Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

И.П. Болодурина, Т.Н. Тарасова, Л.М. Анциферова

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ (в информатике, вычислительной технике и автоматизации)

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлениям подготовки 02.06.01 Компьютерные и информационные науки, 09.06.01 Информатика и вычислительная техника

Оренбург
2019

УДК 004:681.5(075.8)
ББК 32.97я73+32.965я73
Б79

Рецензент – профессор, доктор технических наук А.И. Сердюк

Болодурина И. П.
Б79 Системный анализ, управление и обработка информации (в информатике, вычислительной технике и автоматизации): учебное пособие / И.П. Болодурина, Т.Н. Тарасова, Л.М. Анциферова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019 –с. 104

В учебном пособии изложены основные системные принципы моделирования и анализа процессов и объектов. Приведен конструктивный анализ и синтез крупномасштабных систем. Рассмотрены адекватные модели принятия решений в условиях статистической и нестатистической неопределенностей.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлениям подготовки 02.06.01 Компьютерные и информационные науки, 09.06.01 Информатика и вычислительная техника, а также для других направлений и специальностей, связанных с проектированием сложных технических комплексов, разработкой информационных систем, принятием решений при управлении техническими и социально-экономическими объектами и процессами.

УДК 004:681.5(075.8)
ББК 32.97я73+32.965я73

© Болодурина И. П.,
Анциферова Л. М.,
Тарасова Т. Н., 2019
© ОГУ, 2019

Содержание

Введение 4
1 Системные принципы моделирования и анализа процессов и объектов 5
1.1 Категориальный аппарат, методы и принципы системного анализа 5
1.2 Жизненные циклы систем, состав и структура 14
1.3 Основы системного моделирования 34
1.4 Основы управления 39
1.5 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу 34
2 Конструктивный анализ и синтез крупномасштабных систем 45
2.1 Особенности исследования крупномасштабных систем 45
2.2 Развитие крупномасштабных систем, как объект исследования, оценки и управления 54
2.3 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу 60
3 Адекватные модели принятия решений в условиях статистической и нестатистической неопределенностей 61
3.1 Основные понятия, модели и общие схемы принятия решений 61
3.2 Задачи многокритериальной оптимизации в условиях нестатистической неопределенности 65
3.3 Статистические решения. Сужение класса допустимых статистических решений 89
3.4 Связь между статистической проверкой гипотез, теорией принятия решений и математическим программированием 100
Список использованных источников 103

Введение

Пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам подготовки кадров высшей квалификации по направлениям подготовки 02.06.01 Компьютерные и информационные науки, 09.06.01 Информатика и вычислительная техника, а также для других направлений и специальностей, связанных с проектированием сложных технических комплексов, разработкой информационных систем, принятием решений при управлении техническими и социально-экономическими объектами и процессами.

Изучение теоретического материала, включенного в пособие, призвано способствовать формированию у обучающихся представлений о системном анализе, исследовании операций, теории принятия решений, теории управления и других областях прикладной математики, а также об основных проблемах использования системного анализа в процессе разработки информационных комплексов; усвоению теоретических подходов к анализу различных предметных областей с целью выделения процессов, подлежащих автоматизации и последующей разработки и внедрения прикладных информационных комплексов.

При разработке материала пособия использовался опубликованный теоретический материал и опыт преподавания учебных дисциплин, основанных на системном подходе к изучению проблем в различных областях науки и практической деятельности, а также личный методический опыт авторов.

1 Системные принципы моделирования и анализа процессов и объектов

1.1 Категориальный аппарат, методы и принципы системного анализа

В конце XIX века в связи с возрастанием сложности производственных процессов, развитием науки, а также проникновением человечества в тайны функционирования и развития живых организмов в сферах как научной, так и практической деятельности появились задачи со значительной начальной неопределенностью проблемной ситуации. В таких задачах на первое место выходит сам процесс постановки задачи. Кроме того, возросла роль человека как носителя целостного восприятия, способного принимать взвешенные решения. Важным является сохранение целостности компонентов задачи при расчленении проблемы для облегчения ее решения, а также роль методов активизации интуиции и опыта специалистов различных областей знаний, принимающих участие в решении сложной проблемы.

При решении таких комплексных задач стало широко применяться понятие «системы», в результате чего на определенной стадии развития научного знания теория систем выделилась в самостоятельную науку – в 30-е гг. XX века австриец Людвиг фон Берталанфи выдвигает теория открытых систем. С конца 1950-х гг. системные исследования интенсивно развивались. Одним из факторов для этого стало появление новой научной дисциплины – исследования операций, в которой под термином «операция» понимается любое целенаправленное действие. Из-за необходимости научного объединения созданных приемов анализа различных операций, а также под воздействием последних достижений в математике теория исследования операций переросла в анализ систем (System Analysis). В 60-е гг. XX века широкое распространение получили термины: системотехника, системные исследования, системный подход, системология и т.д. На рубеже XX и XXI вв. стало очевидно, что человечество переходит от одной эпохи мышления и деятельности к другой – от «века анализа и синтеза» – к «веку систем». Появляется концепция третьей – системной грамотности.

История развития системных исследований свидетельствует о том, что системный анализ является одним из наиболее конструктивных направлений за счет, во многом, актуализации методов и моделей теории систем для принятия решений.

Под «*Системным анализом»*, как правило, понимают:

– в узком смысле – совокупность методологических средств, используемых для подготовки и обоснования решений по сложным проблемам *(как исследование проблемы принятия решений в сложной системе)* или логически связанная совокупность теоретических и эмпирических положений из области математики, естественных наук и опыта разработки сложных систем, обеспечивающая повышение обоснованности решения конкретной проблемы;

– в широком смысле – как синоним «системного подхода» (особенно в англоязычной литературе).

Необходимо отметить, что в научных публикациях термин не всегда однозначно трактуется, поэтому приведем развернутое определение, сформулированное профессором В.Н. Волковой [6] на основе обобщения позиций различных исследователей.

Системный анализ:

1) применяется в тех случаях, когда задача (проблема) не может быть сразу представлена и решена с помощью формальных, математических методов, т.е. имеет место большая начальная неопределенность проблемной ситуации и многокритериальность задачи;

2) уделяет внимание процессу постановки задачи и использует не только формальные методы, но и методы качественного анализа;

3) опирается на основные понятия теории систем и философские концепции, лежащие в основе исследования общесистемных закономерностей;

4) помогает организовать процесс коллективного принятия решений, объединяя специалистов различных областей знаний;

5) для организации процесса исследования и принятия решений требует обязательной разработки методики системного анализа, определяющей последовательность этапов проведения анализа и методы их выполнения;

6) исследует процессы целеобразования и разработки средств работы с целями (в том числе занимается разработкой методик структуризации целей);

7) основным методом системного анализа является расчленение большой неопределенности на более обозримые, лучше поддающиеся исследованию, при сохранении целостного (системного) представления об объекте исследования и проблемной ситуации.

Необходимо понимать, что первые четыре особенности характерны для всех направлений системных исследований, а оставшиеся уточняют отличие системного анализа от других системных направлений.

Методологической спецификой системного анализа является то, что, основываясь на методах качественного анализа, эта научная область использует методы формализованного представления систем.

Теоретическими о*сновами системного анализа* являются общая теория систем и системный подход. Тем не менее, системный анализ заимствует у них лишь самые общие исходные представления и предпосылки. Системный анализ имеет весьма необычный методологический статус: с одной стороны, имеются детализированные методы и процедуры, почерпнутые из современной науки и созданные специально для него, что ставит системный анализ в ряд с другими прикладными направлениями современной методологии; с другой стороны, в становлении системного анализа отсутствует стремление к оформлению его в строгую и законченную теорию. В системном анализе бок о бок идут элементы науки и практики. Из-за этого не часто обоснование решений на основе системного анализа связано с использованием строго формализованных методов и процедур; рассматриваются суждения, основанные на личном опыте и интуиции, необходимо лишь, чтобы это обстоятельство было ясно осознано.

Важнейшие принципы системного анализа сводятся к следующему: на начальном этапе процесса принятия решений необходимо четко сформулировать

конечные цели; важно рассматривать задачу как целое, то есть единую систему, а также выявить все возможные взаимосвязи и следствия каждого частного решения; необходимо выявлять и анализировать возможные альтернативные пути достижения цели; цели отдельных частей не должны противоречить целями всей системы.

В системном анализе система описывается, прежде всего, системными объектами, к которым относятся: вход, выход, процесс, обратная связь, критерий и ограничение. *Входом* называется то, изменение чего служит причиной изменения хода процесса. Выделяют два вида входов – процессор и рабочий вход. *Выход* – то, что определяет конечное состояние, то есть результат процесса. *Понятие процесса* является центральным в системном анализе. Различают три вида процесса: основной процесс – преобразующий вход в выход; *обратная связь* – сравниваются заданное и фактическое состояния выходов, оценивается разница между ними и вырабатывается решение, направленное на приближение фактического состояния выхода к заданному; *ограничение* – устанавливается потребителем выхода системы, а также имеет определенную цель и принуждающие связи. *Критерий* – это правило или норма, позволяющие оценить эффективность системы, соответствие требуемого и достигаемого результатов.

Центральной процедурой в системном анализе называется построение обобщенной модели (или моделей), которая отображает все факторы и взаимосвязи реальной ситуации, способные проявиться в процессе нахождения решения. Основу системного анализа составляют ряд прикладных математических дисциплин и методов, которые широко используются в современной управленческой деятельности. К ним относятся: исследование операций, метод экспертных оценок, метод критического пути, теория очередей и т.п. Техническая основой системного анализа являются современные вычислительные машины и информационные системы.

Методологические средства, которые применяются в ходе решения задач с помощью системного анализа, определяются в зависимости от того, сколько целей преследуется (одна или некоторая совокупность целей), кто принимает решение (одно лицо или несколько) и т. д. Если имеется одна четко выраженная цель, а

степень ее достижения можно оценить с помощью одного критерия, используются методы математического программирования. В случае, когда степень достижения цели оценивается с помощью нескольких критериев, применяется аппарат теории полезности – с помощью него критерии упорядочиваются и осуществляется определение важности каждого из них. Когда ход событий определяется взаимосвязью ряда лиц или систем, каждая из которых преследует свои цели и принимает свои решения, используются методы теории игр.

Хотя диапазон используемых в системном анализе способов моделирования и решения задач постоянно растет, по своему характеру системный анализ не равнозначен научному исследованию: системный анализ не преследует своей целью получение научного знания, он являет собой применение научных методов к решению практических задач управления и направлен на рационализацию процесса принятия решений, не исключая из этого процесса неизбежных в нем субъективных моментов.

На сегодняшний день нет единого строгого определения понятия системы. Существует несколько десятков определений, среди которых:

– система есть совокупность (множество) элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, единство[16];

– система есть средство, с помощью которого выполняется процесс решения проблемы[12];

– система – множество объектов вместе с отношениями между объектами и между их атрибутами (А. Холл, Р. Фейджин);

– система – организованное или сложное целое, собрание или сочетание вещей или частей, образующих сложное или единое целое (Ф. Каст);

– система есть абстрактный (языковый) аналог реального объекта или явления (А.И. Берг, Ю.И. Черняк);

– под целостной системой понимается совокупность компонентов, взаимодействие которых порождает новые (интегральные, системные) качества, не присущие ее образующим (В.Г. Афанасьев);

– система – это объективное единство закономерно связанных друг с другом предметов, явлений, знаний о природе и обществе (В.П. Боголепов).

Если постараться выделить из всех определений единое зерно, можно получить следующую формулировку: *система есть некий целостный комплекс взаимосвязанных элементов, объединенных общностью цели и образующих особое единство с окружающей средой.* Система обладает новыми интегральными качествами, которые отсутствуют у ее компонентов. При этом важно учитывать, что:

– каждый входящий в систему элемент может рассматриваться как система, состоящая из элементов другого типа, другими словами системы как правило имеют вид иерархической структуры;

– взаимосвязи между элементами системы могут меняться во времени в соответствии с ходом выполнения возложенных на эти элементы функций.

С точки зрения принципиальных изменений процесс развития определения системы представляется интересным.

Определение 1: Система – это элементы (части, компоненты) a_i и связи (отношения) r_i между ними:

$$S = \langle A, R \rangle, \tag{1.1}$$

где $A = \{a_i\}$, $R = \{r_i\}$.

Далее в определение системы вводится понятие «цели».

Определение 2: Система – это совокупность элементов и связей между ними, обладающая определенной целостностью:

$$S = \langle A, R, Z \rangle, \tag{1.2}$$

где $A = \{a_i\}$, $R = \{r_i\}$, Z – цель, совокупность или структура целей.

Затем в определение системы включается наблюдатель N, то есть лицо, которое в ходе исследования и принятия решения представляет объект или процесс в виде системы.

Определение 3: Система есть отражение в сознании субъекта N (исследователя, наблюдателя) свойств объектов и их отношений в решении задачи исследования, познания:

$$S = \langle A, R, Z, N \rangle, \tag{1.3}$$

где $A = \{a_i\}$, $R = \{r_i\}$, Z – цель, совокупность или структура целей, N – наблюдатель.

Кроме того, в определение системы стали включать среду – SR, период времени ΔT и т.д.

Существует также, аксиоматическое задание системы, включающее в себя 3 аксиомы:

Аксиома 1: Для системы определены – пространство состояний M, в которых может находиться система и параметрическое пространство T в котором задано поведение системы (в качестве параметрического пространства обычно рассматривают временной интервал $(0;\ \infty)$).

Аксиома 2: Пространство состояний M содержит не менее 2-х элементов.

Аксиома 3: Система обладает свойством функциональной эмерджентности.

Эмерджентность (целостность) – это такое свойство системы S, которое принципиально не сводится к сумме свойств элементов, составляющих систему и не выводится из них:

$$S \neq \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{1.4}$$

где y_i –i-я характеристика системы, m – общее количество характеристик.

Обобщив представленные подходы к определению системы, можно полагать системой совокупность взаимосвязанных элементов, которая обладает интегративными свойствами (эмерджентностью), а также способ отображения реальных объектов.

Модель исходной системы (прототипа) – система, отражающая по определенным законам свойства исходной системы.

Представление системы – совокупность базисных множеств (частей, элементов, компонентов) системы, которые взаимосвязаны рядом отношений, удовлетворяющих правилам (аксиомам) сочетания, как элементов множеств, так и самих отношений. Это формальное определение системы фактически сводится к определению соответствующей математической модели, то есть содержит необходимую основу для формализации.

Дополнительные описания понятия системы можно получить из основных свойств систем, которыми являются:

– *взаимосвязь среды и системы;*

– *целостность системы,* то есть ее внутреннее единство и принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств ее элементов;

– *членимость* – способность системы разбиваться на подсистемы, являясь при этом подсистемой другой системы;

– *устойчивость системы* – способность системы удерживать устойчивое (равновесное) состояние даже с учетом дисфункциональных процессов;

– *информационное взаимодействие элементов системы* – наличие в системе каналов связи, наполненных носителями информации;

– *иерархичность системы* – возможность представить систему в виде системы подчиненных по нисходящей уровней со своими зонами ответственности, ресурсами и локальными целями;

– *наличие обратных связей* – наличие информационного взаимодействия выхода системы со входом;

– *эквифинальность системы* – характеристика, которая отражает предельные возможности системы, а также ее способность переходить в состояние, которое не зависит от времени и начальных условий и определяется только параметрами системы.

По характеру природы и основному назначению системы делят на два класса – материальные и абстрактные.

Материальные (реальные) системы – системы, объективно существующие в реальном мире. В свою очередь материальные системы делятся на два класса:

1) естественные – системы самой природы, к которым относятся:

– неживые – вид физических систем неорганической природы;

– живые – вид биологических систем;

2) искусственные – системы, создаваемые деятельностью людей, в которых выделяют:

– технико-технологические – вид систем, включающий системы целевого назначения и системы, управляющие ими в соответствии с определенной технологией;

– социальные – вид различных систем человеческого общества, в том числе системные программы.

Абстрактные системы – продукт мышления, то есть результат отражения реальных систем в сознании людей. В них различают два класса систем:

1) генерализующие – системы обобщающего отражения реальной действительности, в которых выделяют:

– понятийные – вид концептуальных систем (теории, методологические построения, включая и основные математические);

– знаковые – вид семиотических систем;

2) непосредственного отражения – системы, отражающие определенные свойства (аспекты) конкретных реальных систем. В этом подклассе два вида:

– математические модели;

– логико-эвристические.

Так как большинство систем занимают промежуточное положение между указанными классами, то их можно назвать гибридными (смешанными).

Так, человека можно рассматривать как биосоциальную систему, а вычислительный комплекс как социально-техническую систему (рисунок 1).

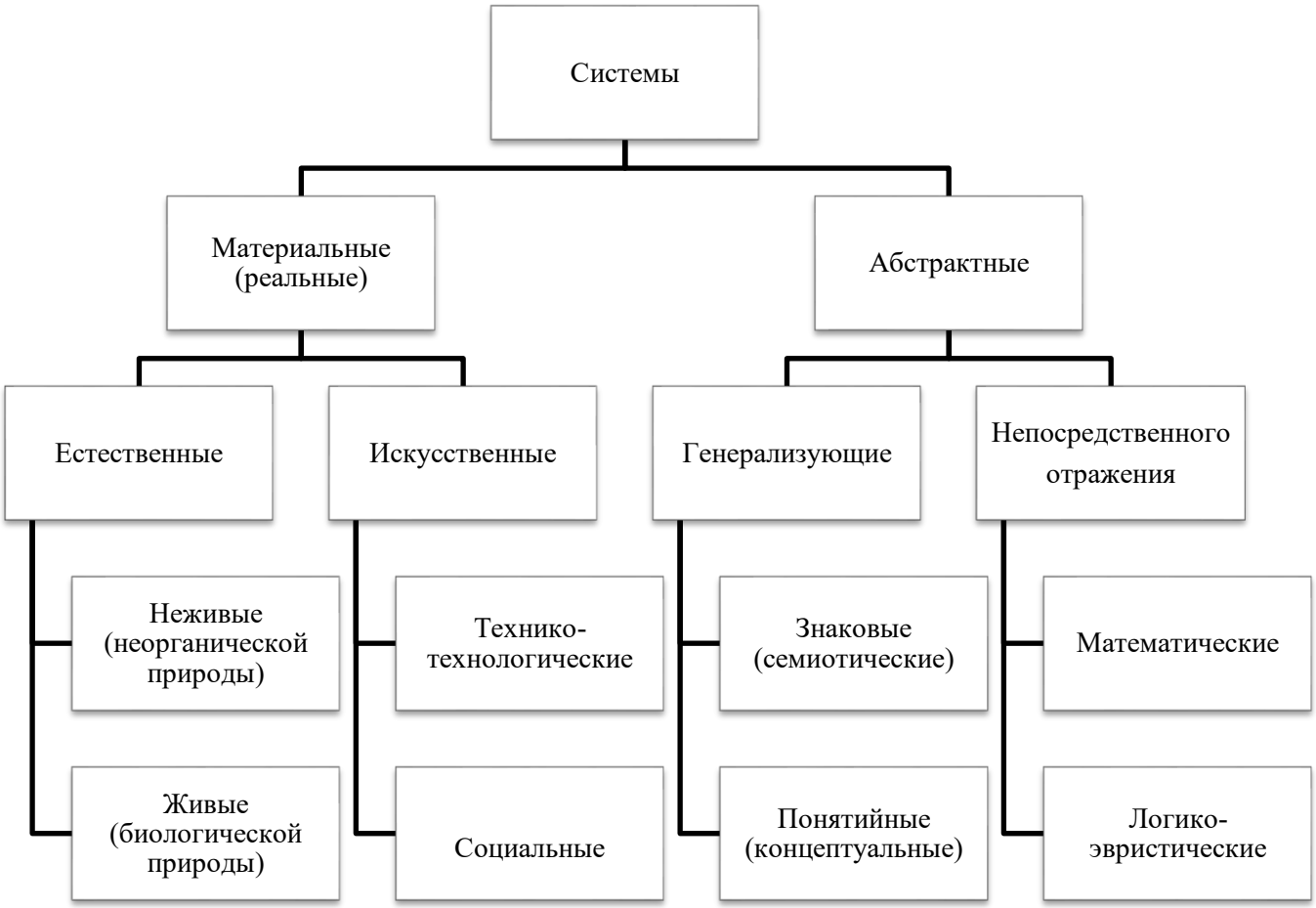


Рисунок 1 – Классификация систем

1.2 Жизненные циклы систем, состав и структура

Для организационно-технических систем, связанных с деятельностью человека, используют определения жизненного цикла системы как непрерывного процесса, который начинается от момента принятия решения о необходимости создания системы и заканчивается в момент ее полного изъятия из эксплуатации. Жизненный цикл технической (технико-технологической) системы понимают как последовательность этапов существования объектов искусственного происхождения от начала их создания до момента исчезновения.

При более широком рассмотрении, основываясь на объективности возникновения и существования систем, можно утверждать, что в основе механизма рождения, развития и гибели системы лежат противоречия между системой и средой (внешние) и между элементами системы (внутренние).

Рождение системы трактуется как привнесение (стихийное возникновение) элементов порядка и организации в неорганизованную среду (хаос). Развитие нового образования приводит к появлению протосистемы, характеризующейся появлением специализации отдельных элементов на фоне гомогенности, аморфности, максимальной энтропии неорганизованной среды. Фаза образования устойчивых структурных элементов перерастает в фазу их роста и развития и приводит к появлению у них новых функциональных качеств.

Развитие и закрепление специализированных свойств элементов обеспечивают установление связей между ними, дальнейший рост и повышение устойчивости образующихся структур. Этап развития в жизненном цикле системы характеризуется ее самоорганизацией – адаптацией системы к условиям функционирования. Самоорганизация системы характеризуется достижением минимума ее обобщенных энергетических и информационных характеристик, который обеспечивает устойчивость системы и информационную упорядоченность межэлементных связей.

Фаза гибели системы наступает вследствие нарушений устойчивости работы и связей между элементами; истощения ресурсов и др. факторов. Потеря устойчивости системы может являться следствием изменений ее параметров, повлекших за собой бифуркацию; появления внешних воздействий, непредусмотренных при проектировании системы или нарушения связей, вызвавших изменение структуры. Разрушения системы вследствие деформации связей может быть обусловлено разрушением или снижением пропускной способности каналов связи; искажениями, возникающими при их использовании; переполнением и блокировкой каналов связи.

Понятие *элемент* является фундаментальным понятием общей теории систем. Латинское слово «elementarius» используется в значениях: начальный, простой,

простейший, конечный, неделимый, лежащий в основе чего-либо. Историки науки, в настоящее время, придерживаются мнения, согласно которому это понятие впервые встречается у Аристотеля в «Метафизике».

Под элементом системы принято понимать простейшую, неделимую часть системы. Поскольку деление системы на части зависит от цели рассмотрения объекта, от точки зрения на него или от аспекта изучения, то элемент рассматривают, как правило, как предел деления системы в контексте решения конкретной задачи и достижения поставленной цели.

Часто используют описания элемента как:

– некоторого объекта (материального, энергетического, информационного), обладающего рядом важных свойств и реализующего в системе определенный закон функционирования F^S, внутренняя структура которого не рассматривается;

– неделимой наименьшей функциональной части исследуемой системы, представляемой как «черный ящик» [1].

Функциональную модель элемента можно представить в виде:

$$y(t) = F^S(x, n, u, t), \tag{1.5}$$

где t – момент времени, $x(t)$ – неуправляемые входные сигналы, преобразуемые рассматриваемым элементом, $n(t)$ – воздействия внешней среды, $u(t)$ – управляющие сигналы (события), появление которых приводит к переводу элемента из одного состояния в другое, $y(t)$ – выходной сигнал, $\langle x, n, u, y, F^S \rangle$ – состояние системы в конкретный момент времени.

Подсистема – часть системы, выделенная по определенному признаку, обладающая некоторой самостоятельностью и допускающая разложение на элементы.

Система может быть разделена на элементы последовательным расчленением на подсистемы. Расчленение системы производится на основе независимой функции, выполняемой данной совокупностью элементов совместно для достижения некоторой частной цели, обеспечивающей достижение общей цели системы. Подсистема отличается от подмножества элементов, для которого не

выполняется условие целостности. Последовательное разбиение системы в глубину приводит к иерархии подсистем, нижним уровнем которых является элемент.

Описание подсистемы в целом совпадает с описанием элемента, но для описания подсистемы дополнительно вводится понятие множества внутренних (собственных) характеристик подсистемы.

Характеристика элемента системы (подсистемы) отражает некоторое свойство элемента системы (подсистемы). Характеристика задается кортежем, включающим в себя имя характеристики и область допустимых значений. Характеристики делятся на количественные и качественные.

Связью между элементами системы назовем важный для целей рассмотрения обмен между элементами веществом, энергией, информацией. Понятие связи между элементами является обязательным компонентом определения системы и обеспечивает возникновение и сохранение ее целостных свойств. Связь выступает как ограничение степени свободы элементов. Элементы, вступая во взаимодействие (связь) друг с другом, утрачивают часть своих свойств, которыми они потенциально обладали в свободном состоянии. В определениях системы, как правило, термины связь и отношение используются как синонимы.

Различают связи: функционально необходимые (1-го порядка); улучшающие действие системы, но не являющиеся функционально необходимыми (2-го порядка); излишние или противоречивые (3-го порядка). Связи между элементами системы характеризуются также направлением, силой, характером (видом).

К простейшим типам связей относят связи:

а) с последовательным соединением элементов;

б) с параллельным соединением элементов;

в) обратную связь, выполняющую роль регулятора и означающую, что результат функционирования элемента влияет на поступающие на него воздействия.

Под *большой системой* понимают систему, включающую значительное число однотипных элементов и однотипных связей.

Сложной системой называют систему, состоящую из элементов разных типов и обладающую разнородными связями между ними.

Структурой системы называется ее расчленение на группы элементов с указанием связей между ними, дающее представление о системе в целом. Структура характеризует организованность системы, устойчивую упорядоченность ее элементов и связей.

Под средой понимается множество объектов S' вне данного элемента S (системы), которые оказывают влияние на элемент (систему) и сами находятся под влиянием (воздействием) элемента (системы), при этом $S' \cap S = \varnothing$ (рисунок 2).

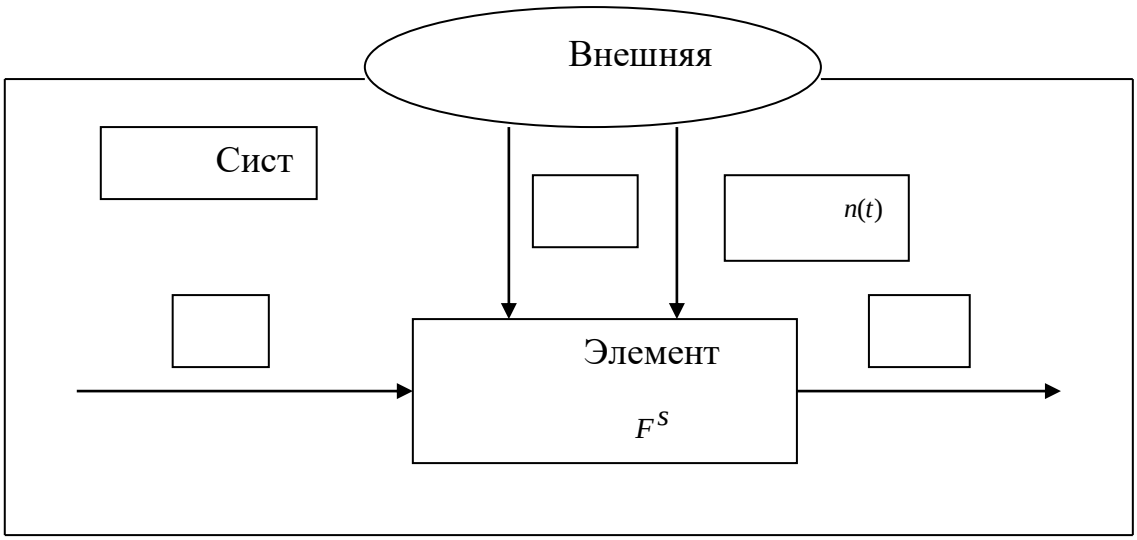


Рисунок 2 – Схематичное представление системы, в которой учитывается влияние внешней среды на составные части системы

Основной характеристикой взаимодействия между средой и системой является характер обмена между системой и средой (может быть вещественным, энергетическим, информационным).

Среда, как правило, является источником неопределенности для системы и при разграничении системы и среды, к среде относят малоизученные, плохо выявленные элементы и факторы.

Правильное разграничение исследуемого реального объекта и среды является необходимым этапом системного анализа. В системном анализе используют, также, понятие «суперсистемы», под которой понтмают часть внешней среды, для которой исследуемая система является элементом.

Среда служит признаком классификации систем на классы открытых и закрытых систем. Открытой называется система, взаимодействующая с окружающей ее средой. Открытая система связана со средой через сеть внешних связей, выделение которых и описание взаимодействия «система – среда» – одна из задач теории открытых систем. Закрытой называется система, не взаимодействующая со средой. Закрытые системы, как правило, являются абстрактными моделями, которые создаются с целью первичного изучения свойств реальных систем. Условно-закрытыми называют системы, взаимодействующие со средой строго определенным образом.

Различают *внешние связи системы* – это связи системы со средой и в*нутренние связи системы* – это связи между ее элементами. Одна из задач системного анализа – задача определения внутренних связей, обуславливающих конкретные свойства системы. Таким образом, определение структурных, функциональных, каузальных (причинно-следственных), информационных и пространственно-временных внутренних связей является основным содержанием системного анализа.

В зависимости от способа воздействия на систему различают среды: детерминированную, стохастическую, среду с неизвестностью. Элемент системы, процесс в ней или воздействие на систему считаются детерминированными, если им соответствует однозначное качественное и количественное описание, в противном случае, возникает неопределенность, степень и характер которой могут быть различными. Стохастичность среды связана с неопределенностью, основанной на положениях теории вероятностей и математической статистики. В тех случаях, когда количественная мера неопределенности не может быть задана, неопределенность характеризуется как неизвестность.

Далее рассмотрим основные понятия, характеризующие функционирование и развитие системы.

Под *целью системы* в системном анализе понимают ситуацию или область ситуаций, которая должна быть достигнута при функционировании системы за

определенный промежуток времени. Цель может задаваться требованиями к показателям результативности, оперативности функционирования системы либо к траектории достижения заданного результата. Как правило, цель для системы определяется системой, для которой рассматриваемая система является элементом.

Целенаправленное вмешательство в процесс в системе называют *управлением.*

Показатель – характеристика, отражающая качество системы или целевую направленность процесса, реализуемого системой.

Состояние системы – это множество значений характеристик системы в момент времени t^0: $\langle x, n, u, y, F^S \rangle$.

Способность системы переходить из одного состояния в другое интерпретируется как *поведение системы.* Изменение состояния в зависимости от конкретных задач исследования систем может рассматриваться как движение, поведение, функционирование или некоторый процесс в системе.

Равновесием системы называют ее способность, в отсутствие внешних возмущающих воздействий (или при постоянных воздействиях), сколь угодно долго сохранять состояние равновесия.

Устойчивость – способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была из него выведена под влиянием внешних или внутренних возмущающих воздействий. Эта способность обычно присуща системам, при условии, что воздействия не превышают некоторого предела.

Под *процессом в системе* понимают совокупность состояний системы, соответствующих упорядоченному непрерывному или дискретному изменению некоторого параметра, определяющего свойства системы.

Если: y – величина, описывающая свойства системы (характеристика);

Y – множество всех возможных величин ($y \in Y$);

t – параметр процесса;

T – множество его значений, где $y = y(t)$, то процесс $S_{t_0,t}$ есть некоторое правило перехода системы из состояния со значением параметра t^0 в состояние со

значением $t > t^0$ через все его промежуточные непрерывные или дискретные значения:

$$S_{t_0,t}\big(y(t_0)\big) = y(t),\, y \in Y,\, t \in T. \qquad (1.6)$$

Эффективность процесса – степень его приспособленности к достижению цели. Эффективность может быть оценена только при функционировании и зависит от свойств системы, способа ее функционирования и от воздействий внешней среды.

Критерий эффективности – обобщенный показатель, являющийся правилом выбора лучшей системы или лучшего решения.

Система, состояние которой изменяется во времени под воздействием определенных причинно-следственных связей, называется *динамической системой*. Все материальные системы – динамические.

Статической называется система, состояние которой во времени не изменяется. Состояние такой системы вводится в результате фиксации определенного состояния динамической системы или на основе некоторой идеализации.

Состояния динамической системы являются элементами некоторого пространства состояний, задающего для определенного момента времени минимум сведений, которые необходимы для полного описания поведения динамической системы при полном задании входных воздействий.

Динамической математической моделью называется модель системы, раскрывающая причинно-следственные связи, которые определяют процесс перехода системы из одного состояния в другое, развивающийся во времени.

Кинематическая модель динамической системы описывает изменение состояния системы или некоторой ее функции без раскрытия причинно-следственных связей, вызывающих это изменение.

Статической моделью называется модель, описывающая связи между компонентами и другими характеристиками системы в условиях равновесия и других условиях «моратория» изменения состояния.

В зависимости от размерности пространства состояний (количества компонентов элементов этого пространства) различают математические модели конечномерных (*n*-мерных) и бесконечно мерных (счетномерных и несчетномерных) систем.

Рассмотрим понятие и основные классификации структуры системы.

Под *структурой системы* понимают совокупность устойчивых связей, способов взаимодействия элементов системы, определяющую ее целостность и единство. Структуру системы можно рассматривать как систему без качественного наполнения. Наиболее распространенным, простым и наглядным является представление структуры системы в виде графа.

В системном анализе различают два вида структур - материальную структуру и формальную структуру. Под формальной структурой понимается совокупность функциональных элементов и отношений между ними, необходимых и достаточных для достижения системой поставленных целей. Формальная структура описывает нечто общее, присущее системам одного типа. Материальная структура является носителем конкретных типов и параметров элементов системы и их взаимосвязей. Таким образом, фиксированной цели, как правило, соответствует только одна формальная структура, а каждой формальной может соответствовать множество материальных структур.

Основаниями классификации структуры систем могут являться:

1) выполняемые функции и целевое назначение системы, по этим признакам различают структуры систем планирования, оперативного управления, информационные, организационные и др.;

2) принципы разбиения системы на подсистемы: системы, в которых элементы объединяются по функциональному признаку и (или) системы, в которых элементы объединяются по объектному признаку;

3) возможность варьирования числа элементов системы и межэлементных связей позволяет различать системы с фиксированной (жесткой) и изменяемой (управляемой или переменной) структурами;

4) принципы подчиненности, в соответствии с которыми системы делят на децентрализованные, централизованные и смешанные.

Система называется децентрализованной, если решения отдельными элементами (подсистемами) системы принимаются независимо и не корректируются системой более высокого уровня. В централизованной системе задания отдельным элементам системы выдаются лишь одним элементом более высокого уровня. В смешанных системах управление некоторыми функциями или этапами происходит централизовано, а другими – децентрализовано.

Понятие иерархии (от греческого ιεραρχια), означающего соподчиненность, является одним из основных понятий теории систем и обозначает согласованный по подчиненности порядок объектов. По числу уровней иерархий различают одноуровневые и многоуровневые структуры систем. Многоуровневые структуры, в свою очередь, могут быть однородными (функции и характеристики узлов одного уровня идентичны) и неоднородными.

Важнейшими характеристиками организационных структур любого типа являются дифференциация и интеграция. К основным типам дифференциации относятся:

– горизонтальная, которая предусматривает разделение структурных звеньев по горизонтали;

– вертикальная, располагающая глубиной организационной иерархии;

– пространственная, характеризующаяся наличием территориального распределения элементов системы.

При увеличении структурной дифференциации системы возрастает необходимость в усилении интеграционных процессов.

Основными задачами, стоящими перед аналитиками при изучении формальных и материальных структур системы являются: исследование соответствия существующей структуры основным целям и функциям системы; определение необходимости (возможности) реорганизации существующей

структуры либо проектирования принципиально новой структуры; распределение (перераспределение) новых и старых функций системы по элементам структуры.

К типовым структурам систем относят линейную, кольцевую, сотовую, многосвязную, иерархическую, звездную, графовую.

Линейная структура характеризуется связью каждой вершины с двумя соседними. При нарушении функционирования хотя бы одного элемента (связи) структура разрушается.

Кольцевая структура характеризуется замкнутостью - любые два элемента обладают двумя направлениями связи. Это повышает скорость общения, делает структуру более живучей.

Сотовая структура отличается наличием резервных связей, обеспечивающих повышение надежности функционирования структуры, но неизбежно приводит к повышению ее стоимости.

Многосвязная структура является полным графом, обладает максимальной надежностью, за счет наличия кратчайших путей обеспечивается высокая эффективность функционирования и, как следствие, многосвязные структуры имеют высокую стоимость. Одним из примеров многосвязной структуры является колесо.

При описании производственно-технологических систем обычно используется графовая структура, которая инвариантна по отношению к иерархической.

При проектировании систем управления наиболее широкое распространение имеет иерархическая структура. В ней все элементы кроме элементов верхнего и нижнего уровней обладают как командными, так и подчиненными функциями управления, т.е. иерархическая структура обладает неравноправными связями между элементами - воздействие в одном направлении оказывает гораздо больше влияние на элемент, чем в другом.

Важнейшими понятиями теории систем и системного анализа являются понятия декомпозиции или структуризации, под которыми понимается расчленение системы на части при ее исследовании или проектировании.

Наряду с *иерархической структурой,* которая представляет собой декомпозицию системы в пространстве (все компоненты и связи существуют в таких структурах одновременно, не разнесены во времени), определяют *сетевую структуру или сеть*, которая является декомпозицией системы во времени. Сетевые структуры могут отражать порядок действия технической системы, этапы деятельности человека, последовательность выполнения работ и др.

Иерархичность является одной из характерных черт системного подхода при построении сложных систем. Под иерархичностью или иерархической упорядоченностью понимают закономерность построения систем. Понятие иерархии, закономерность иерархичности или иерархической упорядоченности была в числе первых закономерностей теории систем, которые выделил и исследовал Л. фон Берталанфи в работе «История и статус обшей теории систем», опубликованной на русском языке в 1973 г. [2].

Иерархическая система, иерархическая структура – понятия взаимосвязанные, поскольку иерархическими называют системы, имеющие иерархические структуры.

Иерархические структуры , в свою очередь, также делятся на классы.

Структуры, в которых, каждый элемент нижележащего уровня подчинен одному узлу (одной вершине) вышестоящего уровня, называются *древовидными структурами* или *иерархическими структурами с «сильными» связями*.

Структуры, в которых элемент нижележащего уровня может быть подчинен двум и более узлам (вершинам) вышестоящего уровня, называются *иерархическим структурами со «слабыми» связями.*

Любая иерархия, в принципе, сужает возможности и особенно гибкость системы. Элементы нижнего уровня сковываются доминированием сверху, они способны влиять на это управление лишь частично и, как правило, с задержкой. Однако, введение иерархии резко упрощает создание и функционирование системы, и поэтому ее можно считать вынужденной мерой.

Иерархические представления обладают рядом особенностей, которые помогают исследовать феномен целостности системы.

Так, в силу закономерности коммуникативности, которая проявляется во взаимодействии не только между выделенной системой и ее окружением, но и между уровнями иерархии исследуемой системы, каждый уровень иерархической упорядоченности имеет сложные взаимоотношения с вышестоящим и нижележащим уровнями.

Следующей важнейшей особенностью иерархической упорядоченности является закономерность целостности, которая заключается в том, что качественные изменения свойств компонентов более высокого уровня по сравнению с объединяемыми компонентами нижележащего - проявляется в ней на каждом уровне иерархии.

Кроме того, использование иерархических представлений как средства исследования систем с неопределенностью позволяет расчленить «большое» неопределенное на более «мелкие», лучше поддающиеся исследованию.

Закономерность целостности обеспечивает возможность представления системы различными иерархическими структурами. Это может зависеть как от глобальной цели исследования, так и от разработчика структуры, который на основе имеющегося профессионального опыта, уровня квалификации, объема знаний об объекте исследования может по-разному подходить к раскрытию неопределенности исследуемой проблемы.

Таким образом, в силу рассмотренных особенностей, иерархические представления являются эффективным инструментом для исследования проблем с большой начальной неопределенностью.

К важнейшим свойствами иерархической системы относят:

- вертикальное последовательное расположение подсистем, описывающее декомпозицию функций в задаче управления;

- приоритет действий (право вмешательства) подсистем более высокого уровня по отношению к подсистемам нижних уровней;

- зависимость действий подсистем верхнего уровня от фактического состояния подсистем, расположенных на нижележащих уровнях иерархии.

Информация о состоянии объекта и его отдельных компонентов в системах с иерархической структурой обобщается и систематизируется по мере её продвижения от подсистем более низкого ранга к подсистемам более высокого ранга. Высший уровень иерархии, таким образом, получает наиболее общую информацию сравнительно небольшого объема. Управленческие решения, вырабатываемые высшим уровнем иерархии, также имеют обобщенный характер. Обработка информации и решение крупномасштабных задач являются основными задачами, решаемыми высшим уровнем иерархии.

Иерархическая структура позволяет представить систему в виде набора функциональных уровней с определенными правилами взаимодействия между подсистемами одного уровня и соседних уровней. Каждый уровень предоставляет уровню, расположенному выше в иерархии набор услуг (информации), который используется им для реализации собственных функций. Функциональное назначение каждого уровня иерархии, являющегося замкнутой локальной системой, определяется совокупностью средств соединения подсистем (интерфейсом) иерархической структуры.

К общим положениям, характеризующим многоуровневое описание сложной системы относятся: выбор уровней иерархии, описывающих систему, зависит от опыта, знаний и квалификации разработчика, а также его заинтересованности в достижении целей исследования и выполнения поставленных задач; аспекты описания работы системы на различных уровнях иерархии в общем случае независимы и не связаны между собой; зависимость между условиями функционирования системы на различных уровнях является асимметричной - требования к работе системы на любом уровне выступают как условия или ограничения ее функционирования на уровнях, расположенных ниже в иерархической структуре системы; описание системы при последовательном переходе от одного уровня к другому меняет свои характеристики: чем ниже уровень иерархии, тем более детальным становится раскрытие системы, чем выше – тем яснее становится ее смысл и назначение.

К преимуществам систем, построенных по иерархическому принципу, относят: свободу локальных действий нижестоящих подсистем в течение интервалов времени, обусловленных моментами поступления воздействий со стороны подсистем вышестоящих уровней; возможность гармонизации локальных (частных) критериев эффективности подсистем каждого уровня с глобальным векторным критерием оптимизации системы; сокращение объема потока информации, обрабатываемой центральным пунктом управления, поскольку информация с нижних уровней передается на верхние уровни иерархии в обобщенном виде; достаточно высокая надежность системы и возможности введения элементарной избыточности на каждом уровне функционирования; гибкость системы и широкие возможности ее приспособления к изменившимся условиям; возможность поэтапного ввода системы в эксплуатацию (по уровням) и ее дальнейшего развития; универсальность при решении типовых задач; экономическая целесообразность.

М. Месаровичем предложены классы многоуровневых иерархических структур: «страты», «слои», «эшелоны». Они различаются принципами взаимоотношений элементов в пределах одного уровня иерархии и возможностями вмешательства вышестоящего уровня в организацию взаимоотношений между элементами нижестоящего. Между категориями «страта», «слой» и «эшелон», не существует однозначного соотношения. Каждая из этих категорий имеет свою область применения - концепция страт вводится для целей моделирования, концепция слоев – для вертикальной декомпозиции решаемой задачи, концепция эшелонов – для связи органов принятия решения.

Кратко охарактеризуем каждую из перечисленных иерархических структур.

Стратифицированием называют представление системы в виде семейства моделей, каждая из которых описывает систему с точки зрения соответствующего уровня абстрагирования, уровни абстрагирования называют *стратами*. Страты могут выделяться по разным принципам.

Так, при представлении системы управления предприятием страты могут соответствовать сложившимся уровням управления: управление технологическим процессом и организационное управление предприятием.

Стратифицированное описание уровней абстрагирования системы, например, предложено Черняком Ю.И., который выделил 6 страт – от философского, теоретико-познавательного описания ее замысла до материального воплощения (рисунок 3).

Система
Страта 6: Философское, теоретико-познавательное описание замысла системы
Страта 5: Представление системы на языке выбранной научной теории
Страта 4: Проектное представление системы
Страта 3: Конструкторская документация
Страта 2: Технологическая документация
Страта 1: Материальное воплощение системы

Рисунок 3 – Стратифицированное представление процесса абстрагирования при описании системы

Предложенное представление позволяет представить спектр выразительных средств, с помощью которых можно описывать одну и ту же систему на разных стадиях познания и проектирования. Стратифицированное представление является эффективным средством последовательного углубления представлений о системе, их детализации. Так, изучение строения и функционирования отдельных клеток организма не позволяет осознать принципов строения и функционирования органов, состоящих из этих клеток, как, в свою очередь, изучение органов не

позволяет сформировать целостного представления о функционировании всего организма.

«Слои» являются вторым видом многоуровневой структуризации, предложенной М. Месаровичем, и предназначены для организации процессов принятия решений. В концепции принятия решений с*лои* представляют собой уровни сложности принимаемого решения, которые выделяются для уменьшения неопределенности и представляют собой совокупность последовательно решаемых проблем. Структурирование проблем осуществляется с целью снижения неопределенности нижележащей проблемы за счет того, что решение вышележащей проблемы определяет ограничения (допустимую степень упрощения) при моделировании на нижележащем уровне, но без утраты смысла решения общей проблемы.

Рассмотрим многослойную иерархию принятия решения по управлению каким-либо процессом (рисунок 4).

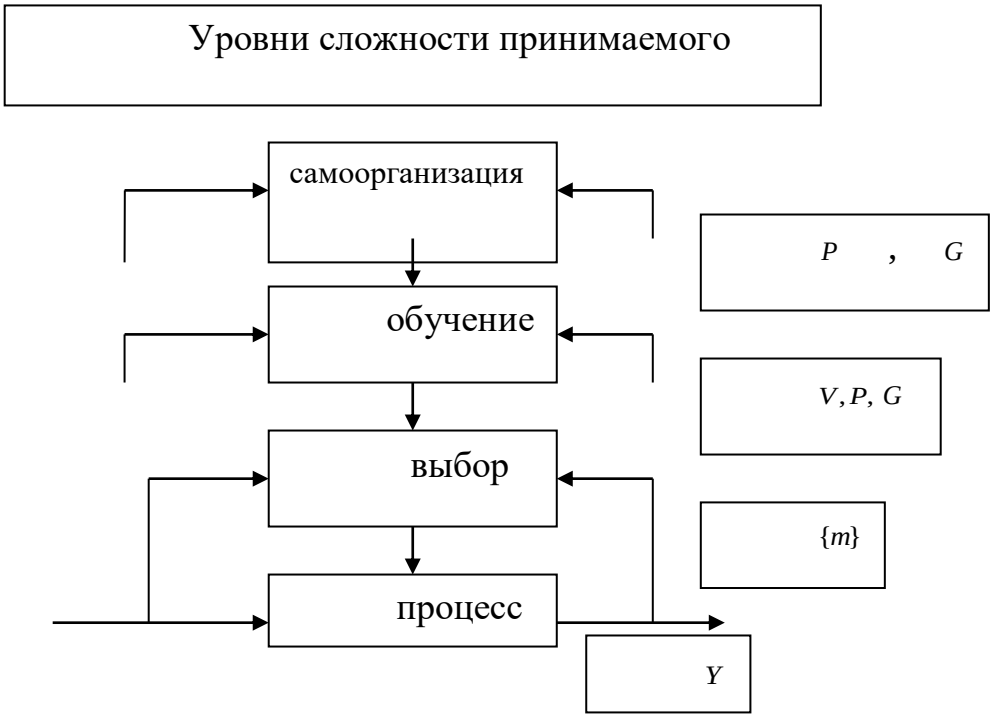


Рисунок 4 – Схема многослойной иерархии принятия решения

В проблеме принятия решения в условиях неопределенности выделяют три основных аспекта. Самый близкий слой к управляемому процессу – слой выбора. Принимающий решение уровень структуры получает данные об управляемом

процессе и, находит некоторый способ действия на основе алгоритма, полученный на верхних слоях иерархической структуры.

Считаем заданными выходную функцию P и функцию оценки G, а выбор действий $\{m\}$ основан на применении оценки G к P. Выходную функцию P можно определить как $P: M \times U \to Y$, где M – множество альтернативных действий, U – множество неопределенностей, отражающее отсутствие знаний о зависимости между действием m и выходом Y, Y – множество возможных результатов на выходе.

Аналитическая функция оценки $G: M \times Y \to V$, где V – множество величин, которые могут быть связаны с характеристиками качества работы системы. Если множество U состоит из единственного элемента или $\varnothing$, то выбор может основываться на оптимизации: найти такое $m' \in M$, что $V' = G\big(m'; P(m')\big) < V = G\big(m; P(m)\big)$, $\forall m \in M$. Если U – содержит больше элементов, то нужны другие процедуры для выбора способа решения. В общем случае, для того чтобы определить задачу выбора на 1-м слое, необходимо уточнить множество неопределенностей U, отношения P, G и т.д. Эти задачи решаются верхними слоями.

Слой обучения или адаптации, расположенный над слоем выбора, осуществляет конкретизацию множества неопределенностей U, с которыми работает слой выбора. Множество U рассматривается здесь как множество, включающее в себя все незнание о поведении системы. Предназначение этого слоя состоит в сужении множества неопределенностей U и упрощении, за счет этого, модели слоя выбора.

На третьем слое – слое самоорганизации, выбираются структура, функции, стратегии, используемые на нижележащих слоях таким образом, чтобы приблизиться к достижению цели, которая может быть описана вербально. Для достижения цели могут быть изменены функции P и G на первом слое или стратегия обучения на втором.

Описанные многослойные системы принятия решений эффективно используются для решения задач планирования и управления промышленными предприятиями, отраслями, народным хозяйством в целом.

Третьим видом многоуровневой структуризации, предложенной М. Месаровичем для организации процессов принятия решений, являются *эшелоны.* Так называемое, эшелонированное представление системы имеет вид относительно независимых, взаимодействующих между собой подсистем: при этом некоторые (или все) подсистемы имеют право принятия решений. Многоэшелонная структура определяется тем, что некоторые из подсистем находятся под влиянием или управляются вышестоящими (рисунок 5).

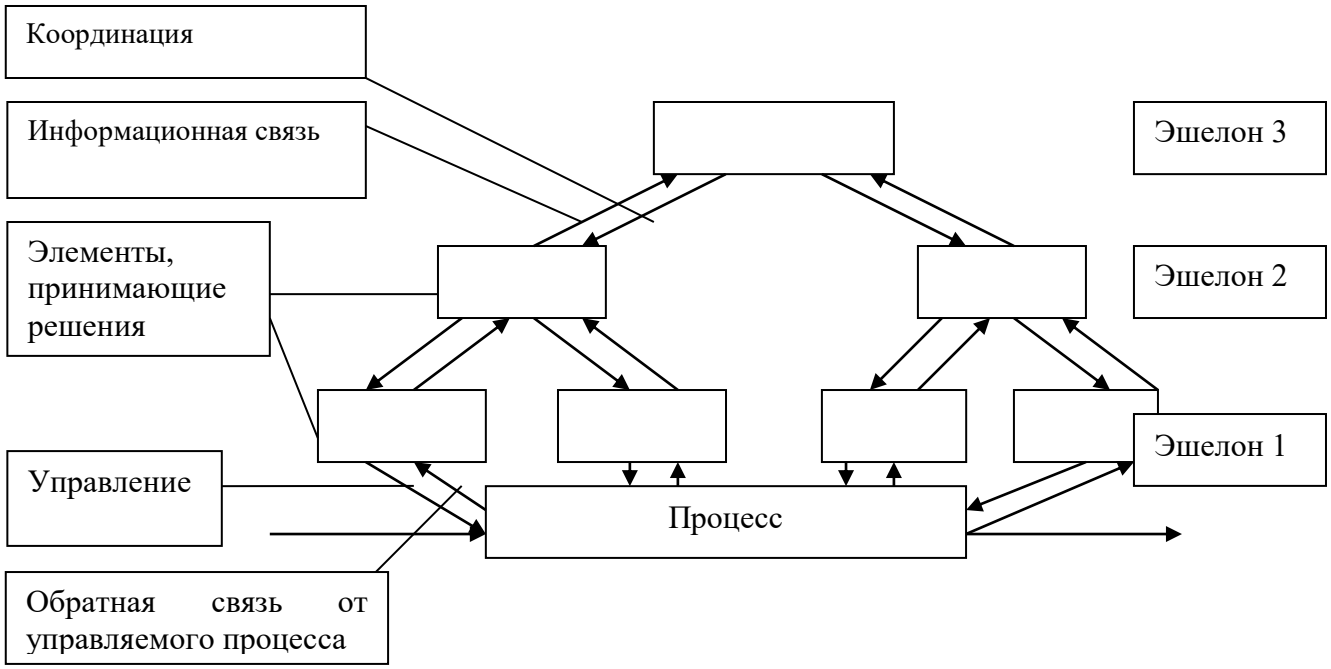


Рисунок 5 – Схема системы с эшелонированной структурой

Особенностью эшелонированной структуры системы является предоставление подсистемам всех уровней определенной свободы в выборе их собственных решений, причем эти решения могут не соответствовать решениям, выбранным вышестоящим уровнем. Предоставление свободы действий в принятии решений компонентам всех эшелонов является фактором, способствующим повышению эффективности функционирования системы. Кроме того, подсистемам предоставляется определенная свобода и в выборе целей, поэтому многоэшелонные структуры называют также многоцелевыми.

Примерами реализации эшелонированных структур в практике управления являются холдинговые структуры или холдинги. Между организациями, входящими

в холдинг (фирмами, банками, торговыми домами и др. организациями) на основе договоров и других нормативно-правовых и нормативно-методических документов устанавливаются правила взаимоотношения, обеспечивающие связи между элементами и уровнями такой эшелонированной структуры.

1.3 Основы системного моделирования

Моделирование как вид научной и практической деятельности основано на модельной теории мышления, в основе которой лежит представление о формировании в структурах мозга информационной модели объекта и всего внешнего мира. Эта информация воспринимается человеком на базе имеющихся знаний и опыта. Целесообразное поведение субъекта при построении модели состоит в формировании целевой ситуации и мысленного преобразования исходной ситуации в целевую. Основой построения модели является описание объекта в виде совокупности элементов, связанных отношениями, отображающими семантику предметной области.

По степени полноты модели делятся на полные, неполные и приближенные. Полные модели идентичны объекту во времени и пространстве. При неполном моделировании эта идентичность нарушается. В основе приближенного моделирования лежит подобие, при этом, некоторые аспекты функционирования моделируемого объекта не учитываются.

По форме представления модели объекта различают мысленное и реальное моделирование. При реальном моделировании используется возможность исследования характеристик либо на реальном объекте, либо на его части. Такие исследования проводятся как на объектах, работающих в нормальных режимах, так и при организации специальных режимов. Реальное моделирование является наиболее адекватным, но его возможности ограничены.

Различают натурный и физический виды реального моделирования. Натурным моделированием называют проведение исследования на реальном объекте с последующей обработкой результатов эксперимента на основе теории подобия. Натурный эксперимент подразделяется на научный, производственный эксперимент и комплексные испытания. Научный эксперимент характеризуется широким использованием средств автоматизации, применением разнообразных средств обработки информации, что повлекло возникновение научного направления – автоматизация научного эксперимента. В комплексных испытаниях моделирование

осуществляется путем обработки и обобщения сведений, полученных при повторении испытаний объектов, выявляющих общие характеристика качества и надежности. Производственный эксперимент реализует натурное моделирование путем обобщения опыта, накопленного в ходе производственного процесса. В такой реализации на базе теории подобия обрабатывается статистический материал, характеризующий производственный процесс, что позволяет получить его обобщенные характеристики. В отличие от реального процесса эксперимент позволяет реализовать критические ситуации и определить границы устойчивости процесса.

Физическое моделирование подразумевает проведение исследования на установках, которые сохраняют или изменяют природу явления или процесса и обладают физическим подобием. В процессе физического моделирования задаются характеристики внешней среды, и исследуется поведение объекта или его модели при заданных или искусственно создаваемых воздействиях внешней среды.

Мысленное моделирование применяется в условиях невозможности реализации модели в заданном интервале времени, либо отсутствии условий для их физического создания. Мысленное моделирование реализуется в виде наглядного, символического и математического представлений.

Наглядные модели создаются на базе представлений субъекта о реальном объекте и его функционировании. В наглядном моделировании выделяют гипотетическое, аналоговое и макетное (макетирование). Гипотетическое моделирование основано на гипотезе о закономерностях процессов, протекающих в моделируемой системе, отражающей уровень знаний исследователя о системе и причинно-следственных связей ее функционирования. Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Макетирование применяют в условиях, когда моделируемые процессы не поддаются физическому моделированию, либо может предшествовать применению других видов моделирования.

Символическое моделирование – искусственный процесс создания логического объекта, замещающего реальный и выражающего основные свойства

его отношений с помощью определенной системы знаков и символов. В основе языкового моделирования лежит некоторый тезаурус – фиксированный набор входящих понятий, имеющих однозначную трактовку. Введение условных обозначений понятий и операций позволяет реализовать знаковое моделирование.

Математическое моделирование – это процесс установления соответствия реальному объекту математической модели некоторого математического объекта. Вид математической модели зависит от природы реального объекта, от задач исследования, запланированной достоверности и точности исследования объекта. Аналитическое моделирование характеризуется представлением процессов функционирования элементов системы в виде некоторых функциональных соотношений, которые могут выражаться алгебраическими, интегро-дифференциальными, конечно-разностными и математическими выражениями или логическими условиями.

При исследовании моделей аналитическими методами стремятся получить в общий вид явных зависимостей, связывающих исследуемые характеристики системы с начальными условиями, параметрами и переменными системы. При невозможности получения решения в общем виде используют численные методы и модели, для получения числовых результатов при конкретных начальных условиях.

Виды моделирования по характеру процессов в изучаемой системе делят на:

- детерминированные и стохастические,
- статические и динамические,
- дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование используется для описания процессов, не подверженных случайным воздействиям. Стохастическое моделирование, в противоположность детерминированному, используется для описания вероятностных процессов и событий. Статическое моделирование применяют для описания поведения объекта в фиксированный момент времени, а динамическое – для исследования объектов и процессов, изменяющихся во времени. Дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные виды моделирования используют для

описания процессов, изменяющихся во времени и при этом оперируют аналоговыми, цифровыми и аналогово-цифровыми моделями.

Современная реализация исследований процессов функционирования больших систем неразрывно связана с вычислительными (машинными) методами.

При имитационном моделировании процесс функционирования системы во времени воспроизводится через его логическую структуру, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях системы в определенные моменты времени, позволяющие оценить характеристики системы.

Основным преимуществом имитационного моделирования перед аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют учитывать наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и др. факторы, затрудняющие аналитические исследования.

В настоящее время имитационное моделирование – наиболее эффективный метод исследования больших систем, а зачастую и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

В имитационном моделировании различают метод статистического моделирования и метод статистических испытаний (Монте-Карло). Если результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели, являются реализациями случайных величин и функций, то поиск характеристик процесса требует его многократного воспроизведения с последующей обработкой информации. Целесообразно, в таких условиях, в качестве метода машинной реализации имитационной модели использовать метод статистического моделирования.

Методом статистических испытаний называют численный метод, который применялся для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадали с решениями аналитических задач (такая процедура получила названия метода Монте-Карло). Затем этот прием стал

применяться и для машинной имитации с целью исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, т.е. появился метод статистического моделирования.

Метод имитационного моделирования применяется для оценки вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния на нее различных воздействий. Имитационное моделирование может быть положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, когда требуется создать систему, оптимальную по некоторым критериям эффективности, с заданными характеристиками при определенных ограничениях.

Комбинированное (аналитико-имитационное) моделирование объединяет достоинства аналитического и имитационного моделирования. При построении комбинированных моделей производится предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. Такой подход позволяет охватить качественно новые классы систем, которые не могут быть исследованы с использованием только одного вида моделирования.

Информационное моделирование, называемое также кибернетическим, связано с использованием моделей, в которых отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этих случаях стремятся отобразить лишь некоторую функцию и рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируются некоторые связи между входами и выходами.

Таким образом, в основе информационных моделей лежит отражение некоторых информационных процессов управления, что позволяет оценить поведение реального объекта. Для построения модели в этом случае необходимо выделить исследуемую функцию реального объекта, формализовать ее в виде некоторых операторов связи между входом и выходом и воспроизвести данную

функцию на имитационной модели, причем на совершенно другом математическом языке и с помощью иной физической реализации процесса.

Структурно – системное моделирование базируется на некоторых специфических особенностях структур определенного вида и использует их как средство исследования систем, разрабатывая на их основе специфические подходы к моделированию с применением других методов формализованного представления систем (теоретико-множественных, лингвистических и т.п.).

Структурно-системное моделирование включает в себя:

– методы сетевого моделирования;

– сочетание методов структуризации с лингвистическими (языковыми);

– структурный подход в направлении формализации построения и исследования структур разного типа (иерархических, матричных, произвольных графов) на основе теоретико-множественных представлений и понятия номинальной шкалы из теории измерений.

1.4 Основы управления

Традиционно, с учетом природы изучаемых явлений выделяют три типа систем с управлением: технические; организационные (социальные); комплексные (организационно-технические).

Организационно-техническая система с управлением может быть представлена следующей структурной схемой (рис. 6).

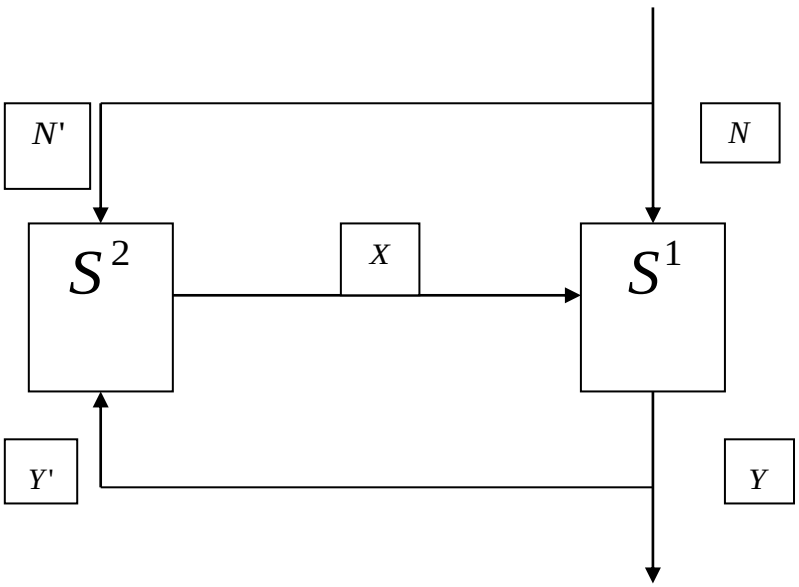


Рисунок 6 – Структурная схема организационно-технической системы

S^1 – объект управления;

S^2 – управляющая система;

N – информация о состоянии внешней среды (внешние воздействия на объект управления);

N' – информация о состоянии внешней среды, имеющаяся в управляющей системе;

X – командная информация;

Y – информация о состоянии объекта управления;

Y' – информация о состоянии объекта управления, имеющаяся в управляющей системе.

К основным *задачам управляющей системы* относят целеполагание, стабилизацию функционирования системы, выполнение программы, слежение за состоянием, оптимизацию работы системы, которые обеспечивают удержание выходных характеристик системы в требуемых пределах при изменении внешней среды и (или) выполнение системой действий по изменению значений ее характеристик или характеристик внешней среды.

Объект управления (ОУ) является инструментом реализации основной функции системы. *Система связи* осуществляет обмен управляющей информацией между управляющей и управляемой подсистемами.

К необходимым условиям управления (аксиомам) относят:

1) *Наблюдаемость объекта управления,* согласно которому объект управления считается наблюдаемым в состоянии $\mathrm{z(t)}$ на множестве моментов времени T, при входном воздействии $\mathrm{x(t)}$ и отсутствии возмущений, если уравнение наблюдения динамической системы имеет вид:

$$y^*(t) = g\big(t, x(t), z^*(t)\big), \tag{1.7}$$

где $y^*(t)$ – некоторая реализация выходного процесса, доступная для регистрации, имеет единственное решение:

$$z^*(t) = z(t) \in Z. \tag{1.8}$$

Если эти условия выполняются для $\forall z(t) \in Z$, то объект считается полностью наблюдаемым.

В организационно-технических системах управления эта задача реализуется *функцией контроля* текущего состояния объекта управления и воздействий внешней среды.

2) *Управляемость объекта управления,* под которой понимается способность объекта управления переходить в пространстве состояний Z из текущего состояния в требуемое, под воздействием управляющей системы.

3) *Наличие цели управления, означающее существование* набора значений количественных или качественных характеристик, определяющих требуемое состояние объекта управления.

4) *Свобода выбора* управляющих воздействий системы управления, означающей существование некоторого множества допустимых альтернатив (решений).

5) *Наличие критерия эффективности управления,* обеспечивающего возможность оценки степени достижения цели функционирования системы.

6) *Наличие ресурсов, обеспечивающих реализацию принятых решений.*

Последовательность функций управления, реализуемых в организационно-технических системах, можно представить в виде технологического цикла управления.

Функция управления может рассматриваться как устойчивая упорядоченная совокупность операций, основанная на распределении труда в управляющей системе.

Основными функциями управления являются:

- сбор данных,
- формирование сообщения,
- передача данных по каналам связи,
- учет,
- контроль,
- анализ,
- прогнозирование,
- планирование,
- оперативное управление,
- организация и координация,
- доведение решений до объекта управления.

Для учета влияния человеческого фактора на функционирование системы в отдельную группу выделяют функции стимулирования и мотивации.

Определим основные функции управления и их взаимосвязи.

Сбором данных называют функцию измерения характеристик y_i , выполняемую вручную или автоматически.

Под *формированием сообщения* понимают преобразование информации к виду, пригодному для обработки в автоматизированном режиме и (или) передачи по каналам связи в систему управления.

Передача данных по каналам связи – функция, обеспечивающая своевременность, достоверность и безопасность обмена информацией между управляющей системой и объектом управления.

Множество функций, обеспечивающих хранение информации и включающее в себя функции ввода-вывода информации, регистрацию, преобразование формы, поиск, отображение, тиражирование, классификацию, статистическую обработку, выборку, получение агрегированных данных, обеспечение конфиденциальности и целостности информации, реализует *функцию учета*.

Контроль представляет собой систему функций, включающую в себя измерение, сбор, уточнение данных об объекте управления, которые обеспечивают определение состояния объекта управления и оценку степени отклонения его текущего состояния от требуемого по заданным критериям эффективности. Автоматизация этой функции основывается на формальной постановке задач наблюдения, классификации и идентификации состояния объекта управления.

Функция *анализа,* реализуемая управлением, рассматривается как средство, обеспечивающее объяснение причин отклонений состояния системы от требуемого и обоснование решения на переход к оперативному управлению или планированию и, в общем случае, зависит от поставленной цели. Зачастую анализ не выделяют как отдельную функцию, а рассматривают совместно с контролем, как составную часть других функций управления.

Если, например, объект управления характеризуется параметрами y_i, которые изменяются в пределах Δy_i и в результате анализа определено, что $\Delta y_i \leq \Delta y_{i\text{доп}}$, т.е. не превышает допустимого отклонения, то реализуется функция оперативного управления, если $\Delta y_i > \Delta y_{i\text{доп}}$, то осуществляется переход к функции планирования.

Прогнозирование, как функция управления, является средством снятия неопределенности относительно возможной структуры, свойств или закона функционирования системы в будущем. Целями прогнозирования являются: замедление процесса «старения» принимаемых решений и предупреждение неблагоприятных ситуаций для выполнения целей системы; повышение эффективности функционирования системы, её адаптация к изменяющимся условиям. Прогноз рассматривается это научно обоснованное суждение о

возможных состояниях системы в будущем и (или) альтернативных путях и сроках достижения целевого состояния.

Функция *планирования* состоит в последовательном снятии неопределенности относительно требуемой структуры, свойств, закона функционирования системы или внешней среды в средне срочной перспективе. В реализации этой функции управления выделяют задачу принятия решений по целеполаганию (ЗПРц) и задачу принятия решений по действиям (ЗПРд). Задача принятия решений по действиям представляет собой совокупность процедур по определению требуемого (целевого, оптимального) состояния системы и действий по достижению этого состояния, объединенных в единый процесс. Задачу принятия решений по целеполаганию называют стратегическим или перспективным планированием, тогда как задачу принятия решений по действиям – тактическим или текущим планированием.

Оперативное управление обеспечивает функционирование системы в рамках действующего плана и заключается в решении задач стабилизации, слежения или выполнении программы управления, возможно включение задачи оптимизации. Планирование и оперативное управление являются задачами содержательной обработки информации. Решения, принятые при планировании или оперативном управлении, обрабатываются в блоке учета и доводятся до объекта управления.

Функция *организации* выполняет группировку функциональных элементов и ресурсов в организационные структуры и распределение степени ответственности лиц, принимающих решения, в иерархии подсистем управления.

Координация, как функция управления, представляет собой согласование действий подсистем в соответствии с целями системы и поддержание стабильности этого согласования на протяжении цикла управления.

1.5 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу

1. Категориальный аппарат, методы и принципы системного анализа.
2. Основы системного моделирования и управления.
3. Жизненные циклы систем, состав и структура.
4. Особенности исследования крупномасштабных систем

2 Конструктивный анализ и синтез крупномасштабных систем

2.1 Особенности исследования крупномасштабных систем

Крупномасштабные системы – класс сложных систем, которые характеризуются комплексным взаимодействием элементов, распределенных на значительной территории, требующих для развития существенных ресурсных затрат. Типичными примерами крупномасштабных систем являются топливно-энергетический комплекс совместно с отдельными отраслями, транспортные, аграрно-промышленные, территориально-промышленные, региональные и отраслевые системы, холдинги, концерны, финансово-промышленные группы, распределенные системы передачи и обработки информации и др.

Крупномасштабность систем связана с наличием в них объектов большой мощности, комплексным использованием ресурсов: сырья и материалов, усилением межотраслевых связей и возрастанием роли региональных систем. Определяется крупномасштабная система составляющими компонентами и взаимосвязями управляющих и производственно-транспортных элементов в динамике их развития и функционирования, а также распределением функций управления по элементам организационной иерархии и заданий по производственно-транспортным элементам.

К основным особенностям крупномасштабных систем относятся:

– существенные затраты ресурсов на развитие (планирование инвестиционных мероприятий ведется на несколько лет вперед);

– нечеткость границ (по ходу развития составляющие элементы системы, а также характер их взаимосвязи между собой и с внешней средой существенно изменяются);

– ощутимая связь с другими крупномасштабными системами и с окружающей средой;

– комплексный характер управления (в частности, необходимость согласования отраслевых, корпоративных и региональных интересов);

– грубость и устойчивость – небольшие отклонения в параметрах развития отдельных элементов и их взаимосвязей мало влияют на развитие систем в целом;

– другие характеристики сложных (больших) систем.

Методы исследования таких систем должны учитывать комплексный характер управления, сложную структуру и взаимосвязь с другими системами и с окружающей средой, основываться на методологии построения комплексов взаимосвязанных моделей и оптимизационно-имитационного подхода.

При исследовании крупномасштабных систем возникает проблема взаимосвязанного описания, анализа процессов выбора целей и принятия решений, производственно-транспортных и технологических процессов и др. поэтому крупномасштабная система представляется в виде взаимосвязанной совокупности элементов различных уровней детализации и этапов развития: уровня целей функционирования подсистем и системы в целом; функций и задач элементов системы; звеньев организационной иерархии; производственных и транспортных объектов; технических средств и т. д. при этом, на различных этапах и уровнях описания структур крупномасштабных систем используются различные средства и языки – вербальные описания, теория множеств, аналитические и графоаналитические, алгоритмические процедуры, альтернативно-графовая формализация и т. п.

При синтезе структуры сложных систем эффективным является принцип последовательного синтеза моделей допустимых вариантов построения отдельных элементов, частей и системы в целом с последующим выбором с помощью синтезируемой модели структуры системы наилучшего варианта ее реализации и развития. Такой подход позволяет выделить типовые задач синтеза структуры сложных систем, детализация которых определяется этапом и целями разработки.

Задачи синтеза структуры крупномасштабных систем могут быть поставлены для различных уровней детализации описания системы. На верхнем уровне формализуются цели, реализуемые системой управления, выполняемые ею функции и задачи управления. Для формализации взаимосвязей различных вариантов

построения элементов системы используется альтернативно-графовая формализация, в которой различные варианты построения элементов (множества элементов) задаются в виде вершин альтернативного графа, а дуги отражают их взаимосвязи. Такой граф может быть представлен на различных уровнях детализации – на уровнях отраслей, предприятий и т. д. (рисунок 7).

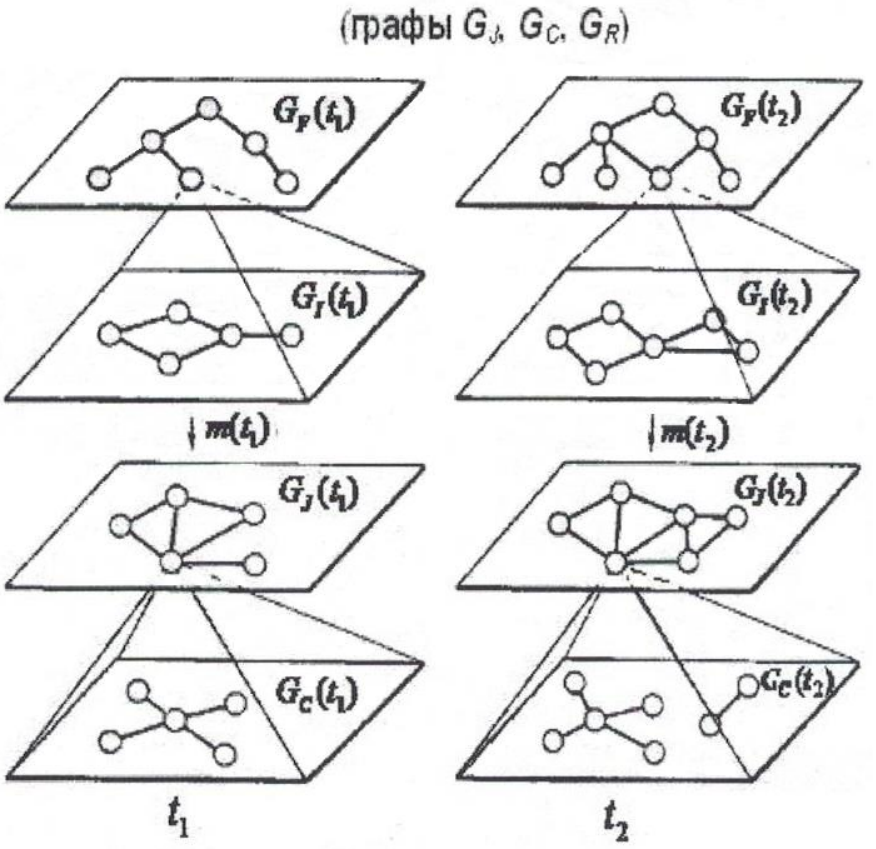


Рисунок 7 –Альтернативно-графовая формализация целей, функций и задач системы

При использовании альтернативно-графовой формализации в зависимости от уровня детализации выполняемых системой целей, функций, задач, а также от их отображения по узлам системы возникают следующие задачи синтеза структуры систем:

- оптимальное отображение множества целей, выполняемых системой (граф G_A), на множество взаимосвязанных узлов управления (граф G_J);
- множество узлов управления и их взаимосвязей во многом определяются особенностями графа целей системы;
- оптимальное отображение множества выполняемых системой функций, за-

дач, массивов и процедур (графы G_F и G_{MP} соответственно) на множество узлов управления, сеть ЦВМ (графы G_J и G_C) с учетом особенностей графа G_R,

- оптимизация состава и вариантов реализации и размещения узлов системы.

В процессе формализации развития и функционирования крупномасштабных систем выделяются такие их атрибуты, как структура, механизм функционирования систем и модель объекта управления в управляющей системе. Система $S(t)$ понимается как совокупность элементов, изменяющихся (развивающихся) во времени t: $S(t) = \{Str(t), m(t), M(t)\}$, где $Str(t)$ – структура системы, $m(t)$ – механизм функционирования системы, $M(t)$ – модель объекта управления в управляющей системе, включая состояние системы и ее элементов, а также информированность управляющих элементов системы о состоянии системы в различные моменты времени.

Структура системы представляется совокупностью:

$$Str(t) = \{Str'(t), Str''(t), Str'''(t)\}, \tag{2.1}$$

где $Str'(t)$ – институционная структура системы управления, изменяющаяся во времени; $Str''(t)$ – структура производственно-транспортной подсистемы; $Str'''(t)$ – взаимосвязи управляющих элементов системы с производственно-транспортными элементами и изменение этих взаимосвязей во времени.

В рыночных условиях множество возможных принципов и форм построения систем управления и их структур многообразно: концерны, финансово-промышленные группы, холдинги, трастовые компании, акционерные общества и т.п. Это разнообразие актуализирует проблему выбора рациональной формы управления и анализа влияния различных форм на эффективность функционирования. Структура производственно-транспортной системы:

$$Str''(t) = \{I(t), J(t), \Gamma(t), X(t), \Pi(t)\}, \tag{2.2}$$

где $I(t)$ – множество узлов системы, отражающих ее производственные элементы, развивающиеся во времени; $J(t)$ – множество транспортных элементов системы; $\Gamma(t)$ – взаимосвязи производственных, транспортных элементов и производственно-транспортных элементов (взаимосвязь последних описывается в

виде графа $G(t) = \big(I(t), J(t), \Gamma(t)\big)$; $X(t)$ – характеристики производственных и транспортных элементов; $\Pi(t)$ – распределение заданий системы по ее элементам, определяемое их специализацией, кооперацией и т.д.

Механизм функционирования системы – совокупность функций, задач, процедур, инструкций и т.д., регулирующих действие элементов системы. Часть элементов описанной совокупности имеют глобальный характер, а также распространяются на все элементы системы (законы, инструкции и т.п.), в то время, как другие являются специфическими, затрагивают только некоторые элементы и определяются распределением заданий, функций, задач и т.д. Возможность управления определяется правом собственности, контрольным пакетом акций, вхождением в состав холдингов, финансово-промышленных групп и т.д. Для производственно-транспортной системы механизм функционирования задает правила взаимодействия ее элементов с учетом их принадлежности различным управляющим элементам, компаниям, финансово-промышленным группам. Это, в свою очередь, определяет из характеристики $X(t)$ и распределение заданий $\Pi(t)$.

При моделировании механизм функционирования системы представляется в виде целевых функций элементов, ограничений, правил планирования, последовательности действий в процессе функционирования и т.д. Под моделью объекта управления $M(t)$ в управляющей системе понимается совокупность сведений о системе (включая формализованные модели, данные о состоянии элементов и внешней среды, маркетинговые исследования, данные контроля и т.д.), которые используются в процессе управления развитием системы.

При математическом моделировании модель определяется множеством допустимых состояний системы, задаваемых ограничениями (включая неравенства, функциональные и операторные зависимости, налагаемые на выбор состояний элемента). В крупномасштабных системах для подсистем разрабатываются и применяются свои модели. Наряду с этим разрабатывается совокупность метамоделей, увязывающих модели подсистем.

Поскольку крупномасштабные системы являются развивающимися системами, то их модели нуждаются в постоянном совершенствовании. Для таких систем важна коррекция моделей системы для определения целесообразности продолжения выбранного направления развития.

Для моделирования и исследования крупномасштабных систем российскими учеными разрабатывается исследовательский инструментарий как фундаментального, так и прикладного характера. В Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН создано и развивается научное направление исследования крупномасштабных систем, заложены методологические основы управления развитием крупномасштабных систем. В частности, разработаны:

– агрегативно-декомпозиционный подход к проектированию структур сложных (крупномасштабных) систем;

– методология построения комплексов взаимосвязанных оптимизационно-имитационных моделей планирования развития и функционирования крупномасштабных систем на уровне предприятий и групп предприятий, итеративные процедуры планирования развития крупномасштабных систем;

– программные комплексы ТЭО-ИНВЕСТ и ТЭО-ИНВЕСТ Холдинг, являющиеся профессиональными системами для финансового анализа и разработки бизнес-планов инвестиционных проектов.

Агрегативно-декомпозиционный подход включает два взаимосвязанных этапа: последовательную декомпозицию выполняемых системой целей, функций, задач и агрегирование на соответствующих уровнях детализации элементов для генерирования вариантов построения системы в целом на рассматриваемом уровне детализации.

Основу методологии агрегативно-декомпозиционного подхода составляют:

– комплексное исследование различных аспектов процессов развития и функционирования систем от выбора целей, процедур принятия решений до технологических процессов в динамике их функционирования и развития;

– альтернативно-графовая формализация задач планирования развития;

– использование в процессе формализации взаимосвязанного комплекса моделей различного типа – имитационных, оптимизационных, оптимизационно-имитационных, расчетных, человеко-машинных и т.д.;

– разработка и использование комплекса взаимосвязанных моделей, обеспечивающих в процессе взаимодействия (чаще всего, итеративного) решение общей проблемы (композиционный подход);

– декомпозиция моделей на ряд взаимосвязанных подмоделей с обоснованием процедур сходимости их взаимосвязанного решения к исходному решению (декомпозиционный подход);

– использование в процессе формализации моделей различной степени агрегирования.

Одним из методологических аспектов агрегативно-декомпозиционного подхода является принцип последовательного синтеза допустимых вариантов построения отдельных элементов, частей и системы в целом с последующим выбором наилучшего варианта ее реализации и развития, что позволяет выделить типовые задачи синтеза, детализация которых определяется этапом и целями исследования.

Агрегативно-декомпозиционный подход предусматривает построение многоуровневого комплекса взаимосвязанных моделей. Модели различных уровней комплекса описывают систему с различной степенью ее детализации, причем для учета характеристик развития и функционирования системы, которые невозможно описать аналитическими зависимостями, используются имитационные модели.

Как отмечалось выше, агрегативно-декомпозиционный подход включает агрегирование на соответствующем уровне детализации элементов для генерирования вариантов построения системы в целом. Агрегирование может быть выполнено различными способами и на характер агрегирования существенное влияние оказывает вид графов, отражающих характер взаимосвязей узлов системы. С учетом специфики различных систем соответствующие задачи синтеза структуры

сложных систем могут быть сформулированы на каждом из приведенных уровней детализации построения системы.

Структурные параметры считаются традиционно наиболее консервативными и мало изменяющимися во времени. Однако при создании крупномасштабных систем, когда планирование осуществляется на 10, 15 и более лет структурные параметры перестают быть неизменными.

Этапы t_1, t_2 на рис. 7 отражают динамику развития элементов структуры крупномасштабных систем, при этом возникает ряд важных новых задач синтеза их структуры. Динамические задачи синтеза структуры систем могут быть сформулированы для одного уровня или совокупности уровней развития элементов системы.

Динамический характер задач синтеза структуры требует создания методов формализации и оптимизации: от сценариев развития (с учетом целевых программ, долгосрочных планов развития производства, принципов управления и методов контроля за реализацией и стимулированием выполнения плана) до выбора рациональных производственных и управленческих структур, включая вопросы рационального использования вычислительной техники.

Учет динамики развития элементов при анализе и синтезе структуры требует совместного использования оптимизационных и имитационных моделей, итеративных процедур выбора рациональных вариантов структуры системы.

Структура крупномасштабной системы в каждый период планирования может быть представлена в виде семейства множеств

$$C(\tau) = \{E(\tau), A(\tau), X(\tau), T\}, \qquad (2.3)$$

где $E(\tau)$– множество элементов системы в период развития системы $\tau \in T$; $A(\tau)$ – множество взаимосвязей элементов системы в период $\tau \in \mathrm{T}$; $X(\tau)$ – множество характеристик элементов системы в период $\tau \in T$; T – множество рассматриваемых периодов планирования развития системы.

Множество элементов системы в каждый период планирования τ представляет собой совокупность реально существующих и функционирующих к периоду τ

элементов $E_1(\tau)$ и элементов системы $E_2(\tau, \tau')$, $(\tau < \tau') \in T$, находящихся на стадии развития и ввод в эксплуатацию которых предусмотрен в период τ. Таким образом,

$$E(\tau) = E_1(\tau) \cup E_2(\tau, \tau'), (\tau < \tau') \in \mathrm{T}, E_1(\tau) \cap E_2(\tau,\ \tau') = \varnothing.$$

Различные свойства элементов системы $l_i \in E(\tau)$ описываются посредством их характеристик на различных уровнях детализации. Каждому элементу системы i в период планирования τ соответствует множество его характеристик

$$X_i^\tau = \left\{ \frac{X_{ij}}{i \in I^\tau}, j \in J_i^\tau \right\},$$

где I^τ – множество индексов элементов системы, J_i^τ – множество индексов характеристик элемента i в период τ.

Таким образом, на множествах $E(\tau)$ и $X(\tau)$ задано отношение соответствия ψ_{E}^{τ} для каждого периода планирования τ:

$$\psi_{\mathrm{EX}}^{\tau} = \left\{ \frac{\mathrm{l_i, X_i(\tau)}}{\mathrm{l_i \in E(\tau)}}, \mathrm{X(\tau)} \right\}.$$

Функциональная часть крупномасштабных систем формулируется в виде альтернативных графов на уровнях целей функционирования и выполняемых функций и функциональных задач. Организационная часть системы формулируется аналогичным образом на уровнях: узлов управления (организационной иерархии), регионов, предприятий, отдельных объектов управления, производственных и технологических процессов, агрегатов, а также сетей ЭВМ и вычислительных центров. На полученной таким образом многоуровневой модели крупномасштабной системы в виде взаимосвязанной совокупности альтернативных графов различной степени детализации элементов структуры и их взаимосвязей ставятся задачи синтеза структуры подсистем и системы в целом. При этом выделяются задачи двух типов: задачи оптимизации структурного построения системы на одном уровне детализации, которые формально сводятся к поиску оптимальных подграфов на генерированных моделях системы данного уровня; задачи оптимального построения структуры крупномасштабной системы, которые формально сводятся к построению альтернативных графов различных уровней и их отображению друг на друга. В ряде случаев является необходимым совместное решение этих задач.

Модели синтеза структуры крупномасштабной системы включают:

– модели производственно-технологической и производственно-транспортной структуры системы, которые должны отражать состав основных производственных и транспортных элементов и их взаимосвязи (с учетом специализации, создания, реконструкции и т. д.);

– модели организационно-функциональной (управленческой) структуры системы, которые отражают иерархию управления, характер взаимосвязей управляющих узлов различных уровней, распределение функции управления по уровням и узлам системы с учетом возможных принципов управления и функционирования системы (в том числе структуры автоматизированного информационно-управляющего комплекса).

Модели описания элементов представляются в соответствии с задачами исследования и иерархической структурой системы на различных агрегированных (детализированных) уровнях. Поэтому важное значение имеет разработка моделей и методов стандартизации описания элементов систем и их структурных взаимосвязей. Наибольшие успехи достигнуты при формализованном описании элементов экономики, элементов производственно-транспортных крупномасштабных систем, агрегативном представлении элементов сложных систем.

2.2 Развитие крупномасштабных систем, как объект исследования, оценки и управления

Динамический характер задач управления развитием крупномасштабных систем требует создания методов формализации и оптимизации, начиная от сценариев развития, целевых программ, долгосрочных планов развития, бизнес-планов до выбора рациональных производственных структур.

Для планирования развития крупномасштабных систем большое значение имеет разработка:

– методов оценивания и выбора вариантов инвестиционных проектов и программ, генерирование вариантов и сценариев развития систем и др.;

– моделей и методов планирования развития системы на различных уровнях детализации, включая целевые комплексные программы, инвестиционные модели развития, процедуры согласования решений взаимосвязанных моделей;

– моделей и методов оптимизации функционирования крупномасштабных систем, включая итеративные процедуры оптимизационно-имитационного подхода моделирования динамики функционирования системы, механизмов, стимулирующих эффективную реализацию планов и функционирование системы и др.

Проектный подход в моделировании развития крупномасштабных систем позволяет построить комплекс взаимосвязанных моделей, определяющих стратегию развития системы с учетом вариантов ее функционирования. В комплекс могут входить модели различных типов. Использование комплекса моделей обеспечивает в процессе взаимодействия решение общей проблемы. При построении такого комплекса используется декомпозиция моделей на ряд взаимосвязанных подмоделей. Комплекс моделей развития крупномасштабных систем включает в себя модели общего равновесия GTAG (GlobalTradeAnalysisProject), USAGE ITC Комиссии по международной торговле; модели частичного равновесия (региональные, отраслевые, корпоративные и др.); модели инвестиционных проектов и программ.

Инвестиционный проект представляет собой документально оформленную систему инновационных, маркетинговых, финансово-экономических, экологических и других исследований, разработок и организационных решений, определяющих цели инвестирования, мероприятий по их реализации, а также затраты, способы и процедуры, обеспечивающие их окупаемость (получение прибыли). Форма и содержание инвестиционных проектов разнообразны: от производства новых изделий (услуг) до развития и реконструкции крупномасштабных производственно-транспортных комплексов.

Инвестиционные проекты могут быть классифицированы по ряду признаков: масштабности (большие, средние и малые), длительности, направлениям развития

(производственные, коммерческие, организационные, социальные и др.), для объекта в целом, или по отдельным направлениям развития и т. п. Независимо от принадлежности проекта тому или иному классу базовым документом, необходимым для принятия решения о его целесообразности, является бизнес-план– документ, описывающий цели инвестиционного проекта предприятия (фирмы, инвестиционного института и т. д.) и стратегию их достижения с маркетинговым анализом и технико-экономическим обоснованием. Бизнес-план необходим для поиска потенциальных инвесторов, организации финансирования проекта и обоснования кредитов. На его основе принимается решение о состоятельности проекта, при этом решающее значение имеют финансово-экономические оценки его коммерческой привлекательности.

Модель стратегии развития региона, корпорации (предприятия) – это модель, описывающая разнородные хозяйственные объекты, потоки финансовых и материальных ресурсов, связывающих отдельные объекты, «погруженные» в среду финансовых и материальных потоков. Изменение потоков вызывает соответствующие реакции объектов, которые, в свою очередь, меняют среду.

При моделировании экономических объектов их деятельность разбивается на отдельные функциональные модули, описывающие различные аспекты этой деятельности, например, модули экономического окружения и налогов, выручка от реализации продуктов и услуг, инвестиции в основные средства, производственные издержки, оборотный капитал, взаимодействия с кредитными организациями и др.

Важное значение при моделировании управления развитием крупномасштабных систем имеет моделирование налоговой политики, экспортной, импортной и таможенной политики с учетом прогнозов спроса и предложения, моделей ценообразования. Данные модели должны быть увязаны с макромоделями развития крупномасштабных систем с использованием асимптотических траекторий развития, магистральных режимов и др.

Планирование развития крупномасштабных систем требует разработки математических методов формализации элементов системы и их взаимосвязей. Для формализованного описания элементов системы и их взаимосвязей применяются

альтернативные графы, сети, деревья, гиперграфы и т. д. Функционирование системы в этом случае задается в виде направленных потоков или специальных логических правил и условий функционирования элементов системы.

При решении задач планирования в крупномасштабных системах применяются «распределенные» многоуровневые процедуры формирования и выбора решений. Такие процедуры, как правило, включают в себя взаимосвязанные процессы подготовки, выполняемые параллельно многими специалистами (лицами, принимающими решения – ЛПР) и связанные с частичным принятием решений или сужением области решений и значений показателей плана. Информация, имеющаяся в распоряжении каждого ЛПР, как правило, не является полной и уточняется с другими ЛПР, взаимодействующими как по «горизонтали», так и по «вертикали».

В процессе развития крупномасштабных систем увеличиваются объемы производства, изменяются взаимосвязи в системах, возрастает сложность управления, что приводит к повышению значимости тех факторов, которые представлялись несущественными на предыдущих этапах развития системы (и управления этим развитием) и не были отражены в их моделях. У «центра», управляющего развитием крупномасштабной системы, создается ощущение, что система теряет «хорошие» свойства, которые были присущи ей на предыдущих этапах развития. При этом перед управляющим элементом возникает проблема, как вернуть «хорошие» свойства системе, т. е. повысить ее управляемость и исключить такие нежелательные явления, как низкая рентабельность, замедление темпов развития системы, несогласованность планов и фактического состояния, несогласованность развития отдельных элементов (частей) системы, потеря устойчивости развития и др.

Управляющие элементы располагают несколькими возможностями для придания системе «хороших» свойств:

– идентификация (уточнение) модели управляемой системы с вводом для этой цели специального контроля и других мер, направленных на выявление существенных факторов для коррекции модели системы;

– изменение (совершенствование) механизма функционирования системы, формы собственности;

– изменение структуры системы, включая перегруппировку ее элементов и их взаимодействий (например, совершенствование производственно-транспортной и организационной частей системы).

В разрабатываемых проектах крупномасштабных систем обычно анализируется ограниченное число вариантов. Проведение такого анализа в проектах крупномасштабных систем не по силам заказчикам и разработчикам систем и выполняется, как правило, силами привлеченных организаций. Такие задачи могут быть решены в рамках консалтинговых систем, включающих в себя центры моделирования развития и функционирования крупномасштабных систем, разработки бизнес-планов и технико-экономических обоснований.

Интеграция национальных экономик в единый планетарный механизм с универсальной системой ценностей, макроэкономического регулирования, взаимодействия финансовых институтов и рынков экономически неизбежный процесс. Финансовые и материальные потоки должны моделироваться с учетом положительных и отрицательных последствий деятельности ТНК.

Если рассмотреть крайний случай, когда ТНК контролирует основные отрасли промышленности региона, экономическая безопасность принимающего региона определяется действиями ТНК. В условиях полной изоляции приток новых технологий в регион затруднен, так как в этом случае ТНК – основной поставщик таких технологий. Экономическая безопасность региона может снижаться из-за отставания в технологической сфере.

Программы, формируемые на национальном или региональном уровнях, предполагают выработку совокупности мероприятий, обеспечивающих достижение целей долгосрочного развития. Программы могут охватывать развитие новых производств и услуг, достижение заданного уровня потребления, обороноспособности, социального развития, освоения региона, охраны окружающей среды, научные программы и др.

Прогноз финансовых и материальных потоков региона, включающих в себя потоки от экспорта и импорта, капитала, продуктов и услуг, дает представление о том, какие цели (проекты) могут быть назначены. Эти цели (проекты) оцениваются рядом показателей, таких, как прибыль, NPV, IRR, время окупаемости инвестиционных вложений и др.

Анализ доходности отдельных проектов (продуктов и услуг) позволяет выявить слабые и сильные звенья бизнеса и на этой базе оптимизировать их структуру и объем, построить эффективную ценовую политику. Это способствует повышению устойчивости и эффективности работы предприятий. У региона появляется возможность добиться эффекта синергизма, состоящего в том, что свойства системы в целом превосходят сумму свойств (результатов работы) ее отдельных проектов. Достижение этого эффекта сопряжено с необходимостью перераспределения финансовых потоков внутри региона, чтобы улучшить показатели в текущем периоде и долгосрочной перспективе.

Состояние экономики, отвечающее требованиям экономической безопасности, характеризуется значениями параметров, при которых обеспечиваются приемлемые для населения условия жизни, устойчивость социально-экономической ситуации и т.п. При переходе значений параметров (индикаторов) через пороговые значения состояние экономики страны становится небезопасным.

На основе сценариев, предлагающих концепцию и пути решения проблем, строятся планы и программы управленческих действий и мероприятий.

Для построения модели системы могут применяться различные подходы. Система может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений, модели предприятий могут быть агрегировано представлены функциями Кобба-Дугласа, описаны системой разностных уравнений. Такое описание в простейших случаях позволяет получить аналитический вид траекторий развития системы. Однако наибольшее распространение получили оптимизационные задачи математического программирования (обычно линейного) и имитационные модели.

На основе этих подходов возможен переход к решению задач, связанных с обоснованием комплексной стратегии социально-экономического развития регионов

и экономики в целом – многошагового процесса оптимизации локальных (производственных), отраслевых, территориальных задач и их сопряжения с макроэкономической моделью развития экономики в целом. Это другой класс задач, в сравнении с теми, которые решались в русле традиционной методологии оптимального управления.

Управление развитием структуры крупномасштабных информационно-управляющих систем также является одним из типичных примеров крупномасштабных систем.

2.3 Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу

1. Особенности исследования крупномасштабных систем
2. Сравнительная классификация крупномасштабных систем.
3. Структура систем, декомпозиция и агрегирование целей крупномасштабных систем.
4. Развитие крупномасштабных систем, как объект исследования, оценки и управления.

3 Адекватные модели принятия решений в условиях статистической и нестатистической неопределенностей

3.1 Основные понятия, модели и общие схемы принятия решений

«Математика как наука с самого зарождения является инструментом в процессе поиска истины, и потому можно считать, что любые математические операции, даже самые простые, являются математическими методами принятия решений. Однако, в приложениях термин «принятие решений» имеет более конкретный смысл.[7]

В наиболее общем понимании принятие решений рассматривается как процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий. Методы и средства, помогающие лицу, принимающему решение (ЛПР) осуществить количественное обоснование выбора наилучшего из имеющихся вариантов, объединяет комплексная научная дисциплина – теория принятия решений (ТПР).

В условиях разработки сложных программ развития техники и технологии на первый план выступает требование системности решений. Системность – не просто упорядочение процедуры выработки и реализации решений, а рассмотрение их во всех многочисленных взаимосвязях на разных уровнях управления, в динамике производства, с учетом достижения поставленных целей. Такой подход требует научного обоснования решений со всех точек зрения, усиления их расчетной, количественной составляющей.

Однозначное определение места системного анализа и теории принятия решений среди прикладных математических наук, относящихся к управлению, затруднено их взаимным проникновением и пересечением выполняемых функций.

К методологическим основам теории принятия решений исследователи относят большой спектр теорий и методов, основными из которых являются: общая теория систем, системный анализ, исследование операций, теория и практика управления, математическое программирование, теория оптимального управления, теория массового обслуживания, теория игр, имитационное моделирование, теория стохастических процессов и ряд др.

Методы системного анализа и принятия решений базируются на комплексе математических методов, которые используются в условиях полной или неполной определенности об объекте управления.

В условиях полной определенности используются «методы математического программирования» в конечномерных или бесконечномерных пространствах. Математическое программирование используется для принятия решений в условиях полной определенности о структуре и параметрах математической модели и включает в себя спектр теорий и методов прикладной математики, таких как линейное, выпуклое, целочисленной, динамическое программирование, методы решения сетевых и потоковых задач и ряд др [4].

Характерной чертой любой ситуации, связанной с принятием решений, является наличие большого числа вариантов действий, из которых нужно выбрать наилучший. Выбор одного из вариантов действий и представляет собой решение.

В исследовании операций и экономико-математическом моделировании под решением понимается не только выбор одной или нескольких альтернатив, но и процесс осуществления такого выбора [10]. Оптнер С. определяет решение, как средство заполнения промежутка между существующей и предлагаемой (желаемой) ситуациями. Причем решение описывает различие, существующее между двумя состояниями, в терминах объектов, свойств и связей, а также определяет способ, которым должно быть введено заполнение, чтобы получить предлагаемое состояние [13].

Наилучший вариант действий, обеспечивающий максимальную эффективность, принято называть оптимальным по заданному критерию, а процесс поиска этого варианта – оптимизацией. Варианты действий, эффективность которых близка к оптимально возможной в данных условиях, называют рациональными или целесообразными. Любое решение всегда касается одновременно нескольких целей. Каждой цели нужно придать количественные и качественные характеристики.

В связи с этим, уточняется понятие решения как выбора определенного сочетания целей действий и способа использования имеющихся ресурсов. Тогда под

элементами решения понимаются намеченные цели действий и набор параметров, характеризующих способ использования ресурсов для достижения этих целей.

Центральными понятиями в теории принятия решений являются:

Ω – универсальное множество вариантов, альтернатив, планов из которых осуществляется выбор;

X – множество альтернатив, предъявленных для выбора $X \subseteq \Omega$;

C – принцип выбора (функция выбора) – правило, по которому осуществляется выбор наилучшей альтернативы $C(X) \subseteq C$.

В зависимости от степени формализации введенных понятий, различают три типа задач принятия решений:

1) Задача оптимального выбора, в которой Ω– однозначно определено, C – строго формализован;

2) Задача выбора, в которой Ω – однозначно определено, C – не формализован;

3) Общая задача принятия решений, в которой Ω– может дополняться, C – не формализован.

Для решения задач 1-го типа используются методы исследования операций, специальные методы оптимального выбора. Примером задач этого типа являются многокритериальные задачи оптимального управления.

Получаемые решения этого типа задач не зависят от субъективного мнения ЛПР, являются наилучшими из возможных для заданных условий, однако при изменении условий, решение становится неоптимальным. Это ограничивает возможности приведения реальных задач к данному виду, поскольку учесть все факторы, влияющие на решение, невозможно. В настоящее время методы оптимизации используют, как правило, в технических системах.

Оценка сложных систем в условиях определенности на основе методов векторной оптимизации проводится в три этапа. На 1-ом этапе с использованием системного анализа определяются частные показатели и критерии эффективности.

На 2-ом этапе находится множество Парето, а на 3-ем задача решается путем скаляризации критериев и устранения многокритериальности.

В задачах 2-го типа выбор зависит от того, кто и на какой основе его делает. При решении этих задач обычно используют имитационное моделирование, методы экспертных оценок, теорию полезности. Получаемые решения не могут считаться оптимальными, но они признаются рациональными.

В общей задаче принятия решений (см. рисунок 8) множество альтернатив может дополняться и видоизменяться, принцип выбора – не формализован и, вследствие этого даже один и тот же человек может изменять свое решение при обнаружении новой альтернативы. Такие задачи наиболее характерны для решения проблем в сложных системах.

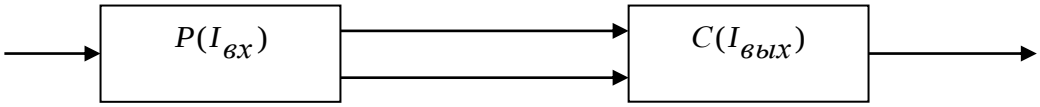


Рисунок 8 – Схема структуры общей задачи принятия решений

Общие задачи принятия решений относятся к слабо структурированным задачам со следующей структурой:

$$\langle T, I_{\text{вх}}, I_{\text{вых}}, I_{\text{реш}}, P, C \rangle,$$

где T – цель принятия решения (выбор альтернативы или упорядочение множества альтернатив); $I_{\text{вх}}$ – исходные данные для порождения альтернатив; $I_{\text{вых}}$ – множество порожденных альтернатив; $I_{\text{реш}}$ – решение, наилучшая альтернатива; P – правило порождения альтернатив; C – правило выбора наилучшей альтернативы.

В настоящее время для решения задач такого типа интенсивно создаются, так называемые, методы обработки знаний (методы логико-лингвистического моделирования) в рамках новой научной дисциплины – инженерии знаний. Такие методы обеспечивают преобразование данных и вывод допустимых решений как в аналитической форме, так и форме выражений естественного языка. При этом используются все известные теоретические модели представления $I_{\text{вх}}, I_{\text{вых}}, I_{\text{реш}}, P, C$, а также неформализуемый опыт специалистов – практиков.

Рассматривая принятие решений при разработке систем и их функционировании как преодоление альтернатив, на основе понятий множества альтернатив (вариантов действий) – X и принципа выбора – C, задача принятия решений может быть записана в виде:

$$\{X, C\} \rightarrow X^*,$$

где X^* – выбранные альтернативы (одна или более).

Очевидно, что в отношении отдельного свойства легче сказать, какая из альтернатив предпочтительнее, поэтому для облегчения процесса принятия решений переходят от сравнения альтернатив в целом к сравнению их отдельных свойств. При этом возникает проблема обратного перехода от сравнения по отдельным свойствам к сравнению альтернатив в целом.

Выделение свойств альтернатив является декомпозицией.

В задаче принятия решений следует стремиться довести декомпозицию до уровней, на которых возможны численные оценки. Свойства, для которых существуют объективные численные характеристики, называют критериями. Получение набора критериев считается наилучшим итогом декомпозиции. Этот подход настолько привлекательный, что к его анализу прибегают и тогда, когда естественные числовые критерии отсутствуют.

В этом случае вводят искусственные оценки типа баллов (коэффициент трудового участия, сумма мест в фигурном катании, разрядная сетка рабочих специальностей, процент износа механизма). Критериальное описание сравнения альтернатив основано на теории отношений.

3.2 Задачи многокритериальной оптимизации в условиях нестатистической неопределенности

Считаем, что выбор решения производит лицо, принимающее решение (ЛПР), которое преследует вполне определенные цели.

Пусть $X \subset R^n$ множества возможных (допустимых) альтернатив или решений, все свойства которых имеют численную оценку, т.е. являются критериями. Обозначим их $f_i(x), i = 1, \dots, m$, или

$$f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}.$$

Пусть $Y = f(X) = \{y \in R^m : y = f(x), \forall x \in X\}$ – множество оценок.

Выбор решения из множества возможных решений X равносилен выбору оценки из множества оценок Y, поэтому множество возможных решений будем обозначать Z, считая, что в качестве множества Z взято или множество X, или множество Y.

Для определенности зафиксируем ЛПР. Если из двух заданных решений a и b множества Z ЛПР выбирает a, то говорят, что решение a более предпочтительно, чем решение b. Множество пар вида $(a; b)$, где $a, b \in Z$ и решение a более предпочтительно, чем решение b называется отношением строгого предпочтения и обозначается $a \succ b$.

Отношение предпочтения – иррефлексивно, так как бессмысленно решению a предпочитать тоже самое решение a.

Отношение предпочтения – ассиметрично, так как не может одновременно ab и ba.

Будем предполагать, что отношение предпочтения – транзитивно (хотя в отдельных случаях это нарушается).

Будем говорить, что решения a и b, где $a, b \in Z$ неразличимы, если не выполняется ни a предпочтительнее b, ни b предпочтительнее a. Множество пар вида $(a; b)$, для которых решения a и b неразличимы, называется отношением неразличимости и обозначается $a \backsim b$ ($a \backsim b$ не означает, что a равно b).

Из определения отношения неразличимости следует, что оно симметрично и рефлексивно.

Для произвольно выбранной пары решений $a, b \in Z$ выполняется одно и только одно из отношений $a \sim b$, $a \succ b$, $b \succ a$.

Объединение отношений предпочтения и неразличимости означает «не менее предпочтительнее, чем» и называется отношением нестрогого предпочтения, то есть либо $a \sim b$, либо $a \succ b$.

Пусть ЛПР при выборе решения из множества Z руководствуется некоторым отношением строгого предпочтения, которое является асимметричным и транзитивным.

Решение $z^0 \in Z$ называют *оптимальным* по отношению «$\succ$»на множестве Z, если не существует другого решения $z \in Z$, для которого справедливо отношение $z \succ z^0$.

Множество всех оптимальных решений множества Z обозначим $optZ$. Это множество может содержать единственный элемент, конечное или бесконечное множество элементов, а также не содержать ни одного элемента.

Пусть $optZ \neq \emptyset$ и содержит по крайней мере два элемента z' и z''. Т.к. ни $z' \succ z''$, ни $z'' \succ z'$, не может иметь места, то решения $z' \sim z''$, неразличимы.

Если отношение неразличимости «~» совпадает с понятием равенства «=», то множество $optZ$, если оно не пусто, содержит единственный элемент.

Сформулируем требования, гарантирующие существование оптимальных решений.

Теорема: Если множество $Z \neq \emptyset$ и содержит конечное число элементов, а отношение «$\succ$»асимметрично и транзитивно, то $optZ \neq \emptyset$.

Доказательство: (алгоритм построения множества оптимальных решений):

Обозначим $Z = Z_1 = \{z^{11}, z^{12}, \dots, z^{1n_1}\}$.

Если $n_1 = 1$, то $Z = \{z^{11}\} = optZ_1$.

Далее считаем, что $n_1 > 1$:

1-ый шаг алгоритма заключается в попарном сравнении решения z^{11} с каждым из остальных решений.

Если для некоторого $i \in \{2, 3, \dots, n_1\}$ $z^{11} \succ z^{1i}$, то решение z^{1i} из множества Z_1 удаляется, оно не может быть оптимальным.

В противном случае, то есть когда $z^{11} \sim z^{1i}$, либо $z^{1i} \succ z^{11}$, то решение z^{1i} сохраняют. После выполнения всех сравнений решение z^{11} также следует удалить из Z_1. При этом, если ни для какого $i = 2, 3, \dots, n_1$ не выполнилось $z^{1i} \succ z^{11}$, то решение z^{11} является оптимальными его нужно запомнить. Оставшееся в результате удаления множество решений обозначим через $Z_2 = \{z^{21}, z^{22}, \dots, z^{2n_2}\}$.

Если $Z_2 \neq \emptyset$, то решение z^{11} – оптимальное, так как в силу асимметричности отношения «$\succ$» из $z^{11} \succ z^{1i} \Rightarrow z^{1i} \succ z^{11}$, $i = 2, 3, \dots, n_1$ не может иметь место. В этом случае процедура отыскания множества $optZ$ закончена. Если $Z_2 = \emptyset$, то переходим к следующему шагу.

На 2-м шаге аналогично попарно сравниваем решение z^{21} с каждым из решений, вошедших в Z_2.

Алгоритм таков, что согласно транзитивности отношения «$\succ$», решение z^{k1}, оптимальное на множестве Z_k, является оптимальным на Z_{k-1}, $k = 2, 3, \dots$ и, на исходном множестве Z_1. Так как Z_1 – конечно, то через конечное число шагов процедура закончится. Решения, хранящиеся в памяти, образуют искомое непустое множество $optZ$.

Пусть целевая векторная функция $f(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\right)$ определена на множестве допустимых решений $X \subset R^n$. Пусть на множествах X и Y заданы отношения строгого предпочтения и соответственно эти соотношения согласованы друг с другом:

$$y \succ y' \Leftrightarrow x \succ x',$$

где $y = f(x)$, $y' = f(x')$.

Оценкой сверху назовем подмножество исходного множества возможных решений (оценок), которое содержит множество оптимальных решений (оценок).

Введем между $A \subset R^n, a, b \in A$ следующие отношения:

$a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$;

$a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i$, и $a \neq b$, т. е. $a_i \geq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ и хотя бы для одного номера $\forall i = 1, 2, \dots, n, a_i > b_i$;

$a > b \Leftrightarrow a_i > b_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим две произвольные оценки $y, y' \in R^m, y \geq y'$.

Многокритериальная задача максимизации характеризуется тем, что оценка y всегда предпочтительнее оценки y', если только $y \geq y'$.

Другими словами в многокритериальной задаче максимизации считают выполненной аксиому Парето (в терминах оценок): для любых двух оценок $y, y' \in Y$, удовлетворяющих неравенству $y \geq y'$, всегда выполняется $y \succ y'$.

Аксиома Парето в терминах решений формулируется следующим образом: для любых двух решений $x, x' \in X$ таких что $f(x) \geq f(x')$, имеет место $x \underset{X}{\succ} x'$.

В многокритериальной задачи минимизации считают, что для $\forall y, y' \in Y$ таких, что $y \geq y'$, выполняется $y \underset{Y}{\succ} y'$. Для определенности будем рассматривать задачу максимизации.

Аксиома Парето означает, что для ЛПР желательно по каждому из критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$ получить по возможности большее значение. Точка максимума на множестве X одновременно всех функций $f_1, f_2, \dots, f_m$ заведомо является оптимальным решением многокритериальной задачи максимизации. Однако, на практике, как правило, такой точки максимума не существует. Поэтому удается указать лишь определенную оценку сверху для искомого множества оптимальных решений.

Множество оптимальных оценок по отношению «≥» на множестве Y назовем множеством парето-оптимальных (оптимальных по Парето) или эффективных оценок. Обозначим $P(Y)$. Ясно, что $P(Y) = \underset{\geq}{optY}$.

Если $m = 2$ (то есть имеется два критерия), то множество $P(Y)$ имеет простую геометрическую интерпретацию в критериальном пространстве (см. рисунок 9).

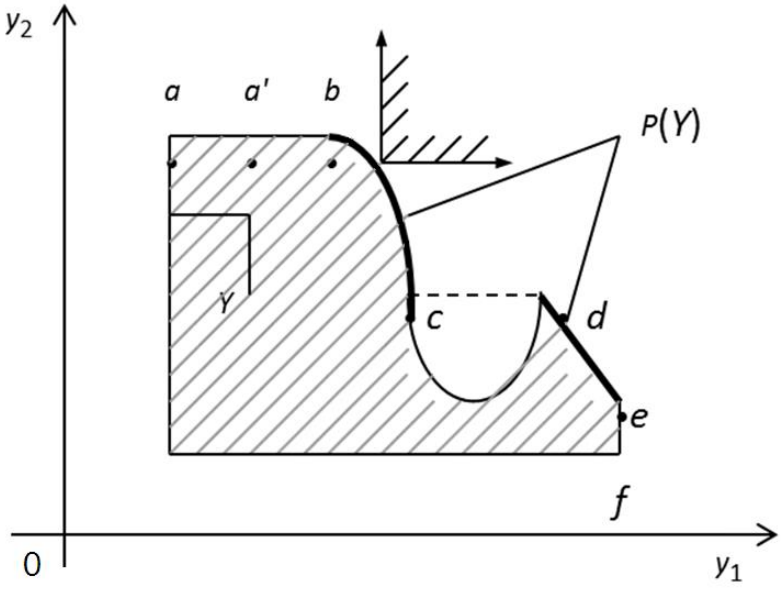


Рисунок 9 – Геометрическая интерпретация $P(Y)$

Для изображенного на рисунке 9 множества Y парето-оптимальные оценки состоят из точек кривой bc (исключая точку c) и линии de. Образно говоря, $P(Y)$ является «северо-восточной» границей множества Y без тех её частей, которые параллельны одной из координатных осей или же лежат в «глубоких провалах». Для того чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что все точки $y \in R^2$, для которых верно неравенство $y \geq y'$ образуют прямой угол, стороны которого параллельны координатным осям, а вершиной является точка y'. Поэтому если для точки $y' \in Y$ указанный угол расположен вне множества Y, то эта точка парето-оптимальна, в противном случае она таковой не является.

Соотношение $y^{(0)} \in P(Y)$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует такого $y \in Y$, для которого бы выполнялось $y \succ y^{(0)}$. Решение $x^{(0)} \in X$, для которого справедливо включение $y^{(0)} = f\left(x^{(0)}\right) \in P(Y)$, называют парето-оптимальным (оптимальным по Парето) или эффективным решением относительно вектор-функции f на множествеX. Множество таких решений обозначим $P_f(X)$. Если $x^{(0)} \in P_f(X)$, то это означает, что $\nexists x \in X$, что $f(x) \geq f\left(x^{(0)}\right)$.

Из аксиомы Парето следует утверждение.

Следствие 1. Справедливы включения $\underset{Y}{opt} \succ Y \subset P(Y)$, $\underset{X}{opt} \succ X \subset P_f(X)$.

Доказательство: Покажем первое включение. Пусть $y^{(0)} \in opt_{\succ}Y$. Предположим противное, то есть $y^{(0)} \notin P(Y)$. Тогда существует такое $y \in Y$, что $y \geq y^{(0)}$.Согласно аксиоме Парето это означает, что $y \underset{Y}{\succ} y^{(0)}$, а значит $y^{(0)} \notin opt_{\succ}Y$. Противоречие. Аналогично доказывается второе включение.

Согласно этому утверждению, множества $P(Y)$ и $P_f(X)$ являются оценками сверху для множества $opt_{\succ}Y$ и $opt_{\succ}X$.

Часто, вместо аксиомы Парето, рассматривают ее «ослабленный» вариант.

Слабая аксиома Парето: для любых двух оценок $y, y' \in Y$ (двух решений $x, x' \in X$) из выполнения неравенства $y > y'$ $\left(f(x) > f(x')\right)$ всегда следует, что $y \underset{Y}{\succ} y'$ $\left(x \underset{X}{\succ} x'\right)$.

Аналогично вводят слабо оптимальные по Парето (слабо эффективные) оценки и решения. Множества, которые они составляют, обозначают соответственно $S(Y)$ и $S_f(X)$ $(S(Y) = opt_{\succ}Y))$.

Неравенство $y > y'$ является частным случаем неравенства $y \geq y'$, поэтому из выполнения аксиомы Парето следует выполнение слабой аксиомы Парето и $P(Y) \subset S(Y)$, $P_f(X) \subset S_f(X)$, то есть множество слабо оптимальных по Парето оценок может быть разве что шире множества парето-оптимальных оценок.

Определение: Числовая функция $F(y)$, определенная на множестве $Y \in R^m$, является возрастающей по отношению «≥» (отношению «>»), если из выполнения неравенства $y \geq y'$, $(y > y')$ для векторов $y, y' \in Y$ всегда следует справедливость неравенства $F(y) > F(y')$.

Это обобщенное понятие возрастающей функции многих переменных.

Теорема (достаточное условие оптимальности по Парето (слабой оптимальности)). Пусть функция $F(y)$ определена на множестве оценок $Y \subset R^m$. Для того чтобы точка $y^{(0)} \in Y$ была оптимальной по Парето (слабо оптимальной) оценкой, достаточно, чтобы она являлась точкой максимума на множестве Y функции $F(y)$, возрастающей по отношению «≥» (по отношению «>»).

Доказательство: (для парето-оптимальных оценок).

Пусть по условию $y^{(0)} \in Y$ и $F\left(y^{(0)}\right) \geq F(y) \quad \forall y \in Y$.

Предположим противное, то есть, что для некоторой оценки $y' \in Y$ справедливо $y' \geq y^{(0)}$, но F – возрастающая функция, следовательно $F(y') > F\left(y^{(0)}\right)$. Это противоречит условию оптимальности $y^{(0)}$.

Теорема может быть сформулирована в терминах решений.

Если функция $F(y)$ возрастает по отношению «$\geq$» и $x^{(0)}$ – точка максимума функции $F[f(x)] = F[f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_m(x)]$ на множестве X, то $f\left(x^{(0)}\right) \in P(Y)$, а значит и $x^{(0)} \in P_f(X)$.

Примеры функций, возрастающих по отношению «$\geq$»:

1. $F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ возрастает по отношению «$\geq$», если все числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – положительны.

2. $F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \prod_{i=1}^{m} y_i \mu_i$ при положительных фиксированных числах $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ возрастает по отношению «$\geq$».

Рассмотрим необходимые условия оптимальности по Парето и слабой оптимальности по Парето.

Теорема (первое необходимое условие оптимальности по Парето). Пусть множество X выпукло и все компоненты $f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_m(x)$ вектор-функции f вогнуты на множестве X. Для того, чтобы решение $x^{(0)} \in X$ было слабо оптимальным по Парето, необходимо, чтобы существовали числа $\mu_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i\left(x^{(0)}\right) = \max\limits_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)$.

При $m = 2$ утверждение имеет простую геометрическую интерпретацию.

Для всякой слабо оптимальной по Парето оценки $y^{(0)}$ можно подобрать вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2) \geq (0, 0)$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$ такой, что линейная функция $\langle \mu, y \rangle$ достигает максимума на множестве Y в точке $y^{(0)}$ (см. рисунок 10).

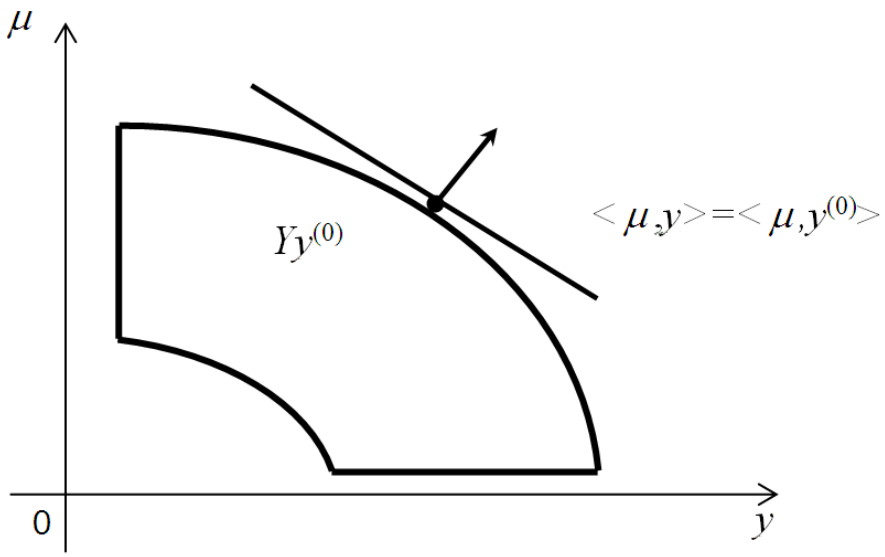


Рисунок 10 – Геометрическая интерпретация необходимого условия оптимальности по Парето (при $m=2$).

Требование вогнутости функций $\boldsymbol{f_1(x)}$, $\boldsymbol{f_2(x)}, \dots, \boldsymbol{f_m(x)}$ является существенным. Приведем пример.

Пусть $n = 1, m = 2, X = [0,1], f_1(x) = x, f_2(x) = \ell^{-x}$.

Функция f_1 – возрастает, а функция f_2 – убывает, поэтому $S_f(X) = P_f(X) = [0,1]$. Рассмотрим слабо оптимальную по Парето точку $x^{(0)}$ внутри отрезка $[0,1]$ и рассмотрим функцию $\mu_1 x + \mu_2 \ell^{-x}$ при фиксированных неотрицательных числах μ_1, μ_2, одно из которых положительно. Если $\mu_2 = 0$, то нельзя подобрать такое $\mu_1 > 0$, чтобы функция $\mu_1 x$ достигала бы максимального значения во внутренней точке отрезка $[0,1]$. Пусть $\mu_2 > 0$. Тогда вторая производная функции $\mu_1 x + \mu_2 \ell^{-x}$ есть $\mu_2 \ell^{-x} > 0$, следовательно, функция строго выпукла и ни для каких чисел $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 > 0$ не может иметь точкой максимума внутреннюю точку $x^{(0)} \in (0,1)$.

Теорема (второе необходимое условие оптимальности по Парето). Пусть множество X выпукло, компоненты $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_m(x)$ вектор-функции f вогнуты на X и положительны, то есть $f_i(x) > 0$ $\forall x \in X$, $i = 1, \dots, m$. Для того чтобы решение $x^{(0)} \in X$ было слабо оптимальным по Парето (парето-оптимальным), необходимо, чтобы существовали такие числа $\mu_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, что справедливо равенство

$$\prod_{i=1}^{m}\left[f_i\left(x^{(0)}\right)\right]^{\mu_i} = \max_{x\in X}\prod_{i=1}^{m}[f_i(x)]^{\mu_i}.$$

В следующей теореме в отличие от двух предыдущих отсутствует предположение о выпуклости множества X и вогнутости компонент f и ее можно применять для широкого класса задач.

Теорема (третье необходимое условие оптимальности по Парето). Предположим, что $x^{(0)} \in X,\ f\left(x^{(0)}\right) > 0$. Для того, чтобы решение $x^{(0)}$ было слабо оптимальным по Парето (парето-оптимальным), необходимо, чтобы существовали такие числа $\mu_i > 0,\ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}\mu_i = 1$, что имеет место равенство

$$\min_{i=\overline{1,m}}\mu_i f_i\left(x^{(0)}\right) = \max_{x\in X}\min_{i=\overline{1,m}}\mu_i f_i(x).$$

Доказательство носит конструктивный характер, то есть для каждого слабо оптимального по Парето решения следует указать соответствующий ему набор чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Пусть $x^{(0)} \in S_f(X)$. Это означает, что не существует вектора $x \in X$, для которого выполнялось бы неравенство $f_i(x) > f_i\left(x^{(0)}\right),\ i = 1, \dots, m$.

Следовательно,

$$\forall x \in X\ \exists i \in \{1, 2, \dots, m\}: f_i\left(x^{(0)}\right) \geq f_i(x). \tag{3.1}$$

Возьмем в качестве μ_i следующие числа:

$$\mu_i = \frac{1}{f_i\left(x^{(0)}\right)}\cdot\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{f_k\left(x^{(0)}\right)}\right]^{-1} > 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Ясно, что $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = 1$.

Из неравенства (1) следует

$$\mu_i f_i\left(x^{(0)}\right) \geq \mu_i f_i(x). \tag{3.2}$$

При этом $\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{f_k\left(x^{(0)}\right)}\right]^{-1} = \mu_1 f_i\left(x^{(0)}\right)$.

Следовательно, число $\mu_1 f_i\left(x^{(0)}\right)$ – одинаковое $\forall i = \{1, 2, \dots, m\}$, поэтому можно записать $\mu_1 f_i\left(x^{(0)}\right) = \min_{i=\overline{1,m}}\mu_i\, f_i\left(x^{(0)}\right)$.

Из неравенства (2) и учитывая последнее, имеем:

$\min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_i f_i\left(x^{(0)}\right) \geq \min\limits_{i=\overline{1,m}} \mu_i f_i(x), \forall x \in X.$

Эти теоремы показывают, что при определенных условиях, подбирая коэффициенты $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m$ любое слабо оптимальное по Парето (и Парето оптимальное) решение можно получить в результате решения соответствующей однокритериальной задачи максимизации.

Теорема (о существовании парето-оптимальных оценок и решений). Пусть компоненты вектор-функции $f(x) = \left(f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_m(x)\right)$ непрерывны на непустом компактном множестве X (это множество замкнуто и ограничено). Тогда $P_f(X) \neq \emptyset, S_f(X) \neq \emptyset$.

Доказательство: Рассмотрим функцию $\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$. Сумма непрерывных функций есть функция непрерывная, поэтому если множество X не пусто, замкнуто, ограниченно, то по теореме Вейерштрасса существует точка $x^{(0)} \in X$, доставляющая максимум функции $\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ на множестве X . Согласно достаточному условию оптимальности по Парето $x^{(0)} \in P_f(X)$. Следовательно, $x^{(0)} \in S_f(X)$.

Следствие: Если $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{R^m}$ – непустое компактное множество, то $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y}) \neq \emptyset$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{Y}) \neq \emptyset$.

Доказательство: Рассмотрим линейную вектор-функцию вида $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Её компоненты непрерывны на R^m, а значит и на Y. Согласно предыдущей теореме, существует точка $y^{(0)} \in Y$, являющаяся парето-оптимальной относительно этой линейной вектор-функции на множестве Y . Ясно, что $y^{(0)} \in P(Y)$, следовательно, $\mathrm{P(Y)} \neq \emptyset$, а значит, $\mathrm{S(Y)} \neq \emptyset$.

Из доказательства теоремы вытекает следующий способ отыскания какого-нибудь одного парето-оптимального решения. Необходимо найти точку максимума функции $\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ на множестве X.

Найти все парето-оптимальные оценки (решения) значительно сложнее. Если множество оценок Y конечно, то найти всё множество $P(Y)$ можно с помощью алгоритма, описанного при доказательстве теоремы, гарантирующей существование оптимальных решений. При этом используют вместо отношения «$\succ$» отношение

«≥». Если множество Y бесконечно, то задача намного сложнее.

На практике зачастую множество $P(Y)$ является достаточно широким, из-за этого для ЛПР небезразлично, какую именно оценку выбрать из $P(Y)$. Данный факт объясняется тем, что отношение «≻» и «≥» хотя и связаны аксиомой Парето, тем не менее различаются, а разница между множествами $opt_{\succ}Y$ и $P(Y)$ может быть значительной и оценка сверху $opt_{\succ}Y \subset P(Y)$ требует уточнения. Такое уточнение или, по-другому, сужение множества парето-оптимальных оценок возможно только благодаря использованию дополнительных сведений об отношении предпочтения «≻».

Рассмотрим случай существования функции ценности. Пусть «≻» – некоторое асимметричное и транзитивное отношение строгого предпочтения на множестве оценок $Y \subset R^n$.

Числовая функция Φ переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$ называется функцией ценности для отношения «≻», если для произвольных векторов $y, y' \in Y$ неравенство $\Phi(y) > \Phi(y')$ имеет место тогда и только тогда, когда $y \succ y'$.

Пусть отношение «≻» удовлетворяет аксиоме Парето. Тогда, если $y \geq y'$, то $y \succ y'$, то есть $\Phi(y) > \Phi(y')$. Поэтому функция ценности, если она существует, является возрастающей по отношению «≥».

Если $\Phi(y)$ – функция ценности для отношения «≻» и h – возрастающая функция одной переменной, то $h[\Phi(y)]$ также является функцией ценности. То есть функция ценности определяется с точностью до возрастающего преобразования h, в частности функция $\alpha\Phi(y) + a$, где $a > 0$ и $a \in R$ является функцией ценности, если Φ – функция ценности.

По определению неразличимости «~», отношение $y \sim y'$ выполняется тогда и только тогда, когда неверны ни соотношение $y \succ y'$, ни соотношение $y' \succ y$. Поэтому, если $\Phi(y) = \Phi(y')$, то не может быть ни $\Phi(y) > \Phi(y')$,ни $\Phi(y') > \Phi(y)$, а значит верно соотношение $y \sim y'$. Верно и обратное: из $y \sim y'$ следует $\Phi(y) = \Phi(y')$.

Благодаря использованию функции ценности вопрос сравнения по предпочтительности векторных оценок y и y' сводится к сравнению соответствующих чисел $\Phi(y)$ и $\Phi(y')$.

Если для отношения «$\succ$» существует функция ценности $\boldsymbol{\Phi}$, то $\underset{\succ}{\boldsymbol{opt}}\, \boldsymbol{Y} = \left\{\boldsymbol{y}^{(0)} \in \boldsymbol{Y}: \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y}^{0}) = \underset{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{max}}\, \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\right\}$, то есть отыскание оптимальной оценки сводится к решению однокритериальной задачи максимизации функции $\boldsymbol{\Phi}$ на множестве $\boldsymbol{Y}$.

Свойство транзитивности отношения неразличимости «~» является необходимым условием существования функции ценности. Данный факт следует из определения функции ценности, а также транзитивности отношения равенства «=».

Отношение « $\geq$ » на множестве R^m порождает нетранзитивное отношение неразличимости, из-за этого для отношения « $\geq$ » на R^m функции ценности не существует. Однако, в частных случаях, например, если множество Y конечно и имеет вид $Y = \{y^1, y^2, y^3, \dots, y^l \in R^m: y^l \geq y^{l-1} \geq \dots \geq y^1\}$, функция ценности существует, например, $\hat{O}\left(y^i\right) = i,\ i = 1, \dots, l$. Следовательно, существование функции ценности [18] зависит и от структуры множества Y.

Зачастую для ЛПР важно получить максимально большее значение, например, критерия f_1, пусть и за счет «потерь» по прочим критериям, другими словами критерий f_1 оказывается более значимым, чем остальные. Кроме того, возможна ситуация, когда весь набор критериев $f_1,\ f_2, \dots, f_m$ строго упорядочен по важности.

Пусть имеется два вектора $y, y' \in Y \subset R^m$.

Определение: Лексико-графическое отношение « $\overset{lex}{\underset{Y}{\succ}}$ »определяется следующим образом: отношение $y \overset{lex}{\underset{Y}{\succ}} y'$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $y_1 > y_1'$,

2) $y_1 = y_1',\ \ y_2 > y_2'$, (3.3)

…

m) $y_i = y'_i,\ \ i = \overline{1,\ m-1};\ \ \ y_m > y'_m,$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$.

При $m = 1$ лексико-графическое отношение совпадает с отношением «>» на подмножестве вещественных чисел.

Если $y \underset{Y}{\overset{lex}{\succ}} y'$, то говорят, что вектор y лексико-графически больше, чем вектор y'.

На рисунке 11 приведена геометрическая иллюстрация отношения « $\underset{Y}{\overset{lex}{\succ}}$ ».

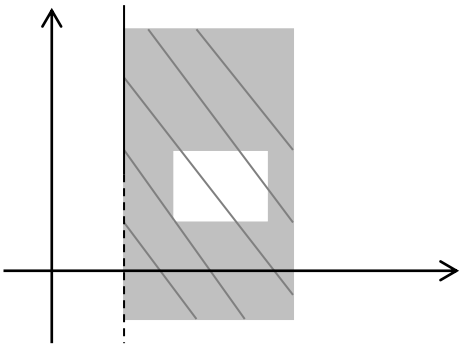


Рисунок 11 – Геометрическая иллюстрация лексико-графического отношения.

Когда лексико-графическое отношение используется в качестве отношения строгого предпочтения, то из пары оценок более предпочтительной для ЛПР является та, первая компонента которой больше (независимо от соотношений между остальными компонентами). В ситуации, когда первые компоненты двух оценок одинаковы, более предпочтительной для ЛПР является оценка, имеющая большую вторую компоненту; в это же время оставшиеся компоненты данной оценки могут «значительно уступать» соответствующим компонентам второй оценки и так далее. В такой ситуации говорят, что компоненты $y_1, y_2, \dots, y_m$ (то есть критерии $f_1,\ f_2, \dots, f_m$) строго упорядочены по важности. Ясно, что изменение порядка критериев приводит к новому лексико-графическому отношению.

Теорема. Отношение « $\underset{\succ}{\overset{lex}{}}$ » асимметрично, транзитивно и удовлетворяет аксиоме Парето.

Доказательство: Покажем транзитивность лексико-графического отношения.

Пусть $y \overset{lex}{\succ} y^*$ и $y^* \overset{lex}{\succ} y'$, причём для первого соотношения справедливо условие (4) с некоторым номером $k \in \{1,2,\dots,m\}$ а для второго – условие (3. 3) с некоторым номером $l \in \{1,2,\dots,m\}$.

Положим $n = \min\{k, l\}$. Тогда для оценок y и y' выполнено условие из (3. 3) с номером n. Следовательно, $y \overset{lex}{\succ} y'$, транзитивность доказана.

Так как $y \overset{lex}{\succ} y$ не может быть выполнено ни для какого y, то лексико-графическое отношение иррефлексивно. Произвольное транзитивное и иррефлексивное отношение всегда асимметрично. Следовательно, отношение «$\overset{lex}{\succ}$» асимметрично.

Если верно неравенство $y \geq y'$, то одно из условий (3.2.3) будет выполнено. Поэтому из выполнения $y \geq y'$ следует $y \overset{lex}{\succ} y'$и означает, что, лексико-графическое отношение удовлетворяет аксиоме Парето.

Пусть имеются векторы $y, y' \in Y$ и $y \neq y'$, следовательно, справедливо либо $y \overset{lex}{\succ} y'$, либо $y' \overset{lex}{\succ} y$. Если не выполнено ни одно из этих соотношений, то $y = y'$.

Лексико-графическое отношение на множестве оценок порождает отношение «$\underset{Y}{\overset{lex}{\succ}}$» на множестве решений X: $x \underset{X}{\overset{lex}{\succ}} x'$ тогда и только тогда, когда $y \underset{Y}{\overset{lex}{\succ}} y'$, где $y = f(x)$, $y' = f(x')$. Очевидно, отношение «$\underset{X}{\overset{lex}{\succ}}$» также является асимметричным, транзитивным и удовлетворяет аксиоме Парето (в терминах решений).

Множество решений (оценок), оптимальных по отношению «$\underset{X}{\overset{lex}{\succ}}$»на множестве X (соответственно Y), называется множеством лексико-графически оптимальных (или максимальных) решений (оценок) и обозначается $opt_{\overset{lex}{\succ}} X$ (соответственно $opt_{\overset{lex}{\succ}} Y$).

Из того, что для любых двух векторов y, y' справедливо, что либо один лексико-графически больше другого, либо они равны, следует, что множество $opt_{\underset{\succ}{lex}} Y$, если оно не пусто, состоит из единственного элемента.

Следствие: Если множество Y состоит из конечного числа элементов, то лексико-графически оптимальная оценка существует и единственна.

Введем множества, определяемые рекуррентным способом:

$X_1 = \left\{x^{(1)} \in X \middle| f_1\left(x^{(1)}\right) = \max\limits_{x \in X} f_1(x)\right\}$ – множество всех точек максимума первой компоненты вектор-функции f_1 на множестве X,

$X_2 = \left\{x^{(2)} \in X_1 \middle| f_2\left(x^{(2)}\right) = \max\limits_{x \in X_1} f_2(x)\right\}$ – множество всех точек максимума f_2 – второй компонент вектор-функции f на множестве X_2 и так далее.

$X_m = \left\{x^{(m)} \in X_{m-1} \middle| f_m\left(x^{(m)}\right) = \max\limits_{x \in X_{m-1}} f_m(x)\right\}$.

Имеют место включения $X_m \subset X_{m-1} \subset \cdots \subset X_2 \subset X_1 \subset X$.

Теорема. Для того чтобы решение $x^{(0)} \in X$ было лексико-графически оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение $x^{(0)} \in X_m$.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $x^{(0)} \in opt_{\underset{\succ}{lex}} X$. Предположим противное $x^{(0)} \notin X_m$ либо $x^{(0)} \in X_{m-1}$ и $f_m\left(x^{(0)}\right) < \max\limits_{x \in X_{m-1}} f_m(x)$, либо $x^0 \notin X_{m-1}$.

В первом случае найдется такое решение $x' \in X_{m-1}$, что $f_i(x') = f_i\left(x^{(0)}\right)$ $i = \overline{1, m-1}$ и $f_m(x') > f_m\left(x^{(0)}\right) \Rightarrow x' \overset{lex}{\succ} x^{(0)}$, что противоречит оптимальности $x^{(0)}$. Поэтому выполняется $x^0 \notin X_{m-1}$, следовательно, $x^0 \notin X_{m-2}$ и $f_{m-1}\left(x^{(0)}\right) < \max\limits_{x \in X_{m-2}} f_m(x)$ либо $x^0 \notin X_{m-2}$. Рассуждая аналогично, получаем $x^{(0)} \notin X_{m-2}$ и так далее. Окончательно получаем $x^{(0)} \notin X$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность.

Рассмотрим решение $x^{(0)} \in X_m$ и допустим противное: существует решение $x \in X$, для которого $\underset{x \succ x^{(0)}}{lex}$, следовательно, $\underset{y \succ y^{(0)}}{lex}$, где $y = f(x)$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ Пусть, согласно $\underset{y \succ y^{(0)}}{lex}$, выполняется k-условие из (3.2.3) $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Тогда $x^0 \notin X_k$, а значит, в силу вложенности множеств $X_m \subset X_{m-1} \subset \dots \subset X_2 \subset X_1 \subset X$ имеем $x^{(0)} \notin X_m$, что приводит к противоречию с условием.

Следствие: Если все функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ непрерывны на непустом компактном множестве $X \in R^n$, то справедливо $opt_{\underset{\succ}{lex}} X \neq \varnothing$.

Доказательство: По теореме Вейерштрасса (если множество $\tilde{O} \subset R^n$ не пусто и компактно, а функция f непрерывна на нём, то множество точек глобального минимума (максимума) не пусто и компактно) множество X_1 не пусто и компактно. Тогда таким же свойством обладает и множество X_2 и так далее до X_{m-1}. Множество X_m не пусто в силу того, что X_{m-1} не пусто и компактно, а функция f_m – непрерывна. Следовательно, по предыдущей теореме множество лексико-графически оптимальных решений также не пусто.

Доказанная выше теорема предполагает следующий поэтапный метод отыскания лексико-графически оптимального решения. В начале находят множество точек максимума функции f_1 на X, то есть X_1. Затем на этом множестве максимизируют функцию f_2 и определяют множество X_2 и так далее до множества X_{m-1}. После этого, максимизируя f_m на X_{m-1}, находят лексико-графически оптимальное решение.

С вычислительной точки зрения этот метод является сложным, так как на каждом k- этапе (кроме последнего) нужно полностью строить множество X_k. Гораздо удобнее для нахождения лексико-графически оптимального решения решать следующую последовательность задач:

1) найти $f_1^* = \max f_1(x)$ при условии $x \in X$;

2) найти $f_2^* = \max f_2(x)$ при условиях $x \in X$, $f_1(x) = f_1^*$;

…

$m-1$) найти $f_{m-1}^{*} = \max f_{m-1}(x)$ при условиях $x \in X$, $f_i(x) = f_i^{*}, i = \overline{1, m-2}$;

m) найти точку максимума функции $f_m(x)$ при условиях $x \in X$, $f_i(x) = f_i^{*}, i = \overline{1, m-1}$.

С одной стороны, лексико-графическое отношение не является инвариантным относительно перестановки критериев. С другой стороны, на практике встречаются задачи, в которых для ЛПР не важно, в каком порядке перечислены компоненты $y_1, y_2, \dots, y_m$ оценки $y \in R^m$, важными являются только числовые значения этих компонент.

Рассмотрим вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Обозначим через $\ddot{I}\ (y)$ множество векторов, состоящее из y и всех векторов, полученных из y перестановкой его компонент. Данное множество содержит $m!$ элементов. Элементы множества $\ddot{I}\ (y)$ обозначим $\pi(o'), \pi'(o')$.

Будем считать, что отношение строгого предпочтения «$\succ$» определено на множестве $\bigcup\limits_{\acute{o} \in Y} \ddot{I}\ (\acute{o}) \subset R^m$. Отношение строго предпочтения является асимметричным, транзитивным и удовлетворяет аксиоме Парето.

Отношение «$\succ$» называется инвариантным относительно перенумерации критериев, если $\forall y,\ y' \in Y$ из соотношения $y \succ y'$ следует $\pi(o') \succ \pi'(o')$, $\forall \pi(y) \in \Pi(y)$ и $\pi'(y') \in \Pi(y')$.

К примеру, отношение «$\geq$» в пространстве R^m не является инвариантным относительно перенумерации критериев: $(2,3)^T \geq (1,3)^T \not\Rightarrow (2,3)^T \geq (3,1)^T$. Если для отношения «$\succ$» существует функция ценности вида $F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} v(y_i)$, то это отношение инвариантно относительно перенумерации критериев.

Пусть отношение строгого предпочтения «$\succ$» инвариантно относительно перенумерации критериев.

Введем понятие симметрического отношения.

Говорят, что на множестве $\bigcup_{y \in Y} \Pi(y)$ задано симметрическое отношение «$\overset{s}{\succ}$», если соотношение $y \succ y'$ выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого $\pi(y') \in \Pi(y')$ верно неравенство $y \geq \pi(y')$.

К примеру, для $m = 2$, точка y, для которой $y \overset{s}{\succ} y'$, принадлежит объединению двух заштрихованных углов, расположенных симметрично относительно биссектрисы координатного угла (см. рисунок 12).

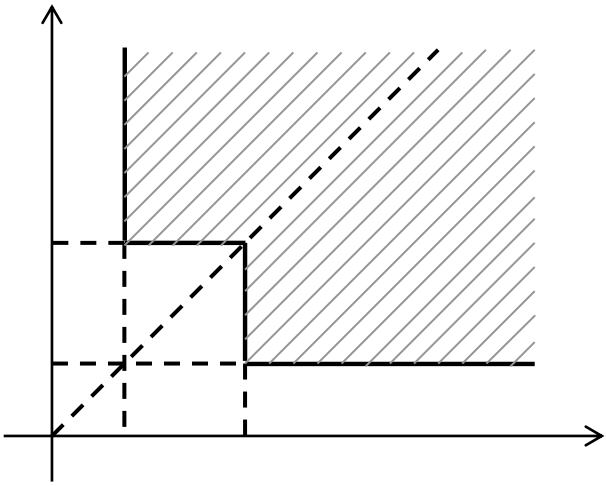


Рисунок 12 – Геометрическая интерпретация симметрического отношения

Симметрическое отношение является транзитивным и асимметричным. Действительно, пусть $y \overset{s}{\succ} y^*$, $y^* \succ y' \Rightarrow y \geq \pi^*(y^*)$, $y^* \geq \pi'(y')$ для $\pi^*(y^*) \in \Pi(y^*)$, $\pi'(y') \in \Pi(y')$. Переставим компоненты вектора y^* так, чтобы получился вектор $\pi^*(y^*)$. Аналогично переставим компоненты $\pi'(y')$, чтобы получился $\pi''(y')$. Тогда $y \geq \pi^*(y^*) \geq \pi''(y')$, то есть $y \overset{s}{\succ} y'$. Транзитивность установлена.

Симметрическое отношение иррефлексивно. Действительно, из выполнения $y \overset{s}{\succ} y$ следует $y \geq \pi(y)$, то есть сумма компонента вектора y больше суммы компонента вектора $\pi(y)$, а этого не может быть. Из транзитивности и иррефлексивности следует асимметричность.

Симметрическое отношение инвариантно относительно перенумерации критериев и удовлетворяет аксиоме Парето, то есть из $y \geq y'$ следует $y \overset{S}{\succ} y'$.

Теорема. Справедливы соотношения:

$$opt_{\succ} Y \subset opt_{\overset{S}{\succ}} Y = Y \cap P \bigcup_{y \in Y} \Pi(y), \tag{3.4}$$

где $opt_{\overset{S}{\succ}} Y$ – множество оптимальных оценок по отношению «$\overset{S}{\succ}$» на множестве Y, $P \bigcup_{y \in Y} \Pi(y)$ – множество парето-оптимальных оценок на множестве $\bigcup_{y \in Y} \Pi(y)$.

Доказательство: Проверим включение из соотношения (3.4). Пусть $y^{(0)} \in opt_{\succ} Y$. Предположим противное: для некоторого $y \in Y$ $y \succ y^{(0)} \Rightarrow y \geq \pi(y^{(0)})$ для некоторой перестановки $\pi(y^{(0)}) \in \Pi(y^{(0)})$. Отсюда, согласно аксиоме Парето, следует, что $y \succ \pi(y^{(0)})$. Используя инвариантность отношения «$\succ$» относительно перенумерации критериев, получаем $y \succ y^{(0)}$. Это противоречит $y^{(0)} \in \underset{\succ}{opt}\, Y$. Таким образом, $\underset{\succ}{opt}\, Y \subset \underset{\overset{S}{\succ}}{opt}\, Y$.

Теперь докажем $opt_{\overset{S}{\succ}} Y \subset= Y \cap P(\bigcup_{y \in Y} \Pi(y))$. Пусть $y^{(0)} \underset{\overset{S}{\succ}}{\in} opt\, Y$.

Предположим противное: $y^{(0)} \in Y$ и $y^{(0)} \notin P\left(\bigcup_{y \in Y} \ddot{I}\ (y)\right) \Rightarrow \exists \pi(y) \in \ddot{I}\ (y)$ такое, что $\Rightarrow y \geq \pi(y^{(0)})$. Переставляя компоненты векторов, входящих в это неравенство, получим $\acute{o} \geq \pi'\left(\acute{o}^{0}\right)$, где $\pi'(y^{(0)}) \in \Pi(y^{(0)}) \Leftrightarrow y \overset{S}{\succ} y^{(0)}$. Противоречие. Справедливость обратного включения доказывается аналогично.

Таким образом, множество оптимальных оценок по отношению «$\overset{S}{\succ}$» является оценкой сверху для множества оптимальных оценок.

В том случае, когда одна из оценок является более предпочтительной, чем другая, то каждая оценка, полученная из первой путем перестановк компонент, является более предпочтительной, чем оценка, образованная из второй оценки

произвольной перестановкой компонент. Основываясь на этих сведениях, можно сузить множество парето-оптимальных оценок.

В условиях определенности оценка сложных систем на основе методов векторной оптимизации проходит в три этапа:

1) Определение частных показателей и критериев эффективности.

2) Нахождение множества Парето и формулировка задачи многокритериальной оптимизации как задачи отыскания множества оптимальных оценок.

3) Решение задачи с помощью скаляризации критериев и устранения многокритериальности.

В методах свертывания векторного критерия в скалярный первоначальная задача заменяется задачей:

$$y^*(x) \to extr,$$

где $y^*(x)$ – скалярный критерий, представляющий собой некоторую функцию от значений компонентов векторного критерия:

$$y^*(x) = f\big(y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)\big).$$

Основная проблема этого подхода – построение функции f, называемой сверткой. Эта проблема состоит из четырех подзадач:

– обоснование допустимости свертки;

– нормализация критериев для их сопоставления;

– учет приоритетов (важности) критериев;

– построение функции свертки, позволяющей решить задачу оптимизации.

1. Обоснование допустимости свертки. Необходимо подтвердить, что рассматриваемые показатели эффективности являются однородными. Известно, что показатели эффективности разделяются на три группы: показатели результативности, ресурсоемкости и оперативности. В общем случае допускается свертка показателей, которые входят в обобщенный показатель по каждой группе отдельно. Свертка показателей из разных групп влечет за собой потерю физического смысла такого критерия.

2. Нормализация критериев. Проводится аналогично нормировке показателей, осуществляемой, как правило, с помощью введения относительных безразмерных показателей, которые представляют собой отношение «натурального» частного показателя к некоторой нормирующей величине, измеряемой в тех же единицах, что и сам показатель

$$y_i^{\text{норм}} = \frac{y_i}{y_i^0},$$

где y_i^0 – некоторое «идеальное» значение i-го показателя.

В каждом отдельном случает выбор нормирующего делителя для перевода частных показателей в безразмерную форму должен обосновываться, так как носит субъективный характер.

Возможные подходы к выбору нормирующего делителя:

1) можно задавать нормирующий делитель y_i^0 с помощью ЛПР, при этом его значение является образцовым;

2) можно принять, что нормирующий делитель $y_i^0 = \max y_{ij}$;

3) в качестве нормирующего делителя можно рассмотреть разность между максимальным и минимальным значениями показателя для перевода его в диапазон $[0; 1]$.

3. Учет приоритетов критериев в большинстве методов свертывания осуществляется с помощью задания вектора коэффициентов важности критериев

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \sum \lambda_1 = 1,$$

где λ_i – коэффициент важности критерия y_i, как правило совпадающий с коэффициентом значимости частного показателя качества.

Определение коэффициентов важности критериев, так же, как и в случае с показателями, связано с ощутимыми трудностями и сводится либо к использованию формальных процедур, либо к применению экспертных оценок.

После нормализации и учета приоритетов критериев исходная векторная оценка $y(x)$ альтернативы x заменяется новой векторной оценкой

$$y^*(x) = \left(\lambda_1 y_1(x), \lambda_2 y_2(x), \dots, \lambda_m y_m(x)\right),$$

где $y_i(x)$ – нормированный критерий.

Полученную векторную оценку необходимо подвергнуть преобразованию с использованием функции свертки. Способ свертки зависит от характера показателей и целей оценивания системы. Известны несколько видов свертки. Наиболее часто используемыми являются аддитивная и мультипликативная свертка компонентов векторного критерия.

Аддитивная свертка компонентов векторного критерия заключается в представлении обобщенного скалярного критерия в виде суммы взвешенных нормированных частных критериев:

$$y^*(x) = \sum \lambda_i y_i^{\text{норм}} = \sum \lambda_i \frac{y_i}{y_i^0}.$$

Такие критерии образуют группу аддитивных критериев, в которых свертка основана на применении принципа справедливой компенсации абсолютных значений нормированных частных критериев. Согласно этому принципу, справедливым считается такой компромисс, при использовании которого суммарный уровень абсолютного снижения значений одних показателей не превышает суммарного уровня абсолютного увеличения значений других показателей.

Существенным недостатком аддитивных критериев является то, что они не вытекают из объективной роли частных критериев в определении качества системы, в результате чего выступают как искусственный математический прием, придающий задаче удобный вид. Помимо этого, низкие оценки по одних критериев могут компенсироваться высокими оценками других критериев. Это означает, что уменьшение одного из критериев вплоть до его полного обнуления может быть покрыто возрастанием другого критерия.

Мультипликативная свертка компонентов векторного критерия основана на представлении обобщенного скалярного критерия в виде произведения:

$$y^*(x) = \prod (y_i)^{\lambda_i}.$$

Мультипликативный критерий образуется путем простого перемножения частных критериев, возведенных в степени λ_i. В случае, когда все частные критерии имеют равную важность, $\lambda_i = 1$. Схема компромисса мультипликативных критериев предполагает оперирование не абсолютными, а относительными изменениями частных критериев.

Обоснованность мультипликативного критерия связана с принципом справедливой относительной компенсации: справедливым считается такой компромисс, при использовании которого суммарный уровень относительного снижения значений одних критериев не превышает суммарного уровня относительного увеличения значений других критериев.

К достоинствам мультипликативного критерия можно отнести то, что при его использовании не требуется проводить нормировку частных критериев. Недостатком можно считать то, что критерий компенсирует недостаточную величину одного частного критерия избыточной величиной другого и имеет тенденцию сглаживать уровни частных критериев с помощью неравнозначных первоначальных значений частных критериев.

Выбор между способа свертки определяется степенью важности абсолютных или относительных изменений значений частных критериев. Помимо свертки векторного критерия в теории векторной оптимизации значительное место отводится принципу компромисса, основанному на идее равномерности.

Рассмотренные группы методов предоставляют широкие возможности для анализа многокритериальных оценок в целях выбора наилучшей альтернативы, ранжирования альтернатив и т.д. Однако условия применимости тех или иных методов вследствие эвристического характера последних не могут быть четко сформулированы. От этого недостатка свободна группа методов, основывающихся на аксиоматическом подходе к принятию решений – теории полезности.

3.3 Статистические решения. Сужение класса допустимых статистических решений

Статистические решения - общее название решений, принимаемых на основе результатов наблюдений какого-либо явления, подчиняющегося вероятностным закономерностям, которые известны лишь частично [5].

В разделе математической статистики, называемом «принятие решений», изучаются способы принятия или не принятия некоторой основной гипотезы при наличии конкурирующей гипотезы с учетом функции потерь. Теория принятия решений развивает методы математической статистики – методы проверки гипотез. Различные величины потерь при выборе разных гипотез приводят к результатам, отличным от результатов, полученных методами статистической проверки гипотез. Выбор менее вероятной гипотезы может оказаться более предпочтительным, если потери в случае ошибочности такого выбора окажутся меньше потерь, вызванных ошибочностью выбора более вероятной конкурирующей гипотезы. Эти задачи называют статистическими задачами принятия решений. Для решения задач этого класса необходимо найти минимальное значение функции риска на множестве возможных исходов.

Теория статистических решений с единой точки зрения характеризует такие разделы математической статистики, как теория проверки статистических гипотез, теория статистического оценивания (точечного и интервального), последовательный статистический анализ, планирование экспериментов и др.

При более широком толковании, в рамках теории принятия решений, теория статистических решений – теория выбора оптимального недетерминированного поведения в условиях неопределенности.

Главным понятием теории статистических решений является понятие статистического решения – решающего правила или решающей функции, принимаемого по результатам наблюдений. Основная задача состоит в отыскании наилучшего статистического решения $d = d(x)$ (область определения $d(x)$ – множество X, состоящее из взаимно независимых одинаково распределенных

случайных величин, распределение вероятностей которых принадлежит некоторому заданному семейству P_θ, зависящему от параметра $\theta \in \Theta$; область значений $d(x)$ – множество допустимых решений D, позволяющего по результатам наблюдений x над X судить о значении параметра θ. Для сравнения достоинств различных решающих правил вводят в рассмотрение функцию потерь $L[\theta, d(X)]$, представляющую убыток от принятия решения $d(x)$ (из заданного множества D), когда истинное распределение есть P_θ. Естественно было бы считать решающее правило $d^* = d^*(x)$ наилучшим, если средний риск $r(\theta, d^*) = R[\theta, d(X)]$ (R – усреднение по распределению θ не превышает $r(\theta, d)$ для любого решающего правила $d = d(x)$. Однако такое «равномерно наилучшее» решающее правило в большинстве задач отсутствует, в связи с чем интерес представляет отыскание так называемых минимаксных и байесовских решений.

В статистической теории решений, чтобы принять решение относительно некоторых гипотез *(состояний природы)* ω_1 и ω_2 по результатам наблюдений признаков x изучаемых явлений, необходимо каким-то образом получить *апостериорное* (на языке байесовских классификаторов) распределение $\mathrm{P}(\omega_j|x), j = 1, 2$. Если в последующем окажется, что при наблюдении x вероятность $\mathrm{P}(\omega_1|x)$ будет больше $\mathrm{P}(\omega_2|x)$, то следует все-таки выбрать решение, что состояние природы есть ω_1. При этом совершается ошибка e, вероятность которой есть

$$\mathrm{P}(e|x)\begin{cases}\mathrm{P}(\omega_1|x), \text{если принимается решение } \omega_2,\\ \mathrm{P}(\omega_2|x), \text{если принимается решение } \omega_1.\end{cases}$$

Пусть I_{ij} потери вследствие принятия решения ω_i при истинном состоянии природы (истинной гипотезе) ω_2. Ожидаемые потери называются *риском,* решение принимается по значению *условного риска*

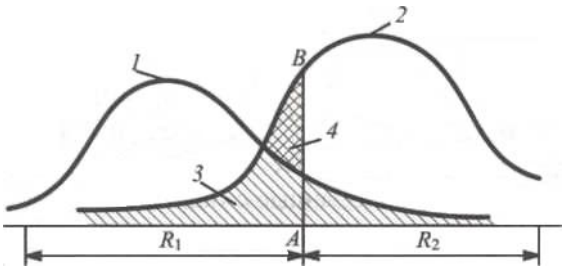
$$\mathrm{R}(\omega_\mathrm{i}|\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{s}} \mathrm{I}_{\mathrm{ij}}\mathrm{P}(\omega_\mathrm{j}|\mathrm{x}), \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{s},$$

где s – число состояний природы (гипотез); x – *наблюдаемые* значения признаков, $x \in X$.

Если окажется, что $\mathrm{R}(\omega_i|\mathrm{x}) < \mathrm{R}(\omega_j|\mathrm{x})$, то выбирается гипотеза ω_i. Для случая двух состояний природы ω_1 и ω_1 последнее неравенство имеет вид

$$(I_{21} - I_{11})\mathrm{P}(\omega_1|\mathrm{x}) > (I_{12} - I_{22})\mathrm{P}(\omega_2|\mathrm{x}).$$

Рассмотрим для примера случай двух состояний природы, когда апостериорная вероятность известна и определена как произведение условной плотности распределения вероятностей $p(x|\omega_i)$ и априорной вероятности $\mathrm{P}(\omega_{\text{ш}})$ (см. рисунок 13).



1 – апостериорная вероятность состояния природы ω_1, равная $\mathrm{P}(\omega_1)p(x|\omega_1)$;

2 – апостериорная вероятность состояния природы ω_2, равная $\mathrm{P}(\omega_2)p(x|\omega_2)$;

3 – область, определяющая вероятность ошибки (вся заштрихованная область);

4 – область (покрытая клетками), определяющая величину, за счет которой можно уменьшать вероятность ошибки.

Рисунок 13 – Составляющие вероятности ошибки

Возможны два типа ошибок классификации: когда наблюдаемое значение x попадает в область R_2, в то время как истинным состоянием природы является ω_1, либо когда x попадает в область R_2, а истинным состоянием природы является ω_2. Поскольку эти события несовместные и составляют полное множество событий, то вероятность ошибки *e* вычислим по формуле

$$\mathrm{P}(e) = \mathrm{P}(x \in R_2|\omega_1) + \mathrm{P}(x \in R_2|\omega_1) = \int_{R_2} p(x|\omega_1)\mathrm{P}(\omega_1)dx + \int_{R_2} p(x|\omega_2)\mathrm{P}(\omega_2)dx.$$

Если объект относится к классу ω_1 а его считают объектом класса ω_2, то совершается *ошибка первого рода*

$$\alpha = \int\limits_{R_2} p(x|\omega_1)\mathrm{P}(\omega_1)dx.$$

Наоборот, если объект относится к классу ω_2, а его считают объектом класса ω_1, то совершается *ошибка второго рода*

$$\beta = \int\limits_{R_2} p(x|\omega_2)\mathrm{P}(\omega_2)dx.$$

Разность $(1-\beta)$ называется *мощностью критерия.* Решение следует выбирать так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Пусть заданы функции потерь, образующие платежную матрицу

$$\|c\| = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

где c_{11}и c_{22}– потери, связанные с правильным выбором решения; c_{12} и c_{21} – потери, связанные с ошибками первого и второго рода соответственно.

Тогда средние потери (средний риск) ρ при многократном распознавании неизвестных объектов определяются по формуле

$$\rho = \mathrm{P}(\omega_1)\left[\mathrm{c}_{11}\int\limits_{R_1} p(x|\omega_1)dx + \mathrm{c}_{12}\int\limits_{R_2} p(x|\omega_1)dx\right]$$

$$+\,\mathrm{P}(\omega_1)\left[\mathrm{c}_{22}\int\limits_{R_2} p(x|\omega_2)dx + \mathrm{c}_{21}\int\limits_{R_1} p(x|\omega_2)dx\right].$$

Чтобы найти значение *x,* при котором средний риск минимален, продифференцируем ρ по *x,* приравняем производную нулю и получим

$$\frac{p(x|\omega_2)}{(x|\omega_1)} = \frac{\mathrm{P}(\omega_1)(c_{12}-c_{11})}{\mathrm{P}(\omega_2)(c_{21}-c_{22})}.$$

Отношение условных плотностей распределения

$$\frac{p(x|\omega_2)}{p(x|\omega_1)} = \lambda(x)$$

называется *коэффициентом правдоподобия,* или *отношением правдоподобия.*

Пусть границей области решений является вертикальная прямая *AB* (см. рисунок 13). Ясно, что, смещая границу области решений *AB* влево, можно

уменьшить вероятность ошибки за счет сужения области *4*. Именно таким образом уменьшают ошибку распознавания при разработке оптимальных критериев принятия решений.

В теории принятия решений рассматриваются три различных пространства:

1) п*ространство наблюдений X*, содержащее все возможные наблюдения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

2) п*ространство параметров* Ω, содержащее все возможные значения параметров $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$ (возможные значения ω часто называют *состояниями природы*);

3) п*ространство решений D*, которое содержит всевозможные значения решений *d*.

Правило решения δ (или *процедура решения,* или *решающая функция*) указывает, какое решение d необходимо принять, если получены наблюдения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, т.е. $d = \delta(x)$.

Для выбора правила решений вводится *функция потерь* $L(\omega, d)$,значение которой равно величине потери, связанной с выбором решения d, а ω рассматривается как истинное значение параметра. Значения функции потерь $L(\omega, \delta(x))$ являются случайными величинами и зависят от переменной *x*. Именно учет потерь отличает теорию принятия решений от теории статистической проверки гипотез.

Решение принимают по усредненным величинам. К ним, в частности, относится функция риска.

Функция риска $\rho_\delta(\omega)$ для правила решения δ определяется следующим образом:

$$\rho_\delta(\omega) = \mathrm{M}\{L(\omega, \delta(x))\},$$

где $\mathrm{M}(\varkappa)$ – математическое ожидание случайной величины $\varkappa$, т. е. функция риска $\rho_\delta(\omega)$ определяет среднюю потерю по всем возможным наблюдениям.

Согласно теории Байеса, когда любой параметр ω является случайной величиной с плотностью вероятности$\pi(\omega)$, ожидаемый риск, усредненный по всем значениям ω:

$$\rho_\pi(\delta) = \int_\Omega \rho_\delta(\omega)\pi(\omega)d\omega,$$

называется *апостериорным риском* использования правила решения δ при заданной априорной плотности$\pi(\omega)$. Апостериорный риск $\rho_\pi(\delta)$ можно записать в виде

$$\rho_\pi(\delta) = \mathrm{M}_\omega\{\mathrm{M}_x\{L(\omega, \delta(x))|\omega\}\} = \mathrm{M}_x\{\mathrm{M}_\omega\{L(\omega, \delta(x))|x\}\}.$$

Индекс оператора математического ожидания указывает переменную, по которой производится усреднение. Величина

$$\mathrm{M}_\omega\{L(\omega, \delta(x))|x\}$$

называется *апостериорной потерей* при заданных наблюдениях *x*. Она соответствует среднему значению потерь, связанному с принятием решения$\delta(x)$. Усреднение проводится по апостериорной плотности $p(\omega|x)$.

Классический подход к выбору правила решения δ основан на использовании функции риска $\rho_\delta(\omega)$. Наилучшим правилом решения является решение δ, которое минимизирует функцию риска для всех ω. Правило решения δ' называется *допустимым*, если не существует правила δ такого, что неравенство $\rho_\delta(\omega) < \rho_{\delta'}(\omega)$справедливо для всех значений ω.

Байесовский подход к выбору правила решения δ для известной априорной плотности π(ω) основан на использовании функции апостериорного риска $\rho_\pi(\delta)$. Наилучшим правилом решения в таком случае является то правило δ, которое дает наименьший апостериорный риск, т. е. $\rho_\pi(\delta) \leqslant \rho_\pi(\delta')$ для любого δ'. При довольно общих предположениях можно доказать, что все допустимые решения являются байесовскими решениями, т. е. если δ – допустимое правило решения, то существует некоторая априорная плотность π(ω) такая, что правило δ является байесовским решением для π(ω). Если задано правило решения, то существует байесовское правило, которое эквивалентно ему или является более предпочтительным.

Класс байесовских правил является *полным* классом. Если δ_{B} – байесовское правило, то не существует правила, которое лучше, чем δ_{B}, для всех ω. В то же время δ_{B} не всегда может быть допустимым (например, если соответствующее априорное распределение π(ω) равно нулю для некоторых ω).

Для выбора правила решения используется *метод минимакса Неймана,* согласно которому необходимо выбирать правило, минимизирующее максимальный риск. Метод минимакса Неймана приводит к наиболее пессимистическому решению.

Пусть D – пространство решений d; R – пространство доходов r, которые можно получить в результате решения d и исхода эксперимента ω; Ω – пространство возможных исходов эксперимента ω. Считаем заданной функцию распределения вероятности P(ω) на пространстве исходов Ω. На множестве R задана *функция полезности u.* Тогда для любой функции распределения вероятности $P_d(r)$ для которой функция u интегрируема, средняя полезность вычисляется по формуле

$$\text{M}\{u|P_d\} = \int\limits_R u(r)dP_d(r) = \int\limits_\Omega u(\omega, d)d\text{P}(\omega).$$

Следует выбрать решение d, максимизирующее $\text{M}\{u|P_d\}$. Обычно в задачах решения каждому доходу $r \in R$ принято сопоставлять не полезность, а *ущерб*, имеющий смысл отрицательной полезности: для всех исходов $\omega \in \Omega$ и всех решений $d \in D$ ущерб (потери) равен по величине функции потерь $L(\omega, d)$, т.е. $L(\omega, d) = -u(\omega, d)$.Вещественная функция потерь $L(\omega, d)$ задается на произведении $\Omega \times D$ пространств. При любом $(\omega, d) \in \Omega \times D$ значение $L(\omega, d)$ представляет собой ущерб от принятия решения d в случае исхода ω.

Пусть P(ω) – заданная функция распределения вероятности параметра ω. При всяком решении $d \in D$ средний ущерб $\rho(\text{P}, d)$,называемый *риском,* определяется формулой

$$\rho(\text{P}, d) = \int_\Omega L(\omega, d)d\text{P}(\omega).$$

Выбирается такое решение d, при котором минимизируется функция риска $\rho(\text{P}, d)$.

Пусть Ω – параметрическое пространство с параметром, принимающим значения ω. Для всякого распределения $\mathrm{P}(\omega)$ параметра ω *байесовский риск* $\rho^*(\mathrm{P})$ определяется как точная нижняя грань рисков $\rho(\mathrm{P}(\omega), d)$, *д)* по всем решениям $d \in D$:

$$\rho^*(\mathrm{P}) = inf\rho(\mathrm{P}(\omega), d).$$

Каждое решение d^*, риск которого равен байесовскому риску, называется *байесовским решением* при распределении $\mathrm{P}(\omega)$, т. е. $\rho^*(\mathrm{P}) = \rho(\mathrm{P}(\omega), d^*)$. В ряде случаев байесовское решение может не достигаться.

Во многих задачах удобно использовать *неотрицательные функции потерь.* Оказывается, любую функцию потерь можно заменить неотрицательным ее аналогом. Рассмотрим новую функцию потерь $L_0(\omega, d)$, определяемую по начальной функции потерь следующим образом:

$$L_0(\omega, d) = \alpha L(\omega, d) + \lambda(\omega),\ \omega \in \Omega,\ d \in D,$$

где α – числовой коэффициент; λ(ω) – некоторая функция.

Исходной функции $L(\omega, d)$ соответствует риск $\rho(\mathrm{P}(\omega), d)$, а функции $L_0(\omega, d)$ – риск $\rho_0(\mathrm{P}(\omega), d)$. Тогда для любых значений $d_1 \in D$ и $d_2 \in D$ соотношения $\rho_0(\mathrm{P}(\omega), d_1) < \rho_0(\mathrm{P}(\omega), d_2)$и $\rho(\mathrm{P}(\omega), d_1) < \rho(\mathrm{P}(\omega), d_2)$ равносильны. В частности, решение d^* тогда и только тогда является байесовским при распределении P(ω) для исходной задачи, когда оно является байесовским решением при P(ω) для новой задачи с функцией потерь $L_0(\omega, d)$. Выбирая функцию λ(ω) и ее знак, можно получить $L_0(\omega, d) \geqslant 0$ при всех $\omega \in \Omega$, $d \in D$. Тогда $infL(\omega, d) = 0$.

В любой задаче принятия решения байесовский риск $\rho^*(\mathrm{P}(\omega))$ является вогнутой функцией от распределения P(ω) параметра ω, т.е. для любых распределений $\mathrm{P}_1(\omega)$ и $\mathrm{P}_2(\omega)$ параметра ω и для любого числа α такого, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполнено неравенство

$$\rho^*[\alpha \mathrm{P}_1(\omega) + (1-\alpha)\mathrm{P}_2(\omega)] \geqslant \alpha\rho^*\big(\mathrm{P}_1(\omega)\big) + (1-\alpha)\rho^*(\mathrm{P}_2(\omega)).$$

В общем случае байесовский риск мало чувствителен к ошибке (приращению) в выборе значения распределения P(ω) параметра ω; если функция $\rho^*(\mathrm{P}(\omega))$

кусочно линейна, то приращение $\Delta\rho^*(\mathrm{P}(\omega))$ равно нулю, когда приращение $\Delta\mathrm{P}(\omega)$ содержится в интервале линейности функции $\rho^*(\mathrm{P}(\omega))$.

Критерий Байеса – правило, в соответствии с которым стратегия решений выбирается таким образом, чтобы обеспечить минимум среднего риска. Стратегию, основанную на этом правиле, называют *байесовской стратегией,* а минимальный средний риск – *байесовским риском.*

Байесовский подход состоит в вычислении условных апостериорных вероятностей и принятии решений на основе их сравнения.

Если число классов равно m, а значение признака, полученное в опыте, рассматриваемого объекта равно x_0 , то апостериорная вероятность события, состоящего в том, что объект относится к классу ω_i, вычисляется по формуле

$$\mathrm{P}(\omega_i|x = x_0) = \frac{\mathrm{P}(\omega_i)\rho(x_0|\omega_i)}{\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}(\omega_i)\rho(x_0|\omega_i)}.$$

Или, в другой трактовке, при $c_{11} = c_{22} = 0$ объект относится к классу ω_i, если

$$\frac{\rho(x|\omega_2)}{\rho(x|\omega_1)} > \frac{c_{12}\mathrm{P}(\omega_1)}{c_{21}\mathrm{P}(\omega_2)}.$$

Минимаксный критерий используется, если априорные вероятности появления объектов ω_i, $i = 1, 2, \dots, m$ неизвестны. Минимаксная стратегия состоит в том, что решение о принадлежности неизвестного объекта соответствующему классу ω_i принимается на основе байесовской стратегии, соответствующей такому значению $\mathrm{P}\omega_i$, при котором средний риск минимален. При наличии классов ω_1 и ω_2 средний риск с учетом того, что

$$\mathrm{P}(\omega_2) = 1 - \mathrm{P}(\omega_1),\ \mathrm{c}_{11} = \mathrm{c}_{22} = 0,$$

определяется по формуле

$$\rho = \mathrm{P}(\omega_1)c_{12}\int_{R_2}\rho(x|\omega_1)dx + [1 - \mathrm{P}(\omega_1)]c_{21}\int_{R_1}\rho(x|\omega_2)dx.$$

Приравнивая производную $\frac{\partial\rho}{\partial[\mathrm{P}(\omega_1)]}$ нулю, в некоторой точке x_0 получим

$$c_{12}\int_{R_2}\rho(x|\omega_1)dx = c_{21}\int_{R_1}\rho(x|\omega_2)dx.$$

Если измеренное значение признака x меньше x_0, то объект принадлежит классу ω_1, или если $x > x_0$, то объект принадлежит классу ω_2. Данный подход приводит к следующему пороговому значению коэффициента правдоподобия:

$$\lambda_0' = \frac{c_{12}}{c_{21}} \frac{\mathrm{P}_1(\omega_1)}{1-\mathrm{P}_1(\omega_1)},$$

где $\mathrm{P}_1(\omega_1)$– точка максимума функции, $\rho = \rho\mathrm{P}(\omega_1)$.

Тогда объект принадлежит классу ω_1, если $\lambda(x) < \lambda_0'$, и объект принадлежит классу ω_2, если $\lambda(x) > \lambda_0'$.

Критерий Неймана–Пирсона используется, если неизвестны априорные вероятности появления объектов соответствующих классов и платежная матрица ||c||.

Для построения алгоритма классификации задается допустимое значение условной вероятности ошибки первого рода α, затем определяется такая граница между классами, придерживаясь которой, удается добиться минимума условной вероятности ошибки второго рода β.

Пусть принято, что допустимая условная вероятность ошибки первого рода не должна превышать постоянной величины A, т.е. $\alpha \leqslant A$. Требуется определить решение x_0задачи

$$\min_x \beta = \min_x \int_{-\infty}^{x} \rho(z|\omega_2)dz$$

при ограничении вида

$$\alpha = \int_{x}^{+\infty} \rho(z|\omega_1)dz = A.$$

Очевидно, что решение x_0 удовлетворяет уравнению

$$\int_{x_0}^{+\infty} \rho(x|\omega_1)dx = A.$$

Для решения задачи строят *рабочую характеристику* – функцию $(1-\beta)$, зависящую от α. Если $\alpha = 0$, то $\beta = 1$ и $1-\beta = 0$; если $\alpha = 1$, то $\beta = 0$ и $1-\beta = 1$. Вычислим

$$\frac{\partial(1-\beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial(1-\beta)/\partial x_0}{\partial\alpha/\partial x_0} = \frac{\rho(x_0|\omega_2)}{\rho(x_0|\omega_1)} = \lambda_0.$$

Поскольку тангенс угла наклона касательной к рабочей характеристике равен λ_0, то для определения α и $(1-\beta)$ найдем точку на рабочей характеристике, в которой

$$\lambda_0 = \frac{c_{12}P(\omega_1)}{c_{21}P(\omega_2)}.$$

Ордината этой точки определяет условную вероятность правильного решения, а абсцисса – условную вероятность ошибки первого рода. Причем надо учесть, что производная от среднего риска ρ по априорной вероятности $P(\omega_1)$ в точке его максимума равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial\rho}{\partial[P(\omega_1)]} = c_{11}(1-\alpha) + c_{12}\alpha - c_{22}(1-\beta) - c_{21}\beta = 0.$$

В координатах α и $(1-\beta)$ это уравнение прямой линии. При $c_{11} = c_{22}$ уравнение прямой имеет вид

$$1-\beta = \alpha\frac{c_{11}-c_{12}}{c_{21}-c_{22}} + 1$$

с угловым коэффициентом

$$k = \frac{c_{11}-c_{12}}{c_{21}-c_{22}}.$$

Координаты точки пересечения этой прямой с рабочей характеристикой определяют вероятности α и $(1-\beta)$ в условиях применения минимаксного критерия. Тангенс угла наклона касательной в точке пересечения равен λ_0.

3.4 Связь между статистической проверкой гипотез, теорией принятия решений и математическим программированием

На простом примере покажем связь между статистической проверкой гипотез, теорией принятия решений и математическим программированием. Пусть необходимо проверить выполнимость гипотезы H_0 при конкурирующей гипотезе H_1 относительно значений параметра ω. В математической статистике для проверки гипотез задается уровень значимости α (вероятность события, состоящего в выборе гипотезы H_1, когда верна гипотеза H_0), определяется значение β (вероятность события, состоящего в выборе гипотезы H_0, когда верна гипотеза H_1) и находится такое решение, при котором значение β минимально. В теории принятия решений для каждого правила решения δ существует конечная вероятность α(δ) выбора гипотезы H_1, когда верна гипотеза H_0, и вероятность β(δ) выбора гипотезы H_0, когда верна гипотеза H_1 (таблица 1).

Таблица 1 – Вероятности $\mathrm{P}(H_0|\omega)$ и $\mathrm{P}(H_1|\omega)$

Гипотеза	Решение	
	H_0	H_1
H_0	$1-\alpha(\delta)$	$\alpha(\delta)$
H_1	$\beta(\delta)$	$\beta(\delta)$

Для выбора решения определим функцию потерь, полагая, что она равна нулю для правильного решения (таблица 2).

Таблица 2 – Функция потерь

Гипотеза	Решение	
	H_0	H_1
H_0	0	H_0
H_1	L_1	H_1

В рамках байесовского подхода каждой из гипотез H_0 и H_1 зададим априорные вероятности μ и $(1-\mu)$ соответственно. Теперь необходимо выбрать такое правило принятия решения δ, которое минимизирует функцию

$$r_\mu(\delta) = \alpha(\delta) l_0 \mu + \beta(\delta) l_1 (1-\mu).$$

Таким образом получена *задача математического программирования*: минимизировать линейную целевую функцию $r_\mu(\delta)$ на области допустимых значений $[\alpha(\delta), \beta(\delta)]$. Можно доказать, что область допустимых значений $[\alpha(\delta), \beta(\delta)]$ выпукла, и тогда минимум функции $r_\mu(\delta)$ определяется координатами точки касания прямой $r = l_0\mu\alpha + l_1(1-\mu)\beta$ с нижней границей допустимой области $[\alpha(\delta), \beta(\delta)]$.

Оптимальное решение получается, если рассмотреть апостериорную потерю при заданных наблюдениях x и соответственно условных вероятностях $\rho(x|H_1)$ и $\rho(x|H_0)$. Ожидаемая потеря при выборе гипотезы H_0 вычисляется по формуле

$$l_1 \mathrm{P}(H_1|x) = l_1(1-\mu)\rho(x|H_1),$$

где $\mathrm{P}(H_1|x)$ – апостериорная вероятность того, что верна гипотеза H_1 при наблюдаемых значениях *x*.

Ожидаемая потеря при выборе гипотезы H_1вычисляется по формуле

$$l_0 \mathrm{P}(H_0|x) = l_0\mu\rho(x|H_0),$$

где $\mathrm{P}(H_0|x)$ –апостериорная вероятность того, что верна гипотеза H_0 при наблюдаемых значениях *x*.

Таким образом, правило решения с минимальным риском следующее: выбирается гипотеза H_0, если выполнено неравенство

$$l_1(1-\mu)\rho(x|H_1) < l_0\mu\rho(x|H_0),$$

или неравенство

$$\frac{\rho(x|H_1)}{\rho(x|H_0)} < \frac{l_0\mu}{l_1(1-\mu)},$$

в противном случае выбирается гипотеза H_1.

Вопросы для коллоквиумов, собеседования по разделу:

1. Статистические и нестатистические решения, как выбор.

2. Общие схемы принятия статистических и нестатистических решений.

3. Байесовы процедуры, процедуры правдоподобия и непараметрическая статистика.

4. Задачи многокритериальной оптимизации в условиях нестатистической неопределенности.

5. Неформальные методы. Графические методы. Количественные методы. Кибернетические методы.

Список использованных источников

1. Анфилатов, В.С. Системный анализ в управлении: учеб. пособие / В.С. Анфилатов, А.А. Емельянов, А.А. Кукушкин; под ред. А.А. Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368 с. – ISBN – 5-279-02435-X.

2. Блауберг, И.В. Становление и сущность системного подхода / И.В. Блауберг, Э.Г. Юдин. – М.: Мысль, 1973. – 271 с.

3. Болодурина, И.П. Системный анализ: учеб. пособие / И.П. Болодурина, Т.Н. Тарасова, О.С. Арапова ; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 193 с.

4. Болодурина, И.П. Курс лекций по дисциплине «Методы оптимизации»: учебное пособие. – Оренбург: ОГУ, 2002. – 93с.

5. Большая советская энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. – 3-е изд. – М.: Советская энциклопедия, 1969–1978. – 19774 с.

6. Волкова В.Н. Системный анализ и принятие решений: словарь-справочник / под ред. В.Н. Козлова. – М.: Высшая школа, 2004. – 616 с. – ISBN 5-06-004875-6, 978-5-06-004875-9.

7. Грешилов, А.А. Математические методы принятия решений: учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Р.Э. Баумана, 2006. – 584 с.

8. Дрогобыцкий, И.Н. Системный анализ в экономике / И.Н. Дрогобыцкий. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 512 с. – ISBN 978-5-279-03242-6.

9. Козлов, В.Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений: учеб. пособие / В.Н. Козлов. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 244 с.

10. Лопатников Л.И. Краткий экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1979. – 358 с.

11. Материалы Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (2007-2016 гг., Москва, Россия). – М.: ИПУ РАН. 2007-2016.

12. Оптнер С.Л. «Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем». – М.: Советское радио, 1969. – 69 с.

13. Оптнер С.Л. «Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем». – М.: Советское радио, 1969. – 69 с.

14. Петровский, А.Б. Теория принятия решений: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.Б. Петровский. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 400 с. – ISBN 978-5-7695-5093-5.

15. Погорелов, В.И. Система и ее жизненный цикл: введение в CALS-технологии / В.И. Погорелов; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб.: БГТУ, 2010. – 182 с. – ISBN 978-5-85546-581-5.

16. Советский энциклопедический словарь / под ред. А.М. Прохорова. – 4-е изд. – М.: Сов. Энциклопедия, 1986. – 1600 с.

17. Управление развитием крупномасштабных систем / Под редакцией А.Д. Цвиркуна. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2012. – 496 с. – ISBN 978-5-94052-188-4.

18. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука,1978. – 352 с.

19. Цвиркун, А.Д. Управление развитием крупномасштабных систем в новых условиях / А.Д. Цвиркун // Проблемы управления. – М.: ООО Сенсидат-Плюс, 2003. – №1. – С. 34-44.

20. Шкундин, С.З. Теория информационных процессов и систем: учеб. пособие / С.З. Шкундин, В.Ш. Берикашвили. – М.: Горная книга, 2012. – 475 с. – ISBN 978-5-98672-285-6.