

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра механики материалов, конструкций и машин

Н.А. Морозов

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Методические указания

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.04.01 Машиностроение, 20.04.01 Техносферная безопасность

Оренбург
2019

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7
М 80

Рецензент – кандидат технических наук А.А. Гаврилов

М 80 **Морозов, Н.А.**
Исследование динамики механической системы: методические указания / Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 18 с.

Методические указания содержат варианты заданий и пример решения задачи по исследованию динамики механической системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Методические указания предназначены для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся направлений подготовки 15.04.01 Машиностроение, 20.04.01 Техносферная безопасность по дисциплине «Динамика механических систем», а также будут полезны для самостоятельной работы и практических занятий обучающихся по техническим направлениям бакалавриата и магистратуры.

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7

© Морозов Н.А., 2019
© ОГУ, 2019

Содержание

1 Краткие теоретические сведения.....	4
2 Постановка задачи и исходные данные	7
3 Пример выполнения задачи	11
4 Вопросы и задания для самоконтроля	17
Список использованных источников	18

1 Краткие теоретические сведения

Для обучающихся по направлению подготовки 15.04.01 Машиностроение результаты освоения материала, представленного в методических указаниях, ориентированы на формирование компетенций ОПК-14 (обладать способностью выбирать аналитические и численные методы при разработке математических моделей машин, приводов, оборудования, систем, технологических процессов в машиностроении) и ПК-9 (обладать способностью разрабатывать физические и математические модели исследуемых машин, приводов, систем, процессов, явлений и объектов, относящихся к профессиональной сфере, разрабатывать методики и организовывать проведение экспериментов с анализом их результатов), для обучающихся по направлению подготовки 20.04.01 Техносферная безопасность – ОПК-5 (обладать способностью моделировать, упрощать, адекватно представлять, сравнивать, использовать известные решения в новом приложении, качественно оценивать количественные результаты, их математически формулировать).

Для исследования движения механической системы применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной и второй дифференциальной формах [1]:

$$T_k - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{z=1}^l A_z^i, \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e + \sum_{z=1}^l N_z^i, \quad (2)$$

где T_k , T_0 и T – кинетическая энергия системы в конечном, начальном и произвольном положениях соответственно, Дж;

A_k^e – работа k -ой внешней силы, Дж;

A_z^i – работа z -ой внутренней силы, Дж;

N_k^e – мощность k -ой внешней силы, Вт;

N_z^i – мощность z -ой внутренней силы, Вт;

n – количество внешних сил, действующих на систему;

l – количество внутренних сил, действующих на систему;

t – время, с.

Если в какой-то момент времени система находится в покое, то кинетическая энергия системы в данный момент будет равна нулю.

Кинетическая энергия механической системы в произвольном положении равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = \sum_{j=1}^s T_j, \quad (3)$$

где T_j – кинетическая энергия j -го тела механической системы, Дж;

s – количество тел, образующих систему.

Таким образом, для нахождения кинетической энергии механической системы в произвольном положении необходимо определить для данного момента времени кинетическую энергию каждого тела, входящего в систему. Кинетические энергии тел системы выражаются через инерционные и кинематические характеристики тел и определяются для поступательного вращательного движений по формулам:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}, \quad (4)$$

$$T = \frac{I_x \cdot \omega^2}{2}, \quad (5)$$

где m – масса тела, кг;

I_x – момент инерции тела относительно оси вращения, кг·м²;

v – скорость тела, м/с;

ω – угловая скорость вращения тела, рад/с.

Осевые моменты инерции тел ступенчатой формы выражаются через радиус инерции i_x [2]:

$$I_x = m \cdot i_x^2. \quad (6)$$

Если масса тела равномерно распределена по его ободу (кольцо, обруч или тонкостенный цилиндр), осевой момент инерции тела определяется по формуле:

$$I_x = m \cdot R^2, \quad (7)$$

где R – радиус тела, м.

Для однородного диска или цилиндра осевой момент инерции равен:

$$I_x = \frac{m \cdot R^2}{2}. \quad (8)$$

Работы сил определяются по формуле:

$$A = \int dA, \quad (9)$$

где dA – элементарная работа силы, Дж.

Элементарная работа силы F в естественной форме имеет вид:

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos \alpha, \quad (10)$$

где dS – элементарное перемещение точки приложения силы, м;

α – угол между вектором силы и касательной к траектории точки приложения силы, рад.

Работу силы тяжести тела можно вычислить, используя формулу [1]:

$$A(m\bar{g}) = \pm mg \cdot h_C, \quad (11)$$

где h_C – высота, на которую переместился центр тяжести тела, м.

В данной формуле используется знак «+», если центр тяжести тела опускается, знак «-» – если он поднимается.

Мощность силы F выражается формулой:

$$N = \frac{dA}{dt} = F \cdot v \cdot \cos \alpha, \quad (12)$$

где v – скорость точки приложения силы, м/с.

Если механическая система является неизменяемой, то есть расстояние между двумя любыми точками системы остается постоянным в течение времени движения системы, то суммы работ и мощностей внутренних сил будут равны нулю, и уравнения (1) и (2) примут вид:

$$T_k - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e, \quad (13)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n N_k^e. \quad (14)$$

2 Постановка задачи и исходные данные

Задание выбирается в соответствии с номером варианта, выданного преподавателем. Номер варианта выдается в виде трехзначного числа. Последняя цифра числа соответствует номеру схемы механической системы (схемы к задачам представлены на рисунках 1 и 2). Необходимые для решения задачи исходные данные выбираются в соответствии с первой и второй цифрами номера варианта по таблицам 1 и 2.

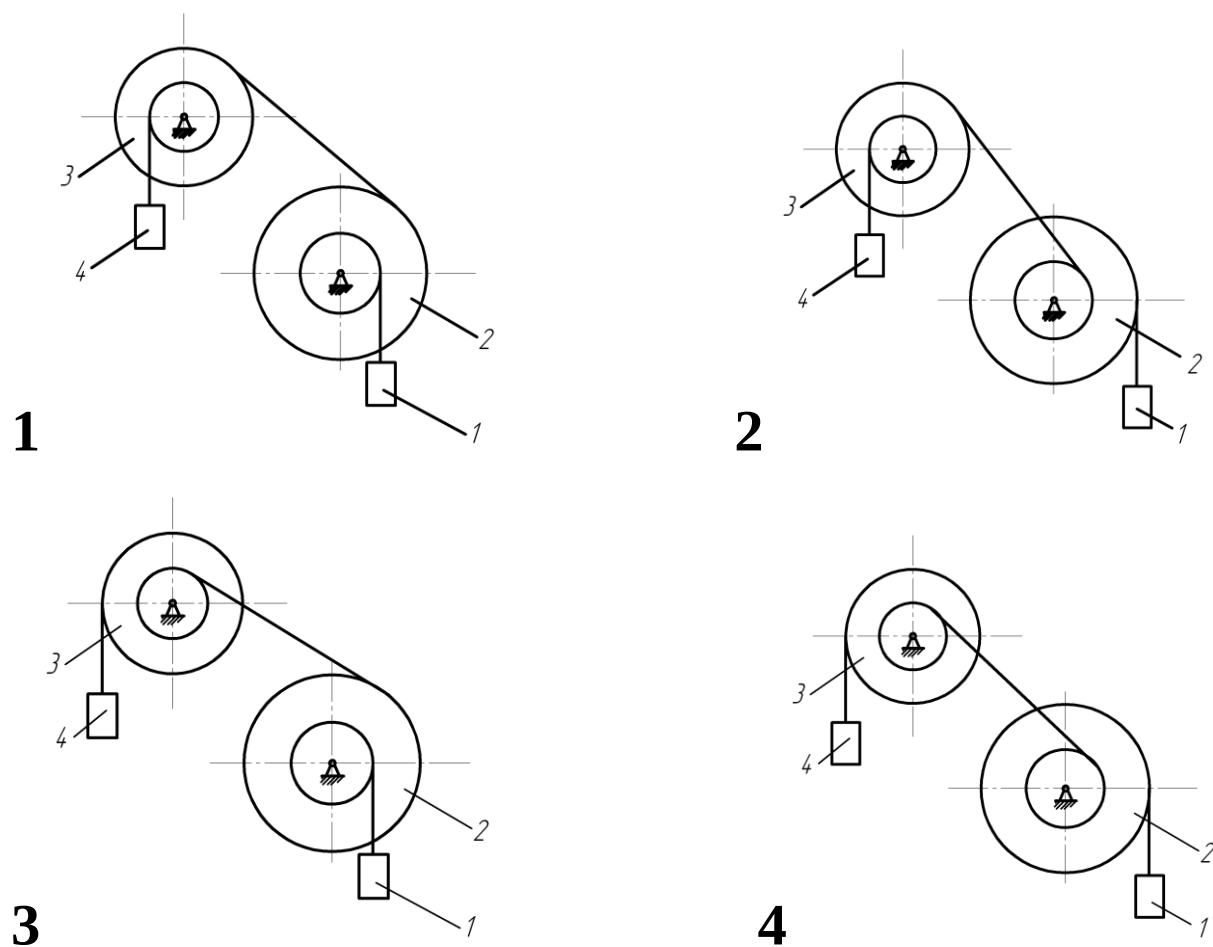


Рисунок 1 – Схемы механических систем

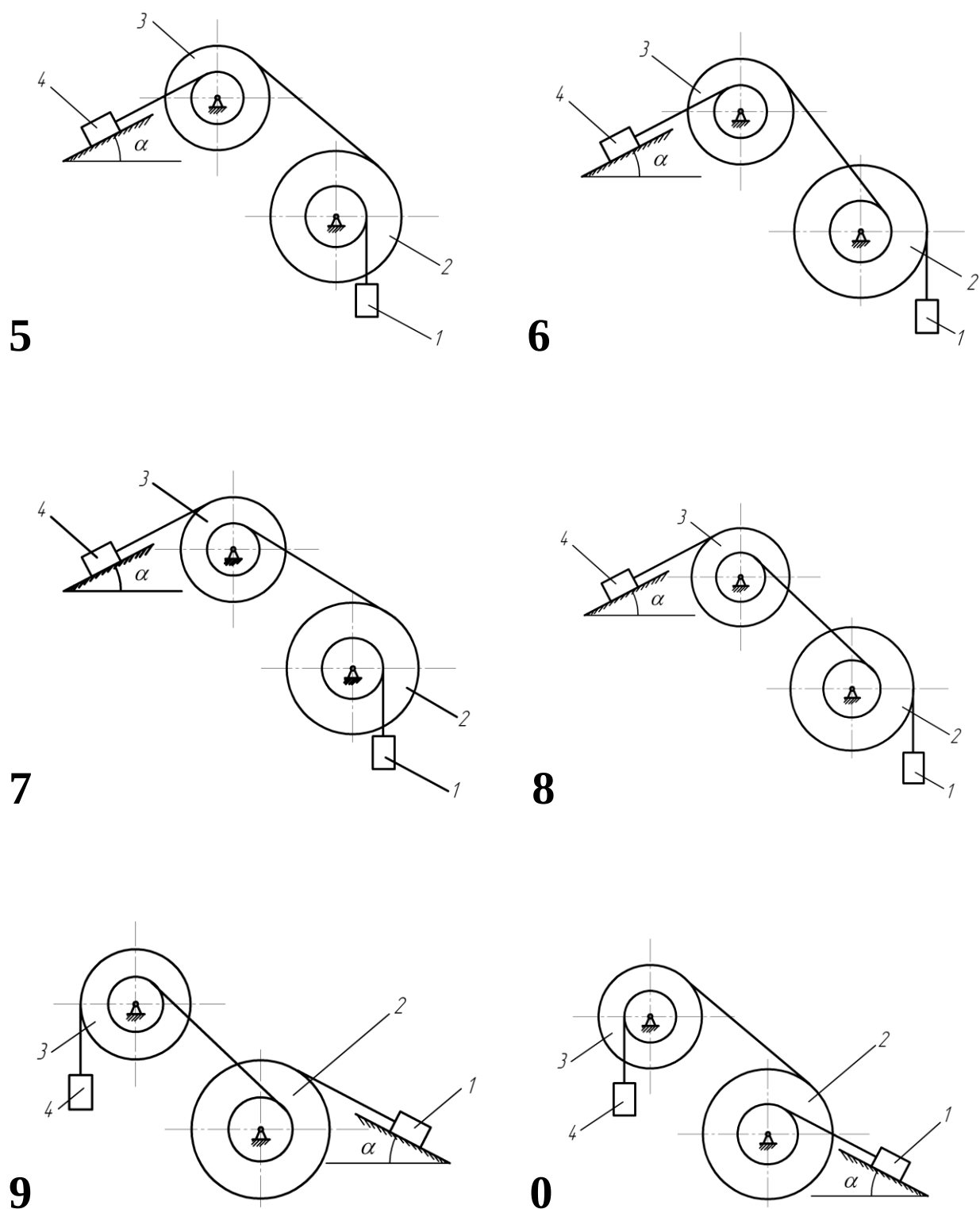


Рисунок 2 – Схемы механических систем

Механическая система, состоящая из двух грузов (1 и 4) и двух блоков (2 и 3), связанных невесомыми нитями, начинает двигаться из состояния по-

коя под действием сил тяжести. Массы тел соответственно равны m_1 , m_2 , m_3 и m_4 . Блоки имеют ступенчатую форму, радиусы инерции блоков равны i_2 и i_3 , радиусы ступеней – R_2 , R_3 , r_2 и r_3 . На схемах 5, 6, 7, 8, 9, 0 один из грузов движется по гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Соппротивлением подшипников вращению блоков пренебречь.

Для заданной механической системы определить зависимость между скоростью груза 1 и его перемещением, а также ускорение груза 1. Построить график зависимости скорости груза 1 от его перемещения.

Таблица 1 – Исходные данные, соответствующие первой цифре варианта

Параметр	Первая цифра варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°	30°	45°	60°	30°
$\frac{i_2}{r_2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
$\frac{i_3}{r_3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{R_2}{r_2}$	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
$\frac{R_3}{r_3}$	2	3	3	2	2	3	3	2	2	3

Таблица 2 – Исходные данные, соответствующие второй цифре варианта

Параметр	Вторая цифра варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
m_1	19 т	26 т	21 т	13 т	12 т	24 т	20 т	17 т	23 т	19 т
m_2	7 т	3 т	4 т	18 т	9 т	22 т	15 т	5 т	т	9 т
m_3	11 т	17 т	8 т	15 т	4 т	2 т	3 т	18 т	9 т	8 т
m_4	0,7 т	т	0,8 т	0,6 т	0,5 т	0,9 т	т	0,7 т	0,8 т	0,9 т

3 Пример выполнения задачи

Механическая система, состоящая из двух грузов (1 и 4) и двух блоков (2 и 3), связанных невесомыми нитями, начинает двигаться из состояния покоя под действием сил тяжести (рисунок 3). Массы тел соответственно равны $m_1 = 22m$, $m_2 = 6m$, $m_3 = 14m$ и $m_4 = m$. Блоки имеют ступенчатую форму, радиусы инерции блоков равны i_2 и i_3 , малые и большие радиусы ступеней - R_2 , R_3 , r_2 и r_3 , причем $i_2 / r_2 = \sqrt{3}$, $i_3 / r_3 = \sqrt{2}$, $R_2 / r_2 = 2$, $R_3 / r_3 = 3$. Грузы движутся по гладким наклонным плоскостям, расположенной под углами $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ к горизонту. Соппротивлением подшипников вращению блоков пренебречь.

Для заданной механической системы определить зависимость между скоростью груза 1 и его перемещением, а также ускорение груза 1. Построить график зависимости скорости груза 1 от его перемещения.

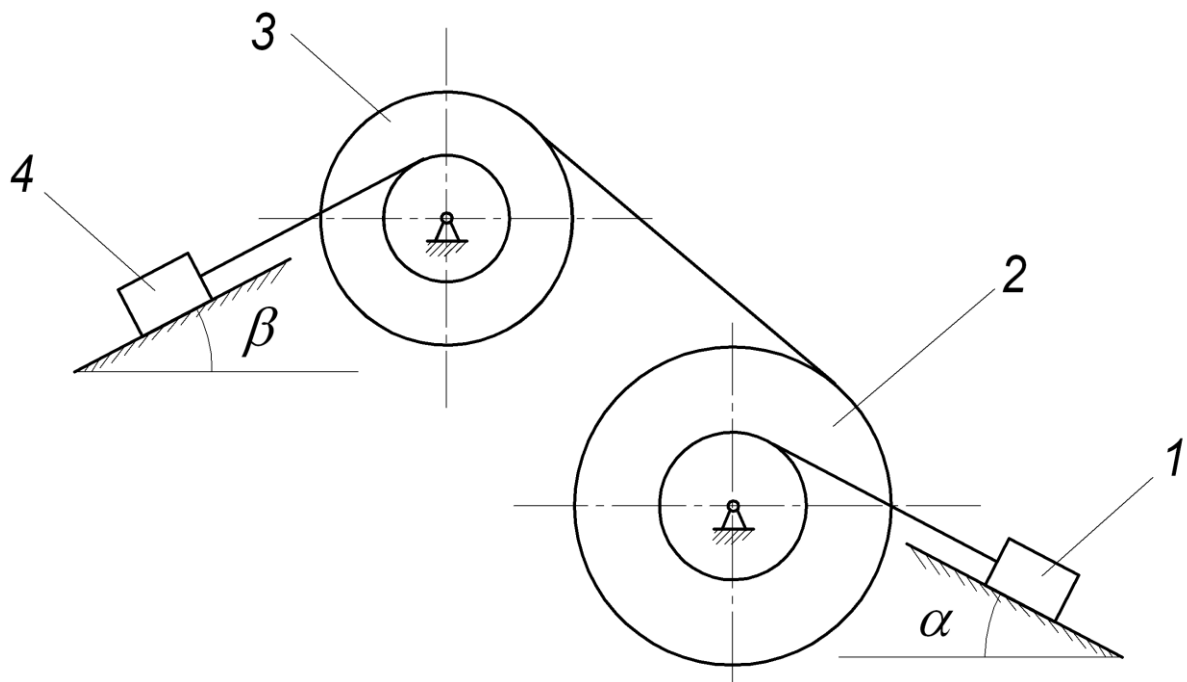


Рисунок 3 – Механическая система

Дано: $m_1 = 22m$, $m_2 = 6m$, $m_3 = 14m$, $m_4 = m$, $i_2 / r_2 = \sqrt{3}$, $i_3 / r_3 = \sqrt{2}$,
 $R_2 / r_2 = 2$, $R_3 / r_3 = 3$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Найти: $v_1 = f(S_1)$, a_1 .

Решение:

1) Изобразим механическую систему в произвольном положении, покажем скорости и угловые скорости тел, выразим скорости и угловые скорости тел через скорость груза 1 (рисунок 4).

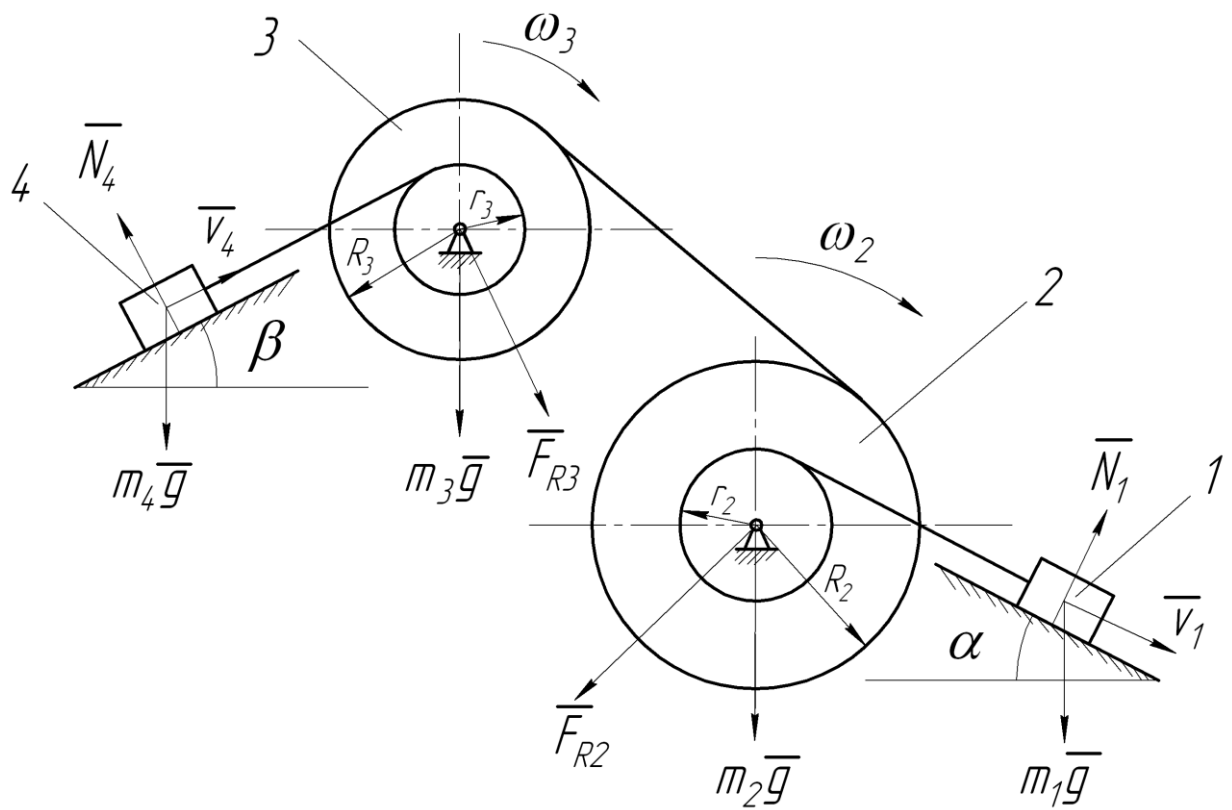


Рисунок 4 – Механическая система в произвольном положении

Угловая скорость блока 2:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}.$$

Угловая скорость блока 3:

$$\omega_3 = \frac{v_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} = \frac{2v_1}{R_3}.$$

Скорость груза 4:

$$v_4 = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{2v_1 \cdot r_3}{R_3} = \frac{2v_1}{3}.$$

2) Используя исходные данные, полученные кинематические зависимости и формулы (3), (4), (5) и (6), выразим кинетическую энергию механической системы через скорость груза 1:

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2},$$

$$T_2 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot i_2^2}{2} \left(\frac{v_1}{r_2} \right)^2 = \frac{3m_2 \cdot v_1^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{I_3 \cdot \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 \cdot i_3^2}{2} \left(\frac{2v_1}{R_3} \right)^2 = \frac{2m_3 \cdot i_3^2 \cdot v_1^2}{(3r_3)^2} = \frac{4m_3 \cdot v_1^2}{9},$$

$$T_4 = \frac{m_4 \cdot v_4^2}{2} = \frac{m_4}{2} \left(\frac{2v_1}{3} \right)^2 = \frac{2m_4 \cdot v_1^2}{9},$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = v_1^2 \left(\frac{m_1}{2} + \frac{3m_2}{2} + \frac{4m_3}{9} + \frac{2m_4}{9} \right),$$

$$T = v_1^2 \left(\frac{22m}{2} + \frac{3 \cdot 6m}{2} + \frac{4 \cdot 14m}{9} + \frac{2m}{9} \right) = 26,44m \cdot v_1^2.$$

3) Тела, входящие в систему, являются абсолютно твердыми, нити – нерастяжимыми, следовательно, данная механическая система является неизменяемой. Покажем внешние силы, действующие на систему (рисунок 4). Активные силы: $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, $m_3\bar{g}$, $m_4\bar{g}$. Пассивные силы: нормальные реакции опор $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_4$, реакции неподвижных цилиндрических шарниров $\bar{F}_{R2}$ и $\bar{F}_{R3}$. Используя формулы (9), (10) и (11), определим сумму работ внешних сил, выразив ее через перемещение груза 1.

$$A(m_1\bar{g}) = m_1g \cdot h_1 = m_1g \cdot S_1 \cdot \sin\alpha,$$

$$A(m_4\bar{g}) = -m_4g \cdot h_4 = -m_4g \cdot S_4 \cdot \sin\beta.$$

Найдем зависимость между перемещениями грузов:

$$v_4 = \frac{2v_1}{3} \rightarrow \frac{dS_4}{dt} = \frac{2dS_1}{3dt} \rightarrow \int dS_4 = \int \frac{2dS_1}{3} \rightarrow S_4 = \frac{2S_1}{3}.$$

Следовательно:

$$A(m_4\bar{g}) = -m_4g \cdot \frac{2}{3} S_1 \cdot \sin\beta.$$

Работы остальных внешних сил равны нулю, так как силы $m_2\bar{g}$, $m_3\bar{g}$, $\bar{F}_{R2}$ и $\bar{F}_{R3}$ приложены в неподвижных точках, а силы $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_4$ перпендикулярны перемещениям точек своего приложения. Сумма работ внешних сил:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = m_1 g \cdot S_1 \cdot \sin \alpha - m_4 g \cdot \frac{2}{3} S_1 \cdot \sin \beta = g S_1 (m_1 \cdot \sin \alpha - m_4 \cdot \frac{2}{3} \sin \beta),$$

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = 10,42 g S_1 \cdot m.$$

4) Применив интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем (формула (13)), получим зависимость скорости груза 1 от его перемещения:

$$26,44 m \cdot v_1^2 = 10,42 g S_1 \cdot m,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10,42 g S_1}{26,44}} = \sqrt{\frac{10,42 \cdot 9,81 \cdot S_1}{26,44}} = 1,97 \sqrt{S_1}.$$

5) Для определения ускорения груза 1 воспользуемся дифференциальной формой теоремы об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем (формула (14)).

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d(26,44 m \cdot v_1^2)}{dt} = 26,44 m \cdot 2 v_1 \cdot a_1 = 52,88 m \cdot v_1 \cdot a_1,$$

$$\sum_{k=1}^n N_k^e = \frac{d(10,42 g S_1 \cdot m)}{dt} = 10,42 g \cdot v_1 \cdot m,$$

$$52,88 m \cdot v_1 \cdot a_1 = 10,42 g \cdot v_1 \cdot m,$$

$$a_1 = \frac{10,13 g}{52,88} = \frac{10,42 \cdot 9,81}{52,88} = 1,93 \text{ м/с}.$$

6) С помощью системы Mathcad построим график зависимости между скоростью груза 1 и его перемещением (рисунок 5) [3].

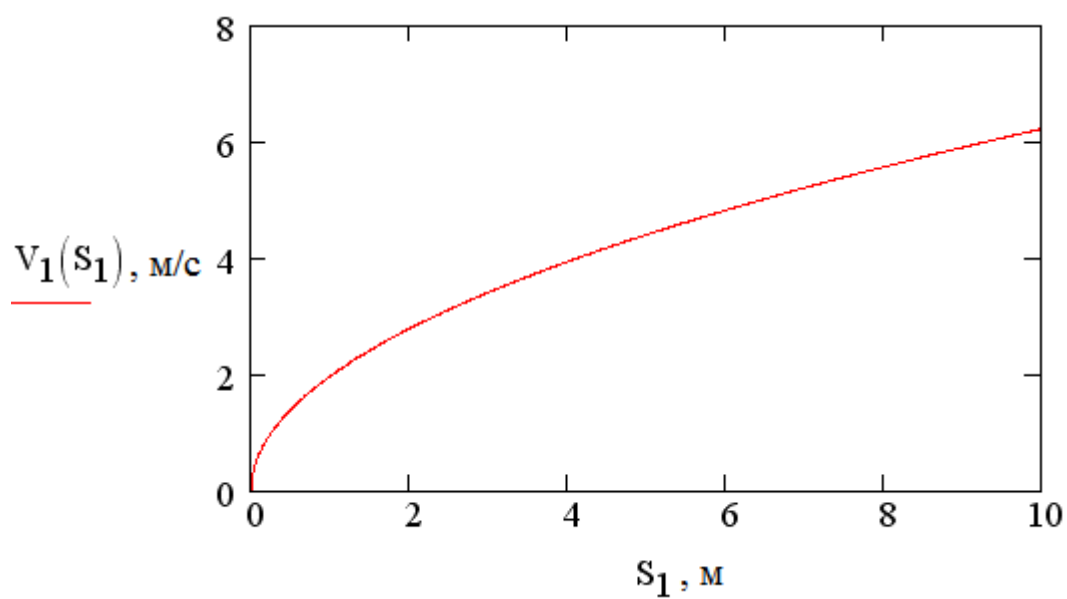


Рисунок 5 – График изменения скорости груза 1

4 Вопросы и задания для самоконтроля

- 1 Как определяется кинетическая энергия тела, совершающего поступательное движение?
- 2 Как определяется кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение?
- 3 Запишите теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме.
- 4 Запишите теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.
- 5 Какой вид имеет теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем?
- 6 Запишите формулу определения мощности силы.
- 7 Запишите формулу определения работы силы.
- 8 Чему равна работа силы тяжести?
- 9 Чему равна элементарная работа силы в естественной форме?
- 10 Как определить осевой момент инерции тела, масса которого равномерно распределена по ободу?
- 11 Как определить осевой момент инерции однородного диска?
- 12 Как определить осевой момент инерции тела с помощью радиуса инерции?

Список использованных источников

- 1 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
- 2 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / под общ. ред. А.А. Яблонского . – 18-е изд., стер. – Москва: КноРус, 2011. – 386 с.
- 3 Морозов, Н.А. Определение кинематических характеристик механических систем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии: методические указания / Н.А. Морозов. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 21 с.