

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

О.А. Пихтилькова, А.Н. Благовисная

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 Математика и механика

Оренбург
2019

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7
П 35

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук С.В. Харитонова

- Пихтилькова, О.А.**
П 35 Математическая логика, алгебра и теория чисел: методические указания / О.А. Пихтилькова, А.Н. Благовисная; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 46 с.

Методические указания содержат рекомендации по подготовке к практическим занятиям, зачету и экзамену, а также самостоятельной работе по дисциплине «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Методические указания предназначены для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 Математика и механика.

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я7

© Пихтилькова О.А.,
Благовисная А.Н., 2019
© ОГУ, 2019

Содержание

Введение	4
1 Общие рекомендации по изучению дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел»	5
2 Список литературы	8
3 Электронные ресурсы	11
4 Рекомендации по самостоятельному освоению разделов дисциплины	12
5 Рекомендации по подготовке к практическим занятиям	17
6 Реферат	33
7 Индивидуальное творческое задание	36
8 Дифференцированный зачет	38
9 Кандидатский экзамен	40

Введение

Настоящие методические указания предназначены для обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 Математика и механика и написаны в виде рекомендаций по изучению дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Содержание методических указаний соответствует рабочей программе дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел» и включает в себя необходимые для успешного освоения дисциплины составляющие: общие рекомендации по подготовке к занятиям, зачету и экзамену, тематическое планирование занятий и самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля, рекомендации по написанию реферата и выполнению индивидуального творческого задания.

1 Общие рекомендации по изучению дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

1 Приступая к изучению дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел», обучающиеся должны ознакомиться с рабочей программой дисциплины, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести тетради для работы на практических занятиях и для самостоятельного освоения разделов дисциплины.

2 В ходе подготовки к практическим занятиям необходимо изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы дисциплины. Подготовить свой конспект материалов.

Практическое занятие – форма систематических учебных занятий, с помощью которых обучающиеся изучают разделы дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся на основе материалов, изученных обучающимся самостоятельно, и связаны с детальным разбором отдельных вопросов изучаемой темы. Следует подчеркнуть, что только после усвоения теоретических сведений материал будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа теории, так и с помощью решения задач.

При подготовке к практическим занятиям следует использовать литературу из представленного списка, а также руководствоваться приведенными указаниями и рекомендациями.

На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении решения задач, поиск наиболее эффективных решений поставленных проблем, умение находить полезный дополнительный материал по тематике занятий.

После изучения определенной темы по учебной литературе, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно обучающемуся рекомендуется воспроизвести по памяти определения, формулировки основных положений и доказательства. В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение решать задачи по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений. Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у обучающегося возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах обучающийся должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Рекомендуется следующая схема подготовки к занятию:

- прочитать и законспектировать литературу, рекомендованную по изучаемой теме;
- ответить на вопросы для самоконтроля;
- решить задачи, встречающиеся в литературе при изложении материала, а также задачи, рекомендованные преподавателем;
- при затруднениях сформулировать вопросы к преподавателю.

3 Результатом самостоятельного освоения разделов дисциплины является владение основными понятиями и методами раздела, а также владение методами решения проблемных задач.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит

несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала детальных рассуждений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, рассуждения располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные рассуждения от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты.

4 При подготовке к дифференцированному зачету или экзамену у обучающегося должен быть конспект литературы, прочитанной согласно рекомендациям преподавателя в течение семестра.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом конспекты занятий.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у обучающегося возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах обучающийся должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

2 Список литературы

В данном разделе приводится список литературы, предназначенной для успешного освоения дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Допускается использование других источников, в том числе статей из научных журналов, доступных для обучающихся. В этом случае перед использованием литературы необходимо предварительно показать и обсудить её с преподавателем дисциплины.

Расширенный список литературы для изучения дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел»:

- 1 Бахтурин, Ю.А. Основные структуры современной алгебры / Ю.А. Бахтурин. – М.: Наука, 1990. – 318 с.
- 2 Бахтурин, Ю.А. Тождества в алгебрах Ли / Ю. А. Бахтурин. – М.: Наука, 1985. – 447 с.
- 3 Борович, З.И. Теория чисел / З.И. Борович, И.Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
- 4 Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли. Гл. I-III: Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1976. – 496 с.
- 5 Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра / Б.Л. ван дер Варден. – М.: Наука, 1976. – 649 с.
- 6 Винберг, Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э.Б. Винберг. – М.: МЦНМО, 2011. – 591 с.
- 7 Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – СПб.: Лань, 2004. – 176 с.
- 8 Галочкин, А.И. Введение в теорию чисел / А.И. Галочкин, Ю.В. Нестеренко, А.Б. Шидловский. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 160 с.
- 9 Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / Гэри М., Джонсон Д. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
- 10 Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон – М.: Мир, 1964. – 355 с.

- 11 Джекобсон, Н. Теория колец / Н. Джекобсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1947. – 286 с.
- 12 Джекобсон, Н. Структура колец / Н. Джекобсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 392 с.
- 13 Ершов, Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
- 14 Ершов, Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели / Ю.Л. Ершов. – М.: Наука, 1980. – 416 с.
- 15 Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел / А.А. Карацуба. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
- 16 Кейперс, Л. Равномерное распределение последовательностей / Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер. – М.: Наука, 1985. – 408 с.
- 17 Коробов, Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения / Н.М. Коробов. – М.: Наука, 1989. – 240 с.
- 18 Кострикин, А.И. Введение в алгебру: учебник / А.И. Кострикин. – М.: МЦНМО, 2009. – Ч. 3. Основные структуры алгебры. – 272 с.
- 19 Ламбек, И. Кольца и модули=Lectures on Rings and Modules / И. Ламбек. – М.: Мир, 1971. – 279 с.
- 20 Ленг, С. Алгебра / С. Ленг. – Москва: Наука, 1965. – 558 с.
- 21 Мальцев, А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
- 22 Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. М.: Наука, 1970. – 392 с.
- 23 Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – М.: Наука, 1971. – 320 с.
- 24 Мещерина, Е.В. Первичный радикал алгебр Ли, удовлетворяющих специальным условиям: монография / Е.В. Мещерина, С.А. Пихтильников, О.А. Пихтилькова. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 120 с.
- 25 Новиков, П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: Наука, 1973. – 399 с.

- 26 Пихтильков, С.А. Структурная теория специальных алгебр Ли: монография / С.А. Пихтильков. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 171 с.
- 27 Пихтилькова, О.А. Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами и некоторых групп с одним определяющим соотношением: монография / О.А. Пихтилькова, Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 157 с.
- 28 Туганбаев, А.А. Теория колец. Арифметические модули и кольца / А.А. Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2009. – 472 с.
- 29 Серр, Ж.П. Курс арифметики / Ж.П. Серр. – М.: Мир, 1972. – 184 с.
- 30 Скорняков, Л.А. Элементы общей алгебры / Л.А. Скорняков. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
- 31 Чандрасекхаран, К. Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. – Москва: Мир, 1974. – 188 с.
- 32 Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. М.: Мир, 1972. – 190 с.
- 33 Jacobson, N. *PI-algebras* / N. Jacobson. – Berlin-Heideilburg-New York: Springer-Verlag, 1975. – 119 p.

3 Электронные ресурсы

Помимо библиотечных ресурсов, на современном этапе развития важным источником информации является Интернет. Существует масса открытых образовательных и научных порталов, концентрирующих в себе множество современных источников информации. Охарактеризуем Интернет-ресурсы, которые могут быть рекомендованы для изучения дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

В Оренбургском государственном университете имеется бесплатный для обучающихся доступ к электронным российским и зарубежным ресурсам. Познакомиться с актуальной информацией относительно перечня ресурсов и доступа к ним можно на сайте научной библиотеки Оренбургского государственного университета http://artlib.osu.ru/site_new/.

Полезную информацию также можно найти на следующих ресурсах:

1) http://www.mathnet.ru/index.phtml/?option_lang=rus (общероссийский математический портал – современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России);

2) <https://arxiv.org/> (крупнейший бесплатный архив электронных публикаций научных статей и их препринтов по физике, математике, астрономии, информатике и биологии);

3) <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm> (международный научно-образовательный сайт «Мир математических уравнений», который содержит обширную учебную физико-математическую библиотеку и предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики и других наук; все ресурсы сайта являются бесплатными для его пользователей).

4 Рекомендации по самостоятельному освоению разделов дисциплины

Основной материал дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел» осваивается обучающимися в процессе самостоятельной работы. Самостоятельная работа обучающихся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров – это метод обучения, при котором познавательная деятельность протекает в полном соответствии с индивидуальными особенностями, уровнем образования, опытом, с одной стороны, и с другой – специально созданными для этого организационными условиями.

Далее перечислены темы, которые необходимо самостоятельно освоить обучающемуся по программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 Математика и механика по дисциплине «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Для каждой темы указаны ссылки на рекомендуемую литературу и разделы, в которых можно найти материалы по теме, а также формулировки задач, которые необходимо решить после освоения теории.

Раздел 1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча ([13, §§ 35-37], [21, §§ 1-6, 11-12], [23, гл. V, §§ 1-3]).

2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы ([21, §§ 5-6, 12], [23, гл. V, §§ 3-4]).

3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства ([21, § 13]).

4. Классы P и NP . Полиномиальная сводимость и NP -полные задачи. Теорема об NP -полноте задачи «ВЫПОЛНИМОСТЬ» ([9, гл. II, §§ 2-6]).

5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы ([13, §§ 1-6, 12], [25, гл. I]).

6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость ([23, гл. I, § 4], [25, гл. II, §§ 3-10]).

7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме. ([13, §§15-16, 20], [23, гл. II, §10], [25, гл. III, §§ 1-3, 9; гл. IV, § 14]).

8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции ([13, §§ 18, 22], [23, гл. II, §§ 1-4], [25, гл. IV, §§ 1-8]).

9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности ([13, § 17-18, 21-22], [23, гл. II, § 5], [25, гл. IV, § 16, 19]).

10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности ([13, §§ 24-25, 29]).

11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка ([23, гл. II, § 12], [14, гл. V, § 1]).

12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства) ([23, гл. III, §§ 1-3]).

13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике ([23, гл. III, §§ 4-6]).

14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов ([13, §§ 37-38], [23, гл. III, § 6]).

15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора ([13, §§ 10, 13-14], [23, гл. IV]).

Раздел 2. Алгебра

1. Теоремы Силова ([18, гл. 2, § 2, 6]).

2. Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 ([18, гл. 2, § 1], [6, гл. 10, § 5]).

3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и её следствия для групп и линейных операторов ([6, гл. 9, § 3], [5, гл. 12, §§ 84-89]).

4. Свободные группы и определяющие соотношения ([18, гл. 1, §4], [30, гл. V, §1]).

5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа ([5, гл. 6, §§ 39-41; гл. 8, §§ 57-58], [18, гл. 5, §§ 1,3]).

6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы ([5, гл. 6, § 43], [18, гл. 5, § 2]).

7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности ([5, гл. 13], [30, гл. IV, §§ 5-6]).

8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса ([5, гл. 14, § 114], [30, гл. VI, § 3]).

9. Нётеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе ([5, гл. 15, § 115], [6, гл. 9, § 4]).

10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта ([30, гл. V, § 4], [10, гл. II, гл. V, § 2]).

11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности ([5, гл. 14, § 108], [18, гл. 3, §§ 1-2, 4-5], [6, гл. 11, §§ 1-4]).

12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа ([30, гл. II, § 2], [22, гл. II, § 5]).

13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах ([30, гл. IV, § 8], [22, гл. IV]).

Часть 3. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности ([7, гл. 5, §§ 1-2]).

2. Первообразные корни и индексы ([7, гл. 6]).

3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$ ([8, гл. 1, § 4], [31, гл. 7 §§ 1-3]).

4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел. ([8, гл. 2, §§ 1-3], [15, гл. 5, §§ 1-2]).

5. Характеры и L -функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии ([7, гл. 7], [8, гл. 3, §§4-5], [31, гл. 10, §§2-5]).

6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений ([3, гл. 1, §§ 1-2], [17, гл. 1, §§ 3-4]).

7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена ([16, гл. 1, §§ 1-3], [17, гл. 3, § 19]).

8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм ([29, гл. 7, §§ 1-3]).

9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами ([29, гл. 7, §§ 4, 6]).

10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел ([8, гл. 4, §§ 2-3]).

11. Трансцендентность чисел e и π . ([8, гл. 4, §§ 4-5]).

Часть 4. Кольца и алгебры Ли

1. Модули. Неприводимые модули. Лемма Шура ([32, § 1.1]).

2. Радикал Джекобсона ([32, § 1.2]).

3. Первичный радикал ассоциативного кольца ([19, § 3.2]).

4. Артиновы кольца. Теорема Веддербёрна-Артина ([32, теоремы 1.3.1, 1.4.4, 2.1.6]).

5. Теорема плотности Джекобсона ([32, теорема 2.1.2]).

6. PI -алгебры. Теорема Капланского ([32, § 6.3]).

7. Теорема Познера о первичных PI -алгебрах ([33, theorem 2, p. 57]).

8. Алгебры Ли. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Теорема Ли ([2, теорема 1.8.3]).

9. Полупростые конечномерные алгебры Ли. Теорема Леви-Мальцева ([26, стр. 105-106]).

10. Теорема Адо-Ивасава ([2, стр. 249]).

11. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли ([2, § 2.5]).
12. Свободная алгебра Ли. Базисы свободной алгебры Ли ([2, §§ 2.2-2.3]).
13. Подалгебры свободных алгебр Ли ([2, § 2.4]).
14. Специальные алгебры Ли. Доказать, что присоединенная алгебра специальной алгебры Ли является PI -алгеброй ([2, теорема 6.3.4]).
15. Первичный радикал обобщенно специальных алгебр Ли ([26]).
16. Теорема Ю.А. Бахтурина о конечно-порожденных почти разрешимых алгебрах Ли над полем характеристики нуль ([2, теорема 6.4.8]).

5 Рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Основой для проведения практических занятий являются изученные обучающимися самостоятельно темы из разделов дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел», перечисленные в пункте 4 настоящих методических указаний. На практических занятиях обсуждаются основные понятия и ключевые теоремы разделов дисциплины, а также решение задач, вызывающих наибольшие затруднения у обучающихся.

Тема 1. Основные вопросы математической логики и теории алгоритмов

При подготовке к практическому занятию по данной теме необходимо особое внимание уделить основным понятиям и ключевым теоремам математической логики и теории алгоритмов. Далее перечислен список вопросов, ответы на которые должен знать обучающийся для успешного решения задач и доказательства утверждений математической логики и теории алгоритмов.

1. Что называется алфавитом; словом; длиной слова; композицией слов; подсловом слова? Как определяется вхождение слова?
2. Каким образом определяется частичная функция? Что является областью определения и областью значений частичной функции?
3. Опишите алфавит формального языка, использующийся для записи функций и изучения их свойств.
4. Что называется термом? Как определяются значения термов?
5. Какие предметные и функциональные символы называются индивидуальными; переменными?
6. Каким образом определяются суперпозиции частичных функций?
7. Что называется примитивной рекурсией? Какая функция называется примитивно рекурсивной? Привести примеры примитивно рекурсивных функций.
8. Какая функция является частично рекурсивной?
9. Какие функции называются алгоритмически вычислимыми?
10. Как соотносятся тезисы Чёрча и Тьюринга?

11. Какие функции называются общерекурсивными?
12. Каким образом соотносятся общерекурсивные и частично рекурсивные функции, общерекурсивные и примитивно рекурсивные функции?
13. Какие операции над примитивно рекурсивными функциями дают в качестве результата снова примитивно рекурсивную функцию?
14. Какие арифметические функции являются примитивно рекурсивными?
15. С помощью каких функций и операций можно получить примитивно рекурсивную относительно системы функций функцию?
16. С помощью каких функций и операций можно получить каждую общерекурсивную функцию?
17. С помощью каких функций и операций можно получить все одноместные примитивно рекурсивные функции?
18. Какие одноместные и n -местные функции называются допустимыми?
19. Какое подмножество всех натуральных чисел называется рекурсивным; примитивно рекурсивным? Как соотносятся рекурсивное и примитивно рекурсивное множества?
20. Какое множество чисел называется рекурсивно перечислимым? Привести примеры рекурсивно перечислимых множеств.
21. Какая функция называется эффективно вычислимой?
22. Что называется алгоритмом в алфавите; над алфавитом? В каком случае говорят, что алгоритм применим к слову?
23. Что называется формулами подстановки в алфавите? Какая формула подстановки называется простой; заключительной?
24. Что называется схемой алгоритма?
25. Какой алгоритм называется нормальным алгоритмом (алгоритмом Маркова) в алфавите? Привести примеры.
26. Какие алгоритмы над алфавитом A называются вполне эквивалентными; эквивалентными относительно алфавита A ?
27. Какая функция называется частично вычислимой; вычислимой по Маркову?

28. Какой нормальный алгоритм является замкнутым?
29. Какой нормальный алгоритм называется композицией алгоритмов?
30. Какова связь между частично рекурсивной функцией и частично вычислимой по Маркову функцией? Какова связь между рекурсивной функцией и вычислимой по Маркову функцией?
31. Дать определение машины Тьюринга. Привести примеры.
32. Какие функции называются вычислимыми по Тьюрингу?
33. Каким образом соотносятся вычислимые по Тьюрингу и вычислимые по Маркову функции?
34. Какие функции называются универсальными частично рекурсивными?
35. Какая машина Тьюринга называется универсальной?
36. Каким образом формулируется проблема вхождения для множества слов в произвольном алфавите? При каких условиях проблема вхождения для множества слов в произвольном алфавите разрешима на машинах Тьюринга?
37. При каких условиях разрешима проблема остановки машины Тьюринга?
38. Сформулировать проблему равенства слов в полугруппах.
39. Описать основные этапы доказательства того, что совокупность всех тождественно истинных формул исчисления предикатов первой степени не рекурсивна.
40. Что называется массовой задачей; индивидуальной задачей?
41. В каком случае алгоритм решает массовую задачу?
42. Каким образом определяется временная сложность алгоритма?
43. Какой алгоритм называется полиномиальным; экспоненциальным? В чем различие между полиномиальными и экспоненциальными алгоритмами?
44. Что называют классом P ; NP ? Какие задачи называются NP -полными?
45. Каким образом формулируются задачи распознавания свойств?
46. Каким образом с помощью схем кодирования устанавливается соответствие между задачами распознавания и языками?
47. Каким образом определяется полиномиальная эквивалентность?

48. Каким образом можно определить понятие «временная сложность» в терминах машины Тьюринга?

49. Опишите модель недетерминированной машины Тьюринга.

50. Как определяется понятие полиномиальной сводимости? Какими свойствами обладает полиномиальная сводимость?

51. Какие языки/задачи распознавания называются полиномиально эквивалентными?

52. Сформулировать теорему Кука.

53. Какие операции над высказываниями вводятся в алгебре логики?

54. Дать определение формулы алгебры высказываний.

55. Какие формулы алгебры высказываний называются равносильными?

Привести примеры.

56. Дать определение алгебры Буля.

57. Какие формулы алгебры высказываний называются двойственными?

Привести примеры. Сформулировать закон двойственности.

58. Какая формула алгебры высказываний называется тождественно истинной; выполнимой; невыполнимой?

59. Каким образом решается проблема разрешения для алгебры высказываний?

60. Что называется дизъюнктивной нормальной формой и конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний?

61. Дать определение совершенных нормальных форм.

62. Перечислить символы исчисления высказываний.

63. Дать определение формулы исчисления высказываний.

64. Какие формулы называются выводимыми в исчислении высказываний?

65. Перечислить аксиомы исчисления высказываний.

66. Сформулировать правила вывода исчисления высказываний.

67. Сформулировать теорему дедукции исчисления высказываний.

68. Дать определение монотонно возрастающих/убывающих формул исчисления высказываний.

69. Какие формулы исчисления высказываний называются эквивалентными?
70. Сформулировать теорему эквивалентности исчисления высказываний. Охарактеризовать основные этапы доказательства теоремы эквивалентности.
71. Сформулировать теорему о непротиворечивости исчисления высказываний. Каким образом доказывается данная теорема?
72. Любая ли тождественно истинная формула алгебры высказываний выводима в исчислении высказываний? Если да, то каким образом можно доказать данное утверждение?
73. Можно ли доказать, что система аксиом исчисления высказываний независима? Если да, то каким образом можно доказать данное утверждение?
74. Что называется предикатом? Привести примеры.
75. Что называется предметной областью предиката?
76. Что называется предметной переменной; предметной постоянной предиката?
77. Что называется переменными высказываниями в логике предикатов?
78. Что называется элементарными высказываниями в логике предикатов?
79. Что называется квантором всеобщности; квантором существования?
80. Какая переменная предиката называется свободной?
81. Какие формулы логики предикатов называются приведенными? Всегда ли для формулы логики предикатов существует приведенная формула?
82. Пояснить теоретико-множественный смысл предикатов.
83. Что называется аксиомой в логике предикатов? Каким образом задается область и система предикатов, удовлетворяющие системе аксиом?
84. Что называется интерпретацией системы аксиом?
85. Какая система аксиом называется содержательно противоречивой?
86. Какая система аксиом называется непротиворечивой?
87. Какую аксиому называют независимой от остальных аксиом системы? Какую аксиому называют зависимой от остальных аксиом системы?
88. Какая формула логики предикатов называется выполнимой; тождественно истинной?

89. Дать определение формулы исчисления предикатов.
90. Что называется коллизией переменных в исчислении предикатов?
91. Каким образом происходит замена переменных в формулах исчисления предикатов?
92. Перечислить аксиомы исчисления предикатов.
93. Сформулировать правила образования выводимых формул.
94. Какое исчисление предикатов называется противоречивым; непротиворечивым?
95. Как доказывается утверждение о том, что выводимым формулам исчисления предикатов соответствуют выводимые формулы исчисления высказываний?
96. В каком случае логическая система называется полной в узком смысле?
97. Сформулировать производное правило связывания кванторов для исчисления предикатов.
98. Сформулировать теорему дедукции для исчисления предикатов.
99. Какие формулы исчисления предикатов называют двойственными?
100. Какая формула исчисления предикатов называется нормальной?

Тема 2. Идеалы. Алгебры. Радикал кольца. Нётеровы кольца. Артиновы кольца

При подготовке к практическому занятию по данной теме необходимо особое внимание уделить основным понятиям и ключевым теоремам теории радикалов колец и ассоциативных алгебр.

На занятии по данной теме необходимо уметь отвечать на следующие вопросы:

1. Дать определение кольца. Какие кольца называются ассоциативными; коммутативными? Привести примеры колец.
2. Привести примеры колец с единицей и без единицы.
3. Какое кольцо называется целостным? Привести примеры целостных колец. Привести примеры колец с делителями нуля.

4. Какое кольцо называется телом? Привести примеры.
5. Какое кольцо называется полем? Привести примеры.
6. Что называется идемпотентом кольца? Привести примеры тривиальных и нетривиальных идемпотентов кольца. Какие идемпотенты кольца называются ортогональными?
7. Какие элементы кольца называются нильпотентными? Какое подмножество кольца называется нильпотентным? Что называется индексом нильпотентности?
8. Дать определение модуля над кольцом. Привести примеры.
9. Дать определение идеала кольца. Сформулировать основные свойства идеалов колец.
10. Дать определение гомоморфизма колец. Что называется ядром и образом гомоморфизма колец?
11. Что называется факторкольцом? Какой гомоморфизм называется каноническим? Сформулировать теорему о гомоморфизме колец.
12. Какой идеал кольца называется главным? Какое кольцо называется кольцом главных идеалов? Привести примеры колец главных идеалов.
13. Дать определение прямого произведения колец.
14. Показать, что множество эндоморфизмов абелевой группы образует кольцо.
15. Дать определение кольца частных.
16. Дать определение аннулятора модуля над кольцом R . Показать, что аннулятор $A(M)$ R -модуля M является двусторонним идеалом кольца R , а M является точным $R/A(M)$ -модулем. Показать, что $R/A(M)$ изоморфно подкольцу кольца эндоморфизмов $E(M)$.
17. Что называется централизатором кольца R на аддитивную группу M ?
18. Какой R -модуль M называется неприводимым?
19. Сформулировать лемму Шура.
20. Каково внутреннее описание всех неприводимых модулей над данным кольцом R ?
21. Дать определение радикала Джекобсона $J(R)$ кольца R .

22. Какой идеал кольца называется регулярным?
23. Каким образом радикал Джекобсона $J(R)$ представляется через максимальные регулярные правые идеалы кольца R ?
24. Дать определение право-квазирегулярного (лево-квазирегулярного) и правого (левого) квазиобратного элементов кольца. Какой идеал кольца называется право-квазирегулярным?
25. Какой идеал является единственным максимальным право-квазирегулярным правым идеалом в кольце?
26. Дать определение ниль-идеала кольца; нильпотентного идеала кольца. Какой из этих идеалов лежит в радикале Джекобсона $J(R)$?
27. Дать определение алгебры над полем. Отличаются ли радикал Джекобсона алгебры от радикала Джекобсона кольца? Ответ обосновать.
28. Каким будет радикал факторкольца $R/J(R)$?
29. Какое кольцо называется полупростым?
30. Дать определение артинова кольца. Привести примеры.
31. Какими свойствами обладает радикал Джекобсона артинова кольца?
32. Какими свойствами обладают идемпотенты артинова кольца?
33. Дать определение групповой алгебры. Сформулировать теорему Машке.
34. Какое кольцо называется кольцом без кручения?
35. Какое кольцо называется простым?
36. Сформулировать теорему о разложении полупростого артинова кольца в прямую сумму конечного числа простых артиновых колец.
37. Дать определение нётерова кольца. Сформулировать свойство одностороннего идеала в нётеровом справа кольце.
38. Какое кольцо называется примитивным? В каком случае примитивное кольцо полупросто? В каком случае примитивное кольцо становится полем?
39. Сформулировать теорему плотности.
40. Дать определение первичного кольца.
41. Какие примитивные кольца являются первичными?

42. Что называется центроидом кольца? Перечислить свойства центроида кольца.

43. Сформулировать теорему Веддебарна-Артина.

44. Дать определение первичного радикала кольца. Перечислить свойства первичного радикала колец.

Тема 3. Основные вопросы теории чисел

При подготовке к практическому занятию по данной теме необходимо уделить внимание наиболее трудным для обучающегося понятиям теории чисел. Далее приводится перечень вопросов, позволяющих подготовиться к практическому занятию по рассматриваемой теме.

1. Дать определение вычета/невывчета степени n по модулю p .

2. Перечислить свойства квадратичных вычетов по модулю p .

3. Дать определение символа Лежандра. Перечислить свойства символа Лежандра. Сформулировать квадратичный закон взаимности и перечислить основные этапы его доказательства.

4. Что называется показателем числа a по модулю m ? Перечислить свойства показателей.

5. Что называется первообразным корнем по модулю m ? По каким модулям существуют первообразные корни?

6. Что называется индексом числа a по модулю m при основании g ? Перечислить свойства индексов. По каким модулям существуют индексы?

7. Дать определение функции $\pi(x)$.

8. Дать определение функций Чебышева ϑ и ψ . Как связаны эти функции?

Как связаны функции $\frac{\pi(x)}{x / \log x}$, $\frac{\vartheta(x)}{x}$ и $\frac{\psi(x)}{x}$?

9. Сформулировать теорему Чебышева. Перечислить основные этапы доказательства теоремы. На основании теоремы Чебышева о расходимости какого ряда можно сделать вывод?

10. Сформулировать постулат Бертрана. Какие идеи используются при доказательстве постулата Бертрана?
11. Сформулировать асимптотический закон распределения простых чисел.
12. Дать определение дзета-функции Римана.
13. Сформулировать свойства дзета-функции Римана.
14. В какой области дзета-функция Римана не имеет нулей?
15. Записать тождество Эйлера о представлении дзета-функции Римана в виде бесконечного произведения по всем простым числам.
16. Каким образом осуществляется преобразование Абеля для дзета-функции Римана?
17. В какой области дзета-функция Римана имеет единственную особую точку, являющуюся полюсом первого порядка с вычетом 1?
18. Какая область является критической полосой дзета-функции Римана?
19. Дать определение характера конечной абелевой группы. Какими свойствами обладают характеры групп?
20. Что называется главным характером группы?
21. Дать определение характера для приведенных классов вычетов по модулю m . Привести примеры. Каким образом это определение переносится на множество целых чисел? Записать соотношения ортогональности.
22. Какой ряд называется рядом Дирихле? Какими свойствами обладает ряд Дирихле?
23. Что является областью сходимости ряда Дирихле? Что называется абсциссой сходимости; прямой сходимости; полуплоскостью сходимости ряда Дирихле?
24. Сформулировать теорему Ландау.
25. Что называется произведением рядов Дирихле?
26. Из какой теоремы следует, что представление функции рядом Дирихле единственно?
27. Что называется L -функциями Дирихле?
28. Сформулировать теорему Дирихле.

29. Дать определение суммы Гаусса.
30. Каким образом находится модуль суммы Гаусса?
31. Перечислить свойства сумм Гаусса.
32. Записать равенства, дающие полное описание величины сумм Гаусса.
33. Дать определение полной рациональной суммы.
34. Какие оценки для полных рациональных функций установлены?
35. Что называется полной рациональной тригонометрической суммой общего вида?
36. В чем заключается суть метода Морделла оценки тригонометрических сумм с простым знаменателем? Каким образом осуществляется оценка числа решений системы сравнений?
37. Какая последовательность дробных долей функций называется равномерно распределенной? Какая функция называется равномерно распределенной? Привести пример равномерно распределенной функции.
38. Сформулировать критерий Вейля равномерного распределения функции.
39. Каким образом распределены дробные доли линейной функции?
40. Сформулировать достаточное условие равномерного распределения функции.
41. Сформулировать теорему Вейля о распределении дробных долей многочленов произвольной степени $n \geq 1$.
42. Дать определение модулярной группы.
43. Какими элементами порождается модулярная группа?
44. Дать определение слабо модулярной функции веса $2k$, где k – целое число.
45. Выполнение каких соотношений необходимо и достаточно для того, чтобы мероморфная функция была слабо модулярной?
46. Какая функция называется модулярной?
47. Что называется модулярной формой? Какая форма является параболической?
48. Каким рядом задается модулярная форма веса $2k$?

49. Что называется решеткой в вещественном векторном пространстве конечной размерности?

50. Каким образом отождествляются модулярные функции веса $2k$ с некоторыми функциями решеток веса $2k$?

51. Что называется рядом Эйзенштейна индекса k ? Какими свойствами она обладает?

52. Сформулировать теорему о нулях и полюсах модулярной функции веса $2k$.

53. Сформулировать теорему о строении алгебры модулярных форм.

54. Дать определение чисел Бернулли B_k .

55. Каким образом числа Бернулли B_k используются для вычисления значений дзета-функции Римана?

56. Каким образом осуществляется разложение в ряды функций Эйзенштейна G_k ?

57. Сформулировать теорему Гекке.

58. Сформулировать теорему Якоби о разложении формы Δ .

59. Что называется функцией Рамануджана? Перечислить ее свойства. Какие разложения допускает функция Рамануджана?

60. Какие числа называются алгебраическими? Привести примеры.

61. Какие числа называются трансцендентными? Привести примеры.

62. Что называется степенью алгебраического числа?

63. Какой многочлен называется минимальным многочленом алгебраического числа?

64. Какие числа называются сопряженными с алгебраическим числом? Сформулируйте их свойства.

65. Какое алгебраическое число называется целым?

66. Каким образом осуществляется приближение действительных чисел рациональными? Сформулировать теорему Дирихле.

67. Сформулировать теорему Лиувилля. Каким образом на основании этой теоремы можно определить, является ли число трансцендентным?

Тема 4. Радикал алгебры Ли. Специальные алгебры Ли

При подготовке к практическому занятию по данной теме необходимо уделить внимание наиболее трудным для обучающегося понятиям теории алгебр Ли. Далее приводится перечень вопросов, позволяющих подготовиться к практическому занятию по рассматриваемой теме.

1. Дать определение алгебры. Какие алгебры называются ассоциативными? Привести примеры.

2. Дать определение алгебр Ли. Привести примеры.

3. Дать определение идеала алгебры. В каких алгебрах правые и левые идеалы совпадают?

4. Что называется квадратом алгебры? Показать, что для любой алгебры A ее квадрат является двусторонним идеалом, обладающим тем свойством, что факторалгебра A/A^2 тривиальна, причем это есть наименьший идеал с таким свойством.

5. Что называется производным рядом для алгебры A ?

6. Какая алгебра называется разрешимой? Что называется длиной алгебры?

7. Показать, что любая подалгебра и любой гомоморфный образ разрешимой алгебры являются разрешимыми.

8. Показать, что если для некоторого двустороннего идеала I в алгебре A обе алгебры I и A/I разрешимы, то разрешима и алгебра A .

9. Будет ли разрешимым идеалом сумма $I+J$, если I и J – разрешимые двусторонние идеалы некоторой алгебры?

10. Показать, что каждая конечномерная алгебра A обладает единственным наибольшим разрешимым двусторонним идеалом R . Существуют ли в алгебре A/R ненулевые разрешимые идеалы?

11. Что называется радикалом конечномерной алгебры Ли?

12. Какая алгебра называется полупростой?

13. Будет ли идеалом произведение двух идеалов алгебры Ли?

14. Показать, что если алгебра Ли не имеет ненулевых абелевых идеалов, то она не имеет ненулевых разрешимых идеалов.

15. Дать определение нижнего центрального ряда алгебры Ли.
16. Какая алгебра Ли называется нильпотентной? Что называется длиной нильпотентности?
17. Показать, что из нильпотентности алгебры Ли следует ее разрешимость.
18. Будет ли нильпотентным идеалом сумма $I+J$, если I и J – нильпотентные идеалы алгебры Ли?
19. Показать, что каждая конечномерная алгебра Ли A обладает единственным наибольшим нильпотентным идеалом.
20. Что называется множеством Ли в ассоциативном кольце? Сформулировать свойства множества Ли.
21. Что называется представлением алгебры Ли L над полем F ?
22. Какое представление алгебры Ли называется точным?
23. Какое представление алгебры Ли называется неприводимым?
24. Какое представление алгебры Ли называется регулярным (присоединенным)? Что является его ядром?
25. Что называется характеристическим идеалом алгебры Ли?
26. Будет ли $[I, J]$ идеалом алгебры Ли, если I и J – идеалы алгебры Ли?
27. Будет ли $[I, J]$ характеристическим идеалом алгебры Ли, если I и J – характеристические идеалы алгебры Ли?
28. Что называется нильпотентным радикалом алгебры Ли?
29. Какая алгебра называется PI -алгеброй? Привести примеры.
30. Дать определение специальной алгебры Ли. Привести примеры.
31. Какая алгебра называется присоединенной ассоциативной алгеброй к алгебре Ли?
32. Если L – специальная алгебра Ли, то будет ли присоединенная ассоциативная алгебра к алгебре Ли L ассоциативной PI -алгеброй?
33. Какая алгебра Ли называется обобщенно-специальной?
34. Какая алгебра Ли называется локально разрешимой? Будет ли сумма локально разрешимых идеалов бесконечномерной алгебры Ли локально разрешимым идеалом? Привести пример.

35. Дать определение первичной специальной алгебры Ли. Привести пример.
36. Дать определение первичного идеала алгебры Ли.
37. Что называется первичным идеалом алгебры Ли.
38. Какой элемент алгебры Ли называется строго разрешимым? Показать, что первичный радикал алгебры Ли L над полем F совпадает со множеством всех ее строго разрешимых элементов.
39. Дать определение полупервичной алгебры Ли. Показать, что алгебра Ли L над полем является полупервичной тогда и только тогда, когда ее первичный радикал равен нулю.
40. Дать определение слабо разрешимой алгебры Ли.
41. Каким образом для алгебр Ли можно определить верхний и нижний слабо разрешимые радикалы?
42. Каким образом соотносятся первичный и нижний слабо разрешимый радикалы алгебры Ли над полем?
43. Является ли первичный радикал произвольной алгебры Ли L над полем характеристики нуль характеристическим?
44. Каким образом соотносятся локально разрешимый радикал с верхним и нижним слабо разрешимыми радикалами любой обобщенно специальной алгебры Ли L ?
45. Привести пример алгебры Ли, первичный радикал которой не является локально разрешимым.
46. Дать определение локально разрешимого радикала алгебры Ли.
47. Каким образом соотносятся первичный, слабо разрешимый и локально разрешимый радикалы для обобщенно специальных алгебр Ли?
48. В каком случае говорят, что радикал удовлетворяет *IDS* свойству? Какие радикалы обобщенно специальных алгебр Ли над полем F и при каких условиях удовлетворяют *IDS* свойству?
49. Что называется *PI*-представлением алгебры Ли L ?
50. Что называется локально нильпотентным радикалом обобщенно специальной алгебры Ли L над полем F ?

51. Какая обобщенно специальная алгебра Ли L называется локально нильпотентно полупростой?
52. Каким образом соотносятся нильпотентный радикал и радикал Джекобсона конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль?
53. Привести пример специальной алгебры Ли L , локально нильпотентный радикал которой строго содержится в радикале Джекобсона?
54. Что называется неприводимо представленным радикалом алгебры Ли?
55. Что называется PI -неприводимо представленным радикалом алгебры Ли?
56. Что называется конечно неприводимо представленным радикалом алгебры Ли?
57. Каким образом соотносятся локально нильпотентный радикал специальной алгебры Ли и неприводимо представленные радикалы?

6 Реферат

Тема реферата либо выбирается обучающимся по программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01 Математика и механика самостоятельно из примерного перечня тем, либо предлагается инициативная тема с обоснованием её выбора. В любом случае важно, чтобы в дальнейшем материалы и результаты реферата можно было использовать при подготовке к кандидатскому экзамену по дисциплине «Математическая логика, алгебра и теория чисел», а также при написании научной квалификационной работы.

Далее приводятся **примерные формулировки тем рефератов.**

1. Приложения алгебраических структур в физике, комбинаторных задачах оптимизации и обработке сигналов.
2. Теория Галуа.
3. Модули.
4. Структурная теория колец.
5. Радикалы колец.
6. Дзета-функция Римана.
7. Тензорные произведения представлений и модулей.
8. Проблема равенства классов сложности P и NP .
9. Модулярная группа и модулярные функции.
10. Аксиоматическая теория множеств.

При подготовке реферата предполагается использование различных источников по выбранной теме, в том числе опубликованных в периодической печати. Допускается использование статей, обзоров, материалов из сети Интернет, монографий.

Реферат имеет следующую структуру:

1. Введение.
2. Основная часть, разбитая на разделы.
3. Заключение, содержащее выводы.

4. Список использованных источников.

Критерии оценки реферата

Реферат оценивается в 5 баллов, если выполнены следующие требования:

- план реферата соответствует теме реферата;
- содержание реферата соответствует теме и плану реферата;
- основные понятия и теоремы рассмотрены полностью;
- изложенный материал структурирован;
- список использованной литературы состоит не менее, чем из 10 источников, среди которых есть публикации за последние 5 лет;
- выполнены требования к оформлению реферата;
- отсутствуют орфографические и синтаксические ошибки, стилистические погрешности;
- реферат сдан не позднее, чем за 10 дней до его защиты;
- защита реферата выполнена по следующим критериям:
 - количество слайдов соответствует содержанию и продолжительности выступления;
 - наличие титульного слайда и слайда с выводами;
 - иллюстрации хорошего качества, с четким изображением, текст легко читается;
 - используются средства наглядности информации (таблицы, схемы, графики и т.д.);
 - оформление слайдов соответствует теме, не препятствует восприятию содержания;
 - для всех слайдов презентации используется один и тот же шаблон оформления;
 - презентация содержит полную, понятную информацию по теме работы;

- презентация не содержит орфографических и пунктуационных ошибок;
- выступающий свободно владеет содержанием, ясно и грамотно излагает материал;
- выступающий свободно и корректно отвечает на вопросы и замечания аудитории;
- выступающий точно укладывается в рамки регламента.

Реферат оценивается в 4 балла, если не выполнены до 3 требований, перечисленных в критериях оценки в 5 баллов.

Реферат оценивается в 3 балла, если не выполнены до 5 требований, перечисленных в критериях оценки в 5 баллов.

Реферат оценивается в 1-2 балла, если не выполнены 5 и более требований, перечисленных в критериях оценки в 5 баллов.

7 Индивидуальное творческое задание

Индивидуальное творческое задание по дисциплине «Математическая логика, алгебра и теория чисел» формулируется научным руководителем обучающегося. Индивидуальное творческое задание должно быть связано с темой научной квалификационной работы.

Например, для темы научной квалификационной работы «Классические радикалы артиновых и нётеровых алгебр Ли» творческие задания могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) представить генезис понятия радикала для колец и алгебр;
- 2) проанализировать определения радикалов для алгебр Ли;
- 3) провести анализ методов решения задач о разрешимости радикалов алгебр Ли;
- 4) провести сравнительный анализ свойств радикалов специальных классов алгебр Ли;
- 5) провести анализ свойств первичного радикала градуированных Ω -групп.

При выполнении индивидуального творческого задания предполагается использование различных источников по выбранной теме, опубликованных в периодической печати. Допускается использование статей, обзоров, материалов из сети Интернет, монографий.

В основной текст готовой работы творческого задания должны быть включены следующие элементы, соответствующие последовательным этапам исследования:

1. Цель исследования и ее актуальность, основные задачи исследования и период исследования.
2. Описание предмета и объекта исследования.
3. Описание математических понятий и свойств, применяемых в изучении объекта исследования.
4. Интерпретация собранной по теме информации на основе нормативных теоретических знаний, полученных обучающимся в результате всего предшествующего обучения.

5. Обобщающее заключение по теме творческого задания в целом с выделением основных полученных выводов.

6. Список использованной литературы.

Объем основного текста работы должен составлять 15 – 20 страниц.

Задание оформляется в печатном и электронном варианте.

Критерии оценки индивидуальных творческих заданий

Задание считается выполненным и оценивается в 5 баллов, если выполнены 95%-100% условий и требований, сформулированных в ней.

Задание считается выполненным и оценивается в 4 балла, если выполнены 70%-94% условий и требований, сформулированных в ней.

Задание считается выполненным и оценивается в 3 балла, если выполнены 40%-70% условий и требований, сформулированных в ней.

Задание считается выполненным и оценивается в 1-2 балла, если выполнены менее 40% условий и требований, сформулированных в ней.

8 Дифференцированный зачет

Дифференцированный зачет проводится по билетам, которые включают два вопроса. Список вопросов уточняется из перечня тем для самостоятельного освоения дисциплины, изученных обучающимся самостоятельно (см. пункт 4). Количество тем, подготовленных к дифференцированному зачету должно быть не меньше 25. Обучающийся сообщает преподавателю перечень изученных тем, на основании которых составляются билеты. Дифференцированный зачет проводится по билетам в устной и письменной форме. При необходимости после проверки письменной работы преподавателю, принимающему зачет, предоставляется право задавать обучающемуся дополнительные вопросы, а также помимо теоретических вопросов давать задачи и практические задания. Оценка уровня знаний на дифференцированном зачёте предполагает использование балльной системы оценки: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка знаний обучающихся производится по следующим критериям:

– оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил программный материал дисциплины, исчерпывающе, последовательно, чётко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами и вопросами, причём, не затрудняется с ответами при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приёмами выполнения практических задач;

– оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он твёрдо знает материал дисциплины, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос (т.е. четко и грамотно формулирует основные определения понятий и теоремы, доказывает их, но при доказательстве может допускать некоторые неточности), правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приёмами их выполнения;

– оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности,

недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических задач (т.е. формулирует основные определения понятий и теоремы, не усвоив их доказательства; умеет решать шаблонные задачи, но испытывает трудности при видоизменении их условий и т.д.);

– оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, например, не усвоен полностью раздел дисциплины, или не усвоены основные понятия программного материала, т.е. допускает существенные ошибки при формулировке определений понятий и теорем или вообще их не может определить и сформулировать, неуверенно, с большими затруднениями решает практические задачи или не справляется с ними самостоятельно.

9 Кандидатский экзамен

Кандидатские экзамены являются формой промежуточной аттестации при освоении программ подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре.

Кандидатские экзамены позволяют оценить степень усвоения теоретических знаний и компетенций, уровень творческого мышления, навыков самостоятельной работы, умения анализировать полученные знания и применять их в решении практических задач.

Кандидатский экзамен по специальной дисциплине сдается по программе, состоящей из двух частей: типовой программы-минимум по специальности, разрабатываемой ведущими в соответствующей отрасли высшими учебными заведениями и научными учреждениями, организациями и дополнительной программы, разрабатываемой кафедрой алгебры и дискретной математики Оренбургского государственного университета. Дополнительная программа должна включать новые разделы, связанные с направлением исследований обучающегося (аспиранта), а также учитывать последние достижения в данной отрасли науки и новейшую литературу. Программу по кандидатскому экзамену можно найти на сайте Оренбургского государственного университета в разделе «Аспиранту и докторанту».

Экзамены проводятся по билетам в устной и письменной форме. При необходимости после проверки письменной работы экзаменатору предоставляется право задавать обучающимся дополнительные вопросы, а также помимо теоретических вопросов давать задачи и практические задания по программе данного курса. Оценка уровня знаний на экзаменах предполагает использование балльной системы оценки: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Оценка знаний обучающихся производится по следующим критериям:

– оценка «отлично» выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил программный материал дисциплины, исчерпывающе, последовательно, чётко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой,

свободно справляется с задачами и вопросами, причём, не затрудняется с ответами при видоизменении заданий, правильно обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приёмами выполнения практических задач;

– оценка «хорошо» выставляется обучающемуся, если он твёрдо знает материал дисциплины, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос (т.е. четко и грамотно формулирует основные определения понятий и теоремы, доказывает их, но при доказательстве может допускать некоторые неточности), правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приёмами их выполнения;

– оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических задач (т.е. формулирует основные определения понятий и теоремы, не усвоив их доказательства; умеет решать шаблонные задачи, но испытывает трудности при видоизменении их условий и т.д.);

– оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значительной части программного материала, например, не усвоен полностью раздел дисциплины, или не усвоены основные понятия программного материала, т.е. допускает существенные ошибки при формулировке определений понятий и теорем или вообще их не может определить и сформулировать, неуверенно, с большими затруднениями решает практические задачи или не справляется с ними самостоятельно.

Далее приведен **перечень вопросов кандидатского экзамена**, составленного на основе программы кандидатского экзамена:

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу. Тезис Чёрча.

2. Понятие алгоритма и его уточнения. Частично рекурсивные функции.

3. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные (разрешимые) множества. Их свойства.

4. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества.

5. Алгоритмические проблемы. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.

6. Классы P и NP . Полиномиальная сводимость и NP -полные задачи.

7. Теорема об NP -полноте задачи «ВЫПОЛНИМОСТЬ».

8. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

9. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

10. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.

11. Исчисление предикатов. Непротиворечивость.

12. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.

13. Полнота исчисления предикатов.

14. Теорема Мальцева о компактности.

15. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.

16. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.

17. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).

18. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.

19. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.

20. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики.

21. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для логики предикатов.

22. Аксиоматическая теория множеств.
23. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.
24. Теоремы Силова.
25. Простота группы A_n , $n \geq 5$.
26. Простота группы SO_3 .
27. Евклидовы кольца — кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов.
28. Основные понятия теории модулей: теорема о гомоморфизме; свободные модули; циклические модули над кольцом главных идеалов.
29. Теорема о строении конечно порожденных модулей над евклидовым кольцом.
30. Следствия основной теоремы о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом для групп и линейных операторов.
31. Свободные группы и определяющие соотношения. Подгруппы свободных групп.
32. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
33. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
34. Радикал кольца, его нильпотентность в артиновых кольцах.
35. Теорема плотности. Простые и полупростые кольца с условием минимальности.
36. Группа Брауэра.
37. Теорема Фробениуса об алгебрах с делением.
38. Нётеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
39. Разрешимые алгебры Ли. Теорема Ли. Примеры простых алгебр Ли.
40. Теорема Биркгофа-Витта.
41. Основные понятия теории линейных и матричных представлений: приводимость; изоморфизм; гомоморфизм.
42. Теорема Машке. Лемма Шура.

43. Регулярное представление. Кратность неприводимого представления.
44. Неприводимые представления абелевых групп. Одномерные представления.
45. Характеры представлений, их свойства. Следствия соотношения ортогональности.
46. Доказательство соотношений ортогональности.
47. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Примеры многообразий для основных алгебраических структур.
48. Теорема Биркгофа.
49. Решетки. Дедекиндовы решетки. Решетки идеалов в кольцах и нормальных подгрупп в группах.
50. Дистрибутивные решетки и булевы алгебры. Теорема Стоуна.
51. Квадратичный закон взаимности.
52. Первообразные корни и индексы.
53. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
54. Дзета-функция Римана и ее простейшие свойства в области $\text{Re } s > 1$ (аналитичность, представление производной и логарифмической производной в виде ряда Дирихле, отсутствие нулей, тождество Эйлера).
55. Аналитическое представление дзета-функции.
56. Отсутствие нулей у дзета-функции на прямой $\text{Re } s = 1$.
57. Оценка логарифмической производной $\zeta(s)$ в области $1 \leq \text{Re } s \leq 2, |\text{Im } s| \geq 3$.
58. Сведение доказательства асимптотического закона к асимптотике комплексного интеграла.
59. Асимптотика комплексного интеграла в доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел.
60. Характеры Дирихле и их простейшие свойства.
61. L -функции Дирихле суммы характеров.
62. Доказательство утверждения $L(1, \chi) \neq 0$.
63. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
64. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы.

65. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
66. Критерий Вейля равномерного распределения.
67. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
68. Модулярная группа.
69. Ряды Эйзенштейна. Разложения в ряд Фурье.
70. Модулярные формы. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
71. Модулярный инвариант, поле модулярных функций.
72. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
73. Приближение вещественных чисел рациональными числами. Теорема Дирихле.
74. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
75. Трансцендентность числа e .
76. Трансцендентность π .
77. Модули. Неприводимые модули. Лемма Шура.
78. Радикал Джекобсона.
79. Первичный радикал ассоциативного кольца.
80. Артиновы кольца. Теорема Веддербёрна-Артина.
81. Теорема плотности Джекобсона.
82. PI -алгебры. Теорема Капланского.
83. Теорема Познера о первичных PI -алгебрах.
84. Алгебры Ли. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Теорема Ли.
85. Полупростые конечномерные алгебры Ли. Теорема Леви-Мальцева.
86. Теорема Адо-Ивасава.
87. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли.
88. Свободная алгебра Ли. Базисы свободной алгебры Ли.
89. Подалгебры свободных алгебр Ли.
90. Специальные алгебры Ли. Доказать, что присоединенная алгебра специальной алгебры Ли является PI -алгеброй.
91. Первичный радикал обобщенно специальных алгебр Ли.

92. Теорема Ю.А. Бахтурина о конечно-порожденных почти разрешимых алгебрах Ли над полем характеристики нуль.