Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

ДИНАМИКА. СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Оренбург
2019

УДК 531.18
ББК 22.21я73
Д 80

Рецензент – доцент, доктор технических наук Ю.А. Чирков

Авторы: Н.А. Морозов, А.А. Гаврилов, Л.И. Кудина, Е.В. Дырдина

Д 80 Динамика. Сборник заданий: учебное пособие / Н.А. Морозов, А.А. Гаврилов, Л.И. Кудина, Е.В. Дырдина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019.
ISBN

В учебном пособии представлены задания для курсовых и контрольных работ, практических занятий и самостоятельной работы студентов в рамках изучения раздела «Динамика». Приведены варианты заданий и подробные примеры их выполнения.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» при изучении дисциплин «Теоретическая механика», «Динамика механических систем» и «Механика». Учебное пособие может быть рекомендовано для обучающихся других технических направлений подготовки бакалавриата, специалитета и магистратуры всех форм обучения, а так же может быть полезно аспирантам и преподавателям.

УДК 531.18
ББК 22.21я73

ISBN

Содержание

Введение

Динамика изучает движение тел под действием приложенных к ним сил. Силы рассматриваются в статике, движение тел с геометрической точки зрения – в кинематике. Таким образом, для успешного изучения динамики необходимо освоить соответствующие разделы теоретической механики. Поэтому, авторы рекомендуют, прежде, чем переходить к решению работ данного сборника, выполнить работы по статике и кинематике.

Данное учебное пособие содержит 5 работ по динамике материальной точки и механической системы.

Первые две работы посвящены интегрированию дифференциальных уравнений движения материальной точки. В работе Д1 на точку действуют только постоянные силы, в работе Д2 точка движется под действием переменных сил (рассмотрены случаи, когда силы зависят от положения точки, ее скорости, а также времени).

Работа Д3 посвящена нахождению закона относительного движения материальной точки. При решении задачи к точке, находящейся в сложном движении, прикладываются фиктивные силы инерции.

В работе Д4 определяются законы различных видов колебаний материальной точки. Рассматриваются гармонические, затухающие, а также вынужденные колебания с учетом и без учета сопротивления движению.

В работе Д5 исследуется движение механической системы с помощью общих теорем динамики: теоремы о движении центра масс, теоремы об изменении кинетической энергии и теоремы об изменении кинетического момента.

К каждой предлагаемой работе приводится по крайней мере один пример ее выполнения.

1 Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки (случай постоянных сил)

1.1 Постановка задания Д1

Материальная точка массой $m = 2$ кг движется под действием сил F_1, F_2 и F_3, постоянных по модулю и направлению, значения которых представлены в таблице 1. В начальный момент своего движения точка имеет скорость $v_0 = 5$ м/с. Начальное положение точки представлено на рисунке 1 и выбирается в соответствии со второй цифрой номера варианта.

Таблица 1 – Исходные данные задания Д1

Первая цифра номера варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
F_1, Н	20	30	15	25	40	10	25	35	45	5
F_2,Н	15	25	40	10	25	35	45	15	20	30
F_3,Н	25	35	45	15	20	10	5	30	40	45

Определить закон движения точки и закон изменения ее скорости. Определить скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

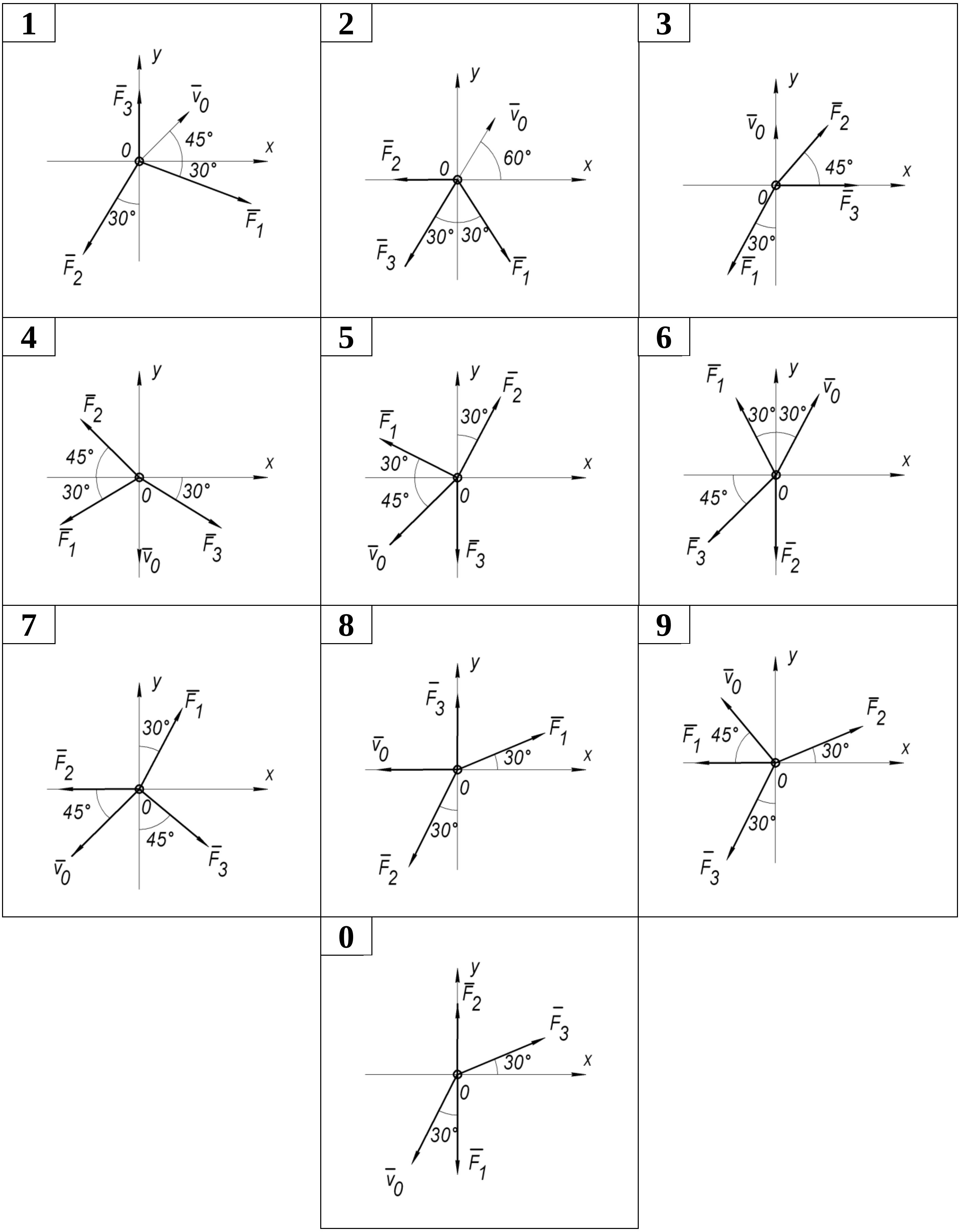


Рисунок 1 – Начальное положение точки

1.2 Пример выполнения задания Д1

Материальная точка массой $m = 3$ кг движется под действием сил $F_1 = 40$ Н, $F_2 = 5$ Н и $F_3 = 20$ Н, постоянных по модулю и направлению. В начальный момент своего движения точка имеет скорость $v_0 = 2$ м/с. Начальное положение точки представлено на рисунке 2.

Определить закон движения точки и закон изменения ее скорости. Определить скорость точки в момент времени $t_1 = 0,5$ с.

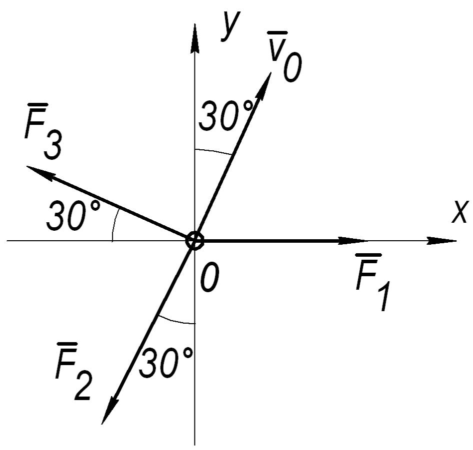


Рисунок 2 – Начальное положение точки

Дано: m = 3 кг, F_1 = 40 Н, F_2 = 20 Н, F_3 = 5 Н, v_0 = 2 м/с.

Найти: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $v(t)$, $v(t_1)$.

Решение:

1 Изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и $\bar{F}_3$ (рисунок 3).

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 \qquad (1.1)$$

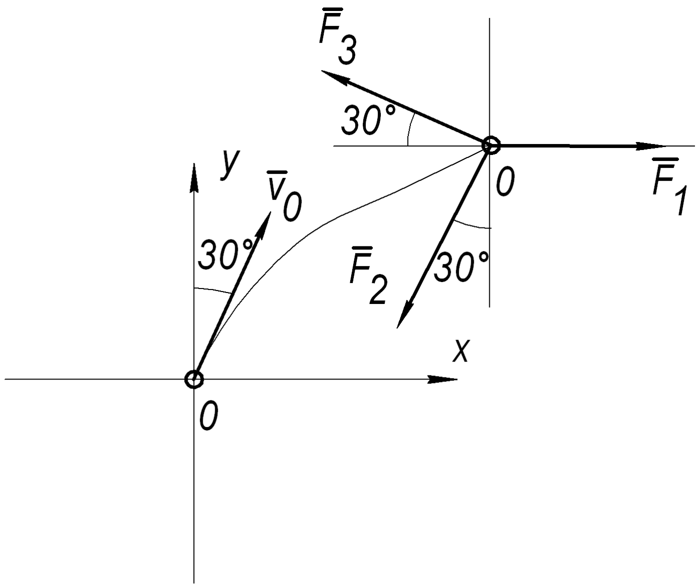


Рисунок 3 – Произвольное положение точки

2 Проецируя основное уравнение динамики (1.1) на ось *x*, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = F_1 - F_2 \cdot \sin 30^0 - F_3 \cdot \cos 30^0 . \tag{1.2}$$

Дважды интегрируем полученное уравнение:

$$\ddot{x} = \frac{F_1 - F_2 \cdot \sin 30^0 - F_3 \cdot \cos 30^0}{m}, \tag{1.3}$$

$$\frac{F_1 - F_2 \cdot \sin 30^0 - F_3 \cdot \cos 30^0}{m} = A = \frac{40 - 5 \cdot \sin 30^0 - 20 \cdot \cos 30^0}{3} = 6,73 \tag{1.4}$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \tag{1.5}$$

$$d\dot{x} = A \cdot dt, \tag{1.6}$$

$$\int d\dot{x} = \int A \cdot dt\,, \tag{1.7}$$

$$\dot{x} = A \cdot t + C_1, \tag{1.8}$$

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot t + C_1, \tag{1.9}$$

$$\int dx = \int (A \cdot t + C_1)dt\,, \tag{1.10}$$

$$x = A \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2\,, \tag{1.11}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

3 Проецируем основное уравнение динамики (1.1) на ось y и дважды интегрируем полученное уравнение:

$$m \cdot \ddot{y} = -F_2 \cdot \cos 30^0 + F_3 \cdot \sin 30^0\,, \tag{1.12}$$

$$\ddot{y} = \frac{-F_2 \cdot \cos 30^0 + F_3 \cdot \sin 30^0}{m}\,, \tag{1.13}$$

$$\frac{-F_2 \cdot \cos 30^0 + F_3 \cdot \sin 30^0}{m} = B = \frac{-5 \cdot \cos 30^0 + 20 \cdot \sin 30^0}{3} = 1{,}88\,, \tag{1.14}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = B\,, \tag{1.15}$$

$$\int d\dot{y} = \int B \cdot dt\,, \tag{1.16}$$

$$\dot{y} = B \cdot t + C_3, \tag{1.17}$$

$$\frac{dy}{dt} = B \cdot t + C_3, \tag{1.18}$$

$$\int dy = \int (B \cdot t + C_3) dt, \tag{1.19}$$

$$y = B \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4, \tag{1.20}$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные интегрирования

4 Определим произвольные постоянные интегрирования, исходя из начальных условий:

$$\text{при } t_0 = 0 \tag{1.21}$$

$$x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = v_0 \cdot \sin 30^0 = 1, \tag{1.22}$$

$$y_0 = 0,\ \dot{y}_0 = v_0 \cdot \cos 30^0 = 1{,}73, \tag{1.23}$$

$$v_0 \cdot \sin 30^0 = A \cdot 0 + C_1 = C_1, \tag{1.24}$$

$$0 = A \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2, \tag{1.25}$$

$$v_0 \cdot \cos 30^0 = B \cdot 0 + C_3 = C_3, \tag{1.26}$$

$$0 = B \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = C_4. \qquad (1.27)$$

Учитывая, что $A = 6,73$ м/с^2, $B = 1,88$ м/с^2 законы изменения проекции скорости на оси и закон движения материальной точки будут иметь вид:

$$\dot{x} = 6,73 \cdot t + 1, \qquad (1.28)$$

$$\dot{y} = 1,88 \cdot t + 1,73, \qquad (1.29)$$

$$\begin{cases} x = 3,37 \cdot t^2 + t \\ y = 0,94 \cdot t^2 + 1,73 \cdot t \end{cases}. \qquad (1.30)$$

5 Закон изменения скорости точки будет иметь вид:

$$v(t) = \sqrt{(6,73 \cdot t + 1)^2 + (1,88 \cdot t + 1,73)^2}. \qquad (1.31)$$

Скорость точки в момент времени $t_1 = 0,5$ с:

$$v(t_1) = \sqrt{(6,73 \cdot 0,5 + 1)^2 + (1,88 \cdot 0,5 + 1,73)^2} = 5,121 \text{ м/с}. \qquad (1.32)$$

2 Задание Д2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки (случай переменных сил)

2.1 Постановка задания Д2

В работе Д2 необходимо решить одну задачу, номер которой определяется из таблицы 2. В таблице 2 по горизонтали указана первая цифра варианта, по вертикали – вторая цифра варианта. Номер задачи получается на пересечении соответствующих горизонтали и вертикали.

Таблица 2 – Номер задачи задания Д2

Вторая цифра номера	Первая цифра номера варианта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	23	41	24	18	77	37	67	49	40
1	76	2	54	17	82	58	75	30	98	66
2	53	80	3	89	4	81	19	96	56	20
3	21	42	68	16	88	25	69	36	97	74
4	50	22	100	52	5	86	60	83	39	35
5	79	57	32	43	94	51	95	26	55	64
6	31	65	99	14	6	44	10	85	78	87
7	48	71	13	38	91	28	92	9	62	45
8	73	12	46	15	93	70	34	84	8	63
9	11	47	33	29	72	59	90	27	61	7

Задачи № 1, № 61. Материальная точка массы 2 кг отталкивается от неподвижного центра O силой, величина которой пропорциональна расстоянию x от цента O и на расстоянии 0,1 м от него равна 1,8 Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент точка находилась в центре O и имела начальную скорость v_o=0,6 м/с.

Задачи № 2, № 62. Материальная точка массы m отталкивается от неподвижного центра *O* силой, величина которой равна $\mu^2 mx$; *x* – расстояние точки до центра *O*, а μ – постоянный коэффициент. Найти закон движения точки, если в начальный момент времени $x_o = b;\ v_o = 0$.

Задачи № 3, № 63. Материальная точка массы *m* притягивается к неподвижному центру силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними, коэффициент пропорциональности равен *K*. Через сколько времени точка попадет в центр притяжения, если начальное расстояние до центра равно x_o, а начальная скорость равна нулю.

Задачи № 4, № 64. Материальная точка массы *m* движется под действием силы притяжения к центру *O*. Величина силы равна $m\pi^2 x$, где *x* – расстояние точки до центра притяжения. Определить, какой путь пройдет точка за первую секунду движения, если при $t = 0$; $x_o = 100$ м; $v_o = 0$.

Задачи № 5, № 65. Материальная точка *M* притягивается к центру *O* силой $F = \dfrac{3k^2 m}{14x^4}$, где $x = OM$; *m* – масса точки; $k = \text{const}$. В начальный момент времени расстояние $OM_o = x_o$ и $v_o = 0$. Определить скорость точки, когда $OM = \dfrac{x_o}{2}$.

Задачи № 6, № 66. Точка массы 1,5 кг движется по горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения $f = 0{,}1$ под действием силы $F = 4{,}5 + 3x$ Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент времени $x_o = 1$ м и $v_o = 2\sqrt{2}$ м/с. Принять $g = 10$ м/с^2.

Задачи № 7, № 67. Точка массы *m*, имеющая нулевую начальную скорость притягивается к неподвижному центру *O* силой, пропорциональной расстоянию точки до этого центра. Определить скорость точки, когда она приблизится к центру на половину первоначального расстояния *L*, если известно, что на расстоянии от центра *O* равным $L/4$, скорость точки равна $\sqrt{15}$.

Задачи № 8, № 68. Материальная точка массы m движется под действием силы притяжения к неподвижному центру *O*; сила обратно пропорциональна кубу расстояния движущейся точки до центра *O* и пропорциональна массе точки. Определить закон движения точки, если при $t = 0$, $x_o = 2$ м, $v_o = 0{,}5$ м/с.

Задачи № 9, № 69. Материальная точка массы m движется без начальной скорости прямолинейно под действием силы отталкивания от неподвижного центра *O*, пропорциональной расстоянию от точки до этого центра. В начальный момент времени сила равна *Q*, а расстояние точки до центра *O* равно *b*. Найти скорость точки, когда она пройдет путь, равный *b*.

Задачи № 10, № 70. Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 2\cdot(x + 1)$ Н. Найти закон движения точки, если при $t = 0$;$v_o = 2$ м/с, а $x_o = 1$ м. Какой путь пройдет точка, прежде чем ее скорость станет равной 20 м/с?

Задачи № 11, № 71. Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 2\cdot(x + 1)$ Н. Какова скорость точки, когда она пройдет путь, равный 50 метрам, если при $t = 0$, $v_o = 2$ м/с, а $x_o = 1$ м. Сколько времени потратит точка на этот путь?

Задачи № 12, № 72. Точка массы 2 кг движется вдоль горизонтальной оси *OX* под действием силы $F_x = 100x$ Н. Определить, какой путь пройдет точка, когда ее начальная скорость v_o утроится, если при $t = 0$; $v_o = 10$ м/с, а $x_o = 0$.

Задачи № 13, № 73. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх с минимальной начальной скоростью, достаточной для удаления тела в бесконечность. Определить скорость тела при удалении его от поверхности Земли на расстояние земного радиуса. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задачи № 14, № 74. Точка массы *m* находится на прямой, проходящей через два центра *A* и *B*, расстояние между которыми $AB = 2l$. Каждый центр притягивает точку силой, пропорциональной расстоянию точки до него; коэффициент пропорциональности у обеих сил одинаков и равен mk^2. В начальный момент точка находится на расстоянии x_o от середины *O* отрезка *AB*, не имея начальной скорости. Найти закон движения точки.

Задачи № 15, № 75. На материальную точку массы 1 кг движущуюся вдоль горизонтальной оси OX, действует сила, проекция которой на ось $OX F_x = -4x$ Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x_o = 0$, $v_o = 2$ м/с.

Задачи № 16, № 76. Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 2\cdot(x + 1)$ Н. Какой путь пройдет точка, когда ее скорость станет равной 10 м/с, если при $t = 0$; $v_o = 2$ м/с, а $x_o = 1$ м?

Задачи № 17, № 77. Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 2\cdot(x + 1)$ Н. Найти закон движения точки, если в начальный момент $v_o = 2$ м/с, $x_o = 1$ м.

Задачи № 18, № 78. Точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 2\cdot(x + 1)$ Н. За какое время точка пройдет путь, равный 10 м, если при $t = 0$; $v_o = 2$ м/с, а $x_o = 1$ м.

Задачи № 19, № 79. Материальная точка массы 2 кг движется вдоль горизонтальной оси под действием силы $F_x = 0{,}5\cdot(3-x)$ Н. Определить закон движения точки, если в начальный момент $x_o = 0$, $v_o = 0$.

Задачи № 20, № 80. Материальная точка, удаленная от поверхности Земли на расстоянии Земного радиуса R, начинает падать без начальной скорости под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра Земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость точки в момент падения на Землю.

Задачи № 21, № 81. Тело массы 10 кг начинает движение из состояния покоя под действием переменной силы $F = 10t$ Н по горизонтальной шероховатой плоскости. Найти коэффициент трения f, если известно, что за время $t = 5$ с тело приобрело скорость $V = 10$ м/с. Ускорение силы тяжести g принять равным 10 м/с^2.

Задачи № 22, № 82. Материальная точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы, возрастающей пропорционально времени; в начальный момент сила равнялась 2 Н. Найти закон движения точки, если ее движение начинается без начальной скорости, а в момент $t = 1$ с скорость равна 2 м/с.

Задачи № 23, № 83. Материальная точка массы 10 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 5 + 2t$ Н. Найти скорость точки через три секунды после начала движения, если ее начальная скорость $v_o = 3$ м/с.

Задачи № 24, № 84. На материальную точку, совершающую прямолинейное движение, действует сила, равномерно убывающая с течением времени, и при $t = 4$ с обращающаяся в ноль. Какой скорости достигнет точка по истечении четырех секунд и какой путь пройдет она за это время, если начальная скорость точки равна нулю, а начальное ускорение направлено в сторону действия силы и равно 3 м/с^2.

Задачи № 25, № 85. Точка массы 2 кг начинает движение со скоростью 2 м/с по горизонтальной прямой. На точку действует сила тяги, пропорциональная времени и постоянная сила сопротивления $R = 4$ Н. Определить путь, пройденный точкой за 3 с, если известно, что ее скорость за это время увеличилась в 5 раз.

Задачи № 26, № 86. Точка массы 5 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы, убывающей на 20 Н в секунду. В начальный момент времени сила равна 100 Н и точка имеет скорость $v_o = 10$ м/с. Найти закон движения точки и ее скорость через пять секунд после начала движения.

Задачи № 27, № 87. На материальную точку массы 2 кг, имеющую скорость $v_o = 10$ м/с, начинает действовать сила, пропорциональная времени. Зная, что начальная величина силы равна 4 Н, а скорость точки через две секунды стала равной 30 м/с, найти путь, пройденный точкой за три секунды.

Задачи № 28, № 88. Точка массы 2 кг, начинает движение из состояния покоя под действием силы, возрастающей на 3 Н в секунду. Найти закон движения точки и ее скорость через восемь секунд после начала движения.

Задачи № 29, № 89. Материальная точка массы 10 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы, возрастающей пропорционально времени. Известно, что по истечении пяти секунд сила равнялась 20 Н. Определить закон движения точки, если ее начальная скорость $v_o = 2$ м/с.

Задачи № 30, № 90. Точка массы 1 кг движется без начальной скорости горизонтально под действием силы, пропорциональной квадрату времени. Известно, что по истечении трех секунд скорость точки равнялась 81 м/с. Найти закон движения точки.

Задачи № 31, № 91. Материальная точка массы 1 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F_x = 5 + \mathrm{t}$ Н. Начальная скорость точки $v_o = 2$ м/с. Найти закон движения точки и ее скорость через четыре секунды после начала движения.

Задачи № 32, № 92. Точка массы 1 кг движется горизонтально под действием силы $F_x = 5\mathrm{t} + 7$ Н с начальной скоростью $v_o = 2$ м/с. Найти путь пройденный точкой и ее скорость по истечении трех секунд от начала движения.

Задачи № 33, № 93. Точка массы 1 кг начинает движение из начала координат с начальной скоростью $v_o = 5$ м/с под действием силы $F = t^2 + 4$ Н. Движение происходит по горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения $f = 0{,}2$. Определить скорость точки в конце третьей секунды и путь, пройденный ею за это время, полагая ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2.

Задачи № 34, № 94. На точку массы 2 кг, находящуюся на гладкой горизонтальной плоскости и имеющую скорость 10 м/с, начала действовать сила $F_x = 3 + 4t$ Н, направленная по этой скорости. Определить путь, пройденный точкой в течение шести секунд и скорость ее в конце четвертой секунды.

Задачи № 35, № 95. Точка массы 2 кг начинает движение по прямой с начальной скоростью 5 м/с и продолжает его под действием силы $F_x = 8 - 4t$ Н. Найти максимальное значение скорости точки. Через сколько секунд скорость будет равна нулю?

Задачи № 36, № 96. Точка массы 5 кг движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $F_x = 80 - 20t$ Н. Начальная скорость точки равна 14 м/с и совпадает по направлению с направлением вектора силы. Какой путь пройдет точка к тому времени, когда ее скорость станет максимальной?

Задачи № 37, № 97. Сила тяги трамвайного мотора при пуске его в ход возрастает на 100 Н в секунду. Зная, что масса вагона 3000 кг и что коэффициент трения между вагоном и рельсами равен 0,01, определить закон движения вагона в пусковой период, полагая $g = 10$ м/с^2.

Задачи № 38, № 98. Материальная точка массы 2 кг движется по горизонтальной оси X под действием силы, проекция которой на эту ось $F_x = 6\cdot(1 - t)$ Н. Определить положение точки в момент остановки, если в начальный момент $x_o = 0$; $v_o = 0$.

Задачи № 39, № 99. Материальная точка массы 2 кг движется горизонтально под действием силы пропорциональной времени, которая при $t = 1$ с равна 12 Н. Определить закон движения точки, если ее начальная скорость $v_o = 1$ м/с, была направлена в сторону действия силы.

Задачи № 40, № 100. Точка массы 3 кг движется из состояния покоя по гладкой горизонтальной прямой под действием силы $F_x = 36 - 9t^2$Н. Определить путь пройденный точкой к тому моменту времени, когда ее скорость станет максимальной.

Задача № 41. Определить скорость v_o, которую нужно сообщить точке массы m для того, чтобы она двигаясь вертикально вверх поднялась на высоту H. Сила сопротивления воздуха $R = mgk^2v$, где k – постоянный коэффициент.

Задача № 42. Пуля, пробив доску толщиной h, изменяет свою скорость от значения v_1 до значения v_2. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент пропорциональности силы и время движения пули в доске.

Задача № 43. Точка массы 1 кг, имея начальную скорость 9 м/с движется вдоль горизонтальной прямой, преодолевая силу сопротивления $R = 2v^{1/2}$ Н. Найти закон движения точки.

Задача № 44. Материальная точка, двигаясь по горизонтальной прямой, имела в некоторый момент скорость v_o. Определить ее скорость по истечении следующих t секунд, а также пройденный ею за это время путь, если сила сопротивления движению равна $R = kmV^2$, где m – масса точки, k = const.

Задача № 45. Автомобиль массы m движется по горизонтальной прямой. Принимая силы тяги мотора постоянной и равной Q, а суммарное сопротивление движению $R = k^2v^2$, определить скорость автомобиля, когда он пройдет путь S, если начальная скорость его равна v_o.

Задача № 46. Лодке массы m сообщена скорость v_o. Через τ секунд после начала движения, ее скорость уменьшилась вдвое. Каков закон движения лодки, если сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки?

Задача № 47. Точка массы 1 кг движется горизонтально в сопротивляющейся среде, сила сопротивления которой пропорциональна первой степени скорости. Найти коэффициент пропорциональности k, если точка при начальной скорости 1 м/с прошла до остановки 10 м.

Задача № 48. Материальная точка массы m движется горизонтально, начиная движение со скоростью v_o в среде, сила сопротивления которой $R = kv^{1/2}$, где v – скорость точки, $k = \text{const}$. Найти время движения и путь, пройденный точкой до остановки.

Задача № 49. Точка массы 3 кг движется вдоль горизонтальной прямой с начальной скоростью $v_o = 16$ м/с и испытывает сопротивление среды $R = 8v^{1/2}$ Н. Найти время движения и путь, пройденный точкой до остановки.

Задача № 50. Точке массы m сообщили горизонтальную скорость v_o, после чего она продолжает движение по шероховатой горизонтальной поверхности с коэффициентом трения равным f, испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости, с коэффициентом пропорциональности равным km. Определить путь, пройденный точкой до остановки.

Задача № 51. Сила, действующая на автомобиль массы m в первое время после начала движения выражается формулой $F = a - bv$, где a, b постоянные коэффициенты, v – скорость автомобиля. Выразить силу F в функции времени.

Задача № 52. Тело массы m брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_o. Предполагая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости тела, причем коэффициент пропорциональности равен μ, найти с какой скоростью тело упадет обратно на Землю.

Задача № 53. Точка массы m падает без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости v. Определить наибольшую скорость точки, если при $\underline{v} = 1$ м/с сила сопротивления равна одной трети силы тяжести. Какова зависимость скорости от времени?

Задача № 54. Лодка массы 60 кг приобретает после толчка скорость $v_o = 0{,}5$ м/с. Считая, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости v лодки и выражается формулой $R = 4v$ Н, определить, через сколько секунд скорость лодки станет втрое меньше начальной и какой за это время она пройдет путь?

Задача № 55. Точка массы 5 кг движется горизонтально, имея начальную скорость $v_o = 64$ м/с. Сила сопротивления, действующая на точку, пропорциональна ее скорости v и выражается формулой $R = 10v$ Н. Определить, через сколько секунд скорость точки уменьшится вдвое и какой за это время она пройдет путь.

Задача № 56. Груз массы m бросают вертикально вверх, сообщая ему такую начальную скорость, при которой он, двигаясь в безвоздушном пространстве, поднялся бы на высоту 10 м. Определить, на какую высоту поднимется груз, если он движется в воздухе, где сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости v точки и выражается формулой $R = 0{,}05mv^2$ Н.

Задача № 57. Груз массы m начинает падать в воздухе вертикально вниз без начальной скорости. Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости v груза и определяется формулой $R = 0{,}05mv^2$. Определить, пройдя какой путь, груз приобретает скорость, равную половине предельной.

Задача № 58. Тело массы m начинает падать без начальной скорости в среде, сопротивление которой определяется формулой $R = 0{,}1mv$. Через сколько секунд скорость v тела достигнет половины предельной?

Задача № 59. Груз массы m бросили вертикально вверх в среде, сопротивление которой определяется формулой $R = 0{,}05mv$. Определить, через сколько секунд груз достигнет наивысшей точки, если начальная скорость его такова, что, двигаясь без сопротивления, он достиг бы наивысшей точки через две секунды после начала движения.

Задача № 60. Лодка замедляет свое движение, преодолевая сопротивление воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 2 м/с. Через четыре секунды ее скорость равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки уменьшится до 0,5 м/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

2.2 Примеры выполнения задания Д2

Пример 1. К материальной точке массы *m*,находящейся в покое, прикладывается в момент времени $t = 0$ с сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F = F_0 \cdot \cos\omega t$. Определить движение точки под действием этой силы.

Дано: m; $V_o = 0$; $t_0 = 0$; $F = F_0 \cdot \cos\omega t$.

Определить: $x = x(t)$-?

Решение:

Принимаем линию действия силы F за ось x, а положение покоя точки за начало координат (рисунок 4). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t_o = 0;\ x_o = 0;\ \dot{x}_o = V_o = 0. \tag{2.1}$$

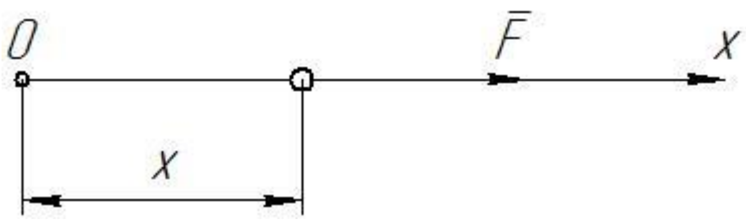


Рисунок 4 – Точка в произвольном положении

Запишем основной закон динамики точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k \tag{2.2}$$

и составим дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{x} = F \tag{2.3}$$

или

$$m\ddot{x} = F_0 \cdot \cos\omega t. \tag{2.4}$$

После интегрирования получим:

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} \cdot \sin\omega t + C_1, \tag{2.5}$$

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \cos\omega t + C_1 t + C_2. \tag{2.6}$$

Подставим начальные условия:

$$0 = C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \tag{2.7}$$

$$0 = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cdot 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}. \tag{2.8}$$

Получаем искомый закон движения точки:

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \cos\omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} \tag{2.9}$$

или

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t). \qquad (2.10)$$

Пример 2. Корабль водоизмещением *m*, движущийся прямым курсом, в момент включения двигателя имел скорость V_0.Считая, что величина силы упора винтов *Q* пропорциональна времени ($Q = kt$), а сила сопротивления воды F_c = const, определить путь S, пройденный кораблем за время t_1 если за это время его скорость увеличилась в два раза.

Дано: m; V_o; $t_0 = 0$; $Q = kt$; F_c = const; t_1; $V = 2V_o$.

Определить: S – ?

Решение:

Примем корабль за материальную точку, а направление движения – за ось *Ox*, взяв начало координат в начальном положении корабля (рисунок 5). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t_o = 0;\ x_o = 0;\ \dot{x}_o = V_o. \qquad (2.11)$$

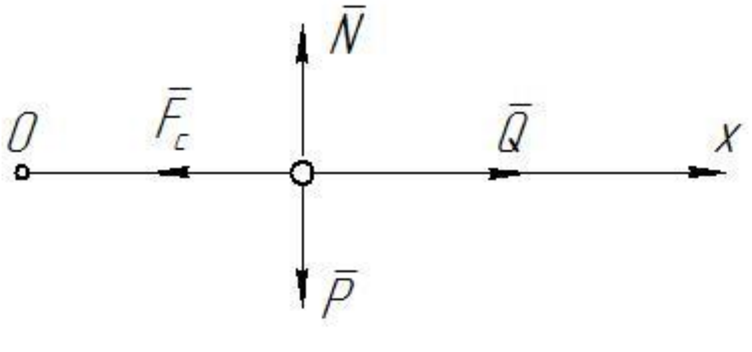


Рисунок 5 – Корабль в произвольном положении

На корабль действуют силы: вес *P*, выталкивающая сила (архимедова сила) *N*, сила упора винтов *Q*, сила сопротивления F_c.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось *Ox*:

$$m\ddot{x} = Q - F_c \tag{2.12}$$

или

$$m\ddot{x} = kt - F_c. \tag{2.13}$$

После интегрирования получим:

$$\dot{x} = \frac{k}{m} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{F_c}{m} \cdot t + C_1, \tag{2.14}$$

$$x = \frac{k}{2m} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{F_c}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{2.15}$$

Используя начальные условия, найдем:

$$C_1 = V_о,\ C_2 = 0. \tag{2.16}$$

Получим уравнения, определяющие в любой момент времени скорость точки

$$\dot{x} = \frac{k}{2m} \cdot t^2 - \frac{F_c}{m} \cdot t + V_0 \tag{2.17}$$

и пройденный путь

$$x = \frac{k}{6m} \cdot t^3 - \frac{F_c}{2m} \cdot t^2 + V_0 t\,. \tag{2.18}$$

Так как

$$\text{при } t = t1;\ x = S;\ \dot{x} = V = 2V_o, \tag{2.19}$$

то из уравнения

$$2V_0 = \frac{k}{2m} \cdot t_1^2 - \frac{F_c}{m} \cdot t_1 + V_0, \tag{2.20}$$

откуда

$$k = \frac{2m}{t_1^2}\left(V_0 + \frac{F_c}{m} \cdot t_1\right). \tag{2.21}$$

Из уравнения найдем пройденный путь

$$S = \frac{2m}{t_1^2}\left(V_0 + \frac{F_c}{m} \cdot t_1\right) \cdot \frac{t^3}{6m} - \frac{F_c}{2m} \cdot t^2 + V_0 t, \tag{2.22}$$

или

$$S = \frac{4}{3} V_0 t_1 - \frac{F_c}{6m} \cdot t_1^2. \tag{2.23}$$

Пример 3. Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли равен R), сообщена начальная вертикальная скорость $V_0 = \sqrt{2gR}$ (вторая космическая скорость). Определить уравнение движения точки, пренебрегая силой сопротивления воздуха.

Дано: R, $V_o = \sqrt{2gR}$;

Определить: $x = x(t) - ?$

Решение:

Направим ось Ox вдоль линии движения точки (рисунок 6). Начало координат поместим в центре Земли (в данной задаче это удобнее). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t_o = 0;\ x_o = R;\ \dot{x}_0 = V_0 = \sqrt{2gR}\,. \tag{2.24}$$

На точку действует лишь сила F притяжения к Земле, по величине обратно пропорциональная квадрату расстояния от точки до центра Земли:

$$F = \frac{k}{x^2}\,. \tag{2.25}$$

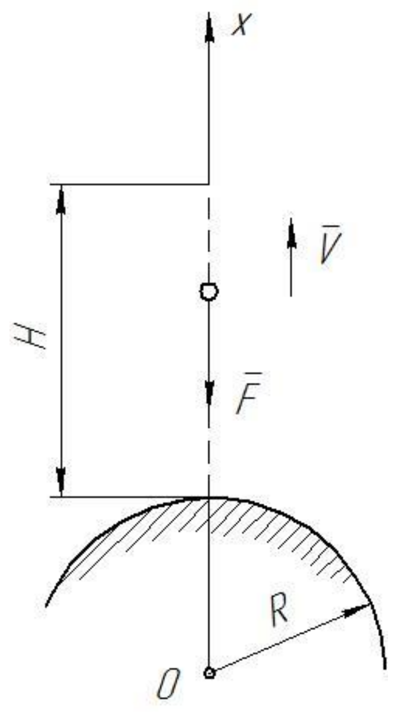


Рисунок 6 – Материальная точка в произвольном положении

Отсюда

$$k = Fx^2\,. \tag{2.26}$$

При $x = R$ сила $F = mg$. Следовательно,

$$k = mgR^2 \tag{2.27}$$

и

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}. \tag{2.28}$$

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = -F \tag{2.29}$$

или

$$m\ddot{x} = -\frac{mgR^2}{x^2}, \tag{2.30}$$

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}. \tag{2.31}$$

Для интегрирования этого уравнения применим подстановку

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}. \tag{2.32}$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}. \tag{2.33}$$

Разделяем переменные:

$$\dot{x}d\dot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}dx \tag{2.34}$$

и интегрируем

$$\int \dot{x}d\dot{x} = -\int \frac{gR^2}{x^2}dx. \tag{2.35}$$

После интегрирования получим:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{gR^2}{x} + C_1. \tag{2.36}$$

Подставляя начальные условия, получим

$$\frac{\left(\sqrt{2gR}\right)^2}{2} = \frac{gR^2}{R} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C1} = 0. \tag{2.37}$$

Таким образом,

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{gR^2}{x} \tag{2.38}$$

или

$$\dot{x}^2 = \frac{2gR^2}{x} \tag{2.39}$$

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2g}R}{\sqrt{x}}. \tag{2.40}$$

При извлечении корня взят знак «плюс», так как рассматривается только движение вверх,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2g}R}{\sqrt{x}}. \tag{2.41}$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{2g}R\int dt\,, \tag{2.42}$$

получим

$$\frac{2x^{3/2}}{3} = \sqrt{2g}R \cdot t + C_2. \tag{2.43}$$

Используя начальные условия, найдем

$$C_2 = \frac{2R^{3/2}}{3}. \tag{2.44}$$

Окончательно, получим искомое уравнение движения точки:

$$\frac{2x^{3/2}}{3} = \sqrt{2g}R \cdot t + \frac{2R^{3/2}}{3} \tag{2.45}$$

или

$$x = \left[R^{3/2} + \frac{3R}{2}\sqrt{2g} \cdot t \right]^{2/3}. \tag{2.46}$$

Пример 4. Материальная точка M массы m движется прямолинейно по оси Ox (рисунок 7). Точка отталкивается от неподвижного центра O силой F, пропорциональной массе m и расстоянию, причем коэффициент пропорциональности равен $k = 4$. Найти закон движения точки, если начальное расстояние ее от центра O равно x_0 = 5 м, а начальная скорость V_0 = 2 м/с.

Дано: m, x_0 = 5 м; V_o = 2 м/с; $F = kmx$.

Найти: $x = x(t)$ – ?

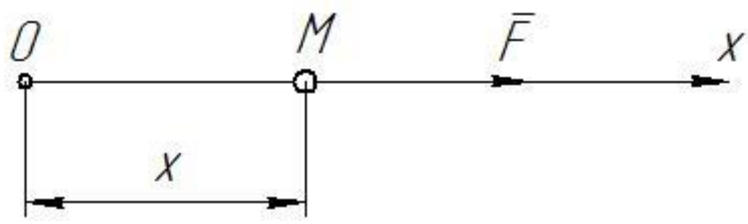


Рисунок 7 – Движущаяся материальная точка

Решение:

Направим ось Ox вдоль линии движения точки (рисунок 7). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t_o = 0;\ x_o = 5 \text{ м};\ V_o = 2 \text{ м/с}. \tag{2.47}$$

На точку действует лишь сила $F = kmx$.

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = F \tag{2.48}$$

или

$$m\ddot{x} = kmx, \tag{2.49}$$

$$\ddot{x} = kx. \tag{2.50}$$

Решим полученное дифференциальное уравнение.

Первый способ.

Для интегрирования этого уравнения применим подстановку

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}. \tag{2.51}$$

Уравнение движения примет вид

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = kx. \tag{2.52}$$

Разделяем переменные

$$\dot{x}d\dot{x} = kxdx \tag{2.53}$$

и интегрируем

$$\int_{V_0}^{V} \dot{x}d\dot{x} = 4\int_{x_0}^{x} xdx. \tag{2.54}$$

После интегрирования получим

$$\left.\frac{\dot{x}^2}{2}\right|_{V_0}^{V} = 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^{x} \tag{2.55}$$

или

$$\frac{1}{2}\left(V^2 - V_0^2\right) = 2\left(x^2 - x_0^2\right), \tag{2.56}$$

$$V^2 = 4\left(x^2 - x_0^2\right) + V_0^2, \tag{2.57}$$

$$V^2 = 4\left(x^2 - 5^2\right) + 2^2, \tag{2.58}$$

$$V^2 = 4x^2 - 96, \tag{2.59}$$

$$V = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x^2 - 24}. \tag{2.60}$$

Разделяем переменные

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2dt \tag{2.61}$$

и интегрируем

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2t. \tag{2.62}$$

После интегрирования получим

$$\ln\left|x+\sqrt{x^2-24}\right|_{x_0}^{x}=2t\,, \tag{2.63}$$

или

$$2t=\ln\left|x+\sqrt{x^2-24}\right|-\ln\left|5+\sqrt{5^2-24}\right|, \tag{2.64}$$

$$2t=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-24}}{6}\right|. \tag{2.65}$$

Следовательно,

$$\frac{x+\sqrt{x^2-24}}{6}=e^{2t}, \tag{2.66}$$

$$x+\sqrt{x^2-24}=6e^{2t}. \tag{2.67}$$

Из этого соотношения находим

$$x^2-24=\left(6e^{2t}-x\right)^2, \tag{2.68}$$

откуда

$$x=\frac{3e^{4t}+2}{e^{2t}} \tag{2.69}$$

и, окончательно, искомый закон движения точки

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}. \tag{2.70}$$

Второй способ.

Так как в данном случае сила $F = kmx$ является линейной функцией от x, то дифференциальное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Запишем дифференциальное уравнение в виде:

$$\ddot{x} - kx = 0. \tag{2.71}$$

Для решения этого уравнения воспользуемся теорией интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и составим соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - k = 0. \tag{2.72}$$

Найдем его корни:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k}, \tag{2.73}$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Корни действительные, следовательно, общее решение дифференциального уравнения ищем в виде:

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}. \tag{2.74}$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 составим еще одно уравнение. Для этого найдем скорость точки, продифференцировав по времени t уравнение движения:

$$\dot{x} = 2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t}. \tag{2.75}$$

Постоянные C_1, и C_2 находим по начальным условиям движения:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2 \\ 2 = 2C_1 - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 - C_2 \\ 2 = 2(5 - C_2) - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5 - C_2 \\ 4C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 2 \end{cases} \tag{2.76}$$

Таким образом, подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение движения, получим искомый закон движения точки:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}. \tag{2.77}$$

Пример 5. Тело A весом P, получившее начальную скорость V_0, скользит вверх по шероховатой наклонной плоскости, испытывая сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости тела, причем коэффициент пропорциональности равен mk (m – масса тела). Определить расстояние, проходимое телом, как функцию его скорости, если коэффициент трения скольжения равен f, угол наклона плоскости к горизонту равен α (рисунок 8).

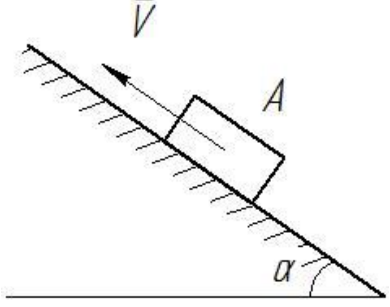


Рисунок 8 – Тело на шероховатой наклонной плоскости

Дано: *P, V_o, f, α, R = mkV^2.*

Определить: *x = x(V) – ?*

Решение:

Изображаем тело *A* в текущий момент времени (рисунок 9). Тело *A* принимаем за материальную точку, так как оно движется поступательно.

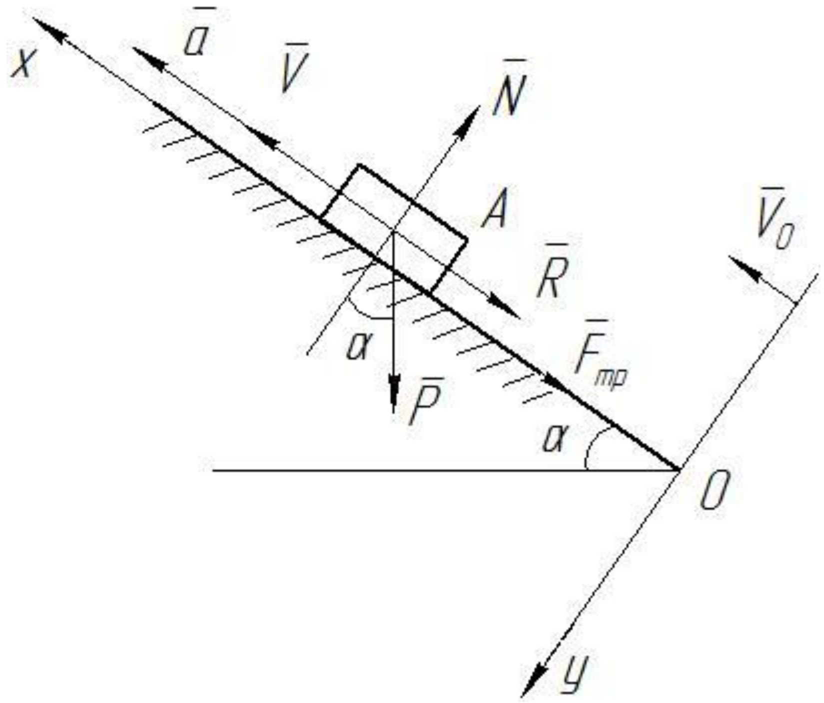


Рисунок 9 – Силы, действующие на тело

Выбираем оси координат, как указано на рисунке 9,направим ось *x* вдоль наклонной поверхности вверх, начало отсчета совмещаем с начальным положением точки (точка *O*). Начальная скорость $\bar{v}_o$ направлена вдоль оси *x* вверх. Следовательно, начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t_o = 0;\ x_o = 0;\ \dot{x}_o = v_o. \qquad (2.78)$$

Прикладываем к точке активную силу P – вес тела и R – силу сопротивления среды. Освобождаем тело A от связи, заменяя действие связи реакцией. Связью является наклонная плоскость. Реакцию плоскости раскладываем на нормальную составляющую N и на касательную составляющую $F_{тр}$ ($F_{тр}$ – сила трения скольжения).

Запишем основной закон динамики точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k \tag{2.79}$$

и составим дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -P \cdot \sin\alpha - F_{тр} - R \tag{2.80}$$

и на ось y:

$$m\ddot{y} = mg \cdot cos\alpha - N. \tag{2.81}$$

Так как точка движется по прямой x, то проекция ее ускорения на ось y будет равна нулю, т.е. $\ddot{y} = 0$.

Получим, что

$$N = mg\cos\alpha. \tag{2.82}$$

Сила трения

$$F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha. \tag{2.83}$$

Дифференциальное уравнение принимает вид:

$$m\ddot{x} = P\sin\alpha - fmg\cos\alpha - mkV^2. \qquad (2.84)$$

Учитывая, что

$$P = mg, \qquad (2.85)$$

после сокращения на m находим

$$\ddot{x} = -\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right]. \qquad (2.86)$$

Для интегрирования этого уравнения применим подстановку

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = \frac{VdV}{dx}. \qquad (2.87)$$

Тогда дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{VdV}{dx} = -\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right]. \qquad (2.88)$$

Разделяем переменные

$$\frac{VdV}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2} = -dx \qquad (2.89)$$

и интегрируем

$$\int \frac{VdV}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2} = -\int dx. \qquad (2.90)$$

После интегрирования получим

$$\frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right] = -x + C. \qquad (2.91)$$

Постоянную интегрирования С находим по начальным условиям движения:

$$\frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV_0^2\right] = C. \qquad (2.92)$$

Тогда:

$$\frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2\right] = -x + \frac{1}{2k}\ln\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV_0^2\right]. \qquad (2.93)$$

Откуда находим искомое расстояние, проходимое телом, как функцию его скорости:

$$x = \frac{1}{2k}\ln\frac{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + kV_0^2}. \qquad (2.94)$$

Пример 6. Шар M массой m падает свободно без начальной скорости под действием силы тяжести из точки O. При этом падении шар испытывает сопротивление воздуха R, пропорциональное скорости, т. е. $R = -\mu V$, где μ – постоянный коэффициент пропорциональности. Найти закон движения шара.

Дано: m; $R = -\mu V$; $V_o = 0$.

Определить: $x = x(t)$ – ?

Решение:

Рассмотрим движение шара, примем его за материальную точку. Направим ось *Ox* по движению точки (рисунок 10), начало отсчета совмещаем с начальным положением точки (точка *O*). Начальные условия движения имеют вид:

$$\text{при } t_o = 0;\ x_o = 0;\ V_o = 0. \tag{2.95}$$

Изобразим точку в произвольный момент времени и покажем действующие на нее силы: сила тяжести *mg*; сила сопротивления воздуха *R* направлена противоположно скорости.

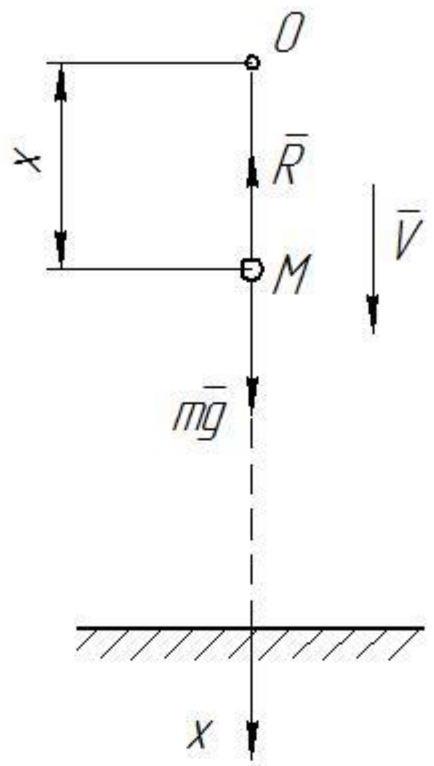


Рисунок 10 – Силы, действующие на шар

Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось Ox:

$$m\ddot{x} = mg - R \tag{2.96}$$

или

$$m\ddot{x} = mg - \mu V, \tag{2.97}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{\mu}{m}V, \tag{2.98}$$

$$\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = g - \frac{\mu}{m}V\ . \tag{2.99}$$

Разделяем переменные

$$\frac{dV}{g - \frac{\mu}{m}V} = dt \tag{2.100}$$

и интегрируем

$$\int \frac{dV}{g - \frac{\mu}{m}V} = \int dt. \tag{2.101}$$

После интегрирования получим

$$-\frac{m}{\mu}\ln\left(g - \frac{\mu}{m}V\right) = t + C_1. \tag{2.102}$$

Постоянную интегрирования C_1 находим по начальным условиям движения:

$$-\frac{m}{\mu}\ln g = C_1. \tag{2.103}$$

Тогда:

$$-\frac{m}{\mu}\ln\left(g-\frac{\mu}{m}V\right)=t-\frac{m}{\mu}\ln g \tag{2.104}$$

или

$$\frac{m}{\mu}\ln\frac{g-\frac{\mu}{m}V}{g}=-t, \tag{2.105}$$

$$\ln\frac{g-\frac{\mu}{m}V}{g}=-\frac{\mu}{m}t, \tag{2.106}$$

откуда получаем

$$\frac{g-\frac{\mu}{m}V}{g}=e^{-\frac{\mu}{m}t}. \tag{2.107}$$

Выразим отсюда скорость

$$V=\frac{dx}{dt}=\frac{m}{\mu}g-\frac{m}{\mu}ge^{-\frac{\mu}{m}t}. \tag{2.108}$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\int dx=\int\left(\frac{m}{\mu}g-\frac{m}{\mu}ge^{-\frac{\mu}{m}t}\right)dt. \tag{2.109}$$

Получим

$$x = \frac{m}{\mu} gt + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 g e^{-\frac{\mu}{m}t} + C_2. \tag{2.110}$$

Постоянную интегрирования C_2 находим по начальным условиям движения:

$$0 = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 g + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{m^2}{\mu^2} g. \tag{2.111}$$

Тогда:

$$x = \frac{m}{\mu} gt + \frac{m^2}{\mu^2} g e^{-\frac{\mu}{m}t} - \frac{m^2}{\mu^2} g \tag{2.112}$$

или

$$x = \frac{m}{\mu} gt - \frac{m^2}{\mu^2} g \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right). \tag{2.113}$$

3 Задание Д3. Динамика относительного движения точки

3.1 Постановка задания Д3

Шарик массы m перемещается внутри движущегося тела (на схемах 1 и 5 рисунка 11 оси вращения горизонтальны, на остальных вертикальны) по гладкому желобу. Принимая шарик за материальную точку определить его закон движения относительно тела и давление на стенки желоба в момент времени t_1. Начальные положение и скорость шарика относительно тела x_0 и v_0.

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы задания, вторая цифра варианта – номер рисунка задания. Номера вариантов выдаются преподавателем в начале семестра.

Исходные данные представлены в таблице 3 и рисунке 11.

Таблица 3 – Исходные данные задания Д3

Первая цифра номера варианта	m, кг	c, Н/м	l_0, м	x_0, м	v_0, м/с	ω, с$^{-1}$	t_1, с	l, м
0	0,3	6,0	1,2	0,3	1,0	3,6	0,1	0,5
1	0,8	3,2	0,6	0,5	-0,1	2,4	0,2	0,7
2	0,5	2,5	1,0	0,2	4,0	3,0	0,5	1
3	1	4,8	0,8	1,2	0	2,0	0,3	0,8
4	0,4	7,2	1,0	2,0	-0,2	3,2	0,2	0,6
5	0,75	2,8	0,5	0,4	0,5	2,5	0,3	0,8
6	1	5,4	0,8	1,0	1,5	2,0	0,2	1,2
7	0,6	3,0	0,6	0,4	0	3,6	0,1	0,5
8	1,2	4,2	1,0	0,3	1,0	3,0	0,5	0,8
9	0,4	2,4	0,5	0,6	-0,5	2,4	0,6	1,0
Примечание – некоторые значения из таблицы для конкретной схемы могут не использоваться, например, для схемы 7 не используются значения c, l_0, l.								

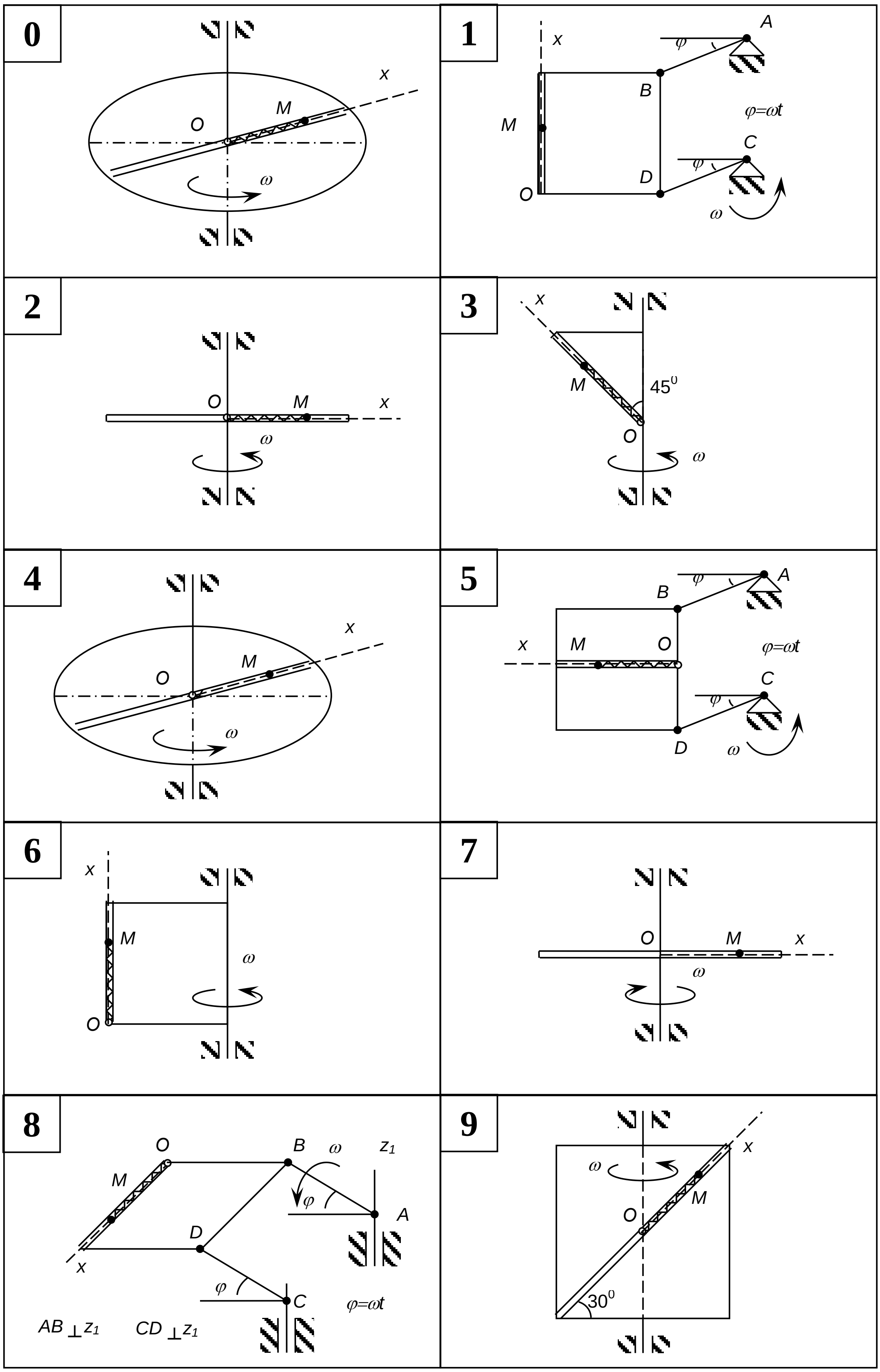


Рисунок 11 – Исходные схемы задания Д3

На схемах 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9 рисунка 11 шарик удерживается пружиной жесткостью c и длиной l_0 в нерастянутом состоянии. На схемах 2, 5, 8 рисунка 11 кривошипы AB и CD длинами l параллельны.

3.2 Пример выполнения задания Д3

3.2.1 Условие задачи

Шарик массы m перемещается внутри движущегося тела по гладкому желобу. Принимая шарик за материальную точку определить его закон движения относительно тела и давление на стенки желоба в момент времени t_1. Начальные положение и скорость шарика относительно тела x_0 и v_0. Шарик удерживается пружиной жесткостью c и длиной l_0 в нерастянутом состоянии.

Исходные данные:

$m = 0{,}2$ кг, $c = 2{,}4$ Н/м,

$l_0 = 0{,}5$ м, $x_0 = 0{,}3$ м,

$v_0 = 0$, $\omega = 4\,\text{с}^{-1}$,

$\alpha = 30^0$, $r = 1$ м, $t_1 = 1$ с.

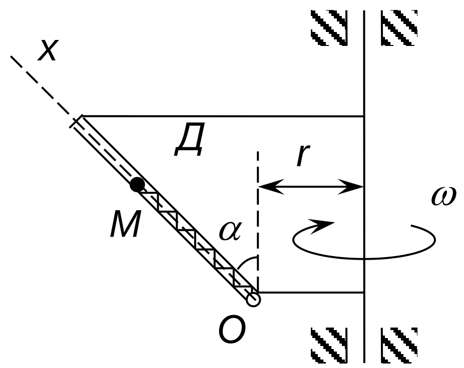


Рисунок 12 – Исходная схема для примера Д1

3.2.2 Составление дифференциальных уравнений движения

1 Рассмотрим движение шарика *М* как материальной точки. Точка движется прямолинейно относительно тела *Д*, которое совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси. Свяжем подвижную систему координат с телом *Д* – ось *x* по направлению движение шарика. Начало отсчета выберем в начальном положении шарика.

2 Изобразим шарик в произвольный момент времени ($OM = x$) и покажем действующие на него силы.

Активные силы:

– сила тяжести, направлена вертикально вниз и по модулю равна

$$G = mg\,; \tag{3.1}$$

– сила упругости со стороны растянутой пружины, направлена к точке закрепления пружины и по модулю эта сила равна

$$F_{уп} = c \cdot \Delta = c\left(x - l_0\right), \tag{3.2}$$

где Δ – изменение длины пружины, $\Delta = x - l_0$.

Отбрасываем связи, наложенные на систему, и заменяем их действие реакциями связей.

Связью для шарика является гладкий желоб, его реакция направлена перпендикулярно желобу и может быть разложена на две взаимноперпендикулярные составляющие $\bar{N} = \bar{N}_y + \bar{N}_z$.

$\bar{N}_z \perp x$ в плоскости тела *Д*.

$\bar{N}_y \perp x$ перпендикулярно плоскости тела *Д*.

По модулю

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2}\,. \tag{3.3}$$

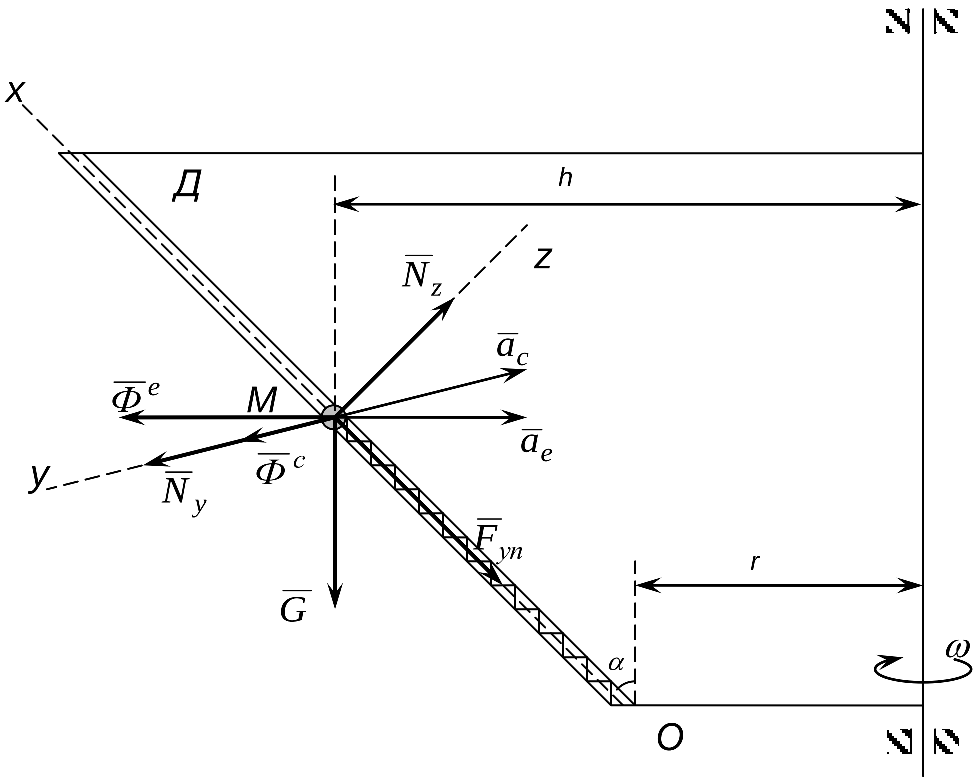


Рисунок 13 – Расчетная схема примера задания Д3

Влияние вращения пластины на движение рассматриваемой материальной точки учитываем путем введения в рассмотрение эйлеровых сил инерции: переносной и кориолисовой.

Переносная сила инерции определяется по формуле

$$\overline{\Phi}^e = -m\overline{a}_e\,, \tag{3.4}$$

где $\overline{a}_e$ – переносное ускорение, то есть ускорение той точки тела *Д*, где в данный момент времени находится шарик. Поскольку тело вращается вокруг вертикальной оси, то это ускорение можно разложить

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n . \tag{3.5}$$

Так как вращение происходит с постоянной угловой скоростью, то $a_e^\tau = 0$. Нормальная составляющая ускорения направлена от точки к оси переносного вращения и по модулю равна

$$a_e^n = \omega^2 h , \tag{3.6}$$

где h – расстояние от точки до оси, согласно рисунку $h = r + x\sin\alpha$.

Тогда

$$a_e = a_e^n = \omega^2 r + \omega^2 x \sin\alpha . \tag{3.7}$$

Переносная сила инерции направлена противоположно переносному ускорению и по модулю равна

$$\Phi^e = m\left(\omega^2 r + \omega^2 x \sin\alpha\right). \tag{3.8}$$

Кориолисова сила инерции определяется по формуле

$$\bar{\Phi}^c = -m\bar{a}_c . \tag{3.9}$$

Считая относительную скорость шарика $\bar{v}$ положительной, получим направление кориолисова ускорения по правилу Жуковского – спроецируем вектор относительной скорости в плоскость, перпендикулярную угловой переносной скорости и повернем полученную проекцию на 90^0 в сторону переносного вращения. Кориолисово ускорение направлено в сторону, противоположную оси y. Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega v. \tag{3.10}$$

Кориолисова сила инерции направлена противоположно кориолисовому ускорению и по модулю равна

$$\Phi^c = 2m\omega v. \tag{3.11}$$

Запишем основное уравнение динамики относительного движения точки

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k^a + \bar{N} + \bar{\Phi}^e + \bar{\Phi}^c, \tag{3.12}$$

где $\bar{a}$ - относительное ускорение материальной точки; $\sum \bar{F}_k^a$ – сумма активных сил, действующих на точку.

Спроецируем уравнение (3.12) на подвижные оси *x*, *y*, *z*, учитывая, что движение шарика происходит только вдоль оси *x*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F_{уп} - G\cos\alpha + \Phi^e \sin\alpha; \\ 0 = N_y + \Phi^c; \\ 0 = -G\sin\alpha + N_z - \Phi^e \cos\alpha. \end{cases} \tag{3.13}$$

Второе и третье уравнения системы позволят в дальнейшем определить реакцию желоба. Первое уравнение – дифференциальное уравнение движения, которое после подстановки значений сил и деления на массу принимает вид

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\left(x - l_0\right) - g\cos\alpha + \omega^2 r + \omega^2 x \sin\alpha. \tag{3.14}$$

(3.14) - дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки, с точки зрения математики это - дифференциальное уравнение второго порядка линейное с постоянными коэффициентами неоднородное.

3.2.3 Решение дифференциальных уравнений движения

Дифференциальное уравнение относительного движения точки

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\left(x - l_0\right) - g\cos\alpha + \omega^2 r + \omega^2 x\sin\alpha . \qquad (3.15)$$

Введем величину

$$k^2 = \frac{c}{m} - \omega^2 \sin\alpha . \qquad (3.16)$$

Значение $k^2 = \dfrac{2,4}{0,2} - 4^2 \cdot \sin 30° = 4$ с$^{-2}$. Формула (3.15) после разделения переменных и подстановки (3.16) принимает вид

$$\ddot{x} + k^2 x = -\frac{c}{m} l_0 - g\cos\alpha + \omega^2 r . \qquad (3.17)$$

Уравнение (3.17) является неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка. Решение такого уравнения можно записать как сумму

$$x = x^* + x^{**} . \qquad (3.18)$$

Здесь x^* – общее решение однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (3.17);

x^{**} – частное решение неоднородного уравнения (3.17).

Так как значение k^2 положительное, то решение однородного уравнения принимает форму

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3.19}$$

В этом уравнении C_1 и C_2 – постоянные.

Так как правая часть неоднородного уравнения (3.17) постоянная, то и частное решение ищем в виде постоянной, то есть $x^{**} = const \Rightarrow \ddot{x}^{**} = 0$. Тогда

$$x^{**} = \frac{1}{k^2}\left(-\frac{c}{m}l_0 - g\cos\alpha + \omega^2 r\right). \tag{3.20}$$

Подставляем (3.19) и (3.20) в (3.18)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{k^2}\left(-\frac{c}{m}l_0 - g\cos\alpha + \omega^2 r\right). \tag{3.21}$$

Относительная скорость шарика

$$v = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{3.22}$$

Постоянные интегрирования определяем с помощью начальных условий, которые имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0;\ \dot{x} = v_0. \tag{3.23}$$

После подстановки (3.23) в (3.21) и (3.22) получим

$$C_1 = x_0 + \frac{1}{k^2}\left(\omega^2 r - \frac{c}{m} l_0 - g\cos\alpha\right); \tag{3.24}$$

$$C_2 = \frac{v_0}{k}. \tag{3.25}$$

Подставляем значения постоянных в (3.21) и (3.22), получим закон движения шарика по желобу

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt - \frac{1}{k^2}\left(\omega^2 r - \frac{c}{m} l_0 - g\cos\alpha\right)\left(1 - \cos kt\right), \tag{3.26}$$

и закон изменения относительной скорости шарика

$$v = \dot{x} = -\left(x_0 + \frac{1}{k^2}\left(\omega^2 r - \frac{c}{m} l_0 - g\cos\alpha\right)\right) k\sin kt + v_0 \cos kt. \tag{3.27}$$

После подстановки исходных данных получим

$$x = 0,376 - 0,076\cos 2t; \tag{3.28}$$

$$v = \dot{x} = -1,352\sin 2t. \tag{3.29}$$

В исследуемый момент времени $x = 0,408$ м, $v = -0,206$ м/с.

Из второй и третьей формул (3.13) будем иметь

$$\begin{cases} N_y = -\Phi^c = -2m\omega v; \\ N_z = G\sin\alpha + \Phi^e\cos\alpha = mg\sin\alpha + m\left(\omega^2 r + \omega^2 x\sin\alpha\right)\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.30}$$

После подстановки значений $N_y = 0,33$ Н; $N_z = 4,32$ Н.

Воспользовавшись (3.4) получим значение реакции желоба

$$N = \sqrt{0,33^2 + 4,32^2} = 4,33\,\text{Н}. \quad (3.31)$$

4 Задание Д4. Колебания материальной точки

4.1 Постановка задания Д4

Задание для лабораторной работы выбирается в соответствии с номером варианта, выданного преподавателем. Последняя цифра номера соответствует номеру задачи (схемы к задачам представлены на рисунках 14-23). Необходимые для решения задачи исходные данные выбираются в соответствии с первой цифрой номера варианта по таблицам 4, 5 и 6.

Для каждого пункта представленных ниже задач необходимо определить закон движения материальной точки.

Задача 1:

а) груз D массой m_D и груз E массой m_E закреплены между пружинами, имеющими коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находятся в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 2:

а) груз D массой m_D прикреплен к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E и сообщают грузам скорость v_0, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 3:

а) груз D массой m_D и груз Е массой m_E закреплены между пружинами, имеющими коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находятся в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вправо;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 4:

а) груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикреплен к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 5:

а) в некоторый момент времени груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикрепляют к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и сообщают грузам скорость v_0, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 6:

а) груз D массой m_D прикреплен к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E и сообщают грузам скорость v_0, направленную вертикально вниз;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 7:

а) в некоторый момент времени груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикрепляют к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и сообщают грузам скорость v_0, направленную вертикально вниз;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 8:

а) груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикреплен к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вертикально вверх;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 9:

а) груз D массой m_D с закрепленным на нем грузом E массой m_E прикреплен к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вертикально вверх;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 0:

а) груз D массой m_D прикреплен к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени на груз D прикрепляют груз E массой m_E и сообщают грузам скорость v_0, направленную вертикально вниз;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Таблица 4 – Исходные данные задания Д4

Первая цифра номера варианта	m_D, кг	$S = S(t)$, м
0	9	$0,05 \cdot \sin(15t)$
1	3	$0,03 \cdot \sin(5t)$
2	10	$0,005 \cdot \sin(20t)$
3	8	$0,05 \cdot \sin(15t)$
4	4	$0,045 \cdot \sin(11t)$
5	6	$0,035 \cdot \sin(7t)$
6	1	$0,01 \cdot \sin(10t)$
7	7	$0,025 \cdot \sin(18t)$

8	5	$0,04\cdot\sin(12t)$
9	2	$0,015\cdot\sin(9t)$

Таблица 5 – Исходные данные задания Д4

Первая цифра номера варианта	c_1, Н/м	v_0, м/с	α, град
0	4000	0,1	30
1	10000	0,3	60
2	1000	0,4	45
3	7000	0,2	60
4	3000	0,45	45
5	5000	0,35	30
6	8000	0,15	60
7	2000	0,5	45
8	6000	0,25	60
9	9000	0,55	30

Таблица 6 – Исходные данные задания Д4

Первая цифра номера варианта	c_2, Н/м	m_E, кг	$R = R(v)$,Н
0	8000	6	$5000\cdot v$
1	2000	1	$20\cdot v$
2	6000	7	$4000\cdot v$
3	9000	4	$15\cdot v$
4	1000	9	$4500\cdot v$
5	1000	2	$10\cdot v$
6	4000	3	$5500\cdot v$
7	5000	8	$12\cdot v$
8	3000	10	$6000\cdot v$
9	7000	5	$18\cdot v$

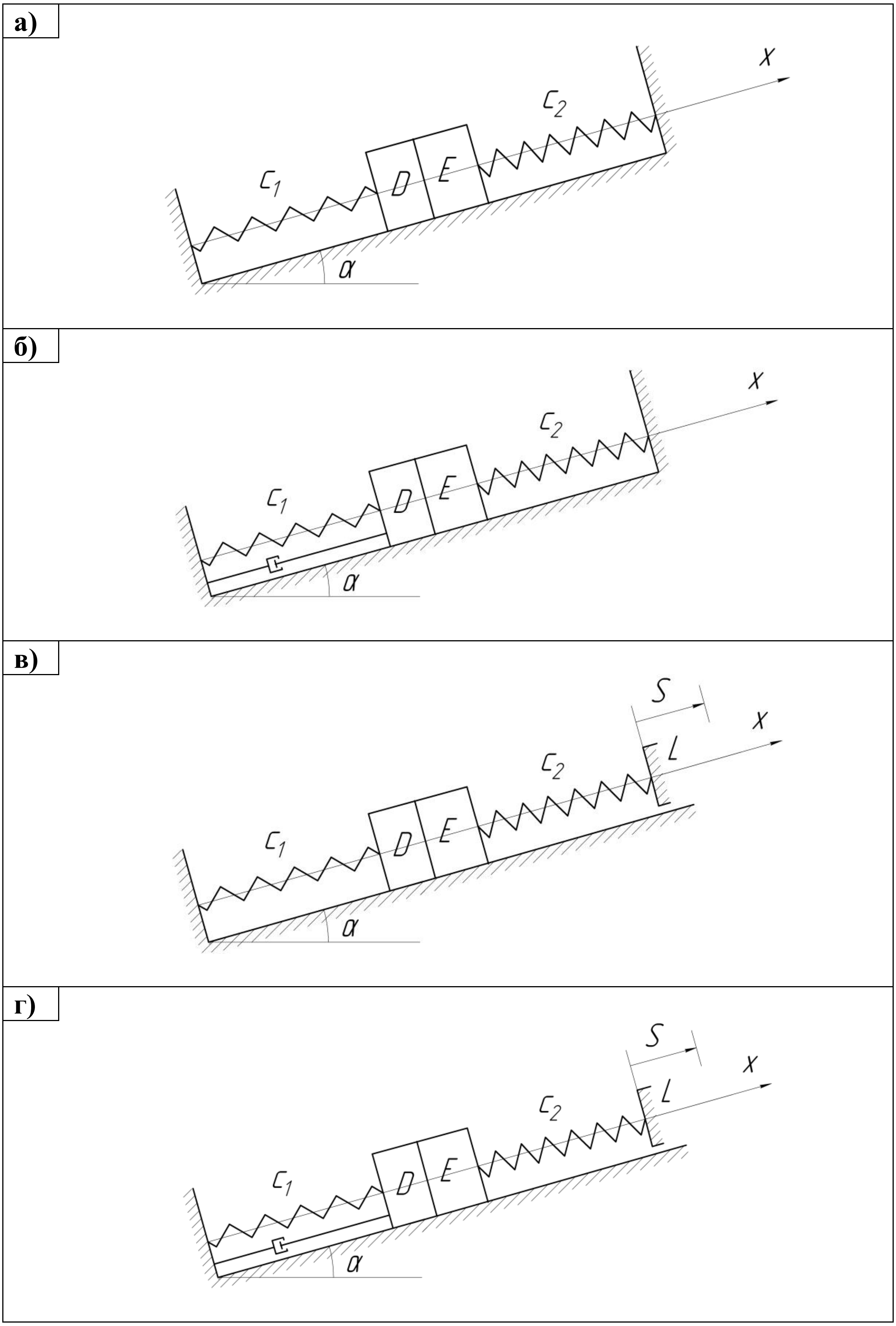


Рисунок 14 – Схемы к задаче 1

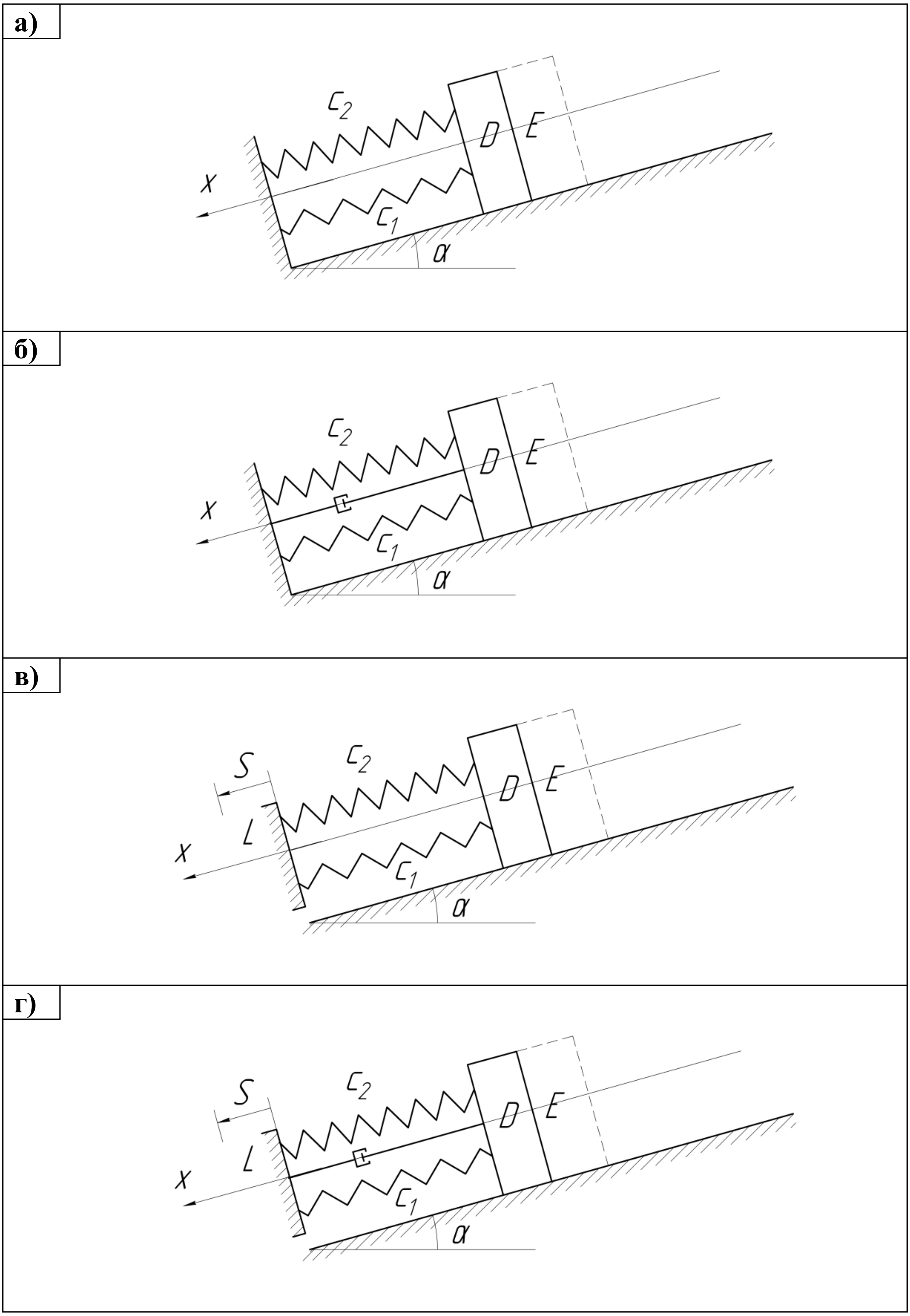


Рисунок 15 – Схемы к задаче 2

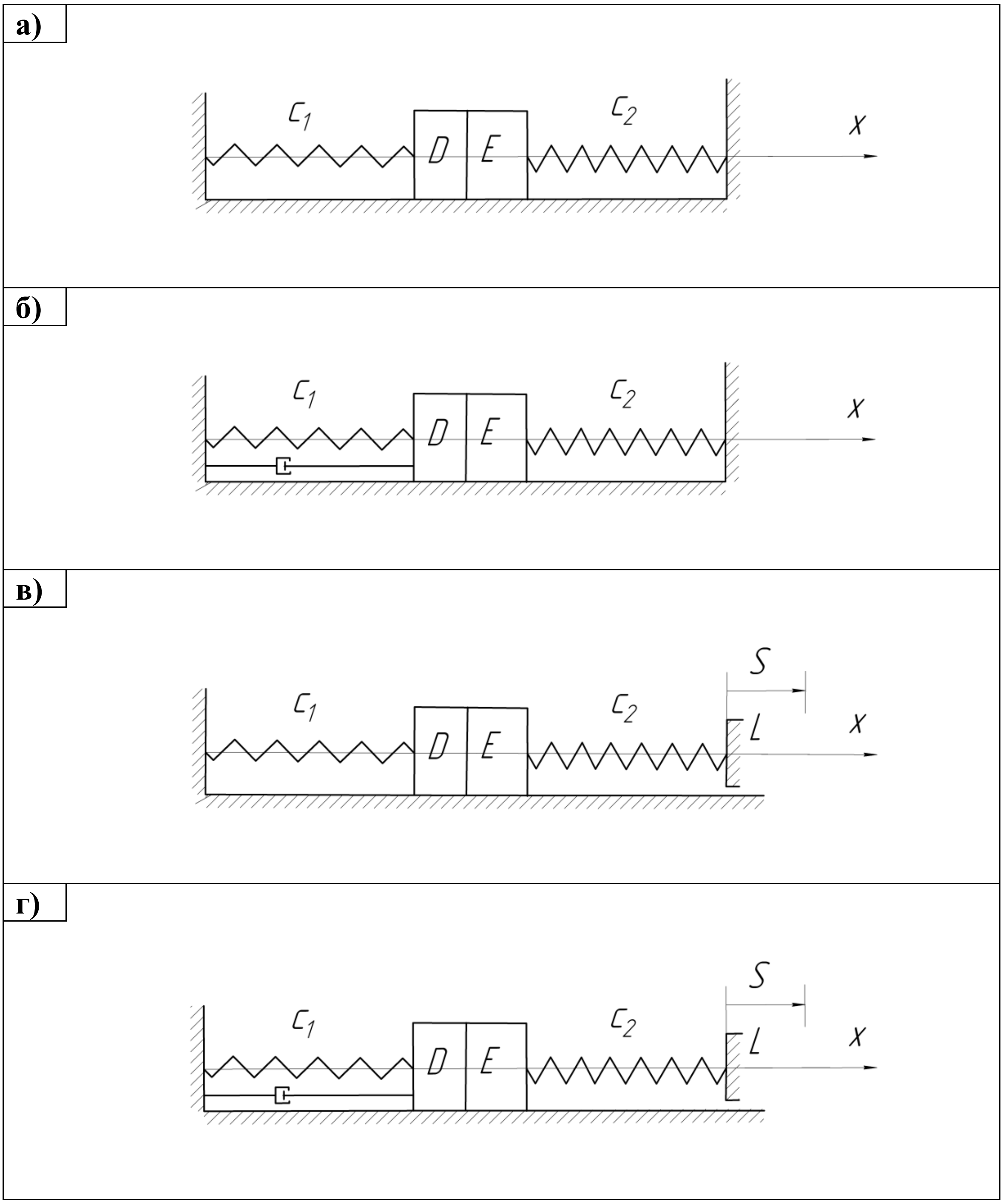


Рисунок 16 – Схемы к задаче 3

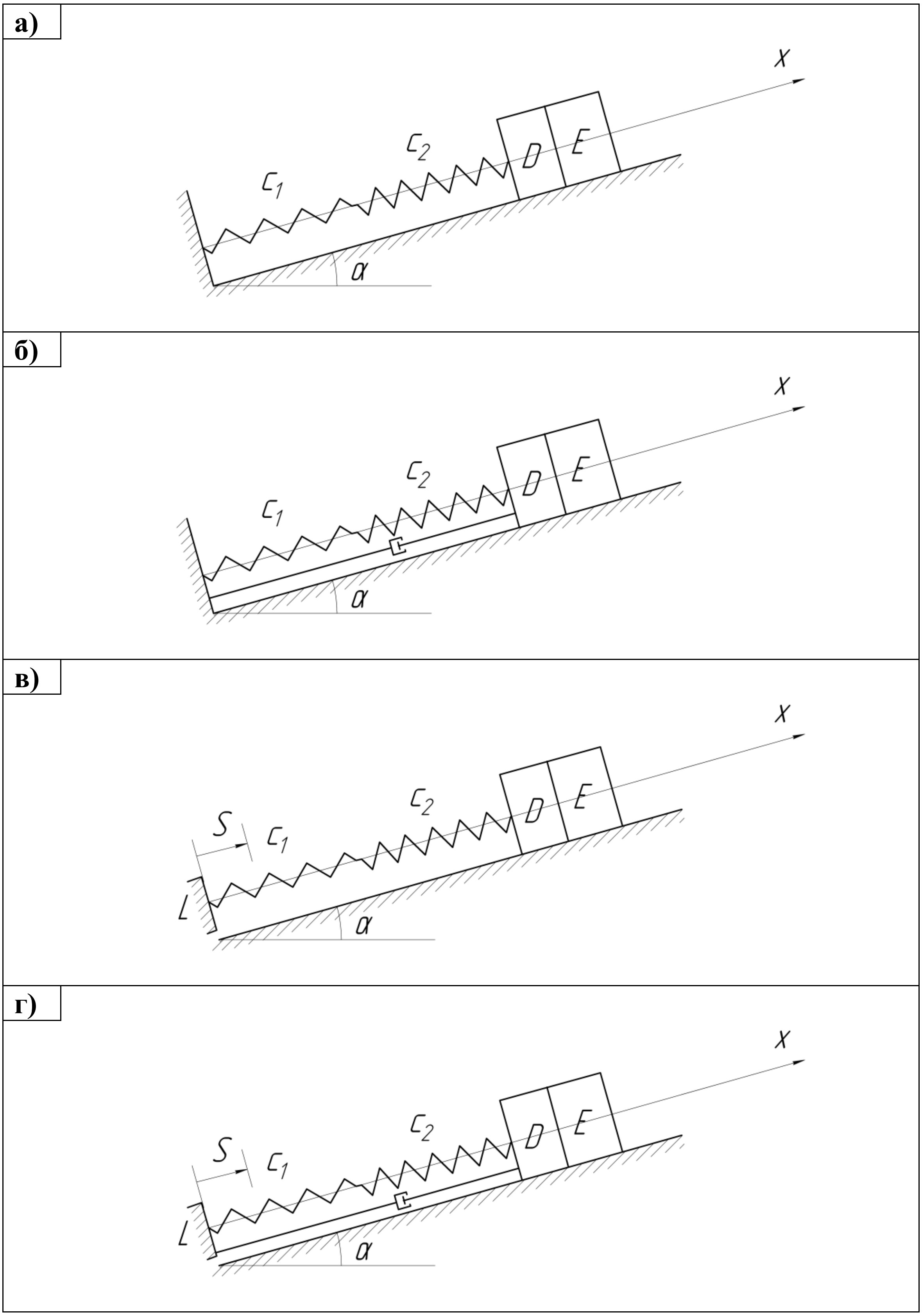


Рисунок 17 – Схемы к задаче 4

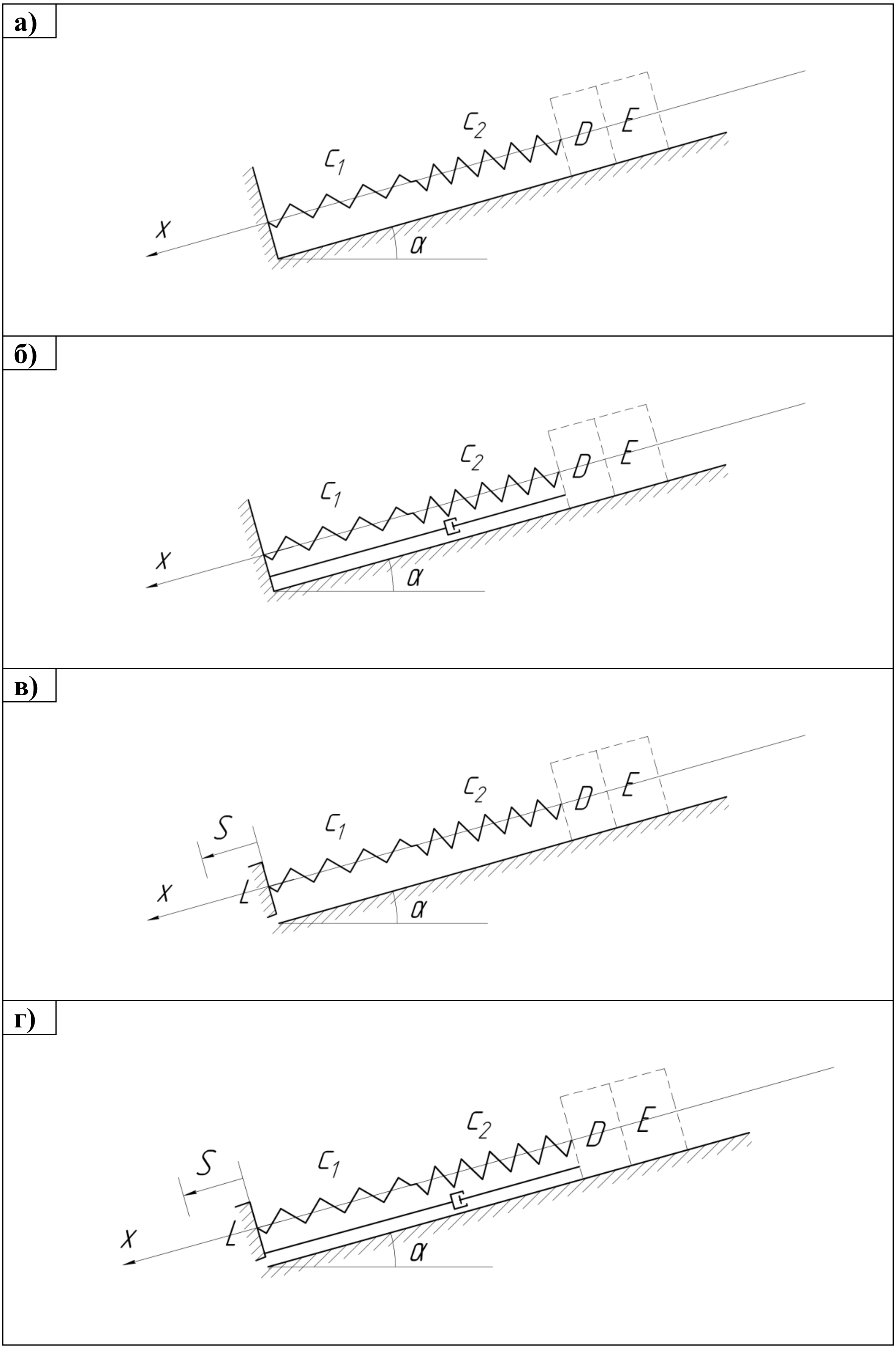


Рисунок 18 – Схемы к задаче 5

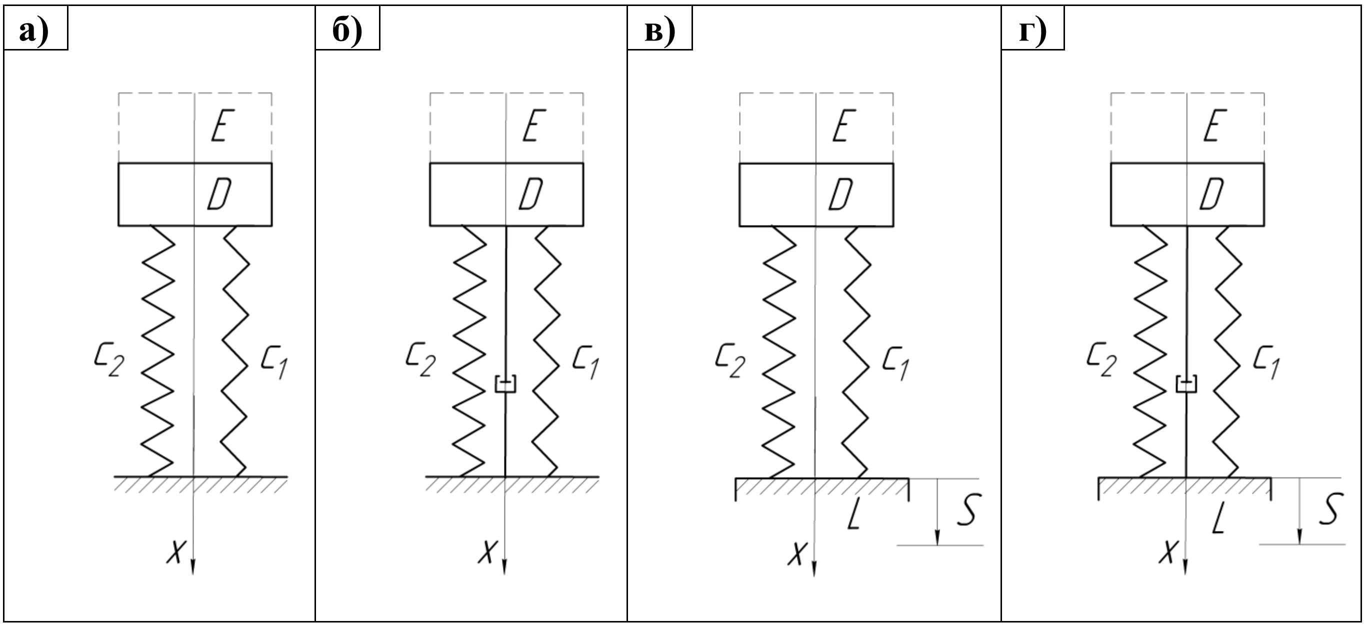


Рисунок 19 – Схемы к задаче 6

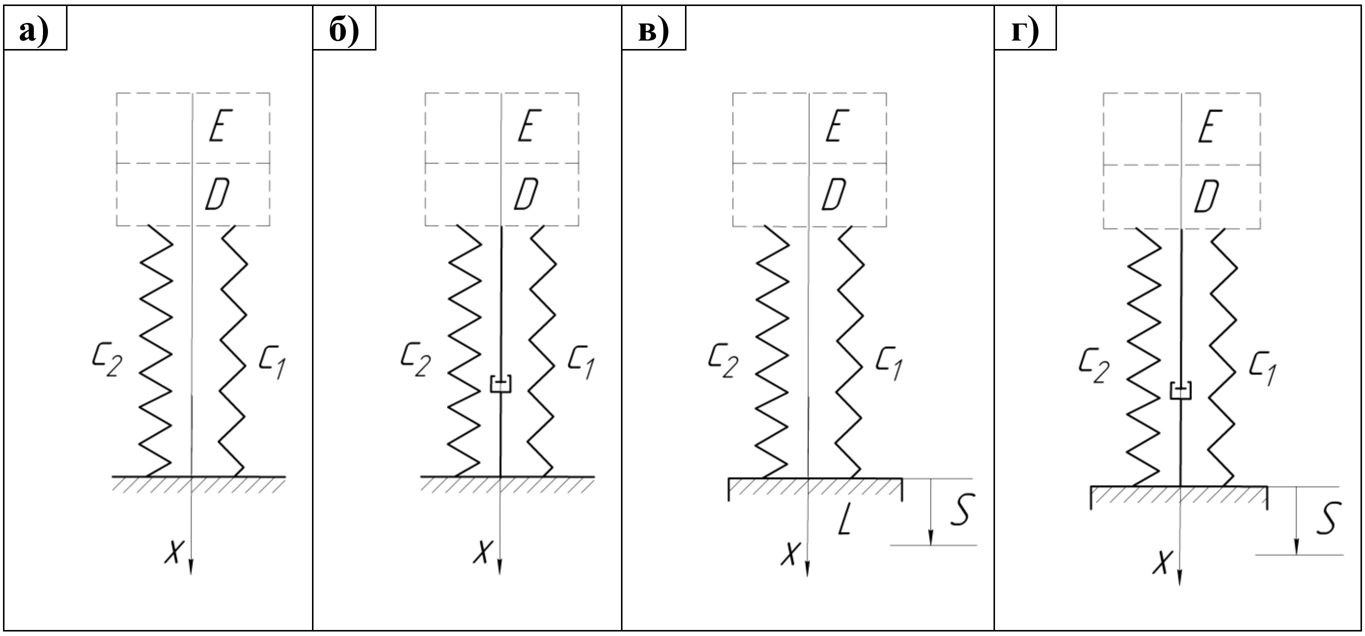


Рисунок 20 – Схемы к задаче 7

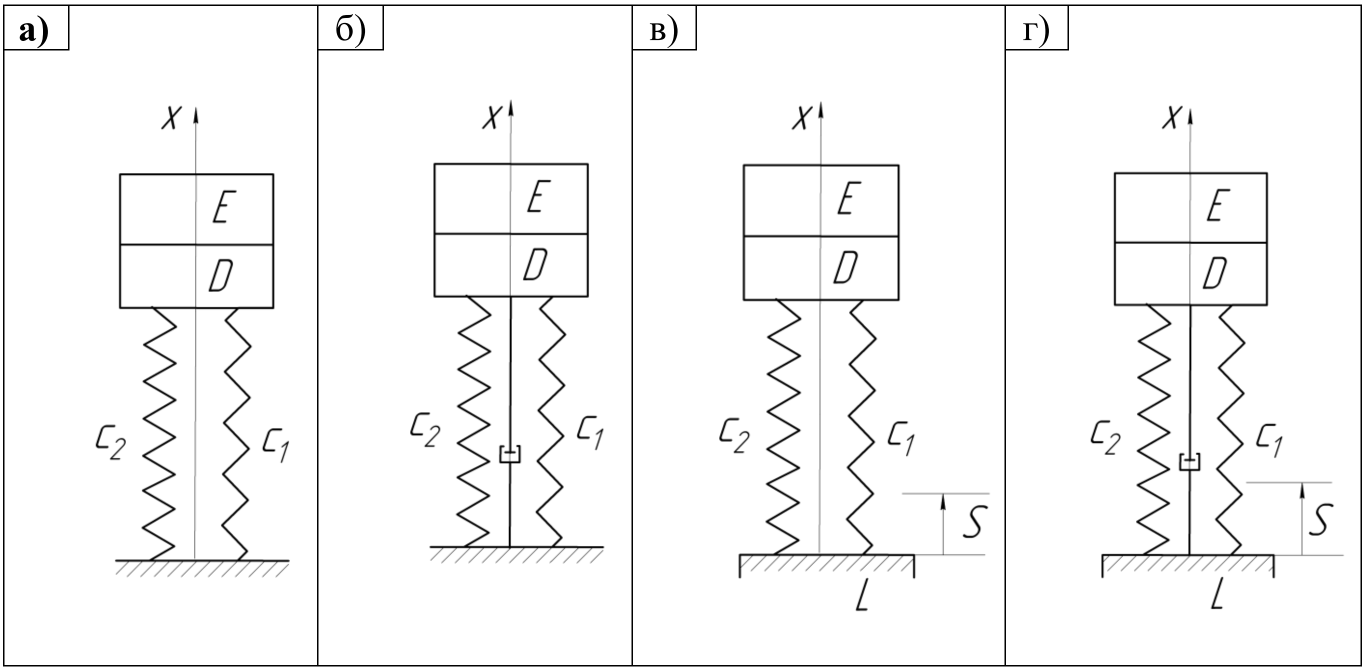


Рисунок 21 – Схемы к задаче 8

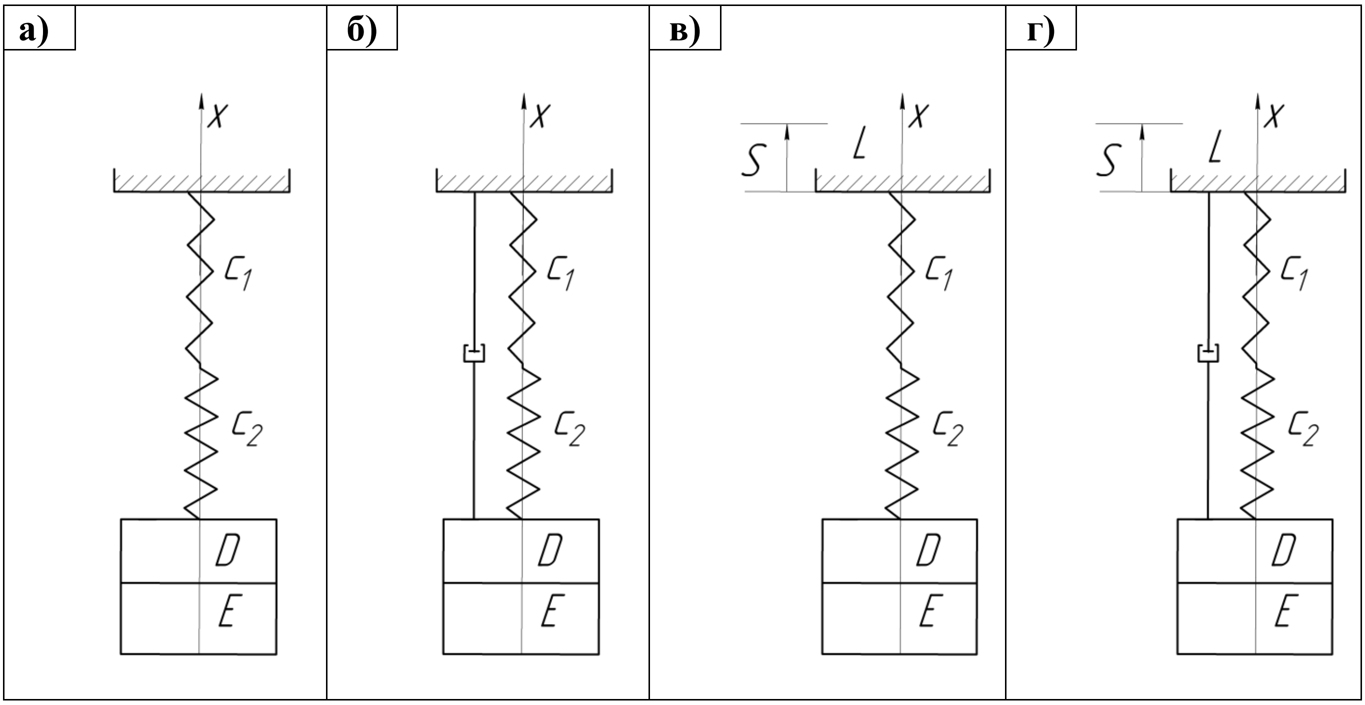


Рисунок 22 – Схемы к задаче 9

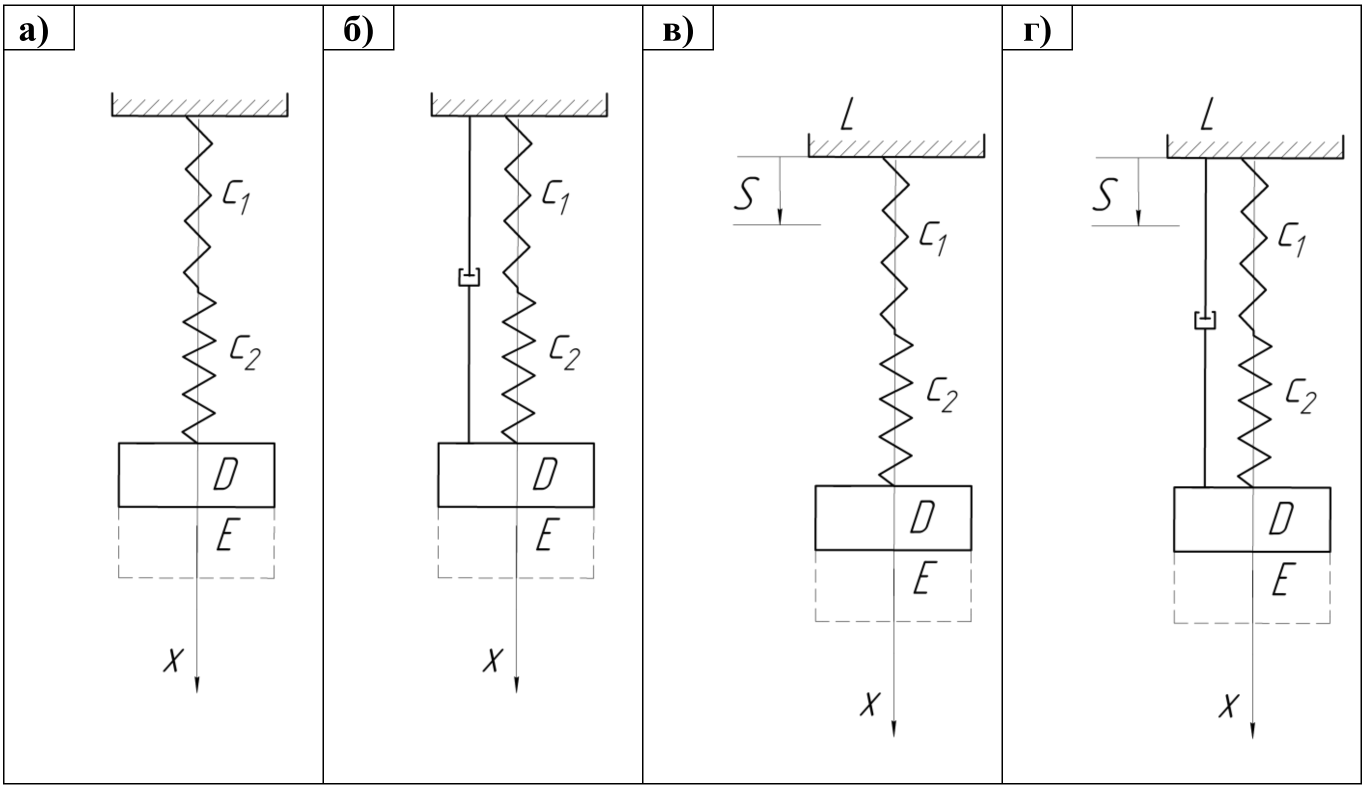


Рисунок 23 – Схемы к задаче 0

4.2 Пример выполнения задания Д4

Схема к примеру представлена на рисунке 24:

а) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°;

б) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3 = 3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению, пропорциональную скорости груза, $R = 19 \cdot v$ Н;

в) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°. В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = 0,06 \cdot \sin(16t)$ м;

г) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°. В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = 0,06 \cdot \sin(16t)$ м. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению, пропорциональную скорости груза $R = 19 \cdot v$ Н.

Для каждого пункта представленной задачи необходимо определить закон движения материальной точки и построить график соответствующих колебаний точки. Для пунктов в) и г) необходимо так же построить графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

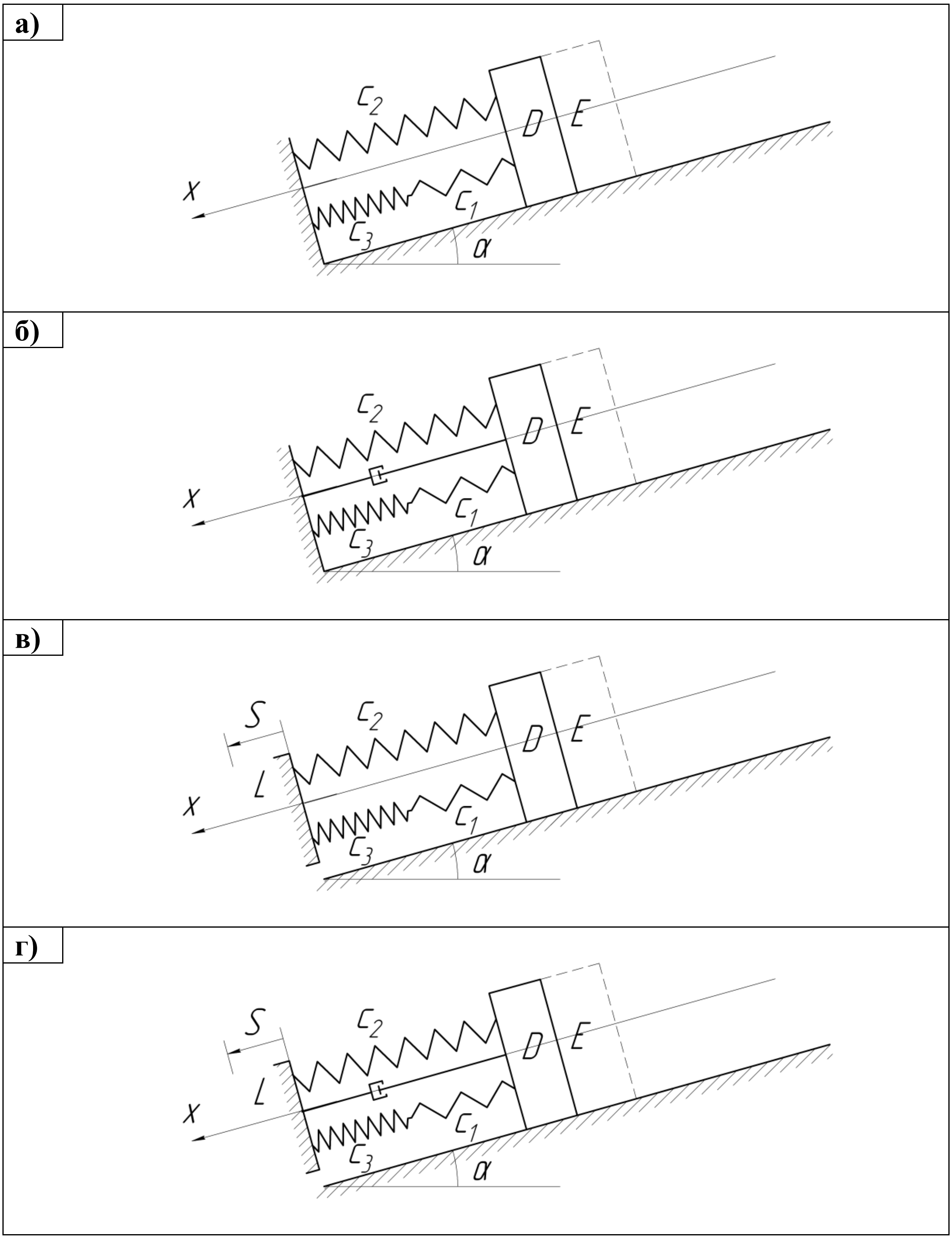


Рисунок 24 – Схемы к примеру

Решение случая а) примера.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°.

Найти: $x(t)$.

Решение:

1) заменим три пружины, используемые в задаче, одной эквивалентной. Для этого заменим последовательно соединенные пружины с жесткостями c_1 и c_3 эквивалентной пружиной с жесткостью:

$$c_{экв1} = \frac{c_1 \cdot c_3}{c_1 + c_3} = \frac{1000 \cdot 3000}{1000 + 3000} = 750 \text{ Н/м.} \tag{4.1}$$

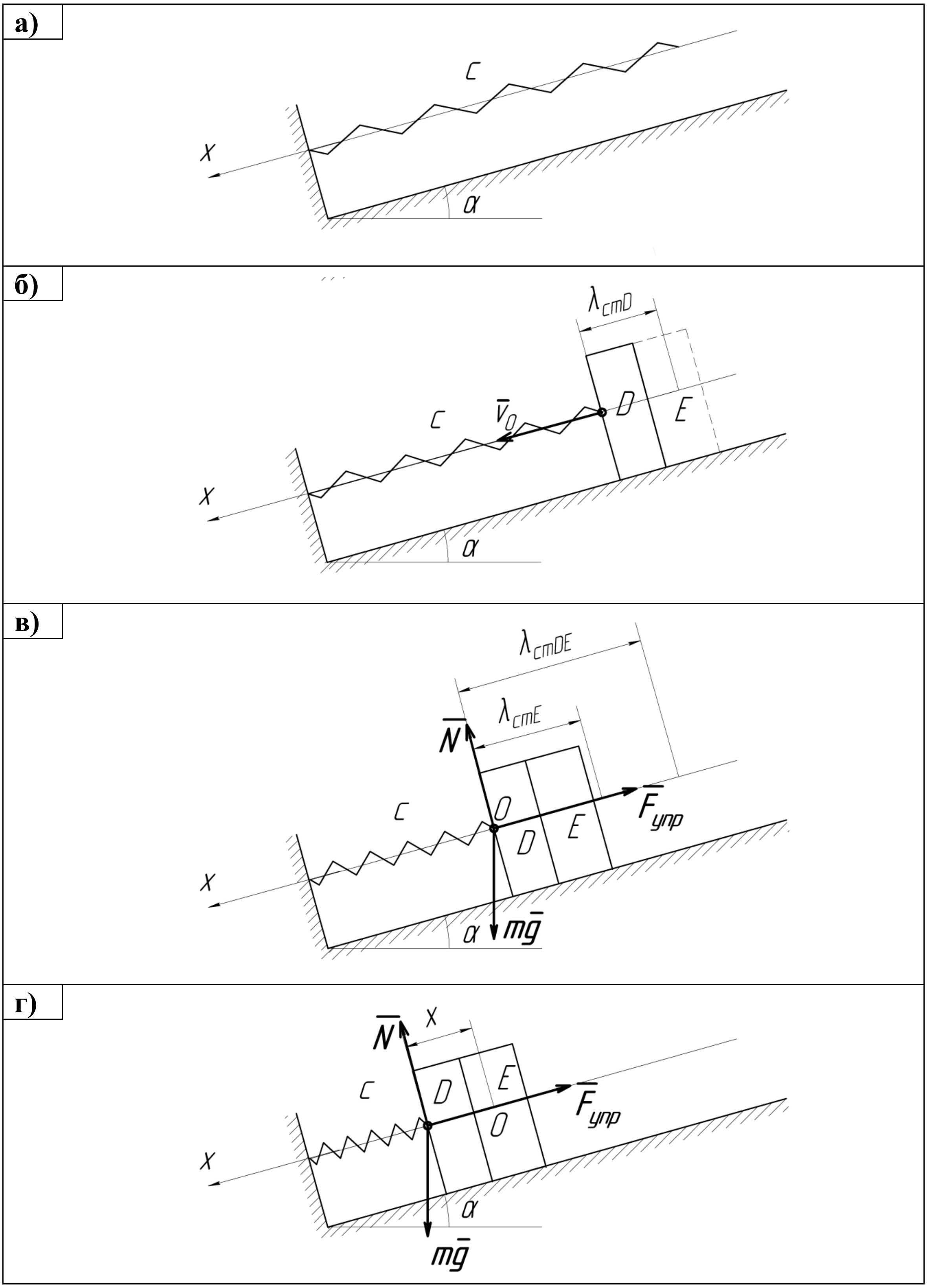
Получим две параллельные пружины с жесткостями c_2 и $c_{экв1}$, которые также заменим одной эквивалентной пружиной, жесткость которой определим по формуле:

$$c = c_{экв1} + c_2 = 2750 \text{ Н/м.} \tag{4.2}$$

Для лучшего понимания процесса деформации данной эквивалентной пружины покажем пружину в недеформированном состоянии (рисунок 25(а));

2) покажем груз D в состоянии покоя (рисунок 25(б)). В состоянии покоя груза D пружина находится в деформированном состоянии, обусловленным наличием веса груза. Деформация пружины составляет $\lambda_{стD}$. Данное положение соответствует моменту, когда на груз D установили груз E, но груз E еще не отпустили. Принимаем совокупность грузов за материальную точку, так как их размерами в условиях данной задачи можно пренебречь. Масса материальной точки будет равна сумме масс грузов:

$$m = m_D + m_E = 4 + 7 = 11 \text{ кг.} \tag{4.3}$$



а – недеформированная пружина; б – материальная точка в начальном положении; в – материальная точка в положении статического равновесия; г – материальная точка в произвольный момент движения.

Рисунок 25 – Свободные колебания без учета сопротивления

На рисунке грузы показаны условно, рассматриваемая нами материальная точка будет совпадать с концом пружины. В данный момент времени точка находится в начальном положении;

3) изобразим материальную точку, т.е. грузы D и E, в состоянии покоя (рисунок 25(в)). В данном положении статического равновесия точки сила упругости пружины уравновешивается силой тяжести точки. Деформация пружины составит $\lambda_{стDE}$. Данная деформация является суммой $\lambda_{стD}$ и деформации $\lambda_{стE}$, обусловленной наличием веса груза E. Приложим действующие на точку силы: силу упругости пружины $F_{упр}$, силу тяжести точки mg и нормальную реакцию опоры N. Так как колебания точки будут происходить относительно положения статического равновесия, совместим начало отсчета координаты x с данным положением точки.

Запишем уравнение равновесия точки:

$$\bar{F}_{упр} + m\bar{g} + \bar{N} = 0. \tag{4.4}$$

Сумма проекций сил на ось x:

$$-F_{упр} + mg \cdot \sin\alpha = 0. \tag{4.5}$$

Сила упругости пружины в данном случае равна $F_{упр} = c \cdot \lambda_{стDE}$, следовательно:

$$-c \cdot \lambda_{стDE} + mg \cdot \sin\alpha = 0; \tag{4.6}$$

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg и N (рисунок 25(г)).

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_{упр} + m\bar{g} + \bar{N}. \tag{4.7}$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot \sin\alpha. \tag{4.8}$$

Сила упругости пружины в данном случае равна $F_{упр} = c \cdot (\lambda_{cmDE} + x)$, следовательно:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{cmDE} + x) + mg \cdot \sin\alpha, \tag{4.9}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{cmDE} - c \cdot x + mg \cdot \sin\alpha. \tag{4.10}$$

Так в положении равновесия $-c \cdot \lambda_{cmDE} + mg \cdot \sin\alpha = 0$, следовательно:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x, \tag{4.11}$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0, \tag{4.12}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{c}{m} = k^2, \tag{4.14}$$

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0. \tag{4.15}$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + k^2 = 0, \tag{4.16}$$

$$z_{1,2} = \pm i \cdot k. \tag{4.17}$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$x = C_1 \cdot \cos(k \cdot t) + C_2 \cdot \sin(k \cdot t). \tag{4.18}$$

Закон изменения проекции скорости точки на ось *x*:

$$\dot{x} = -C_1 \cdot k \cdot \sin(k \cdot t) + C_2 \cdot k \cdot \cos(k \cdot t). \tag{4.19}$$

Начальные условия (рисунок 25):

$$\text{при } t=0 \;\; x_0 = -\lambda_{cmE},\; \dot{x}_0 = v_0. \tag{4.20}$$

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{cmE}, \quad C_2 = \frac{v_0}{k}. \tag{4.21}$$

Закон движения точки в общем виде:

$$x = -\lambda_{cmE} \cdot \cos(k \cdot t) + \frac{v_0}{k} \cdot \sin(k \cdot t). \tag{4.22}$$

Определим используемые в законе постоянные.

Деформацию λ_{cmE} можно определить, записав уравнение равновесия груза *E*, закрепленного на эквивалентной пружине:

$$\bar{F}_{упр} + m_E \bar{g} + \bar{N} = 0, \tag{4.23}$$

$$-F_{упр} + m_E g \cdot \sin\alpha = 0, \tag{4.24}$$

$$-c \cdot \lambda_{стE} + m_E g \cdot \sin\alpha = 0, \tag{4.25}$$

$$\lambda_{стE} = \frac{m_E g \cdot \sin\alpha}{c} = \frac{7 \cdot 9{,}81 \cdot \sin 45^0}{2750} = 0{,}018 \text{ м.} \tag{4.26}$$

Так как $\frac{c}{m} = k^2$, следовательно:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2750}{11}} = 15{,}811 \text{ с}^{-1}, \tag{4.27}$$

$$\frac{v_0}{k} = \frac{0{,}5}{15{,}811} = 0{,}032 \text{ м.} \tag{4.28}$$

Таким образом, искомый закон движения точки:

$$x = -0{,}018 \cdot \cos(15{,}811 \cdot t) + 0{,}032 \cdot \sin(15{,}811 \cdot t). \tag{4.29}$$

Решение случая б) примера.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°, $R = 19 \cdot v$ Н.

Найти: $x(t)$.

Решение:

Пункты 1), 2) и 3) совпадают с одноименными пунктами для случая а) данного примера;

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg, N и R (рисунок 26).

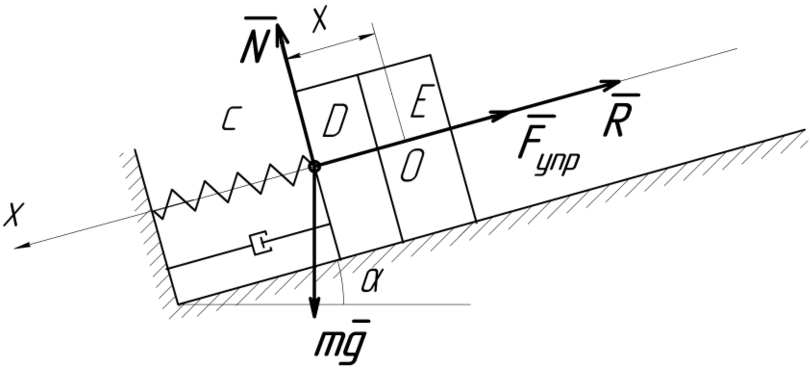


Рисунок 26 – Свободные колебания с учетом сопротивления

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_{упр} + m\bar{g} + \bar{N} + \bar{R}. \tag{4.30}$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot \sin\alpha - R, \tag{4.31}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{стDE} + x) + mg \cdot \sin\alpha - 19\dot{x}, \tag{4.32}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{стDE} - c \cdot x + mg \cdot \sin\alpha - 19\dot{x}, \tag{4.33}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - 19 \cdot \dot{x}. \tag{4.34}$$

Для этого случая $\mu = 19$ кг/с, поэтому:

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0, \tag{4.35}$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0, \tag{4.36}$$

$$\frac{c}{m} = k^2, \; \frac{\mu}{m} = 2n, \tag{4.37}$$

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0. \tag{4.38}$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + 2n \cdot z + k^2 = 0, \tag{4.39}$$

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}, \tag{4.40}$$

Определим и сравним величины n и k:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2750}{11}} = 15{,}811 \text{ с}^{-1}, \; n = \frac{\mu}{2 \cdot m} = \frac{19}{2 \cdot 11} = 0{,}864 \text{ с}^{-1}. \tag{4.41}$$

Так как $n < k$ будем иметь случай малого сопротивления.

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{4.42}$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{4.43}$$

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot k_1. \tag{4.44}$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$x = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(k_1 \cdot t)). \qquad (4.45)$$

Закон изменения проекции скорости на ось *x*:

$$\begin{aligned} \dot{x} = -n \cdot e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(k_1 \cdot t)) + \\ + e^{-n \cdot t}(-C_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t)). \end{aligned} \qquad (4.46)$$

Начальные условия:

$$\text{при } t=0 \;\; x_0 = -\lambda_{cmE},\; \dot{x}_0 = v_0. \qquad (4.47)$$

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{cmE}, \qquad (4.48)$$

$$v_0 = -n \cdot C_1 + C_2 \cdot k_1, \quad C_2 = \frac{v_0 - n \cdot \lambda_{cmE}}{k_1}. \qquad (4.49)$$

Закон движения точки в общем виде:

$$x = e^{-n \cdot t}(-\lambda_{cmE} \cdot \cos(k_1 \cdot t) + \frac{v_0 - n \cdot \lambda_{cmE}}{k_1} \cdot \sin(k_1 \cdot t)). \qquad (4.50)$$

Определим используемые в законе постоянные.

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{15{,}811^2 - 0{,}864^2} = 15{,}788 \text{ с}^{-1}, \qquad (4.51)$$

$$\lambda_{стE}=\frac{m_E g\cdot\sin\alpha}{c}=\frac{7\cdot 9{,}81\cdot\sin 45^0}{2750}=0{,}018\,\text{м},\qquad(4.52)$$

$$\frac{v_0-n\cdot\lambda_{стE}}{k_1}=\frac{0{,}5-0{,}864\cdot 0{,}018}{15{,}788}=0{,}031\text{м}.\qquad(4.53)$$

Таким образом, искомый закон движения точки:

$$x=e^{-0{,}864\cdot t}(-0{,}018\cdot\cos(15{,}788\cdot t)+0{,}031\cdot\sin(15{,}788\cdot t)).\qquad(4.54)$$

Решение случая в) примера.

Дано: m_D = 4 кг, m_E = 7 кг, c_1 = 1000 Н/м, c_2 = 2000 Н/м, c_3 = 3000 Н/м, v_0 = 0,5 м/с, α = 45°, $S=0{,}06\cdot\sin(16t)$ м.

Найти: $x(t)$.

Решение:

Пункты 1), 2) и 3) совпадают с одноименными пунктами для случая а) данного примера;

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg и N (рисунок 27).

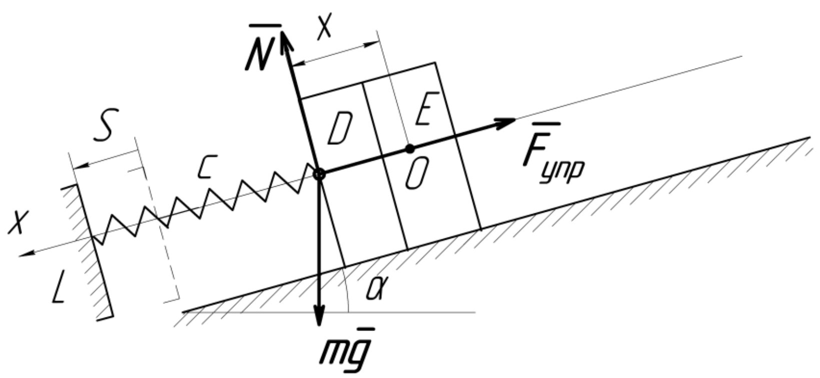


Рисунок 27 – Вынужденные колебания без учета сопротивления

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_{упр} + m\bar{g} + \bar{N}\,. \tag{4.55}$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot \sin\alpha\,. \tag{4.56}$$

Сила упругости пружины в данном случае равна $F_{упр} = c \cdot (\lambda_{стDE} + x - S)$, следовательно:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{стDE} + x - S) + mg \cdot \sin\alpha\,, \tag{4.57}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{стDE} - c \cdot x + c \cdot S + mg \cdot \sin\alpha\,, \tag{4.58}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + c \cdot 0{,}06 \cdot \sin(16t)\,. \tag{4.59}$$

Колебания ползуна L эквивалентны действию на точку возмущающей силы, проекция на ось x которой изменяется по закону $Q_0 \cdot \sin(p \cdot t)$, $p = 16$ с$^{-1}$, $Q_0 = 0{,}06 \cdot c = 0{,}06 \cdot 2750 = 165$ Н.

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + Q_0 \cdot \sin(p \cdot t)\,, \tag{4.60}$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot \sin(p \cdot t)\,, \tag{4.61}$$

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\cdot x=\frac{Q_0}{m}\cdot\sin(p\cdot t),\tag{4.62}$$

$$\frac{c}{m}=k^2,\quad \frac{Q_0}{m}=P_0,\tag{4.63}$$

$$\ddot{x}+k^2\cdot x=P_0\cdot\sin(p\cdot t).\tag{4.64}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x=x_1+x_2.\tag{4.65}$$

Однородное уравнение:

$$\ddot{x}_1+k^2\cdot x_1=0.\tag{4.66}$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2+k^2=0,\tag{4.67}$$

$$z_{1,2}=\pm i\cdot k.\tag{4.68}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_1=C_1\cdot\cos(k\cdot t)+C_2\cdot\sin(k\cdot t).\tag{4.69}$$

Принимаем x_2 в виде:

$$x_2=B\cdot\sin(p\cdot t),\tag{4.70}$$

$$-B\cdot p^2\cdot\sin(p\cdot t)+k^2\cdot B\cdot\sin(p\cdot t)=P_0\cdot\sin(p\cdot t), \tag{4.71}$$

$$-B\cdot p^2+k^2\cdot B=P_0, \tag{4.72}$$

$$B=\frac{P_0}{k^2-p^2}, \tag{4.73}$$

$$P_0=\frac{Q_0}{m}=\frac{165}{11}=15 \text{ Н/кг}, \quad k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{2750}{11}}=15{,}811 \text{ с}^{-1}, \tag{4.74}$$

$$B=\frac{P_0}{k^2-p^2}=\frac{15}{15{,}811^2-16^2}=-2{,}5\text{м}. \tag{4.75}$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$x_2=-2{,}5\cdot\sin(16\cdot t). \tag{4.76}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x=C_1\cdot\cos(k\cdot t)+C_2\cdot\sin(k\cdot t)+B\cdot\sin(p\cdot t). \tag{4.77}$$

Закон изменения проекции скорости:

$$\dot{x}=-C_1\cdot k\cdot\sin(k\cdot t)+C_2\cdot k\cdot\cos(k\cdot t)+B\cdot p\cdot\cos(p\cdot t). \tag{4.78}$$

Начальные условия:

$$\text{при } t=0 \;\; x_0=-\lambda_{cmE},\ \dot{x}_0=v_0. \tag{4.79}$$

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{cmE}, \quad \lambda_{cmE} = \frac{m_E g \cdot \sin\alpha}{c} = \frac{7 \cdot 9,81 \cdot \sin 45^0}{2750} = 0,018\,\text{м}, \tag{4.80}$$

$$v_0 = C_2 \cdot k + B \cdot p, \quad C_2 = \frac{v_0 - B \cdot p}{k} = \frac{0,5 + 2,5 \cdot 16}{15,811} = 2,562\,\text{м}. \tag{4.81}$$

Таким образом, искомый закон движения точки:

$$x = -0,018 \cdot \cos(15,811 \cdot t) + 2,562 \cdot \sin(15,811 \cdot t) - 2,5 \cdot \sin(16 \cdot t). \tag{4.82}$$

Решение случая г) примера.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°, $R = 19 \cdot v$ Н, $S = 0,06 \cdot \sin(16t)$ м.

Найти: $x(t)$.

Решение:

Пункты 1), 2) и 3) совпадают с одноименными пунктами для случая а) данного примера;

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg, N и R (рисунок 28).

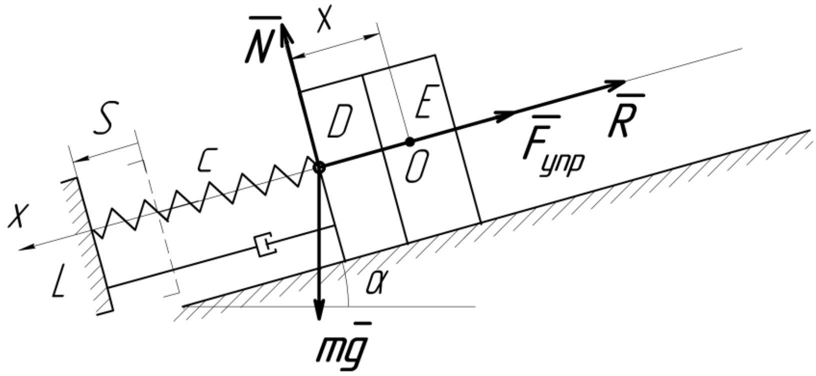


Рисунок 28 – Вынужденные колебания с учетом сопротивления

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_{упр} + m\bar{g} + \bar{N} + \bar{R}. \qquad (4.83)$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot \sin\alpha - R, \qquad (4.84)$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{стDE} + x - S) + mg \cdot \sin\alpha - 19\dot{x}, \qquad (4.85)$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{стDE} - c \cdot x + c \cdot S + mg \cdot \sin\alpha - 19\dot{x}, \qquad (4.86)$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + c \cdot 0{,}06 \cdot \sin(16t) - 19 \cdot \dot{x}, \qquad (4.87)$$

$$p = 16 \text{ с}^{-1}, \ Q_0 = 0{,}06 \cdot c = 0{,}06 \cdot 2750 = 165 \text{ Н}, \ \mu = 19 \text{ кг/с}, \qquad (4.88)$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x} + Q_0 \cdot \sin(p \cdot t), \qquad (4.89)$$

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot \sin(p \cdot t), \qquad (4.90)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{Q_0}{m} \cdot \sin(p \cdot t), \qquad (4.91)$$

$$\frac{c}{m} = k^2, \ \frac{\mu}{m} = 2n, \ \frac{Q_0}{m} = P_0, \qquad (4.92)$$

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \cdot \sin(p \cdot t). \tag{4.93}$$

Однородное уравнение:

$$\ddot{x}_1 + 2n \cdot \dot{x}_1 + k^2 \cdot x_1 = 0. \tag{4.94}$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + 2n \cdot z + k^2 = 0, \tag{4.95}$$

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \tag{4.96}$$

Определим и сравним величины n и k:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2750}{11}} = 15{,}811 \ \text{с}^{-1}, \ n = \frac{\mu}{2 \cdot m} = \frac{19}{2 \cdot 11} = 0{,}864 \ \text{с}^{-1}. \tag{4.97}$$

Так как $n < k$ будем иметь случай малого сопротивления.

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{4.98}$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \tag{4.99}$$

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot k_1. \tag{4.100}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_1 = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(k_1 \cdot t)). \tag{4.101}$$

Частное решение x_2:

$$x_2 = B \cdot \sin(p \cdot t - \beta), \tag{4.102}$$

$$\begin{gathered}-B \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t - \beta) + 2n \cdot B \cdot p \cdot \cos(p \cdot t - \beta) + \\ +k^2 \cdot B \cdot \sin(p \cdot t - \beta) = P_0 \cdot \sin(p \cdot t),\end{gathered} \tag{4.103}$$

$$p \cdot t - \beta = \psi, \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}&B(k^2 - p^2) \cdot \sin\psi + 2n \cdot B \cdot p \cdot \cos\psi = \\ &= P_0(\cos\beta \cdot \sin\psi + \cos\psi \cdot \sin\beta),\end{aligned} \tag{4.105}$$

$$B(k^2 - p^2) = P_0 \cdot \cos\beta, \quad 2n \cdot B \cdot p = P_0 \cdot \sin\beta. \tag{4.106}$$

Определим значения B и β:

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \ \mathrm{tg}\beta = \frac{2n \cdot p}{k^2 - p^2}, \tag{4.107}$$

$$P_0 = \frac{Q_0}{m} = \frac{165}{11} = 15 \text{ Н/кг}, \tag{4.108}$$

$$B = \frac{15}{\sqrt{(15{,}811^2 - 16^2)^2 + 4 \cdot 0{,}864^2 \cdot 16^2}} = 0{,}53 \text{м}, \tag{4.109}$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{2n \cdot p}{k^2 - p^2} = \mathrm{arctg}\frac{2 \cdot 0{,}864 \cdot 16}{15{,}811^2 - 16^2} = 1{,}357 \text{ рад.} \tag{4.110}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = e^{-n\cdot t}(C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(k_1 \cdot t)) + B \cdot \sin(p \cdot t - \beta). \tag{4.111}$$

Закон изменения проекции скорости:

$$\begin{aligned} \dot{x} = -n \cdot e^{-n\cdot t}(C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(k_1 \cdot t)) + \\ + e^{-n\cdot t}(-C_1 \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot t)) + B \cdot p \cdot \cos(p \cdot t - \beta). \end{aligned} \tag{4.112}$$

Начальные условия:

$$\text{при } t=0 \;\; x_0 = -\lambda_{cmE},\, \dot{x}_0 = v_0. \tag{4.113}$$

Постоянные интегрирования:

$$-\lambda_{cmE} = C_1 + B \cdot \sin(-\beta), \quad C_1 = -\lambda_{cmE} - B \cdot \sin(-\beta), \tag{4.114}$$

$$\lambda_{cmE} = \frac{m_E g \cdot \sin\alpha}{c} = \frac{7 \cdot 9,81 \cdot \sin 45^0}{2750} = 0,018 \text{ м}, \tag{4.115}$$

$$C_1 = -0,018 - 0,53 \cdot \sin(-1,357) = 0,5 \text{ м}, \tag{4.116}$$

$$v_0 = -n \cdot C_1 + C_2 \cdot k_1 + B \cdot p \cdot \cos(-\beta), \tag{4.117}$$

$$C_2 = \frac{v_0 + n \cdot C_1 - B \cdot p \cdot \cos(-\beta)}{k_1}, \tag{4.118}$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{15,811^2 - 0,864^2} = 15,788 \text{ с}^{-1}, \tag{4.119}$$

$$C_2 = \frac{0,5 + 0,864 \cdot 0,5 - 0,53 \cdot 16 \cdot \cos(-1,357)}{15,788} = -0,055 \text{ м}. \tag{4.120}$$

Таким образом, закон движения точки будет иметь вид:

$$x = e^{-0,864 \cdot t}(0,5 \cdot \cos(15,788 \cdot t) - 0,055 \cdot \sin(15,788 \cdot t)) + \\ +0,53 \cdot \sin(16 \cdot t - 1,357). \tag{4.121}$$

5 Задание Д5. Применение общих теорем динамики к исследованию движения механической системы

5.1 Постановка задания Д5

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел, движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен *f*, коэффициент трения при качении равен δ.

Пользуясь общими теоремами динамики, определить ускорение и скорость тела *1* в момент времени t_1, а также натяжения нитей между телами и реакции опор. Проверить полученное значение скорости тела *1* с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Исходные данные для работы формируются по номеру варианта: первая цифра варианта – номер строки с данными из таблицы 7 задания, вторая цифра варианта – номер схемы задания из рисунка 29.

Таблица 7 – Исходные данные задания Д5

Первая цифра номера варианта	m_1	m_2	m_3	r_2/R_2	i_{2x}/R_2	δ/R_3	R_3, см	f	α	t_1, с
0	3m	m	m	0,5	0,8	0,01	20	0,2	30	1,2
1	4m	2m	m	0,2	0,9	0,02	25	0,1	60	0,5
2	5m	3m	3m	0,6	0,8	0,025	50	0,25	30	1,0
3	2m	m	m/2	0,5	0,7	0,03	30	0,4	30	1,5
4	m	2m	m/5	0,4	0,7	0,01	28	0	60	1,0
5	4m	3m	2m	0,8	0,8	0,02	35	0,3	30	0,5
6	2m	m	m	0,3	0,9	0,03	25	0,2	45	1,5
7	3m	2m	1,5m	0,2	0,6	0,025	20	0,1	60	2,0
8	m	m	m	0,5	0,7	0,01	40	0,25	45	1,0
9	5m	2m	4m	0,6	0,8	0,02	45	0,3	30	0,5

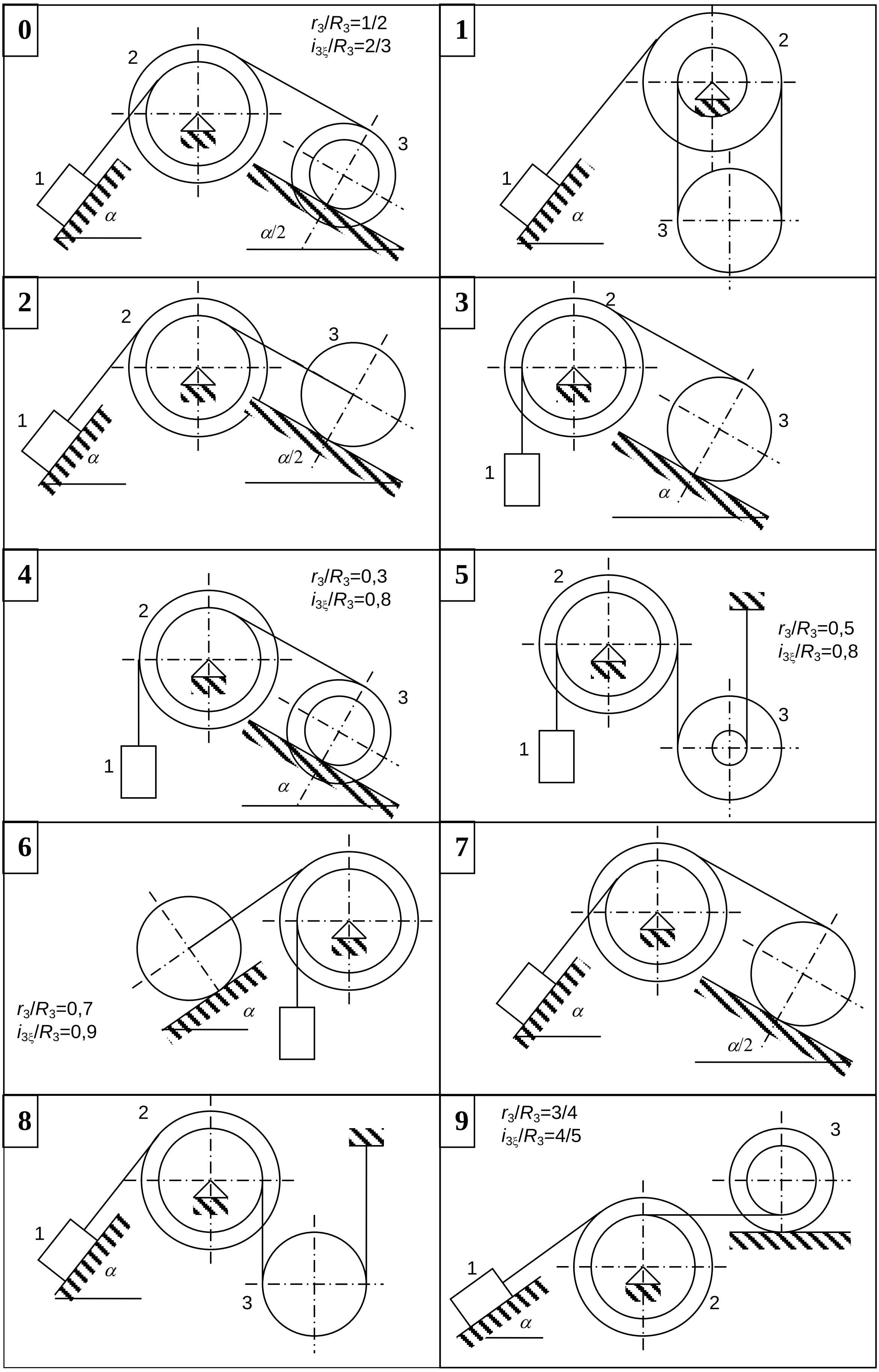


Рисунок 29 – Исходные схемы задания Д5

Принять при расчетах m = 1,02 кг, g = 9,81 м/с^2. Если значение $i_{3\xi}$ для катка не задано, то считать его однородным круглым цилиндром.

5.2 Пример выполнения задания Д5

Система, состоящая из трех абсолютно твердых тел (рисунок 30), движется под действием сил тяжести. Тела соединены гибкими нерастяжимыми нитями. Коэффициент трения скольжения между телами и неподвижными поверхностями равен f, коэффициент трения при качении равен δ. Исходные данные для примера приведены в таблице 8.

Пользуясь общими теоремами динамики определить ускорение и скорость тела 1 в момент времени t_1, а также натяжения нитей между телами и реакции опор.

Проверить полученное значение скорости тела 1 с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Таблица 8 – Исходные данные для примера задания Д5

m_1	m_2	m_3	r_2/R_2	i_{2x}/R_2	δ/R_3	R_3, см	f	t_1, с
5m	m	2m	2/3	4/5	1/20	20	0,1	1

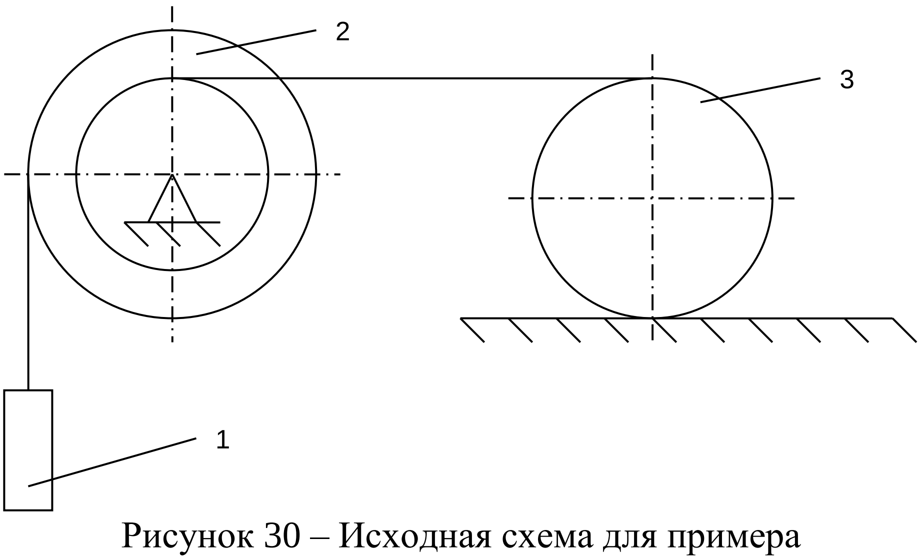


Рисунок 30 – Исходная схема для примера

Решение:

Кинематический анализ системы.

Установим зависимость между кинематическими характеристиками тел системы и выразим все характеристики через характеристики движения тела 1, для этого составим уравнения связей.

Выразим скорости точки *A* и *B* блока через угловую скорость блока (рисунок 31а):

$$v_A = \omega_2 R_2, \tag{5.1}$$

$$v_B = \omega_2 r_2. \tag{5.2}$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС) плоскодвижущегося катка находится в точке соприкосновения катка и неподвижной поверхности. Скорости точек *C* и *D* катка:

$$v_C = \omega_3 R_3, \tag{5.3}$$

$$v_D = \omega_3 \cdot 2R_3. \tag{5.4}$$

Скорости груза и точки *A* блока равны, откуда

$$v_1 = \omega_2 R_2, \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}. \tag{5.5}$$

Скорости точек Вблока и Dкатка равны

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 \cdot 2R_3, \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{2R_3} = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3}, \tag{5.6}$$

$$v_C = \frac{v_1 r_2}{2R_2 R_3} R_3 = \frac{v_1 r_2}{2R_2}. \tag{5.7}$$

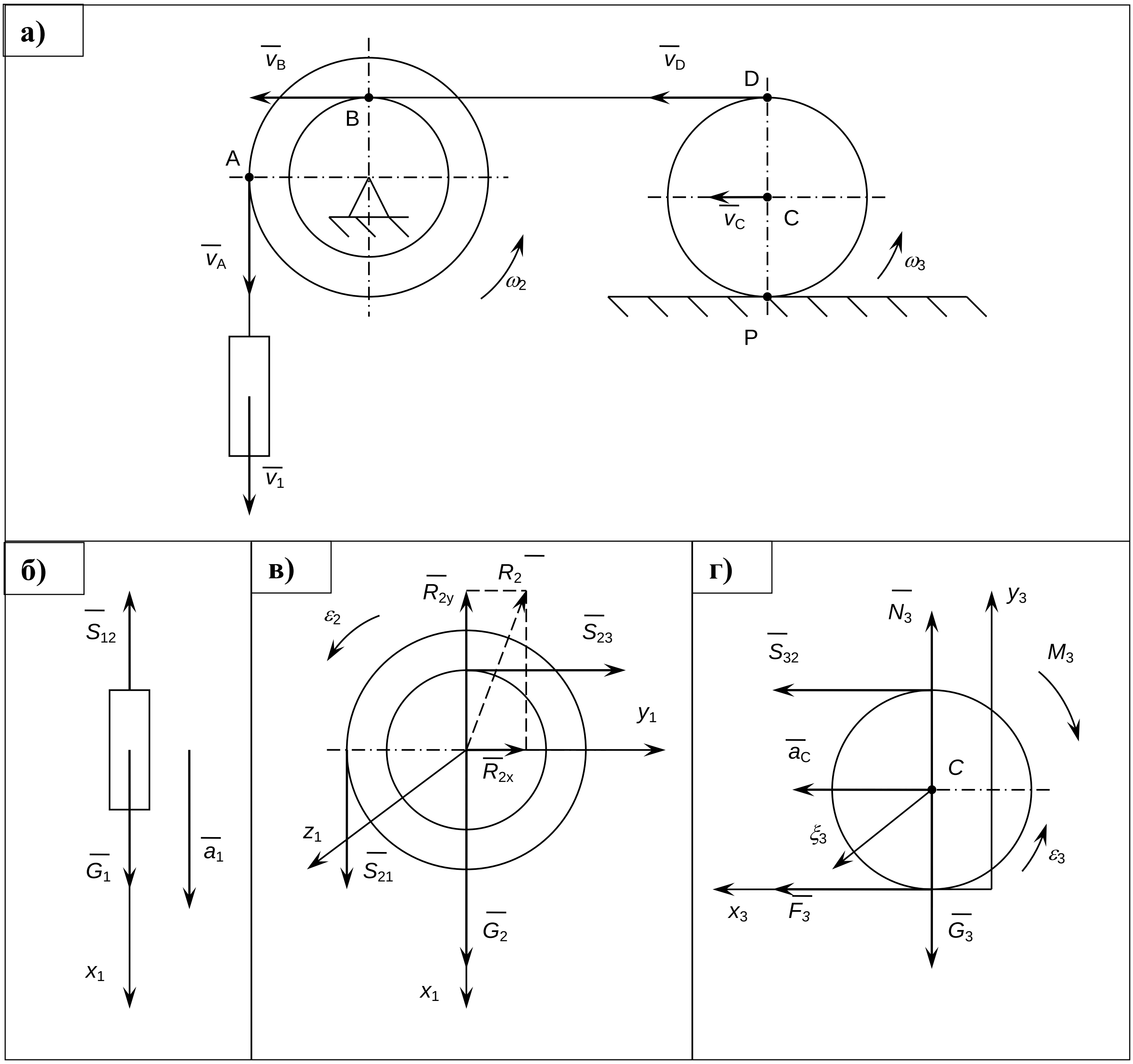


Рисунок 31 – Расчетная схема системы

Полученные уравнения являются уравнениями связи для системы груз-блок-каток. Установим зависимости между ускорениями

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{dv_1}{dt} = \frac{a_1}{R_2}, \tag{5.8}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_1 r_2}{2R_2R_3}\right) = \frac{a_1 r_2}{2R_2R_3}, \tag{5.9}$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = R_3\frac{d\omega_3}{dt} = R_3\varepsilon_3 = \frac{a_1 r_2}{2R_2}. \tag{5.10}$$

Составление дифференциальных уравнений движения системы.

Составим дифференциальные уравнения движения тел системы, пользуясь теоремой о движении центра масс:

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^{n}\bar{F}_k^e \tag{5.10}$$

и теоремой об изменении кинетического момента относительно оси вращения или подвижной оси, проходящей через центр масс, при плоскопараллельном движении:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\bar{F}_k^e\right). \tag{5.12}$$

Рассмотрим движение каждого тела системы в отдельности, учитывая связи между телами.

Рассмотрим движение груза 1. Груз совершает поступательное движение. Проведем ось x_1 вдоль линии движения тела в направлении движения тела, то есть вниз. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому положение груза полностью описывается координатой x_1, скорость тела $\bar{v}_1$ $(v_1 = \dot{x}_1)$, ускорение $\bar{a}_1$ $(a_1 = \ddot{x}_1)$.

Применим теорему о движении центра масс. При учете, что на тело действует сила тяжести $\bar{G}_1 (G_1 = m_1 g)$ и натяжение нити между телами 1 и 2 $\bar{S}_{12}$ (рисунок 31б), векторное выражение теоремы примет вид:

$$m_1 \bar{a}_1 = \bar{G}_1 + \bar{S}_{12}. \tag{5.13}$$

Проецируя выражение на ось x_1, получим дифференциальное уравнение движения груза 1

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S_{12}. \tag{5.14}$$

В данном уравнении содержится две неизвестных – ускорение груза и натяжение нити.

Рассмотрим движение блока 2. Блок совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси z_2, перпендикулярной плоскости чертежа. Положение вращающегося тела определяется его углом поворота φ_2, угловая скорость ω_2 $(\omega_2 = \dot{\phi}_2)$, угловое ускорение ε_2 $(\varepsilon_2 = \ddot{\phi}_2)$.

Блок находится под действием силы тяжести $\bar{G}_2 (G_2 = m_2 g)$, натяжения нитей между телами 2 и 1 $\bar{S}_{21}$ и телами 2 и 3 $\bar{S}_{23}$, а также реакции неподвижного шарнира $\bar{R}_2$ (рисунок 31в), которую можно представить как сумму двух составляющих по осям координат $\bar{R}_2 = \bar{R}_{2x_1} + \bar{R}_{2y_1}$. Модуль реакции:

$$R_2 = \sqrt{R_{2x_1}^2 + R_{2y_1}^2}. \tag{5.15}$$

На основании теоремы об изменении кинетического момента вращающегося тела получим дифференциальное уравнение вращения блока 2 относительно неподвижной оси:

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = S_{21} R_2 - T_{23} r_2, \tag{5.16}$$

здесь $J_2 = m_2 i_{2z}^2$ – момент инерции блока относительно оси вращения.

В конечном виде дифференциальное уравнение вращения блока

$$m_2 i_{2z}^2 \ddot{\varphi}_2 = S_{21} R_2 - S_{23} r_2. \tag{5.17}$$

В этом уравнении три неизвестных – угловое ускорение блока и натяжения нитей.

Рассмотрим движение катка. Каток катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, совершая плоскопараллельное движение. Разложим плоскопараллельное движение на два простейших: поступательное движение катка вместе с центром масс, которое задается координатами центра масс x_C и y_C (скорость и ускорение центра масс $\bar{v}_C$ и $\bar{a}_C$) и вращательное движение вокруг подвижной оси z_3, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения катка, которое задается углом поворота φ_3 (угловая скорость и угловое ускорение ω_3 и ε_3).

На каток действуют следующие силы: сила тяжести $\bar{G}_3$ ($G_3 = m_3 g$), натяжение нити между телами 3 и 2 $\bar{S}_{32}$ и реакция поверхности, которая раскладывается на нормальную реакцию $\bar{N}_3$ (направлена по нормали к соприкасаемым поверхностям), силу трения скольжения $\bar{F}_3$ (направленную по касательной к соприкасаемым поверхностям в сторону, противоположную возможному проскальзыванию тела по поверхности) и момент сопротивления качению $\bar{M}_3$ (направленный в сторону, противоположную качению тела) (рисунок 31г). Теорема о движении центра масс в применении к катку примет вид:

$$m_3 \bar{a}_C = \bar{G}_3 + \bar{S}_{32} + \bar{N}_3 + \bar{F}_3. \tag{5.18}$$

Выберем направления координатных осей: ось x_3направим вдоль поверхности, по которой катится тело в сторону движения, ось y_3 ей перпендикулярно, и спроецируем на них выражение теоремы:

$$m_3 \ddot{x}_C = S_{32} + F_3, \tag{5.19}$$

$$m_3 \ddot{y}_3 = N_3 - G_3. \tag{5.20}$$

Так как движения вдоль оси y_3 не происходит, то $\ddot{y}_3 = 0$, и выражение (5.20) позволит определить нормальную реакцию, с помощью которой можно определить силу трения скольжения и момент сопротивления качению

$$N_3 = G_3 = m_3 g\ , \tag{5.21}$$

$$M_3 = N_3 \delta = m_3 g \delta\ , \tag{5.22}$$

$$0 \le F_3 < N_3 f = m_3 g f\ . \tag{5.23}$$

Последнее условие является условием отсутствия проскальзывания.

Применим теорему об изменении кинетического момента катка относительно оси $\xi_{3:}$

$$J_3 \ddot{\phi}_3 = S_{32} R_3 - F_3 R_3 - M_3, \tag{5.24}$$

здесь $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$– момент инерции катка относительно оси ξ_3.

После подстановки значений получим:

$$\frac{m_3 R_3^2 \ddot{\phi}_3}{2} = S_{32} R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta\ . \tag{5.25}$$

Так как нити, связывающие тела системы, невесомые, то усилия в разных частях каждой нити равны, то есть

$$S_{12} = S_{21} = S_1,\ \ S_{23} = S_{32} = S_2. \tag{5.26}$$

После некоторых преобразований получим:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - S_1, \tag{5.27}$$

$$m_2 i_{2z}^2 \frac{\ddot{x}_1}{R_2} = S_1 R_2 - S_2 r_2, \tag{5.28}$$

$$m_3 \frac{\ddot{x}_1 r_2}{2R_2} = S_2 + F_3, \tag{5.29}$$

$$\frac{m_3 R_3 \ddot{x}_1 r_2}{4R_2} = S_2 R_3 - F_3 R_3 - m_3 g \delta. \tag{5.30}$$

Полученная система уравнений содержит четыре неизвестных величины. После подстановки исходных данных система принимает вид:

$$\begin{cases} 5m\ddot{x}_1 = 5mg - S_1, \\ \dfrac{16m\ddot{x}_1}{25} = S_1 - \dfrac{2}{3}S_2, \\ \dfrac{2m\ddot{x}_1}{3} = S_2 + F_3, \\ \dfrac{m\ddot{x}_1}{3} = S_2 - F_3 - \dfrac{mg}{10}. \end{cases} \tag{5.31}$$

Решение системы уравнений движения системы.

Из первых трех уравнений системы

$$S_1 = 5m(g - \ddot{x}_1), \tag{5.32}$$

$$S_2 = \frac{m}{50}\left(375g - 423\ddot{x}_1\right), \tag{5.33}$$

$$F_3 = \frac{m}{150}\left(1369\ddot{x}_1 - 1125g\right). \tag{5.34}$$

После преобразований получим

$$\ddot{x}_1 = \frac{2235}{2688}g = 0{,}831g = 8{,}16\ \text{м/с}^2. \tag{5.35}$$

Найдем значения реакций $S_1 = 0{,}845mg = 8{,}45\,\text{Н}$, $S_2 = 0{,}47mg = 4{,}7\,\text{Н}$, $F_3 = 0{,}084mg = 0{,}84\,\text{Н}$.

Определим оставшиеся реакции. Реакции поверхности на каток: $N_3 = 2mg = 20\,\text{Н}$, $M_3 = 2mg0{,}01 = 0{,}2\,\text{Н/м}$.

Проверим условие отсутствия проскальзывания $F_3 < 2mg0{,}1 = 2\,\text{Н}$. Следовательно, проскальзывание отсутствует.

Реакции опоры блока вычислим, используя теорему о движении центра масс блока, а так как центр масс лежит на оси вращения, то будем иметь:

$$\bar{G}_2 + \bar{R}_2 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 0. \tag{5.36}$$

Спроецируем выражение на оси x_1 и y_1

$$R_{2x_1} + S_2 = 0. \quad (5.37)$$

$$G_2 - R_{2y_1} + S_1 = 0. \quad (5.38)$$

Откуда $R_{2x_1} = -S_2 = -4,7$ Н, $R_{2y_1} = G_2 + S_1 = 18,45$ Н.

Отрицательный знак R_{2x1} говорит о том, что истинное направление этой реакции противоположно показанному на рисунке. Получим $R_2 = 19,04$ Н.

Решение дифференциального уравнения движения груза.

Ранее было определено, что положение груза полностью задается его координатой x_1. Поэтому получим уравнение движения груза, проинтегрировав его дифференциальное уравнение движения.

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = 8,16; \;\; d\dot{x}_1 = 8,16dt; \;\; \int d\dot{x}_1 = \int 8,16dt, \quad (5.39)$$

$$\dot{x}_1 = 8,16t + C_1, \quad (5.40)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = 8,16t + C_1; \;\; dx_1 = \left(8,16t + C_1\right)dt; \;\; \int d\dot{x}_1 = \int 8,16tdt + \int C_1 dt, \quad (5.41)$$

$$x_1 = 4,08t^2 + C_1 t + C_2. \quad (5.42)$$

В этих выражениях C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Определим их с помощью начальных условий, принимая начальное положение тела в начале координат.

При $t = 0$ $x_1 = x_{10} = 0$, $\dot{x}_1 = v_{10} = 0$.

Следовательно:

$$C_1 = v_{10} = 0, \;\; C_2 = x_{10} = 0. \quad (5.43)$$

Получим закон изменения скорости груза 1:

$$v_1 = \dot{x}_1 = 8{,}16t \quad (5.44)$$

и закон движения груза 1:

$$x_1 = 4{,}08t^2. \quad (5.45)$$

В заданный момент времени $t = t_1 = 1\,\text{с}$ $v_1 = 8{,}16$ м/с, $x_1 = 4{,}08$ м.

Проверка значения скорости с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Рассмотрим перемещение системы из начального, при $t = 0$, до конечного, при $t = t_1 = 1$с, положения. Теорема в общем случае имеет вид:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i, \quad (5.46)$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ и $\sum_{k=1}^{n} A_k^i$ – сумма работ внешних и внутренних сил системы на рассматриваемом перемещении.

Определение кинетической энергии системы в начальном и конечном положениях. Кинетическая энергия всей системы определится как сумма кинетических энергий отдельных тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (5.47)$$

Кинетическую энергию каждого тела определяем по формуле, соответствующей виду движения тела. Для поступательно движущегося тела:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \qquad (5.48)$$

Для вращающегося блока 2:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}. \qquad (5.49)$$

Для катка 3:

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}. \qquad (5.50)$$

Учитывая значения осевых моментов инерции тел и уравнения связей, получим после преобразований:

$$T = \left(m_1 + m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} + m_3 \frac{3r_2^2}{8R_2^2} \right) \frac{v_1^2}{2}. \qquad (5.51)$$

После подстановки исходных данных выражение принимает вид:

$$T = \frac{448 m v_1^2}{150}. \qquad (5.52)$$

В начальный момент времени $v_1 = 0$, в конечный $v_1 = 8{,}16$ м/с, в соответствии с этим:

$$T_0 = 0, \quad T = 202{,}85 \text{ Дж}. \qquad (5.53)$$

Определение суммы работ внешних и внутренних сил. Так как тела системы абсолютно твердые, нити нерастяжимые, проскальзывание между телами отсутствует, то сумма работ внутренних сил равна нулю

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0. \tag{5.54}$$

Внешними силами, действующими на систему, являются силы тяжести тел $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$, реакция опоры блока $\bar{R}_2$, нормальная реакция $\bar{N}_3$, сила трения скольжения $\bar{F}_3$ и момент сопротивления качению M_3, действующие на каток со стороны поверхности (рисунок 32). Определим работу каждой силы системы, учитывая, что при исследуемом перемещении системы груз опустился на расстояние $x_1 = 4,08$ м.

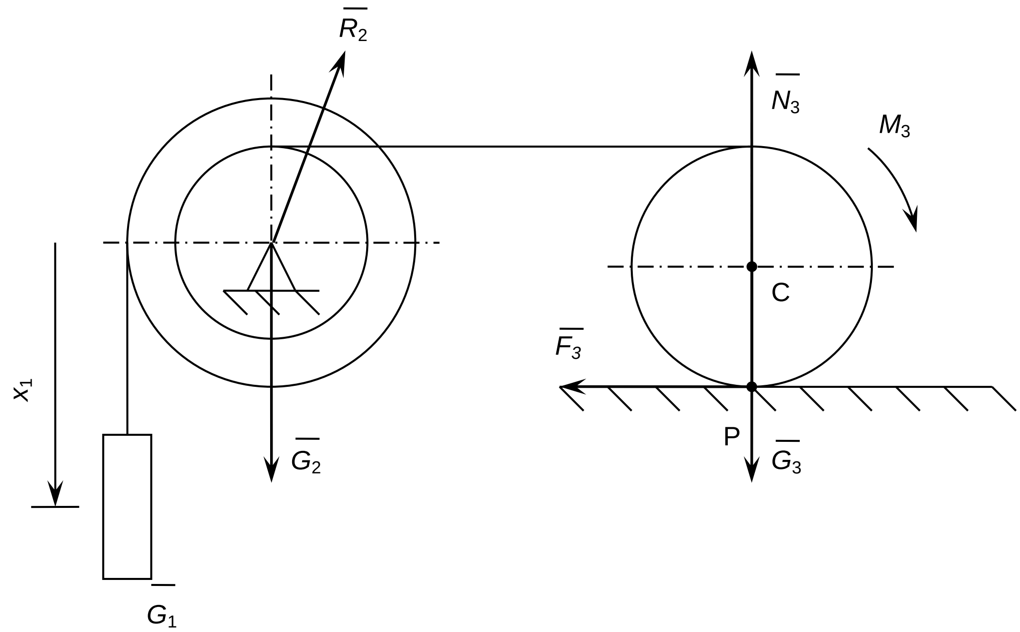


Рисунок 32 – Расчетная схема с указанием внешних сил системы

Работа силы тяжести груза 1:

$$A_{G_1} = m_1 g x_1. \tag{5.55}$$

Сила тяжести блока и реакция опоры приложены в неподвижной точке, поэтому:

$$A_{G_2} = A_{R_2} = 0. \tag{5.56}$$

Силы $\bar{N}_3$ и $\bar{F}_3$ приложены в мгновенном центре скоростей, а направление силы тяжести катка перпендикулярно перемещению точки ее приложения, следовательно

$$A_{N_3} = A_{F_3} = A_{G_3} = 0. \tag{5.57}$$

Работа пары сил с постоянным моментом M_3 определяется как произведение момента пары на угол поворота тела:

$$A_{M_3} = -M_3 \phi_3. \tag{5.58}$$

Работа будет отрицательной, так как пара сил препятствует перемещению тела. Угол поворота тела определим, воспользовавшись уравнением связи, которое представим в виде

$$\frac{d\phi_3}{dt} = \frac{r_2}{2R_2R_3}\frac{dx_1}{dt} \Rightarrow d\phi_3 = \frac{r_2}{2R_2R_3}dx_1 \Rightarrow \int_0^{\phi_3} d\phi_3 = \int_0^{x_1} \frac{r_2}{2R_2R_3}dx_1, \tag{5.59}$$

Тогда:

$$\phi_3 = \frac{r_2}{2R_2R_3}x_1, \tag{5.60}$$

$$A_{M_3} = -m_3 g \delta \frac{r_2}{2R_2R_3} x_1. \tag{5.61}$$

Сумма работ внешних сил системы после подстановки исходных данных получит вид:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 5mgx_1 - \frac{1}{30} mgx_1 = \frac{1490}{30} x_1. \tag{5.62}$$

Учтем перемещение, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 202{,}64 \text{ Дж}. \tag{5.63}$$

Следовательно, значения скорости и перемещения определены верно.

Список использованных источников

1 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2010. – 416 с.

2 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2009 (и предыд. изд.). – 736 с.

3 Диевский, В.А. Теоретическая механика. Курс лекций : учебное пособие / В.А. Диевский. – СПб. : Лань, 2009. – 320 с.

4 Диевский, В.А. Теоретическая механика. Сборник заданий : учебное пособие / В.А. Диевский, И.А. Малышева – СПб. : Лань, 2009. – 192 с.

5 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / под общ. ред. А.А. Яблонского. – 18-е изд., стер. – М. : КноРус, 2011. – 386 с.