A+2B$: $A=(1\,3)$, $B=(4\,5)$.
16. Сформулируйте правило вычитания двух матриц.
17. Вычислите $A-3B$: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.
18. Вычислите $A\cdot E$, где $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.
19. Вычислите $A-B^T$: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

20. Вычислите $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

2.2 Практическое занятие

Задание 1 Выполните умножение двух матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}_{2\times 2}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}$; б) $A=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -3 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}$ и $B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 7\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Решение. а) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}_{2\times 2}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Для того чтобы умножить две матрицы необходимо, чтобы количество столбцов в первой матрице совпадало с количеством строк во второй матрице.

Матрица $A_{2\times \underline{2}}\cdot B_{\underline{2}\times 2}$ существует, так как количество столбцов в первой матрице равно 2, количество строк во второй матрице равно 2.

$$A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+4\cdot 7 & 3\cdot(-1)+\ 4\cdot 2\\ 0\cdot 1+(-5)\cdot 7 & 0\cdot(-1)+(-5)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+28 & -3+8\\ 0+(-35) & 0+(-10)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & 5\\ -35 & -10\end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Матрица $B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 2}$ существует, т.к. $(2=2)$.

$$B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & -5\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 4+(-1)\cdot(-5)\\ 7\cdot 3+2\cdot 0 & 7\cdot 4+2\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+0 & 4+5\\ 21+0 & 28+(-10)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 21 & 18\end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Ответ: а) $A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}31 & 5\\ -35 & -10\end{pmatrix}_{2\times 2}$; $B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 21 & 18\end{pmatrix}_{2\times 2}$;

б) $A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}6 & 42\\ -14 & -29\end{pmatrix}_{2\times 2}$; $B_{2\times 2}\cdot A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-15 & 14\\ -21 & -8\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Задание 2 Выполните умножение двух матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}_{3\times3}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}_{2\times4}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -8 \\ -2 & -5 & -9 \\ -6 & 5 & -7 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}_{4\times3}$.

Решение. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}_{3\times3}$.

$$A_{2\times3}\cdot B_{3\times3}=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 4 & 5 \end{array}\right)_{2\times\underline{3}}\cdot\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 7 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \\ -4 & -7 & 6 \end{array}\right)_{\underline{3}\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot8+(-2)\cdot(-4) & 2\cdot7+3\cdot9+(-2)\cdot(-7) & 2\cdot(-5)+3\cdot(-1)+(-2)\cdot6 \\ 0\cdot1+4\cdot8+5\cdot(-4) & 0\cdot7+4\cdot9+5\cdot(-7) & 0\cdot(-5)+4\cdot(-1)+5\cdot6 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+24+8 & 14+27+14 & -10+(-3)+(-12) \\ 0+32-20 & 0+36-35 & 0+(-4)+30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 55 & -25 \\ 12 & 1 & 26 \end{pmatrix}_{2\times3}.$$

Матрица $B_{3\times3}\cdot A_{2\times3}$ не существует, т.к. количество столбцов в первой матрице $B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 8 & 9 & -1 \\ -4 & -7 & 6 \end{pmatrix}_{3\times3}$ не совпадает с количеством строк во второй матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$, т.е. $(3\neq2)$.

Ответ: а) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 34 & 55 & -25 \\ 12 & 1 & 26 \end{pmatrix}$; Матрицы $B\cdot A$ не существует;

б) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & -24 & -35 \\ -28 & 48 & -28 \end{pmatrix}$; Матрицы $B\cdot A$ не существует.

Задание 3 Выполните умножение над матрицами $A \cdot B$ и $B \cdot A$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}_{3\times1}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{1\times3}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}_{4\times1}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 & -3 \end{pmatrix}_{1\times4}$.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}_{3\times1}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{1\times3}$.

$$A_{3\times1} \cdot B_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}_{3\times1} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-6) & 1\cdot 0 & 1\cdot 4 \\ -2\cdot(-6) & -2\cdot 0 & -2\cdot 4 \\ 6\cdot(-6) & 6\cdot 0 & 6\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & -8 \\ -36 & 0 & 24 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$B_{1\times3} \cdot A_{3\times1} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}_{3\times1} = \left(1\cdot(-6) + (-2)\cdot 0 + 6\cdot 4\right) = \left(-6+0+24\right) = (18)_{1\times1}.$$

Ответ: а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & -8 \\ -36 & 0 & 24 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (18)$;

б) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 24 & -9 \\ -4 & -2 & 16 & -6 \\ -8 & -4 & 32 & -12 \\ 10 & 5 & -40 & 15 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (39)$.

Задание 4 Выполните действия над матрицами A, B:

а) $2A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}_{3\times2}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$;

б) $A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}_{3\times1}$;

в) $3A + \dfrac{1}{2}B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 12 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3}$;

г) $4A-5B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}_{3\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6 & -5\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}_{2\times 3}$.

Решение. а) $2A+3B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}_{3\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}_{3\times 2}$.

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}_{3\times 2}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 0 & 6\\ 12 & -4\end{pmatrix}_{3\times 2}+\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\\ 15 & -9\end{pmatrix}_{3\times 2}$$
$$\begin{pmatrix}2+6 & -8+3\\ 0+6 & 6+3\\ 12+15 & -4+(-9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 6 & 9\\ 27 & -13\end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

б) $A-B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ 0 & 4 & 3\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}_{3\times 3}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 6\end{pmatrix}_{3\times 1}$.

$A-B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ 0 & 4 & 3\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}_{3\times 3}-\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 6\end{pmatrix}_{3\times 1}$. Данное действие выполнить нельзя, т.к. матрицы разного размера.

Ответ: а) $2A+3B=\begin{pmatrix}8 & -5\\ 6 & 9\\ 27 & -13\end{pmatrix}_{3\times 2}$; б) $A-B$ матрицы не существует;

в) $3A+\frac{1}{2}B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 21\\ 1 & 3 & -18\end{pmatrix}$; г) $4A-5B$ матрицы не существует.

Задание 5 Найдите матрицу:

а) $C=A\cdot B-3B\cdot E+2A^2-4B^T$, если $A=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}_{2\times 2}$;

б) $C=A\cdot B+2A\cdot E-3B^2+5A^T$, если $A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 5 & 3\end{pmatrix}_{2\times 2}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Решение. а) $C = A \cdot B - 3B \cdot E + 2A^2 - 4B^T$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}$.

1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-3 & 12-1 \\ 4-6 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $3B \cdot E = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+0 & 0+6 \\ 9+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

3) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-1 & -6+2 \\ 6-2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $4B^T = 4\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T = 4\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $2A^2 = 2\begin{pmatrix} 35 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

$$C = A \cdot B - 3B \cdot A + 2A^2 - 5B^2 = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -11 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & -15 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $C = \begin{pmatrix} 63 & -15 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} -104 & 49 \\ -51 & 37 \end{pmatrix}$.

Задание 6 Приведите матрицу к ступенчатому виду:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Первую строку исходной матрицы умножим на (–2) и прибавим ко второй строке матрицы и запишем во вторую строку матрицы, равносильную данной матрице:

$$
+\begin{array}{rrrr} -2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 & 8 \end{array}
$$

2) Умножим первую строку исходной матрицы на (4) и прибавим к третьей строке матрицы и запишем в третью строку матрицы, равносильную данной матрице:

$$
+\begin{array}{rrrr} 4 & 0 & -4 & -16 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 2 & -1 & -18 \end{array}.
$$

Равносильная матрица записана далее.

3) Теперь будем работать со второй матрицей. Умножим вторую строку на (2), а третью на (–5) и сложим их.

$$
+\begin{array}{rrrr} 0 & 10 & 2 & 16 \\ 0 & -10 & 5 & 90 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 106 \end{array}.
$$

Таким образом, исходная матрица с помощью элементарных преобразований приведена к ступенчатому виду:

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 106 \end{pmatrix}.
$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 106 \end{pmatrix}$ – ступенчатая матрица;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – ступенчатая матрица.

2.3 Задания для самостоятельного решения

Задание 1 Выполните все возможные произведения двух матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\2&3&4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\1&-1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix};Д=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&0\end{pmatrix};M=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\2&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^2=\begin{pmatrix}3&7&7\\2&4&5\\10&19&21\end{pmatrix};A\cdot B=\begin{pmatrix}4&1\\2&-1\\9&0\end{pmatrix};A\cdot M=\begin{pmatrix}6&-2&0\\4&0&0\\14&-1&-3\end{pmatrix};$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\\-1&0\end{pmatrix};B\cdot Д=\begin{pmatrix}-1&6&3\\1&2&3\\2&0&3\end{pmatrix};C^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix};C\cdot Д=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&4&3\end{pmatrix};$$

$$Д\cdot A=\begin{pmatrix}7&13&15\\-1&0&1\end{pmatrix};Д\cdot B=\begin{pmatrix}6&-1\\1&-2\end{pmatrix};Д\cdot M=\begin{pmatrix}10&0&-2\\4&-1&3\end{pmatrix};$$

$$M^2=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&0&-41\\0&-4&0\end{pmatrix};M\cdot A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\4&6&5\\0&2&-1\end{pmatrix};M\cdot B=\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\\2&5\end{pmatrix}.$$

Задание 2 Найдите матрицу $C=A^3-3\cdot A+2\cdot E$, если $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

Ответ: $C=\begin{pmatrix}18&18&18\\18&18&18\\18&18&18\end{pmatrix}$.

Задание 3 Вычислите матрицу $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

Ответ: $\begin{pmatrix}\cos n\alpha&\sin n\alpha\\-\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$.

3 Определитель. Способы вычисления определителя

3.1 Вопросы для самоподготовки

1 Сформулируйте определение определителя.

2 Сформулируйте теорему Лапласа.

3 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 20 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}$.

4 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & -4 \end{vmatrix}$.

5 Напишите формулу вычисления определителя третьего порядка по формуле Саррюса (правило треугольника).

6 Сформулируйте определение минора M_{ij}.

7 Сформулируйте определение алгебраического дополнения.

8 Вычислите определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

9 Вычислите алгебраическое дополнение A_{23} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

10 Найдите M_{21} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11 Сформулируйте свойства определителей.

12 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & -4 \end{vmatrix}$.

13 Чему равен определитель ступенчатой матрицы?

14 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

15 Чему равен определитель единичной матрицы?

16 Разложите определитель $\begin{vmatrix} a & в & п \\ т & с & д \\ к & н & б \end{vmatrix}$ по элементам второй строки.

17 Чему равен определитель диагональной матрицы?

18 Разложите определитель $\begin{vmatrix} a & в & п \\ т & с & д \\ к & н & б \end{vmatrix}$ по элементам третьего столбца.

19 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & -2 \\ 9 & 0 & 9 & -9 \\ 7 & 0 & 7 & 14 \end{vmatrix}$.

20 Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3.2 Практическое занятие

Задание 1 Вычислите определители данных матрац:

а) $A_1 = (-5)_{1\times1}$; б) $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times2}$; в) $A_2 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}_{2\times2}$; г) $A_1 = (6)_{1\times1}$;

д) $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times2}$; е) $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{2\times2}$.

Решение.

а) $A_1 = (-5)_{1\times1}$. $\det A_1 = |-5| = -5$;

б) $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times2}$. $\det A_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot3 - (-4)\cdot1 = -6 - (-4) = -6 + 4 = -2$;

в) $A_2 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}_{2\times2}$. $\det A_2 = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta)$.

Ответ: а) $\det A_1 = -5$; б) $\det A_2 = -2$; в) $\det A_2 = \sin(\alpha-\beta)$;

г) $\det A_1 = 6$; д) $\det A_2 = -14$; е) $\det A_2 = \cos2\alpha$.

Задание 2 Вычислите определитель третьего порядка:

1) по правилу «треугольников» (правило Саррюса);

2) по элементам третьего столбца;

3) по элементам второй строки:

а) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

1) по правилу «треугольников» (правило Саррюса):

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \left(2\cdot 0\cdot 8 + (-1)\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot(-3)\cdot 4\right) - \left(3\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot(-1)\cdot 8 + (-3)\cdot(-2)\cdot 2\right) =$$

$$= \left(0 + 6 - 12\right) - \left(0 - 8 + 12\right) = -6 - 4 = -10.$$

2) по элементам третьего столбца:

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot A_{13} + (-2)\cdot A_{23} + 8\cdot A_{33} =$$

$$= 4\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13} + (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23} + 8\cdot(-1)^{3+3}\cdot M_{33} =$$

$$= 4\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 8\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3-0) + 2\cdot(-6+3) + 8\cdot(0+1) =$$

$$= -12 + (-6) + 8 = -10.$$

3) по элементам второй строки:

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + (-2)\cdot A_{23} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} + 0\cdot(-1)^{2+2}\cdot M_{22} + (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 0\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= -1\cdot(-8-(-12))+0\cdot(16-12)+2\cdot(-6-(-3)) = -1\cdot 4+0\cdot 4+2\cdot(-3) =$

$-4+0+(-6) = -10$.

Ответ: а) –10; б) 3.

Задание 3 Вычислите определитель четвертого порядка через алгебраические дополнения, если задана матрица:

а) $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A_4 = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель четвертого порядка для матрицы A_4 по элементам первого столбца:

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} = 3\cdot A_{11} = 3\cdot(-1)^{1+1} M_{11} =$$

$= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ (вычислим определитель третьего порядка по элементам первого столбца) $= 3\cdot\left((-3)\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31}\right) =$

$$= 3\cdot(-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} = 3\cdot(-3)\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot\left(4\cdot 3 - 0\cdot 2\right) = 3\cdot(-3)\cdot 4\cdot 3 = -108$$

Таким образом, определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (исходя из свойст определителей).

Ответ: а) –108; б) 120.

Задание 4 Вычислите определитель четвертого порядка для матрицы:

а) $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель четвертого порядка по элементам третьего столбца:

$\det A_4 = 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} =$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} M_{13} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

(вычислим полученные определители третьего порядка, разложив по элементам второй строки (первый определитель) и по элементам первого столбца (второй определитель))

$= 1 \cdot (1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}) + 2 \cdot (-3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31}) =$

$= 1 \cdot (1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21}) + 2 \cdot (-3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11}) =$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-6) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1-6) = (-12-(-4)) \cdot (-7) =$$

$= (-12+4) \cdot (-7) = -8 \cdot (-7) = 56$.

Ответ: а) 56; б) –26.

Задание 5 Вычислите определитель четвертого порядка для матрицы A_4:

а) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Приведем определитель матрицы четвертого порядка к ступенчатому виду:

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1)\times(2)\times(-3) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-3)\times(1) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 32 \\ 0 & 0 & 8 & -18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 8 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 238 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 238 = 238.$$

Ответ: а) 238; б) –174.

Задание 6 Вычислите определители матриц, используя свойства определителей:

а) $A_2 = \begin{pmatrix} 3648 & 2889 \\ 3649 & 2890 \end{pmatrix}$; б) $A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ -8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $A_2 = \begin{pmatrix} 7744 & 7655 \\ 7745 & 7656 \end{pmatrix}$; г) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 16 & 24 & 8 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A_2 = \begin{pmatrix} 3648 & 2889 \\ 3649 & 2890 \end{pmatrix}$.

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3648 & 2889 \\ 3649 & 2890 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3648 & 2889 \\ 3648+1 & 2889+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3648 & 2889 \\ 3648 & 2889 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3648 & 2889 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 3648 & 2889 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3648 & 2889 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3648 - 2889 = 759.$$

б) $A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ -8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ -8 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -8 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 \cdot ((-6+12+60) - (16+27-10)) = -6 \cdot (66-33) = -6 \cdot 33 = -198.$$

Ответ: а) 759; б) –198; в) 89; г) –432.

3.3 Задания для самостоятельного решения

Задание 1 Вычислите определители данных матрац:

а) $A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A_2 = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$; в) $A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

г) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; д) $A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$; е) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $A_3 = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$; з) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $(\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi)$.

Ответ: а) 1; б) $a^2+b^2+c^2+d^2$; в) 1; г) –8; д) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; е) –2; ж) $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$; з) $3i\sqrt{3}$.

Задание 2 Вычислите $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, по элементам третьей строки.

Ответ: $8a+15b+12c-19d$.

Задание 3 Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: а) 24; б) 17; в) 301; г) 60; д) 1932; е) –18016; ж) $n!$.

4 Обратная матрица. Способы нахождения обратной матрицы. Ранг матрицы. Способы нахождения ранга матрицы

4.1 Вопросы для самоподготовки

1 Сформулируйте определение обратной матрицы.

2 Сформулируйте определение невырожденной матрицы.

3 Сформулируйте определение ранга матрицы.

4 Сформулируйте определение вырожденной матрицы.

5 Сформулируйте условие существования обратной матрицы.

6 При каком значении a обратная матрица не существует для матрицы $A = \begin{pmatrix} -a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$?

7 Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 10 \\ 0 & 10 & 12 \end{pmatrix}$.

8 При каком значении a ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ равен 3?

9 Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

10 При каком значении a ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ равен 1?

11 При каком значении a ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ равен 2?

12 При каком значении a матрица вырожденная $A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$?

13 При каком значении a ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ равен 2?

14 При каком значении a матрица невырожденная $A=\begin{pmatrix} 2a & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$?

15 Найдите обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

16 Найдите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

17 При каком значении a ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен 1?

18 Найдите обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

19 При каком значении a ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен 2?

20 При каком значении a обратная матрица существует для матрицы $A=\begin{pmatrix} a & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$?

4.2 Практическое занятие

Задание 1 Решить матричные уравнения:

а) $X\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $X\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решим матричное уравнение. Для того чтобы, найти неизвестную матрицу X необходимо найти обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и умножить обе части данного матричного уравнения справа на обратную матрицу. Найдем обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$:

1 Найдем определитель матрицы:

$$\det A=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=4-3=1.$$

Так как определитель не равен 0, то матрица является *невырожденной*, и обратная матрица существует.

2 Найдем алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot M_{11}=1\cdot(-4)=-4.$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=-1\cdot 3=-3.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1 \cdot 1 = -1.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{2+2} = (-1)^4 \cdot M_{22} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Транспонируем данную матрицу, то есть меняем строки и столбцы местами: $A^* = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

4 Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5 Проверка $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (по определению обратной матрицы).

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Получим:

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}.$$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и умножим обе части матричного уравнения слева на обратную матрицу.

Обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найдем с помощью элементарных преобразований т.е. припишем к данной матрице справа единичную матрицу и получим матрицу из двух строк и четырех столбцов. С помощью элементарных преобразований над новой матрицей размера (2×4) левую матрицу A приведем к единичному виду, тогда приписанная единичная матрица будет являться обратной матрицей к первоначальной матрице A.

$\left(\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{matrix}\right).$ Таким образом, обратная матрица имеет вид: $A^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Получим: $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}; \Rightarrow X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

Ответ: а) $X = \begin{pmatrix}11 & 3\\ -24 & -7\end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; в) $X = \begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & \frac{7}{8}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$; г) $X = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 2 Найдите A^{-1} для матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу:

1 Найдем определитель матрицы A:

$$\det\ A = \begin{vmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{vmatrix} = (9 - 50 - 12) - (-45 - 15 + 8) = -53 + 52 = -1.$$

Матрица *невырожденная*, следовательно, обратная матрица существует.

2 Найдем алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 - 3) = -(-5) = 5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-9) = -10 + 9 = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 + 25) = -29$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot M_{22} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 15 = -18;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-15 + 12) = -1 \cdot (-3) = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot M_{31} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 15 = 11;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot M_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 - 10) = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1.$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -29 & -18 & 3 \\ 11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Транспонируем данную матрицу, т. е. меняем соответствующие строки и столбцы местами: $A^* = \begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4 Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Проверка $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ (по определению обратной матрицы).

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

Ответ: а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-7 & 6 & -1\\ 5 & -3 & -1\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

Задание 3 Найдите с помощью элементарных преобразований A^{-1}, к данной матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

Решение. а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Припишем к данной матрице справа единичную матрицу того же порядка $\Gamma=\left(A\middle|E\right)$, получим матрицу размера (3×6). С помощью элементарных преобразований над новой матрицей $\Gamma=\left(A\middle|E\right)$ приведем левую матрицу сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1=\left(A_1\middle|B\right)$, а затем к единичному виду т.е. $\Gamma_2=\left(E\middle|A^{-1}\right)$, тогда единичная матрица находящаяся справа с помощью элементарных преобразований преобразуется в обратную матрицу к матрице A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-2)\ \times(-2)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times\dfrac{1}{-3}\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times 6\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \times\dfrac{1}{9}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&2&\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&0\\0&0&1&\frac{2}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right)\times(-2)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&\frac{5}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{-2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right)\times(-2)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{-2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right).\ \text{Итак, } A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: а) $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}$.

Задание 4 Найдите ранг матрицы методом элементарных преобразований если:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&-3\\3&-1&1&6&11\\1&-1&-1&4&-3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&1&3&-7&1\\2&-1&1&6&-4\\-1&2&-1&-10&5\\2&-1&2&5&-4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&5\\1&2&3&4\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Решение. а) $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1&-3\\3&-1&1&6&11\\1&-1&-1&4&-3\end{pmatrix}$.

Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11\\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-3)\ \times(-1)\\ + \quad\quad + \\ \ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20\\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\ \\ \times\left(-\dfrac{3}{7}\right)\\ +\end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20\\ 0 & 0 & -\dfrac{12}{7} & \dfrac{12}{7} & -\dfrac{60}{7}\end{pmatrix},$$ Минор третьего порядка отличен от нуля; т.е.

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -7 & 4\\ 0 & 0 & \dfrac{-12}{7}\end{vmatrix}=1\cdot(-7)\cdot\left(\frac{-12}{7}\right)=12\neq 0.$$ Следовательно $r(A)=3$.

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -7 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4\\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5\\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4\end{pmatrix}$. Решить самостоятельно.

в) $$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \times(-2)\times(-1)\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-2)\times(1)\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -4 & -6\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(4)\times(-3)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \times(3)\times(-2)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Следовательно $r(A) = 4$.

Ответ: а) $r(A) = 3$; б) $r(A) = 3$; в) $r(A) = 4$.

Задание 5 Найдите ранг матрицы методом окаймляющих миноров и укажите один из базисных миноров:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Составим окаймляющие миноры и вычислим их.

$M_1 = |1| = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 1$

На данном этапе ранг равен 1, но надо перейти к минорам второго порядка. $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\Rightarrow r(A) = 2$. Рангом матрицы называют наивысший порядок минора отличного от нуля, поэтому ранг матрицы на данном этапе равен 2 и не может быть равен 1.$r(A) \neq 1$.

Теперь перейдем к минорам третьего порядка:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0;\; M_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0;\; M_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0;\; M_3^4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры 3-го порядка равны 0, то $r(A) \neq 3 \Rightarrow \; r(A) < 3, \;\; r(A) = 2$.

$M_2 - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ - базисный минор.

Ответ: а) $r(A) = 2$; б) $r(A) = 3$.

4.3 Задания для самостоятельного решения

Задание 1 Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 2 Найдите обратную матрицу для матрицы A (двумя способами) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

Задание 3 Найдите с помощью элементарных преобразований A^{-1} к данной матрице A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & \frac{-9}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 4 Найдите ранг матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r(A)=2$; б) $r(A)=3$.

5 Система линейных уравнений. Способы решения системы линейных уравнений

5.1 Вопросы для самоподготовки

1 Какая система линейных уравнений называется совместной?

2 Какие две системы называются равносильными?

3 Какая система линейных уравнений называется определенной?

4 Какая система линейных уравнений называется несовместной?

5 Какая система линейных уравнений называется неопределенной?

6 Что называется решением системы линейных уравнений?

7 Какая система линейных уравнений называется однородной?

8 Какая система линейных уравнений называется неоднородной?

9 Сколько решений имеет определенная система линейных уравнений?

10 Сколько решений имеет неопределенная система линейных уравнений?

5.2 Практическое занятие

Задание 1 Решить систему линейных уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы;

3) методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1+16x_2=17, \\ 2x_1-x_2=1. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2=1, \\ 3x_1+7x_2=2. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x_1 + 16x_2 = 17, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$AX = B$ – матричное уравнение системы.

1) Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 32 = -33; \ \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -17 - 16 = -33;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 34 = -33. \Rightarrow x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 1.$$

2) Решим систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем обратную матрицу для матрицы A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1 $\det A = -33$.

2 $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = -1$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot 2 = -2$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot 16 = -16$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -16 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Транспонируем матрицу $\tilde{A}$: $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -16 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4Запишем обратную матрицу: $A^{-1} = -\dfrac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 & -16 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Полученную матрицу подставим в равенство $X = A^{-1} \cdot B$.

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 & -16 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 \cdot 17 + (-16) \cdot 1 \\ -2 \cdot 17 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{33}\begin{pmatrix} -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}.$$

3) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 16 & 17 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \times(-2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 16 & 17 \\ 0 & -33 & -33 \end{array}\right) \times \frac{-1}{33} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 16 & 17 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

от расширенной матрицы перейдем к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 16x_2 = 17 \\ \quad x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Ответ: а) $(1;\quad 1)$; б) $(3;\quad -1)$.

Задание 2 Решить систему линейных уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow A \cdot X = B.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1) Решим систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30; \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 90;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -60; \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 150.$$

$$x_1 = \frac{90}{30} = 3; \quad x_2 = \frac{-60}{30} = -2; \quad x_3 = \frac{150}{30} = 5.$$

2) Решим систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы: $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу для матрицы A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1 $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 30;$

2 $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-4) = 13;$ $A_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 1) = -5;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 11;$ $A_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 - 8) = 5;$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5;$ $A_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 - (-1)) = -5;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7;$ $A_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 4) = 5;$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 11 \\ 5 & 5 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Транспонируем матрицу $\tilde{A}$: $A^* = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -7 \\ -5 & 5 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Обратная матрица имеет вид: $A^{-1}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -5 & 5 & 5\\ 11 & -5 & 1\end{pmatrix}$.

Полученную матрицу подставим в равенство $X=A^{-1}\cdot B$.

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}13 & 5 & -7\\ -5 & 5 & 5\\ 11 & -5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\ -5\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}13\cdot 11+5\cdot(-5)+(-7)\cdot 4\\ -5\cdot 11+5\cdot(-5)+5\cdot 4\\ 11\cdot 11+(-5)\cdot(-5)+1\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}143-25-28\\ -55-25+20\\ 121+25+4\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}90\\ -60\\ 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{90}{30}\\ -\frac{60}{30}\\ \frac{150}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=3;\\ x_2=-2;\\ x_3=5.\end{matrix}$$

3) Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 11\\ 2 & 3 & -1 & -5\\ -1 & 4 & 3 & 4\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-2)\ \times(1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 11\\ 0 & 1 & -5 & -27\\ 0 & 5 & 5 & 15\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \times(-5)\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 11\\ 0 & 1 & -5 & -27\\ 0 & 0 & 30 & 150\end{array}\right)$$

От расширенной матрицы перейдем к системе линейных уравнений:

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=11,\\ x_2-5x_3=-27,\\ 30x_3=150,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=11,\\ x_2-5x_3=-27,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2+2\cdot 5=11,\\ x_2-5\cdot 5=-27;\\ x_3=5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+10=11,\\ x_2-25=-27,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_2=-2,\\ x_3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}x_1-2=1,\\ x_2=-2,\\ x_3=5,\end{cases}\begin{cases}x_1=3,\\ x_2=-2,\\ x_3=5.\end{cases}$$

Ответ: а) $(3;-2;5)$; б) $(3;-2;2)$.

Задание 3 Исследовать систему линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x+5y+3z=-2,\\ 2x-3y+z=1,\\ 3x-y-z=4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y+z=6,\\ -x+y+z=0,\\ x-y+z=2.\end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x+5y+3z=-2, \\ 2x-3y+z=1, \\ 3x-y-z=4. \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ – основная матрица.

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица.

Будем исследовать данную систему по *теореме Кронекера-Капелли*: Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $r(A)=r(A')$.

Так как основная матрица входит в расширенную матрицу, то будем находить сразу ранг расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)\times(-2)\ \times(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & -5 & 5 \\ 0 & -16 & -10 & 10 \end{array}\right)\times\left(-\frac{16}{13}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{13} & \frac{50}{13} \end{array}\right).$$

Не обращая внимания на последний столбец данной матрицы, составим минор 3-го порядка из элементов основной матрицы:

$$M_3(A)=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{13} \end{vmatrix}=1\cdot(-13)\cdot\left(-\frac{50}{13}\right)=50\neq 0 \Rightarrow$$ ранг основной матрицы равен 3 т.е. $r(A)=3$.

Составим минор 3-го порядка для расширенной матрицы. В минор будет обязательно входить последний столбец:

$$M_3(A')=\begin{vmatrix}1 & 5 & -2\\ 0 & -13 & 5\\ 0 & 0 & \frac{50}{13}\end{vmatrix}=1\cdot(-13)\cdot\left(\frac{50}{13}\right)=-50\neq 0\Rightarrow$$ ранг расширенной матрицы равен 3, т.е. $r(A')=3$.

Так как $r(A)=r(A')$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна, т.е. имеет решения.

Так как $M_3(A)=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 0 & -13 & -5\\ 0 & 0 & -\frac{50}{13}\end{vmatrix}$ – базисный минор, в который входят все 3 столбца из основной матрицы $\Rightarrow$ x, y, z – основные переменные. Теперь составим систему, из которой будем находить неизвестные x, y, z.

В данной системе количество неизвестных и ранг совпадают, а, значит, параметров в данной системе нет.

$$\begin{cases} x+5y+3z=-2,\\ -13y-5z=5,\\ -\frac{50}{13}z=\frac{50}{13}, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+5y+3z=-2,\\ -13y-5z=5,\\ z=-1, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+5y+3\cdot(-1)=-2,\\ -13y-5\cdot(-1)=5,\\ z=-1, \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+5y-3=-2,\\ -13y+5=5,\\ z=-1, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+5y=1,\\ -13y=0,\\ z=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+5y=1,\\ y=0,\\ z=1, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+5y=1,\\ y=0,\\ z=-1, \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+5\cdot 0=1,\\ y=0,\\ z=-1, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=1,\\ y=0,\\ z=-1. \end{cases}$$

В данной системе линейных уравнений $r(A)=r(A')$ и ранг матрицы равен количество неизвестных и, поэтому система имеет единственное решение, т.е. данная система линейных уравнений определенная.

Ответ: а) $(1;0;-1)$; б) $(3;2;1)$.

Задание 4 Исследовать систему линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2x + 3z = 9, \\ -5y + 3x + z = -4, \\ -7y + 4x + z = 5. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ – основная матрица.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ -5 & 3 & 1 & -4 \\ -7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица.

Найдем ранг расширенной матрицы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ -5 & 3 & 1 & -4 \\ -7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \times(-5)\times(-7) \\ \quad + \\ \quad + \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -7 & -14 & -49 \\ 0 & -10 & -20 & -58 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \div(-7) \\ \div(-10) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5{,}8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ + \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}2 \end{array}\right).$$

Составим минор третьего порядка для расширенной матрицы (последний столбец записывается обязательно).

$$M_3(A') = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1{,}2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-1{,}2) = 1{,}2 \neq 0 \quad \Rightarrow$$ ранг расширенной матрицы

равен 3, т.е. $r(A') = 3$.

Составим минор 2-го порядка для основной матрицы (т.к. в основной матрице после приведения к ступенчатому виду последнюю строку можно вычеркнуть).

$$M_2(A)=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot 1=-1\neq 0 \Rightarrow$$ ранг основной матрицы равен 2, т.е. $r(A)=2$.

Так как $r(A)\neq r(A')$ $(2\neq 3)$ $\Rightarrow$ система не совместна, т.е. не имеет решения.

Ответ: а) система не совместна; б) система не совместна.

Задание 5 Найдите общее и частное решение системы линейных однородных уравнений: а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,\\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0.\end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,\\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0,\\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,\\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0.\end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,\\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0.\end{cases}$;

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 0 & -4\\ 2 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -4 & 1 & 10\end{pmatrix}$$ – основная матрица.

$$A'=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -4 & 0\\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -4 & 1 & 10 & 0\end{array}\right)$$ – расширенная матрица.

Решим систему линейных однородных уравнений, используя теорему Кронекера-Капелли. Так как система линейных уравнений является однородной, следовательно $r(A')=r(A)$, однородная система линейных уравнений всегда совместна.

Найдем ранг основной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} \times(-1)\times(-2)\times(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times(-1)\times(1) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times\left(-\frac{5}{4}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$r(A) = r(A') = 3$, т.к. количество строк равно 3.

Пусть $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ – базисный минор $\Rightarrow$ x_1, x_2, x_3 – основные неизвестные. Так как всего неизвестных– 4, количество основных неизвестных – 3, то 4 – 3 =1, т.е. будет 1 параметр, обозначаем его через $x_4 = a$. Теперь от ступенчатой матрицы перейдем к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3a = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - 7a = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3a, \\ 3x_2 = 7a, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{7}{3}a = -3a, \\ x_2 = \frac{7}{3}a, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}a, \\ x_2 = \frac{7}{3}a, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Мы получили общее решение системы линейных уравнений: $\left(-\frac{2}{3}a; \frac{7}{3}a; 0; a\right)$.

Найдем частное решение системы: пусть $a = 3$, следовательно $(-2; 4; 0; 3)$.

Проверка: $\begin{cases} -2 - 7 - 2\cdot 0 + 3\cdot 3 = 0, \\ -2 + 2\cdot 7 - 4\cdot 3 = 0, \\ 2\cdot(-2) + 7 + 2\cdot 0 - 3 = 0, \\ -2 - 4\cdot 7 + 0 + 10\cdot 3 = 0, \end{cases} \begin{cases} 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$

Ответ: а) $\left(-\dfrac{2}{3}x_4; \dfrac{7}{3}x_4; 0; x_4\right)$; б) $(8x_3 - 7x_4; -6x_3 + 5x_4; x_3; x_4)$.

Задание 6 Найдите общее и частное решение системы линейных неоднородных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$ – основная матрица.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица.

Исследуем систему линейных неоднородных уравнений, используя теорему Кронекера-Капелли. Найдем ранг расширенной и основной матриц.

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-2)\ \times(-3)\ \times(-4) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \\ 0 & 9 & 2 & -9 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Составим миноры 3-го порядка (т.к. количество ненулевых строк 3) для расширенной и основной матриц.

$$M_3(A') = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A') = 3.$$

$$M_3(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \;\Rightarrow r(A) = 3,$$

Так как $r(A) = r(A')$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$$M_3(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \text{ – базисный минор.}$$

Так как в базисный минор вошли первая, третья и четвертая столбцы, то x_1, x_3, x_4 – основные неизвестные. Всего неизвестных 4, основных неизвестных 3, тогда $(n - r = p)$ 4 – 3 = 1 один параметр, т.е. x_2 – параметр. Для того чтобы, параметры отличались от неизвестных, обозначим параметр x_2 через α, т.е. $x_2 = \alpha$. Теперь от ступенчатой матрицы перейдем к системе линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 9x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -5, \\ \qquad\qquad -4x_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2\alpha - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 9\alpha + 2x_3 - 5x_4 = -5, \\ \qquad\qquad x_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 + 2\alpha, \\ 2x_3 = -5 - 9\alpha, \\ \qquad x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 + 2\alpha, \\ 2x_3 = -5 - 9\alpha, \\ x_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 + 2\alpha, \\ x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha, \\ x_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 - \left(-\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha\right) = 2 + 2\alpha, \\ x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha, \\ x_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha, \\ x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид: $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha;\ \alpha;\ -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}\alpha;\ 0\right)$.

Найдем частное решение системы из общего решения, подставив вместо параметра α любое действительное число, пусть $\alpha = 1$: т.е. $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2};\ 1;\ -\frac{5}{2} - \frac{9}{2};\ 0\right)$, $(-3;\ 1;\ -7;\ 0)$.

Проверка: Подставим частное решение в систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3 - 2\cdot 1 - 1\cdot(-7) + 2\cdot 0 = 2, \\ 2\cdot(-3) + 5\cdot 1 + 0\cdot(-7) - 1\cdot 0 = -1, \\ 3\cdot(-3) + 3\cdot 1 - 1\cdot(-7) - 3\cdot 0 = -1, \\ 4\cdot(-3) + 1\cdot 1 - 2\cdot(-7) - 1\cdot 0 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} -3 - 2 + 7 + 0 = 2, \\ -6 + 5 + 0 + 0 = -1, \\ -9 + 3 + 7 + 0 = 1, \\ -12 + 1 + 14 - 0 = 3, \end{cases} \begin{cases} 2 = 2, \\ -1 = -1, \\ 1 = 1, \\ 3 = 3. \end{cases} \Rightarrow$$

равенство верное.

Ответ: а) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}x_2; x_2; -\frac{5}{2} - \frac{9}{2}x_2; 0\right), (-3;\ 1;\ -7;\ 0)$;

б) $\left(6 - 26x_3 + 17x_4; -1 + 7x_3 - 5x_4; x_3; x_4\right)$.

Задание 7 Найдите общее решение неоднородной системы линейных уравнений и фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ – основная матрица.

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$ – расширенная матрица.

Найдем ранг расширенной и основной матриц:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \times(-3) \times(-2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \times 1 \times (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

$M_3(A') = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ ранг расширенной матрицы равен 3, т.е. $r(A') = 3$.

$M_3(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ ранг основной матрицы равен 3, т.е. $r(A) = 3$.

Так как $r(A') = r(A) = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна, т.е. имеет решение.

$$M_3(A)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$ – базисный минор третьего порядка $\Rightarrow$ x_1, x_3, x_4 – основные неизвестные, т.к. всего количество неизвестных – 5, основных переменных – 3, следовательно 5 – 3 =2 (параметра), 2 параметра – это x_2 и x_5. Обозначим параметры $x_2=\beta$, $x_5=\gamma$.

Составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,\\ -x_3-2x_4-4x_5=-3,\\ -x_4=3,\end{cases}\begin{cases}2x_1+x_3+2x_4=2+\beta-3\gamma,\\ -x_3-2x_4=-3+4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}2x_1+x_3-6=2+\beta-3\gamma,\\ -x_3+6=-3+4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x_1+x_3=8+\beta-3\gamma,\\ -x_3=-9+4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}2x_1+9-4\gamma=8+\beta-3\gamma,\\ x_3=9-4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}2x_1=-1+\beta+\gamma,\\ x_3=9-4\gamma,\\ x_4=-3,\end{cases}\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma,\\ x_3=9-4\gamma,\\ x_4=-3.\end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma;\ \beta;\ 9-4\gamma;\ -3;\ \gamma\right)$.

Найдем фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений:

1) $\beta=0, \gamma=0$ $X^0=\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ 9;\ -3;\ 0\right)$;

2) $\beta=1, \gamma=0$ $X^1=\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\right)$;

3) $\beta=0, \gamma=1$ $X^2=\left(\frac{1}{2};\ 0;\ -4;\ 0;\ 1\right)$.

$X=X^0+c_1X^1+c_2X^2$,

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\9\\-3\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-4\\0\\-1\end{pmatrix}$$, где c_1 и c_2 – действительные числа.

Ответ: а) $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\9\\-3\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-4\\0\\-1\end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 – действительные числа;

б) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{-27}{13}\\\frac{3}{13}\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{9}{13}\\\frac{-1}{13}\end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 – действительные числа.

Задание 8 Исследовать систему линейных уравнений при различных значениях параметра λ: а) $\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\lambda x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=1,\\ \lambda x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1.\end{cases}$; б) $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2.\end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\lambda x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=1,\\ \lambda x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1.\end{cases}$.

Будем исследовать данную систему линейных уравнений. Запишем расширенную матрицу и приведем к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&1\\1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\times(-1)\times(-\lambda)\\ +\\ +\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&-\lambda+1&1-\lambda^2&1-\lambda\end{array}\right)\times 1\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 & 1-\lambda \end{array}\right).$$

Решим квадратное уравнение: $-\lambda^2-\lambda+2=0\times(-1)$, $\lambda^2+\lambda-2=0$,

$$D=1-4\cdot(-2)=9;\ \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\ \left|\begin{array}{l}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=-2\end{array}\right..$$

Исследуем систему при различных значениях λ. Найденные значения подставим в последнюю матрицу и запишем систему уравнений:

1) $\lambda=1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)\Rightarrow\left(1\quad 1\quad 1\ |\ 1\ |\right)\Rightarrow$ ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен 1. Следовательно, будет одна основная неизвестная x_1 и 2 параметра: $x_1=1-x_2-x_3$.

Таким образом, система линейных уравнений при $\lambda=1$ имеет бесчисленное множество решений: $(1-x_2-x_3;\, x_2;\, x_3)$.

2) $\lambda=-2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\Rightarrow$ ранг основной матрицы равен 2, ранг расширенной матрицы равен 3, следовательно, система не имеет решений.

3) $\lambda\neq 1$ и $\lambda\neq -2$.

Система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=1, \\ (\lambda-1)x_2+(1-\lambda)x_3=0, \\ -(\lambda+2)(\lambda-1)x_3=-(\lambda-1), \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\lambda+2}, \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda+2}, \\ x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}. \end{cases}$$

Ответ: а) Система имеет единственное решение: $x_1 = \frac{1}{\lambda+2}$, $x_2 = \frac{1}{\lambda+2}$, $x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$ при $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -2$;

Система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений: $x_1 = 1 - c_1 - c_2$; $x_2 = c_1$; $x_3 = c_2$, $c_1, c_2 \in R$, при $\lambda = 1$;

Система не имеет решения при $\lambda = -2$;

б) При $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ система имеет единственное решение.

$$x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)};\ x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)};\ x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}.$$

При $\lambda = 0$ и $\lambda = -3$ система несовместна.

5.3 Задания для самостоятельного решения

Задание 1 Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$

Ответ: а) $(3-11i, -3-9i, 1-7i)$; б) $(1, 2, 3, 4)$.

Задание 2 Решить системы линейных уравнений тремя способами:

1) по формулам Крамера;

2) с помощью обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$

Ответ: а) $(1;2;-1)$; б) $(2;-3;-2)$.

Задание 3 Найдите общее и частное решение системы линейных уравнений.

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Задание 4 Найдите общее решение неоднородной системы линейных уравнений и фундаментальное решение однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

Задание 5 Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{cases}$$

Ответ:

При $\lambda(\lambda+3) \neq 0$ система имеет единственное Решение. $x_1 = 2 - \lambda^2$; $x_2 = 2\lambda - 1$; $x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$.

При $\lambda = 0$ общее решение имеет вид: $x_1 = -x_2 - x_3$,где $x_2, x_3 \in R$.

При $\lambda = -3$ общее решение имеет вид: $x_1 = x_2 = x_3$,где $x_3 \in R$.

Задание 6

Исследовать систему линейных уравнений $\begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + abx_2 + x_3 = b; \\ x_1 + b\,x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$ при различных значениях параметров a, b.

Список использованных источников

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

2 Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова; Вып. 4). – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, – 2002. – 320 с.

3 Курош, А. Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учеб. для вузов / А.Г. Курош. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.

4 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами: 1 курс: учеб. пособие для вузов / К.Н. Лунгу [и др.]. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 576 с. – ISBN 978-5-8112-2326-8.

5 Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред. В.Д. Кулиева. – 2005. – 216 с. – ISBN 5-9221-0581-7.

6 Молчанов, В.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В.А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 194 с.

7 Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 13 изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 288 с. – ISBN 5-8114-0427-1.

8 Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов / В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 304 с.: ил. – ISBN 978-5-06-006145-1.

9 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч.1. – 416 с: ил. – Библиогр.: с. 455-462. – ISBN 978-5-06-003959-7.