Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

Н.А. Морозов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.04.01 Машиностроение, 20.04.01 Техносферная безопасность

Оренбург
2019

УДК 62-192
ББК 30.40
М 80

Рецензент – кандидат технических наук А.А. Гаврилов

Морозов, Н.А.
М 80 Определение доверительных интервалов: методические указания / Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 25 с.

Методические указания содержат варианты заданий и пример решения задачи по определению доверительных интервалов выборок случайных величин, их математических ожиданий и дисперсий.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки 15.04.01 Машиностроение, 20.04.01 Техносферная безопасность по дисциплинам «Надежность механических систем», «Методы расчета надежности механических систем», а также будут полезны для самостоятельной работы и практических занятий обучающихся по техническим направлениям бакалавриата и магистратуры.

УДК 62-192
ББК 30.40

Содержание

1 Краткие теоретические сведения

Для обучающихся по направлению подготовки 15.04.01 Машиностроение результаты освоения материала, представленного в методических указаниях, ориентированы на формирование компетенций ОПК-12 (обладать способностью подготавливать научно-технические отчеты, обзоры, публикации по результатам выполненных исследований в области машиностроения) и ПК-4 (обладать способностью подготавливать заявки на изобретения и промышленные образцы, организовывать работы по осуществлению авторского надзора при изготовлении, монтаже, наладке, испытаниях и сдаче в эксплуатацию выпускаемых изделий и объектов машиностроения), для обучающихся по направлению подготовки 20.04.01 Техносферная безопасность – ПК-13 (обладать способностью применять методы анализа и оценки надежности и техногенного риска).

Для нахождения доверительного интервала необходимо иметь выборку значений случайной величины x. Изобразим функцию плотности распределения $f(x)$ и математическое ожидание m_x данной выборки (рисунок 1).

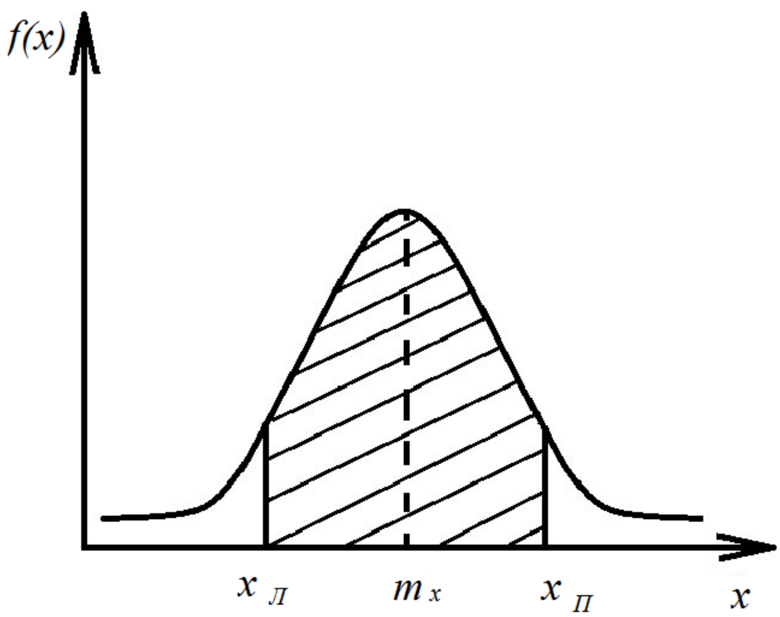

Рисунок 1 – Доверительный интервал

Возьмем на оси x произвольный интервал с границами: левая – $x_Л$, правую – $x_П$. Вероятность того, что случайная величина попадет в данный интервал, равна площади заштрихованной фигуры.

Аналитически эта вероятность γ может быть определена из формулы:

$$\gamma = P(x_Л < x < x_П) = \int_{x_Л}^{x_П} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_П} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_Л} f(x)dx = F(x_П) - F(x_Л), \quad (1)$$

где P – символ вероятности;

$F(x)$ – функция распределения.

Допустим дана вероятность γ, и необходимо найти границы интервала $x_{Л\gamma}$ и $x_{П\gamma}$, в который величина x попадает с вероятностью γ. Так как имеем две переменные $x_{Н\gamma}$ и $x_{В\gamma}$, то необходимо задать дополнительные условия. Например, указать, что границы располагаются симметрично относительно математического ожидания, или одну из границ необходимо назначить минус или плюс бесконечность. Так же могут назначаться несимметричные границы относительно $m_{x.}$.

Вероятность γ называют доверительной вероятностью, интервал $I\gamma=(x_{Л\gamma};\ x_{П\gamma})$ – доверительным интервалом, а его границы – доверительными границами.

Когда говорят не о генеральных совокупностях, а о выборках случайных величин (наборах экспериментальных данных), то можно сказать, что в среднем в $(\gamma \cdot 100)$ % случаев результаты экспериментов попадут в доверительный интервал $I\gamma$.

Иногда удобно доверительный интервал выражать в долях от среднеквадратического отклонения D_X. Так, например, для нормального закона распределения и для симметричных относительно математического ожидания доверительных границ интервал $(m_x - D_x;\quad m_x + D_x)$ накрывает 68,3 % всех экспериментальных точек, интервал $(m_x - 2D_x; m_x + 2D_x)$ накрывает примерно 95,5 % всех экспериментальных точек, а интервал $\left(m_x - 3D_x;\, m_x + 3D_x\right)$ – 99,7 % [1].

Если воспользоваться нормированной случайной величиной *u*, которая равна $u = \frac{x - m_x}{D_x}$, то можно для произвольной доверительной вероятности с помощью таблицы нормального распределения (приложение А) определить значение квантиля *u*, а по нему и доверительный интервал $I\gamma$. Для этого из уравнения $u_{\frac{\gamma+1}{2}} = \pm \frac{x - m_x}{D_x}$ находим $x_{Л\gamma} = m_x - u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x$ и $x_{П\gamma} = m_x + u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x$. Следовательно, доверительный интервал определится формулой:

$$I_\gamma = \left(m_x - u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x;\, m_x + u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x \right). \tag{2}$$

Математическое ожидание m_x является надежной оценкой генеральных совокупностей величин лишь при большом числе данных *n* в выборке. При малых выборках необходимо указать степень точности и надежности этой оценки, которая характеризуется доверительным интервалом.

Рассмотрим плотность распределения генеральной совокупности случайной величины (выборку при бесконечно большом количестве экспериментальных точек) (рисунок 2).

Так же на оси абсцисс показано истинное математическое ожидание (математическое ожидание генеральной совокупности) m_x. Однако на практике количество экспериментов, ограничено, и определить точно величину m_x не представляется возможным.

В связи с этим определяют величину среднего значения $\hat{m}_x$ по ограниченным экспериментальным данным (выборке). Если определять величину $\hat{m}_x$ по разным выборкам одной и той же случайной величины, то в результате получим разные оценки: $\hat{m}_{x1}, \hat{m}_{x2}, \hat{m}_{x3}$ и т.д. (рисунок 2).

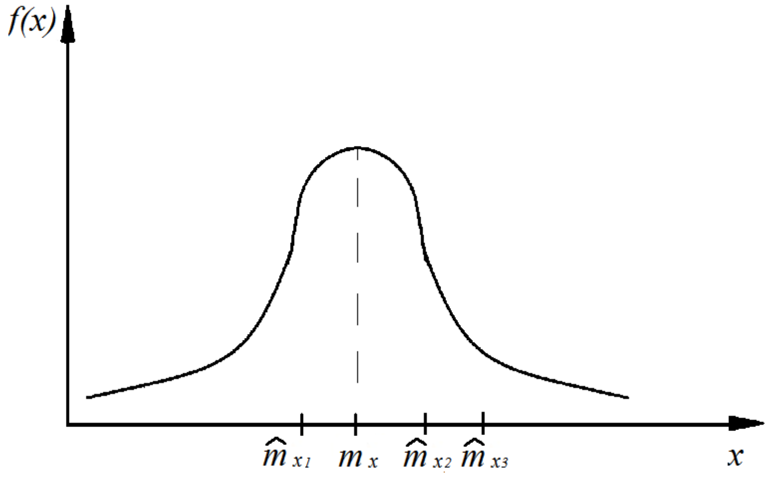

Рисунок 2 – Математическое ожидание и средние значения выборок

Таким образом, сама оценка $\hat{m}_x$ является случайной величиной, следовательно, у нее имеется свой закон распределения со своими характеристиками математического ожидания m_{m_x} и дисперсии $D^2_{m_x}$, причем данные характеристики будут равны:

$$m_{m_x} = m_x, \tag{3}$$

$$D^2_{m_x} = \frac{D^2_x}{n}. \tag{4}$$

Из формул видно, что математическое ожидание от среднего арифметического (которое в данном случае является оценкой) и математическое ожидание генеральной совокупности совпадают, а дисперсия случайной величины $\hat{m}_X$ меньше дисперсии случайной величины x в n раз.

Доверительный интервал математического ожидания удобно определять с помощью нормированной случайной величины t:

$$t = \frac{\hat{m}_x - m_x}{D_{m_x}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\hat{m}_x - m_x}{D_x}. \qquad (5)$$

Тогда:

$$I_{m_x} = \left(\hat{m}_x - t\frac{D_x}{\sqrt{n}}; \hat{m}_x + t\frac{D_x}{\sqrt{n}} \right). \qquad (6)$$

Если распределение случайной величины x подчиняется нормальному закону распределения, то распределение нормированной случайной величины t подчиняется распределению Стьюдента с $(n\text{-}1)$ степенями свободы (где n – объем выборки).

Плотность закона распределения Стьюдента имеет вид:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad (7)$$

где t – аргумент распределения Стьюдента;

Γ – гамма функция.

Доверительная вероятность того, что случайная величина t_i попадает в интервал $\left(-t_\gamma; t_\gamma\right)$ равна:

$$\gamma = P\left(-t_\gamma < t < t_\gamma\right) = \int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} S_{n-1}(t)dt\ . \qquad (8)$$

Следует отметить, что при $n \to \infty$ можно вместо таблицы Стьюдента пользоваться таблицей нормального закона распределения, так как в пределе закон Стьюдента переходит в нормальный закон. На практике пользуются нормальным распределением уже при $n>30$ [2].

Значения квантиля t распределения Стьюдента для различных доверительных вероятностей приведены в приложении Б. Число степеней свободы равно:

$$\nu = n - 1. \tag{9}$$

Если генеральная совокупность случайной величины подчиняется нормальному закону, то рассмотрение доверительных границ для дисперсии приводит к распределению Пирсона (распределению χ^2), квантили которого представлены в приложении В [3].

Распределение Пирсона уже не является симметричным. Уславливаются выбирать доверительные границы так, чтобы вероятность выхода случайной величины за пределы доверительного интервала вправо и влево были бы одинаковы и равны $(1-\gamma)/2$.

Доверительный интервал дисперсии $I_{D_x^2}$ определяют по формуле:

$$I_{D_x^2} = \left(\frac{D_x^2(n-1)}{\chi_1^2}; \frac{D_x^2(n-1)}{\chi_2^2} \right), \tag{10}$$

где χ_1^2, χ_2^2 – значение величины χ^2 для вероятностей α_1 и α_2.

Вероятности α_1 и α_2 определяются по формулам:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2}, \tag{11}$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{1+\gamma}{2}. \tag{12}$$

2 Постановка задачи и исходные данные

Даны варианты результатов замеров случайных величин несущей способности R(кН) и нагрузки N (кН) различных элементов объектов, представленные ниже.

Определить доверительные интервалы случайных величин R и N, их математических ожиданий и дисперсий для доверительных вероятностей: 0,9; 0,95 и 0,99.

Исходные данные.

Вариант 1. N: 425, 483, 532, 610, 553, 751, 526, 673, 581, 480; R: 664, 766, 688, 843, 711, 769, 700,774, 722, 747, 721, 805, 739, 744.

Вариант 2. N: 831, 956, 1063, 1204, 1110, 1503, 1053, 1357, 1163, 987; R: 1349, 1527, 1378, 1681, 1437, 1491, 1413, 1543, 1443, 1487, 1418, 1609, 1473, 1484.

Вариант 3. N: 1661, 1842, 2125, 2430, 2202, 3006, 2102, 1702, 2333, 1969; R: 2695, 3053, 2754, 3430, 2871, 2983, 2836, 3082, 2881, 2969, 2886, 3202, 2943, 2961.

Вариант 4. N: 622, 823, 702, 872, 736, 909, 781, 1012, 781, 1122; R: 1016, 1113, 1032 1112, 1063, 1122, 1081, 1146, 1085, 1152, 1083, 1261, 1106, 1201.

Вариант 5. N: 1243, 1652, 1411, 1751, 1472, 1803, 1579, 2021, 1592, 2253; R: 2034, 2226, 2068, 2221, 2125, 2241, 2162, 2293, 2165, 2312, 2163, 2321, 2213, 2406.

Вариант 6. N: 1864, 2472, 2123, 2621, 2202, 2701, 2364, 3035, 2386, 3373; R: 3043, 3332, 3091, 3338, 3184, 3365, 3244, 3436, 3242, 2461, 3242, 3783, 3311, 3610.

Вариант 7. N: 101, 136, 123, 142, 111, 155, 136, 168, 131, 185; R: 162, 181, 173, 182, 171, 186, 185, 199, 171, 192, 181, 210, 187, 213.

Вариант 8. *N*: 223, 252, 322, 272, 333, 284, 372, 295, 415, 306; *R*: 376, 408, 379, 402, 381, 412, 396, 421, 395, 422, 393, 441, 402, 463.

Вариант 9. *N*: 242, 285, 355, 285, 370, 316, 402, 313, 440, 335; *R*: 406, 445, 412, 441, 422, 449, 438, 454, 438, 462, 431, 485, 442, 506.

Вариант 10. *N*: 265, 306, 375, 312, 391, 343, 431, 341, 485, 356; *R*: 433, 382, 445, 481, 465, 482, 461, 498, 467, 501, 461, 523, 475, 544.

Вариант 11. *N*: 281, 332, 403, 431, 422, 362, 471, 373, 521, 386; *R*: 473, 512, 488, 514, 496, 525, 506, 532, 505, 539, 504, 560, 515, 588.

Вариант 12. *N*: 311, 354, 438, 368, 450, 384, 506, 397, 565, 417; *R*: 506, 559, 512, 552, 532, 553, 535, 576, 546, 574, 548, 609, 551, 632.

Вариант 13. *N*: 492, 581, 673, 522, 756, 555, 602, 531, 472, 411; *R*: 741, 731, 802, 723, 743, 722, 775, 706, 747, 719, 847, 684, 765, 673.

Вариант 14. *N*: 989, 1162, 1354, 1055, 1506, 1102, 1201, 1065, 944, 833; *R*: 1483, 1474, 1605, 1444, 1481, 1443, 1546, 1417, 1493, 1434, 1683,1371, 1522, 1345.

Вариант 15. *N*: 1967, 2337, 1707, 2107, 3007, 2207, 2408, 2128, 1898, 1668; *R*: 2968, 2941, 3201, 2881, 2961, 2881, 3087, 2834, 2984, 2874, 3464, 2749, 3059, 2697.

Вариант 16. *N*: 1126, 797, 1018, 789, 906, 736, 877, 709, 823, 629; *R*: 1202, 1106, 1262, 1088, 1154, 1088, 1144, 1089, 1127, 1061, 1111, 1034, 1119, 1019.

Вариант 17. *N*: 2254, 1596, 2028, 1570, 1807, 1477, 1759, 1411, 1653, 1242; *R*: 2410, 2212, 2329, 2165, 2291, 2167, 2249, 2121, 2220, 2062, 2229, 2033, 2317, 2167.

Вариант 18. *N*: 125, 134, 104, 129, 156, 124, 111, 130, 109; *R*: 333, 351, 402, 388, 360, 362, 357, 395, 349, 355.

Вариант 19. *N*: 188, 131, 168, 132, 151, 117, 145, 123, 138, 102; *R*: 215, 173, 210, 170, 183, 169, 181, 182, 189, 171, 180, 179, 181, 161.

Вариант 20. *N*: 303, 411, 281, 379, 281, 333, 272, 322, 256, 224; *R*: 463, 406, 448, 399, 421, 395, 427, 391, 414, 382, 401, 372, 404, 374.

3 Пример выполнения задачи

Дано: нагрузка *N* (кН): 227, 258, 271, 288, 292, 301, 322, 331, 372, 413; несущая способность *R* (кН): 371, 379, 388, 396, 395, 406, 460, 408, 409, 411, 419, 424, 441, 397.

Определить доверительные интервалы случайных величин *R* и *N*, их математических ожиданий и дисперсий для доверительных вероятностей: 0,9, 0,95 и 0,99.

Решение задачи.

Найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин:

$$m_N = \frac{\sum_{i=1}^{10} N_i}{n} = \frac{227+258+271+288+292+301+322+331+372+413}{10} = 307{,}5\ кН,$$

$$m_R = \frac{\sum_{i=1}^{14} R_i}{n} = \frac{371+379+388+396+395+397+406+460+408+409}{14} +$$

$$+\frac{411+419+424+441+397}{14} = 407{,}4\ кН,$$

$$D_N^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(N_i - m_N)^2}{n-1} = \frac{6480{,}25+2450{,}25+1332{,}25+380{,}25+240{,}25}{9} +$$

$$+\frac{42{,}25+210{,}25+552{,}25+4160{,}25+11130{,}25}{9} = 2697{,}85\ кН^2,$$

$$D_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{14}(R_i - m_R)^2}{n-1} = \frac{1324{,}96+806{,}56+379{,}36+129{,}96+153{,}76+1{,}96+0{,}36+2{,}56}{13} +$$

$$+\frac{12{,}96+134{,}56+275{,}56+1128{,}96+2766{,}76+108{,}16}{13} = 555{,}88\ кН^2.$$

Определим доверительные интервалы для нагрузки, ее математического ожидания и дисперсии.

Начнем с доверительного интервала нагрузки. Для доверительной вероятности 0,9:

$$\frac{1+\gamma}{2}=\frac{1+0{,}9}{2}=0{,}95.$$

По таблице нормального распределения (приложение А) находим $u_{0,95}=1{,}643$. В соответствии с формулой (2):

$$I_{0,9}=\left(m_N-u_{0,95}\cdot D_N;\, m_N+u_{0,95}\cdot D_N\right),$$

$$I_{0,9}=\left(307{,}5-1{,}643\cdot 51{,}94;\ 307{,}5+1{,}643\cdot 51{,}94\right)=(222{,}16;\ 392{,}84)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,95**:**

$$I_{0,95}=\left(m_N-u_{0,975}\cdot D_N;\, m_N+u_{0,975}\cdot D_N\right),$$

$$u_{0,975}=1{,}9,$$

$$I_{0,95}=\left(307{,}5-1{,}9\cdot 51{,}94;\ 307{,}5+1{,}9\cdot 51{,}94\right)=(208{,}81;\ 406{,}19)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,99**:**

$$I_{0,99}=\left(m_N-u_{0,995}\cdot D_N;\, m_N+u_{0,995}\cdot D_N\right),$$

$$u_{0,995}=2{,}58,$$

$$I_{0,99}=\left(307{,}5-2{,}58\cdot 51{,}94;\ 307{,}5+2{,}58\cdot 51{,}94\right)=(173{,}5;\ 441{,}5)\ кН.$$

Определим доверительный интервал математического ожидания нагрузки. Количество членов выборки n=10. Тогда число степеней свободы:

$$\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9.$$

Для доверительной вероятности 0,9 по таблице квантилей распределения Стьюдента (приложение Б) находим $t = 1{,}83$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (6):

$$I_{m_N\,0,9} = \left(307{,}5 - 1{,}83 \cdot \frac{51{,}94}{\sqrt{10}};\, 307{,}5 + 1{,}83 \cdot \frac{51{,}94}{\sqrt{10}}\right) = (277{,}43;\, 377{,}57)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,95: $t = 2{,}26$.

$$I_{m_N\,0,95} = \left(307{,}5 - 2{,}26 \cdot \frac{51{,}94}{\sqrt{10}};\, 307{,}5 + 2{,}26 \cdot \frac{51{,}94}{\sqrt{10}}\right) = (270{,}13;\, 344{,}63)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,99: $t = 3{,}25$.

$$I_{m_N\,0,99} = \left(307{,}5 - 3{,}25 \cdot \frac{51{,}94}{\sqrt{10}};\, 307{,}5 + 3{,}25 \cdot \frac{51{,}94}{\sqrt{10}}\right) = (254{,}1;\, 360{,}9)\ кН.$$

Определим доверительный интервал дисперсии нагрузки.

Определяем вероятности α_1 и α_2 для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона (приложение В) находим для числа степеней свободы, равного 9:

$$\chi_1^2 = 16{,}919 \text{ и } \chi_2^2 = 3{,}325.$$

Доверительный интервал дисперсии определим по формуле (10):

$$I_{D_N^2 0,9} = \left(\frac{2697{,}85(10-1)}{16{,}919}; \frac{2697{,}85(10-1)}{3{,}325} \right) = (1436{,}66;\ 7313{,}15)\ \kappa H^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 19{,}023 \text{ и } \chi_2^2 = 2{,}7.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D_N^2 0,95} = \left(\frac{2697{,}85(10-1)}{19{,}023}; \frac{2697{,}85(10-1)}{2{,}7} \right) = (1276{,}17;18995{,}49)\ \kappa H^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}99$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}995.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 23{,}589 \text{ и } \chi_2^2 = 1{,}735.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D^2_{N0,99}} = \left(\frac{2697{,}85(10-1)}{23{,}589}; \frac{2697{,}85(10-1)}{1{,}735} \right) = (1029{,}45; 13994{,}19)\ \kappa H^2.$$

Определим доверительные интервалы для несущей способности, ее математического ожидания и дисперсии:

$$I_{0,9} = \left(m_R - u_{0,95} \cdot D_R;\ m_R + u_{0,95} \cdot D_R \right),$$

$$I_{0,9} = \left(407{,}4 - 1{,}643 \cdot 23{,}58;\ 407{,}4 + 1{,}643 \cdot 23{,}58 \right) = (368{,}66;\ 446{,}14)\ \kappa H,$$

Для доверительной вероятности 0,95**:**

$$I_{0,95} = \left(m_R - u_{0,975} \cdot D_R;\ m_R + u_{0,975} \cdot D_R \right),$$

$$u_{0,975} = 1{,}9,$$

$$I_{0,95} = \left(407{,}4 - 1{,}9 \cdot 23{,}58;\ 407{,}4 + 1{,}9 \cdot 23{,}58 \right) = (362{,}6;\ 452{,}2)\ \kappa H.$$

Для доверительной вероятности 0,99**:**

$$I_{0,99} = \left(m_R - u_{0,995} \cdot D_R;\ m_R + u_{0,995} \cdot D_R \right),$$

$$u_{0,995} = 2{,}58,$$

$$I_{0,99} = \left(407{,}4 - 2{,}58 \cdot 23{,}58;\ 407{,}4 + 2{,}58 \cdot 23{,}58\right) = (346{,}56;\ 468{,}24)\ \kappa H.$$

Определим доверительный интервал математического ожидания несущей способности. Количество членов выборки *n*=14. Тогда число степеней свободы:

$$\nu = n - 1 = 14 - 1 = 13.$$

Для доверительной вероятности 0,9 по таблице квантилей распределения Стьюдента (приложение Б) находим $t = 1{,}77$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (6):

$$I_{m_R 0,9} = \left(407{,}4 - 1{,}77 \cdot \frac{23{,}58}{\sqrt{13}};\ 407{,}4 + 1{,}77 \cdot \frac{23{,}58}{\sqrt{13}}\right) = (395{,}84;\ 418{,}96)\ \kappa H.$$

Для доверительной вероятности 0,95: $t = 2{,}16$.

$$I_{m_R 0,95} = \left(407{,}4 - 2{,}16 \cdot \frac{23{,}58}{\sqrt{13}};\ 407{,}4 + 2{,}16 \cdot \frac{23{,}58}{\sqrt{13}}\right) = (393;\ 421{,}2)\ \kappa H.$$

Для доверительной вероятности 0,99: $t = 3{,}01$.

$$I_{m_R 0,99} = \left(407{,}4 - 3{,}01 \cdot \frac{23{,}58}{\sqrt{13}};\ 407{,}4 + 3{,}01 \cdot \frac{23{,}58}{\sqrt{13}}\right) = (387{,}74;\ 426{,}84)\ \kappa H.$$

Определим доверительный интервал дисперсии несущей способности.

Определяем вероятности α_1 и α_2 для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона (приложение В) находим для числа степеней свободы, равного 13:

$$\chi_1^2 = 22{,}362 \text{ и } \chi_2^2 = 5{,}892.$$

Доверительный интервал дисперсии определим по формуле (10):

$$I_{D^2_{R0,9}} = \left(\frac{555{,}88(14-1)}{22{,}362}; \frac{555{,}88(14-1)}{5{,}892} \right) = (323{,}16; 1226{,}48)\ \kappa H^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 24{,}736 \text{ и } \chi_2^2 = 5{,}009.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D^2_{R0,95}} = \left(\frac{555{,}88(14-1)}{24{,}736}; \frac{555{,}88(14-1)}{5{,}009} \right) = (292{,}14; 1442{,}69)\ \kappa H^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}99$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}995.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 29{,}819 \text{ и } \chi_2^2 = 3{,}565.$$

Доверительный интервал дисперсии несущей способности:

$$I_{D^2_{R0,99}} = \left(\frac{555{,}88(14-1)}{29{,}819}; \frac{555{,}88(14-1)}{3{,}565} \right) = (242{,}34;\ 2027{,}05)\ \kappa H.$$

4 Вопросы и задания для самоконтроля

1 Запишите формулу для определения доверительных границ дисперсии.

2 Отличаются ли математическое ожидание и дисперсия случайной величины x от математического ожидания и дисперсии случайной величины m_x?

3 Запишите формулу для определения доверительного интервала математического ожидания.

4 Запишите формулу для определения доверительного интервала дисперсии.

5 Как можно выразить доверительный интервал в долях от среднего квадратического отклонения?

6 Запишите формулу вероятности попадания случайной величины в заданный интервал, выраженную через плотность распределения случайной величины.

7 Поясните сущность метода нахождения доверительного интервала для случайной величины.

8 Какое распределение используется при определении доверительного интервала дисперсии?

9 Какое распределение используется при определении доверительного интервала математического ожидания?

Список использованных источников

1 Куренков, В.И. Надежность изделий и систем ракетно-космической техники: лабораторный практикум / В.И. Куренков, В.В. Волоцуев. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2010. – 116 с.

2 Зорин, В.А. Надежность механических систем: учебник / В.А. Зорин. – М. : ИНФРА-М, 2015. – 380 с.

3 Половко, А.М. Основы теории надежности. Практикум: учеб. пособие для вузов / А.М. Половко, С. В. Гуров. – СПб. : БВХ-Петербург, 2006. – 560 с.

Приложение А
(обязательное)

Квантили функции нормального распределения

Таблица А.1 – Значения функции нормального распределения

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	8124	8169
2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	$0,9_2$	1802	2024	2240	2451	2656	2857	3053	3244	3431	3613
2,5	$0,9_2$	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2.6	$0,9_2$	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	$0,9_2$	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	$0,9_2$	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	$0,9_2$	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	$0,9_2$	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999

Продолжение таблицы А.1

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	$0,9_3$	0324	0646	0957	1260	1553	1836	2102	2378	2636	2886
3,2	0.9_3	3129	3363	3590	3810	4024	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	$0,9_3$	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6376	6505
3,4	$0,9_3$	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	$0,9_3$	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	$0,9_3$	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	$0,9_3$	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	$0,9_4$	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	$0,9_4$	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	$0,9_4$	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843
4,1	$0,9_4$	7934	8022	8106	8186	8264	8338	8409	8477	8542	8605
4.2	$0,9_4$	8665	8723	8778	8832	8882	8931	8978	9023	9066	9107
4,3	$0,9_5$	1460	1837	2198	2544	2876	3193	3497	3788	4066	4332
4,4	$0,9_5$	4588	4832	5065	5288	5502	5706	5902	6089	6268	6439
4,5	$0,9_5$	6602	6759	6908	7051	7187	7318	7442	7561	7675	7784
4,6	$0,9_5$	7888	7987	8081	8172	8258	8340	8419	8494	8566	8634
4,7	$0,9_5$	8699	8761	8821	8877	8931	8983	9032	9079	9124	9166
4,8	$0,9_6$	2067	2454	2822	3173	3508	3827	4131	4420	4696	4958
4,9	$0,9_6$	5208	5446	5673	5888	6094	6289	6475	6652	6821	6981
5,0	$0,9_6$	7134	7278	7416	7548	7672	7791	7904	8011	8113	8210
5,1	$0,9_6$	8302	8389	8472	8551	8626	8698	8765	8830	8891	8949
5,2	$0,9_7$	004	056	105	152	197	240	280	318	354	388
5,3	$0,9_7$	421	452	481	509	539	560	584	606	628	648
5,4	$0,9_7$	667	685	702	718	734	748	762	775	787	799
5,5	$0,9_7$	810	821	831	840	849	857	865	873	880	886
5,6	$0,9_7$	893	899	905	910	915	920	924	929	933	936
5,7	$0,9_8$	40	44	47	50	53	55	58	60	63	65
5,8	$0,9_8$	67	69	71	72	74	75	77	78	79	81
5,9	$0,9_8$	82	83	81	85	86	87	87	88	89	90

Примечания

1 Для отрицательных значений аргумента $F(-x) = 1 - F(x)$.

2 Индекс у цифры 9 означает ее повторение, например, при x = 3,95 имеем $F(x)$=$0,9_4$6092=0,99996092.

Приложение Б
(обязательное)

Квантили функции распределения Стьюдента

Таблица Б.1 – Значения квантилей функции распределения Стьюдента

Число степеней свободы ν	Вероятность γ											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,16	0,32	0,51	0,73	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	14	29	44	62	0,82	06	34	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	14	28	42	58	76	0,98	25	64	35	3,18	4,54	5,84
4	13	27	41	57	74	94	19	53	13	2,78	3,75	4,60
5	13	27	41	56	73	92	16	48	01	57	36	03
6	0,13	0,26	0,40	0,55	1,72	1,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	13	26	40	55	71	90	12	41	89	36	00	50
8	13	26	40	55	70	89	11	40	86	31	2,90	35
9	13	26	40	54	70	88	10	38	83	26	82	25
10	13	26	40	54	70	88	09	37	81	23	76	17
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	13	26	39	54	69	87	08	36	78	18	68	05
13	13	26	39	54	69	87	08	35	77	16	65	01
14	13	26	39	54	69	87	08	34	76	14	62	2,98
15	13	26	39	54	69	87	07	34	75	13	60	95
16	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	13	26	39	53	69	86	07	33	74	11	57	90
18	13	26	39	53	69	86	07	33	73	10	55	88
19	13	26	39	53	69	86	07	33	73	09	54	86
20	13	26	39	53	69	86	06	32	72	09	53	84
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	13	26	39	53	69	86	06	32	72	07	51	82
23	13	26	39	53	68	86	06	32	71	07	50	81
24	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	49	80
25	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	48	79
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	77
28	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	76
29	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	76
30	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	75
40	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	13	25	39	53	68	85	05	30	67	00	39	66
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,84	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	13	25	38	52	67	84	04	28	64	96	33	58

Приложение В
(обязательное)

Квантили функции распределения Пирсона

Таблица В.1 – Значения квантилей функции распределения Пирсона

$v = n-1$	α					
	0,995	0,975	0,95	0,05	0,025	0,005
1	0,000	0,001	0,004	3,841	50,24	7,879
2	0,010	0,051	0,103	5,991	7,378	10,597
3	0,0717	0,216	0,352	7,815	9,348	12,838
4	0,207	0,484	0,711	9,488	11,143	14,860
5	0,412	0,831	1,145	11,070	12,832	16,750
6	0,676	1,237	1,635	12,592	14,449	18,548
7	0,989	1,690	2,167	14,067	13,013	20,278
8	1,344	2,180	2,733	15,507	17,535	21,955
9	1,735	2,700	3,325	16,919	19,023	23,589
10	2,156	3,247	3,940	18,307	20,483	25,188
11	2,603	3,816	4,575	19,675	21,920	26,757
12	3,074	4,404	5,226	21,026	23,336	28,300
13	3,565	5,009	5,892	22,362	24,736	29,819
14	4,075	5,629	6,571	23,685	26,119	31,319
15	4,601	6,262	7,261	24,996	27,448	32,801
16	5,142	6,908	7,962	26,296	28,845	34,267
17	5,697	7,564	8,762	27,587	30,191	35,718
18	6,265	8,231	9,930	28,869	31,526	37,156
19	6,844	8,907	10,117	30,144	32,852	38,582
20	7,434	9,591	10,851	31,410	34,170	39,997
21	8,034	10,283	11,591	32,671	35,479	41,401
22	8,643	10,982	12,338	33,924	36,781	42,796
23	9,260	11,688	13,091	35,172	38,076	44,181
24	9,886	12,401	13,848	36,415	39,364	45,558
25	10,520	13,120	14,611	37,652	40,646	46,928
26	11,160	13,844	15,379	38,885	41,923	48,920
27	11,808	14,573	16,151	40,113	43,194	49,645
28	12,461	15,308	16,928	41,337	44,461	50,993
29	13,121	16,047	17,708	42,557	45,722	52,336
30	13,787	16,791	18,493	43,773	46,979	53,672