

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Методические указания

Часть 2

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2019

УДК 512.64(076.5) + 514.12(076.5)
ББК 22.143я7 + 22.151.5я7
У76

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент
С.А. Герасименко

Усова, Л.Б.
У76 Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: методические указания. Часть 2 / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 89 с.

Методические указания «Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»» часть 2 содержат разделы, состоящие из вопросов для самоподготовки, заданий для практического занятия и заданий для самостоятельного решения. Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал, разобрать задания практического занятия и успешно выполнить задания для самостоятельного решения. Разобранные примеры окажут существенную помощь студентам при решении заданий на практических занятиях и дома, а также помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная разработка предназначена для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК512.64(076.5)+514.12(076.5)
ББК22.143я7+22.151.5я7

© Усова Л.Б.,
Шакирова Д.У., 2019
© ОГУ, 2019

Содержание

Введение	4
1 Уравнение прямой на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости	5
1.1 Вопросы для самоподготовки.....	5
1.2 Практическое занятие.....	6
1.3 Задание для самостоятельного решения	18
2 Плоскость в пространстве. Уравнение плоскостей в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.....	21
2.1 Вопросы для самоподготовки.....	21
2.2 Практическое занятие.....	22
2.3 Задание для самостоятельного решения.....	31
3 Прямая в пространстве. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.....	34
3.1 Вопросы для самоподготовки.....	34
3.2 Практическое занятие.....	35
3.3 Задание для самостоятельного решения.....	41
4 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.....	43
4.1 Вопросы для самоподготовки.....	43
4.2 Практическое занятие.....	44
4.3 Задание для самостоятельного решения.....	47
5 Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола	49
5.1 Вопросы для самоподготовки.....	49
5.2 Практическое занятие.....	51
5.3 Задание для самостоятельного решения.....	71
6 Поверхности второго порядка.....	74
6.1 Вопросы для самоподготовки.....	74
6.2 Практическое занятие.....	75
6.3 Задание для самостоятельного решения.....	87
Список использованных источников	89

Введение

Методические указания «Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»» часть 2 содержат темы практических занятий: 1 Уравнение прямой на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости; 2 Плоскость в пространстве. Уравнение плоскостей в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве; 3 Прямая в пространстве. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве; 4 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве; 5 Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола; 6 Поверхности второго порядка.

Цель создания такой разработки – развитие у студентов практических навыков решения задач в аудиторное и внеаудиторное время.

Методические указания состоят из блоков:

блок 1 «Вопросы для самоподготовки» – содержит вопросы для проверки усвоения теоретического материала;

блок 2 «Практическое занятие» – содержит разноуровневые задания, состоящие из двух пунктов. Пункт (а) сопровождается подробным решением задач, а пункт (б) студент должен выполнить самостоятельно или с помощью преподавателя;

блок 3 «Задания для самостоятельного решения» – содержит задания с ответами для самостоятельного решения и закрепления пройденного материала.

Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал с помощью вопросов для самоподготовки, разобраться в решенных заданиях, предложенных на практических занятиях, а также успешно решить задания для самостоятельного решения. Разобранные задания окажут существенную помощь студентам на практических занятиях и дома, помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету.

1 Уравнение прямой на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости

1.1 Вопросы для самоподготовки

- 1 Запишите уравнение прямой l , проходящей через две различные точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$.
- 2 Запишите общее уравнение прямой (изобразите прямую на плоскости). Чем задается прямая записанная общим уравнением.
- 3 Укажите взаимное расположение двух прямых на плоскости, если прямые заданы через угловые коэффициенты.
- 4 Запишите уравнение прямой l , проходящей через $M_0(x_0; y_0)$ с угловым коэффициентом k .
- 5 Укажите взаимное расположение двух прямых на плоскости, если прямые заданы общими уравнениями.
- 6 Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
- 7 Выведите формулу расстояния d от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$.
- 8 Запишите уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с направляющим вектором $\vec{s} = (m; n)$.
- 9 Выведите нормальное уравнение прямой l . Укажите связь общего уравнения прямой с нормальным уравнением.
- 10 Запишите параметрическое уравнение прямой на плоскости.
- 11 Выведите уравнение прямой l , проходящей через $M_0(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A; B)$.
- 12 Запишите уравнение прямой l с угловым коэффициентом k и расстоянием b от оси ox .
- 13 Запишите уравнение прямой в отрезках (изобразите прямую на плоскости).

14 Дано уравнение $5x - 4y + 9 = 0$. Что можно указать для него?

15 Дан треугольник ABC с координатами в точках: A (2; -4), B (-2; -1), C (2;0). Найдите уравнение сторон треугольника ABC.

16 Дан треугольник ABC с координатами в точках A(2; -4), B (-2; -1), C (2;0). Найдите уравнение медианы BM, опущенной из вершины B на сторону AC, и уравнение высоты BK.

17 Составьте уравнение прямой l , проходящей через точку M (1; 3) и имеющей направляющий вектор $\vec{s} = (-2; 5)$.

18 Составьте уравнение прямой l , проходящей через точку P (3; -2) и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (5; 4)$.

19 Найдите расстояние от точки A (2; 1) до прямой $l: -x + y + 4 = 0$.

20 Даны точки A(2;-1) и B(-3;4). Найдите координаты точки C, которая является серединой отрезка AB.

1.2 Практическое занятие

Задание 1 Составить уравнение прямой l , записать в общем виде и построить:

а) $b = 6, \alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $b = -2, \alpha = 135^\circ$; в) $a = 10, \alpha = \frac{\pi}{2}$;

г) $b = -4, \alpha = 0^\circ$; д) $b = 3, k = \frac{2}{3}$; е) т. M(2, 4), $k = -\frac{1}{3}$;

ж) проходящей через 2 различные точки P(3;-1) и Q(7;11);

з) проходящей через точку A(5;-4) перпендикулярно прямой BC, где B(-1;2), C(-3;-2);

и) проходящей через точку A(1;-2) параллельно прямой BC, где B(-1;2), C(-3;-2);

к) проходящей через точку M(2;3) и имеющий направляющий вектор $\vec{s} = (1; -4)$;

л) проходящей через точку M(-1;5) с нормальным вектором $\vec{n} = (-3; 2)$.

Решение.

а) По условию $b=6$ (b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy) и $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox).

Вспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

$$k = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = 1 \cdot x + 6,$$

$$y = x + 6 \Rightarrow x - y + 6 = 0.$$

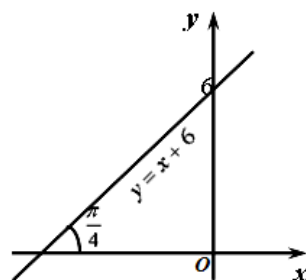


Рисунок 1

б) По условию $b=-2$ (b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy) и $\alpha = 135^\circ$ (α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox). Вспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

$$k = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1,$$

$$y = -1 \cdot x - 2 \Rightarrow y = -x - 2 \Rightarrow x + y + 2 = 0.$$

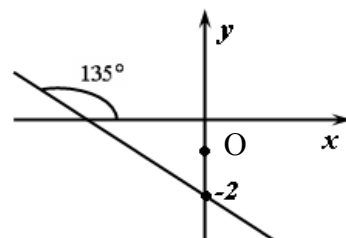


Рисунок 2

в) Так как $a=10$ (a - расстояние, которое отсекает прямая на оси Ox) и $\alpha = 90^\circ$, т.е. прямая перпендикулярно оси $Ox \Rightarrow x = 10$.

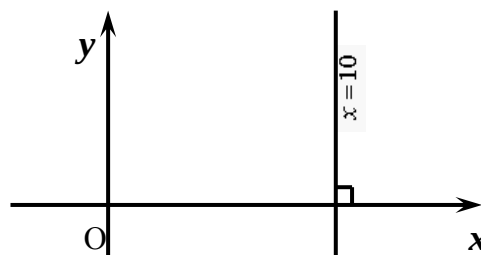
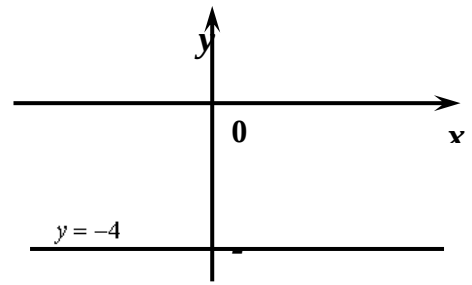


Рисунок 3

Ответ: $x - 10 = 0$.

г) По условию $b=-4$, $\alpha = 0^\circ$. Вспользуемся формулой уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

$$k = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow k = \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x - 4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow y + 4 = 0.$$



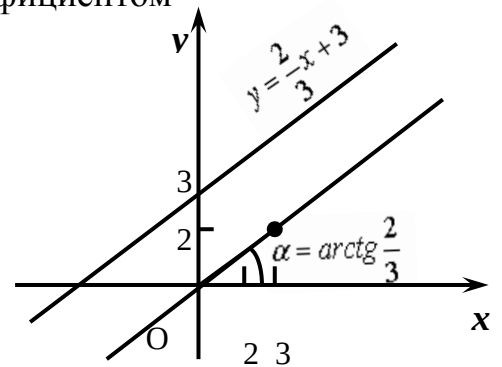
Ответ: $y + 4 = 0$.

Рисунок 4

д) По условию $b = 3$, $k = \frac{2}{3}$ (k - угловой коэффициент прямой).

Вспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 3 \mid \cdot 3 \Rightarrow 3y = 2x + 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 3y + 9 = 0$$



Ответ: $2x - 3y + 9 = 0$.

Рисунок 5

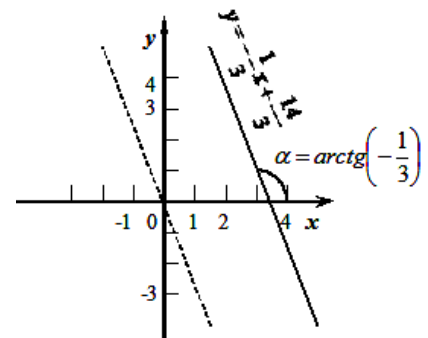
е) Так как дана точка $M(2;4)$ лежащая на прямой и угловой коэффициент

$k = -\frac{1}{3}$, воспользуемся уравнением

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

$$y = 4 - \frac{1}{3}(x - 2), y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \mid \cdot 3,$$

$$x + 3y - 14 = 0.$$



Ответ: $x + 3y - 14 = 0$.

Рисунок 6

ж) Вспользуемся уравнением прямой, проходящей через две различные точки

$M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Тогда уравнение прямой, проходящей

через точки $P(3; -1)$ и $Q(7; 11)$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{7-3} &= \frac{y-(-1)}{11-(-1)} \Rightarrow \frac{x-3}{7-3} = \frac{y+1}{11+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x-3}{4} &= \frac{y+1}{12} \cdot 4 \Rightarrow \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} \\ \Rightarrow 3x-9 &= y+1 \Rightarrow y=3x-10 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x-y-10 &= 0\end{aligned}$$

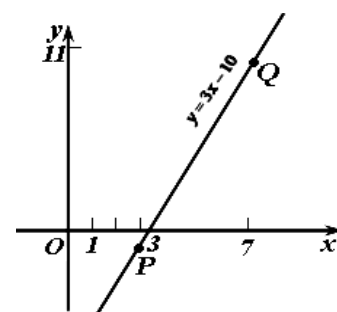


Рисунок 7

Ответ: $3x - y - 10 = 0$.

3) Составим уравнение прямой l_{BC} , для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Затем подставив координаты

заданных точек получим

$$\frac{x+1}{-3+1} = \frac{y-2}{-2-2} \Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{-4} \cdot (-2) \Rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2x+2 = y-2 \Rightarrow y = 2x+4$$

Уравнение l_{BC} : $y = 2x + 4$. Угловой коэффициент прямой l_{BC} : $k_{BC} = 2$. Так как прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты противоположны по знаку и обратные по значению, т.е. $k = -\frac{1}{2}$.

Воспользуемся

формулой

$$y = y_0 + k(x - x_0) \Rightarrow y = -4 - \frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow x + 2y + 3 = 0.$$

Ответ: $x + 2y + 3 = 0$.

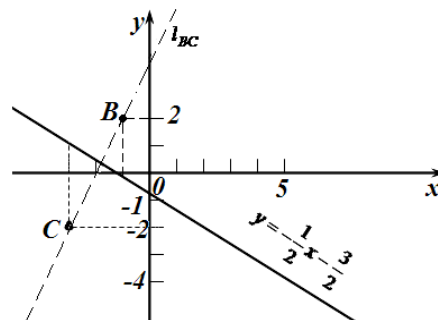


Рисунок 8

и) Уравнение прямой l_{BC} составили в предыдущем примере

l_{BC} : $y = 2x + 4$. Так как по условию две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т.е. $k_{BC} = 2 \Rightarrow$ угловой коэффициент для нашей прямой будет тоже равен 2. $y = y_0 + k(x - x_0)$, $y = -2 + 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 4 \Rightarrow 2x - y - 4 = 0$.

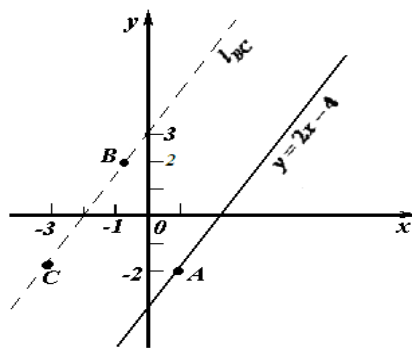


Рисунок 9

Ответ: $2x - y - 4 = 0$.

к) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{s} = (m; n) \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

Так как точка $M(2, 3)$ и направляющий вектор $\vec{s} = (1; -4)$ тогда уравнение прямой примет следующий вид:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x+8 = y-3 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = -4x+11 \Rightarrow 4x+y-11=0$$

Ответ: $4x + y - 11 = 0$.

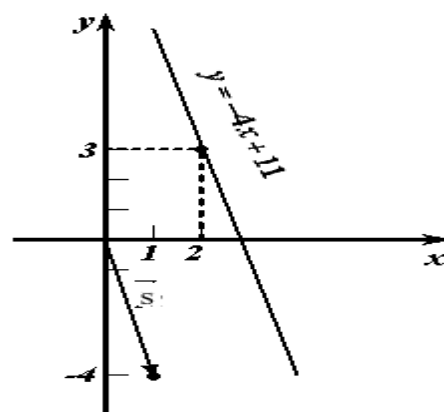
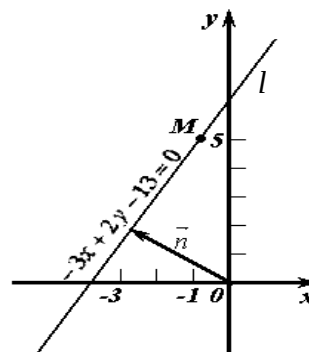


Рисунок 10

л) Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A; B)$, задается уравнением: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Уравнение прямой, проходящей через т. $M(-1; 5)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (-3; 2)$, будет следующим:

$$-3(x+1) + 2(y-5) = 0, \\ -3x - 3 + 2y - 10 = 0 \Rightarrow -3x + 2y - 13 = 0.$$



Ответ: $3x - 2y + 13 = 0$.

Рисунок 11

Задание 2 Определить взаимное расположение прямых:

- а) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; б) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;

в) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$, г) $3x + 2y - 1 = 0$, $6x + 4y - 2 = 0$.

Решение.

а) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$.

1 способ. Найдем угол между двумя прямыми, если прямые заданы через угловые коэффициенты. От общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ перейдем к уравнению прямой через угловой коэффициент $y = kx + b$.

По условию $5x - y + 7 = 0$, тогда $y = 5x + 7 \Rightarrow k_1 = 5$, $y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$ и

воспользуемся формулой $tg\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow$

$$tg\alpha = \left| \frac{-\frac{3}{2} - 5}{1 + 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{-\frac{13}{2}}{1 - \frac{15}{2}} \right| \Rightarrow tg\alpha = \left| \frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{13}{2}} \right| \Rightarrow tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

2 способ. Найдем угол между двумя прямыми, если прямые заданы в общем виде: $Ax + By + C = 0$.

$5x - y + 7 = 0 \Rightarrow \overline{n_1} = (5; -1)$, $3x + 2y = 0 \Rightarrow \overline{n_2} = (3; 2)$. Воспользуемся

формулой $\cos\varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

б) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$.

1 способ. Аналогично, от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ перейдем к уравнению прямой через угловой коэффициент $y = kx + b$. По условию

$3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2}$. Из уравнения $2x + 3y - 3 = 0$ получим

$y_2 = -\frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow k_2 = -\frac{2}{3}$. Угловые коэффициенты противоположны по знаку и

обратны по значению или $k_1 \cdot k_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$. Следовательно, прямые перпендикулярны, т.е. угол между ними 90° .

2 способ. Прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0 \Rightarrow$

$3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (3; -2)$; $2x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2; 3)$. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ нормальные вектора $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ перпендикулярны $\Rightarrow$ прямые пересекаются под углом 90° .

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

в) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$.

1 способ. Прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0 \Rightarrow$

$x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$. Перейдем от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ к уравнению прямой через угловой коэффициент и найдем угловые коэффициенты прямых $y = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$, $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$. Угловые коэффициенты равны, т.е. $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, следовательно, прямые параллельны.

2 способ. Так как прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0$, то запишем координаты нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$: $x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; -2)$; $2x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2; -4)$. Так как координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ пропорциональны, то вектора коллинеарны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$.

Нормальные вектора коллинеарны, следовательно, прямые параллельны.

Ответ: прямые параллельны.

г) $3x + 2y - 1 = 0$, $6x + 4y - 2 = 0$.

1 способ. Перейдем от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$

к уравнению прямой через угловой коэффициент и найдем угловые коэффициенты прямых

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow k_1 = -\frac{3}{2}, b_1 = \frac{1}{2}; y = -\frac{6}{4}x + \frac{2}{4} \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}, b_2 = \frac{1}{2}.$$

Так как $k_1 = k_2 = -\frac{3}{2}$ и $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, следовательно, прямые совпадают.

2 способ. Так как прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0$, то запишем координаты нормальных векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2: 3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{n}_1 = (3; 2)$

$6x + 4y - 2 = 0 \Rightarrow \bar{n}_2 = (6; 4)$. У нас координаты векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ и отношение свободных членов тоже равно } \frac{1}{2}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}. \text{ Таким образом, справедлива формула } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}:$$

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{прямые совпадают.}$$

Ответ: прямые совпадают.

Задание 3 При каких значениях A и C две прямые $Ax - 2y - 1 = 0$, $6x - 4y - C = 0$: а) параллельны; б) совпадают; в) имеют общую точку.

Решение. Прямые на плоскости могут быть либо параллельными, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

; либо совпадать $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; либо пересекаться $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

$$\text{а) } l_1: Ax - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \bar{n}_1 = (A; -2),$$

$$l_2: 6x - 4y - C = 0 \Rightarrow \bar{n}_2 = (6; -4).$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2; \frac{A}{6} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 3.$$

б) прямые совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$,

$$\frac{A}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-C} \stackrel{(A=3)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 2.$$

в) При $A \neq 3$ и $b \in R$ прямые имеют общую точку.

Ответ: а) при $A=3$ и $b \neq 2$ прямые параллельны; б) при $A=3$ и $b=2$ прямые совпадают; в) при $A \neq 3$ и $b \in R$ прямые имеют общую точку.

Задание 4 Привести общее уравнение прямой к нормальному виду:

а) $4x - 3y - 10 = 0$; б) $12x - 5y + 13 = 0$; в) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$.

Решение. а) Прямая задана в общем виде $Ax + By + C = 0$, $4x - 3y - 10 = 0 \Rightarrow \bar{n} = (4; -3)$. Приведем к нормальному виду: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

. Найдем нормирующий множитель μ : $\mu = \frac{\pm 1}{|\bar{n}|} \Rightarrow \mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{\pm 1}{5}$. Так как

$C = -10 < 0$, то $\mu = \frac{1}{5}$. Умножим общее уравнение на нормирующий множитель

$$4x - 3y - 10 = 0 \mid \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0.$$

б) $12x - 5y + 13 = 0 \Rightarrow \bar{n} = (12; -5)$, $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{\pm 1}{13}$. Так как $C = 13 > 0$,

то $\mu = -\frac{1}{13}$: $12x - 5y + 13 = 0 \mid \left(-\frac{1}{13}\right) \Rightarrow -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0$.

в) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0 \Rightarrow \bar{n} = \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, $\mu = \frac{\pm 1}{|\bar{n}|} = \pm 1$. Так как $C = 10 > 0$, то $\mu = -1$:

$$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0 \mid (-1), -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 10 = 0.$$

Ответ: а) $4x - 3y - 10 = 0$; б) $12x - 5y + 13 = 0$; в) $4x - 3y + 50 = 0$.

Задание 5 Вычислить расстояние d между прямыми:

а) $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$; б) $4x - 3y + 15 = 0$, $8x - 6y + 30 = 0$.

Решение. а) Исследуем взаимное расположение прямых относительно друг друга $l_1: 3x - 4y - 10 = 0$, $l_2: 6x - 8y + 5 = 0$, $\bar{n}_1 = (3; -4)$, $\bar{n}_2 = (6; -8)$. Так как

$$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{прямые параллельны. Найдем расстояние между параллельными}$$

прямыми. На прямой l_1 найдем какую-либо точку: пусть, например, $x = -2$, тогда $-2 \cdot 3 - 4y - 10 = 0 \Rightarrow -6 - 4y - 10 = 0 \Rightarrow -4y = 16 \Rightarrow y = -4$. Точка $(-2; -4)$

принадлежит прямой l_1 . По формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, найдем расстояние от точки

$(x_0; y_0)$, т.е. $(-2; -4)$ до прямой $l_2: Ax + By + C = 0$, т.е. $l_2: 6x - 8y + 5 = 0$.

$$d = \frac{|6 \cdot (-2) - 8 \cdot (-4) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|25|}{10} = \frac{25}{10} = 2,5.$$

б) Исследуем расположение данных прямых l_1 и l_2 .

$$l_1: 4x - 3y + 15 = 0, \quad l_2: 8x - 6y + 30 = 0,$$

$$\text{Используя формулу } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ получим } \frac{4}{8} = \frac{-3}{-6} = \frac{15}{30} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямые совпадают и расстояние между ними равно нулю.

Ответ: а) $d = 2,5$; б) $d = 0$.

Задание 6 При каких значениях A следующие пары прямых l_1 и l_2 :

а) параллельны; б) перпендикулярны: $l_1: 2x - 3y + 4 = 0$ и $l_2: Ax - 6y + 7 = 0$;

Решение.

1 способ. а) $l_1: 2x - 3y + 4 = 0$ и $l_2: Ax - 6y + 7 = 0$.

Две прямые l_1 и l_2 параллельны ($l_1 \parallel l_2$), если нормальные вектора $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ коллинеарны. $\overline{n_1} = (2; -3)$, $\overline{n_2} = (A; -6)$. $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Rightarrow \frac{2}{A} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \frac{2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 4$.

б) Если две прямые l_1 и l_2 перпендикулярны ($l_1 \perp l_2$), то нормальные вектора $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ ортогональны $\Rightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$: $\overline{n_1} = (2; -3)$, $\overline{n_2} = (A; -6)$
 $\Rightarrow 2A + (-3) \cdot (-6) = 0 \Rightarrow 2A + 18 = 0 \Rightarrow 2A = -18, A = -9$.

2 способ. Запишем уравнения прямых через угловые коэффициенты.

$$\text{а) } l_1: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, k_1 = \frac{2}{3} \text{ и } l_2: y = \frac{A}{6}x + \frac{7}{6}, k_2 = \frac{A}{6}.$$

Прямые $l_1 \parallel l_2$, если угловые коэффициенты прямых равны. Приравняем угловые коэффициенты прямых $k_1 = k_2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{A}{6} \Rightarrow 3A = 12 \Rightarrow A = 4$.

б) Используем признак перпендикулярности двух прямых, если прямые заданы в общем виде. Прямые l_1, l_2 перпендикулярны, если угловые коэффициенты прямых противоположны по знаку и обратны по значению $k_1 = \frac{2}{3}$,

$$k_2 = \frac{A}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{1}{\frac{A}{6}} \Rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{6}{A} \Rightarrow A = -9.$$

Ответ: а) 4; б) -9.

Задание 7 Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$ и параллельной прямой $2x + y + 6 = 0$.

Решение. Найдем точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$ и $x + 2y - 9 = 0$, решая систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(9 - 2y) - 2y + 5 = 0 \\ x = 9 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 - 6y - 2y + 5 = 0 \\ x = 9 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Точка пересечения двух прямых $(1; 4)$. Так как прямые параллельны, то нормальные вектора коллинеарны вектору $\vec{n} = (2; 1)$.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A; B)$. Получим:

$$2(x - 1) + 1(y - 4) = 0 \Rightarrow 2x + y - 6 = 0.$$

Ответ: $2x + y - 6 = 0$.

Задание 8 Определить координаты точки M_2 , симметричной точке $M_1(-3; 4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

Решение. Найдем уравнение прямой l_1 , проходящей через точку $M_1(-3; 4)$ и перпендикулярной данной прямой $4x - y - 1 = 0$ по формуле $y = y_0 + k(x - x_0)$:

$$k = -\frac{1}{4}, y = 4 - \frac{1}{4}(x + 3) \Rightarrow l_1: x + 4y - 13 = 0.$$

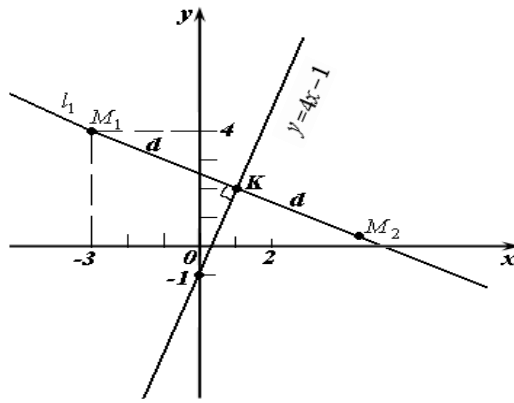


Рисунок 12

Так как точка $M_2(x_2; y_2)$ лежит на l_1 , то ее координаты удовлетворяют уравнению l_1 , т.е. $x_2 + 4y_2 - 13 = 0$.

Найдем расстояние от точки M_1 до прямой $4x - y - 1 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot (-3) - 4 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|-12 - 4 - 1|}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{|-17|}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Найдем точку $K(x; y)$ пересечения двух прямых:

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -\frac{x}{4} + \frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow 4x - 1 = -\frac{x}{4} + \frac{13}{4} \cdot 4 \Rightarrow 16x - 4 = -x + 13 \Rightarrow x = 1, y = 3.$$

Следовательно, точка $K(1; 3)$.

Найдем расстояние KM_2 , которое равно $\sqrt{17}$ (так как точка $K(1; 3)$ середина отрезка M_1M_2):

$$|KM_2| = \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 3)^2} = \sqrt{17}.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + 4y_2 - 13 = 0 \\ (x_2 - 1)^2 + (y_2 - 3)^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 13 - 4y_2 \\ (13 - 4y_2 - 1)^2 + (y_2 - 3)^2 = 17 \end{cases}$$

$$(12 - 4y_2)^2 + (y_2 - 3)^2 = 17, y_2^2 - 6y_2 + 8 = 0,$$

$$D = 36 - 4 \cdot 8 = 4 \Rightarrow y = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} (y_2)_1 = 4 \\ (y_2)_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_2)_1 = 13 - 4 \cdot 4 \\ (x_2)_2 = 13 - 4 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x_2)_1 = -3 \\ (x_2)_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(-3, 4) \\ M_2(5, 2) \end{cases}. \text{ Ответ: } M_2(5; 2).$$

Задание 9 Определить при каком значении A три прямые $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $Ax + y - 13 = 0$ будут пересекаться в одной точке.

Решение. Для того, чтобы найти при каком значении A три прямые будут пересекаться в одной точке, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \\ Ax + y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + y = -3 \\ Ax + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ 2x - y = -3 \\ Ax + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ 2(-3 - y) - y = -3 \\ A(-3 - y) + y = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ -6 - 2y - y = -3 \\ -3A - Ay + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 - y \\ -3y = 3 \\ -3A - Ay + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ -3A + A - 1 = 13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ -2A = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ A = -7 \end{cases}$$

Ответ: $A = -7$.

1.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Даны координаты вершин $\Delta M_1 M_2 M_3$: $M_1(3; -2)$, $M_2(-1; -1)$, $M_3(2; 4)$

а) уравнения сторон $M_1 M_2$, $M_1 M_3$, $M_2 M_3$;

б) составить уравнения прямых l_1, l_2, l_3 , проходящих через вершины M_1, M_2, M_3 треугольника $\Delta M_1 M_2 M_3$ параллельно противоположным сторонам $M_2 M_3, M_1 M_3, M_1 M_2$ (соответственно);

в) составить уравнения высот треугольника h_1, h_2, h_3 , опущенных из вершин M_1, M_2, M_3 (соответственно);

г) составить уравнения медиан треугольника m_1, m_2, m_3 , проведенных из вершин M_1, M_2, M_3 (соответственно);

Ответ:

а) $M_1M_2: x + 4y + 5 = 0$; $M_1M_3: 6x + y - 16 = 0$; $M_2M_3: 5x - 3y + 2 = 0$;

б) $l_1: 5x - 3y - 21 = 0$; $l_2: 6x + y + 7 = 0$; $l_3: x + 4y - 18 = 0$;

в) $h_1: 3x + 5y + 1 = 0$; $h_2: x - 6y - 5 = 0$; $h_3: 4x - y - 4 = 0$;

г) $m_1: 7x + 5y - 11 = 0$; $m_2: 4x - 7y - 3 = 0$; $m_3: 11x - 2y - 14 = 0$.

Задание 2 Определить угол между двумя прямыми

$l_1: 3x - 2y + 7 = 0$ и $l_2: 2x + 5y + 1 = 0$

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{19}{4}$ или $\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}}$.

Задание 3 Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

Ответ: $S = 6$.

Задание 4 Определить, при каком значении a прямая $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$:

а) параллельна оси Ox ;

б) параллельна оси Oy ;

в) проходит через точку $(0; 0)$.

Ответ: а) $a = -2$; б) $a = \pm 3$; в) $a = 1$ или $a = \frac{5}{3}$.

Задание 5 Какие из следующих пар прямых перпендикулярны, параллельны:

а) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; б) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;

в) $6x - 15y + 7 = 0$, $2x - 5y - 4 = 0$; г) $x - 2y + 1 = 0$, $2x - 4y + 2 = 0$.

Ответ: а) перпендикулярны; б) не перпендикулярны, не параллельны;
в) параллельны; г) совпадают.

Задание 6 Привести общее уравнение прямой к нормальному виду:

а) $2x - y - \sqrt{5} = 0$; б) $x + 2 = 0$.

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{y}{\sqrt{5}} - 1 = 0$; б) $-x - 2 = 0$.

Задание 7 Найти расстояние d между прямыми l_1 и l_2 , если

а) $l_1: 5x - 12y + 26 = 0$, $l_2: 5x - 12y - 13 = 0$;

б) $l_1: 3x + 4y - 20 = 0$, $l_2: 6x + 8y + 5 = 0$.

Ответ: а) $d = 3$, б) $d = 4,5$.

Задание 8 При каких значениях A следующие пары прямых:

а) параллельны; б) перпендикулярны:

1) $Ax - 4y + 1 = 0$ и $-2x + y + 2 = 0$;

2) $4x + y - 6 = 0$ и $3x + Ay - 2 = 0$;

3) $x - Ay + 5 = 0$ и $2x + 3y + 3 = 0$.

Ответ: 1) а) 8, б) -2 ; 2) а) $\frac{3}{4}$, б) -12 ; 3) а) $-\frac{3}{2}$, б) $\frac{2}{3}$.

Задание 9 Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Найти площадь этого квадрата.

Ответ: $S = 5$ кв.ед.

Задание 10 Даны прямые: а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $4x - 3y + 24 = 0$.

Составить для них уравнения «в отрезках», построить эти прямые. Найти площадь треугольника, отсекаемого этими прямыми от координатного угла.

Ответ: а) $S = 3$; б) $S = 24$.

Задание 11 Какой угол образует прямая $\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{3} = 1$ с положительным направлением оси Oy , оси Ox ?

Ответ: 150° , 60° .

Задание 12 На прямой $x - 3y + 8 = 0$ найти координаты точки, равноудаленной от двух точек $(5; 4)$ и $(-3; 2)$.

Ответ: $(1; 3)$.

2 Плоскость в пространстве. Уравнение плоскостей в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

2.1 Вопросы для самоподготовки

1 Выведите уравнение плоскости π , заданное точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и нормальным вектором $\vec{N} = (A; B; C)$.

2 Укажите варианты взаимного расположения двух плоскостей в пространстве.

3 Выведите формулу расстояния от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости π : $Ax + By + Cz + D = 0$.

4 Запишите нормальное уравнение плоскости π . Укажите связь общего уравнения плоскости с нормальным уравнением.

5 Запишите условие перпендикулярности и параллельности плоскостей в пространстве.

6 Выведите уравнение плоскости π , проходящей через три различные точки: $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

7 Как расположена данная плоскость $5x - 2y + 3z = 0$ в пространстве?

8 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 0; 2)$ с нормальным вектором $\vec{N} = (3; 4; 2)$.

9 Составьте уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_1(3; 0; 1)$, $M_2(-1; 1; 0)$ и $M_3(2; 3; -2)$.

10 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 0)$ и $M_2(2; 1; 1)$ и параллельный вектору $\vec{s} = (2; 3; 0)$.

11 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 0; 1)$ и два вектора, параллельных плоскости: $\vec{s} = (1; -1; 0)$ и $\vec{p} = (2; 0; -2)$.

12 Найдите угол между двумя плоскостями: $x + \sqrt{2}y + z - 3 = 0$ и $-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2}z + 1 = 0$.

13 Как расположена плоскость XOZ относительно оси OY ?

14 Составьте уравнение плоскости, которая содержит оси OX и OY и проходит через начало координат.

15 Как расположена плоскость $z - 1 = 0$ относительно плоскости XOY ?

16 Как может быть расположена в пространстве данная плоскость $Ax + By + D = 0$?

17 Запишите формулу нахождения угла между плоскостями.

18 Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и параллельно двум векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, заданных своими координатами.

19 Как может быть расположена в пространстве данная плоскость $Ax + By = 0$?

2.2 Практическое занятие

Задание 1 Составить уравнение плоскости, заданное точкой $M(2; 1; -1)$ и нормальным вектором $\vec{N} = (1; -2; 3)$.

Решение. Уравнение плоскости π , заданное точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и нормальным вектором $\vec{N} = (A; B; C)$ находится по формуле $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

$$1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0, \quad x - 2y + 3z + 3 = 0.$$

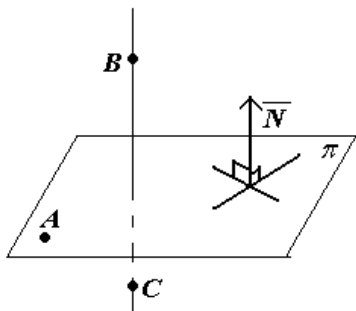
Ответ: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Задание 2 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $A(2; -1; 4)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(2; -1; 0)$ и $C(-1; 1; 3)$.

Решение. Так как вектор $\vec{BC}$ перпендикулярен плоскости, то по определению нормального вектора, $\vec{BC}$ нормальный вектор для плоскости π .

Уравнение плоскости π , заданное точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и нормальным вектором $\vec{N} = (A; B; C)$ находится по формуле $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Найдем координаты вектора $\vec{BC}$. $B(2; -1; 0)$ и $C(-1; 1; 3) \Rightarrow \vec{BC} = (-3; 2; 3)$.



Подставим в данную формулу:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

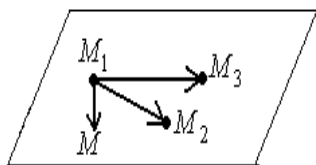
$$-3(x - 2) + 2(y + 1) + 3(z - 4) = 0 \quad 3x - 2y - 3z + 4 = 0.$$

Ответ: $3x - 2y - 3z + 4 = 0$.

Рисунок 13

Задание 3 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки $M_1(2; 1; -1)$, $M_2(-2; 4; 5)$, $M_3(0; 2; -3)$.

Решение. Уравнение плоскости π , проходящей через 3 точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ имеет вид:



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рисунок 14

Рассмотрим точку $M(x; y; z)$, лежащую на плоскости. Замечаем, что вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ — компланарны $\Rightarrow$ их смешанное произведение равно нулю, т.е. $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$. Для данных точек $M_1(2; 1; -1)$, $M_2(-2; 4; 5)$, $M_3(0; 2; -3)$, получим:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 1 \\ -2 - 2 & 4 - 1 & 5 + 1 \\ 0 - 2 & 2 - 1 & -3 + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 1 \\ -4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$6(x - 2) + 10(y - 1) - (z + 1) = 0, \quad 6x + 10y - z - 23 = 0.$$

Ответ: $6x + 10y - z - 23 = 0$.

Задание 4 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки $M_1(3; 4; -5)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 4)$.

Решение.

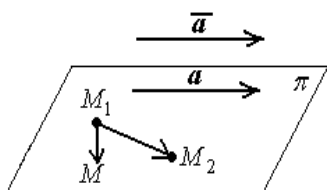


Рисунок 15

Рассмотрим любую точку $M(x; y; z)$ лежащую в плоскости π и рассмотрим три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{a}$. Эти вектора лежат в плоскости π , т.е. они компланарны.

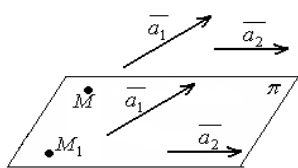
По признаку компланарности трех векторов их смешанное произведение равно 0, т.е. $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{a})=0$.

Найдем координаты векторов $\overline{M_1M} = (x-3; y-4; z+5)$, $\overline{M_1M_2} = (0; -3; 7)$.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 0 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5x + 21y + 9z - 24 = 0 \\ 5x - 21y - 9z + 24 = 0 \end{cases} \quad | \cdot (-1),$$

Ответ: $5x - 21y - 9z + 24 = 0$.

Задание 5 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$, параллельно векторам $\overline{a_1} = (3; 1; -1)$ и $\overline{a_2} = (1; -2; 1)$.



Решение. Рассмотрим любую точку $M(x; y; z)$, лежащую в плоскости π . При помощи параллельного переноса вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ перенесем в плоскость π

Рисунок 16

Рассмотрим три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$. Эти вектора лежат в плоскости π , т.е. они компланарны. По признаку компланарности трех векторов их смешанное произведение равно 0, т.е. $(\overline{M_1M}, \overline{a_1}, \overline{a_2})=0$. Так как известно, что $M_1(3; 4; -5)$, $\overline{a_1} = (3; 1; -1)$, $\overline{a_2} = (1; -2; 1)$, найдем координаты вектора $\overline{M_1M}(x-3; y-4; z+5)$.

Подставим координаты векторов в уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \text{ получим}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-3) + 4(y-4) + 7(z+5) = 0, \\ x + 4y + 7z + 16 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

Задание 6 Составить уравнение плоскости π_1 проходящей через точку $M_0(1; -3; -2)$ параллельно плоскости $\pi_2: 3x - 2y + 4z - 3 = 0$.

Решение.

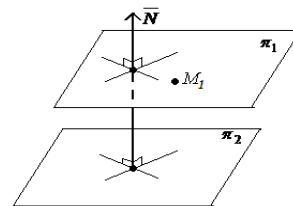


Рисунок 17

Так как плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2$, значит для плоскости π_1 вектор $\overline{N}_2 = (3; -2; 4)$ нормальный вектор плоскости. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ с нормальным вектором $\overline{N} = (A; B; C)$ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Подставив данные значения, получим:

$$3(x - 1) - 2(y + 3) + 4(z + 2) = 0,$$

$$3x - 3 - 2y - 6 + 4z + 8 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 4z - 1 = 0.$$

Ответ: $3x - 2y + 4z - 1 = 0$.

Задание 7 Составить уравнение плоскости π проходящей через точки $M_1(-1; 3; 0)$ и $M_2(2; 4; -1)$ и перпендикулярно плоскости $\pi_1: x - 2y + 3z - 10 = 0$.

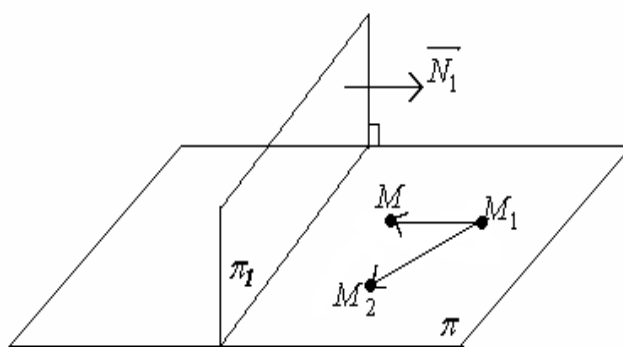


Рисунок 18

Решение. Так как плоскости перпендикулярны, то нормальный вектор $\overline{N}_1 = (1; -2; 3)$ является направляющим вектором для плоскости π . Рассмотрим точку

$M(x, y, z)$ лежащую в плоскости π . Три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{N_1}$ - компланарны. Смешанное произведение трех векторов равно 0, т.е.

$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{N_1}) = 0$. Воспользуемся формулой

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Подставив данные значения в формулу, получим}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 2+1 & 4-3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) - 10(y-3) - 7z = 0 \Rightarrow x+1-10y+30-7z=0 \Rightarrow x-10y-7z+31=0$$

Ответ: $x-10y-7z+31=0$.

Задание 8 Докажите параллельность плоскостей π_1 и π_2 , если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 2x-3y+5z-7=0$, $\pi_2: 2x-3y+5z+3=0$.

Решение. Так как две плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$.

$$\begin{aligned} \pi_1: 2x-3y+5z-7=0 &\Rightarrow \overline{N_1} = (2; -3; 5), \\ \pi_2: 2x-3y+5z+3=0 &\Rightarrow \overline{N_2} = (2; -3; 5), \end{aligned} \quad \overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \Leftrightarrow \frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = \frac{5}{5} \Rightarrow 1=1=1.$$

Вектора коллинеарны, следовательно, плоскости параллельны.

Задание 9 Докажите перпендикулярность плоскостей π_1 и π_2 , если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 3x-y-2z-5=0$, $\pi_2: x+9y-3z+2=0$.

Решение. Так как две плоскости перпендикулярны, то их нормальные вектора перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно 0.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0.$$

$$\pi_1: 3x-y-2z-5=0 \Rightarrow \overline{N_1} = (3; -1; -2),$$

$$\pi_2: x+9y-3z+2=0 \Rightarrow \overline{N_2} = (1; 9; -3).$$

$$\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 9 + (-2) \cdot (-3) = 3 - 9 + 6 = 0 \Rightarrow \text{плоскости } \pi_1 \text{ и } \pi_2$$

перпендикулярны.

Задание 10 Найдите значения l и m , при которых плоскость π_1 параллельна плоскости π_2 , если плоскости заданы уравнениями

$$\pi_1: 2x + ly + 3z - 5 = 0 \text{ и } \pi_2: mx + 3y + 2z + 5 = 0.$$

Решение. Плоскость $\pi_1: 2x + ly + 3z - 5 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_1} = (2; l; 3)$. Плоскость $\pi_2: mx + 3y + 2z + 5 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_2} = (m; 3; 2)$. Так как две плоскости параллельны, то их нормальные вектора

$$\text{коллинеарны } \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{l}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m} = \frac{3}{2}, \\ \frac{l}{3} = \frac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3}, \\ l = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } m = \frac{4}{3}, l = \frac{9}{2}.$$

Задание 11 При каком значении l плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 3x - 5y + lz - 3 = 0$ и

$$\pi_2: x + 3y + 2z + 5 = 0.$$

Решение. Плоскость $\pi_1: 3x - 5y + lz - 3 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_1} = (3; -5; l)$. Плоскость $\pi_2: x + 3y + 2z + 5 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_2} = (1; 3; 2)$. Так как две плоскости перпендикулярны, то их нормальные вектора перпендикулярны и скалярное произведение этих векторов равно 0.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 + l \cdot 2 = 0 \Rightarrow l = 6.$$

$$\text{Ответ: } l = 6.$$

Задание 12 Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей π_1 и π_2 , если плоскости заданы уравнениями

$$\pi_1: x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0 \text{ и } \pi_2: x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$$

Решение. Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Две плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, где $\overline{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$

, $\overline{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$. Плоскость $\pi_1: x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_1} = (1; -\sqrt{2}; 1)$. Плоскость $\pi_2: x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$ с нормальным вектором $\overline{N_2} = (1; \sqrt{2}; -1)$. Наименьший, из двух смежных углов, образованных этими

плоскостями, находится по формуле: $\left(\pi_1; \pi_2\right) = \left(\overline{N_1}; \overline{N_2}\right) = \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}$

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

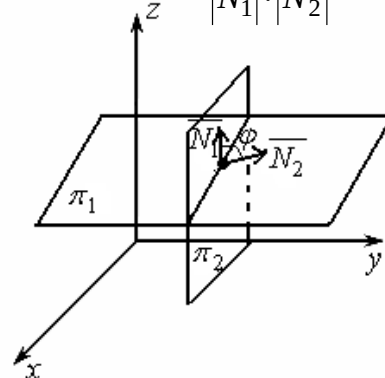


Рисунок 19

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Задание 13 Записано ли следующее уравнение плоскости в нормальном виде

$$\pi: \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0?$$

Решение. *Нормальное уравнение плоскости* $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$.

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ приводится к нормальному виду $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ путем умножения на *нормирующий*

множитель $\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знак перед дробью берется противоположным

знаку свободного члена D . Найдем координаты нормального вектора

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0 \Rightarrow \overline{N} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right).$$

$$\mu = \frac{\pm 1}{|\overline{N}|} \Rightarrow \mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \pm 1. \text{ Так как } C = -5 < 0, \text{ то } \mu = 1.$$

Данное уравнение записано в нормальном виде $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$

Ответ: Да.

Задание 14 Привести уравнение плоскости $2x - 2y + z - 18 = 0$ к нормальному виду.

Решение. Нормальное уравнение плоскости $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$.

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ приводится к нормальному виду $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ путем умножения на нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; знак перед дробью берется противоположным

знаку свободного члена D . $2x - 2y + z - 18 = 0 \Rightarrow \bar{N} = (2; -2; 1) \Rightarrow \mu = \frac{\pm 1}{|\bar{N}|}, \mu = \frac{\pm 1}{3}$.

Так как $C = -18 < 0$, то $\mu = \frac{1}{3}$. Так как нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{3}$,

$$2x - 2y + z - 18 = 0 \mid \cdot \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0.$$

Ответ: $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$.

Задание 15 Найти α, β, γ и p из уравнения плоскости в нормальном виде, если плоскость задана уравнением $\pi: x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$.

Решение. Уравнение плоскости в нормальном виде: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$. Приведем данное уравнение к нормальному виду.

$$\pi: x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0; \bar{N} = (1; \sqrt{2}; 1) \Rightarrow \mu = \frac{\pm 1}{|\bar{N}|} \Rightarrow \mu = \frac{\pm 1}{2}.$$

Так как $C = -10 < 0$, то нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{2}$. Умножим общее

$$\text{уравнение плоскости на нормирующий множитель } \mu: x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0 \mid \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z - 5 = 0.$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2}, \\ \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos \gamma = \frac{1}{2}, \\ p = 5, \end{cases} \begin{cases} \alpha = 60^\circ, \\ \beta = 45^\circ, \\ \gamma = 60^\circ, \\ p = 5. \end{cases}$$

Ответ: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $p = 5$.

Задание 16 Найти расстояние d от точки $P(-1; 1; -2)$ до плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$.

Решение. Расстояние от точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \text{ находим по формуле: } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Сначала найдем уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 3y + 6z - 11 = 0.$$

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) - 11|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-2 - 3 - 12 - 11|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{|-28|}{\sqrt{49}} = \frac{28}{7} = 4.$$

Ответ: $d = 4$.

Задание 17 Найти расстояние между параллельными плоскостями π_1 и π_2 , если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: x - 2y - 2z - 12 = 0$ и $\pi_2: x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Решение. Для того чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями, необходимо рассмотреть точку в одной из плоскостей и найти расстояние от этой точки до другой плоскости.

Найдем любую точку в плоскости $\pi_1 : x - 2y - 2z - 12 = 0$. Пусть $y = 0$ и $x = 4$, тогда $4 - 2 \cdot 0 - 2z - 12 = 0 \Rightarrow -2z - 8 = 0 \Rightarrow -2z = 8 \Rightarrow z = -4 \Rightarrow P(4; 0; -4)$.
 $\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$. Расстояние от точки $P(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ находим по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow d = \frac{|4 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-4) - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 2.$$

Ответ: $d = 2$.

2.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M(0; 3; -1)$ и нормальный вектор $\vec{N} = (4; 2; -1)$.

Ответ: $4x + 2y - z - 7 = 0$.

Задание 2 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $A(-1; 1; 1)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(-2; 0; 4)$ и $C(1; 1; 1)$.

Ответ: $3x + y - 3z + 5 = 0$.

Задание 3 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки:

$M_1(2; -1; 0)$, $M_2(0; -1; 1)$, $M_3(1; 2; 1)$.

Ответ: $3x - y + 6z - 7 = 0$.

Задание 4 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки $M_1(1; 2; -1)$ и $M_2(2; 3; -1)$ параллельно $\vec{a} = (0; -1; 2)$.

Ответ: $2x - 2y - z + 1 = 0$.

Задание 5 Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M_1(4; 0; 1)$, параллельно $\vec{a}_1 = (1; -2; -1)$ и параллельно $\vec{a}_2 = (1; -1; 2)$.

Ответ: $5x + 3y - z - 19 = 0$.

Задание 6 Докажите параллельность плоскостей π_1 и π_2 .

а) $4x + 2y + 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

б) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 3 = 0$.

Задание 7 Докажите перпендикулярность плоскостей π_1 и π_2 .

а) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

б) $2x - 5y + z = 0$, $x - 2z - 3 = 0$.

Задание 8 При каких значениях l и m плоскости π_1 и π_2 параллельны:

а) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $mx + ly - 3z + 1 = 0$;

б) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

Ответ: а) $m = 5$, $l = 1$; б) $m = -\frac{6}{5}$, $l = -\frac{10}{3}$.

Задание 9 При каком значении l плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны:

а) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

б) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y + 5z - 1 = 0$.

Ответ: а) $l = -19$; б) $l = 1$.

Задание 10 Определить двугранные углы, образованные пересечением пар плоскостей

а) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$; б) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

Ответ: а) $\varphi = 45^\circ$; б) $\varphi = 90^\circ$.

Задание 11 Определить какие из следующих уравнений плоскостей являются нормальными:

а) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$;

б) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$;

в) $x - 1 = 0$;

г) $z - 5 = 0$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) да.

Задание 12 Привести уравнение плоскости к нормальному виду

$$\text{а) } \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0;$$

$$\text{в) } -4x - 4y + 2z + 1 = 0.$$

$$\text{б) } 4x - 6y - 12z - 11 = 0;$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 3 = 0;$$

$$\text{б) } \frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{6} = 0.$$

Задание 13 Найти α, β, γ и p , если а) $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$;

$$\text{б) } y - z + 2 = 0.$$

Ответ: а) $\alpha = 120^\circ$; $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $p = 8$;

$$\text{б) } \alpha = 90^\circ; \beta = 135^\circ, \gamma = 45^\circ, p = \sqrt{2}.$$

Задание 14 Найти расстояние между параллельными плоскостями:

$$\text{а) } 2x - y + 2z + 9 = 0 \text{ и } 4x - 2y + 4z + 18 = 0;$$

$$\text{б) } 2x - 3y + 6z - 14 = 0 \text{ и } 2x - 3y + 6z + 42 = 0.$$

Ответ: а) $d = 0$; б) 8.

Задание 15 Найти расстояние от точки $M_0(5; 4; -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0; 4; 0)$, $M_2(0; 4; -3)$, $M_3(3; 0; 3)$.

Ответ: $d = 4$.

3 Прямая в пространстве. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве

3.1 Вопросы для самоподготовки

1 Запишите уравнение прямой L в пространстве, проходящей через две различные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

2 Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве.

3 Запишите каноническое уравнение прямой в пространстве.

4 Запишите направляющий вектор прямой и точку лежащую на прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

5 Составьте уравнение прямой L , проходящей через точку $M(1; 3; 0)$ и перпендикулярно плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

6 Составьте уравнение прямой L , которая является пересечением двух плоскостей $2x + 3y + z - 1 = 0$ и $3x - y + z - 5 = 0$.

7 Запишите уравнение прямой L в пространстве, проходящей через две различные точки $M_1(2; 0; 1)$ и $M_2(-3; 4; -5)$.

8 Как расположена прямая $\begin{cases} x = 0, \\ y = -2t - 3, \\ z = 1; \end{cases}$ относительно плоскости OXZ ?

9 Запишите уравнение прямой L , проходящей через данную точку $M_0(1; -1; 6)$ параллельно вектору $\vec{s} = (0; -2; 5)$.

10 Запишите формулу нахождения угла между прямыми в пространстве.

11 Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

12 Определите угол между прямой $x = 5t + 3, y = -3t - 2, z = 4t + 5$ и осью OX ?

13 Сформулируйте условие, при котором две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости.

14 Сформулируйте условие, при котором две прямые L_1 и L_2 скрещиваются.

15 Сформулируйте признак совпадения двух прямых в пространстве.

16 Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве заданное точкой $M_0(-2; 4; 5)$ и параллельным вектором $\vec{s} = (6; -5; -3)$.

17 Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве через точку $M_0(-2; 4; 5)$, параллельной оси OX (OY , OZ).

18 Запишите каноническое уравнение прямой в пространстве заданной пересечением плоскостей
$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 7 = 0, \\ x + 5y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

19 Найдите угол между прямыми $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{-1}$ в пространстве.

20 Как расположена прямая $x = 3t - 1, y = 1, z = -4$. относительно оси OX ?

3.2 Практическое занятие

Задание 1 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(2; 0; 3)$ и параллельно вектору $\vec{s} = (4; -3; 5)$;

б) точку $M_0(4; -1; 2)$ и параллельно прямой $L': \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;

в) точку $M_0(1; -1; 0)$ и параллельно оси OX (OY , OZ);

г) точки $M_1(1; -2; 1)$ и $M_2(3; 1; -1)$;

д) точку $M_0(2; 3; -5)$ и параллельно прямой, являющейся пересечением двух

плоскостей
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

а) Канонические уравнения прямой L , проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\bar{s} = (m; n; p)$, имеют, задана координатами $M_1(2; 0; 3)$ и направляющий вектор имеет координаты $\bar{s} = (4; -3; 5)$, тогда составим уравнение прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-3}{5} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$

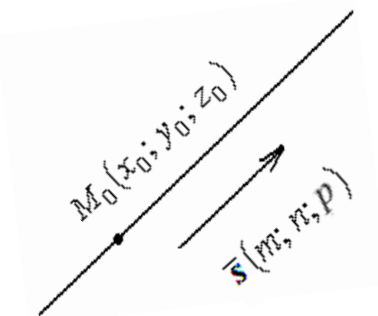
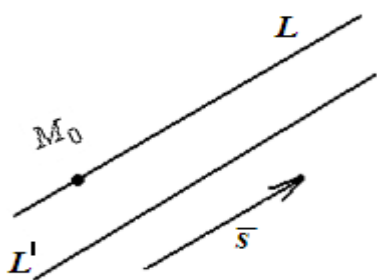


Рисунок 20

б) уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; -1; 2)$ и параллельно прямой $L': \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. По условию прямые L и L' параллельны, то их направляющие вектора коллинеарны. Тогда направляющим вектором для прямой L может быть вектор $\bar{s} = (5; 2; -1)$. Используя предыдущую формулу $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, составим уравнение прямой.



Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; -1; 2)$ с направляющим вектором $\bar{s} = (5; 2; -1)$ будет иметь вид

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Рисунок 21

в) Для каждого случая составим канонические уравнения проходящие через точку $M_0(1; -1; 0)$ с направляющими векторами $\bar{i} = (1; 0; 0)$, $\bar{j} = (0; 1; 0)$, $\bar{k} = (0; 0; 1)$:

$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$; $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1}$. Перейдем от канонического уравнения к параметрическому уравнению.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t+1, \\ y = -1, \\ z = 0. \end{cases} \quad \frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = t-1, \\ z = 0. \end{cases}$$

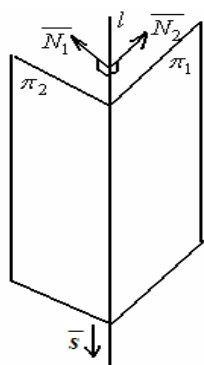
$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = t. \end{cases}$$

г) уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, задано формулой: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Точки, лежащие на прямой имеют координаты $M_1(1; -2; 1)$ и $M_2(3; 1; -1)$, подставляя координаты в формулу получим уравнения: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-1}{-1-1}$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$.

д) Воспользуемся каноническим уравнением прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

По условию задачи, прямая задается пересечением двух плоскостей:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases} \quad \text{Тогда нормальные вектора двух плоскостей будут}$$



перпендикулярны этой прямой L , следовательно, перпендикулярны и направляющему вектору этой прямой. Найдем координаты вектора $\bar{s}$.

$$\begin{aligned} \overline{N_1} &= (3; -1; 2) \\ \overline{N_2} &= (1; 3; -2) \end{aligned} \Rightarrow \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 8\bar{j} + 10\bar{k} \Rightarrow \bar{s} = (-4; 8; 10)$$

Рисунок 22

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 3; -5)$ и направляющим вектором $\bar{s} = (-4; 8; 10)$: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+5}{10} \mid \cdot 2 \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{5}$.

Задание 2 Найти угол между двумя прямыми L_1 и L_2 :

$$а) \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}};$$

$$б) x=3t, y=0, z=-t+3, x=2t-1, y=0, z=t-3;$$

$$в) \begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

Решение. В пространстве угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами.

$$а) L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Выпишем направляющие вектора двух прямых L_1 и L_2 : $\vec{s}_1 = (1; -1; \sqrt{2})$, $\vec{s}_2 = (1; 1; \sqrt{2})$. Используя формулу нахождения угла между двумя прямыми L_1 и L_2 :

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}, \text{ получим}$$

$$(\vec{s}_1; \vec{s}_2) = (\vec{s}_1; \vec{s}_2) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1-1+2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

б) прямыми L_1 и L_2 заданы в параметрическом виде, выпишем направляющие вектора двух прямых L_1 и L_2 :

$$L_1: \begin{cases} x=3t, \\ y=0, \\ z=-t+3, \end{cases} \Rightarrow \vec{s} = (3; 0; -1); \quad L_2: \begin{cases} x=2t-1, \\ y=0, \\ z=t-3 \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_2 = (2; 0; 1).$$

По предыдущей формуле $\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ найдем угол:

$$\cos \alpha = \frac{6+0-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$в) L_1: \begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0. \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

Для данных прямых, которые заданы пересечением двух плоскостей найдем направляющие вектора:

$$L_1: \begin{matrix} \overline{N_1} = (1; -1; -4) \\ \overline{N_2} = (2; 1; -2) \end{matrix} : \overline{s_1} \left(\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -4 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right) \right), \overline{s_1} = (6; -6; 3).$$

$$L_2: \begin{matrix} \overline{N_1} = (1; -6; -6) \\ \overline{N_2} = (2; 2; 9) \end{matrix} : \overline{s_2} \left(\left(\begin{array}{cc|cc} -6 & -6 & -6 & 1 \\ 2 & 9 & 9 & 2 \end{array} \right) \right), \overline{s_2} = (-42; -21; 14).$$

$$\cos \alpha = \frac{|-42 \cdot 6 - 21 \cdot (-6) + 14 \cdot 3|}{\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 3^2} \sqrt{(-42)^2 + (-21)^2 + 14^2}} = \frac{4}{21} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4}{21}\right).$$

Задание 3 Установить взаимное расположение прямых L_1 и L_2 :

$$a) \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5 - 8t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = 3 + 4t; \end{cases}$$

$$б) \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

Решение. а) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых:
 $\overline{s_1} = (4; 3; -2)$, $\overline{s_2} = (-8; -6; 4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны: $\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, данные прямые параллельные или совпадают. Возьмем на первой прямой какую-нибудь точку, например точку $(2; 0; -1)$. Подставим ее координаты в уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2 = 5 - 8t, \\ 0 = 4 - 6t, \\ -1 = 3 + 4t. \end{cases} \text{ Получаем } t = \frac{3}{8} \text{ — из первого уравнения, } t = \frac{2}{3} \text{ — из второго, } t = -1$$

— из третьего. Это означает, что точка $(2; 0; -1)$ не принадлежит второй прямой; прямые не совпадают, значит они параллельны.

$$б) \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

Координаты направляющих векторов $\overline{s_1} = (2; -3; 1)$ и $\overline{s_2} = (3; 2; 4)$ данных прямых не пропорциональны. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим выполнение условия принадлежности двух прямых

одной плоскости, предварительно выписав координаты точек M_1 и M_2 , через которые проходят данные прямые: $M_1(0; 1; -2), M_2(-4; -3; 1)$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 115 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые – скрещивающиеся.

Задание 4 Уравнение прямой $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ преобразовать к

каноническому виду.

Решение. Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор $\vec{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z = 0$; тогда для определения абсциссы x и ординаты y данной точки

решим следующую систему уравнений $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$ из которой находим $x = 1$,

$y = -\frac{3}{2}$. Итак, на прямой известна точка $\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$. Направляющий вектор прямой

находим по формуле: $\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right)$, т.е. $\vec{s} = (-4; -7; -6)$.

Тогда, согласно формуле $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$,

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-7} = \frac{z-0}{-6} \text{ или } \frac{x-1}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{7} = \frac{z}{6} - \text{ искомое уравнение прямой.}$$

Задание 5 Составить параметрическое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - z - 8 = 0$ и проходящей через точку $M_0(2; -1; -3)$.

Решение. Вектор $\vec{N} = (3; 1; -1)$ перпендикулярен плоскости $3x + y - z - 8 = 0$. Следовательно, в качестве вектора $\vec{s}$ можно взять вектор $\vec{N}$, т.е. $\vec{s} = (3; 1; -1)$. Тогда параметрическое уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - z - 8 = 0$, примет вид

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -3 - t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -3 - t. \end{cases}$

3.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Найти величину острого угла между прямыми:

а) $\frac{x}{11} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$;

б) $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\arccos \frac{2}{\sqrt{66}}$.

Задание 2 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(3; 6; 1)$ и параллельной

а) $\vec{a} = (2; -1; 4)$; б) прямой $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$;

в) оси OX ; г) оси OY ; д) оси OZ .

Ответ: а) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-1}{4}$; б) $\frac{x-3}{6} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-1}{3}$;

в) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{0} = \frac{z-1}{0}$; г) $\frac{x-3}{0} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-1}{0}$;

д) $\frac{x-3}{0} = \frac{y-6}{0} = \frac{z-1}{1}$.

Задание 3 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки: а) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$; б) $(0; -2; 3)$, $(3; -2; 1)$.

Ответ: а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{3}$; б) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}$.

Задание 4 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(0; 4; -1)$, параллельной прямой $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 4 = 0. \end{cases}$

Ответ: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{-3}.$

Задание 5 Найти тупой угол между прямыми $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 0, \\ z = -t + 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 0, \\ z = t - 3 \end{cases}.$

Ответ: $135^\circ.$

Задание 6 Проверить параллельность прямых L_1 и L_2

а) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2x + 3z - 9 = 0. \end{cases}$

Задание 7 Проверить перпендикулярность прямых L_1 и L_2

а) $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0; \end{cases}$

б) $x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = -6t + 1$ и $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

Задание 8 Найти параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; 2; 2)$ и $M_2(6; 2; 1)$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 2, \\ z = 2 - t. \end{cases}$

Задание 9 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ и перпендикулярной векторам $\vec{a} = (2; 2; 3)$ и $\vec{b} = (-2; 5; 0)$.

Ответ: $\frac{x-1}{-15} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-2}{14}.$

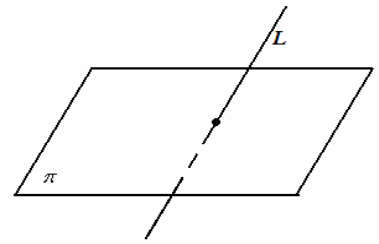
4 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

4.1 Вопросы для самоподготовки

- 1 Установите взаимное расположение прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и плоскости $x - y + z + 3 = 0$.
- 2 Как расположена прямая $\begin{cases} x = 0, \\ y = -2t - 3, \\ z = 1; \end{cases}$ относительно плоскости OXZ ?
- 3 Определите угол между прямой $x = 5t + 3, y = -3t - 2, z = 4t + 5$ и плоскостью OXY .
- 4 Сформулируйте признак параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
- 5 Сформулируйте признак принадлежности прямой к плоскости.
- 6 Запишите формулу вычисления угла между прямой и плоскостью в пространстве.
- 7 Как расположена прямая $x = 3t - 1, y = 1, z = -4$ относительно плоскости OYZ ?
- 8 Установите взаимное расположение прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ и плоскости $x - y + z + 3 = 0$.
- 9 Как расположена прямая $x = -3, y = 3t - 51, z = t + 8$ относительно плоскости $x + y - 3z = 0$?
- 10 Установите взаимное расположение прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ и плоскости $x - 2y + 4z + 3 = 0$.

4.2 Практическое занятие

Задание 1 Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и $2x + 3y + z - 1 = 0$.



Решение.

Рисунок 23

Для того чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, необходимо решить систему уравнений. Сначала от канонического уравнения прямой перейдем к параметрическому уравнению:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1} = t, \\ \frac{y+1}{-2} = t, \\ \frac{z}{6} = t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t \end{cases} \quad - \text{ параметрическое уравнение}$$

прямой. Точка лежит на прямой и на плоскости, следовательно, ее координаты удовлетворяют и уравнению прямой и уравнению плоскости. Запишем систему линейных уравнений и решим ее и найдем параметр t .

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0, \\ 2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0, \end{cases}$$

$$2t + 2 - 6t - 3 + 6t - 1 = 0, \quad 2t = 2,$$

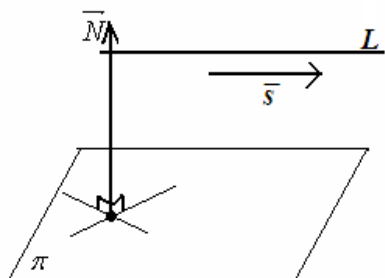
$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 1, \\ y = -2 \cdot 1 - 1, \\ z = 6 \cdot 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 6. \end{cases}$$

Подставив вместо параметра значения в параметрические уравнения мы получили координаты точки. Точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты $(2; -3; 6)$.

Ответ: $(2; -3; 6)$.

Задание 2 Доказать, что прямая $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Решение.



$$L: \begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5 \end{cases} \Rightarrow \bar{s} = (3; -4; 4).$$

$$\pi: 4x - 3y - 6z - 5 = 0 \Rightarrow \bar{N} = (4; -3; -6).$$

Рисунок 24

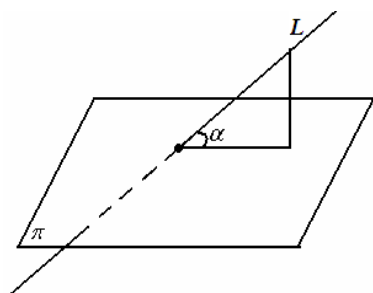
Прямая L параллельна плоскости π , если направляющий вектор $\bar{s}$ прямой L перпендикулярен нормальному вектору $\bar{N}$ плоскости π .

$$L \parallel \pi \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{N} \Rightarrow \bar{s} \cdot \bar{N} = 0.$$

$\bar{s} \cdot \bar{N} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) = 12 + 12 - 24 = 0 \Rightarrow$ прямая параллельна плоскости.

Задание 3 Найти величину угла между прямой $x = 5 + t$, $y = -3 + t$, $z = 4 - 2t$, и плоскостью $4x - 2y - 2z + 7 = 0$.

Решение. Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



$$(\pi; L) = \alpha.$$

Угол между прямой L $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и

плоскостью

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \text{ определяется по}$$

Рисунок 25

формуле: $\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$

$$L: \begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -3 + t, \\ z = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow \bar{s} = (1; 1; -2).$$

$$\pi: 4x - 2y - 2z + 7 = 0 \Rightarrow \bar{N} = (4; -2; -2).$$

$$\sin \alpha = \frac{4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\alpha = 30^\circ$.

Задание 4 При каких значениях D и B прямая $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{7}$ лежит в плоскости $4x + By - 2z + D = 0$?

Решение. Для прямой, которая задана каноническим уравнением

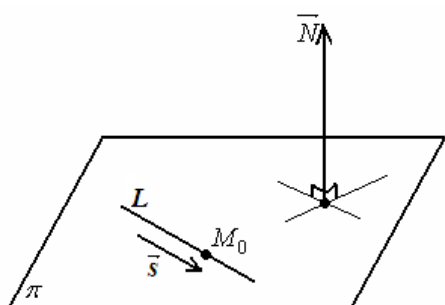


Рисунок 26

$$L: \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{7} \Rightarrow \bar{s} = (5; -3; 7) \text{ известен}$$

направляющий вектор и точка $M_0(1; -2; 4)$ принадлежащая ей, с координатами. Для плоскости известен нормальный вектор

$$\pi: 4x + By - 2z + D = 0 \Rightarrow \bar{N} = (4; B; -2).$$

Прямая лежит в плоскости, если выполняются два условия: 1) $\bar{s} \perp \bar{N}$ и 2) точка M_0 лежит в плоскости π , т.е.

$$\begin{cases} \bar{s} \cdot \bar{N} = 0, \\ m.M_0 \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 4 - 3 \cdot B + 7 \cdot (-2) = 0, \\ 4 \cdot 1 + B \cdot (-2) - 2 \cdot 4 + D = 0, \end{cases} \begin{cases} B = 2, \\ D = 8. \end{cases}$$

Ответ: $B = 2, D = 8$

Задание 5 Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad 5x - 6y + 2z - 10 = 0;$$

$$\text{б) } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2} \quad \text{и} \quad 3x + y - 4z - 15 = 0.$$

Решение. а) Имеем: направляющий вектор прямой задан координатами $\vec{s} = (-4; 1; 2)$, нормальный вектор плоскости задается координатами $\vec{N} = (5; -6; 2)$. Координаты направляющего вектора $\vec{s}$ прямой и нормального вектора $\vec{N}$ плоскости не пропорциональны: прямая не перпендикулярна плоскости $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{N} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$. Найдем значение выражения $Am + Bn + Cp$:

$$Am + Bn + Cp = 5 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -20 - 6 + 4 = -22 \neq 0.$$

Условие параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая *пересекает* плоскость.

б) Воспользовавшись условиями задания координат векторов направляющего и нормального, а также координат точки, лежащей на прямой: $\vec{s} = (3; -1; 2)$, $\vec{N} = (3; 1; -4)$, $M_0(-1; 2; -4)$, проверим равенство $Am + Bn + Cp = 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 9 - 1 - 8 = 0$. Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) - 15 = 0.$$

Условия выполняются, поэтому прямая *лежит в плоскости*.

4.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$.

Ответ: $2x + y - 2z + 7 = 0$.

Задание 2 Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x - y + 2z + 5 = 0$.

Ответ: $(-3; -4; 0)$.

Задание 3 Найдите расстояние между прямыми $\frac{x-9}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ и

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{538}}{2}$.

Задание 4 При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$.

Ответ: $m = -3$.

Задание 5 При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$.

Ответ: $c = -2$.

Задание 6 При каком значении n прямая $x = 2 + 5t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 + nt$ параллельна плоскости $2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

Ответ: $n = 3$.

Задание 7 При каких значениях A и D прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$.

Ответ: $A = 3$, $D = -23$.

Задание 8 При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$

Ответ: $A = -3$, $B = \frac{9}{2}$.

Задание 9 При каких значениях l и C прямая $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$.

Ответ: $l = -6$, $C = \frac{3}{2}$.

Задание 10 При каких значениях m и A прямая $x = 3 + 2t$, $y = -5 + mt$, $z = 1 + 6t$ перпендикулярна плоскости $Ax - 2y + 3z - 5 = 0$.

Ответ: $A = 1$, $m = -4$.

Задание 11 Найти проекцию точки $P(3; 2; -1)$ на плоскость $x - 5y + 4z - 31 = 0$.

Ответ: $(4; -3; 3)$.

Задание 12 Найти точку, симметричную точке $P(2; 7; 1)$ относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.

Ответ: $(4; -1; 3)$.

Задание 13 Вычислить расстояние d от точки $P(1; -1; -2)$ до прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Ответ: $d = 7$.

5 Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола

5.1 Вопросы для самоподготовки

- 1 Сформулируйте определение эллипса. Запишите каноническое уравнение эллипса (изобразите эллипс).
- 2 Сформулируйте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы (изобразите параболу).
- 3 Сформулируйте определение эксцентриситета и директрис эллипса.
- 4 Сформулируйте определение эксцентриситета и директрис гиперболы.
- 5 Сформулируйте определение окружности. Запишите каноническое уравнение окружности (изобразите окружность).

6 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис и асимптот гиперболы $4x^2 - 25y^2 + 100 = 0$ (построить кривую, указать фокусы и директрисы).

7 Сформулируйте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы (построить гиперболу).

8 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ (построить кривую, указать фокусы и директрисы).

9 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ (построить кривую, указать фокусы и директрисы).

10 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис и асимптот гиперболы $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (построить кривую, указать фокусы и директрисы).

11 Найдите координаты фокуса, уравнения директрисы параболы $(x + 3)^2 = 3(y - 5)$ (построить кривую, указать фокусы и директрисы).

12 Найдите координаты фокуса, уравнения директрисы параболы $(y - 2)^2 = -2(x + 4)$ (построить кривую, указать фокусы и директрисы).

13 Запишите уравнение линии $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ в полярных координатах ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$).

14 Приведите уравнение кривой к каноническому виду и построить кривую, которая определяется уравнением: $x^2 + y^2 = 2x$.

15 Запишите уравнение окружности с центром в точке $(-4; 2)$ и $R = 3$.

16 Дана точка $A(1, -1)$, найдите ее координаты в полярной системе координат.

17 Запишите формулы перехода от полярной системы координат к декартовой и обратно.

18 Дана точка $A(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$, найдите ее координаты в декартовой системе координат.

19 Запишите формулы преобразования координат поворотом координатных осей без изменения начала координат.

20 Запишите уравнение кривой 2-го порядка в общем виде.

5.2 Практическое занятие

Задание 1 Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Решение. Подставим координаты точек M_1, M_2 и M_3 в данное уравнение:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

$$\begin{cases} (-1-a)^2 + (5-b)^2 = R^2, \\ (-2-a)^2 + (-2-b)^2 = R^2, \\ (5-a)^2 + (5-b)^2 = R^2, \end{cases} \begin{cases} a^2 + 2a + 1 + 25 - 10b + b^2 = R^2, \\ a^2 + 4a + 4 + b^2 + 4b + 4 = R^2, \\ a^2 - 10a + 25 + b^2 - 10b + 25 = R^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a + b^2 - 10b + 26 = R^2, \\ a^2 + 4a + b^2 + 4b + 8 = R^2, \\ a^2 - 10a + b^2 - 10b + 50 = R^2, \end{cases} \begin{cases} 2a + 14b - 18 = 0, \\ -12a + 24 = 0, \\ a^2 - 10a + b^2 - 10b + 50 = R^2, \end{cases} \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ R^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

От второго уравнения отняли первое уравнения и результат поставили на первое место. От третьего уравнения отняли первое уравнения и результат поставили на второе место. Третье уравнение оставили без изменения.

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

$$\text{Ответ: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Задание 2 Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить кривую, которая определяется уравнением: $4x^2 + 4y^2 - 32x + 20y + 73 = 0$.

Решение: $4x^2 + 4y^2 - 32x + 20y + 73 = 0$, сгруппируем переменные.

$4x^2 - 32x + 4y^2 + 20y + 73 = 0$, вынесем за скобки общий множитель.

$4(x^2 - 8x) + 4(y^2 + 5y) + 73 = 0$, в скобках дополним до полного квадрата.

$4(x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16) + 4\left(y^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}y + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 73 = 0$. Сгруппируем по формуле

полного квадрата. $4(x - 4)^2 - 64 + 4\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - 25 + 73 = 0$,

$4(x - 4)^2 + 4\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 16 \quad | :4, (x - 4)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 4$. Уравнение окружности с

центром в точке $\left(4; -\frac{5}{2}\right)$ и $R = 2$.

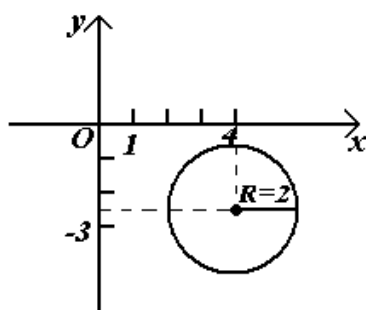


Рисунок 27

Задание 3. Установить вид кривой по следующим уравнениям:

а) $x = -\sqrt{4 - y^2}$; б) $y = -2 + \sqrt{1 - x^2}$; в) $y = 3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$

и сделать чертеж.

Решение. а) $x = -\sqrt{4 - y^2} : x \leq 0$. Возведем в квадрат правую и левую часть уравнения. $x^2 = 4 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$. Мы получили уравнение окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом $R = 2$. Так как $x \leq 0$, то решением данного равенства $x = -\sqrt{4 - y^2}$ будет множество точек, лежащих на левой полуокружности.

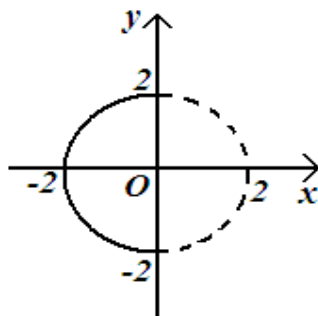


Рисунок 28

б) $y + 2 = \sqrt{1 - x^2}$, $y + 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -2$. Возведем в квадрат правую и левую части уравнения $(y + 2)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 1$. Мы получили уравнение окружности с центром в точке $(0; -2)$ и радиусом $R = 1$. Так как $y \geq -2$, то решением данного равенства $y + 2 = \sqrt{1 - x^2}$ будет множество точек, лежащих на верхней полуокружности.

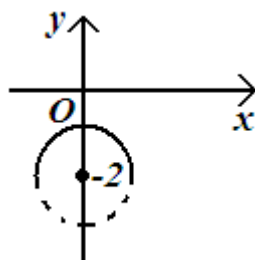


Рисунок 29

в) $y = 3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$, $y - 3 = -\sqrt{21 - 4x - x^2} \Rightarrow y - 3 \leq 0 \Rightarrow y \leq 3$.

Возведем в квадрат правую и левую части уравнения.

$(y - 3)^2 = 21 - 4x - x^2$. Дополним до полного квадрата правую часть.

$(y - 3)^2 + x^2 + 4x = 21 \Rightarrow (y - 3)^2 + (x + 2)^2 - 4 = 21$. $(y - 3)^2 + (x + 2)^2 = 25$. Получили

уравнения окружности с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом $R = 5$. Решением

данного равенства $y = 3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$ являются множество точек лежащих на полуокружности.

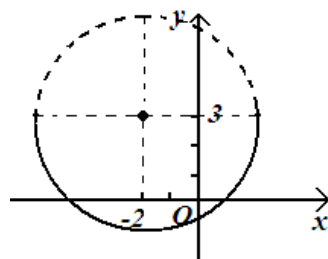


Рисунок 30

Задание 4 Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$.

Найти: а) длины его полуосей; б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет эллипса; г) уравнения директрис и расстояние между ними; д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

Решение. Разделив обе части уравнения на 1176 мы получим уравнение

эллипса в каноническом виде $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

а) длины полуосей эллипса: $a^2 = 49$, $b^2 = 24$, т.е. $a = 7$, $b = 2\sqrt{6}$.

б) координаты фокусов. Так как $c^2 = a^2 - b^2$, то $c^2 = 7^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25$, $c = 5$.
Следовательно, $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$.

в) эксцентриситет эллипса. Так как $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $\varepsilon = \frac{5}{7} < 1$.

г) уравнения директрис имеют вид $x_1 = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x_2 = -\frac{a}{\varepsilon}$. Тогда $x_{1,2} = \pm \frac{7}{\frac{5}{7}}$, т.е.

$x_1 = \frac{49}{5}$ и $x_2 = -\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d = \frac{49}{5} - \left(-\frac{49}{5}\right) = \frac{98}{5} = 19,6$.

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12. По формуле $r_1 = a + \varepsilon x$ находим абсциссу точки, расстояние от которой до точки F_1 равно 12: $12 = 7 + \frac{5}{7}x$, т.е. $x = 7$. Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординату этой точки: $24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176$, $49y^2 = 0$, $y = 0$. Условию задачи удовлетворяет точка $A(7; 0)$.

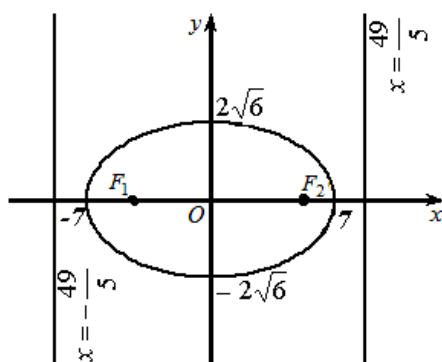


Рисунок 31

Задание 5 Уравнение кривой $16x^2 + 9y^2 - 32x + 36y - 92 = 0$ привести к каноническому виду и изобразить эту кривую.

Решение. Приведем данное уравнение кривой к каноническому виду.

Сгруппируем переменные и вынесем за скобки коэффициенты при наивысших степенях. В каждой скобке выделим полный квадрат.

$$16x^2 - 32x + 9y^2 + 36y - 92 = 0$$

$$16(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) - 92 = 0$$

$$16((x-1)^2 - 1) + 9((y+2)^2 - 4) - 92 = 0$$

Раскроем скобки.

$$16(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 144 \quad /:144,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$

Получили уравнение окружности
центр находится в точке $(1; -2)$.

Из уравнения находим: $a^2 = 9$, $a = 3$

и $b^2 = 16$, $b = 4$ ($b > a$). Поэтому

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}. \text{ Эксцентриситет эллипса } \varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4} < 1.$$

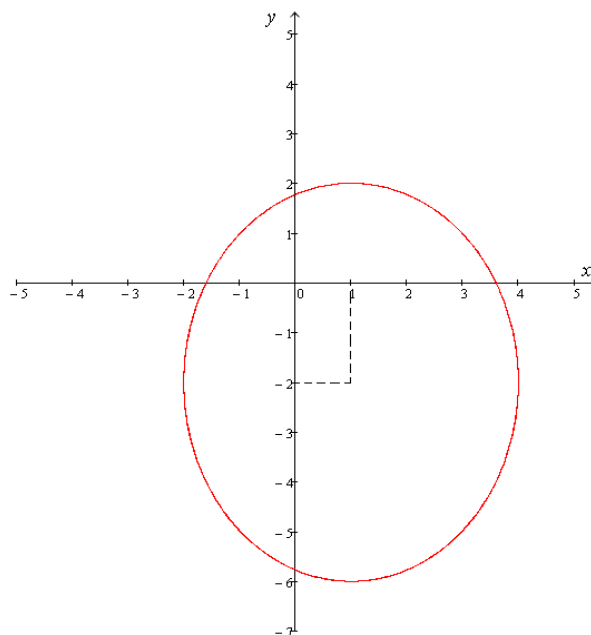


Рисунок 32

Задание 6 Составить уравнение эллипса с центром в начале координат и фокусами, лежащими на оси Ox . Эллипс проходит через точки $M_1(2; -4\sqrt{3})$ и $M_2(-1; 2\sqrt{15})$.

Решение. Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2 , то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{1}{a^2} + \frac{60}{b^2} = 1. \text{ Умножая второе равенство на } (-4) \text{ и складывая с первым,}$$

находим $-\frac{192}{b^2} = -3$, т.е. $b^2 = 64$. Подставляя найденное значение b^2 в первое

уравнение, получаем $\frac{4}{a^2} + \frac{48}{64} = 1$, откуда $a^2 = 16$. Таким образом, искомое

уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$.

Задание 7 Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $y + 3 = 0$.

Решение. По теореме: Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету. Рассмотрим любую точку $M(x; y)$, принадлежащую эллипсу, используя условие, что $\frac{r}{d} = \varepsilon$, получим

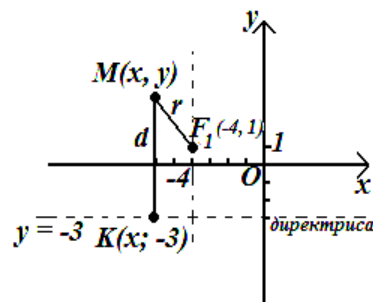


Рисунок 33

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2}}{\sqrt{(y+3)^2}} = \frac{1}{2}; 2\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(y+3)^2},$$

$$4(x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1) = y^2 + 6y + 9, 4x^2 + 32x + 3y^2 - 14y + 59 = 0.$$

Ответ: $4x^2 + 32x + 3y^2 - 14y + 59 = 0$.

Задание 8 Установить вид линии, которая определяется уравнением

$y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$ и изобразить ее.

Решение. $y + 7 = \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2} \Rightarrow y + 7 \geq 0 \Rightarrow y \geq -7$. Возведем в квадрат

правую и левую часть уравнения.

$$\frac{5}{2}(y + 7) = \sqrt{16 + 6x - x^2} \Rightarrow \frac{25}{4}(y + 7)^2 = 16 + 6x - x^2.$$

Перенесем переменную x в левую часть и выделим полный квадрат.

$$\frac{25}{4}(y + 7)^2 + x^2 - 6x = 16 \Rightarrow \frac{25}{4}(y + 7)^2 + (x - 3)^2 - 9 = 16,$$

$$\frac{25}{4}(y + 7)^2 + (x - 3)^2 = 25 \Rightarrow \frac{(y + 7)^2}{4} + \frac{(x - 3)^2}{25} = 1$$

Получили уравнения эллипса. Центр эллипса находится в точке $(3; -7)$.

$$\begin{cases} y + 7 = y', \\ x - 3 = x' \end{cases} \cdot \frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{4} = 1. \text{ Множеством точек, удовлетворяющих уравнению}$$

$y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$, является верхний полуэллипс, так как $y \geq -7$

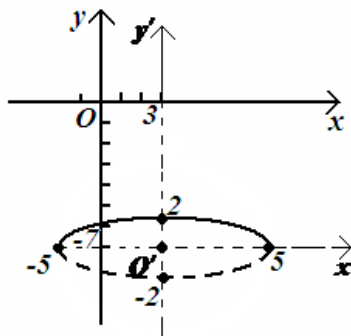


Рисунок 34

Задание 9 Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокус $F(3; 0)$ и уравнение соответствующей директрисы $x + y - 1 = 0$.

Решение. Точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу, если отношение расстояний до фокуса и соответствующей директрисы равно ε , т.е. $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

$$r = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}, d = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x - 3)^2 + y^2}}{\frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

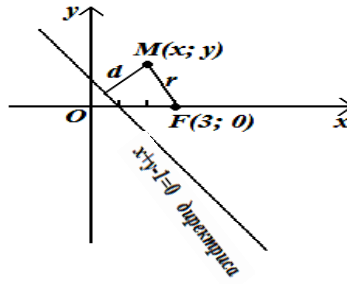


Рисунок 35

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x+y-1|, 8((x-3)^2 + y^2) = (x+y-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0.$$

Ответ: $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$.

Задание 10 Дано уравнение гиперболы $x^2 - 4y^2 = 16$. Найти:

- а) длины его полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет гиперболы; г) уравнения асимптот и директрис (изобразить кривую).

Решение. Разделив обе части уравнения на 16, приведем уравнение гиперболы

к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

а) длины его полуосей $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, т.е. $a = 4$, $b = 2$;

б) координаты фокусов. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим $c^2 = 4 + 16$, т.е. $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Координаты фокусов: $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(2\sqrt{5}; 0)$;

в) эксцентриситет гиперболы. По формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$ находим $\varepsilon = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

г) уравнения асимптот и директрис найдем по формулам $y_{1,2} = \pm \frac{b}{a}x$ и

$$x_{1,2} = \pm \frac{a}{\varepsilon}; y_{1,2} = \pm \frac{1}{2}x \text{ и } x_{1,2} = \pm \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

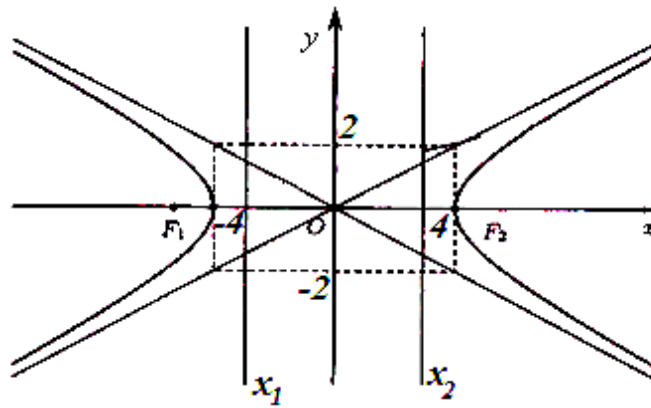


Рисунок 36

Задание 11 Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

Решение. Искомое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Согласно условию $2c = 10$, $c = 5$; $2b = 8$, $b = 4$. Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось a : $25 = a^2 + 16$, $a^2 = 9$, $a = 3$. Получаем $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ - уравнение гиперболы.

Ответ: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.

Задача 12 Найти уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2; 4)$ и $F_2(12; 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

Решение. Центр гиперболы лежит на прямой $y = 4$, параллельной оси Ox .

Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$. По условию $2b = 6$, $b = 3$.

Расстояние между фокусами равно 14, т.е. $2c = 14$, $c = 7$.

Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим a : $49 = a^2 + 9$, $a = 2\sqrt{10}$. Центр гиперболы делит расстояние между фокусами пополам. Поэтому, $x_0 = \frac{-2 + 12}{2} = 5$,

$$y_0 = \frac{4 + 4}{2} = 4.$$

Записываем уравнение гиперболы: $\frac{(x-5)^2}{40} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.

Ответ: $\frac{(x-5)^2}{40} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.

Задание 13 Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Найдем отношение $\frac{b}{a}$, воспользовавшись формулами $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ и

условием $\varepsilon = 2$: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Отсюда $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1$, т.е. $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$

. Имеем: $\frac{b}{a} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Следовательно, уравнения асимптот гиперболы есть $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}x$. Угол φ между асимптотами найдем через угловые коэффициенты по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - 3} \right| = \sqrt{3}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Ответ: $\varphi = 60^\circ$.

Задание 14 Дан эллипс $5x^2 + 8y^2 = 40$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса, а фокусы гиперболы – в вершинах данного эллипса.

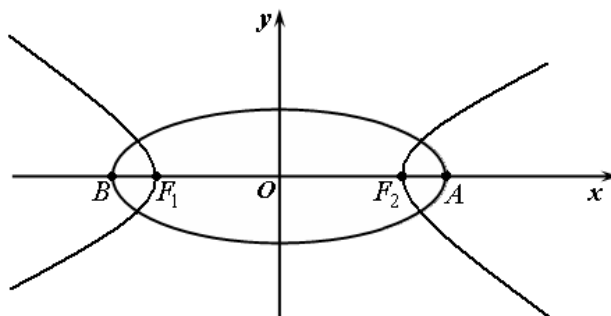


Рисунок 37

Решение. Найдем координаты вершин A и B и фокусов эллипса, записав его уравнение в канонической форме $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Имеем $a^2 = 8$, $a = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 5$, $b = \sqrt{5}$.

Из соотношения $c^2 = a^2 - b^2$ находим c : $c^2 = 8 - 5$, $c = \sqrt{3}$. Можно записать: $A(2\sqrt{2}; 0)$, $B(-2\sqrt{2}; 0)$, $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$. Обозначим через a_r , b_r , c_r – соответственно полуоси гиперболы и половину расстояния между ее фокусами.

Тогда, согласно условиям задачи, можно записать: $a_r = OF_2$, т.е. $a_r = \sqrt{3}$ и $c_r = OA$, т.е. $c_r = 2\sqrt{2}$. Из соотношения $c_r^2 = a_r^2 + b_r^2$ находим $8 = 3 + b_r^2$, поэтому $b_r^2 = 5$,

$b_r = \sqrt{5}$. Подставляя найденные значения a_r и b_r в уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, находим

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ – искомое уравнение гиперболы.

Ответ: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Задание 15 Дано уравнение гиперболы $36(x-1)^2 - 64(y+2)^2 = -2304$. Найти:

а) длины его полуосей; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет гиперболы; г) уравнения асимптот и директрис; д) сделать чертеж.

Решение. $36(x-1)^2 - 64(y+2)^2 = -2304 : (-2304)$,

$$-\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{64} = 1,$$

$x-1 = x'$, $y+2 = y' \Rightarrow \frac{(y')^2}{36} - \frac{(x')^2}{64} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы.

Центр гиперболы находится в точке $T(1; -2)$.

а) длины полуосей гиперболы. $a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$; $b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$.

б) Так как $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow c = 10$, тогда координаты фокусов $F_1'(0; 10)$ и $F_2'(0; -10)$.

в) эксцентриситет гиперболы. $\varepsilon = \frac{c}{b} \Rightarrow \varepsilon = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} > 1$

г) уравнения асимптот и директрис: $y_{1,2} = \pm \frac{b}{a}x$, $y_{1,2} = \pm \frac{3}{4}x$ – уравнения асимптот.

$$y_{1,2} = \pm \frac{b}{\varepsilon} \quad y_{1,2} = \pm \frac{6}{\frac{5}{3}}; \quad y_{1,2} = \pm \frac{18}{5} - \text{уравнения директрис.}$$

д) сделать чертеж:

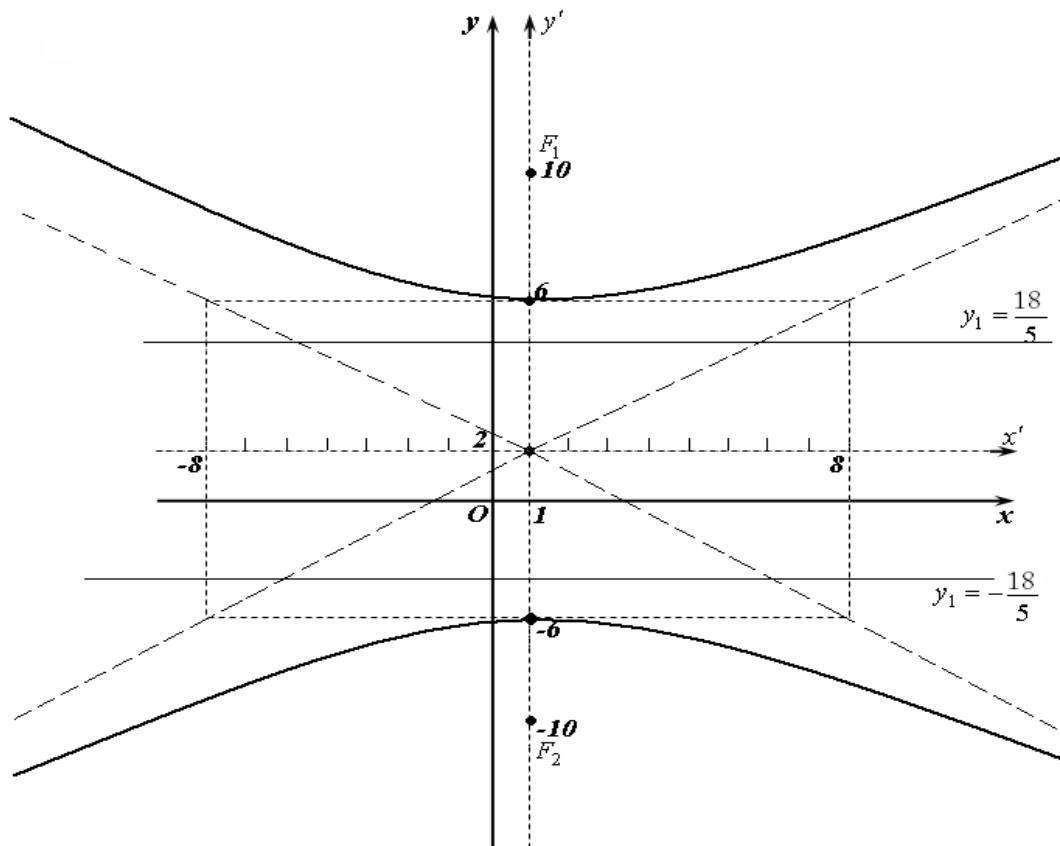


Рисунок 38

Задание 16 Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус $F(2; -3)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x - y + 3 = 0$.

Решение. При решении используем теорему: отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету.

Так как точка $M(x; y)$ принадлежит гиперболе, то $\frac{r}{d} = \varepsilon$, где r – расстояние от точки $M(x; y)$ до $F(2; -3)$, d – расстояние от точки $M(x; y)$ до прямой

$$3x - y + 3 = 0. \quad \text{Таким образом} \quad r = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}; \quad d = \frac{|3x - y + 3|}{\sqrt{10}}.$$

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}}{\frac{|3x - y + 3|}{\sqrt{10}}} = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{10} \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{5} |3x - y + 3|.$$

$$10((x-2)^2 + (y+3)^2) = 5(3x - y + 3)^2 \quad |:5,$$

$$2(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9) = 9x^2 + y^2 + 9 - 6xy + 18x - 6y,$$

$$2x^2 - 8x + 2y^2 + 12y + 26 - 9x^2 - y^2 + 6xy - 18x + 6y - 9 = 0,$$

$$-7x^2 + y^2 + 6xy - 26x + 18y + 17 = 0, \quad 7x^2 - y^2 - 6xy + 26x - 18y - 17 = 0$$

$$\text{Ответ: } 7x^2 - y^2 - 6xy + 26x - 18y - 17 = 0.$$

Задание 17 Установить и нарисовать линию, которая определяется уравнением $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

$$\text{Решение. } x - 5 = -\frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12} \Rightarrow x - 5 \leq 0 \Rightarrow x \leq 5.$$

$$\text{Возведем в квадрат обе части равенства } (x-5)^2 = \frac{9}{16}(y^2 + 4y - 12) \cdot \frac{16}{9},$$

$$\frac{16}{9}(x-5)^2 = (y+2)^2 - 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9}(x-5)^2 - (y+2)^2 = -16 \quad |:(-16)$$

$$-\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

Уравнение гиперболы, центр в точке $(5; -2)$.

$$\begin{cases} x-5 = x', \\ y+2 = y' \end{cases} \Rightarrow \frac{(y')^2}{16} - \frac{(x')^2}{9} = 1.$$

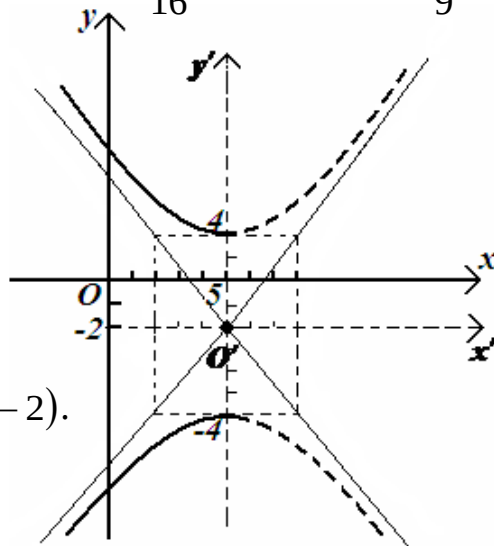


Рисунок 39

Множеством точек удовлетворяющих условию $x \leq 5$

и уравнению $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$ является часть гиперболы изображенная на рисунке 39 (сплошной линией).

Задание 18 Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4; 4)$.

Решение. Парабола задана каноническим уравнением: $x^2 = 4y$. Следовательно, $2p = 4$, $p = 2$.

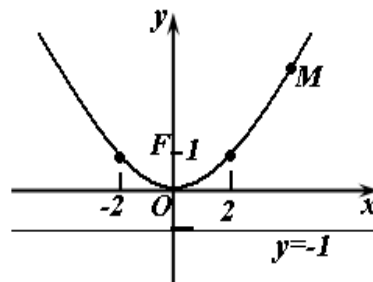


Рисунок 40

Используя формулы: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$; уравнение директрисы l параболы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$; фокальный радиус вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$. Таким образом, фокус имеет координаты $F(0; 1)$; уравнение директрисы: $y = -1$; фокальный радиус точки $M(4; 4)$ равен $r = 4 + 1 = 5$.

Ответ: $F(0; 1)$, $y + 1 = 0$.

Задание 19 Найдите вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$. Постройте эскиз параболы.

Решение. Преобразуем уравнение $y = -2x^2 + 8x - 5$, выделив в правой части полный квадрат:

$$y = -2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = -2\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2}\right) =$$

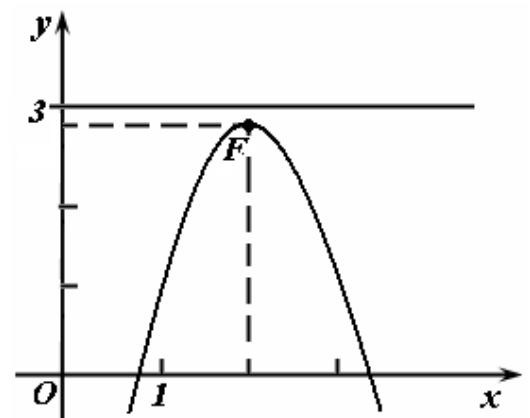


Рисунок 41

$$= -2\left((x-2)^2 - \frac{3}{2}\right) = -2(x-2)^2 + 3, \text{ т.е. } y = -2(x-2)^2 + 3 \text{ или}$$

$$(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-3) - \text{уравнение параболы с вершиной в точке } (2; 3): 2p = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{4}.$$

Прямая $x-2=0$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x=2$, $y=3-\frac{1}{8}=2\frac{7}{8}$, т.е. $F\left(2; 2\frac{7}{8}\right)$. Уравнение директрисы $y=3+\frac{p}{2}=3+\frac{1}{8}$, т.е. $y=3\frac{1}{8}$.

График изображен на рисунке 41.

$$\text{Ответ: } (2; 3), F\left(2; 2\frac{7}{8}\right), y - \frac{25}{8} = 0.$$

Задание 20 Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

Решение. Точка $M(x; y)$ лежит на параболе, если она M равноудалена от фокуса $F(2; -1)$ и директрисы $x - y - 1 = 0$.

Таким образом, точка M лежит на параболе, если $r = d$:
 $r = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$ и $d = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$.

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = |x-y-1|,$$

Возведем в квадрат правую и левую части уравнения.

$$2((x-2)^2 + (y+1)^2) = (x-y-1)^2 \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1) =$$

$$= x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y,$$

$$2x^2 - 8x + 2y^2 + 4y + 10 = x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1,$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 9 = 0.$$

$$\text{Ответ: } x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 9 = 0.$$

Задание 21 Изобразите линию, которая определяется уравнением:
 $y = -5 + \sqrt{-3x + 21}.$

Решение. $y+5=\sqrt{-3x+21}\Rightarrow y+5\geq 0\Rightarrow y\geq -5$.

$(y+5)^2=-3x-21$, Получили уравнение параболы в каноническом виде, центр которой находится в точке $(-7; -5)$.

$$(y+5)^2=-3(x+7)$$

$$\begin{cases} y+5=y', \\ x+7=x' \end{cases} \Rightarrow (y')^2=-3x'. \text{ Так как } y\geq -5,$$

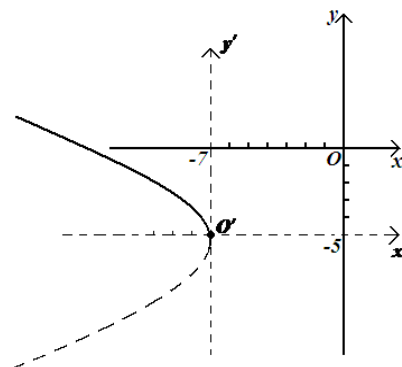


Рисунок 42

то множество точек удовлетворяющих уравнению: $y=-5+\sqrt{-3x+21}$ изображают часть параболы.

Задание 22 Построить кривую $r=\alpha\cos 2\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

Решение. Будем давать значения полярному углу φ от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$ через промежуток $\alpha=\frac{\pi}{8}$ и вычислим соответствующие значения r . Найденные значения поместим в таблицу. Примем произвольный отрезок при построении r . По значениям r и φ из таблицы построим точки, соответствующие каждой паре чисел r и φ , и соединим их плавной линией.

φ	2φ	$r=\alpha\cos 2\varphi$
0	0	a
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	π	$-a$
$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$

φ	2φ	$r=\alpha\cos 2\varphi$
$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	0
$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	3π	$-a$
$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	0

$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	2π	a

$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	4π	a

Полученная кривая называется четырехлепестковой розой.

Теперь найдем уравнение четырехлепестковой розы в прямоугольной системе координат. Причем напомним, что начало прямоугольной системы координат помещено в полюс полярной системы координат, а ось абсцисс направлена вдоль полярной оси.

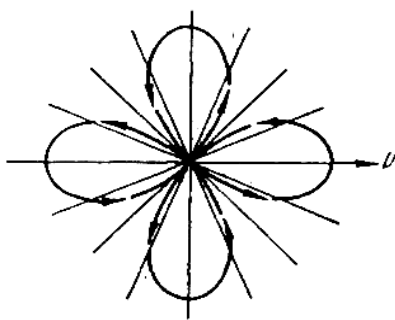


Рисунок 43

Учитывая, что $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$, уравнение четырехлепестковой розы $r = a \cos 2\varphi$ перепишем в виде $r = a(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$. Подставляя сюда формулы перехода, получим

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = a \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \text{ или } \pm \sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда $\pm \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$.

Задание 23 Привести к каноническому виду уравнение кривой $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$, изобразить кривую и найти координаты центра в первоначальной системе координат.

Решение. Дано уравнение кривой в общем виде $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Выведем формулы преобразования. Начнем с поворота осей. Целью данного преобразования является уничтожение в преобразованном уравнении члена, содержащего произведение текущих координат. Формулы преобразования координат поворотом осей без изменения начала координат имеют вид
$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases}$$

Подставляя эти значения x и y в заданное уравнение, будем иметь:

$$A(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)^2 + B(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) \cdot (x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + \\ + C(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi)^2 + D(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) + E(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + F = 0.$$

Раскроем скобки и получим:

$$Ax_1^2 \cos^2 \varphi - 2Ax_1y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + Ay_1^2 \sin^2 \varphi + Bx_1^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \\ - Bx_1y_1 \sin^2 \varphi + Bx_1y_1 \cos^2 \varphi - By_1^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + Cx_1^2 \sin^2 \varphi + \\ + 2Cx_1y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + Cy_1^2 \cos^2 \varphi + Dx_1 \cos \varphi - Dy_1 \sin \varphi + Ex_1 \sin \varphi + Ey_1 \cos \varphi + F = 0.$$

Сделаем приведение подобных членов:

$$(A \cos^2 \varphi + B \sin \varphi \cdot \cos \varphi + C \sin^2 \varphi)x_1^2 + ((2C - 2A) \sin \varphi \cdot \cos \varphi - B \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi)x_1y_1 + \\ + (A \sin^2 \varphi - B \sin \varphi \cdot \cos \varphi + C \cos^2 \varphi)y_1^2 + (D \cos \varphi + E \sin \varphi)x_1 + \\ + (E \cos \varphi - D \sin \varphi)y_1 + F = 0. \quad (*)$$

Выберем теперь угол поворота φ так, чтобы коэффициент при x_1y_1 обратился в нуль. Приравнявая этот коэффициент нулю, получаем уравнение для определения значения угла φ , при котором этот коэффициент обратится в нуль: $(2C - 2A) \sin \varphi \cdot \cos \varphi - B \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi = 0$.

Разделим обе части этого уравнения на $\cos^2 \varphi$ ($\cos \varphi \neq 0$, так как если $\cos \varphi = 0$, то $\sin \varphi = \pm 1$, и тогда это уравнение не имеет места, ибо получается, что $B = 0$. Это замечание следует помнить и при решении последующих задач). После деления получим

$$(2C - 2A) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} - B \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + B = 0 \quad (-1), \quad B \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + 2(A - C) \operatorname{tg} \varphi - B = 0.$$

Решая квадратное уравнение получим два значения $\operatorname{tg}_1 \varphi$ и $\operatorname{tg}_2 \varphi$.

Теперь перейдем к нашему примеру, учитывая $A = 5$, $B = 4$, $C = 8$:

$2\operatorname{tg}^2 \varphi - 3\operatorname{tg} \varphi - 2 = 0$. Отсюда получаем для тангенса угла φ поворота координатных

осей такие значения: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$ или $(\operatorname{tg} \varphi)_1 = 2$ и $(\operatorname{tg} \varphi)_2 = -\frac{1}{2}$. Эти два

значения $\operatorname{tg} \varphi$ соответствуют двум взаимно-перпендикулярным направлениям, так как произведение этих тангенсов равно -1 . Из $(\operatorname{tg} \varphi)_1 = 2$ следует, что угол поворота

φ может находиться в первой или третьей четвертях, а из $(\operatorname{tg} \varphi)_2 = -\frac{1}{2}$ следует, что

угол поворота φ может находиться во второй или четвертой четвертях. Условимся всегда брать для $\operatorname{tg} \varphi$ из двух возможных значений – положительное, а угол

поворота φ – в первой четверти $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, из двух возможных

значений тангенса берем $(\operatorname{tg} \varphi)_1 = 2$. Определим по известному $\operatorname{tg} \varphi$ величину $\sin \varphi$ и

$\cos \varphi$. Это нам нужно для того, чтобы определить коэффициенты при x_1^2 , y_1^2 , x_1 и y_1 в уравнении (*).

Так как у нас $\operatorname{tg} \varphi > 0$, а угол φ находится в первой четверти, то по известному $\operatorname{tg} \varphi$ функции $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ могут быть определены следующим

образом: $\sin \varphi = +\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$, $\cos \varphi = +\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$. Из этого следует, что $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin^2 \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos^2 \varphi = \frac{1}{5}$, $\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{2}{5}$. При найденных значениях

$\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ коэффициент при x_1^2 равен 9, коэффициент при $x_1 y_1$ – нулю,

коэффициент при y_1^2 равен 4, коэффициент при x_1 равен $-\frac{144}{\sqrt{5}}$, а коэффициент при

y_1 равен $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим

$$9\left(x_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1\right) + 4\left(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 80 = 0.$$

Выделяя в скобках полные квадраты, имеем

$$9\left[\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64}{5}\right] + 4\left[\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] + 80 = 0,$$

откуда $9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5} + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 80 = 0$, или

$$9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36. \quad (**)$$

Введем обозначения: $x_2 = x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}$; $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$; из сравнения с формулами

(**) заключаем, что $x_0 = +\frac{8}{\sqrt{5}}$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а уравнение (**) перепишем

$9x_2^2 + 4y_2^2 = 36$. После деления обеих частей равенства на 36 получим данное

уравнение в каноническом виде: $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1$.

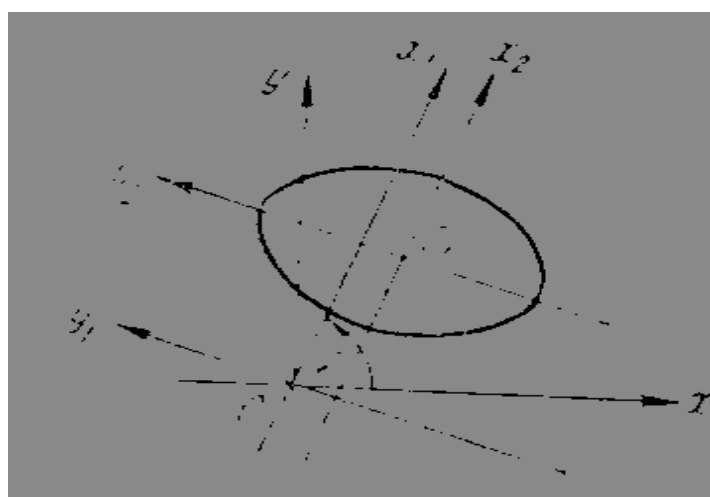


Рисунок 44

Итак, данное уравнение определяет эллипс, он вытянут вдоль оси O_1y_2 .

Ответ: $x_0 = +\frac{8}{\sqrt{5}}$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

Ответ: 5 и 4; (3; 0) и (-3; 0); $\varepsilon = 0,6$; $x_{1,2} = \pm \frac{25}{3}$.

Задание 2 Составить каноническое уравнение эллипса если:

а) его большая полуось равна 10 и фокусы есть $F_1(-6; 0)$, $F_2(10; 0)$;

б) $a = 5$, $F_1(-3; 5)$, $F_2(3; 5)$;

в) задана точка $M_1(2\sqrt{3}; 1)$ эллипса и его малая полуось равна 2;

г) заданы две точки эллипса $M_1(0; 7)$ и $M_2(8; 0)$;

д) эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{25}$ и заданы фокусы $F_1(7; 0)$ и $F_2(-7; 0)$;

е) точка $M(3; -2\sqrt{3})$ принадлежит эллипсу, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

к) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5.

Ответ: а) $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; г)

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1$; е) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$, е) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; к) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

Задание 3 Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить кривую $x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 43 = 0$.

Ответ: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$.

Задание 4 Установить и изобразить линию, которая определяется следующими уравнениями: а) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$; б) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$.

Задание 5 Точка $M_1(2; -1)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(1; 0)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 10 = 0$. Составить уравнение этого эллипса.

Ответ: $17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0$.

Задание 6 Найти каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox :

а) $2c = 10$, $a = 3$; б) $c = 3$, $\varepsilon = 1,5$; в) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$; г) $\varepsilon = \frac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$; д) проходящей через точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; -2\sqrt{2})$.

Ответ: а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$;

г) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; д) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Задание 7 Найти уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, зная, что ее мнимая полуось равна 2 и гипербола проходит через точку $M\left(4; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Найти расстояние от точки M до правого фокуса.

Ответ: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задание 8 Составить уравнения асимптот гиперболы $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$, построить ее.

Ответ: $3x - 4y - 18 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

Задание 9 Приведите уравнение кривой $25x^2 - 4y^2 - 150x - 8y + 321 = 0$ к каноническому виду и изобразите данную кривую.

Ответ: $\frac{(y+1)^2}{25} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.

Задание 10 Точка $M_1(1; -2)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F(-2; 2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

Ответ: $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$.

Задание 11 Установить и изобразить линию, которая определяется следующим уравнением: а) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$; б) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$.

Задание 12 Даны вершина параболы $A(6; -3)$ и уравнение ее директрисы $3x - 5y + 1 = 0$. Найти фокус F этой параболы.

Ответ: $F(9; -8)$.

Задание 13 Установить и изобразить линию, которая определяется уравнением: а) $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$; б) $y = -2 + 4\sqrt{x - 1}$.

Задание 14 Приведите уравнение кривой $x^2 - 8x + 3y + 22 = 0$ к каноническому виду и построить ее.

Ответ: $(x - 4)^2 = -3(y + 2)$.

Задание 15 Привести уравнение кривой к каноническому виду и нарисовать кривую: $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$.

Ответ: Кривая – гипербола, ее каноническое уравнение $\frac{y_2^2}{1} - \frac{x_2^2}{4} = 1$.

Задание 16 Привести уравнение кривой к каноническому виду $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$.

Ответ: Кривая – парабола, ее каноническое уравнение $y_2^2 = 2\sqrt{2}x_2$.

Задание 17 Привести уравнение кривой к каноническому виду $8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$.

Ответ: Кривая – эллипс, его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{81} + \frac{y_2^2}{36} = 1$.

Задание 18 Построить кривую $r = 4\cos 3\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольных координатах при условии, что начало прямоугольных координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью.

Ответ: $(x^2 + y^2)^2 = 4x(x^2 - 3y^2)$ – трехлепестковая роза.

Задание 19 Построить спираль Архимеда $r = a\varphi$ ($a > 0$).

Задание 20 Построить кардиоиду $r = 2a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$).

Задание 21 Построить гиперболическую спираль $r = \frac{k}{\varphi}$ ($k > 0$).

6 Поверхности второго порядка

6.1 Вопросы для самоподготовки

1 Запишите каноническое уравнение однополостного гиперболоида и изобразите его.

2 Какую поверхность определяет уравнение $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 4$?

3 Запишите каноническое уравнение двуполостного гиперболоида и изобразите его.

4 Сформулируйте определение сферы, запишите каноническое уравнение сферы и изобразите ее.

5 Однополостный гиперболоид рассекаем плоскостью $x = 0$. Какая кривая будет в сечении?

6 Сформулируйте определение цилиндрической поверхности.

7 Какую поверхность определяет уравнение $(x - 1)^2 - (y + 3)^2 + (z - 8)^2 = 0$?

8 Запишите каноническое уравнение эллиптического параболоида и изобразите его.

9 Запишите каноническое уравнение гиперболического цилиндра и изобразите его.

10 Запишите каноническое уравнение параболического цилиндра и изобразите его.

11 Двуполостный гиперболоид рассекаем плоскостью $y = 0$. Какая кривая будет в сечении?

12 Круговой цилиндр рассекаем плоскостью $z = 0$. Какая кривая будет в сечении?

13 Запишите каноническое уравнение конуса и изобразите его.

14 Какую поверхность определяет уравнение $(x + 3)^2 - (y - 3)^2 + (z - 7)^2 = 1$?

15 Какую поверхность определяет уравнение $(x + 6)^2 - (y + 3)^2 - (z - 1)^2 = 16$?

16 Эллиптический параболоид рассекаем плоскостью $y = 0$. Какая кривая будет в сечении?

17 Гиперболический параболоид рассекаем плоскостью $z = 0$. Какая кривая будет в сечении?

18 Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?

19 Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

20 Какую поверхность определяет уравнение $z^2 = 2py$?

6.2 Практическое занятие

Задание 1 Определить координаты центра сферы и ее радиус:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к виду:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \quad x^2 - 6x + y^2 + 8y + z^2 + 10z + 25 = 0.$$

Сгруппировав переменные, выделим полные квадраты относительно переменных:

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 + (z+5)^2 - 25 + 25 = 0.$$

Приведем подобные слагаемые и получим уравнение:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 - 25 = 0; (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25.$$

Каноническое уравнение сферы, центр которой находится в точке с координатами $C(3;-4;-5)$ и радиусом $R=5$.

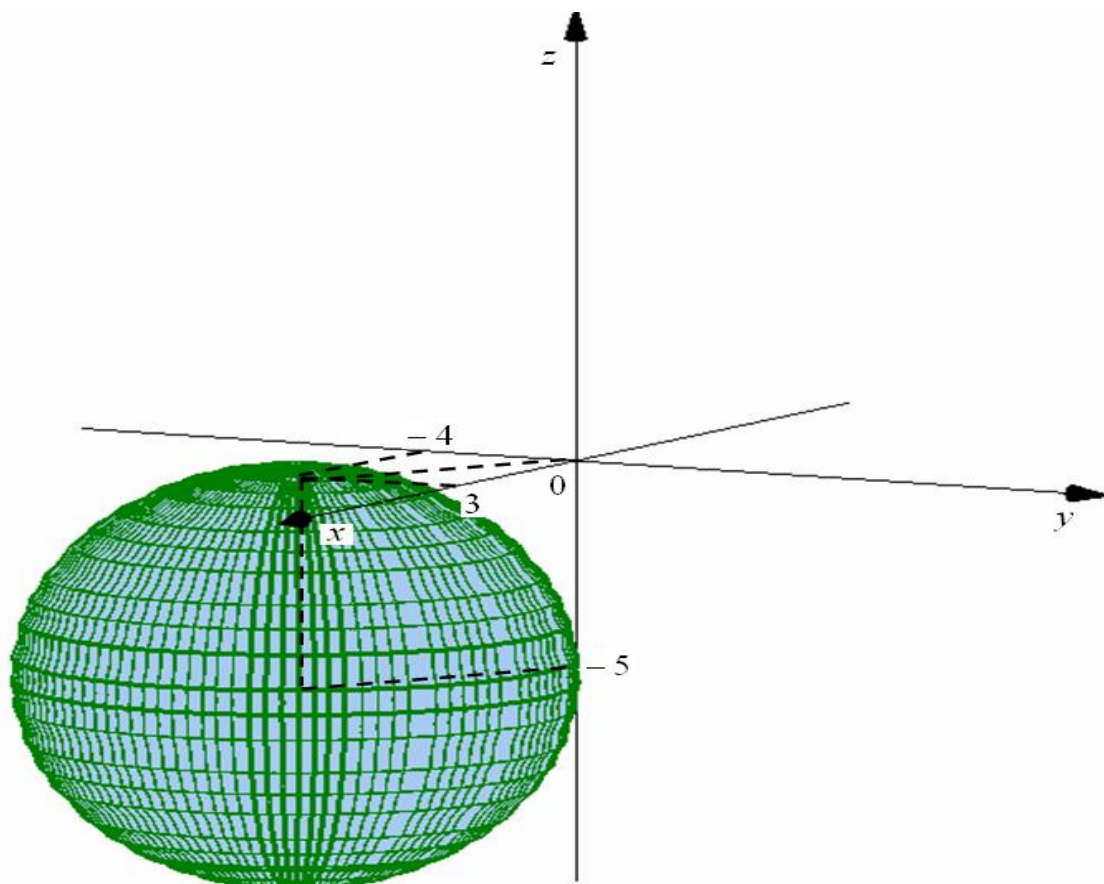


Рисунок 45

Ответ: Центр сферы в точке с координатами $(3;-4;-5)$ и $R=5$.

Задание 2 Составить уравнение сферы радиуса $R=3$ с центром в точке $C(-1;2;-3)$.

Решение. Подставляя в уравнение сферы $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, $a=-1$, $b=2$, $c=-3$ и $R=3$, будем иметь $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$, или $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$.

Ответ: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$.

Задание 3 Изобразить поверхность $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$.

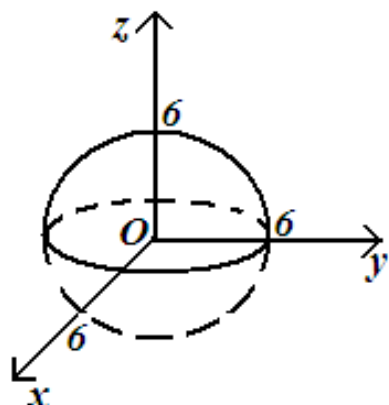


Рисунок 46

Решение. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} : z \geq 0$. Возведем в квадрат правую и левую части равенства и перенесем переменные в одну сторону, $z^2 = 36 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$. Получили каноническое уравнение сферы с центром в точке $(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 6$. Так как $z \geq 0$, то искомой поверхностью является верхняя полусфера.

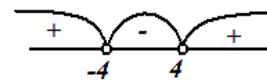
Задание 4 Изобразить поверхность $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 64$, исследовав ее методом параллельного сечения.

Решение. Приведем данное уравнение $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 64$ к каноническому виду: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ т.е. разделим правую и левую части исходного уравнения на 64 и получи: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$.

1) Рассмотрим сечение данной поверхности плоскостями $x = |h|$, параллельными плоскости zOy .

Раскроем модуль: $x = \pm h$. Тогда уравнение запишется в виде:

$$\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{h^2}{16} \Rightarrow \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = \frac{16 - h^2}{16}.$$



$$\text{ОДЗ: } 1 - \frac{h^2}{16} > 0 \Rightarrow \frac{16 - h^2}{16} > 0 \Rightarrow 16 - h^2 > 0 \Rightarrow h^2 - 16 < 0 \Rightarrow h \in (-4; 4).$$

Разделим правую и левую части уравнения на $\frac{16 - h^2}{16}$, получим:

$$\frac{y^2}{4(16 - h^2)} + \frac{z^2}{16 - h^2} = 1.$$

В сечении эллипсоида данными плоскостями, мы будем получать эллипсы разных полуосей.

Причем, при $h = 0$ мы получим эллипс, который имеет максимальное значение полуосей: $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$.

При $h \in (0; 4)$ и $h \in (-4; 0)$ значение полуосей будет уменьшаться.

При $1 - \frac{h^2}{16} = 0$ получаем систему уравнений
$$\begin{cases} h = \pm 4, \\ \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 0. \end{cases}$$

Данной системе уравнений удовлетворяют точки с координатами $(4; 0; 0)$ и $(-4; 0; 0)$. В данных точках $(4; 0; 0)$ и $(-4; 0; 0)$ эллипсоид пересекает ось Ox .

2) Рассмотрим сечение поверхности плоскостями $y = |h|$, параллельными плоскости xOz .

Раскроем модуль: $y = \pm h$. Следовательно, исходное уравнение примет вид:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{h^2}{64}.$$

Аналогично первому случаю находим ОДЗ. ОДЗ: $h \in (-8; 8)$.

Разделим обе части уравнения на $\frac{64 - h^2}{64}$, получаем:
$$\frac{x^2}{16 - \frac{h^2}{4}} + \frac{z^2}{4 - \frac{h^2}{16}} = 1.$$

В сечении эллипсоида данными плоскостями, мы будем получать эллипсы разных полуосей. Причем, при $h = 0$ мы получим эллипс, который имеет максимальное значение полуосей: $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$.

При $h \in (0; 8)$ и $h \in (-8; 0)$ значение полуосей будет уменьшаться.

При $1 - \frac{h^2}{64} = 0$, (решая аналогично 1), получаем две точки с координатами $(0; -8; 0)$ и $(0; 8; 0)$. В данных точках $(0; -8; 0)$ и $(0; 8; 0)$ эллипсоид пересекает ось Oy .

3) Рассмотрим сечение поверхности плоскостями $z = |h|$, параллельными плоскости xOy .

Раскроем модуль: $z = \pm h$. Значит исходное уравнение примет вид:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1 - \frac{h^2}{4}.$$

ОДЗ: $h \in (-2; 2)$. После деления данного уравнения на правую часть получим уравнение: $\frac{x^2}{4(4-h^2)} + \frac{y^2}{16(4-h^2)} = 1$, при $1 - \frac{h^2}{4} > 0$

В сечении эллипсоида данными плоскостями, мы будем получать эллипсы разных полуосей. Причем, при $h = 0$ мы получим эллипс, который имеет максимальное значение полуосей: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$.

При $h \in (0; 2)$ и $h \in (-2; 0)$ значение полуосей будет уменьшаться.

При $1 - \frac{h^2}{4} = 0$ мы получим две точки с координатами $(0; 0; -2)$ и $(0; 0; 2)$. В данных точках $(0; 0; -2)$ и $(0; 0; 2)$ эллипсоид пересекает ось Oz .

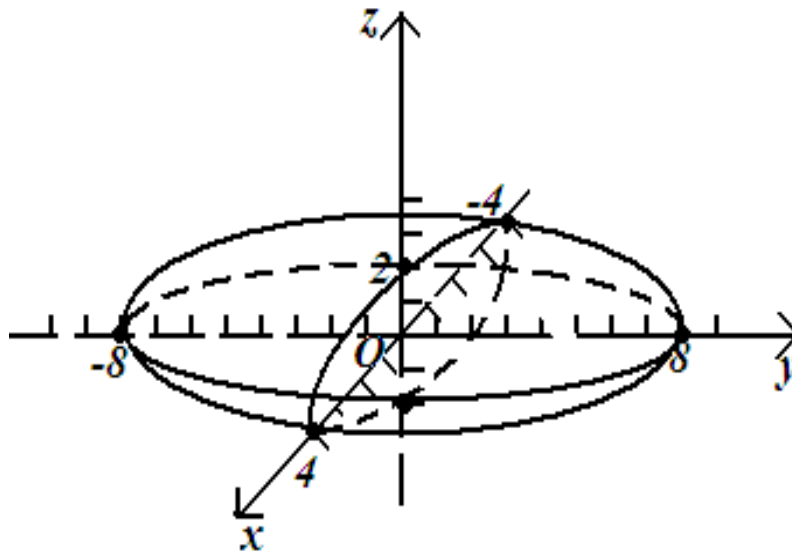


Рисунок 47

Задание 5 Вывести уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых до двух данных точек $F_1(0; -5; 0)$ и $F_2(0; 5; 0)$ есть величина постоянная равная 6.

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ в пространстве R^3 . Тогда

$$|MF_1| = \sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2}; \quad |MF_2| = \sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2}.$$

Так как разность расстояний до двух данных точек $F_1(0; -5; 0)$ и $F_2(0; 5; 0)$ есть величина постоянная равная 6, то имеем следующее выражение

$$\left| \sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} \right| = 6.$$

Раскроем модуль и возведем в квадрат левую и правую части равенства.

$$\sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2} = \pm 6 + \sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2},$$

$$x^2 + (y+5)^2 + z^2 = 36 \pm 12\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} + x^2 + (y-5)^2 + z^2.$$

Упростим данное равенство и корень квадратный перенесем в левую часть, а все остальное в правую часть.

$$\pm 12\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} = 36 - 20y \quad |:4.$$

$$\pm 3\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} = 9 - 5y.$$

Еще раз возведем в квадрат левую и правую части равенства.

$$9(x^2 + (y-5)^2 + z^2) = 81 - 90y + 25y^2.$$

Раскроем скобки, упростим выражение и приведем к каноническому виду.

$$9x^2 - 16y^2 + 9z^2 = -144 \quad |:144,$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1 \text{ - двуполостный гиперболоид.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1.$$

Задание 6 Изобразить тело, которое определяется следующим соотношением

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36.$$

Решение. Уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ определяют сферы с общим центром в точке с координатами $(0; 0; 0)$ и радиусами $R_1 = 2$, $R_2 = 6$ соответственно. Множество точек пространства, которые равноудалены от точки $(0; 0; 0)$ на расстояние не менее 2 и не более 6 будут удовлетворять данному двойному неравенству.

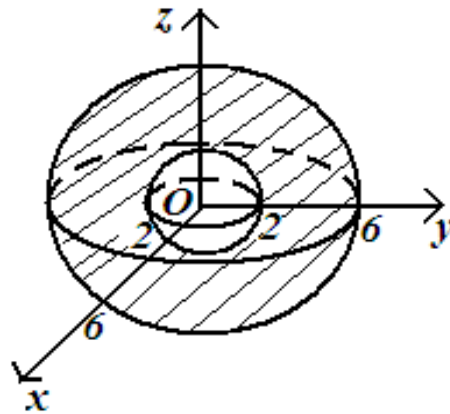


Рисунок 48

Задание 7 Найдите уравнения линии пересечения поверхностей $z = 2 - x^2 - y^2$ и $z = x^2 + y^2$.

Решение. Данные уравнения определяют круговой параболоид. Для нахождения линии пересечения составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ 2 - x^2 - y^2 = z \end{cases} &\Rightarrow x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 2 : 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Получили уравнения окружности с центром в точке $(0; 0)$ и $R=1$, которая находится в плоскости $z - 1 = 0$. Таким образом, в плоскости $z - 1 = 0$ две поверхности пересекаются по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

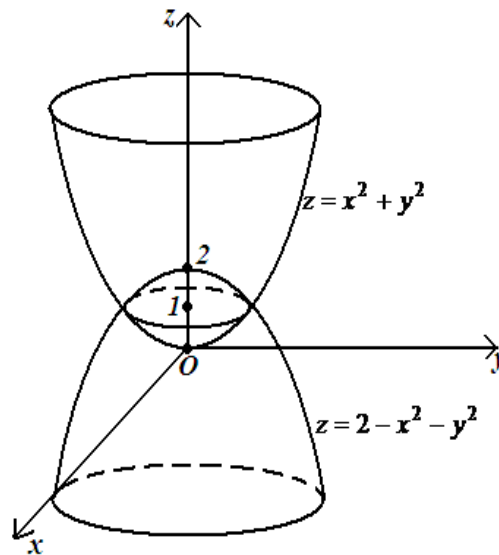


Рисунок 49

Задание 8 По какой линии пересекается конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ с плоскостью $y = 2$?

Решение. Составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ y = 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4 - 2z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2z^2 = -4 \quad | :(-4) \Rightarrow \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1. \text{ Данное}$$

уравнение в плоскости $y - 2 = 0$ определяет гиперболу.

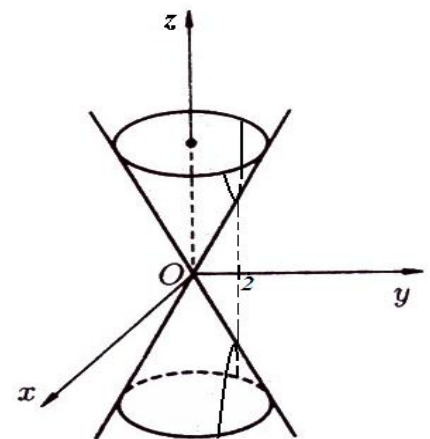


Рисунок 50

Задание 9 Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$?

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0, \text{ следовательно,}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

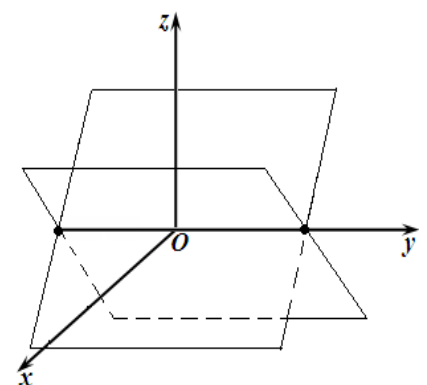


Рисунок 51

Каждое из этих уравнений определяет плоскость, проходящую через ось Oy , причем ось Oy является прямой пересечения этих плоскостей. Данное уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ является пересечением двух плоскостей.}$$

Задание 10 Какие поверхности определяются уравнениями:

1) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$;

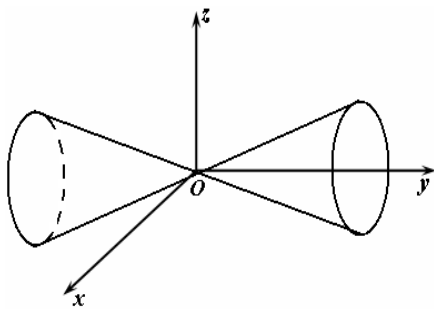


Рисунок 52

2) $x = z^2 + y^2$;

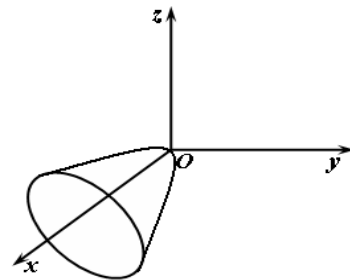


Рисунок 53

3) $y^2 + z^2 - \frac{x^2}{4} = 0$;

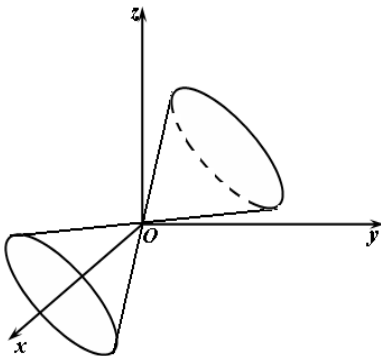


Рисунок 54

4) $\frac{x^2 + z^2}{6} - \frac{y^2}{4} = -1$;

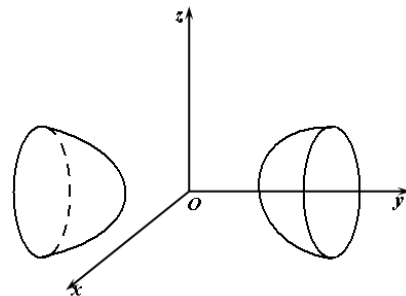


Рисунок 55

$$5) \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{1} - 1 = 0;$$

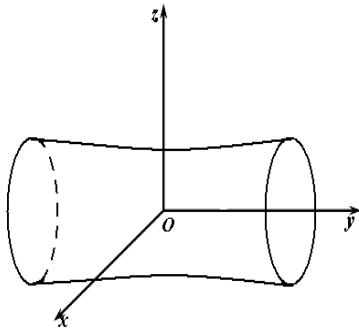


Рисунок 56

$$6) -x^2 + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{7} = 1;$$

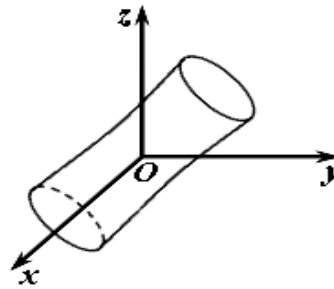


Рисунок 57

$$7) z = -\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1}\right);$$

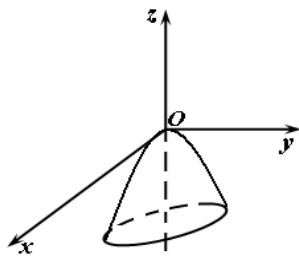


Рисунок 58

$$8) z = x^2 - y^2.$$

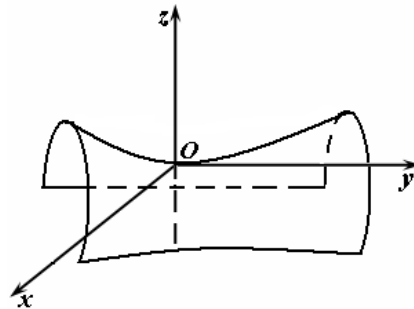


Рисунок 59

Ответ:

- 1) Круговой конус, осью которого является ось Oy .
- 2) Круговой параболоид, осью которого является ось Ox .
- 3) Круговой конус, осью вращения которого совпадает с осью Ox .
- 4) Двуполостный гиперboloид вращения, ось вращения которого совпадает с осью Oy .
- 5) Однополостный гиперboloид, ось которого совпадает с осью Oy .
- 6) Однополостный гиперboloид, ось которого совпадает с осью Ox .
- 7) Эллиптический параболоид.
- 8) Гиперboloид вращения.

Задание 11 Какие поверхности определяют уравнения:

1) $x^2 + z^2 = 16$; 2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $x = 2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Решение. Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z , определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу; 4) гиперболу.

В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy , так как эти уравнения не содержат переменной y . Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 16$ - уравнение прямого кругового цилиндра;

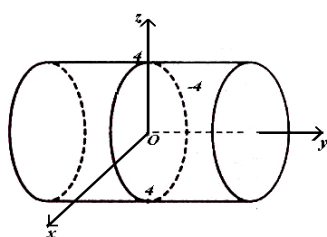


Рисунок 60

2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ - уравнение эллиптического цилиндра;

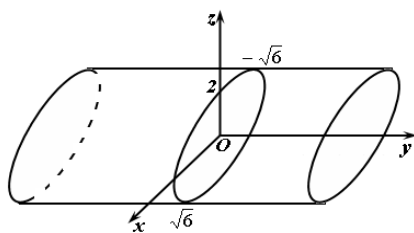


Рисунок 61

3) $x = 2z^2$ - уравнение параболического цилиндра;

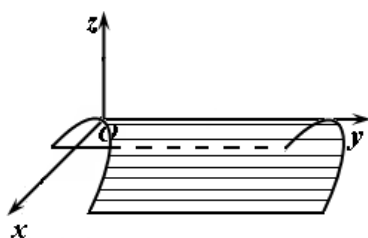


Рисунок 62

4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$ - уравнение гиперболического цилиндра.

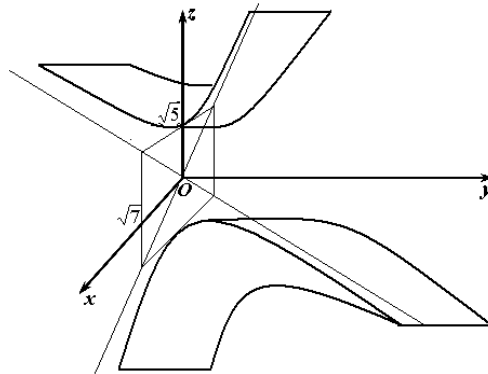


Рисунок 63

Задание 12 Установите, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y + 2 = 0, \\ z - 5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$

Решение. 1) Уравнение $x = 0$ определяет плоскость zOy , а уравнение $y = 0$ определяет плоскость xOz . Пересечением данных двух плоскостей zOy и xOz является ось аппликат;

2) Уравнение $x - 2 = 0$ определяет плоскость параллельную плоскости zOy и отстоящую от нее на расстояние равное 2, а уравнение $y = 0$ определяет плоскость xOz . Пересечением данных двух плоскостей прямая, проходящая через точку $(2; 0; 0)$ и параллельная оси Oy ;

3) Уравнение $y + 2 = 0$ определяет плоскость параллельную плоскости zOx и отстоящую от нее на расстояние равное 2, а уравнение $z - 5 = 0$ определяет плоскость параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние равное 5. Пересечением данных двух плоскостей является прямая, проходящая через точку $(0; -2; 5)$ и параллельная оси Ox ;

4) Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 20$ определяет сферу с центром в точке с координатами $O(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 2\sqrt{5}$, а уравнение $z - 2 = 0$ определяет

плоскость параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние равное 2. Пересечением данной поверхности с плоскостью является окружность, которая задается уравнением $x^2 + y^2 = 16$.

6.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Привести поверхности к каноническому виду и изобразить:

- 1) $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$; 2) $4x^2 - 8y^2 + 16z^2 = 0$;
- 3) $8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0$; 4) $y^2 = 6x - 4$;
- 5) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$; 6) $3x^2 + 5y^2 = 12z$;
- 7) $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$; 8) $z^2 - 4x = 0$;
- 9) $2x^2 - 3z^2 = -12y$; 10) $4x^2 - 12y^2 - 6z^2 = 12$.

Ответ:

- 1) Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz .
- 2) Конус.
- 3) Однополостной гиперболоид.
- 4) Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz .
- 5) Конус, у которого ось совпадает с осью Ox : $\frac{y^2 + z^2}{2} - x^2 = 0$.
- 6) Эллиптический параболоид: $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{12}{5}}$.
- 7) Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz .
- 8) Параболический цилиндр $z^2 = 4x$, с образующими, параллельными оси Oy .
- 9) Гиперболический параболоид: $y = \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{6}$.
- 10) Двуполостной гиперболоид: $\frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{3} = -1$.

Задание 2 Какую поверхность определяет уравнение $x^2 + y^2 - 4y = 0$?

Ответ: В пространстве уравнение определяет прямой круговой цилиндр, для которого данная окружность служит направляющей. Образующие цилиндра параллельны оси Oz , причем сама ось является одной из образующих, так как данная окружность проходит через начало координат.

Задание 3 Какую поверхность определяет уравнение $y^2 + z^2 - 2az = 0$?

Ответ: Прямой круговой цилиндр, образующие параллельны оси Ox .

Задание 4 Какая линия задана системой уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 7)^2 = 16 \\ z = 6 \end{cases}, \text{ б) } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 5 \end{cases}, \text{ в) } \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 9 \end{cases}, \text{ г) } \begin{cases} y^2 = z \\ x = 5 \end{cases}?$$

(поверхности изобразить)

Ответ: а) Окружность: $x^2 + y^2 = 15$, б) Эллипс: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

в) Окружность: $x^2 + y^2 = 9$, г) Парабола: $y^2 = z$.

Задание 5 Какие поверхности определяют уравнения

$$1) \ yz = 5; \ 2) \ y = 6z^2; \ 3) \ y^2 + z^2 = 9; \ 4) \ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1?$$

(поверхности изобразить).

Ответ: 1) $yz = 5$ – уравнение гиперболического цилиндра; 2) $y = 6z^2$ – уравнение параболического цилиндра; 3) $y^2 + z^2 = 9$ – уравнение прямого кругового цилиндра; 4) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – уравнение эллиптического цилиндра. Образующие всех этих цилиндрических поверхностей параллельны оси Ox .

Список использованных источников

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч.1. – 416 с: ил. – Библиогр.: с. 455-462. – ISBN 978-5-06-003959-7.

3 Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова; Вып. 4). – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, – 2002. – 320 с.

4 Курош, А. Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учеб. для вузов / А.Г. Курош. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.

5 Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред. В.Д. Кулиева. – 2005. – 216 с. – ISBN 5-9221-0581-7.

6 Молчанов, В.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В.А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 194 с.

7 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами: 1 курс: учеб. пособие для вузов / К.Н. Лунгу [и др.]. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 576 с. – ISBN 978-5-8112-2326-8.

8 Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 13 изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 288 с. – ISBN 5-8114-0427-1.

9 Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов / В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 304 с.: ил. – ISBN 978-5-06-006145-1.