Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Н.А. Морозов

НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки»

Оренбург
2019

УДК 62-192
ББК 30.40
М 80

Рецензент – доцент, доктор технических наук Ю.А. Чирков

Морозов, Н.А.
М 80 Надежность технических систем [Электронный ресурс]: учебное пособие / Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 105 с.
ISBN 978-5-7410-2321-1

В учебном пособии рассмотрены показатели надежности и математические основы надежности технических систем. Приведены примеры определения показателей надежности и предложены задачи для самостоятельного решения. Учебное пособие содержит задания для практических занятий и примеры их выполнения.

Учебное пособие предназначено для практических занятий и самостоятельной работы обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки, входящим в образовательную область «Инженерное дело, технологии и технические науки» по дисциплинам «Надежность механических систем», «Надежность машин», «Математические основы надежности», «Методы расчета надежности механических систем», «Модели и методы расчета надежности технических систем», «Основы теории надежности» и может быть полезно аспирантам и преподавателям.

УДК 62-192
ББК 30.40

ISBN 978-5-7410-2321-1

Содержание

Введение

Тория надежности как наука исследует влияние конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на уровень надежности изделия. Математические методы, используемые в теории надежности, базируются на теории вероятностей и математической статистике, поскольку каждый конкретный отказ есть событие случайное, появление которого не может быть точно предсказано заранее.

В первой главе данного пособия рассматриваются основные понятия теории надежности. Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать в себя безотказность, ремонтопригодность, восстанавливаемость, долговечность, сохраняемость, готовность или определенные сочетания этих свойств. Поэтому в первой главе приведены показатели данных свойств надежности.

Вторая глава посвящена математическим основам надежности. Рассмотрено определение функции распределения, функции плотности распределения, а также функции надежности для различных случаев задания выборок. Представлено определение показателей надежности при нормальном зане распределения. Введено понятие доверительного интервала. Определены доверительные интервалы случайной величины, математического ожидания и дисперсии выборки. Описаны статистические гипотезы и критерии, рассмотрены методики проверок различных гипотез.

В третьей главе представлен ряд лабораторных работ. Для каждой работы предложены варианты заданий, вопросы и задания для самоконтроля. Определены цели работ и рассмотрены примеры их выполнения.

1 Надежность и ее показатели

1.1 Основные понятия теории надежности

Согласно ГОСТ 27.002-2015 под надежностью понимается свойство объекта сохранять во времени способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортировки. Таким образом, надежность это есть свойство какого-либо объекта. В качестве объекта могут выступать сборочная единица, деталь, компонент, элемент, устройство, функциональная единица, оборудование, изделие, система, сооружение [1]. Объект может включать в себя аппаратные средства, программное обеспечение, персонал или их комбинации.

Объекты можно подразделить на системы, подсистемы и элементы.

Система – объект, представляющий собой множество взаимосвязанных элементов, рассматриваемых в определенном контексте как единое целое и отделенных от окружающей среды. Система предназначена для выполнения определенных функций.

Подсистема - часть системы, которая сама представляет собой систему.

Элемент системы – объект, представляющий отдельную часть системы, для которого в рамках исследования его надежности не выделяются составные части.

Объекты делятся на ремонтируемые и неремонтируемые, восстанавливаемые и невосстанавливаемые.

Восстановление объекта – это ряд операций по замене, регулированию и контролю технического состояния элементов и объекта в целом. Восстанавливаемый объект – объект, для которого восстановление работоспособного состояния предусмотрено нормативно-технической и конструкторской документацией. В противном случае – объект является невосстанавливаемым.

Ремонт объекта осуществляется в условиях ремонтного завода и подразумевает восстановление ресурса объекта в целом. Ремонтируемый объект – объект, для которого проведение ремонтов предусмотрено в нормативно-технической и конструкторской документации. В противном случае – объект является неремонтируемым.

В соответствии с ГОСТ 27.002-2015 различают следующие состояния объектов: исправное, неисправное, работоспособное, неработоспособное, рабочее, нерабочее, предельное, опасное, предотказное, техническое [1].

Техническим состоянием называется состояние объекта, характеризуемое совокупностью установленных в документации параметров, описывающих его способность выполнять требуемые функции в рассматриваемых условиях.

Исправным состоянием (исправностью) называют такое состояние объекта, при котором все его параметры соответствуют требованиям, установленным в документации на данный объект.

Неисправным состоянием (неисправностью) называют такое состояние объекта, при котором хотя бы один из его параметров не соответствует документации.

Работоспособным состоянием называют такое состояние объекта, при котором он способен выполнять требуемые функции. Отсутствие необходимых внешних ресурсов может препятствовать работе объекта, но это не влияет на его состояние.

Неработоспособным состоянием называют такое состояние объекта, при котором он не способен выполнять хотя бы одну требуемую функцию по зависящим от него причинам или из-за проведения профилактического технического обслуживания.

Необходимо отметить, что исправный объект всегда работоспособен, неисправный объект может быть и работоспособным, и неработоспособным. Работоспособный объект может быть исправен и неисправен, неработоспособный объект всегда неисправен.

Рабочим состоянием называют такое состояние объекта, при котором он выполняет какую-либо требуемую функцию. Данное состояние отличается от работоспособного отсутствием упоминания о способности выполнять функцию, поэтому в рабочем состоянии объект уже выполняет какую-либо требуемую функцию, а в работоспособном состоянии объект потенциально способен ее выполнять, но не обязательно выполняет в данный момент.

Нерабочим состоянием называют такое состояние объекта, при котором он не выполняет ни одной из требуемых функций.

Предельным состоянием называют такое состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна, либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно.

Опасным состоянием называется состояние объекта, при котором возникает недопустимые риски причинения вреда людям или окружающей среде, существенных материальных потерь, а также других неприемлемых последствий. Данное состояние может возникнуть как в результате отказа, так и в процессе работы объекта.

Предотказным состоянием называется состояние объекта, при котором наблюдается повышенный риск возникновения отказа.

Переход объекта из одного состояния в другое происходит в результате процессов, называемых событиями.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта.

Различают внезапный и постепенный отказы. Первый характеризуется скачкообразным, а второй – постепенным изменением параметров объекта. Понятие внезапного отказа относительно и отражает глубину проникновения в сущность процессов, связанных с возникновением отказа.

По признаку причины возникновения отказы подразделяются на конструктивные, производственные и эксплуатационные. Эти понятия обозначают этап создания или использования изделия, на котором имелись несовершенства или нарушения установленных правил и норм.

Различают также зависимый и независимый отказы в зависимости от того, обусловлены они отказом другого элемента или нет.

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта при сохранении работоспособности. Если не устранять повреждения, они могут развиваться и приводить к отказам.

Дефект – каждое отдельное несоответствие продукции установленным требованиям.

Неисправность является краткой формой термина «неисправное состояние» и обозначает состояние, в которое переходит объект вследствие дефектов.

Термин «неисправность» применяют при использовании, хранении и транспортировании объектов, при этом предполагается, что до появления повреждения объект был исправным. Этот термин распространяется только на готовые изделия. Термин «дефект» применяется для обозначения качества объектов на всех стадиях их существования, начиная с изготовления. Могут быть дефекты деталей, дефекты сборки и регулировки объектов [3].

Надежность является комплексным свойством, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать в себя безотказность, ремонтопригодность, восстанавливаемость, долговечность, сохраняемость, готовность или определенные сочетания этих свойств. Рассмотрим данные свойства.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять способность выполнять требуемые функции в течение некоторого времени или наработки в заданных режимах и условиях применения.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к поддержанию и восстановлению состояния, в котором объект способен выполнять требуемые функции путем технического обслуживания и ремонта.

Восстанавливаемость – свойство объекта, заключающееся в его способности восстанавливаться после отказа без ремонта.

Долговечность – свойство объекта, заключающееся в его способности выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях использования, технического обслуживания и ремонта до достижения предельного состояния.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять способность к выполнению требуемых функций после хранения и (или) транспортирования при заданных сроках и условиях хранения и (или) транспортирования.

Готовность – свойство объекта, заключающееся в его способности находиться в состоянии, в котором он может выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания и ремонта в предположении, что все необходимые внешние ресурсы обеспечены.

1.2 Показатели надежности

Показатель надежности – количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта. Показатели надежности подразделяются на единичные, характеризующие одно из свойств, и комплексные, характеризующие несколько свойств объекта [6].

1.2.1 Показатели безотказности

Вероятность безотказной работы *P(t)* – вероятность того, что в пределах заданной наработки t отказ объекта не возникает.

В интервале времени от 0 до t показатель *P(t)* зависит от функции распределения наработки до отказа (вероятности отказа) $Q(t)$:

$$P(t) = 1 - Q(t) \ . \qquad (1.1)$$

Функция распределения наработки до отказа может быть получена путем интегрирования функции плотности распределения времени безотказной работы *f(t)*:

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt. \tag{1.2}$$

Функция плотности распределения времени безотказной работы в свою очередь равна пределу отношения вероятности того, что наработка до отказа находится в каком-то малом интервале, к продолжительности этого интервала:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le t_{отк} \le t + \Delta t)}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ – условная плотность вероятности возникновения отказа невосстанавливаемого объекта, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не возник:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P'(t \le t_{отк} \le t + \Delta t)}{\Delta t}, \tag{1.4}$$

где $P'(t \le t_{отк} \le t + \Delta t)$ - вероятность возникновения отказа в указанном интервале при условии, что до момента *t* отказ не возник.

Смысл интенсивности отказов в оценке вероятности отказа в интервале времени Δt для объектов, безотказно проработавших до начала этого интервала, т.е. не вышедших из строя за время *t*. В соответствии с правилом умножения вероятностей вероятность события равна произведению условной вероятности этого события на вероятность условия:

$$P(t \le t_{отк} \le t + \Delta t) = P'(t \le t_{отк} \le t + \Delta t) \cdot P(t) \ . \tag{1.5}$$

Тогда интенсивность отказов можно определить по формуле:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \tag{1.6}$$

На практике показатели безотказности могут быть получены по результатам эксплуатации или испытаний большого числа однотипных объектов с использованием следующих формул:

$$P(t) \approx \frac{N_{исп}(t)}{N}, \tag{1.7}$$

$$f(t) \approx \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N \cdot \Delta t}, \tag{1.8}$$

$$\lambda(t) \approx \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N_{исп} \cdot \Delta t}, \tag{1.9}$$

где N – число объектов;

$N_{исп}$ – число объектов, оказавшихся исправными к моменту времени t;

$\Delta n(t, t + \Delta t)$ – число отказов интервале времени Δt.

Статистические оценки функций (1.7), (1.8), (1.9) являются ступенчатыми, так как при каждом отказе $N_{исп}$ и $\Delta n(t, t + \Delta t)$ изменяются на единицу. Но при больших значениях N эти функции сколь угодно близко приближаются к непрерывным.

Очевидно, что $P(t)$ – убывающая функция времени, так как число $N(t)$ с увеличением наработки уменьшается. При $t=0$ – $P(t)=1$, а при $t \to \infty$ – $P(t) \to 0$.

Функция *Q(t)* имеет обратный вид (рисунок 1).

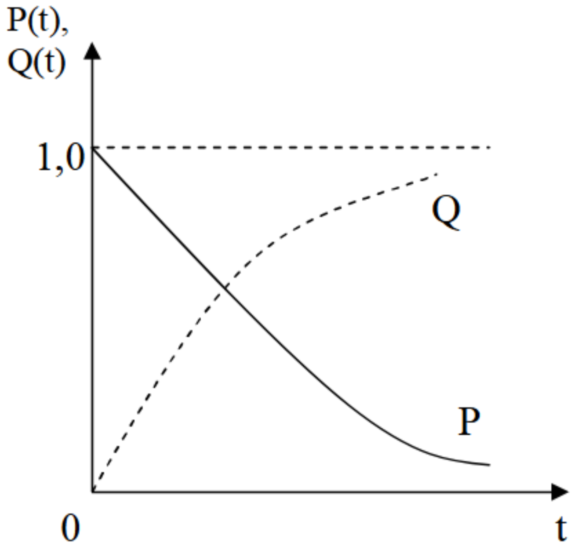


Рисунок 1 – Функции вероятности безотказной работы и вероятности отказа

Интенсивность отказов и вероятность безотказной работы связаны между собой зависимостью:

$$P(t) = \exp(-\int_0^t \lambda(t)dt) \qquad (1.10)$$

Характерная кривая интенсивности отказов объектов имеет три участка (рисунок 2).

Первый период, называемый приработкой, характеризуется повышенным уровнем интенсивности отказов из-за недостаточного качества объектов, поступающих в эксплуатацию. Объекты, имеющие скрытые дефекты, не выявленные в процессе контроля и испытания при производстве, выходят из строя вскоре после начала эксплуатации.

Во втором периоде, периоде нормальной эксплуатации, интенсивность отказов практически не зависит от времени наработки. Причины отказов в этот период связаны главным образом с внезапным воздействием неучтенных при проектировании объектов факторов, а также случайными причинами, учет которых невозможен [3].

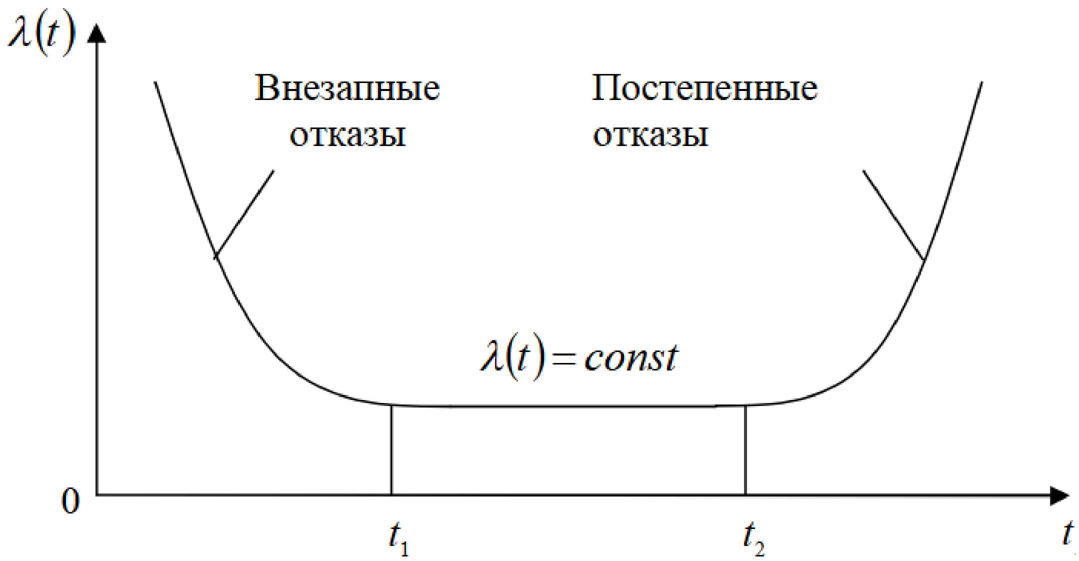


Рисунок 2 – Кривая интенсивности отказов

Третий период, период износа и старения, характеризуется возрастанием интенсивности отказов, связанным со старением изделия и его составных частей, с накоплением необратимых повреждений. Основной путь повышения надежности изделия в этот период – профилактические мероприятия.

Для оценки безотказности восстанавливаемых объектов, т.е. объектов, которые после очередного отказа восстанавливаются и вновь работают до очередного отказа, применяется параметр потока отказов [4].

Для восстанавливаемых объектов моменты отказов на оси времени образуют поток отказов, который характеризуется ведущей функцией потока, равной математическому ожиданию числа отказов за время *t:*

$$\Omega(t) = M[r(t)], \tag{1.11}$$

где $\Omega(t)$ – ведущая функция потока;

M – символ математического ожидания;

$r(t)$ – число отказов за время t.

Параметр потока отказов характеризует среднее число отказов в малом интервале времени и равен:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(M(r(t+\Delta t) - M(r(t))}{\Delta t}. \tag{1.12}$$

Параметр потока отказов связан с ведущей функцией соотношением:

$$\Omega(t) = \int_0^t \omega(t)dt. \tag{1.13}$$

Средняя наработка до отказа ($\bar{t}$) – математическое ожидание наработки объекта до первого отказа. Наработкой объекта называется продолжительность или объем работы объекта. Наработка может измеряться в единицах времени или объема выполненной работы. Среднюю наработку можно определить по формуле:

$$\bar{t} = \int_0^\infty P(t)dt. \tag{1.14}$$

На практике для определения средней наработки на отказ испытывают N объектов и используют формулу:

$$\bar{t} = \frac{t_{отк1} + t_{отк2} + \ldots + t_{откN}}{N}. \tag{1.15}$$

Гамма-процентная наработка до отказа – наработка, в течение которой отказ объекта не возникнет с вероятностью γ, выраженной в процентах. Показатель определяют из уравнения:

$$1 - Q(t_\gamma) = \frac{\gamma}{100}, \tag{1.16}$$

где t_γ – гамма-процентная наработка до отказа.

При γ=100% гамма-процентная наработка называется установленной наработкой, при γ=50% – медианной наработкой.

Средняя наработка на отказ – отношение наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки. Этот показатель означает наработку восстанавливаемого объекта, приходящуюся в среднем на один отказ в рассматриваемом интервале суммарной наработки.

1.2.2 Показатели долговечности

Долговечность объекта оценивается ресурсом и сроком службы [5].

Технический ресурс – наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

Поскольку капитальный ремонт частично восстанавливает ресурс, отсчет наработки возобновляют по окончанию ремонта, различая в связи с этим доремонтный, межремонтный, послеремонтный и полный (до списания) ресурсы.

Различают средний, гамма-процентный и назначенный ресурсы, которые представляют собой соответственно математическое ожидание ресурса, наработку, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, и суммарную наработку, при которой применение объекта по назначению должно быть прекращено.

Математическое определение показателей среднего и гамма-процентного ресурсов осуществляется аналогично показателям «средняя наработка до отказа» и «гамма-процентная наработка до отказа», т.е. по уравнениям:

$$\bar{t}_p = \int_0^\infty t \cdot f(t_p)dt, \tag{1.17}$$

$$1 - F(t_{p\gamma}) = \frac{\gamma}{100} \ , \qquad (1.18)$$

где $\bar{t}_p$, $\bar{t}_{p\gamma}$ – средний и гамма-процентный ресурсы;

$F(t_{p\gamma})$ – функция распределения ресурса;

$f(t_p)$ – плотность распределения ресурса.

При γ=100% гамма-процентный ресурс называется установленным ресурсом, при γ=50% – медианным ресурсом.

Срок службы – календарная продолжительность от начала эксплуатации объекта или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

Срок службы измеряют в единицах времени. Соотношение ресурса и срока службы зависит от интенсивности использования объекта.

Сроки службы подразделяются на средний, гамма-процентный и назначенный, которые представляют соответственно математическое ожидание срока службы, календарную продолжительность эксплуатации до достижения предельного состояния с вероятностью γ и календарную продолжительность эксплуатации, при достижении которой применение объекта по назначению должно быть прекращено.

Математическое определение показателей среднего и гамма- процентного сроков службы осуществляется аналогично показателям ресурсов по уравнениям (1.17) и (1.18) с соответствующей заменой аргументов.

Назначенные ресурс и срок службы устанавливаются с целью заблаговременного принудительного прекращения применения объекта по назначению исходя из требований безопасности или экономических соображений.

1.2.3 Показатели ремонтопригодности

Ремонтопригодность объектов оценивается двумя показателями: вероятностью восстановления и средним временем восстановления работоспособного состояния.

Вероятностью восстановления называется вероятность того, что время восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданного.

Среднее время восстановления – математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния:

$$\bar{t}_{в} = \int_{0}^{\infty} t \cdot f(t_{в})dt, \tag{1.19}$$

где $\bar{t}_{в}$ - среднее время восстановления;

$f(t_{в})$ - плотность распределения времени восстановления.

Аналогично среднему времени восстановления определяется средняя трудоемкость восстановления работоспособного состояния.

1.2.4 Показатели сохраняемости

Сохраняемость изделий оценивается средним и гамма-процентным сроками сохраняемости, которые представляют собой соответственно математическое ожидание срока сохраняемости и срок сохраняемости, достигаемый объектом с заданной вероятностью γ. Определяются рассматриваемые показатели аналогично соответствующим показателям долговечности, т.е. по уравнениям (1.17) и (1.18).

1.2.5 Комплексные показатели надежности

Данная группа показателей оценивает готовность объектов к применению, использование объектов и сохранение их эффективности [6].

Коэффициент готовности ($K_г$) – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается. Коэффициент оценивает только готовность изделия в отношении его работоспособности.

Коэффициент определяется статистически, используя данные о группе объектов:

$$K_г = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i}{\sum_{i=1}^{N} T_{рабi}}, \qquad (1.20)$$

где ξ_i – суммарное пребывание i-го объекта в работоспособном состоянии;

$T_{рабi}$ – продолжительность эксплуатации i-го объекта, за исключением простоев при проведении плановых ремонтов и технического обслуживания.

Коэффициент оперативной готовности ($K_{ог}$) предусматривает кроме вероятности оказаться в работоспособном состоянии в произвольный момент времени также вероятность, начиная с этого момента, работать безотказно в течение заданного интервала времени:

$$K_{ог} = K_г \cdot P(t_p), \qquad (1.21)$$

где $P(t_p)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t_p.

Коэффициент технического использования ($K_{ти}$) характеризует интенсивность использования объекта. Данный коэффициент определяется по уравнению:

$$K_{ти} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi_i}{\sum_{i=1}^{N} T_{эксi}}, \tag{1.22}$$

где $T_{эксi}$ – продолжительность эксплуатации, состоящей из интервалов времени работы, технического обслуживания и ремонтов.

Коэффициент планируемого применения – доля периода эксплуатации, в течение которой объект не должен находиться на плановом техническом обслуживании и ремонте. Вычисляется коэффициент как отношение:

$$K_{пп} = \frac{T_{зад} - T_{пто}}{T_{зад}}, \tag{1.23}$$

где $T_{зад}$ – заданная продолжительность эксплуатации;

$T_{пто}$ – суммарная продолжительность плановых технических обслуживаний и ремонтов за время $T_{зад}$.

2 Математические основы надежности

2.1 Функции распределения

Случайная величина наиболее полно характеризуется законом распределения (функцией распределения) или плотностью распределения [4].

Имеем n значений случайной величины x. На основании этих данных можно построить вариационный ряд. Вариационным рядом называется последовательность наблюдаемых значений исследуемой величины, расположенных в возрастающем порядке.

Статистической функцией распределения *F(x)* называют функцию, определяемую равенством:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < X_1 \\ i/n \quad \text{при} & X_1 \le X \le X_N \\ 1 & X > X_N \end{cases}, \tag{2.1}$$

где i – порядковый номер члена вариационного ряда.

Функция *F(x)* показывает вероятность того, что случайная величина X (в следующих ожидаемых опытах) будет меньше, чем наперед заданное конкретное значение x, что записывается следующим образом:

$$F(x) = P(X < x), \tag{2.2}$$

где P – символ вероятности.

Кроме функции распределения часто используют функцию плотности распределения случайных величин, определяемую как производная от функции распределения. В конечных величинах плотность распределения запишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{\Delta F_{\mathrm{i}}(x)}{\Delta x_i} = \frac{F_{i+1}(x) - F_i(x)}{x_{i+1} - x_i}. \tag{2.3}$$

Менее полными характеристиками случайных величин являются числовые характеристики (моменты). Основные из них: математическое ожидание m_x и дисперсия D_x^2:

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{n}; \tag{2.4}$$

$$D_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_x)^2}{n-1}. \tag{2.5}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, а дисперсия – рассеяние результатов относительно этого среднего. Наряду с дисперсией часто пользуются средним квадратическим отклонением D_x, которое связано с дисперсией следующим соотношением:

$$D_x = \sqrt{D_x{}^2}. \tag{2.6}$$

Изложенные выше формулы эмпирических функций *F(x), f(x)* и числовых характеристик m_x и $D_x{}^2$ случайной величины применимы при относительно небольшом количестве экспериментальных точек *n*.

При большом количестве значений случайной величины весь диапазон аргумента *x* случайной величины X разбивают на *k* интервалов (обычно равных) точками x_1, …, x_{k+1}, подсчитывают число данных m_j, приходящихся на интервал

$[x_i \dots x_{j+1}]$, и определяют частоту h_j попадания в каждый интервал:

$$h_j = \frac{m_j}{n},$$

где n — общее количество наблюдений (экспериментальных точек).

Статистическая функция распределения в этом случае определяется следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \\ \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{S} m_j}{n} & \text{при} \quad \begin{matrix} x < x_1 \\ x_1 \le x \le x_{k+1} \\ x > x_{k+1} \end{matrix} \\ 1 & \end{cases} \tag{2.7}$$

где S – номер интервала, для которого подсчитывается значение $P(x)$;

j – текущий номер интервала.

Таким образом, функция распределения численно равна отношению количества отказавших элементов нарастающим итогом к общему числу значений данных, то есть:

$$F(x) = n_i / n, \tag{2.8}$$

где n_i – количество образцов, отказавших для рассматриваемого аргумента.

Функция плотности распределения случайной величины определиться из формулы:

$$f(x)=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{F_{s+1}(x)-F_s(x)}{x_{s+1}-x_S}=\frac{\frac{\sum_{I=1}^{S+1}m_j}{n}-\frac{\sum_{I=1}^{S}m_j}{n}}{\Delta x_s}=\frac{m_s}{\Delta x_s\cdot n}\ . \qquad (2.9)$$

То есть плотность распределения в каждом интервале подсчитывается как отношение частоты h_s к величине интервала Δx_s.

Математическое ожидание и дисперсия в случае интервального представления данных определяются по следующим зависимостям:

$$\hat{m}_x=\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j h_j;$$
$$\widehat{D}_x^2=\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_j-\hat{m}_x)^2\cdot h_j, \qquad (2.10)$$

где $\bar{x}_j$ – среднее значение *j* интервала.

Если рассматривать надежность как вероятностную прочность, то в качестве показателя надежности можно принять вероятность превышения несущей способностью конструкции *R* действующую нагрузку *N* [2]:

$$H=P(R>N). \qquad (2.11)$$

В этом случае под прочностью следует понимать любую случайную величину, которая характеризует предельные возможности работы элемента (несущую способность *R*), превышение которой означает отказ элемента, а под нагрузкой *N* – любую случайную величину, воздействующую на элемент от внешнего источника.

В случае, когда мы имеем дело с детерминированными (неслучайными) величинами, показатель надежности будет рассчитываться следующим образом. Допустим *R* – неслучайная величина, а *N* – случайная, тогда вероятность безотказной работы элемента будет численно равна площади под кривой плотности распределения нагрузки $f_N(x)$ слева от точки с координатой R на оси абсцисс (рисунок 1), т.е. надежность определится по формуле:

$$H = \int_0^R f_N(x)dx. \tag{2.12}$$

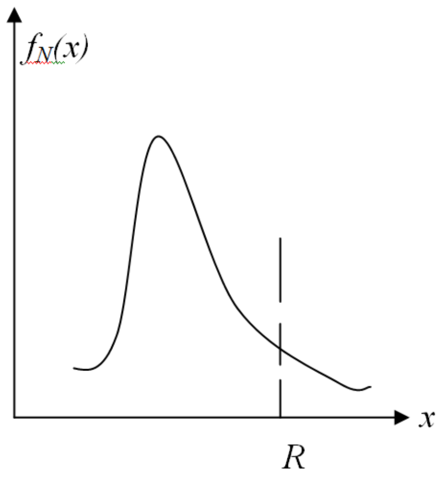


Рисунок 1 – Плотность распределения нагрузки N

Если величина R – случайная, а N – неслучайная, то вероятность безотказной работы элемента будет численно равна площади под кривой плотности распределения несущей способности $f_R(x)$ справа от точки с координатой N на оси абсцисс (рисунок 2).

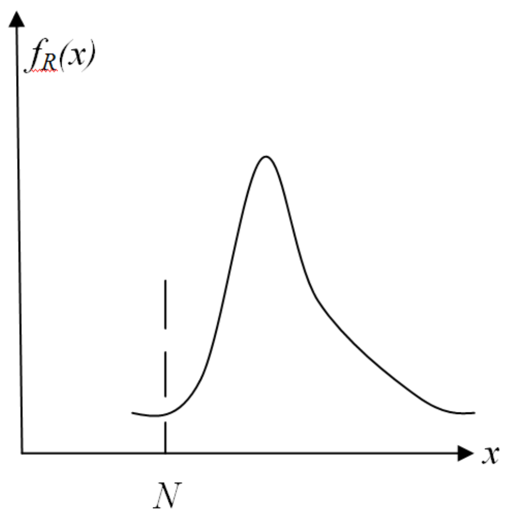


Рисунок 2 – Плотность распределения несущей способности R

Тогда получим:

$$H = \int_{N}^{\infty} f_R(x)dx. \tag{2.13}$$

Получается, что в первом случае надежность соответствует функции распределения случайной величины N:

$$H = \int_{0}^{R} f_N(x)dx = F_N(x), \tag{2.14}$$

Во втором случае надежность противоположна функции распределения случайной величины R:

$$H = \int_{N}^{\infty} f_R(x)dx = 1 - \int_{0}^{n} f_R(x)dx = 1 - F_R(x) \ . \tag{2.15}$$

Рассмотрим пример. Проведены испытания образцов на разрыв. Значения предела прочности образцов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты испытаний образцов

№ интер-вала	Интервал значений предела прочности, МПа	Количество замеров, попавших в интервал	№ интер-вала	Интервал значений предела прочности, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	20-20,5	2	6	22,5-23	20
2	20,5-21	4	7	23-23,5	16
3	21-21,5	6	8	23,5-24	7
4	21,5-22	10	9	24-24,5	5
5	22-22,5	18	10	24,5-25	1

Найдем значения функций распределения и плотности распределения, а также значения функции надежности (таблица 2) и построим соответствующие графики (рисунки 3, 4, 5).

Таблица 2 – Результаты испытаний образцов

№ интервала	Интервал, x, МПа	Количество замеров в интервале, m_s	$F(x)=\dfrac{m_i}{n}$	$f(x)=\dfrac{m_s}{\Delta x \cdot n}$	$H(x)=1-F(x)$
1	20-20,5	2	0,02	0,04	0,98
2	20,5-21	4	0,07	0,09	0,93
3	21-21,5	6	0,14	0,13	0,86
4	21,5-22	10	0,25	0,22	0,75
5	22-22,5	18	0,45	0,4	0,55
6	22,5-23	20	0,67	0,45	0,33
7	23-23,5	16	0,85	0,36	0,15
8	23,5-24	7	0,93	0,16	0,07
9	24-24,5	5	0,98	0,11	0,02
10	24,5-25	1	1	0,02	0

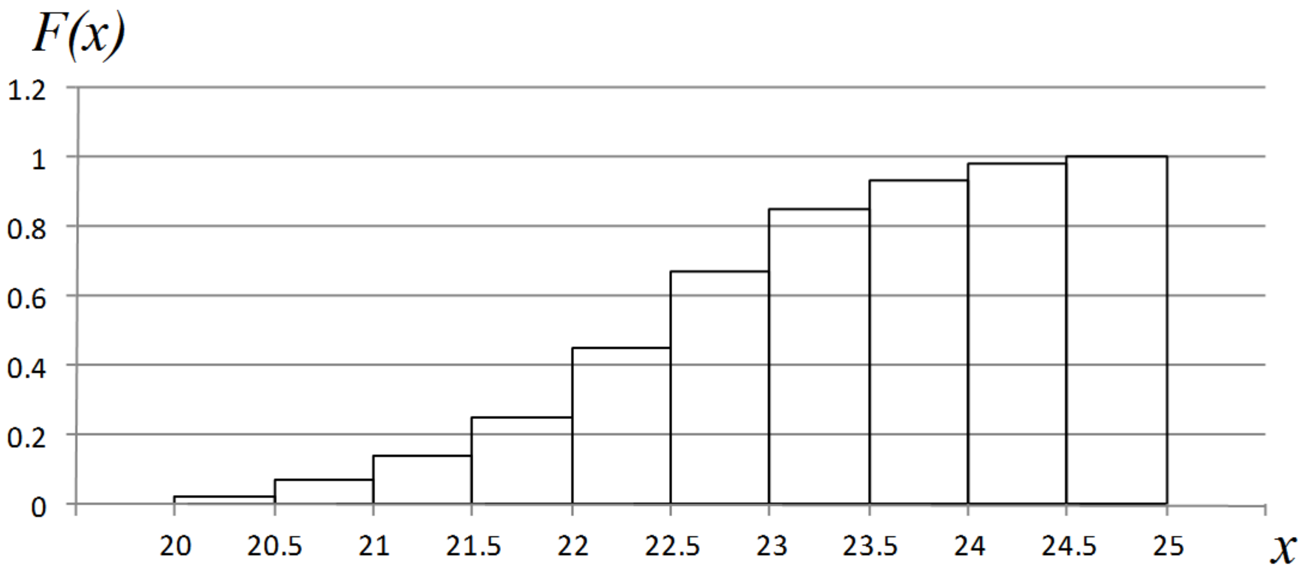


Рисунок 3 – Функция распределения

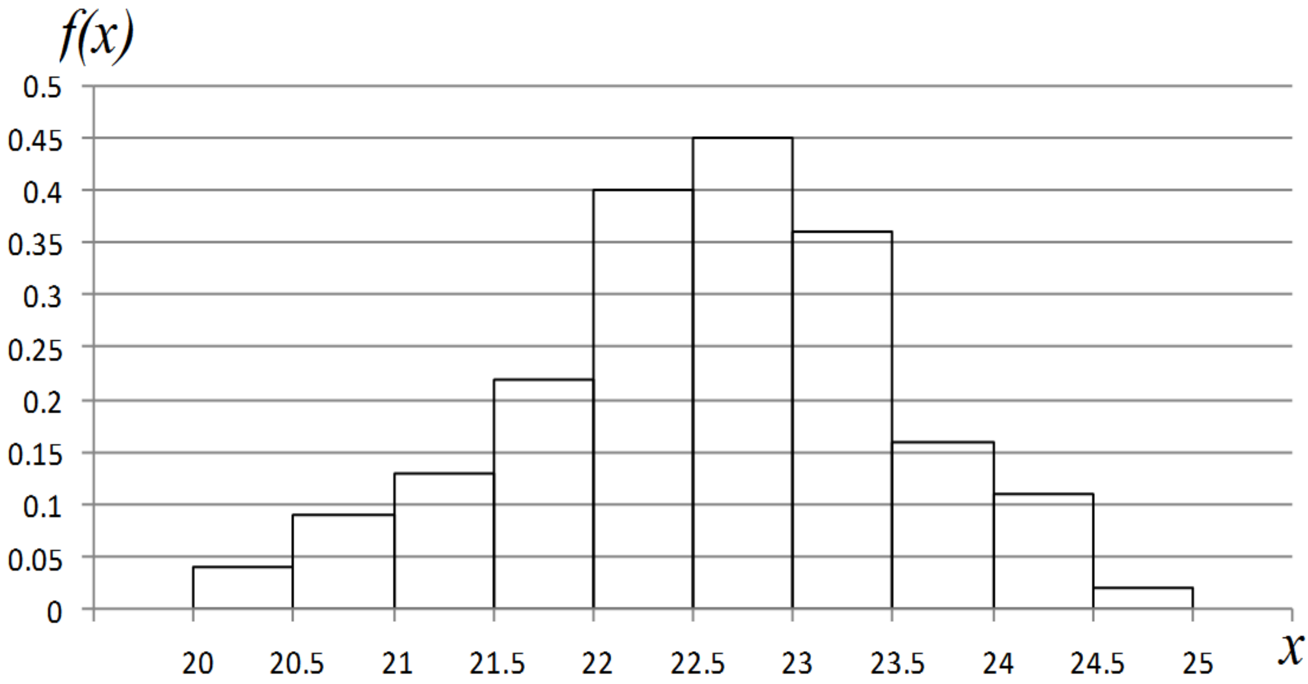


Рисунок 4 – Функция плотности распределения

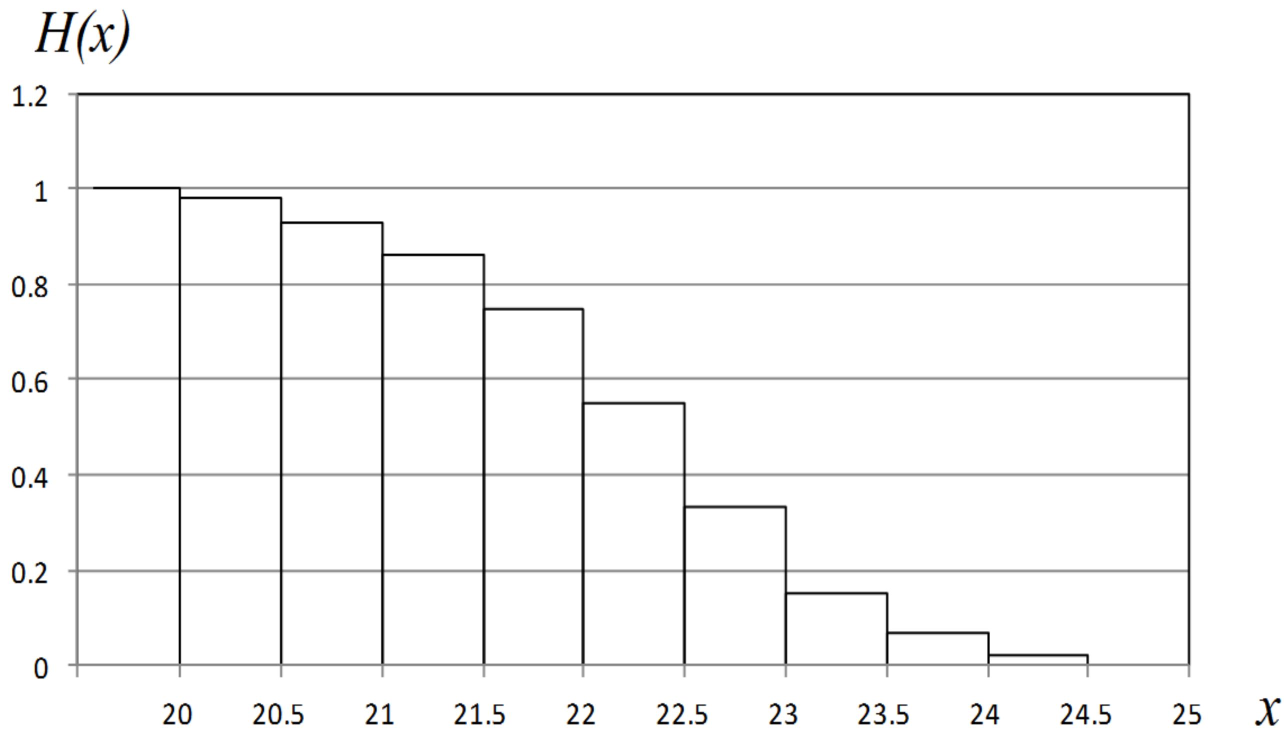


Рисунок 5 – Функция надежности

Предлагается к решению следующий ряд задач по определению функции надежности.

Задача 1. На огневых испытаниях теплозащиты ракеты замерялась глубина ее сгоревшей части. Глубины сгоревшей части (мм) теплозащит после испытания равны: 44,8; 47,3; 49,4; 51,2; 53,8; 57,9; 42,2; 48,5; 50,8; 53,3; 55,8; 46,7. Построить функцию надёжности.

Задача 2. Проведены испытания партии пружин при циклическом нагружении. Регистрировалось количество циклов до разрушения (таблица 3). Построить функцию надёжности.

Таблица 3 – Данные испытаний

№ интервала	Интервал, тыс. циклов	Количество замеров, попавших в интервал	№ интервала	Интервал, тыс. циклов	Количество замеров, попавших в интервал
1	16 – 17	6	5	20 – 21	120
2	17 – 18	25	6	21 – 22	88
3	18 – 19	72	7	22 – 23	46
4	19 – 20	133	8	23 – 24	10

Задача 3. Проведены замеры отклонения скорости объекта (таблица 4). Построить функцию надёжности, определить конкретные показатели надёжности, если отказом считать отклонение скорости меньше, чем: а) 10 м/с, б) -20 м/с, в) -30 м/с, г) 80 м/с.

Таблица 4 – Данные замеров

№ интервала	Интервал отклонения скорости, м/с	Количество замеров, попавших в интервал
1	2	3
1	-20…-10	2
2	- 10…0	5
3	0…10	8

Продолжение таблицы 4

1	2	3
4	10…20	9
5	20…30	4
6	30…40	2
7	40…50	1

Задача 4. Проведены 100 замеров температуры хранилища объекта в различное время года (таблице 5). Построить функцию надёжности, определить конкретные показатели надёжности хранения при условии, что объект считается вышедшим из строя, если температура окажется ниже: а) 5°С, б) 1°С, в) 0°С, г) -10°С.

Таблица 5 – Данные замеров температуры

Номер интервала	Интервал, °С	Количество замеров, попавших в интервал
1	1 – 5	10
2	5 – 9	20
3	9 – 13	50
4	13 – 17	12
5	17 – 21	8

2.2 Определение надежности при нормальном законе распределения

При анализе надежности объектов мы сталкиваемся со случайными событиями, поэтому в качестве теоретических распределений наработки до отказа могут быть использованы любые применяемые в теории вероятностей непрерывные распределения. Основными законами распределения являются нормальный и экспоненциальный законы распределения, законы распределения Вейбулла и Рэлея.

Наиболее распространен нормальный закон распределения. Основная особенность этого закона состоит в том, что он является предельным законом, к которому стремятся другие законы распределения. В теории надежности его используют для описания постепенных отказов, когда распределение времени безотказной работы вначале имеет низкую плотность, затем максимальную и далее плотность снижается.

Нормальному закону подчиняются погрешности измерений, отклонения размеров и положений элементов собираемых конструкций, изменения физико-механических характеристик материалов, разбросы массы, отказы, связанные со старением, а кроме того все случайные величины, отклонения которых от средних значений вызываются большой совокупностью случайных факторов [2].

Плотность нормального закона распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{D_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{D_x}\right)^2\right], \tag{2.16}$$

где x – случайная величина, распределенная на интервале от - ∞ до + ∞;

m_x – математическое ожидание;

D_x – среднее квадратическое отклонение.

Закон нормального распределения можно записать в виде нормированной функции распределения Шеппарда:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \tag{2.17}$$

где z — нормированная случайная величина ($z = \dfrac{x-m_x}{D_x}$).

Табулированные значения функции нормального распределения вида (2.17) приведены в приложении А, а графики закона нормального распределения и его плотности представлены на рисунке 5.

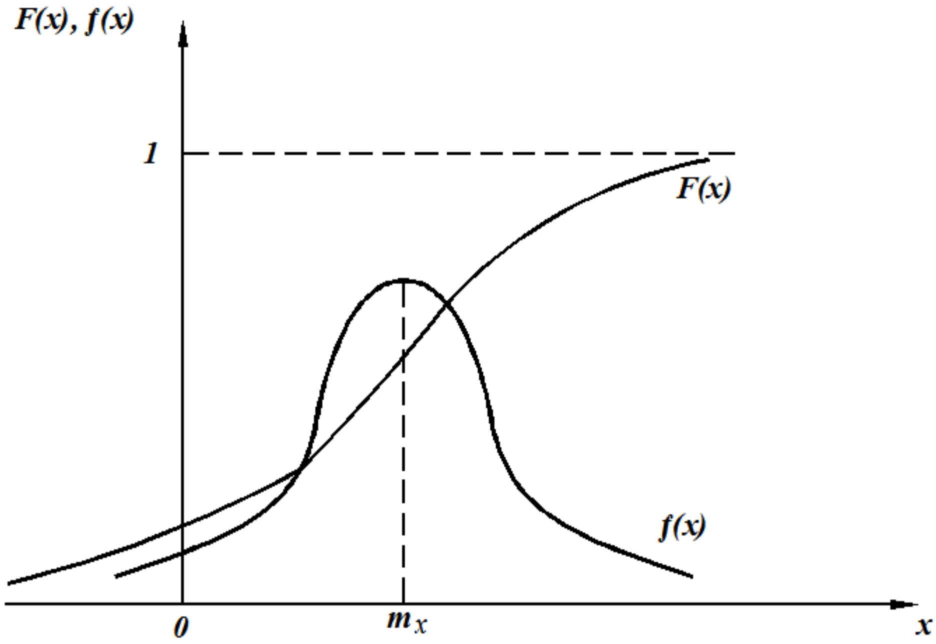


Рисунок 5 – График нормального закона распределения и плотности распределения

Рассмотрим, как определяется надежность (вероятность безотказной работы) объектов при нормальном законе распределения нагрузки и несущей способности.

Плотность нормального распределения нагрузки N и несущей способности R можно определить по формулам:

$$f_N = \frac{1}{D_N\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{N-m_N}{D_N}\right)^2\right], \tag{2.18}$$

$$f_R = \frac{1}{D_R\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{R-m_R}{D_R}\right)^2\right], \tag{2.19}$$

где m_N, m_R – математические ожидания нагрузки и несущей способности,

D_N, D_R – средние квадратические отклонения нагрузки и несущей способности.

Найдем случайную величину:

$$y = R - N. \tag{2.20}$$

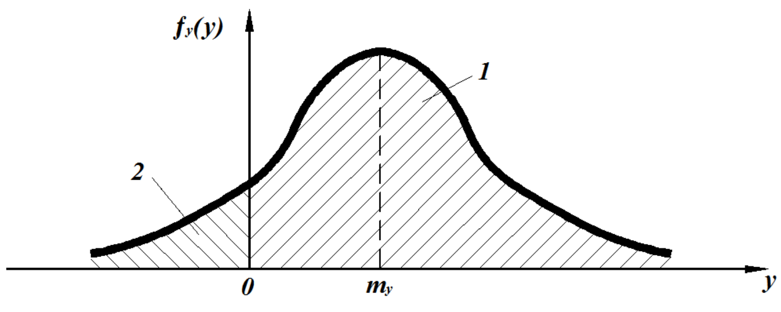
Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение данной величины будут равны:

$$m_y = m_R - m_N, \tag{2.21}$$

$$D_y = \sqrt{D_R^2 + D_N^2}\ . \tag{2.22}$$

Тогда плотность распределения величины у (рисунок 6):

$$f_y = \frac{1}{D_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - m_y}{D_y}\right)^2\right]. \tag{2.23}$$



1 – площадь, соответствующая вероятности безотказной работы;

2 – площадь, соответствующая вероятности отказа.

Рисунок 6 – Плотность распределения случайной величины *y*

Отказ объекта будет происходить при превышении нагрузкой несущей способности, т.е. безотказная работа будет при значениях случайной величины *y* больше нуля. Следовательно, площадь заштрихованной фигуры 1 равна вероятности безотказной работы, а площадь фигуры 2 соответствует вероятности отказа.

Вероятность безотказной работы найдем по формуле:

$$H = P(y > 0) = \int_0^{\infty} f_y dy = \frac{1}{D_y\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - m_y}{D_y} \right)^2 \right] dy . \qquad (2.24)$$

Чтобы находить значения этого интеграла с помощью таблиц нормального закона распределения, проведем смену переменных при помощи нормированной величины:

$$z = \frac{y - m_y}{D_y} . \qquad (2.25)$$

Тогда $dy = D_y dz$.

При $y = 0$ нижний предел интегрирования станет следующим:

$$z = \frac{0 - m_y}{D_y} = -\frac{m_y}{D_y} .$$

А при $y \to \infty$ – верхний предел $z \to \infty$.

После смены переменных и пределов интегрирования получим:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{m_y}{D_y}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz . \qquad (2.26)$$

Используем соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{a} f(\tau)d\tau + \int_{a}^{+\infty} f(\tau)d\tau = 1 \qquad (2.27)$$

где $f(\tau)$ – плотность распределения случайной величины.

Формулу (2.27) запишем в виде:

$$H = 1 - \int_{-\infty}^{-\frac{m_y}{D_y}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = 1 - \Phi\left(-\frac{m_y}{D_y}\right) = \Phi\left(\frac{m_y}{D_y}\right), \qquad (2.28)$$

где $\Phi\left(\frac{m_y}{D_y}\right)$ – условное определение функции нормального закона распределения.

С учетом (2.21) и (2.22) получим:

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}}\right). \qquad (2.29)$$

Таким образом, по формуле (2.29) определяется надежность объектов при случайных величинах нагрузки N и несущей способности R, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Если случайной величиной будет только R, а N будет детерминированной, то надежность определяется по формуле:

$$H = \Phi\left(\frac{m_R - N}{D_R}\right). \qquad (2.30)$$

Если R – детерминированная, а N – случайная величина, то:

$$H = \Phi\left(\frac{R - m_N}{D_N}\right). \tag{2.31}$$

Рассмотрим пример определения надежности элемента конструкции.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нагрузки, действующей на элемент конструкции соответственно равны: m_N =20 кН и D_N =2 кН. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение несущей способности элемента конструкции: m_R =30 кН и D_R = 3 кН. Определить надежность (вероятность безотказной работы) элемента при условии, что нагрузка и несущая способность подчиняются нормальному закону распределения.

Вычислим аргумент функции $\Phi\left(\frac{m_y}{D_y}\right)$:

$$\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}} = \frac{30 - 20}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 2{,}7735.$$

По таблицам нормального распределения (см. приложение А) получаем:

$$H = \Phi(2{,}77) = 0{,}997197.$$

Таким образом, по рассмотренной выше методике можно определять надежность объектов при нормальном законе распределения нагрузки и несущей способности. Естественно предварительно необходимо удостовериться, что рассматриваемые случайные величины подчиняются нормальному закону. Для этого разработаны методы проверки отклонения распределения вероятностей от нормального распределения [7].

Рассмотрим графический метод проверки отклонения распределения вероятностей от нормального распределения, который является одним из наиболее простых и наглядных. Сущность его заключается в том, то что эмпирическую функцию распределения случайной величины строят на специальном графике с шкалой ординат, выстроенной в соответствии с нормальным законом распределения (приложение Б). Если график на этой бумаге представлен набором точек, которые рассеянны около прямой линии, то это подтверждает, что генеральная совокупность, из которой взята выборка, подчиняется нормальному закону распределения.

Этот подход важен тем, что дает наглядную информацию по типу отклонения от нормального распределения.

Если отсутствуют бланки бумаги для нормальных вероятностных графиков, можно изготовить его самостоятельно, воспользовавшись понятием квантиля распределения случайной величины.

Квантилем z_P именуется аргумент функции распределения случайной величины, соответствующий установленному уровню вероятности P. Другими словами, квантиль z_P – это решение уравнения:

$$F(z_P)=P. \tag{2.32}$$

Строя равномерную шкалу квантилей, можно построить шкалу вероятности, используя значения таблицы 6.

Таблица 6 – Вероятности и квантили нормального распределения

Вероят-ность, P	Квантиль, z_P	Вероят-ность, P	Квантиль, z_P	Вероят-ность, P	Квантиль, z_P
0	$-\infty$	0,2	-0,84	0,9	1,28
0,001	-3,09	0,3	-0,52	0,95	1,64
0,005	-2,58	0,4	-0,25	0,98	2,054
0,01	-2,33	0,5	0	0,99	2,33
0,02	-2,054	0,6	0,25	0,995	2,58
0,05	-1,64	0,7	0,52	0,999	3,09
0,10	- 1,28	0,8	0,84	1	$+\infty$

Рассмотрим пример проверки соответствия нормальному закону распределения. Десять одинаковых элементов объекта выходят из строя при достижении в них нормальных напряжений (МПа) значений: 187, 398, 242, 378, 322, 305, 271, 318.

Построим вариационный ряд, определим вероятность (таблица 7) и изобразим точки на графике (рисунок 7).

Таблица 7 – Данные обработки случайной величины

Порядковый номер отказа	Вариационный ряд, МПа	$F(t)=i/N$
1	187	0,125
2	242	0,250
3	271	0,375
4	305	0,500
5	318	0,625
6	322	0,750
7	378	0,875
8	398	1

Так как точки удовлетворительно группируются около прямой, то делаем вывод, что данная выборка подчиняется нормальному закону распределения.

2.3 Доверительные интервалы

2.3.1 Доверительный интервал случайной величины

Пусть имеется выборка значений случайной величины с плотностью распределения $f(x)$ и математическим ожиданием m_x (рисунок 8).

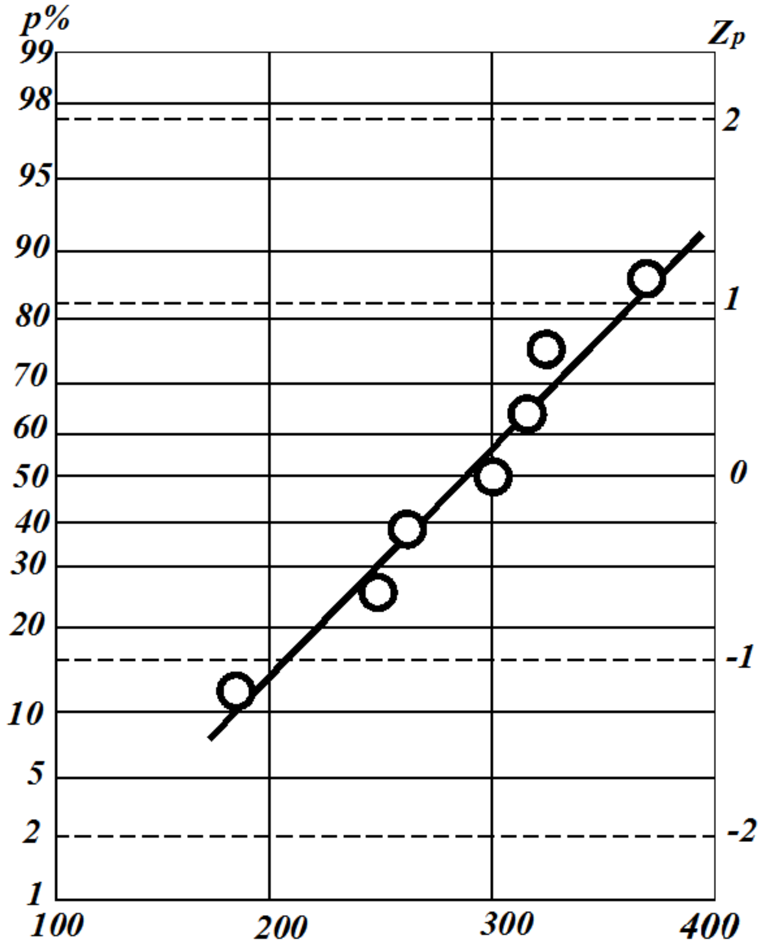


Рисунок 7 – График проверки соответствия нормальному закону распределения

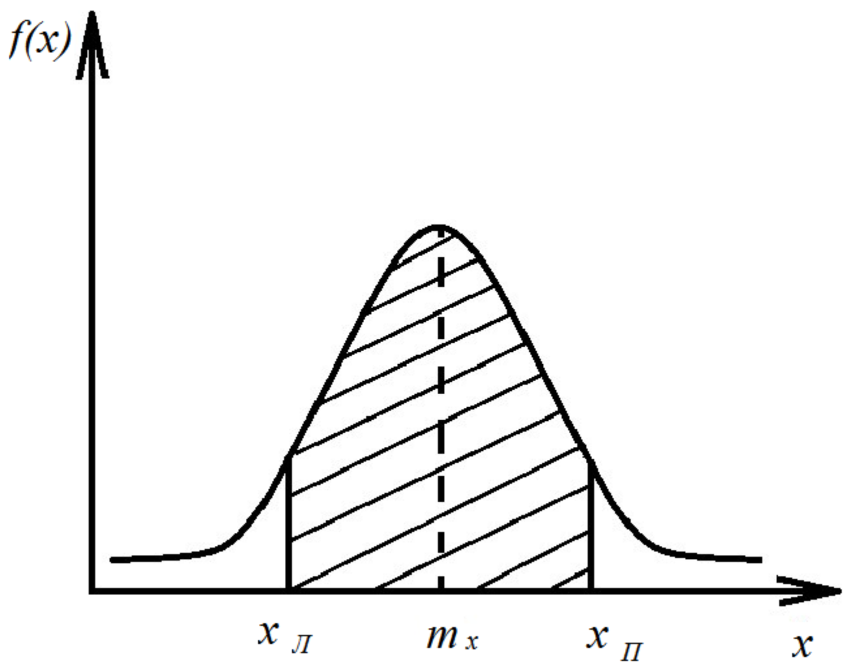


Рисунок 8 – Доверительный интервал

Возьмем на оси x произвольный интервал с границами: левая – $x_Л$, правую – $x_П$. Вероятность того, что случайная величина попадет в данный интервал, равна площади заштрихованной фигуры.

Аналитически эта вероятность γ может быть определена из формулы:

$$\gamma = P(x_Л < X < x_П) = \int_{x_Л}^{x_П} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_П} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_Л} f(x)dx = F(x_П) - F(x_Л). \quad (2.33)$$

Допустим дана вероятность γ и необходимо найти границы интервала $x_{Л\gamma}$ и $x_{П\gamma}$ в который величина X попадает с вероятностью γ. Так как здесь имеется две переменных $x_{Л\gamma}$ и $x_{П\gamma}$, то необходимо задать дополнительные условия. Например, указать, что границы располагаются симметрично относительно математического ожидания, или одну из границ необходимо назначить минус или плюс бесконечность. Так же, могут назначаться несимметричные границы относительно $m_{x.}$.

Вероятность γ называют доверительной вероятностью, интервал $I\gamma=(x_{Л\gamma};\ x_{П\gamma})$ – доверительным интервалом, а его границы – доверительными границами.

Когда говорят не о генеральных совокупностях, а о выборках случайных величин (наборах экспериментальных данных), то можно сказать, что в среднем в $\gamma \cdot 100\%$ случаев результаты экспериментов попадут в доверительный интервал $I\gamma$.

Иногда удобно доверительный интервал выражать в долях от среднеквадратического отклонения D_X. Так, например, для нормального закона распределения и для симметричных относительно математического ожидания доверительных границ интервал $(m_x - D_x; m_x + D_x)$ накрывает 68,3% всех экспериментальных точек, интервал $(m_x - 2D_x; m_x + 2D_x)$ накрывает примерно 95,5% всех экспериментальных точек, а интервал $(m_x - 3D_x; m_x + 3D_x) - 99{,}7\%$ [2].

Если воспользоваться нормированной случайной величиной u, которая равна

$u = \dfrac{x - m_x}{D_x}$, то можно для произвольной доверительной вероятности с помощью таблиц нормального распределения определить значение квантиля u, а по нему и доверительный интервал $I\gamma$. Для этого из уравнения $u_{\frac{\gamma+1}{2}} = \pm \dfrac{x - m_x}{D_x}$ находим $x_{Л\gamma} = m_x - u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x$ и $x_{П\gamma} = m_x + u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x$. Следовательно, доверительный интервал определиться формулой:

$$I_\gamma = \left(m_x - u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x ; m_x + u_{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot D_x \right). \qquad (2.34)$$

Рассмотрим пример нахождения доверительного интервала. Имеем выборку, для которой $m_x = 21{,}33$; $D_x = 0{,}53$. Требуется найти доверительный интервал для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$.

По таблице нормального распределения (приложение А) находим, что вероятность $\dfrac{1+\gamma}{2} = \dfrac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$, соответствует квантилю $u = 1{,}6448$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (2.34): $I_\gamma = (21{,}33 - 1{,}6448 \cdot 0{,}53;\ 21{,}33 + 1{,}6448 \cdot 0{,}53)$.

Величина доверительного интервала составит: (20,46; 22,2).

2.3.2 Доверительный интервал математического ожидания

Математическое ожидание m_x является надежной оценкой генеральных совокупностей величин лишь при большом числе данных n в выборке. При малых выборках необходимо указать степень точности и надежности этой оценки, которая характеризуется доверительным интервалом.

Рассмотрим плотность распределения генеральной совокупности случайной величины X (выборку при бесконечно большом количестве экспериментальных точек) (рисунок 9). Так же на оси абсцисс показано истинное математическое ожидание (математическое ожидание генеральной совокупности) m_x. Однако на практике количество экспериментов, ограничено, и определить точно величину m_x не представляется возможным.

В связи с этим определяют величину среднего значения $\hat{m}_x$ по ограниченным экспериментальным данным (выборке). Если определять величину $\hat{m}_x$ по разным выборкам одной и той же случайной величины, то в результате мы получим разные оценки: $\hat{m}_{x1}, \hat{m}_{x2}, \hat{m}_{x3}$ и т.д. (рисунок 9).

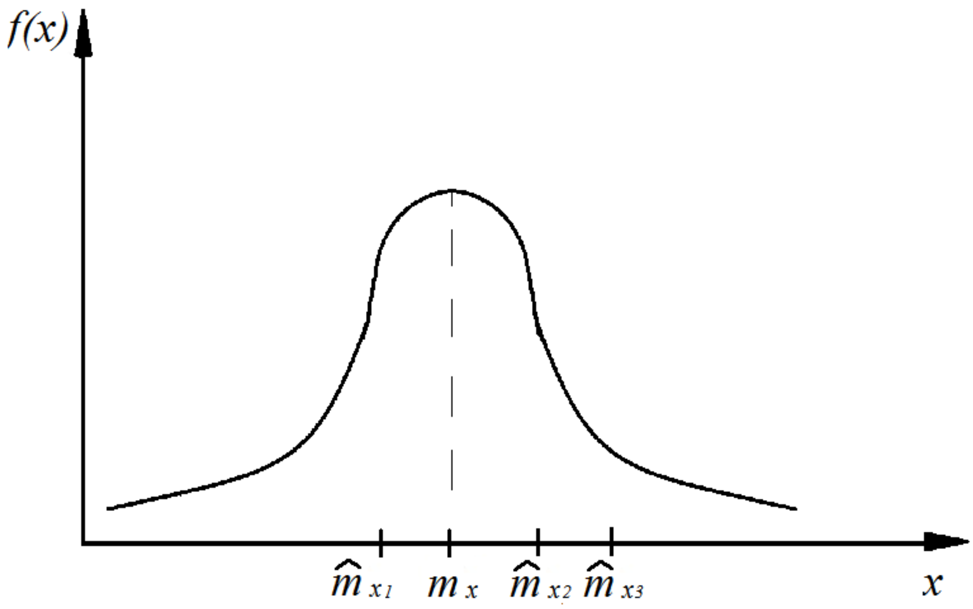


Рисунок 9 – Математическое ожидание и средние значения выборок

Таким образом, сама оценка $\hat{m}_x$ является случайной величиной, следовательно, у нее имеется свой закон распределения со своими характеристиками математического ожидания m_{m_x} и дисперсии $D^2_{m_x}$, причем данные характеристики будут равны:

$$m_{m_x} = m_x, \tag{2.35}$$

$$D^2_{m_x} = \frac{D_x^2}{n}. \qquad (2.36)$$

Из формул видно, что математическое ожидание от среднего арифметического (которое в данном случае является оценкой) и математическое ожидание генеральной совокупности совпадают, а дисперсия случайной величины $\hat{m}_X$ меньше дисперсии случайной величины *X* в *n* раз.

Доверительный интервал математического ожидания удобно определять с помощью нормированной случайной величины *t:*

$$t = \frac{\hat{m}_x - m_x}{D_{m_x}} = \sqrt{n} \cdot \frac{\hat{m}_x - m_x}{D_x}. \qquad (2.37)$$

Тогда:

$$I_{m_x} = \left(\hat{m}_x - t\frac{D_x}{\sqrt{n}}; \hat{m}_x + t\frac{D_x}{\sqrt{n}}\right). \qquad (2.38)$$

Если распределение случайной величины X подчиняется нормальному закону распределения, то распределение нормированной случайной величины *t* подчиняется распределению Стьюдента с *(n-1*) степенями свободы (где *n* – объем выборки).

Плотность закона распределения Стьюдента имеет вид:

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad (2.39)$$

где *t* – аргумент распределения Стьюдента;

$\Gamma(y)$ – гамма функция.

Доверительная вероятность того, что случайная величина t_i попадает в интервал $\left(-t_\gamma ; t_\gamma\right)$ равна:

$$\gamma = P\left(-t_\gamma < t < t_\gamma\right) = \int\limits_{-t_\gamma}^{t_\gamma} S_{n-1}(t)dt \quad . \tag{2.40}$$

Следует отметить, что при $n\to\infty$ можно вместо таблицы Стьюдента пользоваться таблицей нормального закона распределения, так как в пределе закон Стьюдента переходит в нормальный закон. На практике пользуются нормальным распределением уже при $n > 30$.

Значение аргумента t распределения Стьюдента для различных доверительных вероятностей приведены в приложении В. Число степеней свободы равно:

$$\nu = n - 1. \tag{2.41}$$

Рассмотрим пример нахождения доверительного интервала математического ожидания. Имеем выборку, состоящую из 30 членов, для которой $m_x = 21{,}33$; $D_x = 0{,}53$. Требуется найти доверительный интервал математического ожидания для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.

По таблице распределения Стьюдента (приложение В) находим, что вероятность $0{,}95$ для числа степеней свободы, равного 29, соответствует квантилю $t = 2{,}04$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (2.38):

$$I_\gamma = \left(21{,}33 - 2{,}04 \cdot \frac{0{,}53}{\sqrt{30}} ; 21{,}33 + 2{,}04 \cdot \frac{0{,}53}{\sqrt{30}}\right).$$

Величина доверительного интервала математического ожидания составит: (21,13; 21,53).

2.3.3 Доверительный интервал дисперсии

Если генеральная совокупность случайной величины X подчиняется нормальному закону, то рассмотрение доверительных границ для дисперсии приводит к понятию распределения Пирсона (распределение χ^2).

Распределение Пирсона уже не является симметричным. Поэтому в данном случае симметричные границы доверительного интервала брать не желательно. Уславливаются выбирать доверительные границы так, чтобы вероятность выхода случайной величины за пределы доверительного интервала вправо и влево были бы одинаковы и равны (1 –γ)/2 .

Доверительный интервал дисперсии $I_{D_x^2}$ определяют по формуле:

$$I_{D_x^2} = \left(\frac{D_x^2(n-1)}{\chi_1^2}; \frac{D_x^2(n-1)}{\chi_2^2} \right), \tag{2.42}$$

где χ_1^2 , χ_2^2 – значение величины χ^2 для вероятностей α_1 и α_2.

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} , \tag{2.43}$$

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = \frac{1+\gamma}{2} . \tag{2.44}$$

Значение χ^2 для некоторых α_1 и α_2 приведены в приложении Г.

Рассмотрим пример нахождения доверительного интервала дисперсии. Имеем выборку, состоящую из 30 членов, для которой $D_x = 0{,}53$. Требуется найти доверительный интервал дисперсии для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$.

Определяем вероятности:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05;\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95.$$

По таблице распределения Пирсона (приложение Г) находим для числа степеней свободы, равного 29:

$$\chi_1^2 = 42{,}6 \text{ и } \chi_2^2 = 17{,}7.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D_x^2} = \left(\frac{0{,}53(30-1)}{42{,}6};\ \frac{0{,}53(30-1)}{17{,}7} \right) = (0{,}36;\ 0{,}87).$$

2.4 Статистические гипотезы

2.4.1 Статистические гипотезы и критерии

На разных этапах статистического исследования возникает необходимость в формулировании и экспериментальной проверке некоторых предположительных утверждений (гипотез). При установлении законов распределения той или иной случайной величины, либо ее характеристик, как правило, получаем выборку из генеральной совокупности, то есть ограниченную последовательность опытных данных x_1, x_2, …, x_n. По выборке нельзя дать точное определение параметров генеральной совокупности, можно только сделать предположение об их значениях, то есть предложить гипотезу. Эти гипотезы проверяются путем обработки выборки случайной выборки и называются статистическими [4].

Задача проверки гипотез состоит в том, чтобы установить, противоречит принятая гипотеза экспериментальным данным или нет.

Наряду с выдвинутой гипотезой, которая называется нулевой (основной) и обозначается H_0, рассматривают и противоречащую ей гипотезу, которая может быть принята в том случае, если первая не подтвердится. Эту гипотезу называют альтернативной (конкурирующей) гипотезой и обозначают H_1.

Допустим, проверяется предположение о том, что исследуемая характеристика подчиняется конкретному, к примеру, нормальному закону распределения. Данное предположение выдвигается как нулевая гипотеза H_0. Конкурирующих к ней гипотез может быть выдвинуто несколько. Таким образом, к примеру, одна из них предполагает, что данная характеристика не подчиняется нормальному закону распределения.

С целью краткости записи гипотез применяют специальное обозначение. Допустим нулевая гипотеза заключается в предложении, что математические ожидания двух нормально распределенных совокупностей m_x и m_y равны, а альтернативная гипотеза заключается в том, что они не равны. Записать это можно следующим образом:

$$H_0 : m_x = m_y \,; \quad H_1 : m_x \neq m_y \,.$$

Гипотезы делятся на простые и сложные. Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Сложной называют гипотезу, содержащую конечное и бесконечное число предположений.

Так как нулевая гипотеза выражает предварительно выбранную точку зрения, то есть обязательно следует проверить, не противоречит ли высказанная гипотеза существующей в нашем распоряжении выборке. Данная проверка осуществляется с помощью статистического критерия и называется статистической проверкой гипотез.

Под статистическим критерием понимается строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается та или иная статистическая гипотеза.

Например, для партии произведенных деталей осуществляется выборочный контроль, по итогам которого следует принять решение: или целую партию рассматривать годной (с возможным уровнем брака), или целую партию рассматривать негодной. За нулевую возьмем гипотезу, что вся партия годна, а за альтернативную – что партия содержит брак выше допустимого.

Из выбранных для контроля n деталей бракованных может оказаться z штук. Контролеры бракуют всю партию, если из выбранных n деталей оказалось k бракованных деталей (или больше) и считают годной всю партию, если бракованных деталей меньше k. То есть, если $z < k$, то принимается гипотеза H_0, если $z \geq k$, то гипотеза H_0 отвергается.

В разных выборках n деталей из одной партии значение z будет различным. То есть z является случайной величиной со своим законом распределения.

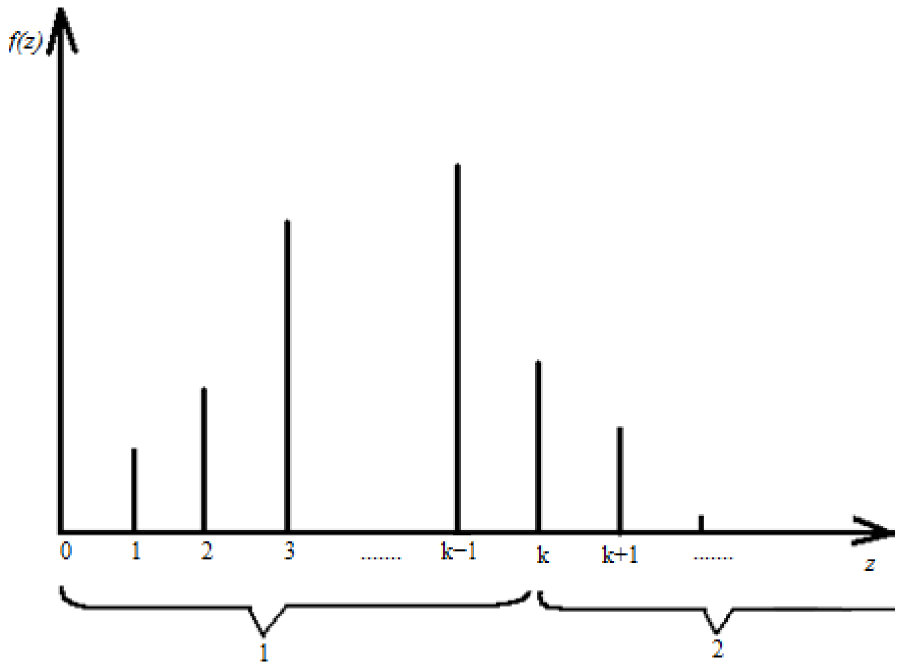
В этом примере величина z может рассматриваться как признак или функция брака. В общем случае такой признак называется показателем согласованности (критической статистикой или статистической характеристикой).

Величина k служит в качестве критерия проверки (критерия согласия, критерия соответствия), т.е. свода правил, указывающих, при каких значениях величины показателя согласованности гипотеза отвергается, а при каких не отвергается.

Таким образом, множество возможных значений показателя согласованности z в соответствии с принятым критерием k разбивается на два подмножества ($z<k$ *и* $z \geq k$; $0 \leq z \leq n$), поэтому попадание возможного значения показателя согласованности критической статистики в подмножество ($z<k$) означает принятие гипотезы H_0, а в другое ($z \geq k$) – отклонение гипотезы H_0.

В общем случае областью отклонения гипотезы G (критической областью) называется область, при попадании в которую статистической характеристики z гипотеза H_0 отвергается, а областью принятия - область, при попадании в которую статистической характеристики z нулевая гипотеза H_0 принимается.

Приведенные положения иллюстрированы на рисунке 10, где по оси абсцисс отложена критическая статистика *z*, а по оси ординат - плотность ее распределения *f(z)*.



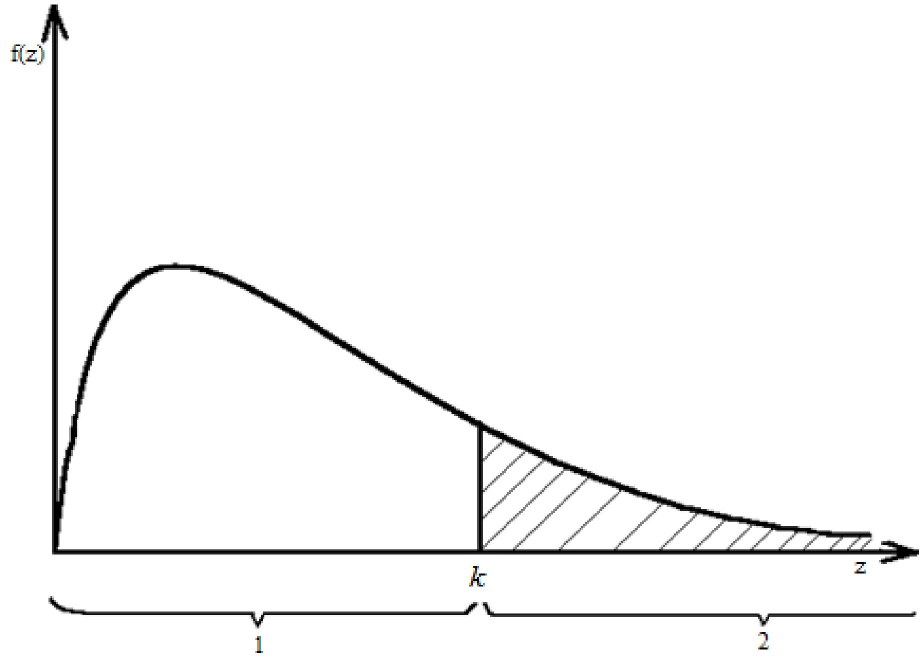
1 – область принятия нулевой гипотезы;

2 – область отклонения нулевой гипотезы (G)

Рисунок 10 – Области отклонения и принятия гипотезы

В случае, если анализировать не дискретные случайные величины, а непрерывные (пример, размер детали), получим непрерывную плотность распределения критической статистики (рисунок 11).

Так как критическая статистика считается случайной величиной, то постоянно имеется риск сформировать настолько неудачную выборку, что сведения, содержащаяся в ней, окажутся абсолютно ошибочными. Теория статистической проверки гипотез дает возможность определить вероятность такой ошибки. Такую вероятность называют уровнем значимости α (на рисунке 11 это площадь заштрихованной фигуры). Тогда область принятия гипотезы будет являться доверительным интервалом для статической характеристики *z* с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$.



1 – область принятия нулевой гипотезы;

2 – область отклонения нулевой гипотезы

Рисунок 11 – Непрерывная плотность распределения критической статистики

2.4.2 Ошибки первого и второго рода

Так как критическая статистика считается случайной величиной, то постоянно имеется риск сформировать настолько неудачную выборку, что сведения, содержащиеся в ней, окажутся абсолютно ошибочными. Теория статистической проверки гипотез дает возможность определить вероятность такой ошибки. Такую вероятность называют уровнем значимости α (на рисунке 11 это площадь заштрихованной фигуры). Тогда область принятия гипотезы будет являться доверительным интервалом для статистической характеристики z с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$.

На первый взгляд может показаться, что нам необходимо выбирать уровень значимости α всегда как можно меньше, но в действительности это не так. Дело в том, что при проверке гипотезы можно совершить одну из двух ошибок [5]:

- ошибка первого рода (риск поставщика) заключается в отклонении верной гипотезы;

- ошибка второго рода (риск заказчика) заключается в принятии ошибочной гипотезы.

При уменьшении вероятности ошибки первого рода α всегда увеличивается вероятность ошибки второго рода $(1-\alpha)$. На практике обычно принимают α =0,05 или α =0,10

При решении некоторых задач по проверке статистических гипотез необходимо определить не одностороннее ограничение (рисунок 11), а двухстороннее (рисунок 12). В этом случае всю область значений случайной величины z разделяют на три области: 1 – область неправдоподобно малых значений; 2 – область естественных (вероятных) значений; 3 – область неправдоподобно больших значений. Обычно z_{min} и z_{max} выбирают из условия, чтобы площади слева от z_{min} и справа от z_{max} под кривой плотности распределения *f(z)* были бы равны между собой и составляли бы α/2.

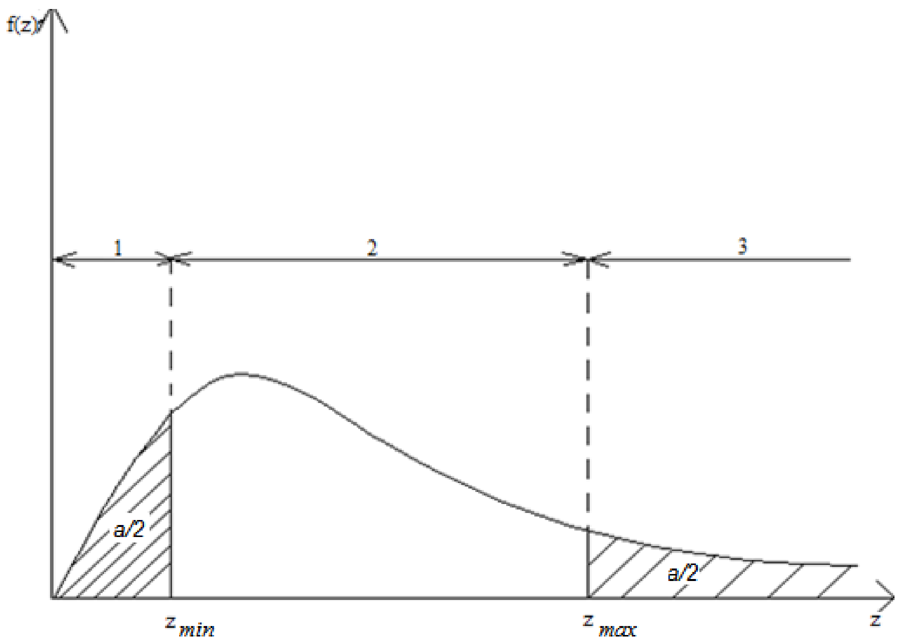


Рисунок 12 - Двухстороннее ограничение критической статистики.

2.4.3 Статистические проверки различных гипотез

Простая статистическая характеристика z не всегда является достаточной характеристикой для решения задач статистической проверки гипотез. В действительности используют специально разработанные статистические характеристики, которые различаются от типа решаемых задач [4]: статистические характеристики Стьюдента, Фишера, Пирсона, Смирнова и др.

Все гипотезы можно проверять, используя алгоритм:

1 Выдвигаем предположение (гипотезу) H_0.

2 Задаем величину уровня значимости α.

3 Выбирают критическую статистику z (некоторую функцию от результатов измерений).

4 Из таблиц критической статистики находим100(1-α/2)-процентную и 100(α/2)-процентную точки критической статистики z_{min} и z_{max} в случае двухстороннего ограничения, или $100(1-\alpha)$-процентную точку z_{α} для одностороннего ограничения.

5 В функцию z подставляем значения выборки и подсчитываем ее численное значение. Если окажется, что значение принадлежит области вероятностных значений, то нулевая гипотеза с доверительной вероятностью $(1-\alpha)$ подтверждается. В противном случае гипотеза не подтверждается.

2.4.3.1 Проверка гипотез о законе распределения

При решении практических задач часто необходимо определить какому закону распределения соответствует полученная выборка. Для этого существуют различные статистические методы.

Рассмотрим метод Н.В. Смирнова. Согласно данному методу в качестве меры согласования теоретического и статистического законов распределения используется функция разности статистической и теоретической функции распределения. Проверка гипотезы осуществляется в соответствии с алгоритмом:

1 По внешнему виду (на графике) функции распределения выдвигается нулевая гипотеза, что распределение подчиняется какому-то закону $F(x)$ (например,

нормальному).

2 Задаем величину уровня значимости α.

3 Вычисляем значение критической статистики по формуле (2.45):

$$u = \frac{1}{12 \cdot n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \right]^2, \tag{2.45}$$

где n – количество экспериментальных точек;

$F(x_i)$ – теоретическое значение исследуемой функции распределения при параметрах распределения (m_x и D_x), найденных из эксперимента;

i – порядковый номер наблюдения в вариационном ряду.

Если проверяется нормальный закон распределения, то вместо функции $F(x_i)$ берется табличное значение нормированной нормальной функции распределения:

$$F(x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - m_x}{D_x}\right).$$

Из таблицы 8 для уровня значимости α находят критерии u_α.

Таблица 8 – Значения критической границы по методу Смирнова

α	0,5	0,1	0,05	0,02	0,01
u_α	0,118	0,347	0,461	0,620	0,744

4 Проверяем условие $u < u_\alpha$. Если оно выполняется, то нулевая гипотеза принимается.

Этот метод применяется, если выборка представлена отдельными экспериментальными точками. Рассмотрим пример.

Дан вариационный ряд, построенный из членов выборки: 191, 246, 266, 301, 321, 326, 371, 401. Требуется проверить гипотезу о соответствии этой выборки нормальному закону распределения.

Выбираем уровень значимости 0,05. Рассчитываем математическое ожидание и дисперсию: m_x=303, $D_x^{\,2}$=4030, D_x=63.

По таблице нормального распределения (приложение А) находим теоретическое значение функции распределения:

$$\varPhi\left(\frac{191-303}{63}\right)=\varPhi(-1{,}7)=0{,}04457\,,$$

$$\varPhi\left(\frac{246-303}{63}\right)=\varPhi(-0{,}9)=0{,}1841,$$

…

$$\varPhi\left(\frac{401-303}{63}\right)=\varPhi(1{,}55)=0{,}93943\,.$$

По формуле (2.45):

$$u=\frac{1}{12\cdot 8}+\left[0{,}04457-\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 8}\right]^2+\left[0{,}1841-\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 8}\right]^2+\ldots+\left[0{,}93943-\frac{2\cdot 8-1}{2\cdot 8}\right]^2=$$
$$=0{,}0104+0{,}00032+0{,}0035+\ldots+0{,}0037=0{,}0393.$$

В таблице 8 находим $u_{0,05}$=0,461.

Поскольку u=0,0393<$u_{0,05}$=0,461, то принимается нулевая гипотеза о том, что выборка не противоречит предложенному закону распределения с вероятностью 95%.

Рассмотрим еще один метод проверки гипотез о законе распределения – метод К. Пирсона. Согласно этому методу мерой расхождения теоретического и статистического законов распределения служит сумма квадратов разностей между частотой и вероятностью попадания случайной величины в интервалы, на которые разбивается множество возможных значений этой величины.

Проверка гипотезы применительно к нормальному закону распределения осуществляется в соответствии с алгоритмом:

1 Выдвигаем гипотезу H_0, что статистический закон подчиняется нормальному закону распределения.

2 Выбираем уровень значимости α.

3 Наблюдаемые значения случайной величины разбиваем на l интервалов и вычисляем показатель согласованности по следующей формуле:

$$u = \sum_{j=1}^{l} \frac{n(h_j - p_j)^2}{p_j} \ , \tag{2.46}$$

где h_j – частота попадания случайной величины в j-й интервал;

p_j – вероятность попадания случайной величины в j-й интервал.

Так же можно использовать формулу (1.47):

$$u = \sum_{j=1}^{l} \frac{m_j^2}{np_j} - n, \tag{2.47}$$

где m_j – число наблюдений, попавших в j-й интервал.

Вероятность Pj попадания случайной величины X в j-й интервал вычисляется следующим образом:

$$P_j = F(x_{j+1}) - F(x_j), \tag{2.48}$$

где $F(x)$ – теоретический закон распределения с параметрами m_x и D_x.

Для нормального закона распределения Pj будет равно:

$$P_j = \Phi\left(\frac{x_{j+1} - m_x}{D_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_j - m_x}{D_x}\right). \qquad (2.49)$$

4 Критическую границу $u_\alpha = \chi^2$ для нормального закона распределения определяем по таблице χ^2 (распределение Пирсона) для (l-3) степеней свободы (приложение Г).

5 Проверяем условие $u<u_\alpha$. Если оно выполняется, то расхождение между экспериментальными данными и гипотезой полагают несущественным. В противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Рассмотрим пример (таблица 9).

Таблица 9 – Результаты испытаний объектов

Номер интервала	Интервал нагрузок, кН	Количество отказавших объектов
1	10 – 15	2
2	15 – 20	5
3	20 – 25	8
4	25 – 30	4
5	30 – 35	2

Требуется проверить гипотезу о соответствии этой выборки нормальному закону распределения.

Выбираем уровень значимости 0,05. Рассчитываем математическое ожидание и дисперсию: m_x=22,26, D_x^2=29,71, D_x=5,45.

Определяем теоретическую вероятность по формуле (2.49):

$$P_1 = \Phi\left(\frac{15 - 22{,}26}{5{,}45}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 22{,}26}{5{,}45}\right) = 0{,}09176 - 0{,}0125 = 0{,}07921,$$

$$P_2 = \Phi\left(\frac{20-22,26}{5,45}\right) - \Phi\left(\frac{15-22,26}{5,45}\right) = 0,339 - 0,09176 = 0,24724,$$

…………..

$$P_5 = \Phi\left(\frac{35-22,26}{5,45}\right) - \Phi\left(\frac{30-22,26}{5,45}\right) = 0,99030 - 0,9222 = 0,0681.$$

Значение критической статистики ищем по формуле (2.47):

$$u = \frac{2^2}{21 \cdot 0,07921} + \frac{5^2}{21 \cdot 0,24724} + \ldots + \frac{2^2}{21 \cdot 0,0681} - 21 = 0,957.$$

По таблице распределения Пирсона для уровеня значимости 0,05 и числа степеней свободы, равного $v=l-3=5-3=2$, получим $u_{0,05}=5,991$.

Поскольку $u=0,957<u_{0,05}=5,991$, то принимается нулевая гипотеза о том, что выборка не противоречит предложенному закону распределения с вероятностью 95%.

2.4.3.2 Проверка гипотез о равенстве двух дисперсий нормально распределенных генеральных совокупностей

Прежде, чем сравнивать между собой две выборки (например, на равенство средних значений), необходимо убедиться, что дисперсия этих двух выборок равны между собой. Такая проверка делается с помощью критерия Фишера по следующему алгоритму:

1 Выдвигаем гипотезу $H_0 : D_x^{\,2} = D_y^{\,2}$.

2 Выбираем уровень значимости α.

3 Критической статистикой служит функция F, определяемая по формуле:

$$\text{при } D_x^2 > D_y^2 \quad F = \frac{D_x^2}{D_y^2}, \quad \text{при} \quad D_x^2 < D_y^2 \quad F = \frac{D_y^2}{D_x^2}, \tag{2.50}$$

4 Критическое значение статики F_α соответствует распределению Фишера с $\nu_1 = n_1 - 1$ и $\nu_2 = n_2 - 1$ степенями свободы. Таблица распределения Фишера приведена в приложении Д, где сверху указаны степени свободы большей дисперсии ν_1, а слева – степени свободы меньшей дисперсии ν_2.

5 Проверяем условие $F<F_\alpha$. Если оно выполняется, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Рассмотрим пример. При выпуске некоторого объекта контролируется определенный его параметр. В мае было произведено n_x=13 изделий, а в июне n_y=9. По результатам подсчета были получены соответственно дисперсии параметра D_x^2=15,4 и D_y^2=21,5. Проверить, ухудшилось ли качество выпускаемых объектов в статистическом смысле.

Выдвинем гипотезу H_0: $D_x^2 = D_y^2$, назначаем уровень значимости α = 0,05. Вычисляем по формуле (2.49) статистику F:

$$F = \frac{21{,}5}{15{,}4} = 1{,}4.$$

По таблице приложения Д для α=0,05 и чисел степеней свободы ν_1 =9 −1 = 8 и ν_2 =13 −1 =12 находим $F_{0,05}$=2,946 (обращаем внимание на то, что ν_1 – число степеней свободы для выборки с дисперсией D_y^2, а ν_2 – для выборки с дисперсией D_x^2).

Поскольку F=1,4 < $F_{0,05}$=2,946, то гипотеза H_0 принимается, то есть значения, полученные по выборке, не противоречат утверждению о равенстве дисперсий.

2.4.3.3 Проверка гипотез о равенстве двух средних значений нормально распределенных генеральных совокупностей

На практике часто возникает необходимость сравнить параметры объектов из двух партий. Значения этих параметров будут представлены в виде двух выборок с объемами n_x и n_y. После расчетов получим статистические характеристики m_x, m_y и D_x^2 и D_y^2 .

Проверка гипотезы о равенстве двух средних значений производится следующим образом:

1 Выдвигаем гипотезу H_0: $m_x=m_y$.

2 Выбираем уровень значимости α .

3 Критической статистикой служит функция:

$$t = \frac{m_x - m_y}{\sqrt{\dfrac{(n_x - 1) \cdot D_x^2 + (n_y - 1) \cdot D_y^2}{n_x + n_y - 2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_x \cdot n_y}{n_x + n_y}} \ . \qquad (2.51)$$

Если объем выборок одинаков, можно использовать формулу:

$$t = \frac{m_x - m_y}{\sqrt{D_x^2 + D_y^2}} \cdot \sqrt{n} \ . \qquad (2.52)$$

4 Критическое значение статистики t_α ищем по таблице Стьюдента (приложение В) с $\nu = n_x+n_y-2$ степенями свободы для уровня значимости α. При пользовании этой таблицей следует учесть, что вместо уровня значимости α нужно использовать доверительную вероятность $\gamma = 1-\alpha$. То есть, например, отыскать критическое значение t при $\alpha = 0,05$, можно в столбце с обозначением $\gamma = 0,95$.

5 Рассчитанное значение t сравнивается с критическим t_α . При $|t| > t_\alpha$ гипотеза

H_0 отвергается. В противном случае говорят, что средние значения выборок значимо не отличаются в статистическом смысле.

Рассмотрим пример. Проверяется нижняя резонансная частота приборов, изготавливаемых на заводе. Первая проверка показала, что математическое ожидание частоты m_x =21,6 Гц и дисперсия D_x^2=10,8 Гц^2 при объеме выборки n_x=6 приборов. Вторая проверка, дала следующие результаты: m_y =23,2 Гц и D_y^2=7,15 Гц^2 при n_y=5 приборов. Необходимо проверить гипотезу: значимо ли отличаются средние значения из двух партий при уровне значимости 0,05.

Определяем статистику Стьюдента по формуле (2.51):

$$t = \frac{21{,}6 - 23{,}2}{\sqrt{\dfrac{(6-1)\cdot 10{,}8 + (5-1)\cdot 7{,}15}{6+5-2}}} \cdot \sqrt{\frac{6\cdot 5}{6+5}} = 0{,}62\,.$$

Критическое значение t_α при α = 0,05 и числе степеней свободы ν = 9 находим из таблицы (приложение В), оно составляет $t_{0,05}$=2,3.

Так как t=0,62< 2,3= $t_{0,05}$, то делаем вывод, что средние резонансные частоты приборов значимо не отличаются.

2.4.3.4 Проверка гипотез о наличии промахов

На практике при статистических расчетах часто возникает необходимость проверки подозрительных членов выборки, которые могут являться промахами, то есть появиться вследствие ошибки.

Определим наличие промахов с помощью r-критерия по алгоритму:

1 Построим из членов выборки, содержащей n членов, вариационный ряд и выдвинем гипотезу, что один из крайних членов данного ряда x_1 или x_n принадлежит выборке, а не является случайным промахом.

2 Выбираем уровень значимости α .

3 Критической статистикой служит функция:

$$r = \frac{m_x - x_1}{D_x \sqrt{\frac{(n-1)}{n}}} \text{ или } r = \frac{x_n - m_x}{D_x \sqrt{\frac{(n-1)}{n}}}. \qquad (2.53)$$

4 Критическое значение r_α выбирают по таблице в приложении Е для принятого уровня значимости и числа степеней свободы $v = n$-2.

5 Если $r \geq r_\alpha$, гипотеза отвергается, то есть исследуемый член выборки является промахом.

Рассмотрим пример. Дан вариационный ряд: 191, 246, 266, 301, 321, 326, 371, 401. Определим, является ли последний член ряда промахом.

Выдвигаем нулевую гипотезу, что последний член ряда ($x_n = 401$) принадлежит генеральной совокупности. Назначаем уровень значимости α =0,05. Вычисляем математическое ожидание и дисперсию. Получаем m_x=303, D_x^2=4030, D_x=63.

Вычисляем характеристику r по формуле (2.53).

$$r = \frac{401 - 303}{63\sqrt{\frac{(8-1)}{8}}} = 1{,}72.$$

По таблице приложения Е находим для числа степеней свободы, равного 6, критическое значение r_α=2,172.

Поскольку r = 1,72 < $r_\alpha = 2{,}172$, то нулевая гипотеза принимается, и последний член ряда не является промахом.

3 Практические работы

3.1 Практическая работа №1. Определение функции надежности

3.1.1 Задания к работе

Во всех заданиях требуется вычислить математическое ожидание, дисперсию, построить эмпирические функции распределения и функцию плотности распределения случайной величины, построить функцию надежности и определить показатели надежности.

Вариант 1. При испытаниях профильной трубы на растяжение получены следующие значения предела текучести (σ_T, МПа): 380, 353, 358, 375, 394, 410, 386, 391, 399, 377. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в профильной трубе напряжения (σ, МПа): 350, 370, 400, 420.

Вариант 2. Для одинаковых объектов проведены замеры напряжений σ, возникающих в элементе конструкции (таблица 10). Несущая способность элемента конструкции (R, МПа) является неслучайной величиной и равна: 220, 270, 300, 50.

Таблица 10 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	20 – 70	5
2	70 – 120	10
3	120 – 170	24
4	170 – 220	6
5	220 – 270	4

Вариант 3. Напряжения (σ, МПа), испытываемые элементом конструкции, по результатам замеров были следующие: 207, 236, 245, 262, 265, 337, 275, 375, 300, 292, 257, 269. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в

конструкции напряжения (σ, МПа): 335, 270, 280, 300.

Вариант 4. При испытании партии стальных элементов конструкции были получены значения предела текучести (σ_T, МПа): 382, 420, 360, 338, 373, 400, 368, 371. Действующая нагрузка является неслучайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 343, 335, 380, 405.

Вариант 5 Испытаны на устойчивость алюминиевые оболочки (таблица 11). Действующая нагрузка (N, кН) является неслучайной величиной и равна: 15, 10, 7, 34.

Таблица 11 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал нагрузки, кН	Количество оболочек в интервале
1	10 – 15	2
2	15 – 20	4
3	20 – 25	8
4	25 – 30	4
5	30 – 35	3
6	35 – 40	1

Вариант 6. Значения предела текучести стальных образцов представлены в таблице 12. Действующая нагрузка постоянная и вызывает напряжения (σ, МПа): 410, 405, 380, 350.

Вариант 7. Значения предела прочности при изгибе чугунных образцов равны (σ_B, МПа): 350, 352, 370, 365, 351, 340, 357. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в образцах напряжения (σ, МПа): 330, 350, 360, 340.

Вариант 8. Был получен ряд напряжений (σ, МПа), испытываемых элементом конструкции: 107, 136, 145, 162, 165, 137, 175, 175, 100, 192, 124, 148, 165, 185. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 343, 335, 380, 405.

Вариант 9. Был получен ряд напряжений (σ, МПа), испытываемых элементом конструкции: 107, 136, 145, 162, 165, 137, 175, 175, 100, 192, 124, 148, 165, 185. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 105, 150, 180, 130.

Таблица 12 – Исходные данные

№ интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал	№ интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	405 – 410	7	6	430 – 435	12
2	410 – 415	8	7	435 – 440	12
3	415 – 420	12	8	440 – 445	9
4	420 – 425	17	9	445 – 450	6
5	425 – 430	22			

Вариант 10. При испытаниях стального стержня на растяжение получены следующие значения предела текучести (σ_T, МПа): 380, 353, 358, 375, 394, 410, 386, 391, 399, 377, 405, 400, 363. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в стержне напряжения (σ, МПа): 300, 420, 400, 350.

Вариант 11. Проведены замеры напряжений σ, возникающих в элементе конструкции (таблица 13). Несущая способность элемента конструкции (R, МПа) является неслучайной величиной и равна: 100, 200, 300, 400.

Вариант 12. Напряжения, испытываемые элементом конструкции, по результатам замеров были следующие (σ, МПа): 100, 95, 65, 88, 97, 84,124, 113, 125. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 50, 70, 100, 90.

Вариант 13. Напряжения (σ, МПа), испытываемые элементом конструкции, по результатам замеров были следующие: 207, 236, 337, 275, 375, 300, 292, 257, 269.

Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 200, 270, 280, 300.

Таблица 13 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал σ, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	20 – 70	5
2	70 – 120	10
3	120 – 170	24
4	170 – 220	6
5	220 – 270	4
6	270 – 300	3
7	330 – 400	1

Вариант 14. При испытании партии стальных элементов конструкции были получены значения предела текучести (σ_T, МПа): 382, 420, 360, 338, 373, 400, 368, 371, 363, 385, 364, 355, 376. Действующая нагрузка является неслучайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 330, 335, 380, 390.

Вариант 15. Испытаны на устойчивость стержни (таблица 14). Действующая нагрузка (N, кН) является неслучайной величиной и равна: 45, 15, 25, 50.

Вариант 16. Значения предела текучести стальных образцов представлены в таблице 15. Действующая нагрузка постоянная и вызывает напряжения (σ, МПа): 410, 405, 380, 350.

Вариант 17. Значения предела прочности (σ_B, МПа) чугунных образцов равны: 350, 352, 370, 365, 351, 340, 357, 355, 367, 386. Действующая нагрузка постоянная и вызывает в образцах напряжения (σ, МПа): 330, 350, 380, 370.

Вариант 18. Был получен ряд напряжений (σ, МПа), испытываемых элементом конструкции: 162, 165, 137, 175, 175, 150, 192, 124, 148. Действующая нагрузка является случайной величиной и вызывает в конструкции напряжения (σ, МПа): 200, 130, 380, 405.

Таблица 14 – Исходные данные

Номер интервала	Интервал силы, кН	Количество стержней в интервале
1	10 – 15	2
2	15 – 20	4
3	20 – 25	8
4	25 – 30	6
5	30 – 35	5
6	35 – 40	3
7	40 – 45	2
8	45 – 50	1

Таблица 15 – Исходные данные

№ интервала	Интервал σ_T, МПа	Количество замеров, попавших в интервал	№ интервала	Интервал σ_T, МПа	Количество замеров, попавших в интервал
1	405 – 410	7	6	430 – 435	12
2	410 – 415	8	7	435 – 440	12
3	415 – 420	12	8	440 – 445	9
4	420 – 425	17	9	445 – 450	6
5	425 – 430	22	10	455 – 460	3

2.1.2 Пример выполнения

Цель работы – закрепление навыков определения функции распределения, функции плотности распределения, а также функции надежности.

При испытаниях на прочность параметры нагружения для ряда объектов были одинаковыми. Построить функцию распределения, функцию плотности распределения случайной величины, а также функцию надежности, если несущая способность объекта является случайной величиной (таблица 16).

Таблица 16 – Несущая способность

Порядковый номер объекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальное напряжение σ, МПа	312	329	248	321	418	267	193	375	358

Построим вариационный ряд, найдем функцию распределения и плотность распределения, а также функцию надежности (таблица 17).

Таблица 17 – Данные обработки случайной величины

Порядковый номер	Вариационный ряд σ, МПа	$F(\sigma)=i/N$	$f(\sigma)$	H
1	193	0,111	0,00201818	0,889
2	248	0,222	0,00584211	0,778
3	267	0,333	0,00246667	0,667
4	312	0,444	0,01244444	0,556
5	321	0,556	0,013875	0,444
6	329	0,667	0,00382759	0,333
7	358	0,778	0,00652941	0,222
8	375	0,889	0,0025814	0,111
9	418	1	-	0

Построим графики функции распределения и плотности распределения (рисунки 13 и 14), а так же график функции надежности (рисунке 15).

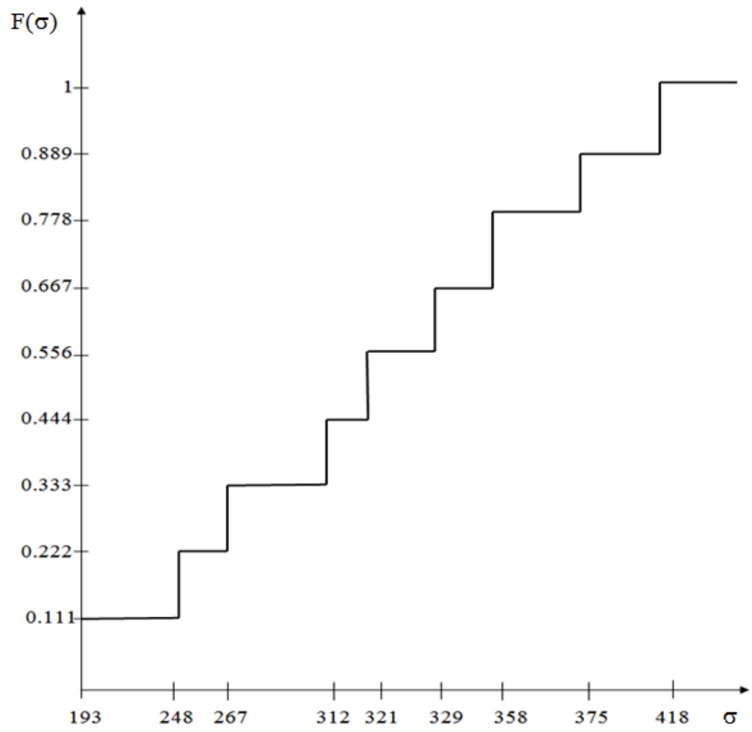


Рисунок 13 – Функция распределения

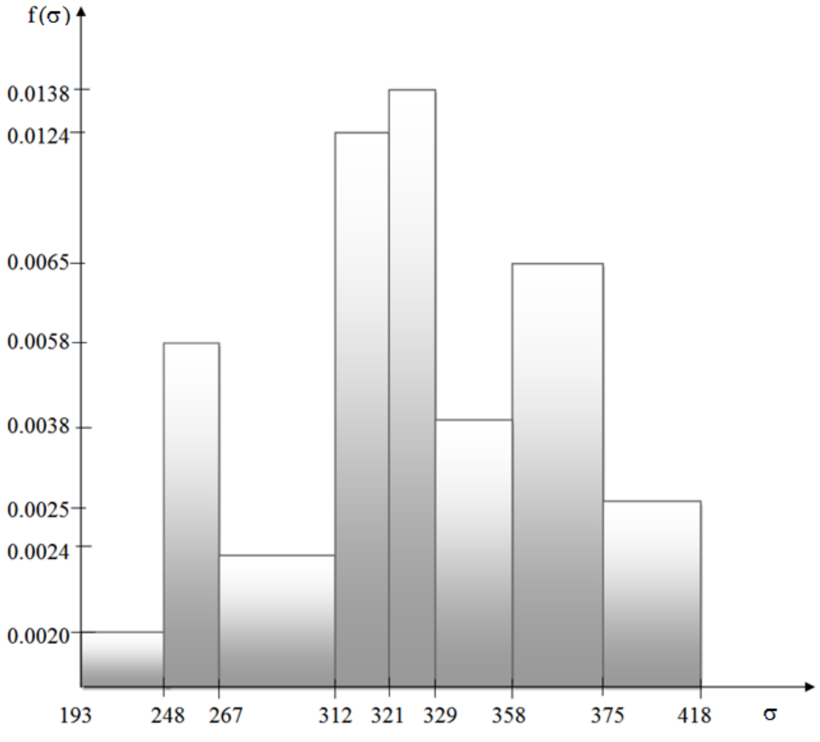


Рисунок 14 – Функция плотности распределения

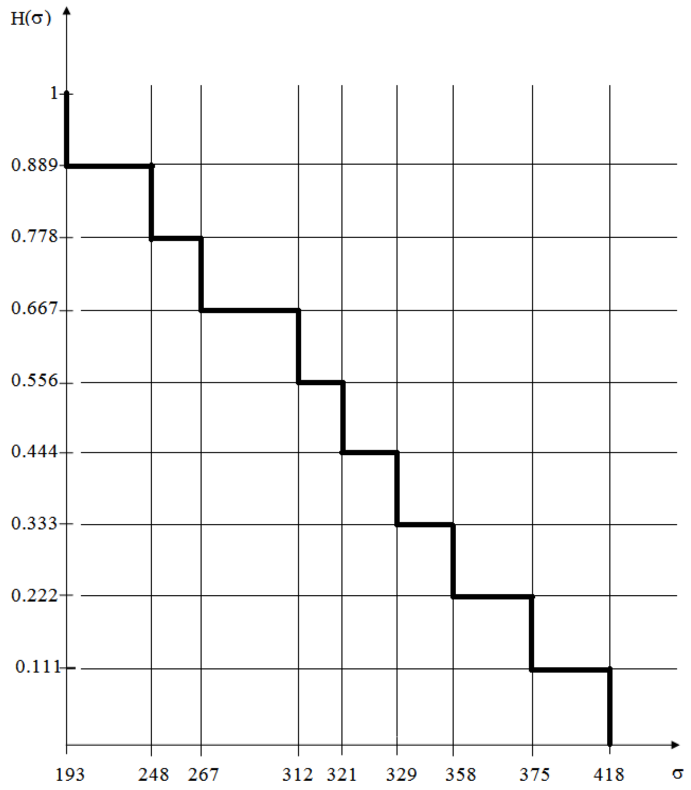
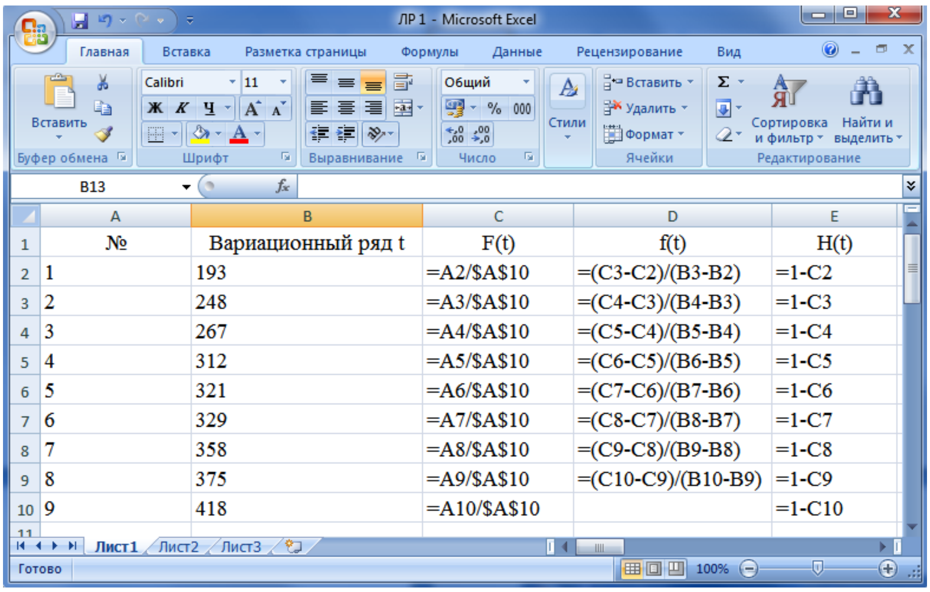


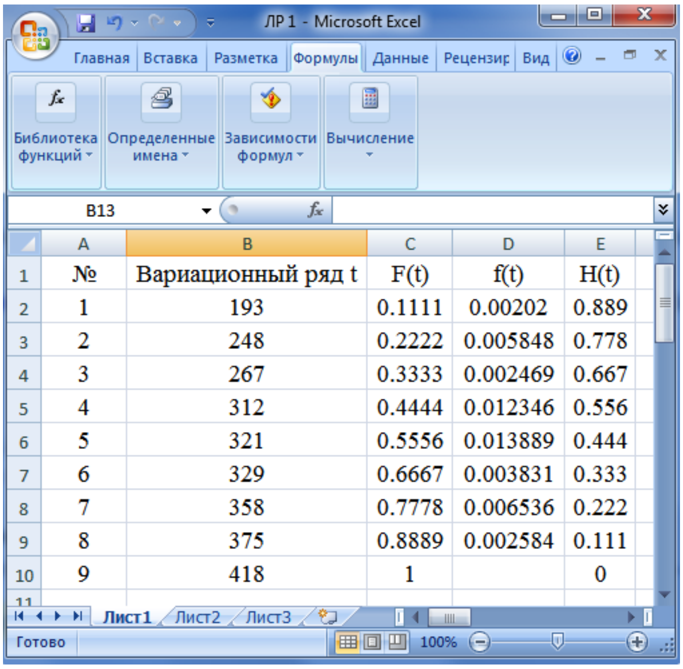
Рисунок 15 – Функция надежности

Проверим правильность выполнения работы с помощью программы Microsoft Office Excel (рисунки 16, 17).



	A	B	C	D	E
1	№	Вариационный ряд t	F(t)	f(t)	H(t)
2	1	193	=A2/$A$10	=(C3-C2)/(B3-B2)	=1-C2
3	2	248	=A3/$A$10	=(C4-C3)/(B4-B3)	=1-C3
4	3	267	=A4/$A$10	=(C5-C4)/(B5-B4)	=1-C4
5	4	312	=A5/$A$10	=(C6-C5)/(B6-B5)	=1-C5
6	5	321	=A6/$A$10	=(C7-C6)/(B7-B6)	=1-C6
7	6	329	=A7/$A$10	=(C8-C7)/(B8-B7)	=1-C7
8	7	358	=A8/$A$10	=(C9-C8)/(B9-B8)	=1-C8
9	8	375	=A9/$A$10	=(C10-C9)/(B10-B9)	=1-C9
10	9	418	=A10/$A$10		=1-C10

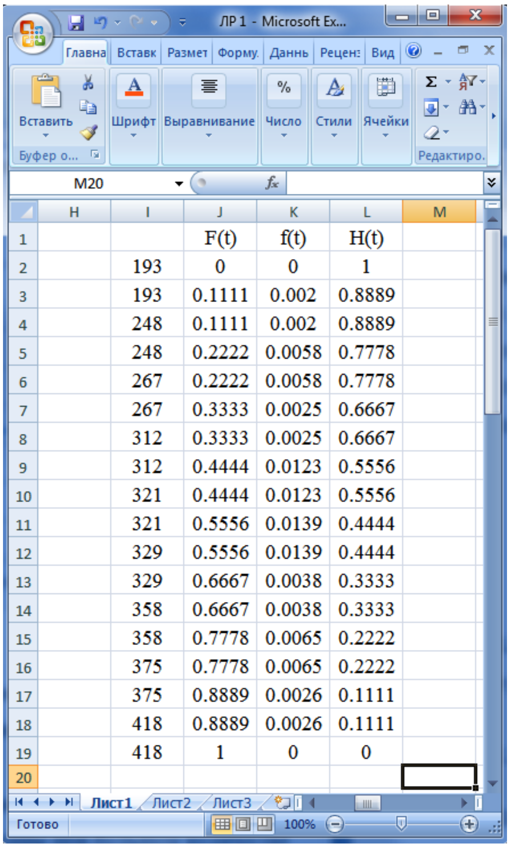
Рисунок 16 – Расчетные формулы в Excel



№	Вариационный ряд t	F(t)	f(t)	H(t)
1	193	0.1111	0.00202	0.889
2	248	0.2222	0.005848	0.778
3	267	0.3333	0.002469	0.667
4	312	0.4444	0.012346	0.556
5	321	0.5556	0.013889	0.444
6	329	0.6667	0.003831	0.333
7	358	0.7778	0.006536	0.222
8	375	0.8889	0.002584	0.111
9	418	1		0

Рисунок 17 – Результаты вычислений в Excel

Для улучшения представления графиков преобразуем полученный результат следующим образом (рисунок 18).



	F(t)	f(t)	H(t)
193	0	0	1
193	0.1111	0.002	0.8889
248	0.1111	0.002	0.8889
248	0.2222	0.0058	0.7778
267	0.2222	0.0058	0.7778
267	0.3333	0.0025	0.6667
312	0.3333	0.0025	0.6667
312	0.4444	0.0123	0.5556
321	0.4444	0.0123	0.5556
321	0.5556	0.0139	0.4444
329	0.5556	0.0139	0.4444
329	0.6667	0.0038	0.3333
358	0.6667	0.0038	0.3333
358	0.7778	0.0065	0.2222
375	0.7778	0.0065	0.2222
375	0.8889	0.0026	0.1111
418	0.8889	0.0026	0.1111
418	1	0	0

Рисунок 18 – Преобразованные результаты вычислений

Для построения графиков функций распределения, плотности распределения и функции надежности воспользуемся точечной диаграммой (рисунки 19, 20, 21).

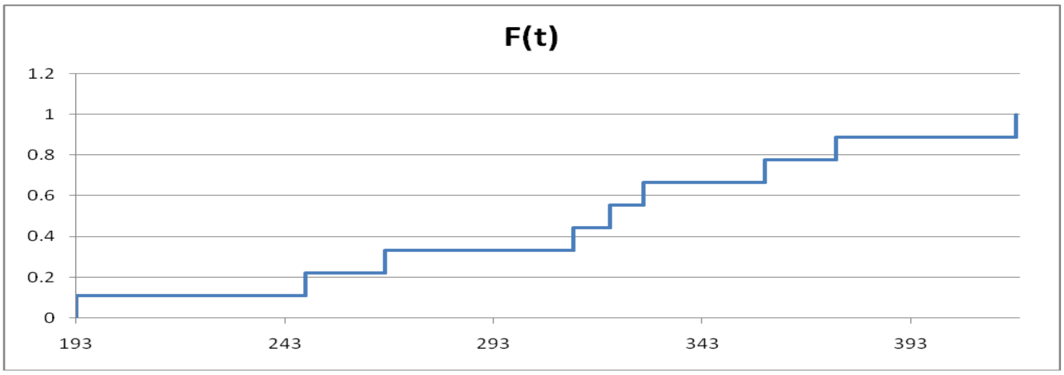


Рисунок 19 – Функция распределения в Excel

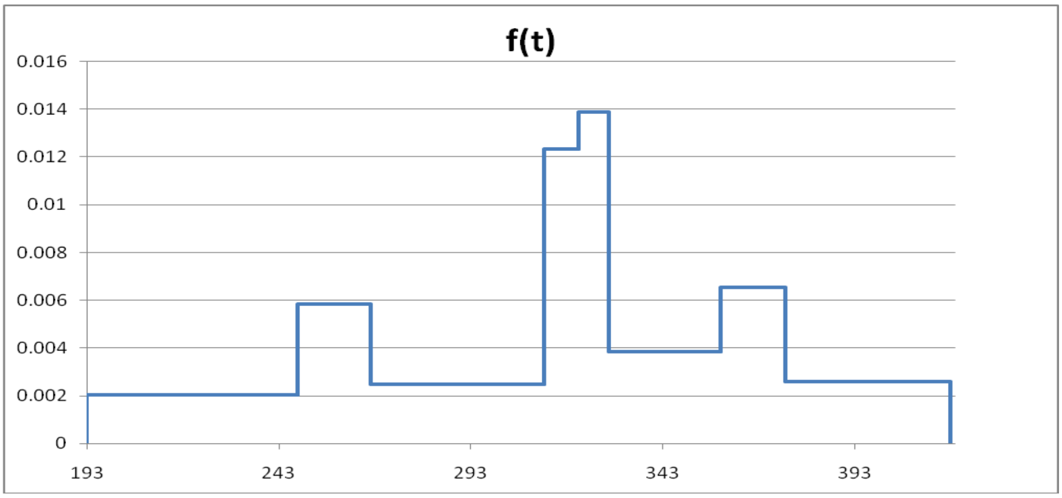


Рисунок 20 – Функция плотности распределения в Excel

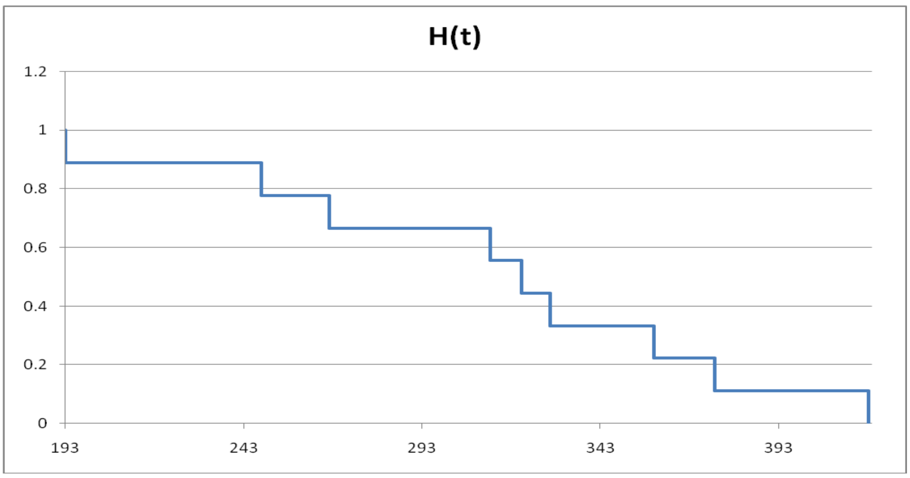


Рисунок 21– Функция надежности в Excel

2.1.3 Вопросы и задания для самоконтроля

1 Запишите формулу функции плотности распределения случайной величины при небольшом количестве значений случайной величины.

2 По каким зависимостям производится расчет функции распределения случайной величины при небольшом количестве значений случайной величины?

3 Что такое среднее квадратическое отклонение?

4 Что такое математическое ожидание?

5 Что такое частота попадания в интервал?

6 По каким зависимостям производится расчет математического ожидания и дисперсии при небольшом количестве значений случайной величины?

7 Запишите формулу функции плотности распределения случайной величины при большом количестве значений случайной величины.

8 По каким зависимостям производится расчет функции распределения случайной величины при большом количестве значений случайной величины?

9 В чем смысл показателя надежности?

10 Как определяется надежность, если несущая способность является неслучайной величиной?

11 Как определяется надежность, если действующая нагрузка является неслучайной величиной?

12 Запишите формулу математического ожидания и дисперсии при большом количестве значений случайной величины.

3.2 Практическая работа №2. Определение надежности при нормальном законе распределения

3.2.1 Задания к работе

Даны варианты результатов замеров случайных величин несущей способности R (кН) и нагрузки N (кН) различных элементов объектов, представленные ниже.

Осуществить проверку нормальности законов распределения случайных величин R и N графическим методом и в случае выполнения нормальности законов распределения определить надежность элемента объекта.

Исходные данные.

Вариант 1. N: 425, 483, 532, 610, 553, 751, 526, 673, 581, 480; R: 664, 766, 688, 843, 711, 769, 700,774, 722, 747, 721, 805, 739, 744.

Вариант 2. N: 831, 956, 1063, 1204, 1110, 1503, 1053, 1357, 1163, 987; R: 1349, 1527, 1378, 1681, 1437, 1491, 1413, 1543, 1443, 1487, 1418, 1609, 1473, 1484.

Вариант 3. N: 1661, 1842, 2125, 2430, 2202, 3006, 2102, 1702, 2333, 1969; R: 2695, 3053, 2754, 3430, 2871, 2983, 2836, 3082, 2881, 2969, 2886, 3202, 2943, 2961.

Вариант 4. N: 622, 823, 702, 872, 736, 909, 781, 1012, 781, 1122; R: 1016, 1113, 1032 1112, 1063, 1122, 1081, 1146, 1085, 1152, 1083, 1261, 1106, 1201.

Вариант 5. N: 1243, 1652, 1411, 1751, 1472, 1803, 1579, 2021, 1592, 2253; R: 2034, 2226, 2068, 2221, 2125, 2241, 2162, 2293, 2165, 2312, 2163, 2321, 2213, 2406.

Вариант 6. N: 1864, 2472, 2123, 2621, 2202, 2701, 2364, 3035, 2386, 3373; R: 3043, 3332, 3091, 3338, 3184, 3365, 3244, 3436, 3242, 2461, 3242, 3783, 3311, 3610.

Вариант 7. N: 101, 136, 123, 142, 111, 155, 136, 168, 131, 185; R: 162, 181, 173, 182, 171, 186, 185, 199, 171, 192, 181, 210, 187, 213.

Вариант 8. N: 223, 252, 322, 272, 333, 284, 372, 295, 415, 306; R: 376, 408, 379, 402, 381, 412, 396, 421, 395, 422, 393, 441, 402, 463.

Вариант 9. N: 242, 285, 355, 285, 370, 316, 402, 313, 440, 335; R: 406, 445, 412, 441, 422, 449, 438, 454, 438, 462, 431, 485, 442, 506.

Вариант 10. N: 265, 306, 375, 312, 391, 343, 431, 341, 485, 356; R: 433, 382, 445, 481, 465, 482, 461, 498, 467, 501, 461, 523, 475, 544.

Вариант 11. N: 281, 332, 403, 431, 422, 362, 471, 373, 521, 386; R: 473, 512, 488, 514, 496, 525, 506, 532, 505, 539, 504, 560, 515, 588.

Вариант 12. N: 311, 354, 438, 368, 450, 384, 506, 397, 565, 417; R: 506, 559, 512, 552, 532, 553, 535, 576, 546, 574, 548, 609, 551, 632.

Вариант 13. *N*: 492, 581, 673, 522, 756, 555, 602, 531, 472, 411; *R*: 741, 731, 802, 723, 743, 722, 775, 706, 747, 719, 847, 684, 765, 673.

Вариант 14. *N*: 989, 1162, 1354, 1055, 1506, 1102, 1201, 1065, 944, 833; *R*: 1483, 1474, 1605, 1444, 1481, 1443, 1546, 1417, 1493, 1434, 1683,1371, 1522, 1345.

Вариант 15. *N*: 1967, 2337, 1707, 2107, 3007, 2207, 2408, 2128, 1898, 1668; *R*: 2968, 2941, 3201, 2881, 2961, 2881, 3087, 2834, 2984, 2874, 3464, 2749, 3059, 2697.

Вариант 16. *N*: 1126, 797, 1018, 789, 906, 736, 877, 709, 823, 629; *R*: 1202, 1106, 1262, 1088, 1154, 1088, 1144, 1089, 1127, 1061, 1111, 1034, 1119, 1019.

Вариант 17. *N*: 2254, 1596, 2028, 1570, 1807, 1477, 1759, 1411, 1653, 1242; *R*: 2410, 2212, 2329, 2165, 2291, 2167, 2249, 2121, 2220, 2062, 2229, 2033, 2317, 2167.

Вариант 18. *N*: 125, 134, 104, 129, 156, 124, 111, 130, 109; *R*: 333, 351, 402, 388, 360, 362, 357, 395, 349, 355.

Вариант 19. *N*: 188, 131, 168, 132, 151, 117, 145, 123, 138, 102; *R*: 215, 173, 210, 170, 183, 169, 181, 182, 189, 171, 180, 179, 181, 161.

Вариант 20. *N*: 303, 411, 281, 379, 281, 333, 272, 322, 256, 224; *R*: 463, 406, 448, 399, 421, 395, 427, 391, 414, 382, 401, 372, 404, 374.

3.2.2 Пример выполнения

Цель работы – закрепление навыков определения надежности объектов при соответствии нагрузочных и прочностных характеристик нормальным законам распределения.

Дано: нагрузка *N* (кН): 227, 258, 271, 288, 292, 301, 322, 331, 372, 413; несущая способность *R* (кН): 371, 379, 388, 396, 395, 406, 460, 408, 409, 411, 419, 424, 441, 397.

Необходимо: проверить нормальность законов распределения случайных величин *R* и *N* с помощью графического метода, определить надежность элемента объекта.

Построим вариационные ряды и найдем функции распределения случайных величин (таблицы 18, 19).

Таблица 18 – Вариационный ряд и функция распределения *N*

№ члена ряда	Вариационный ряд *N*, кН	*F(N)*
1	227	0,1
2	258	0,2
3	271	0,3
4	288	0,4
5	292	0,5
6	301	0,6
7	322	0,7
8	331	0,8
9	372	0,9
10	413	1

Таблица 19 – Вариационный ряд и функция распределения *R*

№ члена ряда	Вариационный ряд *R*, кН	*F(R)*
1	371	0,07
2	379	0,14
3	388	0,21
4	395	0,29
5	396	0,36
6	397	0,43
7	406	0,5
8	408	0,57
9	409	0,64
10	411	0,71
11	419	0,79
12	424	0,86
13	441	0,93
14	460	1

Построим графики проверки соответствия величин случайных величин R и N нормальному закону распределения (рисунки 22, 23,).

Найдем математические ожидания и дисперсии случайных величин:

$$m_N = \frac{\sum_{i=1}^{10} N_i}{n} = \frac{227 + 258 + 271 + 288 + 292 + 301 + 322 + 331 + 372 + 413}{10} = 307{,}5\ \kappa H,$$

$$m_R = \frac{\sum_{i=1}^{14} R_i}{n} = \frac{371 + 379 + 388 + 396 + 395 + 397 + 406 + 460 + 408 + 409}{14} +$$
$$+ \frac{411 + 419 + 424 + 441 + 397}{14} = 406{,}73\ \kappa H,$$

$$D_N^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (N_i - m_N)^2}{n-1} = \frac{6480{,}25 + 2450{,}25 + 1332{,}25 + 380{,}25 + 240{,}25}{9} +$$
$$+ \frac{42{,}25 + 210{,}25 + 552{,}25 + 4160{,}25 + 11130{,}25}{9} = 2997{,}61\ \kappa H^2,$$

$$D_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{14} (R_i - m_R)^2}{n-1} = \frac{1324{,}96 + 806{,}56 + 379{,}36 + 129{,}96 + 153{,}76 + 1{,}96 + 0{,}36 + 2{,}56}{13} +$$
$$+ \frac{12{,}96 + 134{,}56 + 275{,}56 + 1128{,}96 + 2766{,}76 + 108{,}16}{13} = 523{,}21\ \kappa H^2.$$

Определим аргумент функции нормального распределения Ф:

$$\frac{m_R - m_N}{\sqrt{D_R^2 + D_N^2}} = \frac{407{,}4 - 307{,}5}{\sqrt{555{,}88 + 2697{,}85}} = \frac{99{,}9}{57{,}04} = 1{,}6724.$$

По таблице нормального распределения (приложение А) находим показатель надежности:

$$H = \Phi(1{,}6724) = 0{,}9528.$$

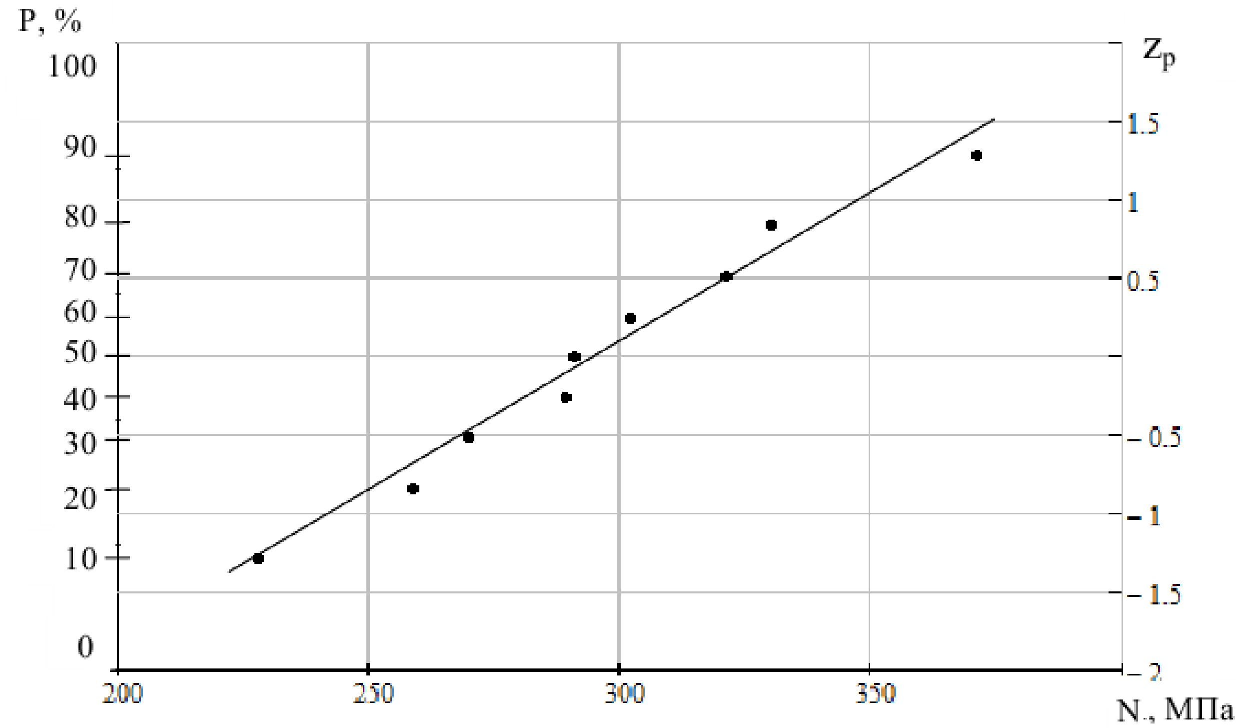


Рисунок 22 – График проверки соответствия *N*

нормальному закону распределения

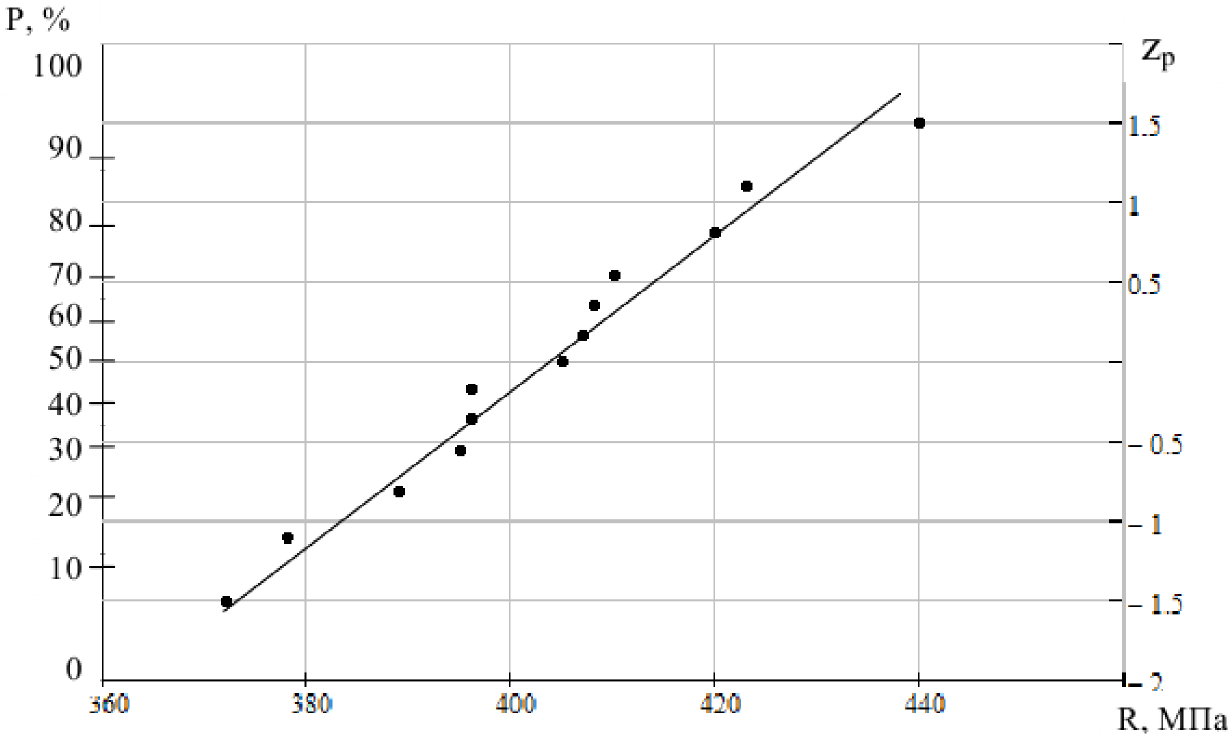
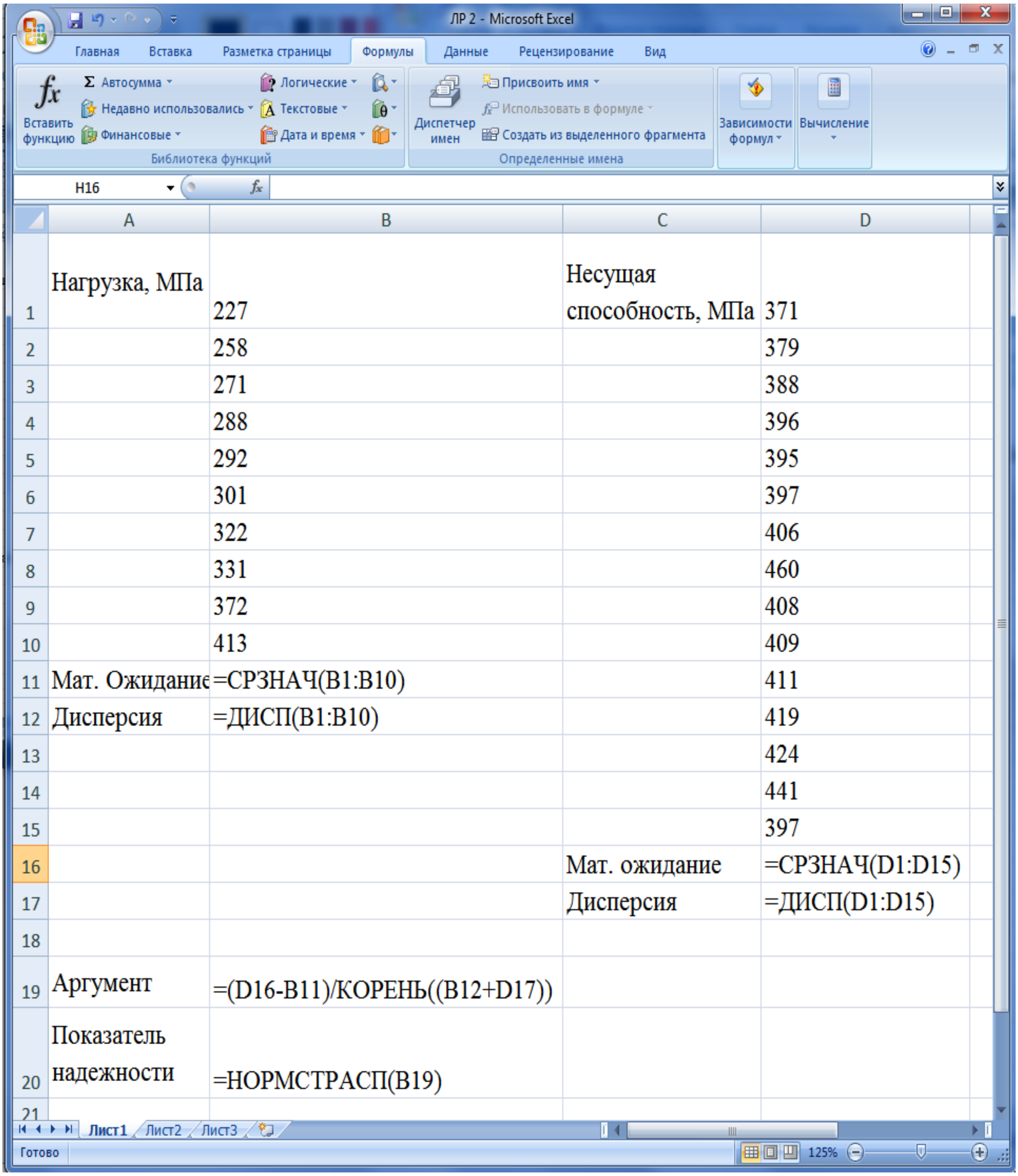


Рисунок 23 – График проверки соответствия *R*

нормальному закону распределения

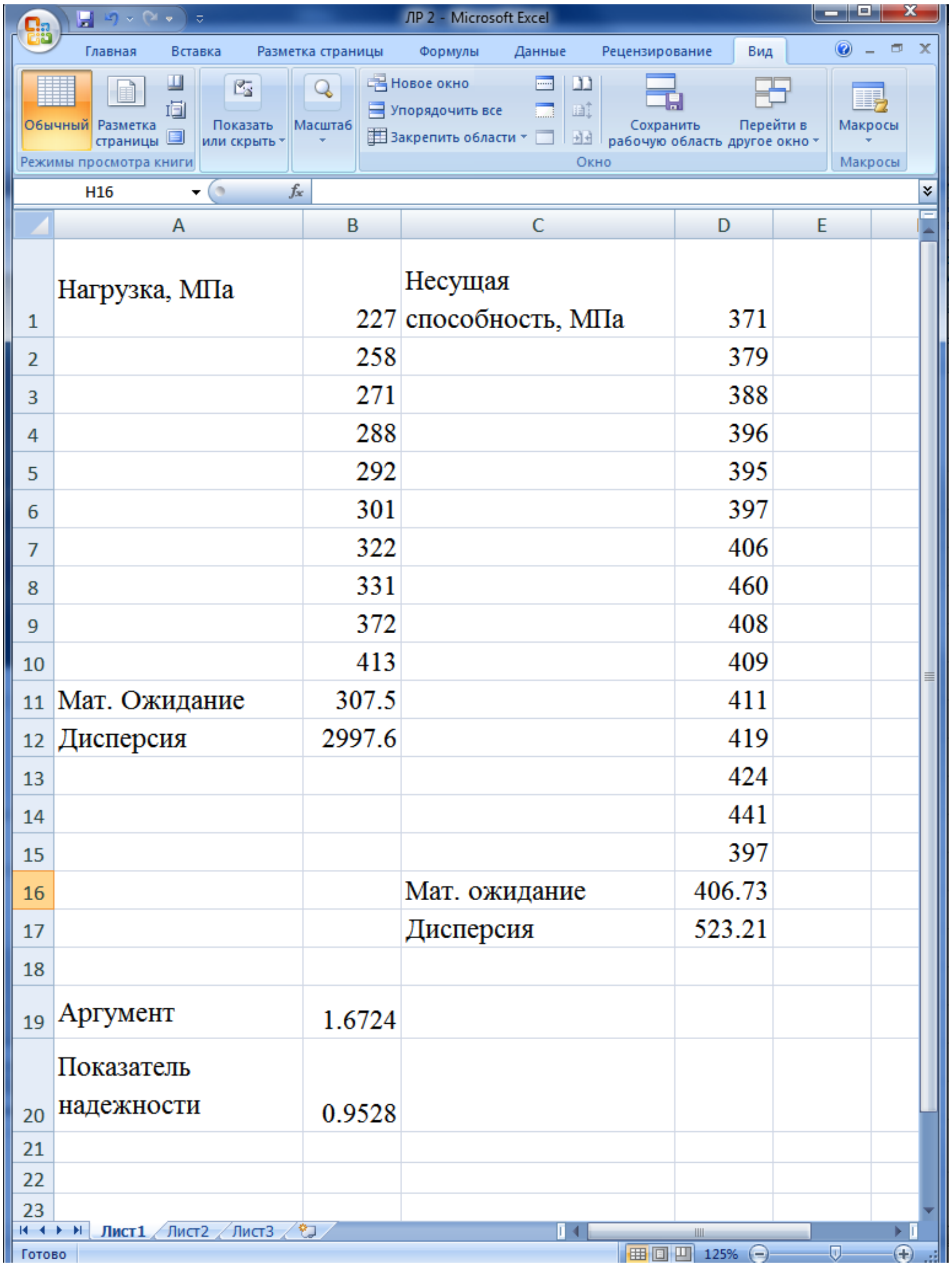
Проверим правильность выполнения работы с помощью программы Microsoft Office Excel. Расчетные формулы представлены на рисунке 24.



	A	B	C	D
1	Нагрузка, МПа	227	Несущая способность, МПа	371
2		258		379
3		271		388
4		288		396
5		292		395
6		301		397
7		322		406
8		331		460
9		372		408
10		413		409
11	Мат. Ожидание	=СРЗНАЧ(B1:B10)		411
12	Дисперсия	=ДИСП(B1:B10)		419
13				424
14				441
15				397
16			Мат. ожидание	=СРЗНАЧ(D1:D15)
17			Дисперсия	=ДИСП(D1:D15)
18				
19	Аргумент	=(D16-B11)/КОРЕНЬ((B12+D17))		
20	Показатель надежности	=НОРМСТРАСП(B19)		
21				

Рисунок 24 – Формулы для определения искомых величин в Excel

Полученные результаты представлены на рисунке 25.



	A	B	C	D
1	Нагрузка, МПа	227	Несущая способность, МПа	371
2		258		379
3		271		388
4		288		396
5		292		395
6		301		397
7		322		406
8		331		460
9		372		408
10		413		409
11	Мат. Ожидание	307.5		411
12	Дисперсия	2997.6		419
13				424
14				441
15				397
16			Мат. ожидание	406.73
17			Дисперсия	523.21
18				
19	Аргумент	1.6724		
20	Показатель надежности	0.9528		

Рисунок 25 – Результаты расчета в Excel

2.2.3 Вопросы и задания для самоконтроля

1 Запишите формулу показателя надежности элемента, если случайные величины нагрузки и прочности подчиняются нормальным законам распределения.

2 Запишите формулу показателя надежности элемента, если одна из сравниваемых величин – случайная величина, а другая – детерминированная.

3 Почему нормальный закон распределения случайных величин является наиболее распространенным в теории и практике?

4 С какой целью необходимо проверять соответствие функции распределения случайной величины какому-либо закону распределения?

5 В чем состоит суть графического метода проверки соответствия распределения случайной величины нормальному закону?

6 Запишите формулу функции плотности нормального закона распределения случайной величины.

7 Запишите формулу функцию нормального распределения случайной величины.

8 Как осуществляется нормировка случайной величины?

9 Запишите формулу математического ожидания композиционной случайной величины при нормальных законах распределения составляющих величин.

10 Запишите формулу среднего квадратического отклонения композиционной случайной величины при нормальных законах распределения составляющих величин.

3.3 Практическая работа №3. Определение доверительных интервалов

3.3.1 Задания к работе

Определить доверительные интервалы случайных величин R и N, их математических ожиданий и дисперсий в заданиях лабораторной работы №2 для доверительных вероятностей: 0,9, 0,95 и 0,99.

3.3.2 Пример выполнения

Цель работы – закрепление навыков определения случайных величин их математических ожиданий и дисперсий.

Дано: нагрузка N (кН): 227, 258, 271, 288, 292, 301, 322, 331, 372, 413; несущая способность R (кН): 371, 379, 388, 396, 395, 406, 460, 408, 409, 411, 419, 424, 441, 397.

Из лабораторной работы №2:

$$m_N == 307{,}5,\ m_R = 406{,}7,\ D_N^2 = 2997{,}61,\ D_R^2 = 523{,}21.$$

Следовательно: $D_N = 54{,}75,\ D_R = 22{,}87.$

Определим доверительные интервалы для нагрузки, ее математического ожидания и дисперсии.

Начнем с доверительного интервала нагрузки. Для доверительной вероятности 0,9:

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95.$$

По таблице нормального распределения (приложение А) находим $u_{0,95} = 1{,}645$. В соответствии с формулой (2):

$$I_{0,9} = \left(m_N - u_{0,95} \cdot D_N;\ m_N + u_{0,95} \cdot D_N\right),$$

$$I_{0,9} = \left(307{,}5 - 1{,}645 \cdot 54{,}75;\ 307{,}5 + 1{,}645 \cdot 54{,}75\right) = (217{,}44;\ 397{,}56)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,95**:**

$$I_{0,95} = \left(m_N - u_{0,975} \cdot D_N;\ m_N + u_{0,975} \cdot D_N\right),$$

$$u_{0,975} = 1{,}96,$$

$$I_{0,95}=\left(307{,}5-1{,}96\cdot 54{,}75;\, 307{,}5+1{,}96\cdot 54{,}75\right)=(200{,}19;\, 414{,}81)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,99:

$$I_{0,99}=\left(m_N-u_{0,995}\cdot D_N;\, m_N+u_{0,995}\cdot D_N\right),$$

$$u_{0,995}=2{,}576,$$

$$I_{0,99}=\left(307{,}5-2{,}576\cdot 54{,}75;\, 307{,}5+2{,}576\cdot 54{,}75\right)=(166{,}47;\, 448{,}53)\ кН.$$

Определим доверительный интервал математического ожидания нагрузки. Количество членов выборки n=10. Тогда число степеней свободы:

$$\nu=n-1=10-1=9.$$

Для доверительной вероятности 0,9 по таблице квантилей распределения Стьюдента (приложение Б) находим $t=1{,}83$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (6):

$$I_{m_N\,0,9}=\left(307{,}5-1{,}83\cdot\frac{54{,}75}{\sqrt{10}};\, 307{,}5+1{,}83\cdot\frac{54{,}75}{\sqrt{10}}\right)=(275{,}76;\, 339{,}24)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,95: $t=2{,}26$.

$$I_{m_N\,0,95}=\left(307{,}5-2{,}26\cdot\frac{54{,}75}{\sqrt{10}};\, 307{,}5+2{,}26\cdot\frac{54{,}75}{\sqrt{10}}\right)=(268{,}33;\, 346{,}67)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,99: $t=3{,}25$.

$$I_{m_N 0,99} = \left(307{,}5 - 3{,}25 \cdot \frac{54{,}75}{\sqrt{10}}; 307{,}5 + 3{,}25 \cdot \frac{54{,}75}{\sqrt{10}}\right) = (251{,}23; 363{,}77)\ кН.$$

Определим доверительный интервал дисперсии нагрузки.

Определяем вероятности α_1 и α_2 для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}9$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}9}{2} = 0{,}05,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона (приложение В) находим для числа степеней свободы, равного 9:

$$\chi_1^2 = 16{,}919 \text{ и } \chi_2^2 = 3{,}325.$$

Доверительный интервал дисперсии определим по формуле (10):

$$I_{D^2_N 0,9} = \left(\frac{2997{,}61(10-1)}{16{,}919}; \frac{2997{,}61(10-1)}{3{,}325}\right) = (1594{,}57; 8113{,}56)\ кН^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 19{,}023 \text{ и } \chi_2^2 = 2{,}7.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D^2_N 0,95} = \left(\frac{2997,61(10-1)}{19,023}; \frac{2997,61(10-1)}{2,7} \right) = (1418,22;\, 9990,6)\ \kappa H^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0,99$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,99}{2} = 0,005,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,995.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 23,589 \text{ и } \chi_2^2 = 1,735.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D^2_N 0,99} = \left(\frac{2997,61(10-1)}{23,589}; \frac{2997,61(10-1)}{1,735} \right) = (1143,67;\, 15550,17)\ \kappa H^2.$$

Определим доверительные интервалы для несущей способности, ее математического ожидания и дисперсии:

$$I_{0,9} = \left(m_R - u_{0,95} \cdot D_R;\, m_R + u_{0,95} \cdot D_R\right),$$

$$I_{0,9} = \left(406,73 - 1,645 \cdot 22,87;\, 406,73 + 1,645 \cdot 22,87\right) = (369,11;\, 444,36)\ \kappa H,$$

Для доверительной вероятности 0,95**:**

$$I_{0,95} = \left(m_R - u_{0,975} \cdot D_R;\, m_R + u_{0,975} \cdot D_R\right),$$

$$u_{0,975} = 1,96,$$

$$I_{0,95}=(406,73-1,96\cdot 22,87;\ 406,73+1,96\cdot 22,87)=(361,9;\ 451,57)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,99**:**

$$I_{0,99}=(m_R-u_{0,995}\cdot D_R;\ m_R+u_{0,995}\cdot D_R),$$

$$u_{0,995}=2,576,$$

$$I_{0,99}=(406,73-2,576\cdot 22,87;\ 406,73+2,576\cdot 22,87)=(347,81;\ 465,65)\ кН.$$

Определим доверительный интервал математического ожидания несущей способности. Количество членов выборки n=14. Тогда число степеней свободы:

$$\nu=n-1=14-1=13.$$

Для доверительной вероятности 0,9 по таблице квантилей распределения Стьюдента (приложение Б) находим $t=1,77$.

Рассчитываем доверительный интервал по формуле (6):

$$I_{m_R 0,9}=\left(406,73-1,77\cdot\frac{22,87}{\sqrt{14}};\ 406,73+1,77\cdot\frac{22,87}{\sqrt{14}}\right)=(395,91;\ 417,56)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,95: $t=2,16$.

$$I_{m_R 0,95}=\left(406,73-2,16\cdot\frac{22,87}{\sqrt{14}};\ 406,73+2,16\cdot\frac{22,87}{\sqrt{14}}\right)=(393,53;\ 419,94)\ кН.$$

Для доверительной вероятности 0,99: $t=3,01$.

$$I_{m_R 0,99} = \left(406,73 - 3,01 \cdot \frac{22,87}{\sqrt{14}};\, 406,73 + 3,01 \cdot \frac{22,87}{\sqrt{14}}\right) = (388,32;\, 425,15)\ \kappa H.$$

Определим доверительный интервал дисперсии несущей способности.

Определяем вероятности α_1 и α_2 для доверительной вероятности $\gamma = 0,9$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,9}{2} = 0,05,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона (приложение В) находим для числа степеней свободы, равного 13:

$$\chi_1^2 = 22,362 \text{ и } \chi_2^2 = 5,892.$$

Доверительный интервал дисперсии определим по формуле (10):

$$I_{D_R^2 0,9} = \left(\frac{523,21(14-1)}{22,362};\, \frac{523,21(14-1)}{5,892}\right) = (304,16;\, 1154,43)\ \kappa H^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0,95$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,95}{2} = 0,025,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 24,736 \text{ и } \chi_2^2 = 5,009.$$

Доверительный интервал дисперсии:

$$I_{D^2_{R0,95}} = \left(\frac{523{,}21(14-1)}{24{,}736}; \frac{523{,}21(14-1)}{5{,}009} \right) = (274{,}98; 1357{,}97)\ кH^2.$$

Для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}99$:

$$\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005,\ \alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}995.$$

По таблице квантилей распределения Пирсона:

$$\chi_1^2 = 29{,}819 \text{ и } \chi_2^2 = 3{,}565.$$

Доверительный интервал дисперсии несущей способности:

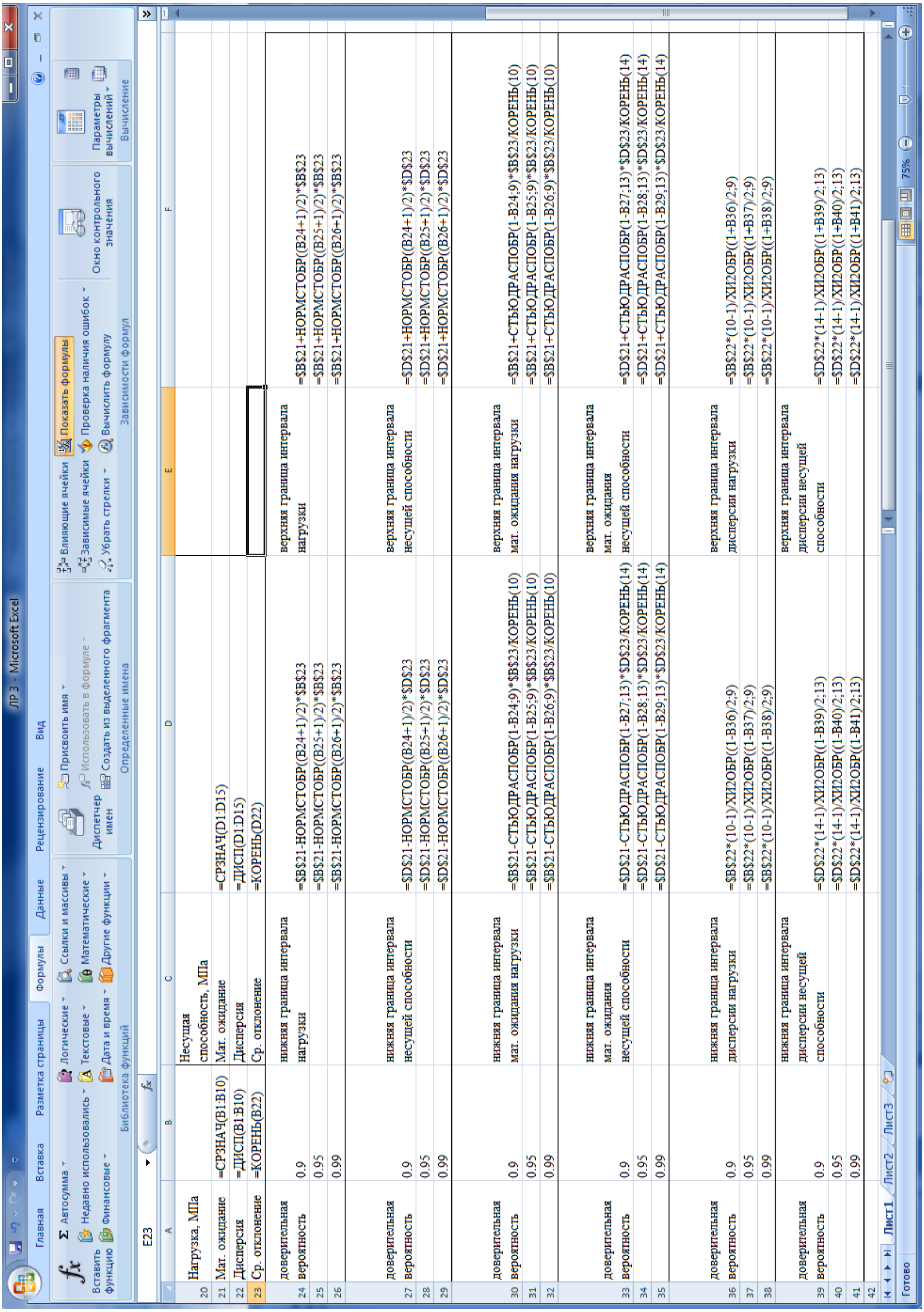
$$I_{D^2_{R0,99}} = \left(\frac{523{,}21(14-1)}{29{,}819}; \frac{523{,}21(14-1)}{3{,}565} \right) = (228{,}1; 1907{,}9)\ кH.$$

Проверим правильность выполнения работы с помощью программы Microsoft Office Excel (рисунки 26, 27).

3.3.3 Вопросы и задания для самоконтроля

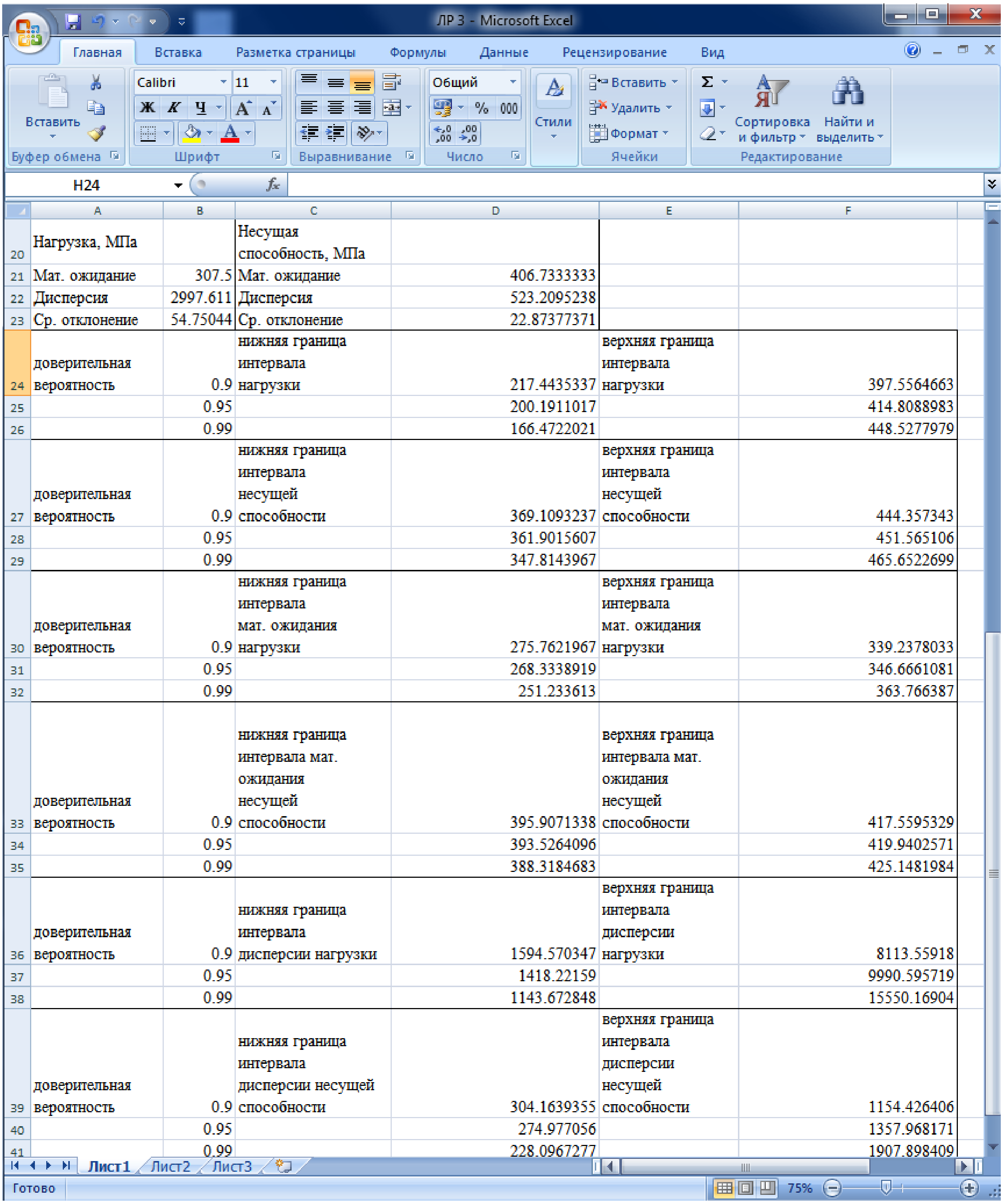
1 Запишите формулу для определения доверительных границ дисперсии.

2 Отличаются ли математическое ожидание и дисперсия случайной величины x от математического ожидания и дисперсии случайной величины m_x?



	A	B	C	D	E	F
20	Нагрузка, МПа		Несущая способность, МПа			
21	Мат. ожидание	=СРЗНАЧ(B1:B10)	Мат. ожидание	=СРЗНАЧ(D1:D15)		
22	Дисперсия	=ДИСП(B1:B10)	Дисперсия	=ДИСП(D1:D15)		
23	Ср. отклонение	=КОРЕНЬ(B22)	Ср. отклонение	=КОРЕНЬ(D22)		
24	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала нагрузки	=$B$21-НОРМСТОБР((B24+1)/2)*$B$23	верхняя граница интервала нагрузки	=$B$21+НОРМСТОБР((B24+1)/2)*$B$23
25		0.95		=$B$21-НОРМСТОБР((B25+1)/2)*$B$23		=$B$21+НОРМСТОБР((B25+1)/2)*$B$23
26		0.99		=$B$21-НОРМСТОБР((B26+1)/2)*$B$23		=$B$21+НОРМСТОБР((B26+1)/2)*$B$23
27	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала несущей способности	=$D$21-НОРМСТОБР((B24+1)/2)*$D$23	верхняя граница интервала несущей способности	=$D$21+НОРМСТОБР((B24+1)/2)*$D$23
28		0.95		=$D$21-НОРМСТОБР((B25+1)/2)*$D$23		=$D$21+НОРМСТОБР((B25+1)/2)*$D$23
29		0.99		=$D$21-НОРМСТОБР((B26+1)/2)*$D$23		=$D$21+НОРМСТОБР((B26+1)/2)*$D$23
30	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала мат. ожидания нагрузки	=$B$21-СТЬЮДРАСПОБР(1-B24;9)*$B$23/КОРЕНЬ(10)	верхняя граница интервала мат. ожидания нагрузки	=$B$21+СТЬЮДРАСПОБР(1-B24;9)*$B$23/КОРЕНЬ(10)
31		0.95		=$B$21-СТЬЮДРАСПОБР(1-B25;9)*$B$23/КОРЕНЬ(10)		=$B$21+СТЬЮДРАСПОБР(1-B25;9)*$B$23/КОРЕНЬ(10)
32		0.99		=$B$21-СТЬЮДРАСПОБР(1-B26;9)*$B$23/КОРЕНЬ(10)		=$B$21+СТЬЮДРАСПОБР(1-B26;9)*$B$23/КОРЕНЬ(10)
33	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала мат. ожидания несущей способности	=$D$21-СТЬЮДРАСПОБР(1-B27;13)*$D$23/КОРЕНЬ(14)	верхняя граница интервала мат. ожидания несущей способности	=$D$21+СТЬЮДРАСПОБР(1-B27;13)*$D$23/КОРЕНЬ(14)
34		0.95		=$D$21-СТЬЮДРАСПОБР(1-B28;13)*$D$23/КОРЕНЬ(14)		=$D$21+СТЬЮДРАСПОБР(1-B28;13)*$D$23/КОРЕНЬ(14)
35		0.99		=$D$21-СТЬЮДРАСПОБР(1-B29;13)*$D$23/КОРЕНЬ(14)		=$D$21+СТЬЮДРАСПОБР(1-B29;13)*$D$23/КОРЕНЬ(14)
36	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала дисперсии нагрузки	=$B$22*(10-1)/ХИ2ОБР((1-B36)/2;9)	верхняя граница интервала дисперсии нагрузки	=$B$22*(10-1)/ХИ2ОБР((1+B36)/2;9)
37		0.95		=$B$22*(10-1)/ХИ2ОБР((1-B37)/2;9)		=$B$22*(10-1)/ХИ2ОБР((1+B37)/2;9)
38		0.99		=$B$22*(10-1)/ХИ2ОБР((1-B38)/2;9)		=$B$22*(10-1)/ХИ2ОБР((1+B38)/2;9)
39	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала дисперсии несущей способности	=$D$22*(14-1)/ХИ2ОБР((1-B39)/2;13)	верхняя граница интервала дисперсии несущей способности	=$D$22*(14-1)/ХИ2ОБР((1+B39)/2;13)
40		0.95		=$D$22*(14-1)/ХИ2ОБР((1-B40)/2;13)		=$D$22*(14-1)/ХИ2ОБР((1+B40)/2;13)
41		0.99		=$D$22*(14-1)/ХИ2ОБР((1-B41)/2;13)		=$D$22*(14-1)/ХИ2ОБР((1+B41)/2;13)

Рисунок 26 – Формулы для определения искомых величин в Excel



	A	B	C	D	E	F
20	Нагрузка, МПа		Несущая способность, МПа			
21	Мат. ожидание	307.5	Мат. ожидание	406.7333333		
22	Дисперсия	2997.611	Дисперсия	523.2095238		
23	Ср. отклонение	54.75044	Ср. отклонение	22.87377371		
24	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала нагрузки	217.4435337	верхняя граница интервала нагрузки	397.5564663
25		0.95		200.1911017		414.8088983
26		0.99		166.4722021		448.5277979
27	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала несущей способности	369.1093237	верхняя граница интервала несущей способности	444.357343
28		0.95		361.9015607		451.565106
29		0.99		347.8143967		465.6522699
30	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала мат. ожидания нагрузки	275.7621967	верхняя граница интервала мат. ожидания нагрузки	339.2378033
31		0.95		268.3338919		346.6661081
32		0.99		251.233613		363.766387
33	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала мат. ожидания несущей способности	395.9071338	верхняя граница интервала мат. ожидания несущей способности	417.5595329
34		0.95		393.5264096		419.9402571
35		0.99		388.3184683		425.1481984
36	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала дисперсии нагрузки	1594.570347	верхняя граница интервала дисперсии нагрузки	8113.55918
37		0.95		1418.22159		9990.595719
38		0.99		1143.672848		15550.16904
39	доверительная вероятность	0.9	нижняя граница интервала дисперсии несущей способности	304.1639355	верхняя граница интервала дисперсии несущей способности	1154.426406
40		0.95		274.977056		1357.968171
41		0.99		228.0967277		1907.898409

Рисунок 27 – Результаты расчета в Excel

3 Запишите формулу для определения доверительного интервала математического ожидания.

4 Запишите формулу для определения доверительного интервала дисперсии.

5 Как можно выразить доверительный интервал в долях от среднего квадратического отклонения?

6 Запишите формулу вероятности попадания случайной величины в заданный интервал, выраженную через плотность распределения случайной величины.

7 Поясните сущность метода нахождения доверительного интервала для случайной величины.

8 Какое распределение используется при определении доверительного интервала дисперсии?

9 Какое распределение используется при определении доверительного интервала математического ожидания?

3.4 Практическая работа №4. Проверка статистических гипотез

3.4.1 Задания к работе

По выборкам, представленным в лабораторной работе №2, убедиться, что крайние члены вариационных рядов нагрузки и несущей способности принадлежат генеральным совокупностям. Также проверить гипотезы о равенстве дисперсий и средних значений нагрузки и несущей способности.

Провести проверку гипотезы о нормальном распределении выборки, представленной в лабораторной работе №1.

Проверку всех указанных гипотез рекомендуется проводить при уровне значимости 0,05.

3.4.2 Пример выполнения

Цель работы – закрепление навыков проверки статистических гипотез.

Нагрузка N (кН): 227, 258, 271, 288, 292, 301, 322, 331, 372, 413; несущая способность R (кН): 371, 379, 388, 396, 395, 406, 460, 408, 409, 411, 419, 424, 441, 397. Наработка до отказа (тыс. циклов): 312, 329, 248, 321, 418, 267, 193, 375, 358.

Вариационный ряд нагрузки N (кН): 227, 258, 271, 288, 292, 301, 322, 331, 372, 413.

Выдвигаем нулевую гипотезу, что последний член вариационного ряда нагрузки (N_{10} =413 кН) принадлежит генеральной совокупности. Назначаем уровень значимости α =0,05.

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение нагрузки:

$$m_N = \frac{\sum_{i=1}^{10} N_i}{n} = \frac{227+258+271+288+292+301+322+331+372+413}{10} = 307{,}5\ кН,$$

$$D_N^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(N_i - m_N)^2}{n-1} = \frac{6480{,}25+2450{,}25+1332{,}25+380{,}25+240{,}25}{9} +$$

$$+\frac{42{,}25+210{,}25+552{,}25+4160{,}25+11130{,}25}{9} = 2697{,}85\ кН^2,$$

$$D_N = 51{,}94\ кН.$$

Вычисляем характеристику r:

$$r = \frac{413-307{,}5}{51{,}94\sqrt{\frac{(10-1)}{10}}} = 2{,}14.$$

По таблице приложения Д находим для числа степеней свободы (10-2=8) критическое значение r_α=2,294.

Поскольку r = 2,14 < $r_\alpha = 2{,}294$, то нулевая гипотеза принимается, и последний член ряда нагрузки не является промахом.

Выдвигаем нулевую гипотезу, что первый член вариационного ряда нагрузки ($N_1 = 227$ кН) принадлежит генеральной совокупности.

Вычисляем характеристику *r*:

$$r = \frac{307{,}5 - 227}{51{,}94\sqrt{\frac{(10-1)}{10}}} = 1{,}63.$$

Поскольку r = 1,63 < r = 2,294 , то гипотеза принимается, и первый член ряда нагрузки не является промахом.

Вариационный ряд несущей способности *R* (кН): 371, 379, 388, 395, 396, 397, 406, 408, 409, 411, 419, 424, 441, 460.

Выдвигаем нулевую гипотезу, что последний член вариационного ряда несущей способности ($R_{14} = 460$ кН) принадлежит генеральной совокупности. Назначаем уровень значимости α =0,05. Вычисляем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$m_R = \frac{\sum_{i=1}^{14} R_i}{n} = \frac{371 + 379 + 388 + 396 + 395 + 397 + 406 + 460 + 408 + 409}{14} +$$

$$+ \frac{411 + 419 + 424 + 441 + 397}{14} = 407{,}4\ \kappa H,$$

$$D_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{14} (R_i - m_R)^2}{n-1} = \frac{1324{,}96 + 806{,}56 + 379{,}36 + 129{,}96 + 153{,}76 + 1{,}96 + 0{,}36 + 2{,}56}{13} +$$

$$+ \frac{12{,}96 + 134{,}56 + 275{,}56 + 1128{,}96 + 2766{,}76 + 108{,}16}{13} = 555{,}88\ \kappa H^2,$$

$$D_R = 23{,}58\ \kappa H.$$

Вычисляем характеристику *r*:

$$r = \frac{460 - 407{,}4}{23{,}58\sqrt{\frac{(14-1)}{14}}} = 2{,}32.$$

По таблице приложения Д находим для числа степеней свободы (14-2=12) критическое значение r = 2,461.

Поскольку r = 2,32 < r = 2,461 , то нулевая гипотеза принимается, и последний член ряда несущей способности не является промахом.

Выдвигаем нулевую гипотезу, что первый член вариационного ряда несущей способности ($N_1 = 371$ кН) принадлежит генеральной совокупности.

Вычисляем характеристику r:

$$r = \frac{407{,}4 - 371}{23{,}58\sqrt{\frac{(14-1)}{14}}} = 1{,}61.$$

Поскольку r = 1,61 < r = 2,461, то гипотеза принимается, и первый член ряда нагрузки не является промахом.

Выдвинем гипотезу о равенстве дисперсий двух имеющихся выборок H_0: $D_R^2 = D_N^2$, назначаем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Вычисляем статистику F:

$$F = \frac{2697{,}85}{555{,}88} = 4{,}85.$$

По таблице приложения В для α=0,05 и чисел степеней свободы $\nu_1 = 10 - 1 = 9$ и $\nu_2 = 14 - 1 = 13$ находим для ν_2=10 $F_{0,05}$=3,02, для ν_2=20 $F_{0,05}$=2,39, следовательно, для ν_2=13:

$$F_{0,05} = 3{,}02 - \frac{3{,}02 - 2{,}39}{10} \cdot 3 = 2{,}83.$$

Поскольку F = 4,85 > $F_{0,05}$ = 2,83, то гипотеза H_0 отвергается; значения, полученные по выборкам, противоречат утверждению о статистическом равенстве дисперсий.

Проверим гипотезу: значимо ли отличаются средние значения двух выборок при уровне значимости 0,05.

Определяем статистику Стьюдента:

$$t = \frac{407{,}4 - 307{,}5}{\sqrt{\dfrac{(10-1)\cdot 2697{,}85 + (14-1)\cdot 555{,}88}{10+14-2}}} \cdot \sqrt{\frac{10\cdot 14}{10+14}} = 7{,}03.$$

Критическое значение t_α при α = 0,05 и числе степеней свободы ν = 22 находим из таблицы (приложение Г) для ν = 20 $t_{0,05}$=2,086; для ν = 25 $t_{0,05}$= 2,06; следовательно, для $\nu = 22$:

$$t_{0,05} = 2{,}086 - \frac{2{,}086 - 2{,}06}{5} \cdot 2 = 2{,}076\,.$$

Так как t = 7,03 > 2,076 = $t_{0,05}$, то делаем вывод, что средние значения выборок отличаются значимо.

Дан вариационный ряд наработки до отказа (тыс. циклов): 193, 248, 267, 312, 321, 329, 358, 375, 418.

Требуется проверить гипотезу о соответствии этой выборки нормальному закону распределения.

Выбираем уровень значимости 0,05. Рассчитываем математическое ожидание и дисперсию:

$$m_t = \frac{\sum_{i=1}^{9} t_i}{n} = \frac{193 + 248 + 267 + 312 + 321 + 329 + 358 + 375 + 418}{9} =$$
$$= 313{,}4 \textit{ тыс. циклов},$$

$$D_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} (t_i - m_t)^2}{n-1} = \frac{14506{,}85 + 4282{,}97 + 2157{,}08 + 2{,}09 + 57{,}09}{8} +$$
$$+ \frac{241{,}98 + 1985{,}2 + 3789{,}09 + 10931{,}87}{8} = 4744{,}28 \textit{ тыс. циклов}^2;$$

$$D_t = 68{,}88 \textit{ тыс. циклов.}$$

По таблице нормального распределения (приложение А) находим теоретические значения функции распределения:

$$\varPhi\left(\frac{193 - 313{,}4}{68{,}88}\right) = \varPhi(-1{,}75) = 0{,}04006,$$

$$\varPhi\left(\frac{248 - 313{,}4}{68{,}88}\right) = \varPhi(-0{,}95) = 0{,}1711,$$

$$\varPhi\left(\frac{267 - 313{,}4}{68{,}88}\right) = \varPhi(-0{,}67) = 0{,}2514,$$

$$\varPhi\left(\frac{312 - 313{,}4}{68{,}88}\right) = \varPhi(-0{,}02) = 0{,}492,$$

$$\varPhi\left(\frac{321 - 313{,}4}{68{,}88}\right) = \varPhi(0{,}11) = 0{,}5438,$$

$$\varPhi\left(\frac{329-313{,}4}{68{,}88}\right)=\varPhi(0{,}23)=0{,}591,$$

$$\varPhi\left(\frac{358-313{,}4}{68{,}88}\right)=\varPhi(0{,}65)=0{,}7422,$$

$$\varPhi\left(\frac{375-313{,}4}{68{,}88}\right)=\varPhi(0{,}89)=0{,}8133,$$

$$\varPhi\left(\frac{418-313{,}4}{68{,}88}\right)=\varPhi(1{,}52)=0{,}93574.$$

По формуле (2.45):

$$u=\frac{1}{12\cdot 9}+\left[0{,}04006-\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 9}\right]^2+\left[0{,}1711-\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 9}\right]^2+\left[0{,}2514-\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 9}\right]^2+$$
$$+\left[0{,}492-\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 9}\right]^2+\left[0{,}5438-\frac{2\cdot 5-1}{2\cdot 9}\right]^2+\left[0{,}591-\frac{2\cdot 6-1}{2\cdot 9}\right]^2+\left[0{,}7422-\frac{2\cdot 7-1}{2\cdot 9}\right]^2+$$
$$+\left[0{,}8133-\frac{2\cdot 8-1}{2\cdot 9}\right]^2+\left[0{,}93574-\frac{2\cdot 9-1}{2\cdot 9}\right]^2=0{,}00926+0{,}00024+0{,}00002+0{,}0007+$$
$$+0{,}01063+0{,}00192+0{,}0004+0{,}0004+0{,}0004+0{,}00008=0{,}02405.$$

В таблице 8 находим $u_{0,05}=0{,}461$.

Поскольку u=0,02405 < $u_{0,05}$ = 0,461, то принимается нулевая гипотеза о том, что выборка не противоречит нормальному закону распределения с вероятностью 95 %.

3.4.3 Вопросы и задания для самоконтроля

1 Что такое уровень значимости?

2 Что такое ошибка первого и ошибка второго рода?

3 Что будет происходить с ошибкой второго рода при уменьшении уровня значимости?

4 Что такое односторонние и двухсторонние ограничения критических статистик?

5 Перечислите критические статистики.

6 Приведите алгоритм проверки статистических гипотез.

7 С какой целью делается проверка гипотезы о резко выделяющихся членах выборки?

8 С какой целью производится проверка гипотез о законе распределения?

9 Для каких типов выборок применяются критерии Н.В. Смирнова и Пирсона?

10 С какой целью производится проверка гипотезы о равенстве двух средних значений и с помощью какого критерия?

11 Что такое нулевая и альтернативная гипотезы?

12 Что такое статистический критерий?

Список использованных источников

1 ГОСТ 27.002 - 2015. Надежность в технике. Термины и определения. – Введ. 2017–03–01. – М.: Стандартинформ, 2016. – 23 с.

2 Куренков, В.И. Надежность изделий и систем ракетно-космической техники: лабораторный практикум / В.И. Куренков, В.В. Волоцуев. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2010. – 116 с.

3 Ефремов, И.В. Надежность технических систем и техногенный риск: учебное пособие / И.В. Ефремов, Н.Н. Рахимова. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 163 с.

4 Зорин, В.А. Надежность механических систем: учебник / В.А. Зорин. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 380 с.

5 Половко, А.М. Основы теории надежности. Практикум: учебное пособие для вузов / А.М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БВХ-Петербург, 2006. – 560 с.

6 Куренков, В.И. Надежность изделий и систем ракетно-космической техники: курс лекций / В.И. Куренков, В.В. Волоцуев. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2010. – 55 с.

7 ГОСТ Р ИСО 5479 - 2002. Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения – Введ. 2002–01–22. – М.: Издательство стандартов, 2002. – 25 с.

Приложение А
(обязательное)

Квантили функции нормального распределения Ф(*x*)

Таблица А.1– Значения функции нормального распределения

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	8124	8169
2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	$0,9_2$	1802	2024	2240	2451	2656	2857	3053	3244	3431	3613
2,5	$0,9_2$	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2.6	$0,9_2$	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	$0,9_2$	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	$0,9_2$	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	$0,9_2$	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	$0,9_2$	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999

Продолжение таблицы А.1

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	$0,9_3$	0324	0646	0957	1260	1553	1836	2102	2378	2636	2886
3,2	0.9_3	3129	3363	3590	3810	4024	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	$0,9_3$	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6376	6505
3,4	$0,9_3$	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	$0,9_3$	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	$0,9_3$	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	$0,9_3$	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	$0,9_4$	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	$0,9_4$	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	$0,9_4$	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843
4,1	$0,9_4$	7934	8022	8106	8186	8264	8338	8409	8477	8542	8605
4.2	$0,9_4$	8665	8723	8778	8832	8882	8931	8978	9023	9066	9107
4,3	$0,9_5$	1460	1837	2198	2544	2876	3193	3497	3788	4066	4332
4,4	$0,9_5$	4588	4832	5065	5288	5502	5706	5902	6089	6268	6439
4,5	$0,9_5$	6602	6759	6908	7051	7187	7318	7442	7561	7675	7784
4,6	$0,9_5$	7888	7987	8081	8172	8258	8340	8419	8494	8566	8634
4,7	$0,9_5$	8699	8761	8821	8877	8931	8983	9032	9079	9124	9166
4,8	$0,9_6$	2067	2454	2822	3173	3508	3827	4131	4420	4696	4958
4,9	$0,9_6$	5208	5446	5673	5888	6094	6289	6475	6652	6821	6981
5,0	$0,9_6$	7134	7278	7416	7548	7672	7791	7904	8011	8113	8210
5,1	$0,9_6$	8302	8389	8472	8551	8626	8698	8765	8830	8891	8949
5,2	$0,9_7$	004	056	105	152	197	240	280	318	354	388
5,3	$0,9_7$	421	452	481	509	539	560	584	606	628	648
5,4	$0,9_7$	667	685	702	718	734	748	762	775	787	799
5,5	$0,9_7$	810	821	831	840	849	857	865	873	880	886
5,6	$0,9_7$	893	899	905	910	915	920	924	929	933	936
5,7	$0,9_8$	40	44	47	50	53	55	58	60	63	65
5,8	$0,9_8$	67	69	71	72	74	75	77	78	79	81
5,9	$0,9_8$	82	83	81	85	86	87	87	88	89	90

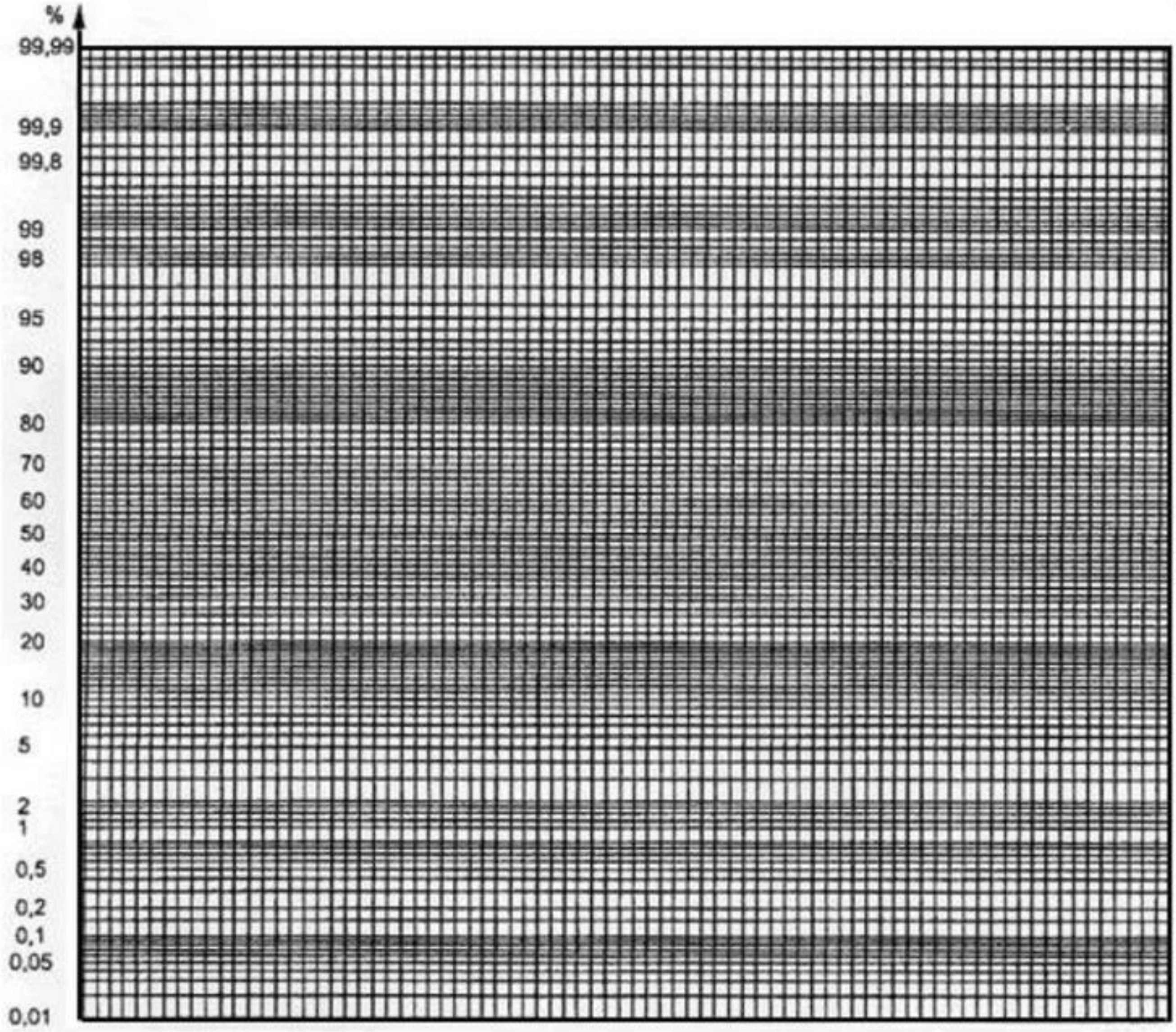
Примечания

1 Для отрицательных значений аргумента $F(-x) = 1 - F(x)$.

2 Индекс у цифры 9 означает ее повторение, например, при x = 3,95 имеем $F(x)$=$0,9_4$6092=0,99996092.

Приложение Б
(обязательное)

Бланк бумаги для нормальных вероятностных графиков



Приложение В
(обязательное)

Квантили функции распределения Стьюдента

Таблица В.1 – Значения квантилей функции распределения Стьюдента

Число степеней свободы v	Вероятность γ											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,16	0,32	0,51	0,73	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	14	29	44	62	0,82	06	34	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	14	28	42	58	76	0,98	25	64	35	3,18	4,54	5,84
4	13	27	41	57	74	94	19	53	13	2,78	3,75	4,60
5	13	27	41	56	73	92	16	48	01	57	36	03
6	0,13	0,26	0,40	0,55	1,72	1,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	13	26	40	55	71	90	12	41	89	36	00	50
8	13	26	40	55	70	89	11	40	86	31	2,90	35
9	13	26	40	54	70	88	10	38	83	26	82	25
10	13	26	40	54	70	88	09	37	81	23	76	17
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	13	26	39	54	69	87	08	36	78	18	68	05
13	13	26	39	54	69	87	08	35	77	16	65	01
14	13	26	39	54	69	87	08	34	76	14	62	2,98
15	13	26	39	54	69	87	07	34	75	13	60	95
16	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	13	26	39	53	69	86	07	33	74	11	57	90
18	13	26	39	53	69	86	07	33	73	10	55	88
19	13	26	39	53	69	86	07	33	73	09	54	86
20	13	26	39	53	69	86	06	32	72	09	53	84
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	13	26	39	53	69	86	06	32	72	07	51	82
23	13	26	39	53	68	86	06	32	71	07	50	81
24	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	49	80
25	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	48	79
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	77
28	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	76
29	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	76
30	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	75
40	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	13	25	39	53	68	85	05	30	67	00	39	66
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,84	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	13	25	38	52	67	84	04	28	64	96	33	58

Приложение Г
(обязательное)

Квантили функции распределения Пирсона

Таблица Г.1 – Значения квантилей функции распределения Пирсона

$\nu = n - 1$	α					
	0,995	0,975	0,95	0,05	0,025	0,005
1	0,000	0,001	0,004	3,841	50,24	7,879
2	0,010	0,051	0,103	5,991	7,378	10,597
3	0,0717	0,216	0,352	7,815	9,348	12,838
4	0,207	0,484	0,711	9,488	11,143	14,860
5	0,412	0,831	1,145	11,070	12,832	16,750
6	0,676	1,237	1,635	12,592	14,449	18,548
7	0,989	1,690	2,167	14,067	13,013	20,278
8	1,344	2,180	2,733	15,507	17,535	21,955
9	1,735	2,700	3,325	16,919	19,023	23,589
10	2,156	3,247	3,940	18,307	20,483	25,188
11	2,603	3,816	4,575	19,675	21,920	26,757
12	3,074	4,404	5,226	21,026	23,336	28,300
13	3,565	5,009	5,892	22,362	24,736	29,819
14	4,075	5,629	6,571	23,685	26,119	31,319
15	4,601	6,262	7,261	24,996	27,448	32,801
16	5,142	6,908	7,962	26,296	28,845	34,267
17	5,697	7,564	8,762	27,587	30,191	35,718
18	6,265	8,231	9,930	28,869	31,526	37,156
19	6,844	8,907	10,117	30,144	32,852	38,582
20	7,434	9,591	10,851	31,410	34,170	39,997
21	8,034	10,283	11,591	32,671	35,479	41,401
22	8,643	10,982	12,338	33,924	36,781	42,796
23	9,260	11,688	13,091	35,172	38,076	44,181
24	9,886	12,401	13,848	36,415	39,364	45,558
25	10,520	13,120	14,611	37,652	40,646	46,928
26	11,160	13,844	15,379	38,885	41,923	48,920
27	11,808	14,573	16,151	40,113	43,194	49,645
28	12,461	15,308	16,928	41,337	44,461	50,993
29	13,121	16,047	17,708	42,557	45,722	52,336
30	13,787	16,791	18,493	43,773	46,979	53,672

Приложение Д
(обязательное)

Значения статистики Фишера

Таблица Д .1– Значения статистики $F_{0,05}$

ν_2	ν_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	252	253	254
2	18,51	19,00	19,10	19,25	19,30	19,33	19,35	19,17	19,38	19,39	19,44	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,58	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,70	5,66	5,63
5	6,01	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,44	4,41	4,36
7	5,59	4,74	4,35	4,13	3,97	3,89	3,79	3,67	3,64	3,64	3.44	3,32	3,27	3,23
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,64	2,59	2,54
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	1,97	1,91	1,84
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2.29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,78	1,60	1,52	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,68	1,48	1,39	1,28
	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,57	1,35	1,24	1,0

Примечание – Степень свободы выборки с большей дисперсией – ν_1, степень свободы выборки с меньшей дисперсией – ν_2.

Приложение Е
(обязательное)

Значения r-статистики

Таблица Е.1 – Значения r-статистики

Число степеней свободы	α			
	0,10	0,05	0,025	0,01
1	1,406	1,414	1,414	1,414
2	1,645	1,689	1,710	1,723
3	1,791	1,869	1,917	1,955
4	1,894	1,996	2,067	2,130
5	1,974	2,093	2,182	2,265
6	2,041	2,172	2,273	2,374
7	2,097	2,237	2,349	2,464
8	2,146	2,294	2,414	2,540
9	2,190	2,343	2,470	2,606
10	2,229	2,387	2,519	2,663
11	2,264	2,426	2,562	2,714
12	2,297	2,461	2,602	2,759
13	2,326	2,493	2,638	2,800
14	2,354	2,523	2,670	2,837
15	2,380	2,551	2,701	2,871
16	2,404	2,577	2,728	2,903
17	2,426	2,600	2,754	2,932
18	2,447	2,623	2,778	2,959
19	2,467	2,644	2,801	2,984
20	2,486	2,664	2,823	3,008
21	2,504	2,683	2,843	3,030
22	2,520	2,701	2,862	3,051
23	2,537	2.717	2.880	3,071