Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Методические указания

Часть 3

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург
2019

УДК 512.64(076.5) + 514.12(076.5)
ББК 22.143я7 + 22.151.5я7
У76

Рецензент – кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Герасименко

Усова, Л.Б.
У76 Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: методические указания. Часть 3 / Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 60с.

Методические указания «Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»» часть 3 содержат разделы, состоящие из вопросов для самоподготовки, заданий для практического занятия и заданий для самостоятельного решения. Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал, разобрать задания практического занятия и успешно выполнить задания для самостоятельного решения. Разобранные примеры окажут существенную помощь студентам при решении заданий на практических занятиях и дома, а также помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная разработка предназначена для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК 512.64(076.5) + 514.12(076.5)
ББК 22.143я7 + 22.151.5я7

Содержание

Введение

Методические указания «Организация самостоятельной работы по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»»» часть 3 содержат темы практических занятий: 1 Векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Евклидовое пространство. Нормированное пространство; 2 Трехмерное векторное пространство. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов; 3 Линейное отображение. Линейный оператор; 4 Билинейные и квадратичные формы. Критерий Сильвестра; 5 Деление многочленов с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида. Корни и значения многочленов. Кратные корни многочленов. Производная от многочленов.

Цель создания такой разработки – развитие у студентов практических навыков решения задач в аудиторное и внеаудиторное время.

Методические указания состоят из блоков:

блок 1 «Вопросы для самоподготовки» – содержит вопросы для проверки усвоения теоретического материала;

блок 2 «Практическое занятие» – содержит разноуровневые задания, состоящие из двух пунктов. Пункт (а) сопровождается подробным решением задания, а пункт (б) студент должен выполнить самостоятельно или с помощью преподавателя;

блок 3 «Задания для самостоятельного решения» – содержит задания с ответами для самостоятельного решения и закрепления пройденного материала.

Данная разработка поможет студентам усвоить лекционный материал с помощью вопросов для самоподготовки, разобраться в решенных заданиях предложенных на практических занятиях, а также успешно решить задания для самостоятельного решения. Разобранные задания окажут существенную помощь студентам на практических занятиях и дома, помогут подготовиться к коллоквиуму и зачету. Данная разработка предназначена для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

1 Векторное пространство. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Евклидовое пространство. Нормированное пространство

1.1 Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов.
2. Какие векторы называются линейно зависимыми?
3. Какие векторы называются линейно независимыми?
4. Сформулируйте определение векторного пространства.
5. Сформулируйте определение базиса линейного пространства.
6. Сформулируйте определение евклидова пространства.
7. Сформулируйте определение ортогональных векторов.
8. Сформулируйте определение нормы вектора евклидова пространства.
9. Сформулируйте теорему Пифагора в V^n.
10. Как определяется угол между векторами евклидового пространства?
11. Сформулируйте определение ортонормированного базиса.
12. Сформулируйте определение линейного пространства.
13. Какие векторы называются нормированными?
14. Сформулируйте теорему Коши-Буняковского.
15. Сформулируйте определение нормированного пространства.
16. Запишите естественный базис.
17. Сформулируйте определение векторного подпространства.
18. Запишите матрицу перехода от старого базиса к новому базису.
19. Запишите формулы нахождения ортогонального базиса.

1.2 Практическое занятие

Задание 1 Является ли линейно зависимой система векторов:

а) (i, j, k); б) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}, \bar{b} = \bar{\imath} + \bar{k}$, в) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - \bar{k}, \bar{b} = -\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}, \bar{c} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 2\bar{k}$, г) $\bar{a} = (0,1,-1), \bar{b} = (1,3,2), \bar{c} = (2,0,1)$; д) $\bar{a} = (2,2,4), \bar{b} = (0,1,3), \bar{c} = (2,1`, 1)$

Решение.

а) $\bar{i} = (1;0;0)$, $\bar{j} = (0;1;0)$, $\bar{k} = (0;0;1)$

Составим линейную комбинацию векторов (i, j, k) на числа α, β, γ, т.е.

$$\alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k} = 0,\ \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 0,\\ \beta = 0,\\ \gamma = 0.\end{cases}$$

Так как все числа α, β, γ равны 0, то система векторов (i, j, k) линейно независимая.

б) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}, \bar{b} = \bar{\imath} + \bar{k}$

Составим линейную комбинацию векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на числа α, β, т.е.

$$\bar{a}\alpha + \bar{b}\beta = 0,\ \alpha\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha + \beta = 0,\\ 3\alpha = 0,\\ \beta = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha = 0,\\ \beta = 0.\end{cases}$$

Следовательно, система векторов a и b - линейно независимая.

в)$\bar{a} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - \bar{k}, \bar{b} = -\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}, \bar{c} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 2\bar{k}$,

$$\alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{b} + \alpha_3\bar{c} = 0 \Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0,\end{cases} \begin{cases}-4\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ -8\alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,\\ \alpha_1 = -2\alpha_3,\end{cases} \begin{cases}-\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0,\\ -3\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0,\ /:(3)\\ \alpha_1 = -2\alpha_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = -2\alpha_3, \\ \alpha_1 = -2\alpha_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = -2\alpha_3. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_3 = p, \quad p \neq 0, \quad p \in R$, тогда $\alpha_1 = -2p, \;\; \alpha_2 = -2p, \quad \alpha_3 = p$.

Таким образом, мы нашли совокупность чисел, отличных от нуля $(-2p; -2p; p)$, при которых линейная комбинация будет равна 0 (нулевому вектору), т.е. $\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0 \Rightarrow -2pa - 2pb + pc = 0 \;/ : p \Rightarrow -2a - 2b + c = 0.$

Мы доказали, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ - линейно зависимые.

Так как данные векторы линейно зависимы и в линейной комбинации векторов на числа, все числа отличны от нуля (т.е. $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$),то любой вектор можно выразить через остальные векторы.

Например, $\underline{c = 2a + 2b}$ или $2a = c - 2b \Rightarrow$

$\underline{a = \frac{1}{2}c - b}$ или $2b = c - 2a \Rightarrow$ $\underline{b = \frac{1}{2}c - a}$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да; г) нет, д) да.

Задача 2 Образуют ли базис векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, если они имеют следующие координаты:

а) $\overline{a}_1 = (2;1;-1)$, $\overline{a}_2 = (-6;2;0)$, $\overline{a}_3 = (2;-4;2)$;

б) $\overline{a}_1 = (1;-1;1)$, $\overline{a}_2 = (1;1;1)$, $\overline{a}_3 = (2;3;4)$?

Решение. Базисом называется система линейно независимых векторов, через которые можно выразить любой вектор пространства.

Проверим, вектора $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ на линейную независимость.

а) $\overline{a}_1 = (2;1;-1)$, $\overline{a}_2 = (-6;2;0)$, $\overline{a}_3 = (2;-4;2)$

Составим линейную комбинацию векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ на числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и найдем эти числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \lambda_3 \overline{a}_3 = 0, \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 6\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 \qquad + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$ По формулам Крамера решим данную систему.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 24 + 4 + 12 = 0$$

, $\Delta_{\alpha_1} = 0$, $\Delta_{\alpha_2} = 0$, $\Delta_{\alpha_3} = 0$.

Таким образом, $\Delta\alpha_1 = \Delta_{\alpha_1}, \Delta\alpha_2 = \Delta_{\alpha_2}, \Delta\alpha_3 = \Delta_{\alpha_3}$,

$0\alpha_1 = 0,\ 0\alpha_2 = 0,\ 0\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеют бесчисленное множество решений, следовательно, вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно зависимы, т.е. вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ не могут образовывать базис.

Ответ: а) нет; б) да.

Задача 3 Найдите координаты вектора $\bar{a}_4$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, если:

а) $\bar{a}_1 = (-2;1;0)$, $\bar{a}_2 = (3;-1;1)$, $\bar{a}_3 = (2;0;-1)$, $\bar{a}_4 = (1;1;1)$;

б) $\bar{a}_1 = (-1;-1;0)$, $\bar{a}_2 = (0;0;1)$, $\bar{a}_3 = (1;0;-1)$, $\bar{a}_4 = (-1;21)$.

Решение.

а) $\bar{a}_1 = (-2;1;0)$, $\bar{a}_2 = (3;-1;1)$, $\bar{a}_3 = (2;0;-1)$, $\bar{a}_4 = (1;1;1)$.

Проверим, что вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно независимые.

Составим линейную комбинацию векторов и найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 = 0,\quad \alpha_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$ По формулам Крамера решим данную систему.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 3 = 3$$

, $\Delta_{\alpha_1} = 0$, $\Delta_{\alpha_2} = 0$, $\Delta_{\alpha_3} = 0$.

$\alpha_1 = \frac{0}{3} = 0, \quad \alpha_2 = \frac{0}{3} = 0, \quad \alpha_3 = \frac{0}{3} = 0$. Все числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны 0, следовательно, вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно независимые и образуют базис. Найдем координаты вектора $\bar{a}_4$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Разложим вектор $\bar{a}_4$ по векторам $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3 : \bar{a}_4 = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3$, тогда $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \quad \alpha_1 = \frac{8}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3},$$

Таким образом, $\bar{a}_4 = \frac{8}{3}\bar{a}_1 + \frac{5}{3}\bar{a}_2 + \frac{2}{3}\bar{a}_3 = \frac{1}{3}\left(8\bar{a}_1 + 5\bar{a}_2 + 2\bar{a}_3\right)$.

Ответ: а) Да. $\bar{a}_4 = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$; б) Да. $\bar{a}_4 = (-2; -2; -3)$.

Задача 4 Задано четырехмерное линейное пространство V^4. Определить угол между векторами x и y, если векторы имеют следующие координаты:

а) $x = (4,1,2,2)$ и $y = (1,3,3,-9)$;

б) $x = (-1,1,0,2)$ и $y = (2,-1,1,0)$.

Решение. а) $\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$,

$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{16 + 1 + 4 + 4} = 5$; $\quad |y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{1 + 9 + 9 + 81} = 10$;

$(x, y) = 4 + 3 + 6 - 18 = -5$; $\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{-5}{5 \cdot 10} = -0{,}1$; $\varphi = \arccos(-0{,}1) = 174°15'$.

Ответ: а) $\varphi = \arccos(-0{,}1) = 174°15'$; б) $\varphi = 120°$.

Задача 5 Рассмотрим евклидово пространство непрерывных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, … на отрезке $[-1, 1]$. Скалярное произведение определено равенством $(x,\, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t) y(t) dt$. Найдите угол между векторами $x = 3t^2 - 1$, $y = 3t - 5t^3$.

Решение. Имеем $(x,\, y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(3t^2 - 1\right)\left(3t - 5t^3\right) dt$. Нетрудно заметить, что $(x,\, y) = 0$, так как подынтегральная функция является нечетной. Следовательно, векторы x и y ортогональны.

Задача 6 Дано евклидово шестимерное пространство. Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов $x = (1;\, 0;\, 2;\, 0;\, 2;\, 0)$ и $y = (0;\, 6;\, 0;\, 3;\, 0;\, 2)$.

Решение. Найдем нормы векторов x, y и $x + y$.

$|x| = \sqrt{1 + 0 + 4 + 0 + 4 + 0} = 3$, $|y| = \sqrt{0 + 36 + 0 + 9 + 0 + 4} = 7$;

$x + y = (1;\, 6;\, 2;\, 3;\, 2;\, 2)$; $|x + y| = \sqrt{1 + 36 + 4 + 9 + 4 + 4} = \sqrt{58}$.

$|x|^2 + |y|^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58 = |x + y|^2$.

Ответ: $|x|^2 + |y|^2 = |x + y|^2$.

Задача 7 В евклидовом пространстве непрерывных функций даны два вектора: $x = t^2 + 1$, $y = \lambda t^2 + 1$. Найдите значение λ, при котором векторы x и y ортогональны на отрезке [0, 1], т.е. проверить справедливость теоремы Пифагора для данных векторов.

Решение. Составим скалярное произведение:

$$(x,\, y) = \int\limits_{0}^{1} \left(t^2 + 1\right)\left(\lambda t^2 + 1\right) dt = \lambda/5 + (\lambda + 1)/3 + 1.$$

Из условия $(x,\, y) = 0$ определяем λ; имеем $\lambda/5 + (\lambda + 1)/3 + 1 = 0$, откуда $\lambda = -5/2$. Найдем длины векторов $x = t^2 + 1$, $y = \lambda t^2 + 1$ и $x + y = -(3/2)t^2 + 2$:

$$|x|=\sqrt{\int_0^1\left(t^4+2t^2+1\right)dt}=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1}=\sqrt{\frac{28}{15}},$$

$$|y|=\sqrt{\int_0^1\left(\frac{25}{4}t^4-5t^2+1\right)dt}=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{8}+1}=\sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$|x+y|=\sqrt{\int_0^1\left(\frac{9}{4}t^4-6t^2+4\right)dt}=\sqrt{\frac{9}{20}-2+4}=\sqrt{\frac{49}{20}}.$$

Таким образом, $|x|^2=28/15$, $|y|^2=7/12$, $|x+y|^2=49/20$, т.е. $|x|^2+|y|^2=|x+y|^2$.

Ответ: $\lambda=-5/2, |x|^2+|y|^2=|x+y|^2$.

Задача 8 Приведем примеры линейных пространств:

- множество V^3 $\left(V^2\right)$ всех свободных векторов в пространстве (на плоскости) с линейными операциями над векторами (т.е. для любых двух векторов из данного пространства, вектор являющийся суммой двух векторов также принадлежит этому пространству и любой вектор данного пространства умноженный на число также является вектором этого пространства) является линейным пространством, так как верны все аксиомы линейного пространства;

- множество всех геометрических векторов в пространстве с началом в данной точке и параллельных данной плоскости с линейными операциями над векторами является линейным пространством;

- множество $M_{mn}(R)$ матриц типа $m\times n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами (т.е. для любых двух матриц размера $m\times n$ данного пространства $M_{mn}(R)$, матрица являющийся суммой двух матриц размера $m\times n$ также принадлежит этому пространству $M_{mn}(R)$ и любая матрица данного пространства $M_{mn}(R)$ умноженная на число также является матрицей этого пространства $M_{mn}(R)$) также удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства и является линейным пространством;

- множество матриц-строк (матриц-столбцов) длины n является линейным пространством относительно матричных операций сложения и умножения на число (это частный случай предыдущего примера);

- множество $K_n[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей n, которые как функции можно складывать и умножать на действительные числа;

- множество всех решений данной однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решения можно рассматривать как матрицы-столбцы, складывать и умножать на числа по законам матричных операций. Столбец, получаемый в результате сложения решений или умножения решения на число, снова будет решением системы. Поэтому определены операции, подчиняющиеся аксиомам линейного пространства;

- множество функций, непрерывных на отрезке, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. При сложении непрерывных функций получаем непрерывную функцию, при умножении непрерывной функции на число также получаем непрерывную функцию. Поэтому сложение функций и умножение функций на число, не выводящие за пределы множества непрерывных на отрезке функций, можно рассматривать как операции линейного пространства. Легко убедиться, что для этих операций верны все аксиомы линейного пространства.

Задание 9 Построить ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе $q_1=(1;\ 1;\ 0)$, $q_2=(1;1;1)$, $q_3=(1;\ 3;\ -3)$. Координаты векторов заданы в естественном базисе.

Решение. Проверим систему векторов q_1, q_2, q_3 на линейную независимость. Вектора q_1, q_2, q_3 линейно независимые, если их линейная комбинация $c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3=0$ при коэффициентах $c_1=c_2=c_3=0$. Подставим значения q_1, q_2, q_3 в данное равенство, получим:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2+\quad c_3=0,\\c_1+c_2+3c_3=0,\\\qquad c_2-3c_3=0,\end{cases}\begin{cases}c_2=3c_3,\\c_1+4c_3=0,\\c_1+6c_3=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 3c_3, \\ c_1 = -4c_3, \\ 2c_3 = 0, \end{cases} \begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 = 0, \\ c_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow q_1,\ q_2,\ q_3 - \text{линейно независимы.}$$

1) Построим вспомогательную систему $p_1,\ p_2,\ p_3$ - попарно ортогональные векторы: а) $p_1 = q_1 = (1;\ 1;\ 0)$;

б) $p_2 = q_2 - \alpha p_1$, где $\alpha = \dfrac{(q_2 p_1)}{(p_1 p_1)} = \dfrac{2}{2} = 1$. $\quad p_2 = (1;\ 1;\ 1) - (1;\ 1;\ 0) = (0;\ 0;\ 1)$;

в) $p_3 = q_3 - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2$, где $\beta_1 = \dfrac{(q_3 p_1)}{(p_1 p_1)} = \dfrac{4}{2} = 2$ и $\beta_2 = \dfrac{(q_3 p_2)}{(p_2 p_2)} = \dfrac{-3}{1} = -3$.

$p_3 = (1;\ 3;\ -3) - 2(1;\ 1;\ 0) + 3(0;\ 0;\ 1) = (-1;\ 1;\ 0)$.

2) Построим ортонормированную систему:

$$e_1 = \frac{p_1}{|p_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right);\quad e_2 = \frac{p_2}{|p_2|} = (0;\ 0;\ 1);\quad e_3 = \frac{p_3}{|p_3|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right).$$

Ответ: $e_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$, $e_2 = (0;\ 0;\ 1)$, $e_3 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$.

1.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Будет ли система векторов линейно зависимой?

а) $a_1 = (2;\ 3;\ 5)$, $a_2 = (-4;\ 5;\ 7)$, $a_3 = (10;\ -7;\ -9)$;

б) $a_1 = (1;\ 2;\ 3;\ 0)$, $a_2 = (-1;\ 0;\ 3;\ -2)$, $a_3 = (-1;\ 3;\ 12;\ -5)$.

Ответ: а) да; б) да.

Задание 2 Образуют ли векторы $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (0;1;-1)$, $a_3 = (2;4;5)$ базис пространства R^3, если образуют, то найти координаты вектора $a_4 = (5;13;9)$ относительно нового базиса.

Задание 3 Найдите угол между векторами $a = (2;-1;3;-2)$ и $b = (3;1;5;1)$ в евклидовом пространстве V^4.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

Задание 4 Является ли, линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

а) все векторы n– мерного векторного пространства, координаты которых – целые числа;

б) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy;

в) все векторы плоскости, начала и концы которых лежат на данной прямой;

г) все векторы плоскости трехмерного пространства, концы которых не лежат на данной прямой.

Ответ: а) не является; б) не является; в) является; г) не является.

Задание 5 Является ли линейным пространством множество систем векторов $(x_1;\, x_2;\, 0;\, 0)$, $(y_1;\, y_2;\, 0;\, 0)$, $(z_1;\, z_2;\, 0;\, 0)$, где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ – всевозможные действительные числа? Сложение элементов и умножение на действительное число определены обычно.

Ответ: да.

Задача 6 Образует ли линейное пространство множество векторов $(x_1;\, x_2;\, 1;\, 1)$, $(y_1;\, y_2;\, 1;\, 1)$, $(z_1;\, z_2;\, 1;\, 1)$?

Ответ: нет, так как сумма двух элементов множества не является элементом данного множества.

Задача 7 Образует ли линейное пространство множество всевозможных многочленов второй степени $\alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$, $\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$, $\gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2$, …?

Ответ: нет, так как сумма двух многочленов второй степени может быть многочленом первой степени или постоянной величиной.

Задача 8 Образует ли линейное пространство множество всех многочленов не выше третьей степени?

Ответ: да.

Задание 9 Построить ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе $q_1 = (1;\, -2;\, 2)$, $q_2 = (-1;\, 0;\, 1)$, $q_3 = (5;\, -3;\, -7)$. Координаты векторов заданы в естественном базисе.

Ответ: $p_1 = (\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$, $p_2 = (-\frac{10}{\sqrt{153}};\frac{2}{\sqrt{153}};\frac{7}{\sqrt{153}})$,

$p_3 = (-\frac{26}{\sqrt{2873}};-\frac{39}{\sqrt{2873}};-\frac{26}{\sqrt{2873}})$.

2 Трехмерное векторное пространство. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов

2.1 Вопросы для самоподготовки

1 Сформулируйте определение скалярного произведения двух векторов (через угол и через координаты) в V^3.

2 Сформулируйте признак перпендикулярности двух векторов.

3 Сформулируйте определение и признак коллинеарности двух векторов.

4 Сформулируйте определение векторного произведения двух векторов.

5 Сформулируйте геометрический смысл векторного произведения двух векторов.

6 Сформулируйте определение смешанного произведения трех векторов.

7 Сформулируйте геометрический смысл смешанного произведения трех векторов.

8 Сформулируйте определение компланарности трех векторов.

9 Сформулируйте признак компланарности трех векторов.

10 Даны точки $A(2, 3, -2)$ и $B(5, 0, -2)$. Найдите координаты $\overline{AB}$ и $|\overline{AB}|$.

11 Даны два вектора: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ и угол между этими векторами равен $60°$. Постройте два вектора $2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - 3\bar{b}$.

12 Найдите скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = (2;3;0)$ и $\bar{b} = (4;-5;1)$.

13 Найдите векторное произведения двух векторов $\bar{a} = (2;3;0)$ и $\bar{b} = (4;-5;1)$.

14 Проверить коллинеарность векторов $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если $\overline{p} = (3;-1;2)$, $\overline{q} = (-6;2;-4)$.

15 Найдите смешанное произведение трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, если $\overline{a} = (2;3;0)$, $\overline{b} = (4;-5;1)$ и $\overline{c} = (0;2;-1)$.

16 Запишите формулу вычисления площади треугольника.

17 Сформулируйте определение ортвектора.

18 Запишите формулу вычисления объема тетраэдра.

19 Запишите формулу вычисления векторного произведения двух векторов в координатной форме.

20 Запишите формулу вычисления смешанного произведения трех векторов в координатной форме.

2.2 Практическое занятие

Задание 1 Вычислите направляющие косинусы вектора $\overline{a}$, если он задан координатами: а) $\overline{a} = (12;-15;-16)$; б) $\overline{a} = (-1;2;-2)$.

Решение. а) $\overline{a} = (12;-15;-16)$.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}. \qquad |\overline{a}| = \sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = 25 \qquad \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{25},\ \cos\beta = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}, \cos\gamma = -\frac{16}{25}.$$

Ответ: а) $\left(\frac{12}{25}; -\frac{3}{5}; -\frac{16}{25}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Задание 2 Может ли $\overline{a}$ с координатными осями составлять следующие углы: а) $\alpha = 45°; \beta = 60°; \gamma = 120°$; б) $\alpha = 45°; \beta = 135°; \gamma = 60°$;

в) $\alpha = 90°; \beta = 150°; \gamma = 60°$.

Решение. а) $\alpha = 45°; \beta = 60°; \gamma = 120°$.

Проверим условие: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 120° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

Задание 3 Проверить коллинеарность векторов:

а) $\bar{a} = (2;\ -1;\ 3)$ и $\bar{b} = (-6;\ 3;\ 9)$;

б) $\bar{a} = (-3;\ -4;\ 5)$ и $\bar{b} = (-6;\ -8;\ 10)$;

в) $\bar{a} = (-3;\ 1;2)$ и $\bar{b} = (-12;\ 4;\ 9)$.

Решение. а) $\bar{a} = (2;\ -1;\ 3)$ и $\bar{b} = (-6;\ 3;\ 9)$.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Rightarrow \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{9}. \quad -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}.$$

Ответ: а) не коллинеарны; б) коллинеарны; в)не коллинеарны.

Задание 4 При каких значениях α и β векторы $\bar{a} \parallel \bar{b}$:

а) $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$;

б) $\bar{a} = \bar{i} - 4\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + \alpha\bar{j} - 2\bar{k}$?

Решение. а) $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow \frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow -\frac{2}{\alpha} = -\frac{1}{2} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{\alpha} = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\beta}{2} = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Ответ: а) $\alpha = 4,\ \beta = -1$; б) $\alpha = -4,\ \beta = -2$.

Задание 5 Известно: $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{2\pi}{3}$, $|\bar{a}| = 3,\ |\bar{b}| = 4$. Вычислите:

а) $\bar{a}^2$; б) $\bar{b}^2$; в) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; г) $(\bar{a} + \bar{b})^2$; д) $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$; е) $(3\bar{a} + 2\bar{b})^2$.

Решение. а) $\bar{a}^2 = a \cdot a = |a| \cdot |a| \cos 0° = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$;

б) $\bar{b}^2 = b \cdot b = |b| \cdot |b| \cos 0° = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$;

в) $\bar{a} \cdot \bar{b} = |a| \cdot |b| \cos\frac{2\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$;

г) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2=\overline{a}^2+2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}^2=9+2\cdot(-6)+16=9-12+16=13$;

д) $\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)=3\overline{a}^2+6\overline{a}\cdot\overline{b}-2\overline{b}\cdot\overline{a}-4\overline{b}^2=3\overline{a}^2+4\overline{a}\cdot\overline{b}-4\overline{b}^2=$

$=3\cdot 9+4\cdot(-6)-4\cdot 16=27-24-64=-61$.

Ответ: а) 9; б) 16; в) –6;г) 13; д) –61;е) 73.

Задание 6 При каком значении α вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$взаимноперпендикулярны, если они разложены по единичным векторам:

а)$\overline{a}=\alpha\,\overline{i}-3\,\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+3\,\overline{j}-\alpha\,\overline{k}$;

б) $\overline{a}=5\overline{i}+4\,\overline{j}-2\overline{k}$ и $\overline{b}=\alpha\overline{i}-6\,\overline{j}+\alpha\,\overline{k}$?

Решение. а)$\overline{a}=\alpha\,\overline{i}-3\,\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+3\,\overline{j}-\alpha\,\overline{k}$.

$\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, $\overline{a}=(\alpha;\,-3;\,2)$, $\overline{b}=(1;\,3;\,-\alpha)$.

$\overline{a}\cdot\overline{b}=\alpha-9-2\alpha=-9-\alpha\Rightarrow -9-\alpha=0\Rightarrow\alpha=-9$.

Ответ: а)$\alpha=-9$; б) $\alpha=8$.

Задание 7 Найдите косинус угла, образованного векторами:

а) $\overline{a}=(2;-4;4)$ и $\overline{b}=(-3;2;6)$; б) $\overline{a}=(2;-4;4)$ и $\overline{b}=(4;-2;-4)$.

Решение. а) $\overline{a}=(2;-4;4)$ и $\overline{b}=(-3;2;6)$.

По формуле скалярного произведения двух векторов выразим косинус угла между двумя векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|a|\cdot|b|\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)\Rightarrow\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|a|\cdot|b|}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$и их модули.

$\overline{a}\cdot\overline{b}=-3\cdot 2+2\cdot(-4)+6\cdot 4=-6-8+24=10$,

$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{4+16+16}=6$, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{(-3)^2+4+36}=\sqrt{9+4+36}=7$,

т.е. $\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=\dfrac{10}{42}=\dfrac{5}{21}$.

Ответ: а) $\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=\dfrac{5}{21}$; б) $\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=0$.

Задание 8 Дан треугольник ABC. Определите внутренний угол при вершине B, если даны координаты вершин:

а) $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$;

б) $A(1;-1;-1)$, $B(2;1;1)$, $C(3;2;1)$.

Решение. а) $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$.

Найдем координаты векторов: $\overline{BA}=(3;0;4)$, $\overline{BC}=(7;0;1)$.

Запишем формулу и подставим координаты векторов:.

$$\cos\angle B=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}=\frac{3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}}=$$

$$=\frac{21+4}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{49+1}}=\frac{25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}}=\frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\angle B=45^\circ.$$

Ответ: а) $\angle B=45^\circ$; б) $\angle B=135^\circ$.

Задание 9 Найти координаты вектора $\overline{c}$, коллинеарного вектору $\overline{a}$, образующего острый угол с заданной осью, $\left|\overline{c}\right|=50$, если:

а) $\overline{a}=(6;-8;-7{,}5)$, с осью OZ;

б) $\overline{a}=(2;-3;-6)$, с осью OX.

Решение. $\overline{c}=(x;\ y;\ z)$, $\overline{a}=(6;-8;-7{,}5)$.

$$\overline{c}\parallel\overline{a}\Rightarrow\frac{x}{6}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{-7{,}5}\Rightarrow\ \frac{x}{6}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{-7{,}5}=t\Rightarrow\begin{cases}x=6t,\\ y=-8t,\\ z=-7{,}5t.\end{cases}$$

$$\left|\overline{c}\right|=50\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=50,\ \sqrt{(6t)^2+(-8t)^2+(-7{,}5t)^2}=50,$$

$$\sqrt{36t^2+64t^2+\frac{225}{4}t^2}=50\Rightarrow\sqrt{\frac{144t^2+256t^2+225t^2}{4}}=50,$$

$$\sqrt{\frac{625t^2}{4}}=50\Rightarrow\frac{25}{2}|t|=50\Rightarrow|t|=4.$$

$$\left[\begin{array}{l}t_1=4,\\ t_2=-4,\end{array}\right.\Rightarrow\overline{c_1}=(24;-32;-30),\ \overline{c_2}=(-24;32;30),$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{c_1}, \overline{k}}\right) = -\frac{30}{50} = -\frac{3}{5} < 0 \Rightarrow \left(\widehat{\overline{c_1}, \overline{k}}\right) > 90^\circ,$$

$$\cos\left(\widehat{\overline{c_2}, \overline{k}}\right) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} > 0 \Rightarrow \left(\widehat{\overline{c_2}, \overline{k}}\right) < 90^\circ \Rightarrow \overline{c} = (-24;\ 32;\ 30).$$

Ответ: а) $\bar{c} = (-24;\ 32;\ 30)$; б) $\bar{c} = \left(\frac{100}{7}; -\frac{150}{7}; -\frac{300}{7}\right)$.

Задание 10 Найдите координаты вектора $\bar{c}$, зная, что:

а) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a} = (2;3;-1)$ и $\bar{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\bar{c}\cdot\left(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}\right) = -6$;

б) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен оси OZ и удовлетворяет условию $\bar{c}\cdot\left(3\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}\right) = 9$ и $\bar{c}\cdot\left(\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}\right) = -4$.

Решение. а) $\bar{c} = (x; y; z)$, $\bar{a} = (2;3;-1)$, $\bar{b} = (1;-2;3)$.

$\bar{c} \perp \bar{a} \Rightarrow 2x + 3y - z = 0$, $\bar{c} \perp \bar{b} \Rightarrow x - 2y + 3z = 0$ и $2x - y + z = -6$.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0, \\ 2x - y + z = -6. \end{cases}$$ Решим систему линейных уравнений.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 42, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -42,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -42, \ x = -3, \ y = 3, \ z = 3.$$

Ответ: а) $\bar{c} = (-3;\ 3;\ 3)$; б) $\bar{c} = (2;-3;0)$.

Задание 11 Найдите координаты вектора $\bar{d}$, удовлетворяющего условиям:

а) $\bar{d}\cdot\bar{a} = -5$; $\bar{d}\cdot\bar{b} = -11$; $\bar{d}\cdot\bar{c} = 20$, $\bar{a} = (2;-1;3)$, $\bar{b} = (1;-3;2)$ и $\bar{c} = (3;2;-4)$;

б) $\bar{d}\cdot\bar{a} = 11$; $\bar{d}\cdot\bar{b} = 9$; $\bar{d}\cdot\bar{c} = 5$, $\bar{a} = (1;2;4)$, $\bar{b} = (5;-2;3)$ и $\bar{c} = (-7;8;2)$.

Решение. а) Найдем координаты вектора $\bar{d} = (x; y; z)$ используя условия: $\bar{d}\cdot\bar{a} = -5$; $\bar{d}\cdot\bar{b} = -11$; $\bar{d}\cdot\bar{c} = 20$:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 3z = -5, \\ \ x - 3y + 2z = -11, \\ 3x + 2y - 4z = \ \ 20. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 39, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -11 & -3 & 2 \\ 20 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 78,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -11 & 2 \\ 3 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 117, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -11 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix} = -78, \quad x = 2; \quad y = 3; \quad z = -2$$

Ответ: а) $(2;\ 3;\ -2)$; б) $(1;\ 1;\ 2)$.

Задание 12 Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

Найдите: а) $\bar{a} \times \bar{b}$, $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{b} + 4\bar{a})$; б) $(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b}$, $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$.

Решение. а) $\bar{a} \times \bar{b}$, $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{b} + 4\bar{a})$.

$\bar{a} = (2;\ 1;\ 3)$, $\bar{b} = (1;\ -3;\ 2)$. Найдем векторное произведение векторов

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k} - (\bar{k} - 9\bar{i} + 4\bar{j}) = 11\bar{i} - \bar{j} - 7\bar{k},$$

$$(2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{b} + 4\bar{a}) = 2\bar{a} \times \bar{b} + 8\bar{a} \times \bar{a} - 3\bar{b} \times \bar{b} - 12\bar{b} \times \bar{a} =$$

$$= 2\bar{a} \times \bar{b} + 12\bar{a} \times \bar{b} = 14\bar{a} \times \bar{b} = 14(11\bar{i} - \bar{j} - 7\bar{k}) = 154\bar{i} - 14\bar{j} - 98\bar{k}.$$

Ответ: а) $(11;\ -1;\ -7)$, $(154;\ -14;\ -98)$; б) $(22;\ -2;\ -14)$, $(44;\ -4;\ -28)$.

Задание 13 Найдите площадь треугольника ABC с вершинами в точках:

а) $A\,(4;\ -2;\ 6)$, $B\,(2;\ 8;\ 4)$, $C\,(6;\ -2;\ -2)$;

б) $A\,(1;2;0)$, $B\,(3;2;1)$, $C\,(-2;1;2)$.

Решение. а) $A\,(4;\ -2;\ 6)$, $B\,(2;\ 8;\ 4)$, $C\,(6;\ -2;\ -2)$.

Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов найдем площадь треугольника: $S = \dfrac{1}{2}\left|\overline{BA} \times \overline{BC}\right|$.

Найдем координаты векторов: $\overline{BA} = (2;-10;2)$, $\overline{BC} = (4;-10;-6)$.

Сначала вычислим векторное произведение двух векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$:

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -10 & 2 \\ 4 & -10 & -6 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=4\left(15\bar{i}-5\bar{k}+2\bar{j}+10\bar{k}+5\bar{i}+3\bar{j}\right)=4\left(20\bar{i}+5\bar{j}+5\bar{k}\right)=$$

$$=80\bar{i}+20\bar{j}+20\bar{k}\ \Rightarrow\ \overline{BA}\times\overline{BC}=(80;\ 20;\ 20).$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{80^2+20^2+20^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6400+400+400}=30\sqrt{2}\ \ (\text{ед}^2).$$

Ответ: а) $S_{ABC}=30\sqrt{2}\ (ед^2)$; б) $S_{ABC}=\frac{3}{2}\sqrt{6}\ (ед^2)$.

Задание 14 Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

а) $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$;

б) $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ и $\bar{b}=5\bar{j}-7\bar{k}$.

Решение. а) $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

Найдем площадь треугольника, используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a}=(3;2;1)$, $\bar{b}=\left(1;-1;2\right)$. $S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$. Найдем векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right),\ \bar{a}\times\bar{b}=\left(5;\ -5;\ -5\right).$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{25+25+25}=\frac{1}{2}\sqrt{75}=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

$$S_{\Delta}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(ед^2\right).$$

Ответ: а) $S_{треуг}=\frac{5}{2}\sqrt{3}(ед^2)$; б) $S_{треуг}=\frac{1}{2}\sqrt{195}(ед^2)$.

Задание 15 Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: а) $\bar{a}=3\bar{p}+2\bar{q}$, $\bar{b}=2\bar{p}+\bar{q}$, $|\bar{q}|=4$, $|\bar{p}|=3$, $(\bar{p},\hat{\ }\bar{q})=\frac{3\pi}{4}$;

б) $\bar{a} = 2\bar{p} - 5\bar{q}$, $\bar{b} = -4\bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{q}| = 2$, $|\bar{p}| = 5$, $(\bar{p}, \hat{\ } \bar{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. а) $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{q}| = 4$, $|\bar{p}| = 3$, $(\bar{p}, \hat{\ } \bar{q}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов найдем площадь параллелограмма: $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$.

$\bar{a} \times \bar{b} = (3\bar{p} + 2\bar{q}) \times (2\bar{p} + \bar{q}) = 6\bar{p} \times \bar{p} + 3\bar{p} \times \bar{q} + 4\bar{q} \times \bar{p} + 2\bar{q} \times \bar{q} =$

$= 3\bar{p} \times \bar{q} + 4\bar{q} \times \bar{p} = -3\bar{q} \times \bar{p} + 4\bar{q} \times \bar{p} = \bar{q} \times \bar{p}$.

$[\bar{p} \times \bar{p} = \bar{0}, \bar{q} \times \bar{q} = \bar{0}]$,

$[\bar{p} \times \bar{q} = -\bar{q} \times \bar{p}]$.

$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{q} \times \bar{p}| = |\bar{q}| \cdot |\bar{p}| \cdot \sin(\bar{q}, \hat{\ } \bar{p}) = 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Ответ: а) $S = 6\sqrt{2}\ (ed^2)$; б) $S = 70\sqrt{2}\ (ed^2)$.

Задание 16 Найдите смешанное произведение $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если:

а) $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$;

б) $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$.

Решение. а) $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$.

Найдем смешанное произведение трех векторов: $\bar{a} = (3;\ -1;\ 1)$, $\bar{b} = (5;\ 2;\ -2)$, $\bar{c} = (1;\ -3;\ 1)$.

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -22.$$

Ответ: а) $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = -22$; б) $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = 15$.

Задание 17 Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если:

а) $\bar{a} = (4;-2;0), \bar{b} = (-3;6;3)$, $\bar{c} = (1;4;-5)$;

б) $\bar{a} = (1-2;1), \bar{b} = (3;2;1)$, $\bar{c} = (1;0;-1)$.

Решение. а) $\bar{a}=(4;-2;0), \bar{b}=(-3;6;3)$, $\bar{c}=(1;4;-5)$.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, как на ребрах, равен модулю смешанного произведения трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$V=|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|$. Найдем смешанное произведение трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}=-144.$$

$$V=|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|=|-144|=144(\text{ед}^3).$$

Ответ: а)$V=144$ $(ед^3)$; б) $V=12$ $(ед^3)$.

Задание 18 Доказать, что 4 точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если точки имеют следующие координаты:

а) $A\,(1;\,2;\,-1)$, $B\,(0;\,1;\,5)$, $C\,(-1;\,2;\,1)$, $D\,(2;\,1;\,3)$;

б) $A\,(3;\,5;\,1)$, $B\,(2;\,4;\,7)$, $C\,(1;\,5;\,3)$, $D\,(4;\,4;\,5)$.

Решение. а) $A\,(1;\,2;\,-1)$, $B\,(0;\,1;\,5)$, $C\,(-1;\,2;\,1)$, $D\,(2;\,1;\,3)$.

Найдем координаты векторов: $\overline{AB}=(-1;-1;6)$, $\overline{AC}=(-2;0;2)$, $\overline{AD}=(1;-1;4)$. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если три вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ - компланарны, а по признаку компланарности трех векторов смешанное произведение трех векторов должно быть равно 0, т.е. $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})=0$.

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=12-2-2-8=12-12=0.$$

Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Ответ: а), б) Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Задание 19 Найдите объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A, B, C, D и высоту тетраэдра, опущенную из вершины D на грань ABC, если:

а) $A\,(2;\,-1;\,1)$, $B\,(5;\,5;\,4)$, $C\,(3;\,2;\,-1)$, $D\,(4;\,1;\,3)$;

б) $A\,(2;\,1;-1)$, $B\,(3;\,0;\,1)$, $C\,(2;-1;3)$, $D\,(0;\,-7;\,0)$.

Решение. а) $A\,(2;\,-1;\,1)$, $B\,(5;\,5;\,4)$, $C\,(3;\,2;\,-1)$, $D\,(4;\,1;\,3)$.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, как на ребрах, равен модулю смешанного произведения трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$:

$V = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$. $V_{\text{Тетраэдра}} = \frac{1}{6}|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$. $V_{\text{Тетраэдра}} = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$.

Найдем координаты векторов: $\overline{AB} = (3;6;3)$, $\overline{AC} = (1;3;-2)$, $\overline{AD} = (2;2;2)$.

Найдем смешанное произведение трех векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(3+1-4-3+2-2) = -18.$$

$$V_{\text{Тетраэдра}} = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6}|(-18)| = 3(\text{ед}^3).$$

Из школьного курса известно, что объем тетраэдра равен: $V = \frac{1}{3}S \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V}{S}$. Найдем площадь основания. В основании лежит ΔABC. Используя геометрический смысл векторного произведения двух векторов, найдем площадь грани ABC: $S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$.

Найдем векторное произведение двух векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -12\bar{i} + 9\bar{k} + 3\bar{j} - 6\bar{k} - 9\bar{i} + 6\bar{j} = -21\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k},$$

$\overline{AB} \times \overline{AC} = (-21;9;3)$. Найдем длину векторного произведения:

$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-21)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{531}$, т.к.

$S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$, то $S = \frac{1}{2}\sqrt{531}\left(ед^2\right)$. $H = \dfrac{3 \cdot 3}{\frac{1}{2}\sqrt{531}} = \dfrac{18}{\sqrt{531}}(ед)$.

Ответ: а) $V = 3\ (ед^3)$, $H = \dfrac{18}{\sqrt{531}}(ед)$; б) $V = 5\ (ед^3)$, $H = 3\sqrt{5}(ед)$.

2.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Найдите орт-вектор для векторов:

а) $\overline{a}=(-2;1;2)$; б) $\overline{a}=(3;4;-12)$.

Ответ: а) $\overline{a^0}\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; б) $\overline{a^0}\left(\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right)$.

Задание 2 Может ли $\overline{a}$ составлять с двумя координатными осями следующие углы: а) $\alpha=30°$; $\beta=45°$; б) $\beta=60°$; $\gamma=60°$; в) $\alpha=150°$; $\gamma=30°$.

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

Задание 3 Вектор составляет с осями Ox и Oz следующие углы $\alpha=120°$ и $\gamma=45°$. Какой угол он составляет с осью Oy?

Ответ: либо $60°$, либо $120°$.

Задание 4 Даны точки $A(3;-2;2); B(1;2;-1); C(-1;1;-3); D(3;-5;3)$. Являются ли точки: A, B, C, D вершинами трапеции?

Ответ: нет.

Задание 5 Проверить коллинеарность векторов $A\overline{B}, C\overline{D}$ если $A(-1;5;-10); B(5;-7;8)$ $C(2;2;-7); D(5;-4;2)$.

Задание 6 Известно, что $(\overline{a},\widehat{\ }\overline{b})=\frac{\pi}{2}$, $(\overline{a},\widehat{\ }\overline{c})=\frac{\pi}{3}$, $(\overline{b},\widehat{\ }\overline{c})=\frac{\pi}{3}$, $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=5, |\overline{c}|=8.$

Найдите: а) $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{b}+3\overline{c})$; б) $(2\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-3\overline{c})$; в) $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})^2$; г) $(\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c})^2$.

Ответ: а) – 62; б) – 114; в) 162; г) 373.

Задание 7 Даны вершины треугольника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ и $C(1;-2;1)$. Определите внутренние угла треугольника ABC.

Ответ: $\angle A=\arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$; $\angle B=\arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{29}}\right)$; $\angle C=\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{145}}\right)$.

Задание 8 Найдите координаты вектора $\overline{c}$, если $\overline{c}\parallel\overline{a}$, $\overline{a}=(2;1;-1)$ и вектор $\overline{c}$ удовлетворяет условию $\overline{a}\cdot\overline{c}=3$.

Ответ: $\overline{c}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Задание 9 Вектор $\bar{c}$ перпендикулярный к векторам $\bar{a}=(3;2;2)$ и $\bar{b}=(18;-22;-5)$ и образует с осью OY тупой угол. Найти координаты $\bar{c}$ зная, что$|\bar{c}| = 14$.

Ответ: $\bar{c}=(-4;-6;12)$.

Задание 10 Найти векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ двух векторов, если $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ и $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$.

Ответ: $\bar{a}\times\bar{b}=8\bar{i}-10\bar{j}+7\bar{k}$.

Задание 11 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a}=2\bar{p}-3\bar{q}$, $\bar{b}=5\bar{p}+\bar{q}$, $|\bar{q}|=3$, $|\bar{p}|=2$, $(\bar{p},\widehat{\ }\bar{q})=\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $S=102\left(ед^2\right)$.

Задание 12 Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;\,2;\,-1)$, $B(3;\,3;\,2)$, $C(2;\,-1;\,1)$.

Ответ: $S_{треугольника}=\dfrac{1}{2}\sqrt{171}\ (ед^2)$.

Задание 13 Даны вершины тетраэдра $A(2;\,3;\,1)$, $B(4;\,1;\,-2)$, $C(6;\,3;\,7)$, $D(-5;\,-4;\,8)$. Найти длину высоты, опущенную из вершины D.

Ответ: $H=11\,(ед)$.

Задание 14 Компланарны ли вектора $\bar{a}=(2;3;-1)$, $\bar{b}=(1;-1;3)$, $\bar{c}=(1;9;-11)$?

Ответ: да.

Задание 15 Найти смешанное произведение $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=5\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=7\bar{k}$.

Ответ: 70.

Задание 16 Выяснить какова ориентация тройки векторов $\bar{a}=(3;-1;1)$, $\bar{b}=(5;2;-2)$, $\bar{c}=(1;-3;1)$.

Ответ: левая.

3 Линейное отображение. Линейный оператор

3.1 Вопросы для самоподготовки

1 Сформулируйте определение линейного отображения.

2 Сформулируйте определение линейного оператора.

3 Какой оператор называется тождественным оператором?

4 Сформулируйте определение собственного вектора линейного оператора А.

5 Сформулируйте определение характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора А.

6 Какая матрица линейного оператора задает сдвиг двумерного и трехмерного пространства?

7 Запишите матрицу поворота системы координат на плоскости.

8 Какая матрица линейного оператора задает растяжение (сжатие) двумерного и трехмерного пространства?

9 Какая матрица линейного оператора задает зеркальное отражение?

10 Запишите матрицу преобразования вектора x в вектор $y\ (3x_1 + x_2 - 2x_3; 5x_2 + x_3; -4x_1 + 6x_3)$.

3.2 Практическое занятие

Задание 1 Является ли линейным оператор f (т. е. если $y = f(x)$ является линейным оператором, то он f задается матрицей A, которую называют матрицей линейного оператора и обозначают $y = \mathrm{A}x$), переводящий вектор $x(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе что и x? В случае линейности преобразования найти матрицу преобразования в том же базисе что и вектор x.

а) $y(2x_1 - x_2;\ x_3 - x_2;\ x_1)$; б) $y(x_1;\ x_2 + 2;\ x_3)$; в) $y(x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2)$.

Решение.

Оператор f называется линейным оператором, если выполняются два условия: 1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, если x - любой вектор пространства, λ - любое число;

2) $A(x+z)=Ax+Az$, где x и z - любые два вектора пространства $Ax=y$

а) $y(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1)$.

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=(2\lambda x_1-\lambda x_2;\ \lambda x_3-\lambda x_2;\ \lambda x_1)$,

$\lambda Ax=(\lambda(2x_1-x_2);\ \lambda(x_3-x_2);\ \lambda x_1)=(2\lambda x_1-\lambda x_2;\ \lambda x_3-\lambda x_2;\ \lambda x_1)\Rightarrow A(\lambda x)=\lambda Ax$,

следовательно, первое условие выполнено.

2) $A(x+z)=(2(x_1+z_1)-(x_2+z_2);\ (x_3+z_3)-(x_2+z_2);\ x_1+z_1)$.

$Ax+Az=(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1)+(2z_1-z_2;\ z_3-z_2;\ z_1)=$

$=(2(x_1+z_1)-(x_2+z_2);\ (x_3+z_3)-(x_2+z_2);\ x_1+z_1)\Rightarrow A(x+z)=Ax+Az$.

Второе условие также выполняется.

Таким образом, линейный оператор f, переводящий вектор x в вектор y с координатами $y(2x_1-x_2;\ x_3-x_2;\ x_1)$ является линейным. Т.е. $Ax=y$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(2x_1-x_2, x_3-x_2, x_1).$$

Следовательно, матрица данного линейного оператора имеет вид: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

б) $y(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$.

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=(\lambda x_1;\ \lambda x_2+2\lambda;\ \lambda x_3)$, $\lambda Ax=(\lambda x_1;\ \lambda(x_2+2);\ \lambda x_3)\Rightarrow A(\lambda x)=\lambda A(x)$,

следовательно, первое условие выполняется.

2) $A(x+z)=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+2;\ x_3+z_3)$,

$Ax(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$, $Az(z_1;\ z_2+2;\ z_3)$

$Ax+Az=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+4;\ x_3+z_3)\Rightarrow A(x+z)\neq Ax+Az$.

Второе условие не выполняется и данный оператор f не является линейным.

в) $y(x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2)$.

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=\left((\lambda x_1)^2;\,(\lambda x_2)^2;\,(\lambda x_3)^2\right),$

$\lambda(Ax)=\left(\lambda x_1^2;\,\lambda x_2^2;\,\lambda x_3^2\right)\Rightarrow A(\lambda x)\neq\lambda(Ax).$

Первое условие не выполняется и оператор f не является линейным.

Ответ: а) является; б) не является ; в) не является

Задание 2 Рассмотрим отображение $A=V^3\to V^3$, которое каждый вектор x преобразует в его векторное произведение $Ax=x\times i$ на орт i оси Ox. В силу свойств векторного произведения это отображение – линейный оператор. Найдем матрицу A этого линейного оператора в (правом) ортонормированном базисе i, j, k.

Решение.

Найдем образы базисных векторов и разложим их по тому же базису.

Так как $Ai=i\times i=0,$ то первый столбец в матрице A нулевой.

Второй столбец в матрице $A: Aj=j\times i=-k=0i+0j-1\cdot k=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Третий столбец в матрице A: $Ak=k\times i=j=0i+1\cdot j+0k=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Итак, матрица A имеет вид: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$

$$Ax=(i\quad j\quad k)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0\\z\\-y\end{pmatrix}=zj-yk.$$

Ответ: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$

Задание 3 Дана матрица линейного преобразования $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Найдите координаты образа y линейного преобразования.

Решение.

Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ определяет линейное преобразование $Ax=y$

в координатной форме следующей системой: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 0x_2 + 0x_3 = x_1, \\ y_2 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ y_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$ В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ она соответствует нахождению для произвольного вектора $x=(x_1, x_2, x_3)$ его составляющей (т.е. ортогональной проекции) по оси Ox_1: $y=\left(x_1, \quad 0, \quad 0\right)$.

Ответ: $y=\left(x_1, \quad 0, \quad 0\right)$.

Задание 4 Дана матрица линейного преобразования $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Найдите координаты образа y линейного преобразования.

Решение.

Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ определяет линейное преобразование $Ax=y$

в координатной форме следующей системой: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 0x_2 + 0x_3 = x_1, \\ y_2 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 = x_2, \\ y_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$ В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ она соответствует нахождению для произвольного вектора $x=(x_1; x_2; x_3)$ его составляющей (т.е. ортогональной проекции) на плоскость Ox_1x_2: $y=\left(x_1; \quad x_2; \quad 0\right)$.

Ответ: $y=(x_1; \quad x_2; \quad 0)$.

Задание 5 Пусть $x'=Ax$ есть вращение на угол α. Найдите матрицу вращения на угол α.

Решение. Рассмотрим базис i, j (состоящий из единичных и взаимно перпендикулярных векторов). Тогда, если $x=(x_1; x_2)$, то $x_1=\rho\cos\theta$, $x_2=\rho\sin\theta$, где ρ, θ - полярные координаты вектора x. Так как вектор $x'=Ax=(x_1'; x_2')$ получается поворотом x вокруг точки O на угол α, то $x_1'=\rho\cos(\theta+\alpha)$, $x_2'=\rho\sin(\theta+\alpha)$. Отсюда

$$x_1'=\rho\cos(\theta+\alpha)=\rho(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta),$$

$$x_2'=\rho\sin(\theta+\alpha)=\rho(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta);$$

раскрывая скобки в правых частях этих равенств и полагая

$\rho\cos\theta=x_1$, $\rho\sin\theta=x_2$, найдем

$$x_1'=x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha,$$

$$x_2'=x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha.$$

Это и есть координатное представление вращения в базисе i, j.

Матрица вращения имеет вид $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Ответ: $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Задание 6 Пусть Ax - вращение на угол α, Bx - вращение на угол β. ABx есть вращение на угол $\alpha+\beta$; ($ABx=BAx$). Найдите матрицу вращения на угол $\alpha+\beta$?

Решение. Рассмотрим базис i, j; тогда данные преобразования будут иметь соответственно матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}.$$

Применяя правило умножения матриц, получим

$$AB=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}.$$

Отсюда $AB=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$.

Этот результат можно было заранее предвидеть, так как AB есть матрица вращения на угол $\alpha+\beta$. В данном случае матрицы AB и BA совпадают.

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$.

Задание 7 Пусть Ax есть сжатие к оси Ox_2 (т.е. в направлении оси Ox_1) с коэффициентом k_1, Bx - сжатие к оси Ox_1 (т.е. в направлении оси Ox_2) с коэффициентом k_2. Найдите матрицу этих преобразований.

Решение. Матрицы этих преобразований соответственно будут

$A=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$; умножая A и B, получим $AB=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$.

Получили *диагональную* матрицу. Таким образом, диагональная матрица отвечает произведению двух сжатий к координатным осям.

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$.

3.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Является ли линейным оператор f, переводящий вектор $x(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе что и x? В случае линейности преобразования, найти матрицу преобразования в том же базисе что и x :

а) $y(x_1+3x_2-x_3;\ x_3-x_2+2x_1;\ x_1-x_3)$; б) $y(x_1-1;\ x_2;\ x_3+4)$;в) $y\left(x_3;\ x_2^2;\ x_1\right)$.

Ответ: Оператор f, заданный координатами:

а) $y(x_1+3x_2-x_3;\ x_3-x_2+2x_1;\ x_1-x_3)$ является линейным и задается матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$;

б) $y(x_1-1;\ x_2;\ x_3+4)$ не является линейным;

в) $y(x_3;\ x_2^2;\ x_1)$ не является линейным.

Задание 2 Запишите в заданном базисе матрицу линейных операторов, действующих в линейном пространстве V^3 :

а) оператор проектирования на ось Oy, базис i, j, k;

б) оператор проектирования на плоскость xOy, базис i, j, k.

Ответ: а) $y=(0, x_2, 0)$; б) $y=(x_1, x_2, 0)$.

4 Билинейные и квадратичные формы. Критерий Сильвестра

4.1 Вопросы для самоподготовки

1 Сформулируйте определение собственного вектора линейного оператора А.

2 Сформулируйте определение характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора А.

3 Сформулируйте определение квадратичной формы поверхности и линии второго порядка.

4 Запишите матрицу квадратичной формы $4x_1^2-30x_1x_2-7x_2^2$.

5 Найти собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

6 Сформулируйте критерий Сильвестра.

7 Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $x_1^2+4x_2^2-x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$ к каноническому виду.

8 Сформулируйте определение положительной (отрицательной) квадратичной формы.

9 Запишите матрицу квадратичной формы $3x_1^2+5x_2^2-x_3^2+x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$.

10 Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$.

4.2 Практическое занятие

Задание 1 Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix}5&-4&4\\2&1&2\\2&0&3\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Составим характеристическое уравнение данного оператора $\begin{vmatrix}5-\lambda&-4&4\\2&1-\lambda&2\\2&0&3-\lambda\end{vmatrix}=0$.

$(5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)-16-8(1-\lambda)+8(3-\lambda)=0$,

$(1-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda)-8)-16+8(3-\lambda)=0$,

$(1-\lambda)(15-5\lambda-3\lambda+\lambda^2-8)-16+8(3-\lambda)=0$,

$(1-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+7)-16+8(3-\lambda)=0$,

$\lambda^2-8\lambda+7-\lambda^3+8\lambda^2-7\lambda-16+24-8\lambda=0$,

$-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+15=0\cdot|(-1)\quad \lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0$.

Найдем корни уравнения.

$$\begin{array}{r|l}
\underline{}\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15 & \lambda-1 \\ \cline{2-2}
\lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2-8\lambda+15 \\ \cline{1-1}
\underline{}-8\lambda^2+23\lambda-15 & \\
-8\lambda^2+8\lambda & \\ \cline{1-1}
\underline{}15\lambda-15 & \\
15\lambda-15 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Получаем: $(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+15)=0 \Rightarrow \lambda_1=1$ или $\lambda^2-8\lambda+15=0$.

Найдем корни второго уравнения.

$D=b^2-4ac$, $D=(-8)^2-4\cdot1\cdot15=64-60=4$.

$$\lambda_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ \lambda_{2,3}=\frac{8\pm2}{2}\Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_2=5,\\ \lambda_3=3.\end{array}$$

Таким образом, собственные значения равны $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=3$.

2. Найдем собственные векторы линейного оператора для каждого собственного значения: При $\lambda_1=1$:

$$\begin{cases}4x_1-4x_2+4x_3=0, & |:4\\ 2x_1+2x_3=0, & |:2\\ 2x_1+2x_3=0 & |:2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1+x_3=0,\\ x_1+x_3=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ 0\cdot x_3=0,\\ x_1=-x_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=0,\\ x_3=a, \quad a\in R\\ x_1=-x_3.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-a,\\ x_2=0,\\ x_3=a.\end{cases}$$

Первый собственный вектор $X_1=\begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$. Пусть $a=1$, тогда $X_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

При $\lambda_2=5$:

$$\begin{cases}-4x_2+4x_3=0, & |:4\\ 2x_1-4x_2+2x_3=0, & |:2\\ 2x_1-2x_3=0, & |:2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\ x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1-x_3=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3-2x_3+x_3=0,\\ x_2=x_3.\\ x_1=x_3,\end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_2 = x_3. \\ x_1 = x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = b, \\ x_2 = b, \ b \in R. \\ x_1 = b. \end{cases}$$

Второй собственный вектор $X_2 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}$. Пусть $b = 1$, тогда $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad\qquad\quad = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_2 + 4x_3 = 0, \ |:4 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \ |:2 \\ x_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = x_3, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_2 = x_3, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = c, \\ x_2 = c, \ c \in R \\ x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Третий собственный вектор $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{n} \\ \tilde{n} \end{pmatrix}$. Пусть $\tilde{n} = 1$, тогда $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: При $\lambda_1 = 1 \ \ X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; при $\lambda_2 = 5 \ \ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; при $\lambda_3 = 3 \ \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 2 Выяснить знакоопределенность квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ и найти ортогональную матрицу, приводящую квадратичную форму к каноническому виду.

Решение. Запишем данное уравнение в матричном виде
$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Для того чтобы найти матрицу ортогонального преобразования, сначала составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ и найдем собственные значения: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^3-3\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=3.$

Получены собственные значения: $\lambda=0$ с кратностью 2 и $\lambda=3$ с кратностью 1.

Диагональная матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ или $\Lambda = diag(0\ 0\ 3)$.

Далее для каждого собственного значения находим собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений. Для каждой системы будем находить фундаментальную систему решений.

а) $\lambda=0$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1+c_2+c_3=0. \end{cases}$

Решаем систему линейных уравнений матричным методом: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$ Вычеркнем из данной матрице нулевые строки, получим: $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\Lambda = 1 \Rightarrow c_1=-c_2-c_3$, пусть $c_2=a$, $\tilde{n}_3=b \Rightarrow c_1=-a-b$.

Первый собственный вектор: $l_1=\begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Пусть $a=-1,\ b=0$, тогда $l_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda=0$

Рассуждая аналогично первому случаю для того же собственного значения, имеем второй собственный вектор $l_2 = \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ со значениями $a = 0$, $b = -1$, $l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Векторы l_1 и l_2 не ортогональны.

Ортогонализируя l_1 и l_2 методом Грама-Шмидта, получим два ортогональных вектора $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Теперь необходимо нормировать эти векторы (разделить каждую координату вектора на ее длину) $X_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $X_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

в) Аналогично находим для собственного значения $\lambda = 3$ собственный вектор: $X_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Запишем матрицу ортогонального преобразования $S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

С помощью матрицы S от старого базиса (x_1, x_2, x_3) выполняется переход к новому базису (y_1, y_2, y_3):

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3, x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3, x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3.$$

Ответ: $S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Задание 3 Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $11x_1^2 - 20x_1x_2 - 4x_2^2 - 20x_1 - 8x_2 + 1 = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в матричном виде

$$(x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-20 \; -8)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Для того чтобы найти матрицу ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму $(x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ к каноническому виду, сначала составим характеристическое уравнение

$$det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -10 \\ -10 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(-4-\lambda) - 100 = 0.$$

Решая уравнение, мы получим два действительных корня $\lambda = -9, \quad \lambda = 16$.

Далее для каждого собственного значения находим собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений.

Для каждой системы будем находить фундаментальную систему решений.

а) $\lambda = -9$

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20c_1 - 10c_2 = 0, \\ -10c_1 + 5c_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0, \\ -2c_1 + c_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} c_1 \in R, \; c_1 \neq 0, \\ c_2 = 2c_1. \end{cases}$$

Первый собственный вектор имеет координаты $\begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}$.

При $c_1 = 1$ первый собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормируем вектор и получим первый нормированный собственный вектор $Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

б) $\lambda = 16$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\ 5c_1 - 10c_2 = 0, \\ -10c_1 - 20c_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} c_1 = -2c_2, \\ c_2 \in R,\ c_2 \neq 0. \end{cases}$$

Второй собственный вектор имеет координаты $\begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Аналогично, первому случаю второй нормированный собственный вектор $Y_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

в) Ортогональный оператор, приводящий квадратичную форму к каноническому виду имеет вид $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Базисные векторы новой системы координат (O_1, Y_1, Y_2). $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $Y_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

Так как det S=1, то A оператор поворота двумерного линейного пространства вокруг начало координат на угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(Если бы мы получили матрицу такую, что detS=-1, то достаточно было бы поменять местами два собственных вектора.)

Получим уравнение кривой в новой системе координат (O_1, Y_1, Y_2), применяя формулы перехода: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_2$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2$.

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 + (-20 - 8)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 + \begin{pmatrix} -\frac{36}{\sqrt{5}} & \frac{32}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

$$\frac{\left(y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{5/9} - \frac{\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{5/16} = 1,$$

пусть $y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = z_1$, $y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} = z_2$, тогда $\frac{z_1^2}{5/9} - \frac{z_2^2}{5/16} = 1$.

Уравнение определяет гиперболу, полученную параллельным переносом системы координат $(\hat{I}_1, Y_1, Y_2)$ в точку $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Изобразим кривую $\frac{z_1^2}{5/9} - \frac{z_2^2}{5/16} = 1$.

Для начала, изобразим оси координат Ox_1 и Ox_2.

Далее, собственные вектора будут являться базисными векторами новой системы координат $(\hat{I}_1, Y_1, Y_2)$: $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $\qquad Y_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

В новой системе координат $\hat{I}_1 \acute{o}_1 \acute{o}_2$ изображаем центр гиперболы в точке с координатами $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.Через данную точку проведем новую систему координат $(\hat{I}_2, Z_1, Z_2)$ параллельную $(\hat{I}_1, Y_1, Y_2)$.

В системе координат $\hat{I}\ _2 z_1 z_2$ по оси $O_2 z_1$ вверх и вниз отмечаем расстояние равное $\frac{\sqrt{5}}{3}$, а по оси $O_2 z_2$ - расстояние равное $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Через полученные точки проведем вспомогательный прямоугольник, в котором диагонали будут содержать асимптоты гиперболы. Ось $O_2 z_1$ является действительной осью и через нее проходит гипербола.

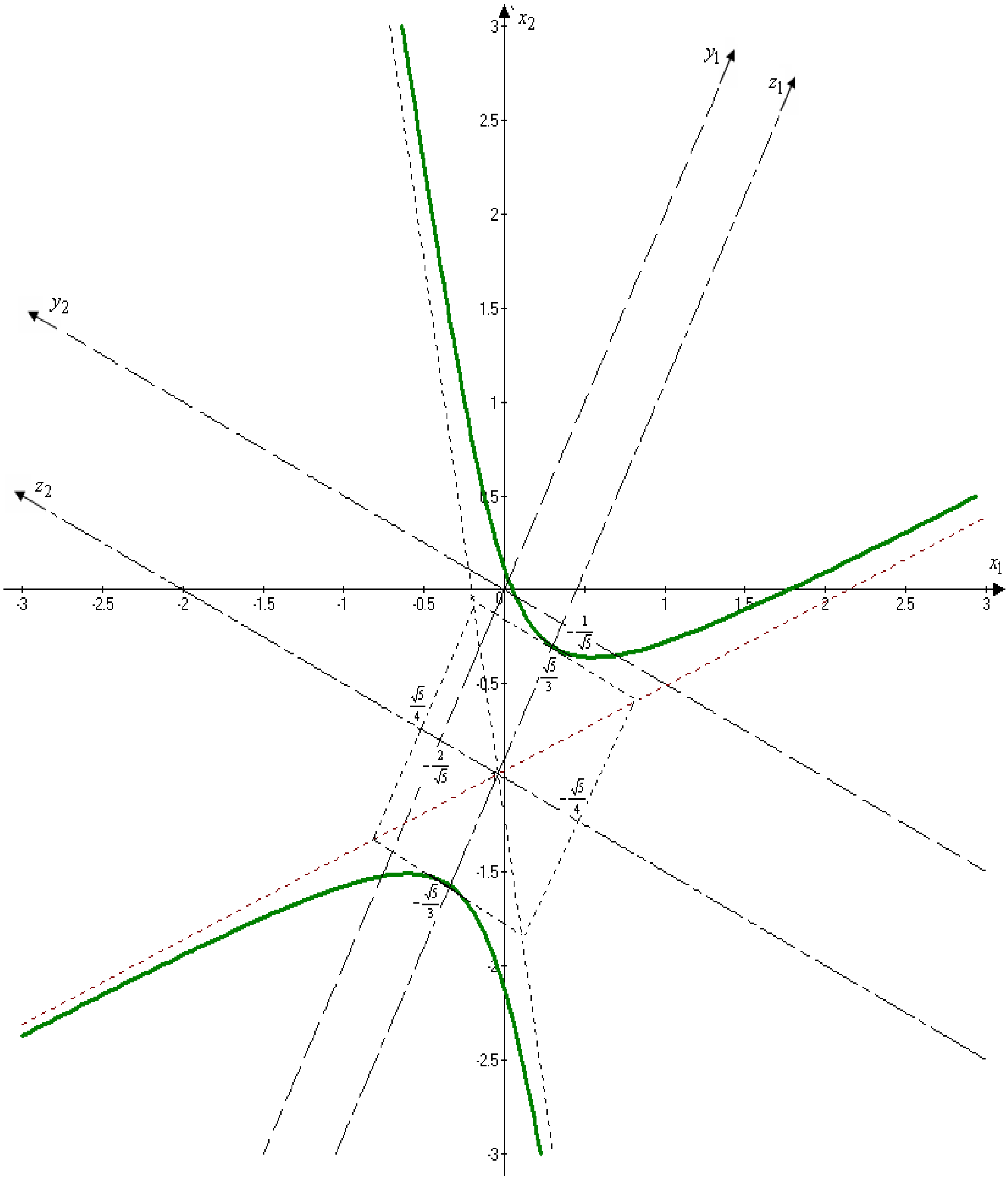

Рисунок 1

Ответ: $\dfrac{z_1^2}{5/9} - \dfrac{z_2^2}{5/16} = 1$.

Задание 4 Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

или $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$.

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$.

Каноническое уравнение поверхности можем написать сразу: $-3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 + 6 = 0$ или $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{2} - \dfrac{z'^2}{1} = 1.$

Данная поверхность является однополостным гиперболоидом вращения с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$. Найдем теперь главные направления данной поверхности и формулы преобразования координат, приводящие данное уравнение к каноническому виду. Так как характеристическое уравнение имеет двукратный корень, то решаем аналогично предыдущим случаям. Составим применительно систему уравнений : $\begin{cases} (1-\lambda)l + 2m - 4n = 0, \\ 2l + (-2-\lambda)m - 2n = 0, \\ -4l - 2m + (1-\lambda)n = 0. \end{cases}$

Подставим сюда двукратный корень характеристического уравнения $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$, мы получим $\begin{cases} 4l + 2m - 4n = 0, \\ 2l + m - 2n = 0, \\ -4l - 2m + 4n = 0. \end{cases}$

Система свелась к одному существенному уравнению: $2l + m - 2n = 0$ (*),

(два других ему пропорциональны). Пусть, например, $l = 1$, и $m = 2$, тогда из уравнения (*), получим вектор $(1;\ 2;\ 2)$, который определяет одно из бесчисленного множества главных направлений, соответствующих числу $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Для собственного значения $\lambda = \lambda_3 = 6$ с помощью однородной системы уравнений $\begin{cases} -5l + 2m - 4n = 0, \\ 2l - 8\,m - 2n = 0, \\ -4l - 2m - 5n = 0. \end{cases}$ найдем собственный вектор $(2;\,1;\,-2)$, который определяет третье главное направление. Умножая векторно $(2;\,1;\,-2)$ на $(1;\,2;\,2)$, получим вектор $(6;\,-6;\,3)$, который также дает главное направление, отвечающее числу $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$ (но отличное от ранее найденного и перпендикулярное к нему).

Вместо последнего вектора удобнее взять $(2;\,-2;\,1)$. Нормируя найденные векторы и располагая их в надлежащем порядке, получим: $i' = (l_1;\, m_1;\, n_1) = \left(\frac{1}{3};\, \frac{2}{3};\, \frac{2}{3}\right)$,

$j' = (l_2;\, m_2;\, n_2) = \left(\frac{2}{3};\, -\frac{2}{3};\, \frac{1}{3}\right)$ $k' = (l_3;\, m_3;\, n_3) = \left(\frac{2}{3};\, \frac{1}{3};\, -\frac{2}{3}\right)$.

Отсюда имеем формулы искомого преобразования координат

$$x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z',\ y = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z',\ \ z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'.$$

Ответ: $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{1} = 1$.

Задание 5 Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $X^T AX$ от трех переменных с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Данная квадратичная форма положительно определена, так как

$$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Ответ: Квадратичная форма положительно определена.

Задание 6 Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $X^T AX$ от трех переменных с матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Данная квадратичная форма является знакопеременной, так как $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$

Ответ: Квадратичная форма знакопеременная.

Задание 7 Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $2x_1x_2$ от двух переменных.

Решение. Данная квадратичная форма является знакопеременной, так как матрица имеет вид $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -1 \neq 0.$

Ответ: Квадратичная форма знакопеременная.

Задание 8 Дана квадратичная форма

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа, записав соответствующее преобразование переменных.

Привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Проиллюстрировать закон инерции квадратичной формы на примерах преобразований, разобранных в п. 1) и 2).

Решение. $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

1) Коэффициент при $(x_2)^2$ равен 3, т. е. отличен от нуля. Выделим в квадратичной форме члены, содержащие x_2: $3(x_2)^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$. Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими x_2, и сразу вычтем добавленные члены. Тогда получим:

$$3(x_2)^2+4x_1x_2-2x_2x_3=3(x_2)^2+2x_2(2x_1-x_3)=3((x_2)^2+2\frac{x_2(2x_1-x_3)}{3})=$$
$$=3((x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3)^2-(\frac{(2x_1-x_3)}{3})^2)=3(x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3)^2-\frac{4}{3}(x_1)^2-\frac{1}{3}(x_3)^2+\frac{4}{3}x_1x_3.$$

Введем обозначение $y_2=x_2+\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3$, тогда переменная x_2 в квадратичной форме пропадает, y_2 в квадратичной появляется. Приведя подобные слагаемые, перепишем квадратичную форму: $3(y_2)^2+\frac{8}{3}(x_3)^2-\frac{4}{3}(x_1)^2+\frac{16}{3}x_1x_3=3(y_2)^2+W(x_1,x_3)$.

К квадратичной форме $W(x_1,x_3)$ снова применим метод выделения полного квадрата. Выделим все члены, содержащие x_1: $-\frac{4}{3}(x_1)^2+\frac{16}{3}x_1x_3$.

Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими x_1, т.е. приведем его к виду:

$$-\frac{4}{3}(x_1)^2+\frac{16}{3}x_1x_3=-\frac{4}{3}((x_1)^2-4x_1x_3)=-\frac{4}{3}((x_1-2x_3)^2-4x_3^2)=$$
$$=-\frac{4}{3}(x_1-2x_3)^2+\frac{16}{3}(x_3)^2.$$

Обозначим (x_1-2x_3) через y_1. Т.е. $y_1=x_1-2x_3$, Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму: $3(y_2)^2-\frac{4}{3}(y_1)^2+8(x_3)^2$. Выделять снова полный квадрат уже не надо, так как имеется только квадрат переменной x_3. Поэтому, введем обозначение $x_3=y_3$, получаем следующий канонический вид квадратичной формы: $-\frac{4}{3}(y_1)^2+3(y_2)^2+8(y_3)^2$, где

$$y_1=x_1-2x_3,\ \ y_2=\frac{2}{3}x_1+x_2-\frac{1}{3}x_3,\ \ y_3=x_3.$$

Запишем преобразование переменных в матричной форме:

$$Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2/3 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X.$$

Замечание 1. В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Замечание 2. Если в записи квадратичной формы $\Phi(x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n)$ отсутствует переменная x_k $(k\langle n)$, т. е. $a_{mk}=0$ $(m=\overline{1,n})$, то, записывая преобразование переменных, надо положить $y_k=x_k$.

2) Приведем к каноническому виду ортогональным преобразованием

квадратичную форму: $\Phi(x_1,\, x_2,\, x_3)=3(x_2)^2+3(x_3)^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

Запишем матрицу квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

В некотором евклидовом пространстве ξ_3 с ортонормированным базисом $(e_k)_3$ рассмотрим симметричный оператор A, для которого $A_e=A$. Построим для него ортонормированный собственный базис $(f_k)_3$.

Так как $A-\lambda E=\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 3-\lambda & -1\\ 2 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}$, то характеристическое уравнение запишется в виде $\lambda^3-6\lambda^2+32=0$. Оно имеет решения: $\lambda_1=-2,\ \lambda_{2,3}=4$. Таким образом, получаем канонический вид квадратичной формы: $-2(y_1)^2+4(y_2)^2+4(y_3)^2$.

Построим теперь ортонормированный базис $(f_k)_3$.

Рассмотрим $\lambda_1=-2$. Тогда: $A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

Поэтому координаты x_1, x_2, x_3 собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1, должны удовлетворять системе линейных уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой $r = 2$, $n - r = 1$. Следовательно ФСР этой системы состоит из одного решения, т. е. имеет, например, вид $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично предыдущему случаю для $\lambda_{2,3} = 4$, $A - \lambda_{2,3}E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, т. е. координаты x_1, x_2, x_3 собственных векторов, соответствующих собственному значению 4, удовлетворяют системе линейных уравнений $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, у которой $r = 1$, $n - r = 2$. Поэтому, данная система эквивалентна уравнению: $-4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

Значит, ФСР данной системы состоит из двух решений. Найдем их.

Полагая сначала $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, из последнего уравнения получим $x_1 = 0{,}5$; полагая затем $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, из того же уравнения имеем $x_1 = 0{,}5$.

Таким образом, ФСР состоит из решений $X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что $X_1, X_2, X_3 -$ столбцы из координат собственных векторов x_1, x_2, x_3, которые образуют базис в ξ_3. При этом x_1 ортогонален x_2 и x_3, так как X_1 - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$, отличному от $\lambda_{2,3} = 4$. Следовательно, чтобы построить ортогональный базис из собственных векторов линейного оператора A, надо ортогонализировать систему X_2, X_3. Для этого положим $Y_2 = X_2$, $Y_3 = -aY_2 + X_3$, где $a = (Y_2, X_3) : (Y_2, Y_2) = \frac{1}{4} : \frac{5}{4} = \frac{1}{5}$. Отсюда получим, $Y_3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь собственные векторы X_1, Y_2, Y_3 линейного оператора A взаимно ортогональны. Нормируя эти векторы, получим ортонормированный базис $(f_k)_3$:

$F_{1e} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $F_{2e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_{3e} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix}$. Итак, ортогональное преобразование:

$X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} Y$. Запишем квадратичную форму приведенную к каноническому виду: $-2(y_1)^2 + 4(y_2)^2 + 4(y_3)^2$.

3**)** В пунктах 1) и 2) одна и та же квадратичная форма двумя различными невырожденными преобразованиями приведена к двум различным каноническим видам. В каждом из них число положительных канонических коэффициентов равно 2, число отрицательных канонических коэффициентов равно 1.

4.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{cases} \lambda_1 = 7; \\ \lambda_2 = 4; \\ \lambda_3 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (2, \quad 1, \quad 0) \\ x_2 = (0, \quad 0, \quad 1) \\ x_3 = (1, \quad -2, \quad 0). \end{cases}$.

Задание 2 Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{cases} \lambda_1 = 4; \\ \lambda_2 = -2; \\ \lambda_3 = -2. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = (1, \quad 1, \quad 1) \\ x_2 = (1, \quad -1, \quad 0) \\ x_3 = (1, \quad 1, \quad -2). \end{cases}$

Задание 3 Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $29x_1^2 - 24x_1x_2 + 36x_2^2 - 34x_1 - 48x_2 - 139 = 0$.

Ответ: эллипс: $\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{4} = 1$.

Задание 4 Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $5x_1^2 + 26x_1x_2 + 5x_2^2 + 16x_1 - 16x_2 - 16 = 0$.

Ответ: две пересекающиеся прямые: $\frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{9} = 0$.

Задание 5 Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $2x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 4xy + 4yz - 8\text{z} + 1 = 0$.

Ответ: эллипсоид.

Задание 6 Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

Ответ: гиперболический цилиндр.

5 Деление многочленов с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида. Корни и значения многочленов: теорема Безу, схема Горнера. Кратные корни многочленов. Производная от многочленов

5.1 Вопросы для самоподготовки

1 Сформулируйте определение делителя двух многочленов.

2 Сформулируйте определение наибольшего общего делителя двух многочленов.

3 Сформулируйте теорему Безу.

4 Запишите теорему Виета.

5 Сформулируйте основную теорему алгебры.

6 Какие два многочлена называются взаимно простыми?

7 Сформулируйте определение неприводимого многочлена.

8 Запишите разложение многочлена по степеням (х-а). Формула Тейлора.

5.2 Практическое занятие

Задание 1 Разделить многочлен $-12x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 1$ на многочлен $x^2 + 1$.

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
-12x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 1 & x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-12x^6 - 12x^4} & -12x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 1 \\
\qquad 4x^5 + 9x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 1 & \\
\qquad \underline{4x^5 + 4x^3} & \\
\qquad\qquad 9x^4 + 8x^2 - 1 & \\
\qquad\qquad \underline{9x^4 + 9x^2} & \\
\qquad\qquad\qquad -x^2 - 1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 - 1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ответ: $-12x^4+4x^3+9x^2-1$.

Задание 2 Разделить многочлен $-3x^5+5x^4+3x-1$ на многочлен $-x^2+x+1$.

Решение.

$$
\begin{array}{l|l}
-3x^5+5x^4+3x-1 & -x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5+3x^4+3x^3} & 3x^3-2x^2+x-1 \\
\qquad 2x^4-3x^3+3x-1 & \\
\qquad \underline{2x^4-2x^3-2x^2} & \\
\qquad\qquad -x^3+2x^2+3x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{-x^3+x^2+x} & \\
\qquad\qquad\qquad x^2+2x-1 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x^2-x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3x &
\end{array}
$$

Ответ: $q(x)=3x^3-2x^2+x-1, r(x)=3x$.

Задание 3 Используя схему Горнера, разделить многочлен $-x^5+4x^3-8x^2+32$ на многочлен $x+2$.

Решение. Составим схему Горнера:

	-1	0	4	-8	0	32
		+	+	+	+	+
		2	-4	0	16	-32
-2	-1	2	0	-8	16	0

Остаток равен 0, следовательно число $x=-2$ является корнем многочлена$-x^5+4x^3-8x^2+32$.

Ответ: $r=0$.

Задание 4 Найдите значение многочлен $2x^5-4x^4-x^2+1$ при $x=7$.

Решение. Составим схему Горнера:

	2	-4	0	-1	0	1
		+	+	+	+	+
		14	70	490	3423	23961
7	2	10	70	489	3423	23962

Остаток равен 23962.

Ответ: $r = 23962$.

Задание 5 Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$,

$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.

Решение.

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2 & 2x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^4 + x^3 - x^2 - x} & x + 1 \\
2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 & \\
\underline{2x^3 + x^2 - x - 1} & \\
-3x^2 - 3x + 3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 + x^2 - x - 1 & -3x^2 - 3x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3 + 2x^2 - 2x} & -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\
-x^2 + x - 1 & \\
\underline{-x^2 - x + 1} & \\
2x - 2 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
-3x^2 - 3x + 3 & 2x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^2 + 3x} & -\frac{3}{2}x - 3 \\
\qquad -6x + 3 & \\
\underline{\qquad -6x + 6} & \\
\qquad\quad -3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x - 2 & -3 \\ \cline{2-2}
\underline{2x} & -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\
\quad -2 & \\
\underline{\quad -2} & \\
\quad\ 0 &
\end{array}
$$

Представим разложение в общем виде: $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, (1)

где $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$, $q_1(x) = x + 1$, $r_1(x) = -3x^2 - 3x + 3$.

Далее $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, (2)

где $q_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $r_2(x) = 2x - 2$.

Далее $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x)$, (3)

где $q_3(x) = -\frac{3}{2}x - 3$, $r_3(x) = -3$.

Далее $r_2(x) = r_3(x)q_4(x) + r_4(x)$, (4)

где $q_4(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$, $r_4(x) = 0$.

Так как $r_4(x) = 0$, то НОД($f(x), g(x)$)= $r_3(x) = -3$.

Из (3) формулы выразим $r_3(x)$, $r_3(x) = r_1(x) - r_2(x)q_3(x)$, (5)

Из (2) формулы выразим $r_2(x)$, $r_2(x) = g(x) - r_1(x)q_2(x)$, (6)

Из (1) формулы выразим $r_1(x)$ $r_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$ (7)

В (5) формулу подставим (6) и (7) формулы раскроем скобки, представим в следующем виде:

$r_3(x) = f(x)\big(1 + q_2(x)q_3(x)\big) + g(x)(-q_1(x) - q_3(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x)),$ где $u(x)$=$1 + q_2(x)q_3(x), v(x) = -q_1(x) - q_3(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x).$ (8)

Подставляя в полученную формулу (8) найденные ранее многочлены, получим:

$$u(x) = x^2 + \frac{3x}{2}, v(x) = -x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3.$$

Ответ: $-3 = \left(x^2 + \frac{3x}{2}\right) f(x) + \left(-x^3 - \frac{5x^2}{2} + 3\right) g(x).$

Задание 6 Найти рациональные корни многочлена

$f(x) = 16x^3 - 20x^2 - 48x + 63.$

Решение. Проиллюстрируем метод деления многочлена на одночлен по схеме Горнера.

	16	-20	-48	63
		+	+	+
		24	6	-63
$\frac{3}{2}$	16	4	-42	0
		+	+	
		24	42	
$\frac{3}{2}$	16	28	0	
		+		
		-28		
$-\frac{7}{4}$	16	0		

Ответ: двойной корень $x = \frac{3}{2},\ x = -\frac{7}{4}.$

Задание 7 Зная, что i является корнем многочлена $f(x) = \mathrm{x}^6 + 3x^5 + x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1$, найти остальные его корни.

Решение. Всего в поле комплексных чисел этот многочлен имеет шесть корней. Так как все коэффициенты многочлена $f(x) = \mathrm{x}^6 + 3x^5 + x^4 + 6x^3 - x^2 + 3x - 1$ это действительные числа, то вместе с числом i корнем этого многочлена является и сопряженное ему число (- i). Два корня найдены $x_1 = i,$

$x_2 = -i$. Проверим по схеме Горнера:

	1	3	1	6	-1	3	-1
		+	+	+	+	+	+
		i	$3i-1$	-3	$3i$	$-i-3$	1
i	1	$3+i$	$3i$	3	$3i-1$	$-i$	0
		+	+	+	+	+	
		i	$3i-2$	$-2i-6$	$2-3i$	i	
i	1	$3+2i$	$6i-2$	$-2i-3$	1	0	
		+	+	+	+		
		$-i$	$1-3i$	$3+i$	-1		
$-i$	1	$3+i$	$3i-1$	$-i$	0		
		+	+	+			
		$-i$	$-3i$	i			
$-i$	1	3	-1	0			

Следовательно, $x_{1,2} = i$, $x_{3,4} = -i$.

После деления мы получили многочлен второй степени:

$f(x) = x^2 + 3x - 1$. Следовательно, корнями квадратного уравнения будут : $x_{5,6} = \frac{-3\mp\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $x_{1,2} = i, x_{3,4} = -i, x_{5,6} = \frac{-3\mp\sqrt{13}}{2}$.

5.3 Задание для самостоятельного решения

Задание 1 Найти нормированный многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий двойной корень -1, простые корни 2 и 1+ i. (С помощью теоремы Виета).

Ответ: f $(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 4$.

Задание 2 Разложите многочлен $\mathrm{f}(x) = x^4 + 5x^2 + 9$ на множители, и неприводимые над полями рациональных, действительных и комплексных чисел.

Ответ: многочлен $\mathrm{f}(x)$ неприводим над полями рациональных и действительных чисел: $\mathrm{f}(x) = (x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)$, многочлен $\mathrm{f}(x)$ неприводим над полем комплексных чисел:

$$\mathrm{f}\,(x) = \left(x - \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right).$$

Задание 3 Разложите многочлен $\mathrm{f}(x) = x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$ на множители, и неприводимые над полями рациональных, действительных и комплексных чисел.

Ответ: Многочлен $\mathrm{f}(x)$ неприводим над полями рациональных и действительных чисел: $\mathrm{f}(x) = (x-2)(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)$, многочлен $\mathrm{f}(x)$ неприводим над полем комплексных чисел:

$$\mathrm{f}\,(x) = (x-2)(x+2)(x+2)\left(x - 1 - i\sqrt{3}\right)(x - 1 + i\sqrt{3}).$$

Задание 4 Найти значение многочлен $\mathrm{f}(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ и всех его производных при $x = -2$. Разложите $\mathrm{f}(x)$ по степеням $(x+2)$.

Ответ: $\frac{-41}{(x+2)^5} + \frac{26}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} + \frac{5}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)}$.

Задание 5 Решить уравнение

$a)x^3 + 6x^2 + 6x - 13 = 0$,б) $x^3 - 5x^2 + 20x - 16 = 0$

Ответ: а)$x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-7\mp i\sqrt{3}}{2}$, б)$x_1 = 1, x_{2,3} = 2 \mp i2\sqrt{3}$.

Задание 6 Решить уравнение

а) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$, б) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

Ответ: а) $x_{1,2} = \mp\sqrt{5}, x_{3,4} = \frac{1\mp i\sqrt{7}}{2}$. б) $x_{1,2} = \mp\sqrt{2}, x_{3,4} = \frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}$.

Задание 7 Отделить кратные множители многочлена

а)$\mathrm{f}(x) = x^6 - 6\,x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$,

б)$\mathrm{f}(x) = x^6 - 15\,x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$.

Ответ: а)$\mathrm{f}(x) = (x+1)^4(x-2)^2$; б) $f(x) = (x-1)^3(x+3)^2(x-3)$.

Задание 8 Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$,

Ответ: НОД=1.

Задание 9 Найти рациональные корни многочлена

$f(x) = 24x^4 + 22x^3 - 11x^2 - 7x + 2$.

Ответ: $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{2}{3}$

Задание 10 Зная, что число $1 - i$ является двойным корнем многочлена $f(x) = \mathrm{x}^6 - 9x^5 + 34x^4 - 72x^3 + 92x^2 - 68x = 24$, найти остальные его корни.

Ответ: $1 + i$, 2,3.

Задание 11 Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$,

$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

Ответ: $-x^3 - 1 = 1f(x) + (-x - 1)g(x)$.

Задание 12 Найти сумму кубов корней уравнения: $x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$.

Ответ: 11

Список использованных источников

1 Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 12-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-9221-0979-6.

2 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1974. – Ч.1. – 416 с: ил. – Библиогр.: с. 455-462. – ISBN 978-5-06-003959-7.

3 Ильин, В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова; Вып. 4). – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, – 2002. – 320 с.

4 Курош, А. Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учеб. для вузов / А.Г. Курош. – 18-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 432 с. – ISBN 978-5-8114-0521-3.

5 Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. – М.: Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред.В.Д. Кулиева. – 2005. – 216 с. – ISBN 5-9221-0581-7.

6 Молчанов, В.А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В.А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 194 с.

7 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами: 1 курс: учеб. пособие для вузов / К.Н. Лунгу [и др.]. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 576 с. – ISBN 978-5-8112-2326-8.

8 Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – 13 изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 288 с. – ISBN 5-8114-0427-1.

9 Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов / В.С. Шипачев. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 304 с.: ил. – ISBN 978-5-06-006145-1.