

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

Л. М. Туктамышева, Т.Н. Образцова

# **МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ**

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

Оренбург  
2019

УДК 330.4:519.86(076.5)

ББК 65в631я7+22.18я7

Т81

Рецензент – кандидат экономических наук, доцент О.С. Чудинова

**Туктамышева, Л. М.**

Т 81 Методы моделирования и прогнозирования: методические указания / Л.М. Туктамышева, Т.Н. Образцова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 32 с.

В методических указаниях представлены материалы для помощи обучающимся в освоении теоретических основ дисциплины, при подготовке к практическим занятиям, а также при организации самостоятельной работы по дисциплине «Методы моделирования и прогнозирования».

Методические указания предназначены для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика.

УДК 330.4:519.86(076.5)

ББК 65в631я7+22.18я7

© Туктамышева Л.М.,

© Образцова Т.Н., 2019

© ОГУ, 2019

## Содержание

Введение .....	4
1 Самоподготовка: проработка и повторение лекционного материала .....	7
2 Подготовка к практическим занятиям .....	13
3 Примеры тестов для проведения рубежного контроля .....	25
Список использованных источников .....	29

## Введение

Предлагаемые методические указания предназначены обучающимся по направлению обучения 01.03.04 Прикладная математика для помощи при подготовке к практическим занятиям, а также при организации самостоятельной работы и освоении дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования» в 7 семестре.

Цель освоения дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования» формирование теоретических знаний о методах, моделях и приемах, позволяющих с использованием данных, представленных одномерными и/или многомерными временными рядами, моделировать и прогнозировать экономические явления и процессы на кратко- и среднесрочную перспективу на основе специализированного прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины:

- 1) освоение методов, приемов и алгоритмов моделирования и прогнозирования социально-экономических и иных процессов и явлений;
- 2) приобретение навыков формализации прикладных задач в сфере моделирования и прогнозирования социально-экономических и иных процессов и явлений
- 3) освоение современных пакетов прикладных программ для реализации методов и алгоритмов моделирования и прогнозирования;
- 4) приобретение навыков содержательной интерпретации результатов моделирования и прогнозирования.

Методические указания направлены на формирование следующих компетенций:

- ОПК-1 готовностью к самостоятельной работе.

- ОПК-2 способностью использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования.
- ПК-1 способность использовать стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач на электронных вычислительных машинах, отлаживать, тестировать прикладное программное обеспечение.
- ПК-9 способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат.
- ПК-10 готовность применять математический аппарат для решения поставленных задач, способностью применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов.
- ПК-11 готовность применять знания и навыки управления информацией.
- ПК-12 способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук.

Дисциплина «Методы моделирования и прогнозирования», изучаемая в рамках образовательной программы по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика, в соответствии с учебным планом базируется на знаниях, полученных обучающимися при освоении дисциплин Б.1.Б.6 Экономическая теория, Б.1.Б.17 Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов, Б.1.В.ОД.8 Микроэкономика, Б.1.В.ОД.10.1 Введение в анализ данных, Б.1.В.ОД.10.3 Эконометрика, Б.1.В.ОД.11 Краевые задачи для дифференциальных уравнений и численные методы их решения.

Включенные в методические указания задания и тесты распределены по темам рассматриваемой дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования». Методические указания по изучению дисциплины составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная

математика и СТО 02069024.110-2008 «Издания для образовательного процесса. Общие требования и правила оформления».

# **1 Самоподготовка: проработка и повторение лекционного материала**

Содержание разделов дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования»

## **№ 1 Временные ряды: основные понятия и определения.**

Случайные процессы и временные ряды. Характеристики случайных процессов. Стационарные временные ряды. Эргодические временные ряды. Основные характеристики стационарных временных рядов [1,7,17,27].

## **№ 2 Структурно-детерминированные временные ряды.**

Математические модели структурно-детерминированных временных рядов. Линейное прогнозирование структурно-детерминированных временных рядов. Анализ остатков модели (тестирование остаточной компоненты). Проверка нормальности распределения остатков на основе критерия Жака-Бера. Проверка некоррелированности остатков модели на основе статистик Бокса-Пирса, Бокса-Льюнга. Абсолютные и относительные показатели точности моделей. Верификация прогноза на основе статистики Тейла [1,3,7,8,18,27].

## **№ 3 Предварительный анализ стационарных временных рядов. Описательные характеристики стационарных временных рядов.**

Выборочные автокорреляционная и частная автокорреляционная функции стационарных временных рядов. Тестирование отсутствия трендовой составляющей: параметрические тесты и непараметрические тесты. Тестирование на отсутствие периодических составляющих: общие приемы выявления периодичности; критерий «пиков и ям» проверки гипотезы об отсутствии

периодичности; сведение задачи проверки наличия периодичности к задаче дисперсионного анализа [3,10,11,23].

#### **№ 4 Модели прогнозирования одномерных стационарных временных рядов.**

Простое экспоненциальное сглаживание. Выбор параметра адаптации и начальных условий. Модели скользящего среднего порядка  $q$  (MA( $q$ )). Модели авторегрессии порядка  $p$  (AR( $p$ )). Модели авторегрессии скользящего среднего порядка  $p, q$  (ARMA( $p, q$ )). Информационные критерии выбора модели. Сезонные модели авторегрессии скользящего среднего SARMA( $ps, qs$ ). Модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью (ARCH) [1,3,4,5,9,12,17,20].

#### **№ 5 Рекомендации к предварительному анализу нестационарных временных рядов.**

Тестирование характера тренда. Сглаживание на основе простой скользящей средней, медианное сглаживание. Вывод весовых коэффициентов при сглаживании на основе взвешенной скользящей средней. Детерминированный и случайный характер тренда (TS и DS-ряды). Тестирование единичного корня (критерий Дики-Фуллера, расширенный критерий Дики-Фуллера, критерий KPSS). Условия применимости критериев типа Дики-Фуллера. Тестирование единичного корня при наличии структурных скачков: критерий Перрона [2,9,13,16,22,24,25].

#### **№ 6 Модели прогнозирования одномерных нестационарных временных рядов.**

Модели линейного роста: двухпараметрическая модель Хольта, модель линейного роста Брауна. Адаптивные полиномиальные модели. Сезонные адаптивные модели. Модели с адаптивными параметрами адаптации. Следящий контрольный сигнал. Модель авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего ARIMA( $p, d, q$ ). Сезонные модели авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего SARIMA( $ps, ds, qs$ ) [1,3,9,12,16,17,21,28].

## **№ 7 Многофакторные модели прогнозирования стационарных многомерных временных рядов.**

Причинность по Грейнджеру. Векторные модели авторегрессии порядка  $p$  (VAR( $p$ )). Авторегрессионные модели с распределенными лагами. Общий случай: модель с лаговыми значениями результативной и факторной переменных ADL ( $p, q$ ). Частный случай: регрессионные модели с распределенными лагами факторной переменной [1,2,3,6,9,13,16,17,22,26].

## **№ 8 Многофакторные модели прогнозирования нестационарных многомерных временных рядов.**

Ложные тренды и ложная регрессия. Нетрадиционный корреляционный анализ. Коинтегрированность переменных. Критерии коинтеграции. Модели прогнозирования коинтегрированных временных рядов на основе систем одновременных регрессионных уравнений (COY). Модели корректировки ошибок. Векторные модели корректировки ошибок [1,2,3,6,9,13,16,17,22].

## **Рекомендации по изучению лекционного материала по разделам дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования»**

Лекции выступают важнейшим методом изучения дисциплины и призваны ознакомить студента с основным материалом курса. Предполагается, что на момент изложения лекции студент обладает знаниями из предыдущих курсов, выступающих пререквизитами к изучению материала, повторил основной материал, свободно ориентируется в определении категорий, понятий и обозначений тех или иных показателей или характеристик, необходимых для освоения нового материала.

Освоение материала должно сопровождаться конспектированием материала. Математический характер дисциплины предполагает использование большого числа формул. Уточняйте запись формулы у лектора или по основному источнику литературы по разделу, если вы сомневаетесь в правильности ее написания в вашей

лекции. В ходе лекционного занятия следует принимать активное участие: предлагать свои примеры из практики, выводить формулы, приводить доказательства.

Успешное изучение дисциплины связано с постоянной работой с лекционным материалом, дополнительным изучением специализированной учебной и периодической литературы.

Изучение лекционного материала наиболее оптимально начинать в тот же день, когда было лекционное занятие. До следующего лекционного материала, необходимо пометить вопросы, которые вызывают у вас затруднения.

Далее приведены разделы дисциплины с рекомендациями по повторению пройденного материала по другим дисциплинам и разделам методов моделирования и прогнозирования.

### **№ 1 Временные ряды: основные понятия и определения.**

Повторить из курса «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов» разделы, связанные с определением случайных величин, случайных процессов. По курсу «Анализ данных» повторить тему «Многомерный корреляционный анализ» [6,14].

Ознакомьтесь с основными источниками для информационной базы ([Росстат](#), [базы данных ЦБР](#), [МВФ](#) и др.), дополнительно данные по РФ можно найти в [едином архиве статистических и социологических данных ВШЭ](#).

### **№ 2 Структурно-детерминированные временные ряды.**

Повторить из курса эконометрики темы, связанные с формированием матрицы типа объект-свойства, проверкой адекватности модели, построением доверительных интервалов для оценок параметров моделей и прогноза. Из курса «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов» повторить проверку гипотезы о характере распределения случайной величины (проверка гипотезы о нормальном распределении случайной величины) [1,15,19].

### **№ 3 Предварительный анализ стационарных временных рядов.**

#### **Описательные характеристики стационарных временных рядов.**

Повторить первый раздел дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования». Для изучения вопроса «Тестирование отсутствия трендовой составляющей: параметрические тесты и непараметрические тесты» повторить тему «Проверка статистических гипотез» из курса «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов», темы «Ранговые коэффициенты корреляции», «Дисперсионный анализ» из курса «Анализ данных» [1,14,19,23].

### **№ 4 Модели прогнозирования одномерных стационарных временных рядов.**

Повторить темы «ОЛММР с автокоррелированными остатками», «ОЛММР с гетероскедастичными остатками» из курса «Эконометрика», тему «Марковские процессы» из курса «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов» [1,7,15,19].

### **№ 5 Рекомендации к предварительному анализу нестационарных временных рядов.**

Повторить 1 и 3 раздел настоящей дисциплины. Повторить тему «Проверка параметрических гипотез» из курса «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов» [1,14].

### **№ 6 Модели прогнозирования одномерных нестационарных временных рядов.**

Повторить 4 раздел настоящей дисциплины, вопросы, связанные с построением и оценением модели АРСС. Повторить вопрос «Тестирование на отсутствие периодических составляющих» из 3 раздела настоящей дисциплины.

### **№ 7 Многофакторные модели прогнозирования стационарных многомерных временных рядов.**

Повторить тему «КЛММР» из курса эконометрики. Повторить 2 раздел настоящей дисциплины тему «Анализ остатков модели (тестирование остаточной компоненты)», 4 раздел вопросы, связанные с построением и оцениванием модели АРСС [15,19].

### **№ 8 Многофакторные модели прогнозирования нестационарных многомерных временных рядов.**

Повторить тему «Системы одновременных регрессионных уравнений (СОУ)» из курса эконометрики. Повторить 2 раздел настоящей дисциплины тему «Анализ остатков модели (тестирование остаточной компоненты)» [1].

## 2 Подготовка к практическим занятиям

Темы практических занятий дисциплины «Методы моделирования и прогнозирования».

В рамках курса «Методы моделирования и прогнозирования» предусмотрено 6 тем практических занятий. При подготовке к практическим занятиям следует выучить лекционный материал, проработать материал основной и дополнительной литературы.

### 1. Структурно-детерминированные временные ряды.

Задание 1. Пусть оценка прогнозируемого значения  $y_m$ :

$$\hat{y}_m = \hat{W}^T Y = \Psi^{(m)} (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T. \quad (1)$$

Ошибка прогноза:

$$\min \sigma_\eta^2 = \sigma^2 (1 + \hat{W}^T \hat{W}) = \sigma^2 (1 + \Psi^{(m)} (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^{(m)T}). \quad (2)$$

Несмещенная оценка  $\sigma^2$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^N (y_i - \Psi^{(i)} \hat{\beta})^2 = \frac{1}{N-n} (Y - \Psi \hat{\beta})^T (Y - \Psi \hat{\beta}), \quad (3)$$

где  $\Psi^{(i)} = (\psi_1(t_i), \psi_2(t_i) \dots \psi_n(t_i))$ .

В итоге оценка ошибки прогноза:

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = \hat{\sigma}^2 (1 + \Psi^{(m)} (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^{(m)T}). \quad (4)$$

Имея  $\sigma_{\eta}^2$  или  $\hat{\sigma}_{\eta}^2$  постройте доверительный интервал для  $y_m$ .

Задание 2. Пусть  $\hat{y}_m$  рассчитывается по ортогональной системе векторов  $\psi_1(t_i), \psi_2(t_i) \dots \psi_n(t_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Покажите, что в этом случае

$$\hat{y}_m = \sum_{k=1}^n \Psi_k(t_m) \left( \frac{\sum_{i=1}^N \Psi_k(t_i) y_i}{\sum_{i=1}^N \Psi_k^2(t_i)} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_{\eta}^2 = \sigma^2 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_k^2(t_m)}{\sum_{i=1}^N \Psi_k^2(t_i)} \right) \quad (6)$$

Задание 3. Подготовьтесь привести примеры ортогональных систем базисных функций:  $\psi_1(t_i), \psi_2(t_i) \dots \psi_n(t_i)$ .

## 2. Предварительный анализ стационарных временных рядов.

Задание 1. Ряд динамики числа заключенных договоров ОАО «Вектор» представлен в таблице. Проверить гипотезу об отсутствии сезонности на основе критерия Краскала-Уоллиса.

Таблица 1 – Исходные данные

Год	Квартал			
	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	123	234	553	98
i=2	132	254	541	76
i=3	143	278	498	59
i=4	156	209	567	102
i=5	159	234	543	112

Задание 2. Пусть оценка коэффициентов автокорреляции до 6 порядка представлены в таблице. Оценить частный коэффициент автокорреляции 3-го порядка.

Таблица 2 – Оценки коэффициентов автокорреляции

Порядок лага	1	2	3	4	5	6
Оценка коэффициента автокорреляции	0,8	0,63	0,34	0,1	0,04	0,009

Задание 3.

Пусть при применении критерия «восходящих и нисходящих» серий получены следующие результаты.

Таблица 3 – Результаты определения серий в ряду динамики

Номер наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9
знак	-	-	-	+	+	-	+	+	+
Номер наблюдения	10	11	12	13	14	15	16	17	18
знак	+	+	-	-	-	-	+	+	-
Номер наблюдения	19	20	21	22	23	24	25	26	27
знак	-	-	+	+	+	+	+	+	-

Проверить гипотезу об отсутствии тренда среднего.

3 Модели прогнозирования одномерных стационарных временных рядов.

Задание 1.

Пусть рассматривается ряд динамики вида:

$$\eta_t = a_0 + \varepsilon_t \quad (7)$$

где  $a_0$  – константа

$\varepsilon_t$  – случайные отклонения – «белый шум», то есть:

$$\begin{aligned} M(\varepsilon_t) &= 0; \\ D(\varepsilon_t) &= \text{const} = \sigma^2; \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-\tau}) &= 0, \forall \tau \neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

К ряду применено экспоненциальное сглаживание по формуле:

$$S_t(y) = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1}(y) \quad (9)$$

Найти дисперсию сглаженного ряда. Во сколько раз снизится дисперсия сглаженного ряда, если параметр адаптации  $\alpha = 0,3$ .

Задание 2. Записать дисперсию и коэффициенты автокорреляции 1-го, 2-го и 3-го порядка процесса скользящего среднего второго порядка  $\eta_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}$ .  
 $\hat{\beta}_1 = 0,3; \hat{\beta}_2 = 0,5$ .

Задание 3. Модель авторегрессии второго порядка:

$$\text{AR}(2): \eta_t = \alpha_1 \eta_{t-1} + \alpha_2 \eta_{t-2} + \varepsilon_t \quad (10)$$

Выразить через  $\alpha_1, \alpha_2$  коэффициенты автокорреляции и частные коэффициенты автокорреляции до третьего порядка включительно. Найти их оценки при  $\hat{\alpha}_1 = 0,18; \hat{\alpha}_2 = 0,34$ .

4 Модели прогнозирования одномерных нестационарных временных рядов.

Задание 1. Ряд динамики числа заключенных договоров ОАО «Вектор» представлен в таблице. Проверка показала отсутствие сезонности в ряду динамики. Записать сглаженные значения по методу простой скользящей средней, медианному

сглаживанию при длине интервала сглаживания 5. Записать сглаженные значения по методу взвешенной скользящей средней при длине интервала сглаживания 7 и полиноме 3-го порядка.

Таблица 4 – Исходные данные

Год	Квартал			
	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	223	234	253	298
i=2	332	354	341	336
i=3	443	478	498	459
i=4	456	509	567	502

Задание 2. Процесс случайного блуждания с дрейфом

$$\eta_t = \mu + \eta_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (11)$$

где  $\mu$  – величина дрейфа (сноса).

Записать, чему равна дисперсия случайного блуждания с дрейфом.

Задание 3. Пусть оценки коэффициентов автокорреляции и частных коэффициентов корреляции первых разностей ряда динамики объема продаж ООО «Вектор» по месяцам за 8 лет имеют значения, представленные в таблице. Сделать вывод о значимости коэффициентов на основе расчета доверительных интервалов как  $\pm 1,96/\sqrt{N}$ . Сделать предположение о виде модели и порядке p,q.

Таблица 5 – Оценки коэффициентов автокорреляции

Порядок лага	1	2	3	4	5	6
Оценка коэффициента автокорреляции	0,8	0,03	0,029	0,01	0,04	0,009
Порядок лага	1	2	3	4	5	6
Оценка частного коэффициента автокорреляции	0,6	0,53	0,05	0,01	0,009	0,007

5 Многофакторные модели прогнозирования стационарных многомерных временных рядов.

Задание 1.

Пусть оценка VAR(1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1,1} \\ x_{t-1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{t1} \\ z_{t2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Записать значения IRF (функции реакции на импульсы).

$$\begin{cases} \{1, \Phi_{ii}^{(1)}, \Phi_{ii}^{(2)}, \Phi_{ii}^{(3)}, \dots\} & \text{при } i = j \\ \{0, \Phi_{ji}^{(1)}, \Phi_{ji}^{(2)}, \Phi_{ji}^{(3)}, \dots\} & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (13)$$

В случае VAR(1)  $\Phi^{(1)} = A, \Phi^{(2)} = A^2, \Phi^{(3)} = A^3, \dots$

Задание 2.

Пусть оценка VAR(1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,15 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1,1} \\ x_{t-1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{t1} \\ z_{t2} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Запишите оценку VECM после трансформации VAR.

Задание 3.

Пусть оценка VAR(1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{t1} \\ x_{t2} \\ x_{t3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,25 \\ 0,05 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1,1} \\ x_{t-1,2} \\ x_{t-1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{t1} \\ z_{t2} \\ z_{t3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Запишите оценку VECM после трансформации VAR.

Многофакторные модели прогнозирования нестационарных многомерных временных рядов.

Задание 1.

Пусть структурная форма СОУ имеет вид:

$$\begin{cases} y_{1t} = \beta_{12}y_{2t} + c_{11}x_{1t} + c_{12}x_{2t} + \delta_{1t} \\ y_{2t} = \beta_{21}y_{1t} + c_{21}x_{1t} + c_{23}x_{3t} + \delta_{2t} \end{cases} \quad (16)$$

где  $y_{it}$  – эндогенные переменные  $i=1,2$ ,

$x_{jt}$  – экзогенные переменные,  $j=1,2,3$ .

Проверить идентифицируемость всей системы и каждого уравнения.

Задание 2.

Система уравнений, описывающая соотношения между спросом и предложением:

$$\begin{cases} q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + \delta_{1t} \\ p_t = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1} + \beta_2 x_t + \delta_{2t} \end{cases}, \quad (17)$$

где  $q_t$  – объем предложения (спроса) в период  $t$ , который совпадает со спросом (предложением) на товар в условиях равновесия;

$p_t$  – средняя цена за единицу товара, зафиксированная на рынке в период  $t$ ;

$x_t$  – среднедушевой доход в период  $t$ ;

$\delta_{1t}$  и  $\delta_{2t}$  – регрессионные остатки соответствующих уравнений. Найти коэффициенты приведенной формы.

Задание 3.

Пусть оценка VECM(1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{t1} \\ \Delta x_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,6 \\ 0,15 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1,1} \\ x_{t-1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{t1} \\ z_{t2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Пусть коинтегрирующий вектор

$\beta = (-0,3; 0,6)$ . Нормализованный коинтегрирующий вектор  $\beta' = (1; -2)$ . Найти  $\alpha$  из соотношения  $\Pi = \alpha\beta^T$ .

### **Вопросы для устного опроса на практических занятиях и коллоквиумах**

В рамках практических занятий предусмотрен устный опрос, а также проведение двух коллоквиумов, соответствующих двум рубежным контролям. Вопросы для устного опроса и коллоквиума по разделам дисциплины представлены далее:

#### **№ 1 Временные ряды: основные понятия и определения**

1. Случайные процессы и временные ряды.
2. Функция и плотность распределения случайного процесса (одномерная и многомерная).
3. Математическое ожидание, ковариационная матрица и ковариационная функция случайных процессов.
4. Дать определение стационарности в узком и широком смысле.
5. Эргодические временные ряды.
6. Автокорреляционная и частная автокорреляционная функция эргодических временных рядов.

#### **№ 2 Структурно-детерминированные временные ряды**

1. Априорная и апостериорная структурно-детерминированная модель временного ряда.
2. Структурно-детерминированные модели: общий случай  $n < N$ .

3. Структурно-детерминированные модели: случай ортогональных векторных функций и  $n \leq N$ .
4. Коэффициенты Фурье представления тренда по системе ортогональных функций (векторов)
5. Линейное прогнозирование структурно-детерминированных временных рядов.
6. Оценка ошибки прогноза.
7. Проверка нормальности распределения остатков на основе критерия Жака-Бера. Проверка некоррелированности остатков модели на основе статистик Бокса-Пирса, Бокса-Льюнга.
8. Абсолютные и относительные показатели точности моделей.
9. Верификация прогноза на основе статистики Тейла.

### **№ 3 Предварительный анализ стационарных временных рядов**

1. Описательные характеристики эргодических временных рядов: выборочная средняя и дисперсия.
2. Выборочные автокорреляционная и частная автокорреляционная функции стационарных временных рядов.
3. Критерий Стьюдента проверки гипотезы об отсутствии тренда среднего.
4. Критерий Фишера (использование средней оценки дисперсии по подпериодам).
5. Критерий Фишера (отношение дисперсий).
6. Критерий Кокрена.
7. Критерий Аббе-Линника.
8. Критерий Бартлетта.
9. Критерий Кокса-Стюарта.
10. Тест Манна-Уитни (тестирование математического ожидания).
11. Тест Сиджела-Тьюки.
12. Критерий Фостера-Стюарта.
13. Критерий, основанный на ранговой корреляции.

14. Критерий Бартелса.
15. Критерий инверсий.
16. Критерий Вальда – Вольфовитца.
17. Критерий Шахнесси.
18. Критерий Рамачандрана-Ранганатана.
19. Критерий Олмстеда.
20. Критерий кумулятивной суммы.
21. Знаково-ранговый критерий Холлина.
22. Критерий «пиков и ям» проверки гипотезы об отсутствии периодичности.
23. Сведение задачи проверки наличия периодичности к задаче дисперсионного анализа.

#### **№ 4 Модели прогнозирования одномерных стационарных временных рядов**

1. Простое экспоненциальное сглаживание: общий вид экспоненциальной средней.
2. Математическое ожидание и дисперсия сглаженного ряда.
3. Выбор параметра адаптации. Средний возраст данных.
4. Выбор начальных условий.
5. Разложение Вольда.
6. Модели скользящего среднего порядка  $q$  ( $MA(q)$ ): общий вид, запись с помощью операторов сдвига.
7. Математическое ожидание и дисперсия процесса  $MA(1)$ .
8. Доказательство свойства обратимости. Характеристическое уравнение.
9. Методы оценивания параметров модели  $MA(q)$ .
10. Точечный и интервальный прогноз по модели  $MA(q)$ .
11. Модели авторегрессии порядка  $p$  ( $AR(p)$ ). общий вид, запись с помощью операторов сдвига.
12. Математическое ожидание и дисперсия процесса  $AR(1)$ .

13. Доказательство свойства стационарности. Характеристическое уравнение.
14. Методы оценивания параметров модели AR (p).
15. Точечный и интервальный прогноз по модели AR(p).
16. Модели авторегрессии скользящего среднего порядка p,q (ARMA(p,q)) общий вид, запись с помощью операторов сдвига.
17. Методы оценивания параметров модели ARMA(p,q).
18. Точечный и интервальный прогноз по модели ARMA(p,q).
19. Информационные критерии выбора модели.
20. Сезонные модели авторегрессии скользящего среднего SARMA(ps,qs).
21. Модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью (ARCH).

## **№ 5 Рекомендации к предварительному анализу нестационарных временных рядов. Тестирование характера тренда**

1. Сглаживание на основе простой скользящей средней.
2. Медианное сглаживание: алгоритм, преимущества.
3. Вывод весовых коэффициентов при сглаживании на основе взвешенной скользящей средней.
4. Детерминированный и случайный характер тренда (TS и DS-ряды).
5. Случайное блуждание, случайное блуждание с дрейфом.
6. Последствия некорректного приведения к стационарному виду TS и DS –рядов.
7. Тестирование единичного корня: критерий Дики-Фуллера.
8. Расширенный критерий Дики-Фуллера.
9. Критерий KPSS проверки гипотезы о TS -ряде.
10. Условия применимости критериев типа Дики-Фуллера.
11. Тестирование единичного корня при наличии структурных скачков: критерий Перрона.

## **№ 6 Модели прогнозирования одномерных нестационарных временных рядов**

1. Модели линейного роста: двухпараметрическая модель Хольта.
2. TS и DS модель линейного роста Брауна.
3. Адаптивные полиномиальные модели: первого порядка.
4. Адаптивные полиномиальные модели: второго порядка.
5. Алгоритм оценивания адаптивных полиномиальных моделей.
6. Сезонные адаптивные модели: модель Уинтерса.
7. Сезонные адаптивные модели: модель Тейла-Вейджа.
8. Обобщенная модель представления сезонных адаптивных моделей.
9. Следящий контрольный сигнал: общий вид, достоинства и недостатки.
10. Модели с адаптивными параметрами адаптации.
11. Модель авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего ARIMA(p,d,q): общий вид, запись с помощью операторов сдвига.
12. Алгоритм построения и исследования модели ARIMA(p,d,q).
13. Методы оценивания параметров ARIMA(p,d,q).
14. Прогнозирование по модели ARIMA(p,d,q).
15. Сезонные модели авторегрессии проинтегрированного скользящего среднего SARIMA(ps,ds,qs).

## **№ 7 Многофакторные модели прогнозирования стационарных многомерных временных рядов**

1. Причинность по Грейнджеру.
2. Векторные модели авторегрессии порядка  $p$  (VAR(p)): структурная и приведенная форма.
3. Недостатки и преимущества векторных моделей авторегрессии.
4. Векторная модель авторегрессии первого порядка: общий вид, требование условия стационарности.
5. Авторегрессионные модели с распределенными лагами. Общий случай: модель с лаговыми значениями результативной и факторной переменных ADL (p,q).

6. Авторегрессионные модели с распределенными лагами. Частный случай: регрессионные модели с распределенными лагами факторной переменной.

### **№ 8 Многофакторные модели прогнозирования нестационарных многомерных временных рядов**

1. Ложные тренды и ложная регрессия.
2. Нетрадиционный корреляционный анализ.
3. Коинтегрированность двух переменных.
4. Критерии коинтеграции для двух переменных.
5. Коинтегрированность  $n$  переменных.
6. Процедура Энга-Гренджера тестирования коинтеграции.
7. Критерии коинтеграции для  $n$  переменных. Ранг коинтеграции.
8. Модели прогнозирования коинтегрированных временных рядов на основе систем одновременных регрессионных уравнений (СОУ).
9. Долгосрочное и краткосрочное равновесие. Модели корректировки ошибок.
10. Векторные модели корректировки ошибок.

### **3 Примеры тестов для проведения рубежного контроля**

По каждой теме приведены примеры под одному тесту с вариантом правильного ответа. Номер теста соответствует номеру темы.

1 Математическим ожиданием случайного процесса  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$  называют:

**а) неслучайную функцию  $m_\xi(t)$ , значение которой при каждом фиксированном  $t \in T$  равно математическому ожиданию случайной величины  $\xi(t, \omega)$ , полученному в сечении случайного процесса в момент « $t$ »;**

б) случайную функцию  $m_{\xi}(t)$ , значение которой при любом  $t \in T$  равно математическому ожиданию случайной величины  $\xi(t, \omega)$ , полученному в сечении случайного процесса в момент «t»;

в) случайную функцию  $m_{\xi}(t)$ , значение которой при каждом фиксированном  $t \in R$  равно математическому ожиданию случайной величины  $\xi(t, \omega)$ , полученному в любом сечении случайного процесса;

г) математическое ожидание неслучайной величины  $\xi(t, \omega)$  в сечении случайного процесса в момент «t».

2 Ошибка прогноза  $\min \sigma_{\eta}^2$  находится как:

а)  $\sigma^2(1 + \Psi^{(m)}(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^{(m)T})$ ;

б)  $\frac{1}{N-n}(Y - \Psi \hat{\beta}, Y - \Psi \hat{\beta})$ ;

в)  $\sigma^2(1 + \Psi^{(m)T}(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^{(m)})$ ;

г)  $\hat{\sigma}^2 \frac{1}{N-n} \sum_{i=1}^N (y_i - \Psi^{(i)} \hat{\beta})$ .

3 Укажите правило формирования вспомогательной последовательности  $\delta_t$  в критерии «восходящих и нисходящих» серий.

а)  $\delta_t = \begin{cases} +, & y_t > y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1 \\ -, & \text{иначе} \end{cases}$

б)  $\delta_t = \begin{cases} +, & y_t > y_{t-1} \\ -, & \text{иначе} \end{cases}$

в)  $\delta_t = \begin{cases} +, & y_t < y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1 \\ -, & \text{иначе} \end{cases}$

г)  $\delta_t = \begin{cases} +, & y_t < y_{t-1} \\ -, & \text{иначе} \end{cases}$

4 Запись модель  $\eta_t = 0.7\eta_{t-1} + \varepsilon_t$  с использованием оператора сдвига имеет

вид

а)  $(1 - 0.7L)\eta_t = \varepsilon_t$

б)  $(1 + 0.7L)\eta_t = \varepsilon_t$

в)  $0.7L\eta_t = \varepsilon_t$

г)  $(1 - 0.3L)\eta_{t-1} = \varepsilon_t$

5 Рассматривается временной ряд цен реализации джема (усл.ед.) 10 11 9 15 20 15 15 20 30. При использовании 7-точечной простой скользящей средней первое сглаженное значение равно

а) 11,5

б) 12,4

**в) 13,6**

г) 17,7

6 Если для приведения исследуемого нестационарного процесса к стационарному был осуществлен переход к разностям 2-го порядка, то окончательная форма записи модели АРПСС может иметь только вид:

а) АРПСС(1,1,2)

б) АРПСС(2,1,0)

**в) АРПСС(1,2,1)**

г) АРПСС(2,0,2)

7 Модель векторной авторегрессии VAR(1) имеет вид:

а) 
$$\begin{cases} x_t^1 = \beta_{11}x_{t-1}^1 + \beta_{12}x_{t-1}^2 + \varepsilon_t^1 \\ x_t^2 = \beta_{21}x_{t-1}^1 + \beta_{22}x_{t-1}^2 + \varepsilon_t^2 \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} x_t^1 = \beta_{11}x_{t-1}^2 + \beta_{12}x_{t-2}^2 + \varepsilon_t^1 \\ x_t^2 = \beta_{21}x_{t-1}^1 + \beta_{22}x_{t-2}^1 + \varepsilon_t^2 \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} x_t^1 = \beta_{11}x_{t-1}^2 + \beta_{12}x_{t-1}^2 + \varepsilon_t^1 \\ x_t^2 = \beta_{21}x_{t-1}^1 + \beta_{22}x_{t-2}^1 + \varepsilon_t^2 \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} x_t^1 = \beta_{11}x_{t-1}^2 + \beta_{12}x_t^2 + \varepsilon_t^1 \\ x_t^2 = \beta_{21}x_{t-1}^1 + \beta_{22}x_t^1 + \varepsilon_t^2 \end{cases}$$

8 Ранг коинтеграции  $r$  – это

а) **максимальное количество линейно независимых коинтегрирующих векторов**

б) максимальное количество линейно зависимых коинтегрирующих векторов

в) минимальное количество линейно независимых коинтегрирующих векторов

г) минимальное количество линейно зависимых коинтегрирующих векторов

## Список использованных источников

- 1 Айвазян, С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики : учеб. для вузов / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. - М. : Юнити, 1998. - 1022 с.
- 2 Айвазян, С.А. Эконометрика -2: продвинутый курс с приложениями в финансах: учебник / С.А. Айвазян, Д. Фантаццини . – М. : Магистр: Инфра-М, 2015. – 944 с.
- 3 Арженовский, С.В. Методы социально- экономического прогнозирования : учеб. пособие / С. В. Арженовский. - М. : Дашков и К, 2009. - 236 с. : ил. - Прил.: с. 221-235. - Библиогр.: с. 218-220. - ISBN 978 5-91131-941-0.
- 4 Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс ; пер. с англ. А. Л. Левшина ; под ред. В. Ф. Писаренко. - М. : Мир, 1974. Вып. 2 : . - 200 с. - Библиогр.: с. 189-193.
- 5 Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс ; пер. с англ. А. Л. Левшина ; под ред. В. Ф. Писаренко. - М. : Мир, 1974. Вып. 1 : . - 408 с.. - Библиогр.: с. 397-401.
- 6 Большаков, А. А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Большаков, Р.Н. Каримов. - М.: Горячая линия - Телеком, 2007. - 522 с.
- 7 Волков, И.К. Случайные процессы: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 448 с.
- 8 Дуброва, Т.А. Статистические методы прогнозирования / учебн.-практ. пособие / Т.А. Дуброва. - М. : МГУ экономики ,статистики и информатики, 1998. - 92 с.
- 9 Канторович, Г.Г. Анализ временных рядов / Г.Г. Канторович // Экономический журнал Высшей школы экономики. - 2003. - Т.7, N1. - С.79-103. - Оконч. Начало: 2002. - №1-4.
- 10 Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

11 Лемешко, Б.Ю. Свойства и мощность некоторых критериев случайности и отсутствия тренда / Б.Ю. Лемешко, А.С. Комиссарова, А.Е. Щеглов // Научный вестник НГТУ. - 2012. - №1. – С.1-15.

12 Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: уч. пос. – М.: Фин.и стат., 2003.– 416 с.

13 Магнус, Я. Р. Эконометрика. Начальный курс: учебник / Я.Р. Магнус, П. К. Катыхов, А. А. Пересецкий.- 7-е изд., испр. - Москва : Дело, 2005. - 504 с. : ил. - Библиогр.: с. 561-570. - Предм. указ.: с. 570.

14 Методы и модели эконометрики [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.04 Прикладная математика, 38.04.01 Экономика, 38.03.05 Бизнес-информатика / под ред. А. Г. Реннера; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Ч. 1. - Оренбург : ОГУ. - 2015. - ISBN 978-5-7410-1331-1. - 574 с

15 Методы и модели эконометрики [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.04 Прикладная математика, 38.04.01 Экономика, 38.03.05 Бизнес-информатика / под ред. А. Г. Реннера; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Ч. 2. - Оренбург : ОГУ. - 2015. - ISBN 978-5-7410-1260-4. - 434 с.

16 Носко, В. П. Эконометрика: элемент. методы и введ. в регрес. анализ врем. рядов / В. П. Носко; Ин-т экономики переходного периода. - М. : [Б. и.], 2004. - 501 с. - Библиогр.: с. 485-492. - Предм. указ.: с. 493-501. - ISBN 5-93255-141-0.

17 Подкорытова, О.А. Анализ временных рядов : учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / О.А. Подкорытова, М.В. Соколов. – М. : Издательство Юрайт, 2016. – 266 с.

18 Реннер, А. Г. К вопросу о методике моделирования структурно-детерминированных экономических временных рядов [Электронный ресурс] /

Реннер А. Г., Ленерт А. Г. // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры : материалы Всерос. науч.-практ. конф., 30 янв.-1 февр. 2013 г., Оренбург / М-во образования и науки РФ; Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Электрон. дан. - Оренбург: ИПК "Университет", 2013. - С. 1548-1550.

19 Реннер, А. Г. Основы эконометрики: учебное пособие для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по экономическому направлению / А. Г. Реннер, О. И. Стебунова, Л. М. Туктамышева; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Оренбург : ОГУ. – 2009. – 156 с.

20 Росси, Э. Одномерные GARCH-модели: обзор / Э. Росси // Квантиль. 2010. – №8. – С.1-67.

21 Светуных, И. С. Методы социально-экономического прогнозирования в 2 т. Т. 2 модели и методы : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. С. Светуных, С. Г. Светуных. – М. : Издательство Юрайт, 2018. – 447 с.

22 Суслов, В. И. Эконометрия – Новосибирск: СО РАН, 2005. – 744 с.

23 Тихомиров, Н.П. Эконометрика [Текст] : учеб. для вузов / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина; Рос. Эконом. Акад. им. Г.В. Плеханова. - М. : Экзамен, 2003. – 512 с.

24 Туктамышева, Л.М. К вопросу о методах идентификации характера тренда / Л.М. Туктамышева // Интеграция науки и практики в профессиональном развитии педагога. Материалы всероссийской научно-практической конференции. – Оренбург, ИПК ГОУ ОГУ, 2010. – С. 963 – 967.

25 Туктамышева, Л.М. О подходах к математическому моделированию рядов динамики со структурным скачком / Л.М. Туктамышева //Формирование основных направлений развития современной статистики и эконометрики. Материалы I-ой Международной научной конференции, Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2013. – С. 273-280.

26 Туктамышева, Л.М. Подход к математическому моделированию

многомерных временных рядов / Л.М. Туктамышева // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры. Материалы Всероссийской научно-методической конференции, Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2014. – С. 126-131.

27 Чураков, Е.П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике: учеб. Пособие / Е.П. Чураков. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 240 с.

28 Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. - 391 с.